Galilean transformations of vectors

Valery Timin

(July 2019)

Russia

This paper deals with the orthonormal transformation of vectors of the 4-dimensional Galilean space. Such transformations are transformations of rotation and transition to a moving coordinate system. Formulas and matrices of these transformations are given.

The transition from one coordinate system to another, moving relative to the first, did long before the theory of relativity. The natural space for "transitions from one coordinate system to another" is the Galilean space. It is the space of classical mechanics. This paper focuses on the 4-dimensional interpretation of such transformations.

В данной работе рассмотрены вопросы ортонормированного преобразования векторов 4-мерного галилеева пространства. Такими преобразованиями являются преобразования поворота и перехода в движущуюся систему координат. Даны формулы и матрицы этих преобразований.

Галилеевы преобразования векторов

Переход от одной системы координат к другой, движущейся относительно первой, делали задолго до появления теории относительности. Естественным пространством для "переходов от одной системы координат к другой" является галилеево пространство. Именно оно является пространством классической механики. В данной работе сделан упор на 4-мерной интерпретации таких преобразований.

1. *Преобразования контравариантных векторных параметров*

В тензорном 4–х мерном виде координаты и время ведут себя как контравариантные векторы и в общем случае (но при отсутствии смещений координат) преобразуются следующим образом:

$$q'^i = g^i{}_j q^j, \tag{1.1}$$

где $g^i{}_j$ – тензор произвольного линейного преобразования. Галилеевы преобразования представляют только часть преобразований (1):

$$\begin{gathered} t' = t, \\ r'^i = \omega^i{}_j r^j - v^i{}_0 t, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $v^i{}_0$ – векторный параметр галилеева преобразования, физически соответствующая скорости новой с.о. в старой,

ω^i_j – тензор ортонормированного поворота пространственного слоя новой с.о. в старой.

При смешанном матрично-тензорном (далее – матричном) способе представления тензоров вектор будет соответствовать матрице–столбцу, тензор 2–го ранга – квадратной матрице, где строки будут соответствовать 1–му индексу, столбцы – 2–му индексу. Матрица преобразования координат g^i_j (1.2) будет определяться следующим выражением:

$$g^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i_0 & \omega^i_j \end{pmatrix}. \tag{2}$$

где $v^i_0 \sim v^i$ – скорость новой системы отсчета относительно старой. Здесь v^i_0, v^i (а также далее еще $v^i_{(0)}$) численно соответствуют друг другу, поэтому в дальнейшем изложении мы в записях подобного вида будем иметь в виду, что при параметре v^i (v^j) по контексту может иметься еще ковариантный индекс со значением 0.

Таким образом, преобразование (1) координат с помощью тензора (2) можно записать в матричном виде:

$$q'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i_0 & \omega^i_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^0 \\ r^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^0 \\ \omega^i_j r^j - v^i_0 1^0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Из этих преобразований видно, что в координатах при наличий только галилеевых преобразований изменяется только ее пространственная часть, а временная часть не изменяется.

2. Преобразования контравариантных векторных параметров

Векторными параметрами галилеева пространства являются кроме координат (с ограничением, описанным выше) также скорость и ускорение. Рассмотрим галилеевы преобразования скорости и ускорения в дифференциальной и тензорной формах.

Для скорости в дифференциальной форме имеем:

$$\frac{dq'^i}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} t \\ r^i - v^i_0 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v^i - v^i_{(0)} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Отдельно заметим, что $v_0 = dt/dt \equiv 1$.

Уравнение (4) фактически описывает закон сложения (или вычитания?) скоростей. Применив 4–х мерные преобразования в тензорной форме к вектору скорости непосредственно, получим то же самое:

$$v'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i_0 & \delta^i_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^0 \\ v^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^0 \\ v^i - v^i_0 1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v^i - v^i_{(0)} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Кроме преобразования равномерного прямолинейного движения новой с.о. возможен также поворот системы координат. При отсутствии галилеевой составляющей преобразования координат и наличии только поворота пространственная часть вектора координаты, скорости и ускорения преобразуются как тензоры, а временная составляющая остается прежней. Например, для скорости:

$$v'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega^i_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^0 \\ v^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^0 \\ \omega^i_j v^j \end{pmatrix}. \tag{6}$$

При наличии обеих видов преобразований результат будет следующий:

$$v'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \omega_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^0 \\ v^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^0 \\ \omega_j^i v^j - v_0^i 1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_j^i v^j - v_{(0)}^i \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Для вектора ускорения аналогично. Для ускорения в дифференциальной форме имеем:

$$\frac{d^2 q'^i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} t \\ r^i - v_0^i t \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 \\ v^i - v_{(0)}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w^j \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Заметим: $w_0 = d^2t/dt^2 = dv/dt \equiv 0$. Применим 4–х мерные преобразования в тензорной форме к вектору ускорения:

$$w'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \delta_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^i w^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w^j \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Из вида этих преобразований видно, что координата, скорость и ускорение при 4–х мерных галилеевых преобразованиях координат ведут себя одинаково – как контравариантные тензорные величины (векторы), и нет необходимости делить их на векторы разной природы при преобразованиях координат в четырехмерном виде, но при этом $v^0 \equiv 1$, $w^0 \equiv 0$.

Запишем в общем виде преобразования для произвольного контравариантного вектора галилеева пространства A^i:

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \omega_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ -v_0^i A^0 + \omega_j^i A^j \end{pmatrix}. \tag{10}$$

В контравариантном векторе при наличий только галилеевых преобразований изменяется только пространственная часть вектора, временная часть не изменяется.

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \delta_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ -v_0^i A^0 + A^j \end{pmatrix}.$$

Если временная часть равна 0, то вектор только поворачивается (9):

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \omega_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_j^i A^j \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Если временная часть вектора нулевая и нет поворота с.о., то при любой скорости новой с.о. вектор вообще не изменяется:

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \delta_j^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^i A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A^i \end{pmatrix}. \tag{12}$$

3. Преобразования ковариантных векторных параметров

Для получения этой формулы в качестве примера рассмотрим, как ведет себя градиентное поле $A = \partial\varphi(x,t)/\partial q = \{\partial\varphi/\partial t, \partial\varphi/\partial x\}$ при галилеевых преобразованиях системы координат. Пусть новая система координат движется в направлении оси x со скоростью v_x. Тогда:

$$\begin{gathered} A'_x = \frac{\partial\varphi'}{\partial x'} = \\ = \frac{\varphi(x' + v^x dt + dx, t') - \varphi(x' + v^x dt, t')}{x' + v^x dt + dx - (x' + v^x dt)} = \end{gathered} \tag{13}$$

$$= \frac{\varphi(x' + v^x dt + dx, t') - \varphi(x' + v^x dt, t')}{dx} =$$

$$= \frac{\varphi(x' + v^x dt, t') + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx - \varphi(x' + v^x dt, t')}{dx} =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = A_x.$$

т.е. пространственная часть градиентного поля не меняется. Для временной составляющей:

$$A'_0 = \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} = \frac{\partial \varphi'}{\partial t} =$$
$$= \frac{\varphi(x' + v_0 dt, t' + dt) - \varphi(x', t')}{dt} =$$
$$= \frac{\varphi(x', t') + \frac{\partial \varphi}{\partial x} v_0 dt + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt - \varphi(x', t')}{dt} = \tag{14}$$
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} v_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = A_0 + v^x A_x.$$

т.е. временная часть градиентного поля изменяется. В векторной форме формула преобразования градиента скалярной функции будет следующей:

$$\mathrm{grad}\varphi' = \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t'}, \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_0^x \frac{\partial \varphi'}{\partial r^i}, \frac{\partial \varphi'}{\partial r^i}\right). \tag{15}$$

В тензорно-матричном виде это запишем в виде:

$$\mathrm{grad}\varphi' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_0^x \frac{\partial \varphi}{\partial r^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial r^i}\right) = \begin{pmatrix} 1 & v_0^x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial r^i} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

При наличии еще и поворота с.о.:

$$\mathrm{grad}\varphi' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_0^x \frac{\partial \varphi}{\partial r^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial r^i}\right) = \begin{pmatrix} 1 & v_0^x \\ 0 & \omega_i^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial r^j} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Матрица преобразования $g_i^{\ j}$ (16) и (17) отличается от случая преобразования контравариантных векторов тем, что она подверглась диагональному переворачиванию с изменением знаков элементов $g_0^{\ j}$: с $-v_0^j$ поменялась на $+ v_0^j$. Это соответствует поднятию ковариантных и опусканию контравариантных индексов соответствующего тензора: при этой операции временные элементы с индексом 0 не изменяют своего знака, а с пространственными индексами изменяют свой знак.

Обобщая формулу преобразования градиента скалярной функции на любые вектора, имеем:

$$A'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_0^j \\ 0 & \omega_i^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + v_0^j A_j \\ \omega_i^j A_j \end{pmatrix}. \tag{18}$$

В ковариантном векторе при наличий только галилеевых преобразований изменяется только временная часть вектора, пространственная часть не изменяется. Если пространственная часть равна 0, то вектор не изменяется:

$$A'_i = \begin{pmatrix} 1 & v_0^j \\ 0 & \omega_i^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Элементы g^i_j и g_i^j тензора также численно совпадают между собой. Это связано с тем, что вектора A^i и A_i должны поворачиваться в одну и ту же сторону, с тем, чтобы их скалярное произведение было равно единице.

4. Некоторые следствия и выводы по галилеевым преобразованиям векторов

Преобразование контравариантного вектора A_i осуществляется по формуле:

$$A'^i = v_j^i A'^i;$$
$$v_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_0^i & \omega_j^i \end{pmatrix} = G_u. \quad (20)$$

Преобразование ковариантного вектора B_i осуществляется по формуле:

$$B'_i = v_i^j B_j;$$
$$v_i^j = \begin{pmatrix} 1 & v_0^j \\ 0 & \omega_i^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \end{pmatrix} = G_d. \quad (21)$$

1. Из анализа выражения преобразований векторов видно, что в ковариантном векторе при наличий только галилеевых преобразований изменяется только временная часть вектора A_t, пространственная часть A_r не изменяется. Если пространственная часть равна 0, то вектор не изменяется. В контравариантном векторе при наличий только галилеевых преобразований изменяется только пространственная часть вектора, временная часть не изменяется. Если временная часть равна 0, то вектор не изменяется.

2. Из этих выражений также видно, что значения ковариантного и контравариантного векторов классической механики должны отличаться друг от друга своими значениями, потому что преобразуются по разным выражениям с разными знаками приращения при разных частях выражения. В результате таких преобразований даже можно обнулить временную часть ковариантного вектора и пространственную часть контравариантного вектора, но нельзя обнулить весь вектор.

3. Рассмотрим скалярные произведения каждой из частей преобразованных векторов A'_i и B'^j:

$$A'_i = (A_0 + v_0{}^i A_i, A_i),$$
$$B'^j = (B^0, B^i - v^i{}_0 B^0).$$

Произведение временных частей:

$$A'_0 B'^0 = (A_0 + v_0{}^i A_i) B^0 = A_0 B^0 + v_0{}^i A_i B^0. \quad (22.1)$$

Для пространственной части:

$$A'_i B'^i = A_i (B^i - v^i{}_0 B^0) = A_i B^i - A_i v^i{}_0 B^0. \quad (22.2)$$

Найдем сумму этих частей и сравним ее с произведением AB:

$$A'B' = \quad (22)$$

$$= ((A_0 + A_j v_0{}^j)B^0 + A_j(B^j - B^0 v_0{}^j)) =$$
$$= (A_0 B^0 + A_j v_0{}^j B^0 + A_j B^j - A_j v_0{}^j B^0) =$$
$$= (A_0 B^0 + A_j B^j)=$$
$$= A'_0 B'^0 + A'_i B'^i.$$

т.е. для любых двух векторов A_i и B^i их **прямое "скалярное" произведение является инвариантом при галилеевых преобразованиях**. Это следовало ожидать из тензорных свойств векторов и тензорного характера галилеевых преобразований координат (см. далее). Это верно также при любых значениях метрического тензора классической механики, потому что оно относится непосредственно к любым контравариантным и ковариантным векторам.

Из него невозможно сделать какие либо выводы относительно 4–метрики пространства: формулы (22) не используют какую либо определенную метрику 4-мерного галилеева пространства.

5. *Сопряженные векторы*

Соответствующие друг другу контравариантный и ковариантный векторы называются сопряженными. Именно через сопряженные векторы определяется скалярное произведение векторов:

$$A{\cdot}B = A^i B_i.$$

В галилеевом пространстве такое скалярное произведение двух векторов можно определить в соответствии с формулами (22).

В тензорной алгебре сопряженный вектор может быть получен операцией опускания индексов для контравариантных и операцией поднятия индексов для ковариантных векторов. Операция поднятия-опускания индексов осуществляется с помощью невырожденного, а в ортонормированном метрическом пространстве еще и диагонального метрического тензора g_{ij} и g^{ij}:

$$g_{ij}A^j = A_j \text{ – опускание индекса,}$$
$$g^{ij}A_j = A^j \text{ – поднятие индекса.}$$

Но в галилеевом пространстве такого тензора не имеется. Следовательно, невозможно стандартно определить сопряженные вектора.