Metrics galileia space
Valery Timin

(December 10, 2019)

Russia, RME

This paper deals with the definition of conjugate vectors and three types of metrics: ($d\tau$, dl, ds) in 3+1 and 4–dimensional Galilean spaces. In Galilean space it is possible to introduce three types of orthonormal metrics:

1) spatial $dl^2 = dr_i dr^i$,
2) time $d\tau = dt$ or $d\tau^2 = dt_0 dt^0$ and
3) wave $ds^2 = d\tau^2 - dl^2$.

В данной работе рассмотрены вопросы определения сопряженных векторов и трех видов метрик: ($d\tau$, dl, ds) в 3+1 и 4–мерном галилеевых пространствах.

Оглавление

Метрики галилеева пространства

В галилеевом пространстве возможны две независимые метрики: $d\tau$ – координатное время на мировой линии м.т.:

$$d\tau = g_0 dt$$

или (1)

$$d\tau^2 = g_{00} dt^2$$

и dl – 3–мерное расстояние между двумя точками 3–пространства:

$$dl^2 = dr^2 \tag{2}$$

Метрика $d\tau$ является инвариантной метрикой между любыми точками пространства, независимо от галилеевых преобразований координат. Но метрика dl^2 определена только на плоскости одновременности $\tau = \text{const}$.

$$dl^2 = dr^2 : t = \text{const}. \tag{3}$$

Кроме двух предыдущих метрик, приведенных выше и подчиняющихся принципу относительности (однородность и изотропность), в галилеевом пространстве может существовать еще одна метрика – метрика АСО.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2. \tag{4}$$

Это изотропная метрика в галилеевом пространстве, выделяющая некоторое ИСО как выделенная АСО. Основная особенность ее в том, что в этой с.о. существует скалярный параметр "фундаментальная скорость" "c". Целесообразность введения данной метрики в общем то прикладная и определяется тем, что в сплошной среде фронт волны возмущения распространяется с именно этой постоянной скоростью "c" и координаты фронта этой волны в любой момент времени определяются именно этим "метрическим" условием. Эта метрика вводится из следующих соображений.

В многомерном пространстве процесс распространения волн связан с определенным направлением распространения фронта волны и соответствующими параметрами. При наличии пространственных координат произвольная свободная не изотропная волна в неограниченном бесконечном ГП распространяется и вдоль пространственных направлений в соответствии с гармоническим уравнением

$$A(t, r^i) = A_s \sin[2\pi(\omega_0 t + \omega_i r^i) + \varphi_s] = A_s \sin\varphi; \qquad (5)$$
$$\omega_0\, \omega^0 + \omega_i\, \omega^i = 0.$$

в котором ω - скалярная частота волнового процесса,

ω_0 – временная ковариантная частота волнового процесса,

ω_i – пространственная частота или направляющий ковариантный вектор волнового процесса,

φ_s - начальная фаза волнового процесса в начале координат.

При этом волновая разность фаз $d\varphi$ (инвариант распространения гармонического монохромного волнового процесса в с.с.) определяется скалярным выражением, которую можно принять как линейную метрику:

$$d\varphi = 2\pi\omega(dt + c_i dr^i). \qquad (6)$$

где ω – круговая частота волны. На основе этой формулы вводится 4-мерное метрическое понятие "интервала", выражаемое формулой (4). На его основе можно определить сопряжение векторов галилеева пространства, частными случаями применения которой в галилеевом пространстве будут уравнения (1) и (2).

Несмотря на различные формы записи, все четыре формы "генетически" тесно связаны между собой через метрический тензор.

1. Сопряженные векторы галилеева пространства

Метрики (1) и (2) записаны без учета положения индексов и их смыслового значения от этого. В ортонормированном базисе галилеева пространства это не имеет большого значения и записи в форме (1) и (2) имеют вполне объяснимый смысл. Но в тензорном исчислении очень важным моментом является существование операции поднятия/опускания индексов. Эта операция позволяет единообразно определять многие важные моменты этой алгебры. Соответственно индексы с верхним расположением называются контравариантными, а с нижним – ковариантными.

И эта операция тесно связана с существованием в ней полноценной не вырожденной метрики, т.к. именно с ее помощью производится операция поднятия/опускания индексов:

$$
\begin{gathered}
A_i = g_{ij}A^j, \\
A^i = g^{ij}A_j.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Здесь g_{ij} – метрический тензор. Метрический тензор симметричен относительно главной диагонали. Контравариантный тензор g^{ij} из нее получается взятием обратной матрицы:

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k. \tag{8}$$

Здесь δ^i_k – единичная матрица.

Сложность введения метрики в галилеевом пространстве осложняется тем, что не имеется возможности каким либо образом подобрать метрический тензор g_{ij} так, что бы он не был вырожденным. Особенность галилеева пространства в том, что координата "время" по определению всегда ортогональна пространственным направлениям, т.е она независима от пространственных. А это возможно только в том случае, если метрический тензор будет зависеть либо только от пространственных, либо только от временных координат вектора. Как следствие, любой не вырожденный метрический тензор определяет не галилеево пространство.

Соответствующие друг другу контравариантный и ковариантный векторы называются сопряженными. Именно через сопряженные векторы определяется скалярное произведение векторов:

$$A{\cdot}B = A^iB_i. \tag{9}$$

В галилеевом пространстве, как и в любом другом тензорном пространстве, такое скалярное произведение двух векторов определено по умолчанию и оно имеет вполне тривиальное выражение для любых двух взаимно сопряженных векторов.

В тензорной алгебре сопряженный вектор может быть получен операцией опускания индексов для контравариантных и операцией поднятия индексов для ковариантных векторов. Операция поднятия/опускания индексов осуществляется с помощью невырожденного, а в ортонормированном метрическом пространстве диагонального единичного метрического тензора g_{ij} и g^{ij}:

$$g_{ij}A^j = A_j \text{ – опускание индекса,}$$
$$g^{ij}A_j = A^j \text{ – поднятие индекса.} \quad (10)$$

Но здесь проблема в другом – в галилеевом пространстве принципиально не определена не вырожденная операция сопряжения. Следовательно, невозможно стандартно определить сопряженные вектора. А с помощью вырожденных операции сопряжения получаются две метрики, соответствующие формулам (1) и (2). При этом при сопряжении по временному индексу изменяется положение временного индекса, а при сопряжении по пространственному индексу $i \in \{1..3\}$ изменяется положение пространственных индексов.

Но есть способ определить стандартный не вырожденный сопряженный вектор (тензор) и в этом случае. Выбирается какая либо с.к. и определяется как выделенная (аналог – АСО абсолютная система отсчета). В этой с.к. для вектора (тензора), не имеющего сопряженного, делается сопряжение вектора (тензора) по следующему правилу:

1) При сопряжении по временному индексу значение сопряженного элемента не изменяется.
2) При сопряжении по пространственному индексу значение сопряженного элемента изменяется на противоположное.

Данный способ сопряжения связан с метрикой, определяемой с формулой (4). Знак "+" связан со знаком при временном элементе dt в формуле (4). А знак "-" при пространственных элементах dr связан со знаком при пространственных элементах (4). В результате получается абсолютное галилеево пространство-время с выделенной с.к. (АСО), в которой допустимы нормальные галилеевы преобразования координат и тензоров.

Для пары исходно сопряженных векторов формула (9) остается в силе. Но при наличии только с обоими либо верхними, либо нижними индексами векторов при переходе в ИСО эти правила изменяются. Для получения пары сопряженных векторов будет необходимо у одного из векторов поднять (или опустить) индексы. Это можно сделать

1) либо заранее в исходной с.о. (АСО),
2) либо из ИСО перевести в АСО, получить сопряженный вектор и после этого перейти снова в ИСО,
3) либо воспользоваться преобразованным метрическим тензором (21) (см. далее).

Такое сопряжение можно назвать "материальным". Ее смысл в том, что оно определяет некоторое материальное "волновое" пространство, аналогом которой является сплошная среда. При этом, конечно, "волновая" среда в произвольном ИСО получает некоторую скорость.

2. Временнàя метрика

Временная метрика соответствует выражению (1):

$$d\tau = g_0 dt$$

$$\text{или} \tag{1}$$

$$d\tau^2 = g_{00} dt^2$$

где $d\tau$ – координатное время на мировой линии м.т. Метрика $d\tau$ является инвариантной метрикой между любыми точками пространства, независимо от галилеевых преобразований координат. Действительно, сделаем произвольное преобразование координат:

$$\begin{cases} t' = t + \Delta t, \\ r' = r - vt - \Delta r \end{cases} \rightarrow \tag{3}$$

$$dt' = dt \rightarrow d\tau = dt.$$

Это значит, что в галилеевой механике можно определить глобальное "скалярное" выражение dS_t с использованием линейной "временной метрики" "промежуток времени" одномерного подпространства t:

$$dS_t = \tau_i dq^i = \tau_0 dq^0 = g_0 dt$$

$$\text{или} \tag{11}$$

$$dS_t^2 = \tau_{ij} dq^i dq_i = \tau_{00} dt^2.$$

где τ_i и τ_{ij} – ковариантные векторное и тензорное поля, аналоги галилеевой 4–метрики, определяющее локальное абсолютное время, для галилеевого пространства $\tau_i = \delta_i = (1,0,0,0)$ и $\tau_{ij} = \delta_{ij}$.

Из того, что "временная метрика" может служить метрикой галилеева пространства, например, в качестве инвариантного скалярного параметра траектории м.т., есть большая польза. Но в остальном польза от ее существования сомнительна.

3. Пространственная 3-мерная метрика

Метрики (1) и (2) используются в галилеевом пространстве галилеевой механики. В пространстве такой механики скорость распространения информации (а она необходима для проведения измерительных процедур) равна бесконечности. И это доказывается тем, что результат измерения dt (1) и dl не будут зависеть от состояния движения с.о.

Пространственная метрика "расстояние" соответствует выражению (2):

$$dl^2 = dr^2 \tag{2}$$

где dl – 3мерное расстояние между двумя точками 3–пространства. Особенностью метрики dl^2 является то, что она определена только на плоскости одновременности τ = const.

$$dl^2 = dr^2 \text{: } t = \text{const}. \tag{3}$$

При нарушении этого условия и переходе в другое ИСО "расстояние" меняет свое значение. Действительно, пусть мы имеем две неподвижные точки, отстоящие друг от друга на (dt, dr): $dt \neq 0$. Тогда имеем 3-мерное расстояние между ними $dl^2 = dr^2$. После преобразования координат (перехода в другое ИСО) координаты и расстояние между ними будут равны:

$$\begin{cases} t' = t + \Delta t, \\ r' = r - vt - \Delta r. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dt' = dt, \\ dr' = dr + vdt. \end{cases} \tag{12}$$

а расстояние

$$dl'^2 = (dr + vdt)^2 \neq dl^2 \tag{13}$$

что не равно расстоянию между ними в состоянии покоя.

В галилеевой механике можно определить "скалярное" выражение, аналогичное работе в классической механике Ньютона A, с использованием квадратичной "пространственной метрики" "расстояние" 3-мерного подпространства l_{ij}:

$$dA = l_{ij}F^i dr^j = l_{ij}F^i v^j dt, \tag{14}$$

$$dA' = l_{ij} F'^{i} v'^{j} dt.$$

Здесь l_{ij} – квадратичная пространственная метрика "расстояние" 3мерного подпространства галилеева пространства. В ортонормированном случае эта метрика диагональна и состоит из единиц.

Рассмотрим "скалярное" произведение пространственных частей преобразованных векторов F'^{i} и $dr'^{i} = v^{j} dt$:

$$v'^{i} = (v^{0}, v^{i} - v^{i}_{0}) = (1, v^{i}\ \ v^{i}_{0}).$$

$$F'^{i} = (F^{0}, F^{i} - v^{i}_{0} F^{0}) = (0, F^{i}).$$

Скалярное произведение в исходной с.о.:

$$F^{i} v^{i} dt. \tag{15}$$

Скалярное произведение в преобразованной с.о.:

$$F'^{i} v'^{i} dt = F^{i}(v^{i} - v^{i}_{0}) dt. \tag{16}$$

Как видно, (16) отличается от (15) членом $-\ F^{i} v^{i}_{0} dt$, следовательно, рассматриваемая нами "пространственная метрика" "3-мерное расстояние" не является истинным скаляром, поэтому "пространственная метрика" "3-мерное расстояние" не может быть инвариантным метрическим тензором галилеева пространства.

4. Фронт волны в галилеевом пространстве и метрика

Физическим аналогом пространства типа АСО в галилеевом пространстве является сплошная среда с постоянной скоростью распространения волн в любом направлении. Выделенным АСО в ней является с.о., в которой скорость распространения волн "c" численно одна и та же в любом направлении. Для АСО характерно то, что для фронта распространяющейся в пространстве волны всегда и везде выполняется уравнение

$$c^2dt^2 - dr^2 = 0. \tag{17}$$

На основании этого равенства для любых двух точек пространства в этом АСО определена метрика

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2. \tag{18}$$

Скорость "c" является фундаментальной характеристикой волнового галилеева пространства АСО типа "сплошной среды". Далее в работе значение этого параметра принимается равным 1. В тензорном виде метрика будет представлена в виде:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

На основании этой метрики между любыми точками пространства определена, но при определенных условиях – а именно, при нахождении в АСО, операция сопряжения векторов и операция поднятия/опускания индексов (см. выше). Но с ограничением – это "сопряжение" не определено по отношению к пространственным тензорам этого пространства – координатам, скорости, ускорению: оно определено только по отношению к этой с.с. И при переходе в ИСО уже нельзя пользоваться формулой (19) сопряжения векторов напрямую. Для примера рассмотрим сопряжение дифференциала координат $dq^i = (dt, dx^i)$ приведенным выше способом после галилеева преобразования. В новой (подвижной) с.к. имеем

$$dq'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dt \\ dx_i \end{pmatrix} = (dt \quad dx_i - v_0^i dt),$$
$$dq'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_j^0 \\ 0 & \delta_j^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dt \\ -dx^j \end{pmatrix} = (dt - v_j^0 dx^j \quad -dx^i). \tag{20}$$

Как видно из (20), dq'^i и dq'_i не могут быть преобразованы друг в друга приведенным выше в (19) способом, как и предполагалось: dt^0 переходит в $dt_0 - vdx_0$, а этого уже достаточно для такого вывода. Но этот недостаток преодолевается просто: необходимо принять, что сам "метрический" тензор (19) является преобразуемым по правилам ГПТК тензором. При этом псевдоединичный диагональный ковариантный метрический тензор g_{ij} (19) при ГПТК не сохраняет свою структуру, кроме своей симметрии:

$$g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - v_0{}^n v_0{}^m \delta_{nm} & -v_0{}^n \delta_{nj} \\ -v_0{}^m \delta E_{im} & -\delta_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - v^2 & -v_{0j} \\ -v_{i0} & -\delta_{ij} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

А это означает, что в движущейся с.о. в галиеевом пространстве псевдометрика, определенная в одной из ИСО – эквиваленте АСО – изменяет значения своих элементов, что с точки зрения метрики АСО (21) означает переход в не ортонормированную с.о. из изначально ортонормированной с.о. АСО: ее детерминант равен 1, но след не равен 1! в силу не ортонормированности. НО! Именно это верно в галилеевой с.о. относительно ГПТК! Галилеево пространство при этом остается ортонормированным. Возможно, есть другое – не галилеево – пространство, в котором это не так. И заметьте: три пространственных измерения, да и само галилеево пространство, при этом остаются ортонормированными.

С другой стороны, метрический тензор (19) вполне является истинным метрическим тензором, но – только для определенной выше "типа сплошной" среды. В этом смысле оно скорее является "материальным" "метрическим" "тензорным" параметром АСО типа сплошной среды в галилеевом пространстве. Но тогда можно принять, что и само галилеево пространство меняет свою "галилеевость" непонятно на что.

Именно эти противоречивые свойства метрики (19) не позволяют говорить о ней как об определенно истинном или не истинном метрическом тензоре.

Найдем их скалярное произведение, взяв в качестве сомножителей их взаимно сопряженные по (20) векторы.

$$\begin{aligned} dq'^{i}dq'_{i} &= (dt, \quad dx - vdt)(dt - vdx, \quad -dx) = \\ &= dt^2 - vdtdx - dx^2 + vdxdt = \\ &= dt^2 - dx^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Как и ожидалось, их скалярное произведение не изменилось. Но для нахождения векторного произведения двух контравариантных векторов необходимо воспользоваться метрикой (21).

Получили нормальный инвариантный метрический тензор галилеева пространства. Это метрика, соответствующая собственной метрике механики "типа сплошных" сред, в которых распространяется волна, например, звук или даже гравитационная и ЭМ волны. Но с существенным замечанием: с точки зрения галилеева наблюдателя с галилеевыми эталонами и приборами.

Литература

1. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. – М. : Наука, 1972. – 351 с.
2. Детлаф, А. А. Курс общей физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. Высшая школа, 2017. – 245 с.
3. Димитриенко Ю. И. Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. – М. : Высш. шк., 2001. – 575 с. 74
4. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М. : Бином, 2017. – 146 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики: В 10 т. : т. 2. – М.: Физматлит, 2002. – 224 с
6. Тимин В. А. Преобразования галилеевых тензоров. //Galilean Transformations of Tenzors, URL: http://vixra.org/abs/1907.0546

Мои работы

7. http://vixra.org/author/valery_timin

Адрес данной работы:

8. Valery Timin Metrics Galileia Space //Метрики галилеева пространства. URL: viXra:1907.0545