Metrics galileia space
Метрики галилеева пространства

Valery Timin

(April 6, 2020)

Russia, RME

This paper deals with the definition of conjugate vectors and three types of metrics: (dτ, dl, ds) in 3+1 and 4–dimensional Galilean spaces. In Galilean space it is possible to introduce three types of orthonormal metrics:

1) spatial $dl^2 = dr_i dr^i$,
2) time $d\tau = dt$ or $d\tau^2 = dt_0 dt^0$ and
3) wave $ds^2 = d\tau^2 - dl^2$.

В данной работе рассмотрены вопросы определения трех видов метрик: (dτ, dl, ds) в 3+1 и 4–мерном галилеевых пространствах и сопряжения векторов на основе последнего.

Оглавление

1. Метрики галилеева пространства

1. Галилеева метрика

В галилеевом пространстве возможны две независимые метрики: $d\tau$ – координатное время на мировой линии м.т.:

$$d\tau = g_0 dt \quad \text{или} \quad d\tau^2 = g_{00} dt^2 \tag{1.1}$$

и dl – 3–мерное расстояние между двумя точками 3–пространства:

$$dl^2 = dr^2 : t = \text{const}. \tag{1.2}$$

Метрика $d\tau$ является инвариантной метрикой между любыми точками пространства, независимо от галилеевых преобразований координат. Но метрика dl^2 определена только на плоскости одновременности $\tau = \text{const}$.

2. Временнàя метрика

Временная метрика соответствует выражению (1.1):

$$d\tau = g_0 dt \quad \text{или} \quad d\tau^2 = g_{00} dt^2 \tag{1.1}$$

где $d\tau$ – координатное время на мировой линии м.т. Метрика $d\tau$ является инвариантной метрикой между любыми точками пространства, независимо от галилеевых преобразований координат. Действительно, сделаем произвольное преобразование координат:

$$dt' = dt \rightarrow d\tau = dt.$$

Это значит, что в галилеевой механике можно определить глобальное "скалярное" выражение dS_t с использованием линейной "временной метрики" "промежуток времени" одномерного подпространства t:

$$dS_t = \tau_i dq^i = \tau_0 dq^0 = g_0 dt \quad \text{или} \quad dS_t^2 = \tau_{ij} dq^i dq_i = \tau_{00} dt^2. \tag{1.3}$$

где τ_i и τ_{ij} – ковариантные векторное и тензорное поля, аналоги галилеевой 4–метрики, определяющее локальное абсолютное время, для галилеевого пространства $\tau_i = \delta_i = (1,0,0,0)$ и $\tau_{ij} = \delta_{ij}$.

Из того, что "временная метрика" может служить метрикой галилеева пространства, например, в качестве инвариантного скалярного параметра траектории м.т., есть большая польза. Но в остальном польза от ее существования сомнительна.

3. Пространственная 3–мерная метрика

Метрики (1.1) и (1.2) используются в галилеевом пространстве галилеевой механики. В пространстве такой механики скорость распространения информации (а она необходима для проведения измерительных процедур) равна бесконечности. И это доказывается тем, что результат измерения dt (1) и dl не будут зависеть от состояния движения с.о.

Пространственная метрика "расстояние" соответствует выражению (1.2):

$$dl^2 = dr^2\colon t = \text{const}. \tag{1.2}$$

где dl – 3мерное расстояние между двумя точками 3–пространства. Особенностью метрики dl^2 является то, что она определена только на плоскости одновременности $\tau = \text{const}$.

При нарушении этого условия и переходе в другое ИСО "расстояние" меняет свое значение. Действительно, пусть мы имеем две неподвижные точки, отстоящие друг от друга на (dt, dr): $dt \neq 0$. Имеем 3–мерное расстояние между ними $dl^2 = dr^2$. После преобразования координат (перехода в другое ИСО) координаты и расстояние между ними будут равны:

$$\begin{cases} t' = t + \Delta t, \\ r' = r - vt - \Delta r. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dt' = dt, \\ dr' = dr - vdt. \end{cases} \tag{1.4}$$

а расстояние

$$dl'^2 = (dr - vdt)^2 \neq dl^2 \tag{1.5}$$

что не равно расстоянию между ними в состоянии покоя.

В галилеевом пространстве можно определить "скалярное" выражение, аналогичное работе в классической механике Ньютона $A(dt,\ dr)$ и имеющее "метрический" характер, с использованием единичной квадратичной "пространственной метрики" "расстояние" 3–мерного подпространства l_{ij}:

$$\begin{gathered} dA = l_{ij}F^i dr^j = l_{ij}F^i v^j dt, \\ dA' = l_{ij}F'^i v'^j dt. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь l_{ij} – квадратичная пространственная метрика "расстояние" 3мерного подпространства галилеева пространства. В ортонормированном случае эта метрика диагональна и состоит из единиц.

Рассмотрим "скалярное" произведение пространственных частей преобразованных векторов F'^i и $dr'^i = v^j dt$:

$$v'^i = (v^0,\ v^i - v^i{}_0) = (1,\ v^i\ v^i{}_0).$$

$$F'^i = (F^0,\ F^i - v^i{}_0 F^0) = (0,\ F^i).$$

Скалярное произведение в исходной с.о.:

$$F^i v^i dt. \tag{1.7}$$

Скалярное произведение в преобразованной с.о.:

$$F''^i v''^i dt = F^i(v^i - v^i_0)dt. \quad (1.8)$$

Как видно, (1.7) отличается от (1.6) членом $-F^i v^i_0 dt$. Так же, как (1.2) от (1.5). Следовательно, рассматриваемая нами "пространственная метрика" l_{ij} "3–мерное расстояние" не является истинным скаляром, поэтому "пространственная метрика" "3–мерное расстояние" не может быть инвариантным метрическим тензором галилеева пространства.

2. Волновая метрика

Кроме двух предыдущих метрик, приведенных выше и подчиняющихся принципу относительности (однородность и изотропность), в галилеевом пространстве может существовать еще одна метрика – метрика АСО.

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2. \quad (2.1)$$

Это изотропная метрика в галилеевом пространстве, выделяющая некоторое ИСО как выделенная АСО. Основная ее особенность в том, что в этой с.о. существует скалярный параметр "фундаментальная скорость" "c". Целесообразность введения данной метрики в общем то прикладная и определяется тем, что в сплошной среде фронт волны возмущения распространяется именно с этой постоянной скоростью "c" и координаты фронта этой волны в любой момент времени определяются именно этим "метрическим" условием. При постоянном ds фронт волны имеет одну и ту же фазу. Эта метрика вводится из следующих соображений.

В многомерном пространстве процесс распространения волн связан с определенным направлением распространения фронта волны и соответствующими параметрами.

Найдем вид функции $A(t, r)$ в случае плоской волны, предполагая, что колебания носят гармонический характер. Для упрощения направим оси координат так, что бы ось x совпадала с направлением распространения волны, а длина волны при частоте $\omega = 1$ была равна 1. Тогда волновые поверхности будут перпендикулярны к оси x и поскольку все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение A будет зависеть только от x и t:

$$A = A(t, r).$$

Пусть колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$, имеет вид

$$A(0, t) = A\sin 2\pi\omega t.$$

где ω – частота волнового процесса,

Найдем вид колебаний частиц в плоскости, соответствующей произвольному значению x. Для того чтобы пройти путь от плоскости $x = 0$ до плоскости с координатой x, волне потребуется время:

$$\tau = x/c.$$

c – изотропная скорость распространения фронта волны,

Следовательно, колебания частиц, находящихся в плоскости x, будут отставать по времени на τ от колебаний частиц в плоскости $x = 0$, т.е. уравнение колебаний точки, находящейся на расстоянии x от источника колебаний будет иметь вид:

$$A(x, y) = A\sin 2\pi\omega(t - \tau) = A\sin 2\pi\omega(t - x/c).$$

Итак, уравнение плоской волны запишется следующим образом:

$$A = A\sin 2\pi\omega(t - x/c). \tag{2.2}$$

Обратите внимание на знак "–" в этом уравнении.

При наличии пространственных координат произвольная свободная не изотропная волна в неограниченном бесконечном ГП распространяется и вдоль пространственных направлений в соответствии с гармоническим уравнением

$$A(t, r^i) = A_s \sin\left[2\pi\omega\left(t - \frac{c^i}{c}\frac{r^i}{c}\right) + \varphi_s\right] = A_s \sin\left[2\pi\omega\left(t - \frac{c^i}{c^2} r^i\right) + \varphi_s\right].$$

где c^i – ковариантные направление и скорость распространения волны,

φ_s – начальная фаза волнового процесса в начале координат.

Это уравнение называется уравнением бегущей волны.

Заменяя частное $-c^i/c^2$ на ковариантную скорость c_i (обратите внимание на знак "–"), получим эту же формулу с использованием ковариантной скорости:

$$A(t, r^i) = A_s \sin[2\pi\omega(t + c_i r^i) + \varphi_s].$$

В общем виде эти уравнения должны быть записаны в виде

$$\begin{gathered} A(t, r^i) = A_s \sin[2\pi(\omega_0 t + \omega_i r^i) + \varphi_s], \\ \omega_0\,\omega^0 + \omega_i\,\omega^i = 0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

в котором ω_0 – временная ковариантная частота волнового процесса,

ω_i – пространственная ковариантная частота (или направляющий вектор) волнового процесса,

Необходимо иметь в виду, что ковариантная скорость и частота не отражают реальную скорость и частоту. Анализируя вышеприведенные уравнения, можно сделать вывод, что частота ω и скорость c_i, несмотря на свою безиндексность, не являются скалярами или константами. Их роль более сложная, векторная. Типа масштабного множителя, зависящего от выбора эталона времени, длины и скорости волны.

При этом волновая разность фаз $d\varphi$ между любыми двумя точками ПВ в форме (2.3), определяемая скалярным выражением

$$d\varphi = 2\pi(\omega_0 + \omega_i dr^i), \tag{2.4}$$

является инвариантом распространения гармонического монохромного волнового процесса, которую можно принять как линейную метрику, а само уравнение (2.3) является скалярной функцией выражения факта. Для того, чтобы с увеличением значения координаты местоположения фаза волны увеличивалась, необходимо, чтобы параметр ω_i с учетом поднятия/опускания индексов имел реально положительное значение. Но для того, чтобы волна двигалась в направлении увеличения координаты, в соответствии с (2.2) необходимо иметь отрицательное значение ω_i, что соответствует отрицатель ному значению фазы. Но контравариантное(!) значение этой фазы будет соответствовать знаку соответствующей координаты безусловно:

$$\varphi_0 = \varphi^0,\ \varphi_i = -\varphi^i.$$

На основе этой формулы вводится 4–мерное метрическое понятие "интервала", выражаемое формулой (2.1). Для этого организуется 4 взаимно ортогональных волновых поля φ_n, и в волновых качестве координат берутся значения фаз этих 4–х полей в конкретной точке ПВ. При таком преобразовании координат ПВ "волновые" координаты получают индексы и перестают быть скалярами, трансформировавшись из "скаляров" в "координаты" с индексами. ПВ с волновыми полями в качестве метризующего фактора обладают естественными геометрическими свойствами – длиной, временем, взаимной параллельности и перпендикулярности. Если у такого ПВ найдутся абсолютный эталон длины и времени, то волновые координаты по своей сути получат одновременно и свойства "абсолютности", и "относительности".

На основе волновых координат можно определить сопряжение векторов галилеева пространства в смысле правомерности использования аппарата тензорного исчисления, частными случаями применения которой в галилеевом пространстве будут уравнения (2.1) и (2.3).

Несмотря на различные формы записи, все четыре формы "генетически" тесно связаны между собой через метрический тензор.

4. Сопряженные векторы галилеева пространства

Метрики (1.1) и (1.2) записаны без учета положения индексов и их смыслового значения от этого. В ортонормированном базисе галилеева пространства это не имеет большого значения и записи в форме (1.1) и (1.2) имеют вполне объяснимый смысл. Но в тензорном исчислении очень важным моментом является существование операции поднятия/опускания индексов. Эта операция позволяет единообразно определять многие важные моменты этой алгебры. Соответственно индексы с верхним расположением называются контравариантными, а с нижним – ковариантными.

И эта операция тесно связана с существованием в ней полноценной не вырожденной метрики, т.к. именно с ее помощью производится операция поднятия/опускания индексов:

$$A_i = g_{ij}A^j,\qquad A^i = g^{ij}A_j. \tag{2.5}$$

Здесь g_{ij} – метрический тензор. Метрический тензор симметричен относительно главной диагонали. Контравариантный тензор g^{ij} из нее получается взятием обратной матрицы:

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k. \tag{2.6}$$

Здесь δ^i_k – единичная матрица.

Сложность введения метрики в галилеевом пространстве осложняется тем, что не имеется возможности каким либо образом подобрать метрический тензор g_{ij} так, что бы он не был вырожденным. Особенность галилеева пространства в том, что координата "время" по определению всегда ортогональна пространственным направлениям, т.е она независима от пространственных. А это возможно только в том случае, если метрический тензор будет зависеть либо только от пространственных, либо только от временных координат вектора. Как следствие, любой не вырожденный метрический тензор определяет не галилеево пространство.

Соответствующие друг другу контравариантный и ковариантный векторы называются сопряженными. Именно через сопряженные векторы определяется скалярное произведение векторов:

$$A \cdot B = A^i B_i. \tag{2.7}$$

В галилеевом пространстве, как и в любом другом тензорном пространстве, такое скалярное произведение двух векторов определено по умолчанию и оно имеет вполне тривиальное выражение для любых двух взаимно сопряженных векторов.

В тензорной алгебре сопряженный вектор может быть получен операцией опускания индексов для контравариантных и операцией поднятия индексов для ковариантных векторов. Операция поднятия/опускания индексов осуществляется с помощью невырожденного, а в ортонормированном метрическом пространстве диагонального единичного метрического тензора g_{ij} и g^{ij}:

$$\begin{gathered} g_{ij}A^j = A_j \text{ – опускание индекса,} \\ g^{ij}A_j = A^j \text{ – поднятие индекса.} \end{gathered} \tag{2.8}$$

Но здесь проблема в другом – в галилеевом пространстве принципиально не определена не вырожденная операция сопряжения. Следовательно, невозможно стандартно определить сопряженные вектора. А с помощью вырожденных операции сопряжения получаются две метрики, соответствующие формулам (1.1) и (1.2). При этом при сопряжении по временному индексу изменяется положение временного индекса, а при сопряжении по пространственному индексу $i \in \{1..3\}$ изменяется положение пространственных индексов. Поэтому в галилеевом пространстве векторы либо изначально контравариантны, либо изначально коавариантны.

Но есть способ определить не стандартный не вырожденный сопряженный вектор (тензор) и в этом случае. Выбирается какая либо с.к. и определяется как выделенная (аналог – АСО – абсолютная система отсчета). В этой с.к. для вектора (тензора), не имеющего сопряженного, делается сопряжение вектора (тензора) по следующему правилу:

1) При сопряжении по временному индексу значение сопряженного элемента не изменяется.

2) При сопряжении по пространственному индексу значение сопряженного элемента изменяется на противоположное.

Данный способ сопряжения связан с метрикой, определяемой с формулой (2.1). Знак "+" связан со знаком при временном элементе dt в формуле (2.1). А знак "–" при пространственных элементах dr связан со знаком при пространственных элементах (2.1). В результате получается абсолютное галилеево пространство–время с выделенной с.к. (АСО), в которой допустимы нормальные галилеевы преобразования координат и тензоров. Галилеево оно потому, что применяются галилеевы преобразования координат, а АСО – потому, что операция сопряжения определена только для выделенного ИСО, а в произвольных ИСО будет необходимо проводить операцию сопряжения через возврат в АСО и обратное преобразование в ИСО.

Для пары исходно сопряженных векторов формула (2.7) остается в силе. Но при наличии только с обоими либо верхними, либо нижними индексами векторов при переходе в ИСО эти правила изменяются. Для получения пары сопряженных векторов будет необходимо у одного из векторов поднять (или опустить) индексы. Это можно сделать

1) либо заранее в исходной с.о. (АСО),

2) либо из ИСО перевести в АСО, получить сопряженный вектор и после этого перейти снова в ИСО,

3) либо воспользоваться преобразованным метрическим тензором (2.12) (см. далее).

Такое сопряжение можно назвать "материальным". Ее смысл в том, что оно определяет некоторое материальное "волновое" пространство, аналогом которой является сплошная среда. При этом, конечно, "волновая" среда в произвольном ИСО получает некоторую скорость.

5. Волны в галилеевом пространстве и метрика

Физическим аналогом пространства типа АСО в галилеевом пространстве является сплошная среда с постоянной скоростью распространения волн в любом направлении. Выделенным АСО в ней является с.о., в которой скорость распространения волн "c" численно одна и та же в любом направлении. Для АСО характерно то, что для фронта распространяющейся в пространстве волны всегда и везде выполняется уравнение

$$c^2dt^2 - dr^2 = 0. \tag{2.9}$$

На основании этого равенства для любых двух точек пространства в этом АСО определена метрика

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2. \tag{2.10}$$

Скорость "c" является фундаментальной характеристикой волнового галилеева пространства АСО типа "сплошной среды". Далее в работе значение этого параметра принимается равным 1. В тензорном виде метрика будет представлена в виде:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

На основании этой метрики между любыми точками пространства определена, но при определенных условиях – а именно, при нахождении в АСО, операция сопряжения векторов и операция поднятия/опускания индексов (см. выше). Но с ограничением – это "сопряжение" не определено по отношению к пространственным тензорам этого пространства – координатам, скорости, ускорению: оно определено только по отношению к этой с.с. И при переходе в ИСО, движущуюся со скоростью v^i, уже нельзя пользоваться формулой (2.11) сопряжения векторов напрямую. Для примера рассмотрим сопряжение дифференциала координат $dq^i = (dt, dx^i)$ приведенным выше способом после галилеева преобразования. В новой (подвижной) с.к. имеем

$$\begin{gathered} dq'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_{i0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dx^i \end{pmatrix} = (dt \quad dx^i - v_0^i dt), \\ dq'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_{0j} \\ 0 & \delta_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ -dx^j \end{pmatrix} = (dt - v_j^0 dx^j \quad -dx_i). \end{gathered} \tag{2.12}$$

Как видно из (2.12), dq'^i и dq'_i не могут быть преобразованы друг в друга приведенным выше в (2.11) способом, как и предполагалось: dt^0 переходит в $dt_0 - vdx_0$, а этого уже достаточно для такого вывода. Но этот недостаток преодолевается просто: необходимо принять, что сам "метрический" тензор (2.11) является преобразуемым по правилам ГПТК тензором. При этом псевдоединичный диагональный ковариантный метрический тензор g_{ij} (2.11) при ГПТК не сохраняет свою структуру, кроме своей симметрии:

$$g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - v_0{}^n v_0{}^m E_{nm} & -v_0{}^n E_{nj} \\ -E_{im} v_0{}^m & -E_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - v^2 & -v_{0j} \\ -v_{i0} & -E_{ij} \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Учитывая, что $-v_{0j} = v^{0j} = v^j$, где v^j – скорость АСО, эту же формулу (2.13) можно записать в виде

$$g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - v^2 & v^j \\ v^i & -E_{ij} \end{pmatrix}. \qquad (2.13)^*$$

А это означает, что в движущейся с.о. в галиеевом пространстве псевдометрика, определенная в одной из ИСО – эквиваленте АСО – изменяет значения своих элементов, что с точки зрения метрики АСО (2.13) означает переход в не ортонормированную с.о. из изначально ортонормированной с.о. АСО: ее детерминант равен 1, но след не равен 1! в силу не ортонормированности. НО! Именно это верно в галилеевой с.о. относительно ГПТК! Галилеево пространство при этом остается ортонормированным. Возможно, есть другое – не галилеево – пространство, в котором это не так. И заметьте: три пространственных измерения, да и само галилеево пространство, при этом остаются ортонормированными.

С другой стороны, метрический тензор (2.11) вполне является истинным метрическим тензором, но – только для определенной выше "типа сплошной" среды. В этом смысле оно скорее является "материальным" "метрическим" "тензорным" параметром АСО типа сплошной среды в галилеевом пространстве. Но тогда можно принять, что и само галилеево пространство меняет свою "галилеевость" непонятно на что.

Именно эти противоречивые свойства метрики (2.11) не позволяют говорить о ней как об определенно истинном или не истинном метрическом тензоре.

Найдем их скалярное произведение, взяв в качестве сомножителей их взаимно сопряженные по (2.12) векторы.

$$\begin{aligned} dq'^i dq'_i &= (dt, \quad dx - vdt)(dt - vdx, \quad -dx) = \\ &= dt^2 - vdtdx - dx^2 + vdxdt = \\ &= dt^2 - dx^2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Как и ожидалось, их скалярное произведение не изменилось. Но для нахождения векторного произведения двух контравариантных векторов необходимо воспользоваться метрикой (2.13).

Получили нормальный инвариантный метрический тензор галилеева пространства. Это метрика, соответствующая собственной метрике механики "типа сплошных" сред, в которых распространяется волна, например, звук или даже гравитационная и ЭМ волны. Но с существенным замечанием: с точки зрения галилеева наблюдателя с галилеевыми эталонами и приборами.

3. Сокращения и другие соглашения

(*) А – абсолютное, В – время, Г – галилеево, И – инерциальное, К – координаты, квантовая, М – механика, метрическое Н – ньютоново, неинерциальная, О – отсчета, относительности, общая, П – пространство, Р – релятивистская, С – система, специальная, Т – теория, тензоры, Ф – физика, Ч – частная,	АПВ – ПВ с абсолютным временем и пространством. АСО (АИСО) – абсолютная (инерциальная) система отсчета, ВП – волновое пространство, ГП – галилеево пространство, ГВП – галилеево волновое пространство, ИСО – инерциальная система отсчета – координатная с.о., полученная из исходного ортонормированным линейным преобразованием координат и тензоров (ЛПТК), ЛПТК – линейные преобразования тензоров и координат, МГП – метрическое галилеево пространство, ПВ – пространство–время, ГПВ – галилеево пространство–время, ПТК – преобразования тензоров и координат. СО, с.о. – система отсчета, СК, с.к. – система координат, (и)т.д. – (и) так далее, (и)т.п. – (и) тому прочие, в т.ч. – в том числе, т.з. – точка зрения, с.с. – сплошная среда.

1) *При использовании более чем одной буквы.
2) Выделение красным цветом в формуле может обозначать равный нулю элемент формулы или выражения.
3) По одинаковым верхнему и нижнему индексам производится свертка (суммирование) соответствующих элементов (по правилу Эйнштейну).
4) По индексу в скобке типа "$_{(k)}$" или "$^{(k)}$" свертка не выполняется, но она привязана к соответствующему тензорному или другому индексу "функционально".
5) Формат ссылок на формулы: (N). При необходимости указания на конкретную строку формулы применяется формат (N):n, где n – номер строки формулы, начиная с 1 (единицы), причем эта нумерация продолжается и на дальнейшие не нумерованные формулы.

4. Литература

1. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. – М. : Наука, 1972. – 351 с.

2. Детлаф, А. А. Курс общей физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. Высшая школа, 2017. – 245 с.

3. Димитриенко Ю. И. Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. – М. : Высш. шк., 2001. – 575 с. 74

4. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М. : Бином, 2017. – 146 с.

5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики: В 10 т. : т. 2. – М.: Физматлит, 2002. – 224 с

Мои работы

6. Тимин В. А. Преобразования галилеевых тензоров. //Galilean Transformations of Tenzors, URL: http://vixra.org/abs/1907.0546

7. http://vixra.org/author/valery_timin

Адрес данной работы:

8. Valery Timin Metrics Galileia Space //Метрики галилеева пространства. URL: viXra:1907.0545

E–Mail: timinva@yandex.ru