

SYSTEMES DE REFERENCES - SYSTEMES PROJECTIFS

Communication Présentée au Colloque national sur la
localisation en mer - Brest - 1 au 5 octobre 1979

Henri Marcel Dufour, Ingénieur Général Géographe

Avec le concours de

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Ingénieur Général
Géographe

VERSION NUMÉRIQUE, MAI 2019

abenhadjsalem@gmail.com

Table des matières

1	Position du Problème	3
2	Méthodes à Partir des Coordonnées Géographiques	6
3	Méthode à Partir des Coordonnées Trirectangulaires	7
4	Utilisation des Représentations Planes (Conformes)	9
A	Principes d'un logiciel des systèmes de référence	13
A.1	Les coordonnées de base	13
A.2	Relation Fondamentale	13
B	Formule théorique en représentation plane de changement de réfé- rence	16
B.1	Méthode empirique	16
B.2	Méthode théorique (ou plutôt semi-empirique)	17
C	Systèmes projectifs	19
C.1	Mercator sur la sphère (O, a)	20
C.2	Mercators obliques, transverses	20
C.3	La représentation plane stéréographique	23

VUE L'INTÉRÊT DE L'ARTICLE DE MONSIEUR DUFOUR, NOUS AVONS ÉDITÉ CETTE VERSION NUMÉRIQUE AVEC DES COMMENTAIRES APPORTÉS À LA VERSION ORIGINALE. J'AI EU LE PLAISIR DE TRAVAILLER AVEC L'INGÉNIEUR GÉOGRAPHE GÉNÉRAL H.M. DUFOUR LORS DE LA RÉALISATION DE MON MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME D'INGÉNIEUR DE L'ECOLE NATIONALE DES SCIENCES GÉOGRAPHIQUES EN 1981. AINSI, JE DÉDIE CETTE PUBLICATION NUMÉRIQUE À MONSIEUR H.M. DUFOUR.

SYSTEMES DE REFERENCES - SYSTEMES PROJECTIFS ¹

Résumé

De nombreux travaux géodésiques existent actuellement à la surface du globe, qui se sont développés par réseaux régionaux, ayant en général chacun un point fondamental, où les données astronomiques (φ , *latitude*, λ , *longitude*, Az , *azimut*) d'une référence sont confondues avec les données géodésiques homologues.

La comparaison de 2 réseaux, et, de proche en proche, de tous les réseaux connectables, peut se faire par l'analyse des coordonnées de leurs points communs.

A cette fin, on peut se servir de 3 types de coordonnées :

- Coordonnées géographiques= méthode simple, mais pas très commode pour des ellipsoïdes différents.
- Coordonnées cartésiennes tridimensionnelles, méthode la plus rigoureuse dans le cas où l'on a apporté la correction dite de géoïde.
- Les coordonnées en représentation conforme plane.

Une analyse des principales formules utilisables est faite par l'auteur dans cet article.

Abstract

Many geodetic works currently exist on the surface of the globe, which have developed through regional networks, usually each having a fundamental point, where the astronomical data (φ = latitude, λ = longitude, Az = azimuth) of a reference are confused with the counterparts geodetic data.

The comparison of 2 networks, and, step by step, of all the connectable networks, can be done by the analysis of the coordinates of their common points.

To this end, we can use 3 types of coordinates :

- Geographical coordinates = simple method, but not very convenient for different ellipsoids.
- Three-dimensional cartesian coordinates, the most rigorous method in the case where the so-called geoid correction has been made.
- Coordinates in conformal projection.

An analysis of the main formulas that can be used is studied by the author in this article.

1. **Henri Marcel Dufour**, Ingénieur Général Géographe honoraire, IGN, 2 Avenue Pasteur, 94160 Saint-Mandé, France.

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Ingénieur Géographe Général, 6 rue du Nil, Cité Soliman Er-Riadh, 8020 Soliman , Tunisie.

Systèmes de Références - Systèmes Projectifs

Introduction

Il existe actuellement, à la surface de la Terre, de nombreux systèmes géodésiques "régionaux" chacun étant calculé (en général) à partir d'un point fondamental A_0 sur un ellipsoïde de référence (E) centré en un point ω .

L'ensemble (A_0, E) constitue un système local de référence, et les coordonnées géodésiques qui en sont l'expression sont fournies classiquement :

a) En coordonnées géographiques :

$\varphi = \textit{latitude}$;

$\lambda = \textit{longitude}$.

b) En altitude :

$Hn = \textit{altitude au-dessus du géoïde, ou altitude normale}$.

$He = \textit{altitude au-dessus de l'ellipsoïde}$.

c) En coordonnées bi-rectangulaires sur une "représentation plane" déterminée : pour une zone peu étendue, on emploie 1 seule représentation plane ; pour une zone étendue, on est amené à se définir un ensemble de représentations planes ou **système projectif**.

d) En coordonnées cartésiennes terrestres (X, Y, Z) , rapportées au point ω , centre de l'ellipsoïde (E), qui est une estimation plus ou moins bonne du centre d'inertie G des masses terrestres.

(On retrouvera ci-après les formules de passage $\varphi, \lambda, He \rightarrow XYZ$ et une définition plus précise du trièdre cartésien terrestre).

En règle habituelle :

a) Un point fondamental est un point où l'on a confondu les éléments astronomiques $(\varphi', \lambda', Az')$ avec les éléments géodésiques.

$$\begin{cases} \varphi_G = \varphi' \text{ (latitude)} \\ \lambda_G = \lambda' \text{ (longitude)} \\ Az_G = Az' \text{ (azimut d'une direction terrestre)} \end{cases} \quad (1)$$

Cette règle peut n'être pas absolue : de manière plus générale, la règle pratique consiste à choisir en même temps l'ellipsoïde (E) et la déviation de la verticale au point fondamental (déviation qui peut donc ne pas être nulle), de sorte que l'ensemble des verticales géodésiques du système soit "aussi proche que possible" de l'ensemble des verticales astronomiques.

Les orientations astronomiques ne se font généralement pas au seul point fondamental, mais plutôt en divers points du réseau (azimuts de Laplace).

b) Le système projectif n'est pas forcément lié au système géodésique. On peut en effet parfaitement le définir indépendamment, mais c'est un fait qu'il lui est très souvent associé dans la pratique.

Exemple :

Réseau Français Nouvelle Triangulation (NT) :

- Point fondamental PANTHEON.
- ellipsoïde : Clarke 1880 français.
- Système projectif : Lambert I,II,III,IV.
- Coordonnées géographiques : grades, Paris.

Système EUROPE 50 :

- Point fondamental : POTSDAM (avec une déviation de verticale non nulle).
- ellipsoïde International.
- Système projectif : UTM sur ellipsoïde International 1924.
- Coordonnées géographiques : degrés, Greenwich.

Dans les problèmes de localisation qui se posent à l'ingénieur, ce dernier ne connaît les divers systèmes géodésiques que par des coordonnées, la plupart du temps en représentation plane. Supposant connues les représentation planes (formules, constantes, ellipsoïdes), il peut remonter aux coordonnées géographiques et trirectangulaires et trouver les "constantes" de passage d'un système à l'autre en se servant des points communs à 2 ou plusieurs systèmes : C'est la seule voie praticable² et l'article ci-après a pour but de donner le résultat d'une certaine expérience, avec les formulations appropriées.

Nous diviserons l'exposé en 4 parties :

- 1. position du problème,
- 2. comparaisons à partir des coordonnées géographiques,
- 3. comparaisons à partir des coordonnées trirectangulaires,
- 4. comparaisons à partir des représentation planes conformes.

1 Position du Problème

Il est bon préalablement de préciser l'intérêt que présente l'utilisation des référentiels géodésiques locaux (ou régionaux) en dépit des difficultés que posent les problèmes d'interconnexion de ces référentiels :

- chaque point M rattaché au solide Terre possède des coordonnées cartésiennes centrées : (X_G, Y_G, Z_G) , avec :

G = centre d'inertie des masses,

GZ = axe de rotation,

XGZ = méridien de Greenwich³.

2. La voie la seule rigoureuse consiste à revenir aux observations et refaire des calculs de compensation "de novo". Mais on peut trouver les coordonnées de points, et rarement les observations qui les ont générées.

3. Tout système local $(\omega X, \omega Y, \omega Z)$ est parallèle au système centré (GX, GY, GZ) .

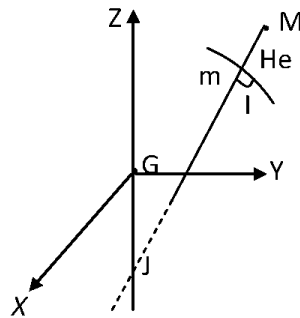


Fig. 1: Le Repère Cartésien

La définition précise de ces origines ne sera pas donnée ici pour 2 raisons :

- parce qu'elle introduit des termes de corrections faibles,
- parce qu'elle est la même pour 2 systèmes voisins à comparer.

Une bonne approximation de (GX, GY, GZ) nous est donnée par exemple par une détermination précise Doppler sur satellites Transit, à partir d'une éphéméride précise (NWL 9-D).

Actuellement le GNSS sur satellites GPS, à partir d'une éphéméride précise (WGS84).

- On peut passer de (GX, GY, GZ) à des coordonnées ellipsoïdales par l'inversion des formules suivantes :

$$\begin{cases} X_G = (N + He)\cos\varphi\cos\lambda \\ Y_G = (N + He)\cos\varphi\sin\lambda \\ Z_G = (N(1 - e^2) + He)\sin\varphi \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \text{longitude} \\ \varphi = \text{latitude} \\ He = \text{altitude ellipsoïdique} \end{cases} \quad (2)$$

N = grande normale (IJ); e la première excentricité.

On peut prendre pour (E) un ellipsoïde récent de meilleure détermination du globe terrestre, par exemple l'ellipsoïde de 1967⁴ :

$$\begin{cases} a = 6\,378\,160 \text{ m} \\ \alpha = \frac{a - b}{a} = 1/298.25\dots \end{cases} \quad (3)$$

4. Valeur plus récente 6 378 140. m, mais les variations possibles du grand-axe a sont désormais faibles devant les ondulations du géoïde ($\approx 100 \text{ m}$)

Actuellement c'est l'ellipsoïde (GRS80) ^a :

$$\begin{cases} a = 6\,378\,137 \text{ m} \\ \alpha = \frac{a-b}{a} = 1/298.257\,222\,101 \end{cases} \quad (4)$$

^a. Déterminée par l'AIG (Association Internationale de Géodésie), en 1980.

Les résultats fondamentaux sont les suivants :

- Entre les coordonnées (φ, λ) "idéales" que nous venons de définir (par une détermination Doppler (GPS) et un ellipsoïde (E) de meilleure approximation) et les autres coordonnées que l'on peut utiliser :

$$\begin{cases} \varphi', \lambda' : \text{astronomiques} \\ \varphi_G, \lambda_G : \text{géodésiques régionales} \end{cases}$$

Il peut exister des différences qui correspondent à des écarts en distance de l'ordre de 400 m (ordre de grandeur) alors que la cohésion interne à l'intérieur d'un même système géodésique est en règle générale meilleure que 10 m.

- la coordonnée He , altitude au-dessus de l'ellipsoïde, est à rapprocher de l'altitude normale Hn , dérivée d'un nivellement de précision.

$$\begin{cases} C(M) = \int_O^M g dH \\ Hn = \frac{C(M)}{\gamma_m} \end{cases} \quad \begin{cases} g = \text{accélération vraie de la pesanteur} \\ O = \text{point au niveau moyen des mers} \\ dH = \text{dénivelées mesurées (par portées)} \\ C(M) = \text{côte géopotentielle} \\ \gamma_m = \text{accélération théorique, dans un modèle} \\ \text{de référence, à l'altitude } Hn/2 \end{cases} \quad (5)$$

La côte géopotentielle $C(M)$ est reliée au potentiel $W(M)$ par la relation :

$$W(M) = W(O) - C(M)$$

Disons, sans insister davantage, que $C(M)$ est mesurable, qu'il représente le travail (indépendant du chemin parcouru) dépensé contre la pesanteur pour passer de O (point origine du nivellement, au niveau moyen de la mer) au point M .

Hn , dite altitude normale, est adoptée comme altitude topographique classique. C'est en fait une grandeur conventionnelle (car elle dépend du modèle γ utilisé).

La différence entre He et Hn se manifeste par les déviations de verticales : différences entre normale à l'ellipsoïde et normale au géoïde. L'intégration de ces déviations permet d'accéder aux cartes de géoïdes :

$$dH = He - Hn \quad (6)$$

qui existent pour divers systèmes géodésiques à des précisions largement subdécamétriques.

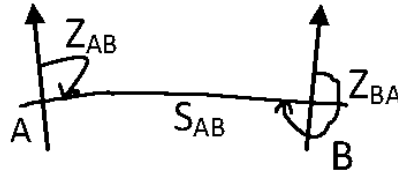


Fig. 2: La ligne Géodésique

2 Méthodes à Partir des Coordonnées Géographiques

En géodésie classique (disons jusque vers 1960, tous les raisonnements sont pratiquement faits à 2 dimensions :

- He et Hn sont assimilés l'un à l'autre.

Par le choix soigné du point fondamental et de l'ellipsoïde de calcul, cette assimilation n'apporte pas une perturbation trop grave sur les calculs à 2 dimensions. Toutefois une répercussion non négligeable apparaît sur les distances, qui doivent normalement être réduites à l'ellipsoïde (par He) et non au géoïde (par Hn).

- A deux dimensions, on fait l'hypothèse de la conservation des éléments fondamentaux de deux grandes géodésiques homologues.

$$\begin{cases} S_{AB} \text{ invariant} = \text{conservation des distances sur l'ellipsoïde} \\ Z_{AB} - (\lambda_A - \lambda_0) \sin \varphi_0 = Az_{Laplace} = \text{invariant} \end{cases} \quad (7)$$

((φ_0, λ_0) sont des latitudes et longitudes approchées du point A , arbitraires mais fixes)⁵.

- Une méthode plus simple, et parfois suffisante, consiste à réaliser les abaques de passage du système (1) au système (2) :

$$\begin{cases} \lambda_2 - \lambda_1 = f(\varphi, \lambda) \\ \varphi_2 - \varphi_1 = g(\varphi, \lambda) \end{cases} \quad (8)$$

On peut naturellement numériser ces abaques, et leur enlever leur partie systématique (qui peut d'ailleurs être déterminée en se servant du principe de conservation des grandes géodésiques), mais c'est un fait que les abaques (8) ne se réduisent pas (sauf exception) à une translation dans le cas de 2 réseaux "idéaux", c'est-à-dire 2 réseaux comportant les mêmes observations calculées de façon "parfaite" mais dans 2 systèmes géodésiques différents.

5. Il y aurait lieu d'écrire aussi l'invariance de l'azimut de Laplace au point B.

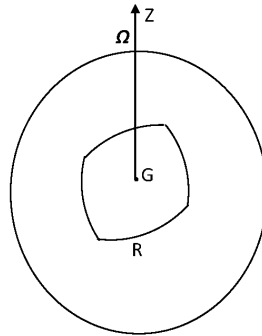


Fig. 3: Sphère

Commentaires

a) La méthode par (φ, λ) reste toujours valable. Elle introduit des calculs de grandes géodésiques (problèmes directs et inverses) qui sont parfaitement réalisables sur les calculateurs modernes. Toutefois :

b) Sous la forme la plus immédiate, elle conduit à reporter sur le réseau $R2$, par distance et azimuts de Laplace, les grandes géodésiques calculées sur $R1$: c'est le report azimutal, qui donne une solution unique.

c) Une autre solution apparaît, si on considère qu'on désire conserver toutes les distances ellipsoïdales AB . Or cette condition est en fait incompatible avec la condition de conservation de tous les azimuts de Laplace⁶ d) Nous verrons plus loin qu'il existe une transformation qui respecte à la fois distances spatiales et azimuts de Laplace, mais elle ne respecte pas les distances ramenées au géoïde.

3 Méthode à Partir des Coordonnées Trirectangulaires

Cette méthode repose sur un résultat très simple : Supposons le réseau $R1$ calculé de façon rigoureuse sur un ellipsoïde ($E1$), en accord avec les principes de la géodésie tridimensionnelle : par exemple selon la séquence suivante :

a) Calcul classique, bidimensionnel, faisant la confusion entre Hn (altitude normale) et He (altitude ellipsoïdique).

b) Calcul de géoïde, utilisant les déviations de la verticale trouvées d'après (a) pour calculer $dh = He - Hn$; calcul des altitudes $He = Hn + dh$.

6. Prenons l'exemple simple de 2 triangulations calculées sur 2 sphères de mêmes dimensions. La solution évidente de superposition de ces 2 triangulations réside dans une rotation autour d'un axe central : sans réduire la généralité, on peut imaginer que cet axe $G\Omega$ est polaire, pour une triangulation au voisinage de l'équateur : dans la rotation Ω , le réseau R n'a aucune distance sphérique modifiée, aucun azimut n'est modifié, mais les azimuts de Laplace sont modifiés de $(\Omega \sin \varphi)$ quantité nulle à l'équateur, mais non négligeable si on s'éloigne de cette ligne centrale. Exemple : $\Omega = 30^\circ, \varphi = 10 \text{ gr} \implies \Omega \sin \varphi = 30 \times \frac{1}{6} = 5^\circ$ (Fig. 3).

c) Nouveau calcul bidimensionnel, en réduisant les bases à l'ellipsoïde et non au géoïde (c.a.d. en utilisant les altitudes He au lieu de Hn).

d) Nouveau calcul de géoïde.

e) Nouveau calcul bidimensionnel⁷...etc.

Le réseau est supposé calculé à partir d'un point fondamental $A_{0,1}$ pour lequel on adopte les coordonnées trirectangulaires X_{01}, Y_{01}, Z_{01} .

On peut calculer les coordonnées cartésiennes terrestres (X_1, Y_1, Z_1) de tous les points.

Supposons de même un autre calcul rigoureux ($R2$) du même réseau calculé à partir de $A_{0,2} : X_{02}, Y_{02}, Z_{02}$ sur un ellipsoïde (E_2) et soient (X_2, Y_2, Z_2) les coordonnées trirectangulaires obtenues.

La règle simple de la géodésie tridimensionnelle est la suivante :

- Entre les coordonnées (X_1, Y_1, Z_1) de ($R1$) et (X_2, Y_2, Z_2) de ($R2$), on doit avoir une translation :

$$\begin{cases} X_2 = X_1 + \Delta X_1 \\ Y_2 = Y_1 + \Delta Y_1 \\ Z_2 = Z_1 + \Delta Z_1 \end{cases} \quad (9)$$

Comme on utilise les mêmes observations pour les calculs dans ($R1$) et dans ($R2$), il n'aura pas de désorientation entre les 2 systèmes 3D respectivement de ($R1$) et ($R2$), alors on obtient seulement une translation tridimensionnelle $T = (\Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta Z_1)^T$.

Pour les distances 3D, on a :

$$X'_2 - X_2 = (X'_1 + T) - (X_1 + T) = X'_1 - X_1 \implies \|X'_2 - X_2\| = \|X'_1 - X_1\| \quad (10)$$

Pour les azimuts de Laplace, en un point M , on aussi :

$$\begin{aligned} Az_g^{(1)} - Az_a &= (\lambda_g^{(1)} - \lambda_a) \sin \varphi \implies \\ Az_g^{(1)} - \lambda_g^{(1)} \sin \varphi &= Az_a - \lambda_a \sin \varphi = Az_g^{(2)} - \lambda_g^{(2)} \sin \varphi \end{aligned} \quad (11)$$

Ce résultat simple est cohérent avec les propriétés suivantes :

- Les distances "espace" sont invariantes dans la translation.
- Les azimuts de Laplace sont également invariants⁸.

7. En pratique, pour Europe 50, les phases a) et b) ont été exécutées, la phase c) est en cours; certaines formules (Molodensky) permettent de prévoir les phases c) et d).

8. L'azimut d'une direction en un point géodésique M peut en fait se définir comme l'azimut de cette direction dans un trièdre horizontal local construit sur M , arbitraire mais fixe, (en principe construit sur la verticale physique) (cf. Dufour, [1])

- Cette règle n'est pas entièrement rigoureuse en pratique, mais les variations de ($R1$) à ($R2$) qui ne sont pas englobées dans la translation peuvent s'interpréter en termes de déformation (échelle, orientation,...) (cf. par exemple Boucher, [2]).

- Elle incite à réaliser des abaques des variables ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$) : abaques tridimensionnels établis sur un canevas bidimensionnel (φ, λ), ou sur représentation plane conforme.

- Si on considère, dans la comparaison de 2 systèmes, que tout ce qui n'est pas représentable par la translation libre ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$) est une erreur, à laquelle on peut appliquer une règle statistique gaussienne, on peut écrire pour tout point commun à 2 systèmes une "relation d'observation" et poser ainsi un système à résoudre en moindres carrés, donnant essentiellement :

- Les décalages ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$) de tous les systèmes concernés par rapport à une origine unique (en principe le centre d'inertie des masses).

- Les coordonnées (X, Y, Z) de tous les points communs intervenant dans le calcul, après correction pour rendre l'ensemble homogène. (La pose des relations est indiquée en Annexe (A)).

Par cette méthode, on devrait obtenir une position de tous les points, et les décalages libres entre systèmes, à une précision absolue de l'ordre du décamètre et des précisions relatives souvent bien supérieures (de l'ordre du mètre).

En dépit de ses avantages, la méthode tridimensionnelle peut être abandonnée dans les analyses localisées au profit des comparaisons par représentations planes conformes, qu'on va exposer ci-après.

4 Utilisation des Représentations Planes (Conformes)

Dans l'époque préinformatique (disons avec 1960), la comparaison de 2 réseaux :

($R1$) par ses coordonnées (X_1, Y_1) dans une représentation plane conforme P_1

($R2$) par ses coordonnées (X_2, Y_2) dans une représentation plane conforme P_2

était la règle la plus communément adoptée, mais elle se bornait généralement à l'établissement d'un polynôme complexe (en règle générale du 3ème degré) pour passer de ($R1$) à ($R2$).

Le polynôme "absorbait" sur une zone relativement peu étendue (disons au maximum $200\text{ km} \times 200\text{ km}$ à la fois les distortions propres des réseaux et celles des représentations planes.

L'adoption de cette méthode pour un pays donné conduisait ainsi à une "mosaïque" de formules dont l'emploi n'était pas sans créer des "cassures" (sur les zones de changement de formules).

C'est une méthode de ce type qui a été adoptée en France pour passer des Coordonnées LAMBERT Nouvelle Triangulation aux coordonnées UTM des TRIG-LISTS (Coordonnées EUROPE 50, à usage en principe uniquement militaire, mais dont l'utilisation a permis la réalisation de divers travaux homogènes à l'échelle européenne).

Quand les moyens informatiques se sont développés, il est devenu facile de transformer tous les points géodésiques d'un système R dans différents systèmes, par des formules mathématiques : géographiques, trirectangulaires ; représentations planes conformes. Il est apparu assez vite que les systèmes (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) définis de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} (R1) \text{ calculé sur } (E1) & & (R2) \text{ calculé sur } (E2) \\ \downarrow \text{représentation plane } P1 & & \downarrow \text{représentation plane } P2 \\ (X_1, Y_1) & & (X_2, Y_2) \end{array}$$

étaient en quasi-translation du moment que les représentations $P1$ (sur $(E1)$) et $P2$ (sur $(E2)$) avaient les mêmes constantes fondamentales :

- même définition mathématique (Mercator, UTM, stéréographique, Lambert),
- même point central (φ_0, λ_0) ,
- même coefficient d'échelle à l'origine K_0 .

Qu'appelle-t-on "quasi-translation" ? On peut en fait démontrer que, dans les conditions habituelles, pour 2 réseaux "idéaux", il n'y a pas translation rigoureuse, mais qu'il peut rester des systématismes en échelle et orientation de l'ordre de 10^{-5} , dus essentiellement au changement d'ellipsoïde et de point fondamental.

L'utilisation de ce résultat est déjà précieuse, car elle permet l'établissement d'abaques de passage sur de vastes zones (la France entière par exemple), avec des contrôles déjà sévères sur les points communs voisins. On peut ainsi obtenir très rapidement une précision de quelques mètres dans le passage de $(R1)$ à $(R2)$.

Le procédé se heurte à un inconvénient : la difficulté éventuelle d'extension d'une représentation plane donnée à des grandes distances.

Cette difficulté n'est pas très sérieuse : la représentation plane Mercator est parfaitement définie sauf aux pôles, les représentations planes Lambert ont des formules de définition simples, la représentation plane UTM peut être étendue à plus de 3° du méridien central si c'est nécessaire mais les tables usuelles donnent une mauvaise extrapolation...

On peut noter par contre les avantages suivants :

- a) Les coordonnées que l'on traite, au moins dans l'un des systèmes, peuvent être les coordonnées éditées dans les répertoires.

Cette possibilité limite la prolifération des coordonnées, toujours désagréable en informatique.

Il peut se faire que les coordonnées à comparer satisfassent aux conditions demandées : par exemple les coordonnées nationales italiennes sont sur l'ellipsoïde International (représentation plane UTM) et sont donc directement comparables avec les coordonnées UTM Europe 50.

Dans la majorité des cas, on doit calculer dans une représentation plane "fictive" les coordonnées d'un des systèmes, cette représentation plane étant imposée par l'autre système.

Pour fixer les idées, en France, la représentation plane LAMBERT II étendue a été recommandée pour tous les travaux nécessitant l'usage d'une représentation plane unique : elle est parfaitement définie sur toute l'étendue du territoire, les carroyages correspondants existent (ou existeront) sur toutes les coupures cartographiques.

Pour se définir le passage FRANCE NT \rightleftharpoons EUROPE 50, on a défini une représentation plane Lambert, dite EUROLAMBERT sur l'ellipsoïde International, ayant pour origine :

$$\begin{cases} \varphi_0 = 46^\circ 48' = 52 \text{ gr} \\ \lambda_0 = 2^\circ 20' 14'' 025 = 2^{\text{gr}} .596\,921\,296 \text{ longitude de Paris} \end{cases} \quad (12)$$

et pour coefficient d'échelle $K_0 = 0.9998\,7742$ (ce qui correspond aux éléments fondamentaux du LAMBERT II).

Entre les coordonnées (X, Y) LAMBERT II et (X_E, Y_E) EUROLAMBERT II existe la formule de passage :

$$\begin{aligned} X_E &= X + 40 \text{ m} \pm 3 \text{ m} \\ Y_E &= Y + 100 \text{ m} \pm 3 \text{ m} \end{aligned}$$

à la précision du mètre, on peut écrire (avec $x = 10^{-6}X, y = 10^{-6}Y$) :

$$\begin{cases} X_E = 40.345, m - 2.148x + 0.246y + 2.076xy - 10.379x^2 + 9.993y^2 \\ Y_E = 101.287 m - 0.531x - 0.680y - 26.443xy - 0.924x^2 + 8.255y^2 \\ \text{(formule non valable pour la Corse et non extrapolable)} \end{cases} \quad (13)$$

pour une précision supérieure, on dispose d'un abaque donnant le décalage sur un réseau régulier ($100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$).

b) Il est possible par des voies empiriques, ou théoriques, de calculer la formule rigoureuse qui existerait entre 2 systèmes "idéaux". L'état de cette question est envisagée en Annexe (B). Cette formule est étudiée à partir d'un décalage moyen $(\Delta X_0, \Delta Y_0, \Delta Z_0)$ tridimensionnel entre 2 réseaux comparés.

c) Une fois exclus les éléments de la formule théorique, il reste un système de coordonnées comparables et voisines.

$$X_1, Y_1 \rightleftharpoons X_2, Y_2$$

Il est possible alors de numériser les différences :

$$\begin{cases} \Delta X = X_2 - X_1 = f(x, y) & (x = 10^{-6}X) \\ \Delta Y = Y_2 - Y_1 = g(x, y) & (y = 10^{-6}Y) \end{cases} \quad (14)$$

(X, Y) désignant indifféremment X_1, Y_1 ou X_2, Y_2 et de les interpréter, en faisant en particulier, apparaître les coefficients globaux ou généraux :

$$\begin{cases} \text{Echelle } H = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \\ \text{Orientation } G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) \\ \text{Déformation métrique } P = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) \\ \text{Déformation angulaire } Q = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (15)$$

La deuxième partie de mon mémoire de fin d'études, sous la direction de Mr. Dufour concerne l'étude de ces coefficients dans l'approche tridimensionnelle pour l'analyse tridimensionnelle des réseaux géodésiques. Pour plus de détails, voir (Ben Hadj Salem,[4])

Enfin il est possible, par des voies mathématiques, de passer d'une représentation plane sur l'ellipsoïde à une autre représentation plane, par des systèmes économiques en formulation et temps de calcul.

Il n'est pas possible ici de développer ce paragraphe comme il mériterait de l'être. Le lecteur trouvera quelques développements en Annexe (C).

Conclusions

Il est très probable que pour la comparaison des systèmes de référence géodésiques à l'échelle mondiale sera fait un usage général des coordonnées cartésiennes trirectangulaires. Les méthodes en représentation plane conforme gardent leur utilité pour des analyses fines régionales.

La conclusion de Monsieur Dufour est vérifiée actuellement. Les comparaisons des systèmes géodésiques à petite échelle (grande étendue) se font très souvent à l'aide du modèle tridimensionnel de Bursa-Wolf à 7 paramètres : 3 composantes de la translation, le facteur d'échelle et les 3 rotations infinitésimales des axes et les formules de Molodensky à 7 paramètres. Pour les transformations de passage d'un système à un autre concernant les petites zones, on travaille en représentation plane.

A Principes d'un logiciel des systèmes de référence

A.1 Les coordonnées de base

Le système fondamental le plus simple à concevoir et finalement le plus utilisé en théorie des satellites est tout simplement constitué par les coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) rapportées au centre de gravité des masses.

Le but final de la géodésie est de fournir tous les points rattachés à la Terre dans ce système.

Le fait que finalement le centre G des masses n'est pas encore bien connu n'est pas un inconvénient grave, on travaille provisoirement dans des réseaux régionaux décalés, rapportés à des origines ω .

Une difficulté plus fondamentale provient de la connaissance en général insuffisante du géoïde.

Grace aux satellites GPS, le centre G des masses est connu à 2 mètres près. Par suite le vecteur translation entre les systèmes géodésiques terrestres et les systèmes géocentriques spatiaux est bien déterminé.

La connaissance du géoïde s'est améliorée partout dans le monde et les modèles mondiaux du géoïde ont aussi progressé au niveau de la précision des ondulations du géoïde.

A.2 Relation Fondamentale

G : centre des masses, origine du référentiel général (g),

ω : centre régional du référentiel j ,

M : position régionale de M ,

ωM : coordonnées cartésiennes de M dans le référentiel (j), centre ω ,

MM' : correction de compensation apportée au point M dans ce même référentiel,

M^0 : coordonnée géocentrique approchée de M ,

$M^0 M'$: inconnue fondamentale = dM_i pour chaque point M ,

(ME, MN, MZ) : trièdre laplacien en M arbitraire mais figé, (en principe le trièdre astronomique ou trièdre proche).

On écrit :

$$\begin{aligned} GM' &= G\omega + \omega M + MM' \text{ d'une part} \\ &= GM^0 + M^0 M' \text{ d'autre part} \end{aligned}$$

Au total :

$$M^0 M' + \omega G + (GM^0 - \omega M) = MM'$$

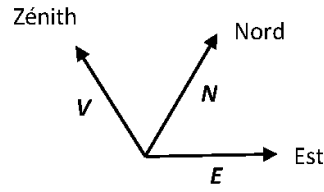
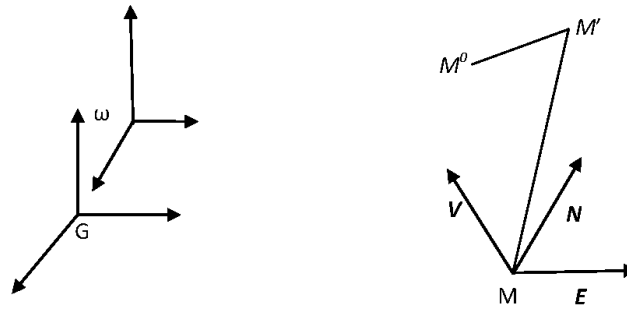


Fig. 4: Le Trièdre Laplacien



Qu'on écrira :

$$\left\{ \begin{array}{l} dM_i + (\omega \mathbf{G})_j + (\mathbf{GM}_i^0 - \omega \mathbf{M}_i^j) = \mathbf{MM}'_i{}^j \\ dM_i = \text{correction à apporter à la position approchée du point } M_i \text{ dans le référentiel général} \\ \omega \mathbf{G}_j = \text{position du centre de gravité dans le référentiel local } (j) \\ \mathbf{GM}_i^0 = \text{coordonnée générale approchée du point } M_i \\ \omega \mathbf{M}_i^j = \text{coordonnées de } M_i \text{ dans le référentiel } j \\ \mathbf{MM}'_i{}^j = \text{correction de compensation apportée au point } M_i \text{ dans le référentiel } (j) \end{array} \right. \quad (16)$$

On posera $(\mathbf{GM}_i^0 - \omega \mathbf{M}_i^j) = K_i^j =$ terme constant de la relation.

Cette relation est projetée sur 3 axes, de directions fixées a priori, liées à la verticale physique, connue ou estimée, au point M ;

$$\mathbf{E} \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{N} \begin{vmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{vmatrix} \quad \mathbf{V} \begin{vmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{vmatrix}$$

On obtient ainsi 3 relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 dX_i + \beta_1 dY_i + \gamma_1 dZ_i + \alpha_1 \Delta X_j + \beta_1 \Delta Y_j + \gamma_1 \Delta Z_j + \alpha_1 K_1 + \beta_1 K_2 + \gamma_1 K_3 = E_x \\ \alpha_2 dX_i + \beta_2 dY_i + \gamma_2 dZ_i + \alpha_2 \Delta X_j + \beta_2 \Delta Y_j + \gamma_2 \Delta Z_j + \alpha_2 K_1 + \beta_2 K_2 + \gamma_2 K_3 = E_y \\ \alpha_3 dX_i + \beta_3 dY_i + \gamma_3 dZ_i + \alpha_3 \Delta X_j + \beta_3 \Delta Y_j + \gamma_3 \Delta Z_j + \alpha_3 K_1 + \beta_3 K_2 + \gamma_3 K_3 = E_z \end{array} \right. \quad (17)$$

avec :

$$\begin{aligned} E_x &= \text{erreur horizontale OUEST-EST} \approx 1 \text{ m} \\ E_y &= \text{erreur horizontale SUD-NORD} \approx 1 \text{ m} \\ E_z &= \text{erreur normale} \approx 10 \text{ m} \end{aligned}$$

Ces valeurs d'erreurs sont des ordres de grandeur ; elles pourront naturellement être nuancées par la suite.

Inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \end{array} \right. \quad \text{valables pour le point } (i)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta X_j \\ \Delta Y_j \\ \Delta Z_j \end{array} \right. \quad \text{valables pour le référentiel } (j)$$

Résolution On peut normaliser et résoudre le système ci-dessus en éliminant d'abord les variables (dX_i, dY_i, dZ_i) .

La solution donne :

- Les coordonnées finales de tous les points dans le système général.
- Les corrections à tous les référentiels locaux.
- Les corrections de compensation apportées aux trièdres locaux.

Pour des systèmes pas trop importants, on élimine les (dX, dY, dZ) et on résoudra en système plein la matrice des $(\Delta X_j, \Delta Y_j, \Delta Z_j)$.

Pour des grands systèmes, on pourra envisager des méthodes itératives (..gradients conjugués par exemple), qui ne nécessitent aucune classification des inconnues, appliquées à tout le système ou seulement aux variables $(\Delta X_j, \Delta Y_j, \Delta Z_j)$.

Nota :

- 1) Les erreurs (E_x, E_y, E_z) seront à estimer d'après les données du problème.
En particulier, si la correction du géoïde a été faite sur les coordonnées M , l'erreur E_z peut elle aussi descendre à 1 m.
- 2) Dans le cas d'un système géodésique étendu (EUROPE 50 par exemple), on sera amené à le scinder en divers systèmes distincts moyennant de prendre en "observations" les coordonnées des points sur les lignes de jonction.

Ce subterfuge de calcul permet de prolonger la méthode qui vient d'être exposée : si on veut pousser plus loin, il sera nécessaire d'exprimer les variables $(\Delta X_j, \Delta Y_j, \Delta Z_j)$ en fonction de coefficients s'introduisant linéairement (échelle, orientation, déformation) ; de toute façon il faudra "régionaliser" les grands référentiels, se donner une estimation des erreurs linéaires - donc introduire un processus de calcul plus complexe. La méthode ci-dessus exposée prétend

toutefois pouvoir mettre tous les points analysés dans le système mondial à la précision du décimètre.

3) Naturellement, pour que le résultat final soit dans le système centré mondial, il faut que certaines observations soient référées à ce système (observations Doppler (GPS) par exemple).

B Formule théorique en représentation plane de changement de système de référence

On ne donnera ici que des résultats généraux, et la ligne des démonstrations utilisées. Nous n'avons pas en fait affaire à de vraies démonstrations rigoureuses. On trouvera :

- La méthode empirique.
- Une formule valable pour la représentation plane Mercator de la sphère.
- Son extension à la représentation plane UTM, qui se trouve vérifiée par la méthode empirique.
- Son extension à la représentation plane Lambert.

B.1 Méthode empirique

On commence par chercher le décalage tridimensionnel moyen :

$$CM = \begin{cases} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{cases}$$

entre les deux systèmes.

Une variation de quelques mètres sur ce décalage ne modifie pas sensiblement la formule théorique que l'on doit établir, ou plutôt n'influe que sur les termes constants.

On se donne une grille régulière ($100\text{ km} \times 100\text{ km}$ par exemple) dans la représentation plane P_1 , soit G_1 - On calcul l'image de G_1 dans G_2 (représentation plane P_2 du système 2) :

$$G_1 \longrightarrow \text{GÉOGRAPH.}_{S_1} \longrightarrow \text{CARTÉS.}_{S_1} \xrightarrow{+CM} \text{CARTÉS.}_{S_2} \longrightarrow \text{GÉOGRAPH.}_{S_2} \longrightarrow G_2$$

On calcule le développement polynomial $G_2 = f(G_1)$.

Dans tous les travaux que nous avons rencontrés, on a toujours trouvé pour développement polynomial un polynôme complexe de degré 2 ; ce phénomène a été contrôlé en France (entre LAMBERT I et EUROLAMBERT) et en Tunisie (entre les représentations planes UTM des divers référentiels existants). Il semble lié à l'existence, dans la représentation plane utilisée, d'une ligne d'échelle stationnaire (équateur sur Mercator ; méridien sur UTM ; parallèle sur Lambert). Dans le cas d'utilisation d'une représentation plane stéréographique, il est probable que la formule de passage pourra être limitée au 2ème degré, mais rien ne permet de dire qu'elle sera du type polynôme complexe.

B.2 Méthode théorique (ou plutôt semi-empirique)

Mercator sur la sphère

Par des calculs relativement simples, on obtient la formule suivante :

$$dz = K_0(dY + idZ) - \frac{dX}{R}z - \frac{dY}{2K_0R^2}z^2 \quad (\text{Fezzani,[3]}) \quad (18)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \text{coordonnées Mercator}; z = x + iy \\ MN = \text{translation spatiale } (C_X, C_Y, C_Z) \\ dX = \mathbf{i} \cdot MN; dY = \mathbf{j} \cdot MN; dZ = \mathbf{k} \cdot MN \\ \mathbf{i} = \text{vecteur unitaire radial}; \mathbf{j} \text{ vecteur unitaire tangent à l'équateur sens des } x > 0 \\ \mathbf{k} = \text{vecteur unitaire tangent au méridien } (y > 0) \\ K_0 = \text{coefficient d'échelle}; R = \text{rayon de la sphère} \end{array} \right. \quad (19)$$

Pour plus d'information et de détail sur l'équation (18), le lecteur est invité à voir mon article "Note sur la Formule de Dufour-Fezzani" [5], accessible sur le web.

Représentation plane Mercator transverse sur un même ellipsoïde

Soit $w = u + iv$ la variable UTM réduite en φ_0 :

$$u = E - 500\,000.00m$$

$$v = N - 0.9996S(\varphi_0)^9$$

L'extension de (18) à ce nouveau cas donne la formule :

$$dw = K_0(dY + idZ) - \frac{dX}{R}w + i\frac{dZ}{2K_0R^2}w^2 \quad (20)$$

$$\begin{array}{l} dX = MN \cdot \mathbf{i} \\ dY = MN \cdot \mathbf{j} \\ dZ = MN \cdot \mathbf{k} \end{array} \quad \mathbf{i} \left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi_0 \cos\lambda_0 \\ \cos\varphi_0 \sin\lambda_0 \\ \sin\varphi_0 \end{array} \right. \quad \mathbf{j} \left\{ \begin{array}{l} -\sin\lambda_0 \\ \cos\lambda_0 \\ 0 \end{array} \right. \quad \mathbf{k} \left\{ \begin{array}{l} -\sin\varphi_0 \cos\lambda_0 \\ -\sin\varphi_0 \sin\lambda_0 \\ \cos\varphi_0 \end{array} \right.$$

On peut adopter pour R une valeur moyenne par exemple $R = 6\,366.198 \text{ km}$.

Mercator transverse avec le changement d'ellipsoïde

Il faut ici tenir compte de 2 faits :

- 1) Les origines ω des ellipsoïdes (E_1) et (E_2) ne coïncident pas.
- 2) Les longueurs de méridiennes de l'équateur jusqu'à la latitude φ_0 sont différentes.

Pour tenir compte de 1), il faut déduire de (C_X, C_Y, C_Z) les variables $(\delta X, \delta Y, \delta Z)$ définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta X = X_2(\varphi_0, \lambda_0) - X_1(\varphi_0, \lambda_0) \\ \delta Y = Y_2(\varphi_0, \lambda_0) - Y_1(\varphi_0, \lambda_0) \\ \delta Z = Z_2(\varphi_0, \lambda_0) - Z_1(\varphi_0, \lambda_0) \end{array} \right. \quad (21)$$

9. $S(\varphi_0)$ = longueur de la méridienne à la latitude φ_0 .

d'où de nouvelles variables :

$$\begin{cases} \Delta X = C_X - \delta X \\ \Delta Y = C_Y - \delta Y \\ \Delta Z = C_Z - \delta Z \end{cases} \quad (22)$$

pour tenir compte de 2), il faut corriger dv par une quantité $K_0 ds$:

$$ds = S_2(\varphi_0) - S_1(\varphi_0)$$

d'où la formulation générale :

Données¹⁰ φ_0, λ_0 , ellipsoïdes (E_1) et (E_2), C_X, C_Y, C_Z .

$$\begin{cases} ds = S_2(\varphi_0) - S_1(\varphi_0) \\ \delta X = X_2(\varphi_0, \lambda_0) - X_1(\varphi_0, \lambda_0) \\ \delta Y = Y_2(\varphi_0, \lambda_0) - Y_1(\varphi_0, \lambda_0) \\ \delta Z = Z_2(\varphi_0, \lambda_0) - Z_1(\varphi_0, \lambda_0) \end{cases} \quad MN \quad \begin{cases} \Delta X = C_X - \delta X \\ \Delta Y = C_Y - \delta Y \\ \Delta Z = C_Z - \delta Z \end{cases} \quad (23)$$

$$dX = MN.i; \quad dY = MN.j; \quad dZ = MN.k$$

$$u_1 = E_1 - 500\,000.00 \text{ m} \quad ; v_1 = N_1 - 0.9996.S_1(\varphi_0)$$

$$u_2 = E_2 - 500\,000.00 \text{ m} \quad ; v_2 = N_2 - 0.9996.S_2(\varphi_0)$$

$$\begin{cases} du = K_0 dY - \frac{dX}{R}u - \frac{dZ}{2K_0 R^2}(2uv) \\ dv = K_0(ds + dZ) - \frac{dX}{R}v + \frac{dZ}{2K_0 R^2}(u^2 - v^2) \end{cases} \quad (24)$$

LAMBERT \longrightarrow LAMBERT avec changement d'ellipsoïde (Application au réseau français)

On peut espérer appliquer les formules (18 -19) ci-dessus, mais en tenant compte des variations ($\delta X, \delta Y, \delta Z$), et en remplaçant "équateur" par "parallèle de latitude φ_0 ".

$$MN \quad \begin{cases} \Delta X = C_X - \delta X \\ \Delta Y = C_Y - \delta Y \\ \Delta Z = C_Z - \delta Z \end{cases}$$

i, j, k sont donnés par la formule (27) ci-dessous.

$$\begin{cases} dX = i.MN \\ dY = j.MN \\ dZ = k.MN \end{cases}$$

$$dz = K_0(dY + idZ) - \frac{dX}{R}z - \frac{dY}{2K_0 R^2}z^2 \quad (25)$$

Application numérique :

France NT \longrightarrow EUROPE 50
(Clarke 1880) (International)
LAMBERT II \longrightarrow EUROLAMBERT

10. On suppose que λ_0 correspond au centre d'un fuseau UTM. Dans le cas contraire on prend pour λ_0 la valeur de centre de fuseau la plus voisine, et il faudra ajouter à la formule une translation selon l'axe u .

$$MN \left\{ \begin{array}{l} C_X = -84 m \\ C_Y = +37 m \\ C_Z = +437 m \end{array} \right.$$

Formule expérimentale

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = Z_0 + az + bz^2 \\ Z_0 = 40.390 m + i101.526 m \\ a = 2.135 m \\ b = -0.495 m \quad ; z = 10^{-6}(Z - Z_0) \end{array} \right.$$

Calcul théorique

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 46^\circ 48' = 52 gr \\ \lambda_0 &= 2^\circ 20' 14'' .025 = 2.596 921 296 gr \end{aligned}$$

Calcul de $\delta X, \delta Y, \delta Z$

Nom	France NT	EUROPE 50	$\delta X, \delta Y, \delta Z$	$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$
$X m$	4 370 487.367	4 370 488.288	+0.921	-84.291
$Y m$	178 381.380	178 381.417	+0,037	-36.963
$Z m$	4 626 280.816	4 626 658.237	+377.421	-59.579

(26)

Trièdre fondamental

$$i \left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi_0 \cos\lambda_0 = 0.683 977 \\ \cos\varphi_0 \sin\lambda_0 = 0.027 917 \\ \sin\varphi_0 = 0.728 969 \end{array} \right. \quad j \left\{ \begin{array}{l} -\sin\lambda_0 = -0.040 781 \\ \cos\lambda_0 = 0.999 168 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \quad k \left\{ \begin{array}{l} -\sin\varphi_0 \cos\lambda_0 = -0.728 362 \\ -\sin\varphi_0 \sin\lambda_0 = -0.029 728 \\ -\cos\varphi_0 = 0.684 547 \end{array} \right. \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX}{R} &= \frac{1}{R} M_1 M_2 . i = -2.140 m \\ dY &= M_1 M_2 . j = 40.395 m \\ dZ &= M_1 M_2 . k = 101.539 m \end{aligned}$$

et par suite les coefficients avec :

$$\begin{aligned} K_0 &= 0.9998 7742 \\ K_0(dY + idZ) &= 40.390 m + i101.527 m \text{ pour } (40.390 m + i101.527 m) \\ a &= -\frac{dX}{R} = 2.140 m \text{ (pour } 2.135 m) \\ b &= -\frac{dY}{K_0 R^2} = -0.503 m \text{ (pour } -0.495 m) \end{aligned}$$

C Systèmes projectifs

Nous nous bornerons ici à donner quelques résultats remarquables concernant les représentations planes conformes les plus utilisées.

C.1 Mercator sur la sphère (O, a)

$$\begin{cases} X = K_0.E.a(\lambda - \lambda_0) \\ Y = K_0.E.a.Log\left(tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = K_0.E.a.\mathcal{L}(\varphi) \end{cases} \quad (28)$$

- φ = latitude, $\mathcal{L}(\varphi)$ = latitude croissante de φ , λ = longitude,
- a = rayon de la sphère,
- E = échelle nominale,
- K_0 = coefficient d'échelle.

Sur l'ellipsoïde, on aura des formules très analogues, mais où φ est remplacée par $L = L(\varphi)$, la latitude isométrique.

$$\begin{cases} L = L(\varphi) = Log\left(tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) - \frac{e}{2}Log\frac{1 + esin\varphi}{1 - esin\varphi} \\ \text{ou encore } L = L(\varphi) = argth\left(tg\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{e}{2}argth(esin\varphi) \end{cases} \quad (29)$$

A noter la très grande proximité entre L , la latitude isométrique et ϕ la latitude géocentrique :

$$\begin{cases} tg\phi = \frac{b^2}{a^2}tg\varphi \\ \text{On a en effet : } L - \phi = \frac{e^4}{6}sin^3\varphi cos\varphi \end{cases} \quad (30)$$

On note par φ_C la latitude conforme définie par :

$$Log\left(tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_C}{2}\right)\right) = Log\left(tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) - \frac{e}{2}Log\frac{1 + esin\varphi}{1 - esin\varphi} \quad (31)$$

On a (Fig.5) :

$$tg\phi = \frac{MH}{OH} \quad (32)$$

Comme $tg\psi = \frac{HM'}{OH}$ et $MH = \frac{b}{a}.HM'$ image par affinité de HM , d'où :

$$tg\phi = \frac{MH}{OH} = \frac{b}{a} \frac{HM'}{OH} = \frac{b}{a}tg\psi$$

$$\text{comme } tg\psi = \frac{b}{a}tg\varphi \implies tg\phi = \frac{b^2}{a^2}tg\varphi = (1 - e^2).tg\varphi \quad (33)$$

Ce qui représente au maximum 15 m à la surface du globe (pour $\varphi = 60^\circ$).

C.2 Mercators obliques, transverses

Pour mémoire LAMBERT :

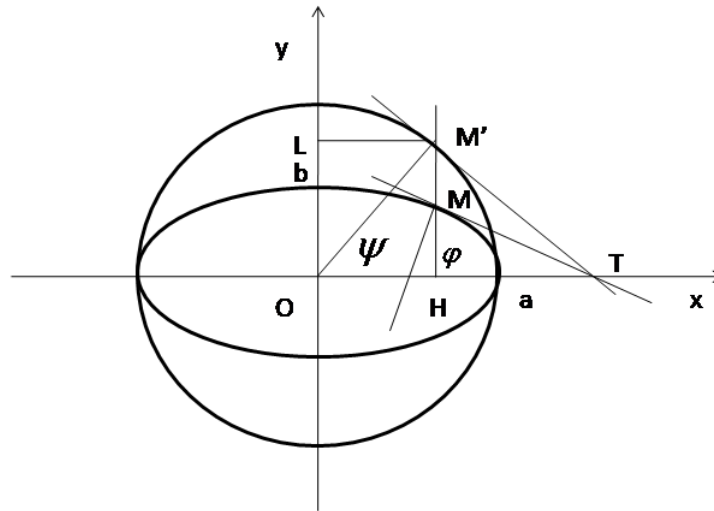


Fig. 5: Relation entre φ , ψ et ϕ

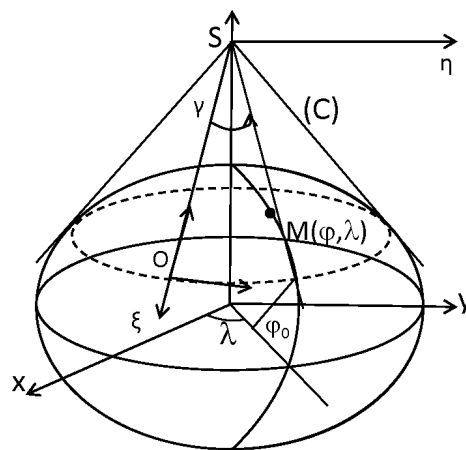


Fig. 6: Le cône circonscrit

Les formules simples en Lambert existent pour le système d'axes $S\xi, S\eta$ relatifs au sommet du cône circonscrit tangent à l'ellipsoïde le long du parallèle φ_0 .

$$O = (\varphi_0, \lambda_0), \quad SO = R_0 = N_0 \cotg \varphi_0$$

Le vecteur SM , d'affixe $Re^{i\gamma}$ (Fig. 6), place le point M par rapport au point O de rayon vecteur OS de norme $R_0 = N_0 \cotg \varphi_0$. On considère :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \text{latitude croissante de } \varphi \\ \mathcal{L}_0 &= \text{latitude croissante de } \varphi_0 \end{aligned}$$

On a en définitive (en posant $\zeta = \xi + i\eta$) :

$$\zeta = Re^{i\gamma} = R_0 \exp(-\sin \varphi_0 (\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)) \exp(i(\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0) \quad (34)$$

Si on note $\lambda + i\mathcal{L} = Z =$ Mercator équatoriale, centrée sur le méridien origine (Greenwich), on peut écrire :

$$\begin{cases} \zeta = A \exp(+i \sin \varphi_0 Z) \\ A = R_0 \exp(-i \sin \varphi_0 Z(0)) \end{cases} ; \quad Z(0) = Z(\varphi_0, \lambda_0) \quad (35)$$

Les formules (35) donnent la loi de formation de la représentation plane LAMBERT à partir de la Mercator équatoriale centrée.

On en tire le passage d'une Lambert (d'index 0) à une autre Lambert (d'index 1) :

$$\begin{cases} \zeta_0 = A_0 \exp(+i \sin \varphi_0 Z) \\ \zeta_1 = A_1 \exp(+i \sin \varphi_1 Z) \end{cases} \quad (36)$$

$$\zeta_1 = C \zeta_0^\alpha$$

$C =$ constante complexe, $\alpha = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_0}$.

Telle est la loi de correspondance de deux Lambert quelconques sur l'ellipsoïde (ou la sphère). La variable C a une expression simple :

$$\zeta_0 = CR_0^\alpha \implies C = \frac{\zeta_1(0)}{R_0^\alpha}$$

Le changement de référentiel est facile si on se donne la table de correspondance (en variables complexes) :

$$T_{ij} = \zeta_i(j)$$

des coordonnées de chaque origine dans tous les autres systèmes. Les rayons R_0, R_1, R_2, \dots sont donnés par cette table pour $i = j$.

Si on se limite à un seul méridien central, la table T_{ij} sera formée d'éléments réels.

Nota : En pratique il est commode de développer par la formule du binôme :

$$\zeta_0^\alpha = (R_0 + \Delta\zeta)^\alpha = R_0^\alpha \left(1 + \alpha \frac{\Delta\zeta}{R_0} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \frac{\Delta\zeta^2}{R_0^2} + \dots \right)$$

ce qui donne au total :

$$\zeta_1 = \zeta_1(0) \left(1 + \alpha \frac{\Delta\zeta}{R_0} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \frac{\Delta^2}{R_0^2} + \dots \right)$$

Nota : pour $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, la représentation plane Lambert devient stéréographique au pôle Nord.

C.3 La représentation plane stéréographique

Relativement peu employée en géodésie et en cartographie, la représentation plane stéréographique a des propriétés remarquables qui peuvent la rendre très utile dans les problèmes de changements de représentation plane. On renvoie pour les études plus détaillées à divers auteurs (Laborde et Driencourt [6], Reignier [7], Levallois [8], Baetsle [9], Dufour [10],[11],[12] Ben Hadj Salem [13]).

Nous rappelons ici les propriétés essentielles :

- * Sur la sphère (O, R) au pôle Nord, la représentation plane stéréographique est à la fois :
- la seule représentation plane centrale conforme,
 - une perspective de la sphère sur le plan tangent au pôle Nord à partir du pôle Sud S ,
 - l'image de la sphère dans l'inversion $(S, 4R^2)$.

A partir de la stéréographique Nord, on obtient toutes les stéréographiques de la sphère par une relation homographique.

D'une manière générale, la formule suivante est valable entre 2 stéréographiques quelconques de la famille (de sommets S_1, S_2) :

$$\begin{aligned} Z_1(2) &= \text{expression de l'origine (2) dans la représentation (1)} \\ Z_2(1) &= \text{expression de l'origine (1) dans la représentation (2)} \end{aligned}$$

$$\frac{Z_1}{Z_1(2)} + \frac{Z_2}{Z_2(1)} + t^2 \frac{Z_1 Z_2}{Z_1(2) Z_2(1)} = 1 \quad (37)$$

avec $t^2 = tg^2 \frac{\omega}{2}$ ($t =$ distance sphérique $S_1 S_2$).

On peut donc programmer facilement le passage d'une représentation à une autre à partir du tableau :

$$T_{ij} = Z_i(j) \text{ avec } Z_i(i) = 0$$

La représentation plane stéréographique de la sphère permet d'accéder par des développements polynomiaux complexes aux représentations MERCATOR, MERCATORS OBLIQUES, MERCATOR TRANSVERSE, LAMBERT.

* Sur l'ellipsoïde en chaque point origine (φ_0, λ_0) , on peut se définir :

- Une représentation plane conforme ellipsoïde \longrightarrow sphère :

λ conservées

$\varphi \longrightarrow \phi$ par :

$$\mathcal{L}_S(\phi) - \mathcal{L}_S(\phi_0) = L_E(\varphi) - L_E(\varphi_0)$$

avec $\mathcal{L}_S =$ latitude croissante sphérique, $L_E =$ latitude croissante ellipsoïdique.

- Une famille de représentation plane $\mathcal{F}(\varphi_0)$ de stéréographiques de la sphère qui se correspondent entre elles par relations homographiques et possibilité d'application de la formule (37).

- Quand le point fondamental devient (φ_1, λ_1) , on obtient une nouvelle famille $\mathcal{F}(\varphi_1)$, et il est remarquable (mais non évident a priori) qu'à toute représentation de $\mathcal{F}(\varphi_0)$ il correspond une représentation P_1 de $\mathcal{F}(\varphi_1)$ telle que P_0 et P_1 soient supersables par homothétie rotation. En particulier les 2 représentations polaires sont superposables par homothétie.

- Sur l'ellipsoïde, la représentation plane stéréographique rend les mêmes services que sur la sphère : elle peut servir à calculer les représentations planes MERCATOR, MERCATOR TRANSVERSE, LAMBERT.

Références

- [1] **H.M. Dufour.** 1967. Toute la géodésie sans ellipsoïde. Les repères laplaciens. Application plus particulière aux travaux à latitude élevée. XIV Assemblée Générale de l'UGGI-Lucerne 1967. Bulletin Géodésique n°88- juin 1968- IGN- SGNM n°26 927.
- [2] **C. Boucher.** 1978. Formulaire pour transformations de coordonnées tridimensionnelles cartésiennes ou géographiques entre 2 systèmes géodésiques. IGN - SGNM NT/G n°8-septembre 1978.
- [3] **C. Fezzani.** 1979. Analyse de la structure des réseaux astro-géodésiques tunisiens. Thèse de Docteur Ingénieur. IGN - Ecole Nationale des Sciences Géographiques (ENSG). 167 pages + Annexes (67 pages).
- [4] **A. Ben Hadj Salem.** 1981. Point de Laplace & Exemple de Calcul Géodésique et Analyse des Résultats en Géodésie Tridimensionnelle. Mémoire de fin d'études à l'ENSG (version numérique). IGN France. 59 pages. <http://www.vixra.org/abs/1703.0038>
- [5] **A. Ben Hadj Salem.** 2012. Note sur la formule de Dufour-Fezzani. 7 pages. www.academia.edu.
- [6] **L. Driencourt et J. Laborde.** 1932. Traité des projections des cartes géographiques, à l'usage des cartographes et des géodésiens. Quatrième fascicule. 410 pages. Librairie Scientifique Hermann et Cie, Paris.
- [7] **F. Reignier.** 1957. Les systèmes de projections et leurs applications. Tome I (texte), Tome II (graphiques). IGN - SGNM n°26 893 A.
- [8] **J.J. Levallois.** 1970. Géodésie générale - Tome II : Géodésie classique bidimensionnelle - Edition Eyrolles.
- [9] **P.L. Baetsle.** 1968. Cours de géodésie théorique. Ecole Royale Militaire - Belgique.
- [10] **H.M. Dufour.** 1971. La projection stéréographique de la sphère et de l'ellipsoïde. IGN - SGNM n°26 804.
- [11] **H.M. Dufour.** 1973. Rôle de la géodésie dans l'élaboration des banques de données géographiques françaises. Bulletin d'information de l'IGN n°24 - décembre 1973.
- [12] **H.M. Dufour.** 1976. Usage systématique de la projection stéréographique pour les transformations de coordonnées planes. IGN - SGNM n°26 739.
- [13] **A. Ben Hadj Salem.** 2015. La projection stéréographique. 10 pages. <http://www.vixra.org/pdf/1511.0282v1.pdf>.