II. LA CONJETURA DE COLLATZ.
Orden y armonía en los números de las secuencias. (Continuación).

por

Miguel Cerdá Bennassar

Noviembre 2019

No se puede entender este escrito si no se conoce el anterior de Agosto 2019.

La tabla de los números pares:

	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	. . .
n																																																						
0		2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100	102	. . .
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	. . .
2			1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13		14		15		16		17		18		19		20		21		22		23		24		25		. . .
3					1				2				3				4				5				6				7				8				9				10				11				12				. . .
4									1								2								3								4								5								6				. . .
5																	1																2																					. . .
6																																	1																					. . .
7																																																						

Pares	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	6	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	. . .

En la fila “Pares”, la cantidad de divisores de k de la forma 2^n. También son la cantidad de iteraciones n/2 que necesita el número par para llegar al número impar. También son la n-ésima potencia 2 que divide a los números pares: 2^1|2, 2^2|4, 2^1|6, 2^3|8, 2^1|10, 2^2|12, . . . También son el valor de n del último número impar de las columnas y también son la cantidad de números pares que hay en las columnas.

La tabla de los números impares:

	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	. . .
n																																																						
0		1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101	. . .
1		2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	86	89	92	95	98	101	104	107	110	113	116	119	122	125	128	131	134	137	140	143	146	149	152	
2			8		17		26		35		44		53		62		71		80		89		98		107		116		125		134		143		152		161		170		179		188		197		206		215		224		
3					26				53				80				107				134				161				188				215				242				269				296				323				
4									80								161								242								323								404								485				
5																	242																485																		728				
6																																	728																					
7																																																						

Impares	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	6	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	. . .

En la fila “Impares”, la cantidad de divisores de k de la forma 2^n. También son la cantidad de iteraciones (3n+1)/2 que necesita el primer número impar de la columna para llegar al número par. También son el valor de n del último número par de las columnas y también son la cantidad de números impares que hay en las columnas.

A continuación, las tablas de números pares y de números impares agrupadas en una sola tabla:

	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	...
n																																																						
0		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	...
1		2	1	5	2	8	3	11	4	14	5	17	6	20	7	23	8	26	9	29	10	32	11	35	12	38	13	41	14	44	15	47	16	50	17	53	18	56	19	59	20	62	21	65	22	68	23	71	24	74	25	77	...
2				8	1			17	2			26	3			35	4			44	5			53	6			62	7			71	8			80	9			89	10			98	11			107	12			116	
3								26	1							53	2							80	3							107	4							134	5							161	6				
4																80	1															161	2															242	3				
5																																242	1																				
...																																																						

A partir de las columnas k de la tabla, formamos los triángulos de la siguiente manera:

Empezando por k impar, cada fila del triángulo es 2k+1 y empezando por k par, cada fila es 2k.

Ejemplos de triángulos formados con las columnas k impar:

k											k										k											k											k							
		0										4											6											10											12						
1		1	2								9	9	14								13		13	20								21		21	32								25		25	38					
3		3	5	8							19	19	29	44							27		27	41	62							43		43	65	98							51		51	77	116				
7		7	11	17	26						39	39	59	89	134						55		55	83	125	188						87		87	131	197	296						103		103	155	233	350			
15		15	23	35	53	80					79	79	119	179	269	404					111		111	167	251	377	566					175		175	263	395	593	890					207		207	311	467	701	1052		
31		31	47	71	107	161	242				159	159	239	359	539	809	1214				223		223	335	503	755	1133	1700				351		351	527	791	1187	1781	2672				415		415	623	935	1403	2105	3158	
...		...	...	...	...	...	...	...			...	...	...	...	...	...	...				...		...	...	...	...	...	...				...		...	...	...	...	...	...	...			...		...	...	...	...	...	...	

Ejemplos de triángulos formados con las columnas k par:

k											k										k											k											k							
		1										3											5											7											9						
2		2	1								6	6	3								10		10	5								14		14	7								18		18	9					
4		4	2	1							12	12	6	3							20		20	10	5							28		28	14	7							36		36	18	9				
8		8	4	2	1						24	24	12	6	3						40		40	20	10	5						56		56	28	14	7						72		72	36	18	9			
16		16	8	4	2	1					48	48	24	12	6	3					80		80	40	20	10	5					112		112	56	28	14	7					144		144	72	36	18	9		
32		32	16	8	4	2	1				96	96	48	24	12	6	3				160		160	80	40	20	10	5				224		224	112	56	28	14	7				288		288	144	72	36	18	9	
...		...	...	...	...	...	...	...			...	...	...	...	...	...	...				...		...	...	...	...	...	...				...		...	...	...	...	...	...	...			...		...	...	...	...	...	...	

Todas las columnas de impares de la tabla las podemos poner como filas de los triángulos.
Las columnas de números pares de la tabla también son las columnas de los triángulos, si les sumamos 1 a sus números.

Ejemplo: La columna k(39) de la tabla es la fila k(39) del triángulo T(4) y la columna k(40) de la tabla está en la primera columna del mismo triángulo T(5).

	k	. . .	39	40
n				
0		. . .	39	40
1		. . .	59	20
2			89	10
3			134	5
4				
5				
. . .				

sección de la tabla

4					
9	14				
19	29	44			
39	59	89	134		
79	119	179	269	404	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

triángulo impares

5					
10	15				
20	30	45			
40	60	90	135		
80	120	180	270	405	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

triángulo pares.

A es el primer número de la columna k(39).
B es el último número de la columna k(39).
C es el último número de la columna k(40).

A	39	19	9	4	14	44	134	B
A+1	40	20	10	5	15	45	135	B+1
				C				

(A+1)*(3/2)^n = B+1

$$(A+1)\times 3^n = (B+1)\times 2^n = C\times 6^n$$

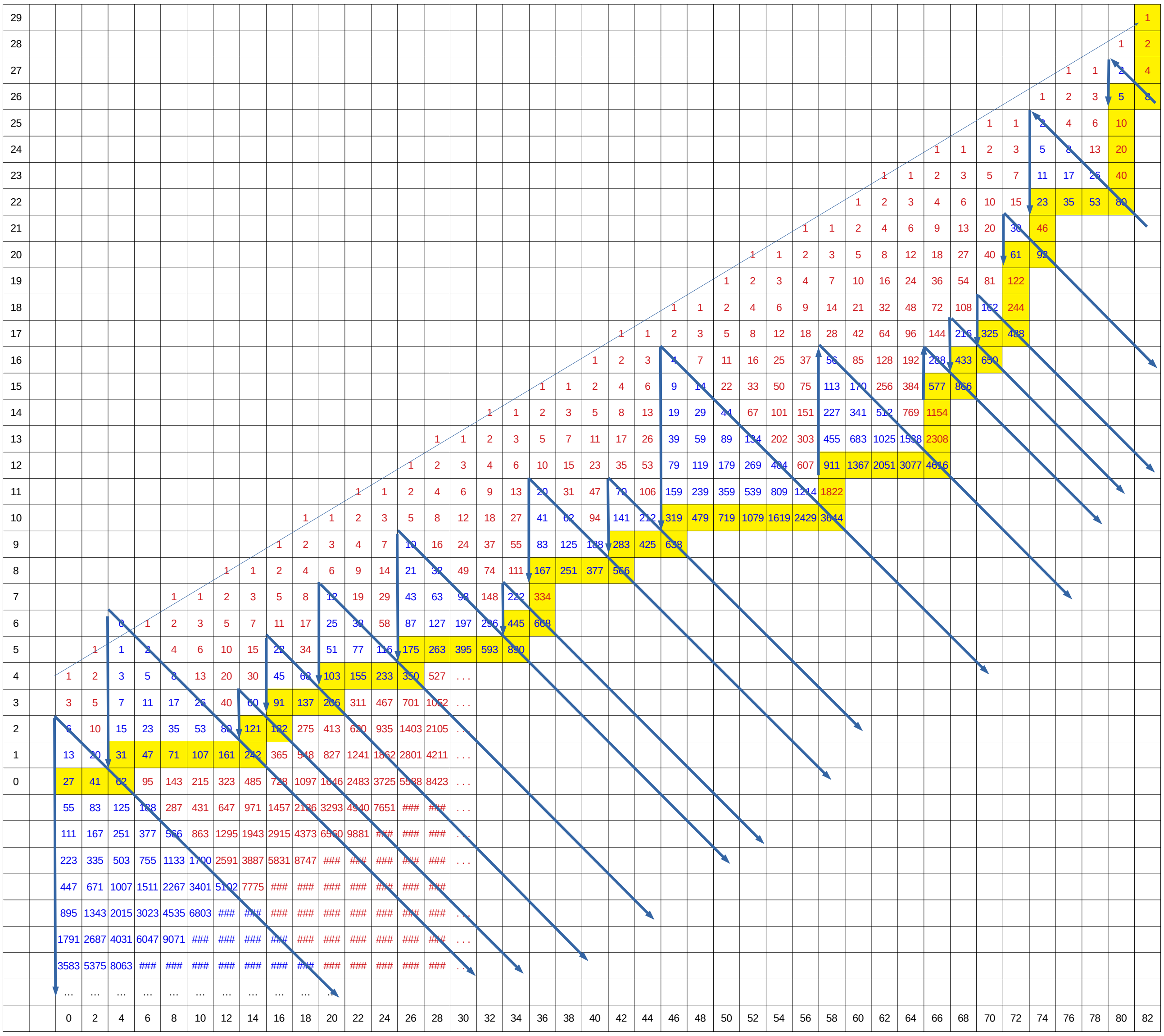
Podemos formar una tabla con los triángulos implicados y representar gráficamente el desarrollo de las secuencias obtenidas con el algoritmo de la conjetura de Collatz.

12													1				
11											0	1	2				
10										1	1	2	4				
9										2	3	5	8	8	4	2	1
8							1			4	6	10					
7					1		2			8	13	20	10	5			
6					2		4		11	17	26						
5		1			4		9	14	22	11							
4		2			8		19	29	44								
3		4			16		38										
2		9	14		33	50	76	38	19								
1		19	29	44	67	101	152										
0		39	59	89	134												
		0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22				

En la tabla anterior, los triángulos implicados en la secuencia empezada con el número 39, que ha necesitado 34 pasos, 12 verticales y 22 horizontales, para llegar al 1.

Los números en color rojo fuera de los triángulos marcan la línea donde se sitúan los números 1

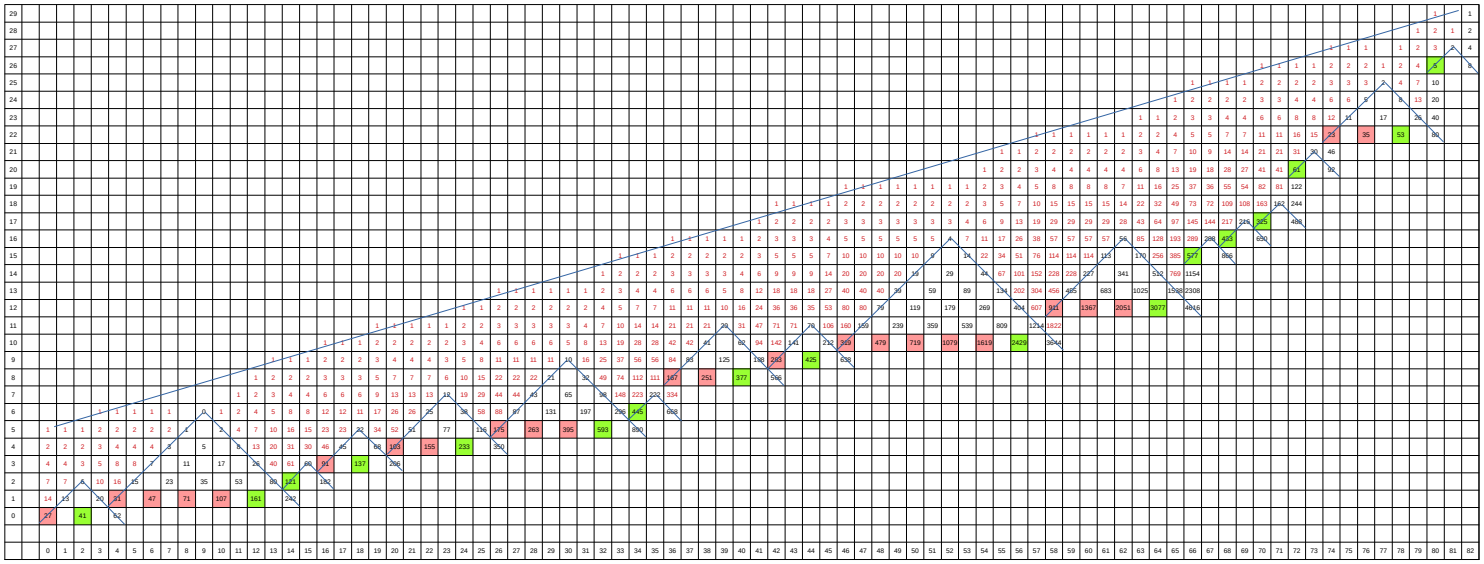
Después de salir del primer triángulo, la secuencia recorre su ruta hasta el 1 por las filas de un número indeterminado de triángulos, como se puede ver en la siguiente tabla de la secuencia empezada con el número 27.



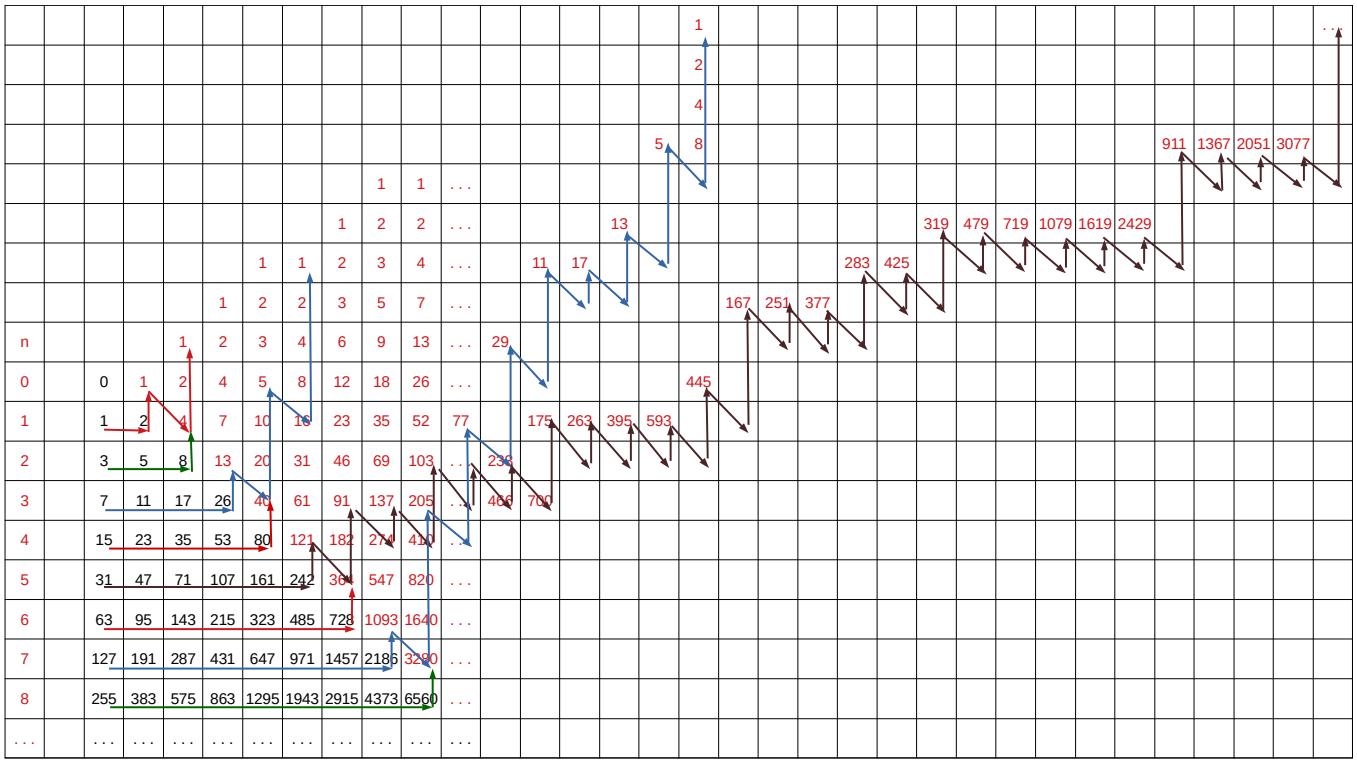
Los pasos horizontales en las filas de los triángulos de números impares, hacen que la secuencia se aleje de la línea de los números 1 y son los pasos verticales de los números pares los responsables de que la secuencia se acerque a dicha línea.

Todas las columnas de la tabla terminan en el número 1 y cualquier secuencia por larga que sea, llegará siempre a la columna que le lleve al número 1, porque hay infinitas columnas.

Los diferentes ciclos de las secuencias se pueden representar también como filas de triángulos equiláteros:



En la tabla siguiente, desarrollada a partir del triángulo T(0), se podrá representar cualquier secuencia cuyo primer número impar de la misma esté en ese triángulo.



Las filas del triángulo n(1), n(2), n(3), n(4), . . . son las columnas k(1), k(2), k(4), k(8), . . . de la tabla de los números impares.

Muchas secuencias comparten la misma trayectoria desde la salida del triángulo hasta llegar al 1. En esta tabla, los números de las secuencias que comparten la ruta son los de n(1) con n(2), n(3) con n(4), n(5) con n(6), n(7) con n(8), etc. Las 44 secuencias que se podrían formar empezando con cada uno de los 44 números del triángulo, todas tendrían solamente 4 rutas por las que llegar hasta el 1. Esto ocurre no solamente en el primer triángulo de la tabla, sino en todos los que intervienen en el recorrido de la secuencia, con lo que muchas otras secuencias también pueden compartir el resto de la ruta.

También en la tabla de los números impares podemos identificar las columnas que tienen los números impares de las secuencias que compartirán la misma ruta hasta el 1 y podemos formar el triángulo, o parte de él, escogiendo una columna k(n) y continuar con k(n)*2^n y cada columna será una fila del triángulo.

Un ejemplo:	Comenzamos por la columna	k(10)	19, 29, 44
		k(20)	39, 59, 89, 134
		k(40)	79, 119, 179, 269, 404
		k(80)	159, 239, 359, 539, 809
		. . .	. . .

Podríamos seguir formando el triángulo hasta infinito. Si la primera columna elegida hubiese sido la k(5) 9, 14, el triángulo estaría completo y solamente faltaría poner el número 4 en el vértice.

Tres ejemplos de tablas desarrolladas en los triángulos T(4), T(6) y T(10):

										1		
									1	2		
							1	1	2	3		
					1	1	2	2	3	5		
				1	2	2	3	4	6	9		
			1	2	3	4	5	8	11	17		
		1	2	3	5	7	10	15	22	33		
n		2	4	6	9	13	19	29	43	65		
0		4	7	11	17	26	38	57	86	129		
1		9	14	21	34	51	76	114	171	257		
2		19	29	44	67	101	152	228	342	513		
3		39	59	89	134	202	304	456	684	1026		
4		79	119	179	269	404	607	911	1367	2051		
5		159	239	359	539	809	1214	1821	2731	4101		
6		319	479	719	1079	1619	2429	3644	5467	8201		
7		639	959	1439	2159	3239	4859	7289	10934	16402		
8		1279	1919	2879	4319	6479	9719	14579	21869	32804		
. . .		. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	

										1		
									1	1	2	
						1	1	2	2	3		
					1	2	2	3	4	6		
			1	1	2	3	4	5	8	12		
		1	2	2	3	5	7	10	15	23		
		2	3	4	6	9	14	20	30	45		
n		3	5	8	12	18	27	40	60	90		
0		6	10	16	24	36	54	80	120	180		
1		13	20	31	47	71	107	160	240	359		
2		27	41	62	94	142	213	319	479	718		
3		55	83	125	188	283	425	638	957	1436		
4		111	167	251	377	566	850	1276	1914	2871		
5		223	335	503	755	1133	1700	2551	3827	5741		
6		447	671	1007	1511	2267	3401	5102	7654	11482		
7		895	1343	2015	3023	4535	6803	10205	15308	22963		
8		1791	2687	4031	6047	9071	13607	20411	30617	45926		
. . .		. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	

										1		
									1	2		
							1	1	2	3		
					1	1	2	2	3	5		
				1	2	2	3	4	6	9		
		1	1	2	3	4	6	8	12	18		
		2	2	4	5	7	11	16	24	36		
		3	4	7	10	14	21	32	47	71		
n		5	8	13	19	28	42	63	94	141		
0		10	16	25	37	56	84	126	188	282		
1		21	32	49	74	112	167	251	376	564		
2		43	65	98	148	223	334	502	752	1128		
3		87	131	197	296	445	668	1003	1504	2256		
4		175	263	395	593	890	1336	2005	3007	4511		
5		351	527	791	1187	1781	2672	4009	6014	9022		
6		703	1055	1583	2375	3563	5345	8018	12028	18043		
7		1407	2111	3167	4751	7127	10691	16037	24056	36085		
8		2815	4223	6335	9503	14255	21383	32075	48113	72170		
. . .		. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	

Una secuencia tiene que ser representada desde el triángulo que contenga su primer número impar y hay infinitos triángulos que contienen todos los números impares.

En las tres tablas anteriores, formadas a partir de los triángulos T(4), T(6) y T(10), vemos el comienzo de algunas secuencias y como se unen a la salida del triángulo. Cuando digo “se unen” quiero decir que a partir de ese punto, las secuencias tendrán los mismos números hasta llegar al 1.

Otras fórmulas en el algoritmo distintas de (3n+1)/2 y las secuencias no cumplirán la conjetura.

A continuación tres ejemplos de tablas formadas aplicando a los impares (5n+1)/2, (7n+1)/2 y (9n+1)/2 respectivamente, en vez de (3n+1)/2.

Las columnas k(22) hasta k(51) son los números que resultan de aplicar (5n+1)/2 a los impares y el lugar que ocuparían en la tabla por cantidad de números en cada columna.

	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	...
n																																																																
0		1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	103	105	107	109	111	113	115	117	119	121	...
1		2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	3	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63	68	73	78	83	88	93	98	103	108	113	118	123	128	133	138	143	148	155	158	161	164	167	170	173	176	179	182	...
2			8		17		26		35		44		53		62		71		80		89		8		33		58		83		108		133		158		183		208		233		258		283		308		333		358		233		242		251		260		269		
3					26				53				80				107				134				83				208				333				458				583				708				833				350				377				404		
4									80								161								208								833								1458								2083								566						
5																	242																2083																5208														
6																																	5208																														
7																																																																
8																																																																
...																																																																

		1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	6	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	...

Las columnas k(28) hasta k(57) son los números que resultan de aplicar (9n+1)/2 a los impares y el lugar que ocuparían en la tabla por cantidad de números en cada columna.

	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	...
n																																																																
0		1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	115	117	119	121	...
1		2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	158	167	176	185	194	203	212	221	230	239	248	257	266	173	176	179	182	...
2			8		17		26		35		44		53		62		71		80		89		98		107		116		23		104		185		266		347		428		509		590		671		752		833		914		995		1076		1157		260		269		
3					26				53				80				107				134				161				104				833				1562				2291				3020				3749				4478				5207				404		
4									80								161								242								3749								10310								16871								23432						
5																	242																16871																75920														
6																																	75920																														
7																																																																
8																																																																
...																																																																

		1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	6	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	...

Las columnas k(103) hasta k(132) son los números que resultan de aplicar (7n+1)/2 a los impares y el lugar que ocuparían en la tabla por cantidad de números en cada columna.

...	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	...
...	159	161	163	165	167	169	171	173	175	177	179	181	183	185	187	189	191	193	195	197	199	201	203	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	265	267	269	271	273	275	277	279	281	...
...	239	242	245	248	251	254	257	260	263	266	269	272	275	278	281	284	287	290	293	296	299	302	305	4	11	18	25	32	39	46	53	60	67	74	81	88	95	102	109	116	123	130	137	144	151	158	165	172	179	186	193	200	207	398	401	404	407	410	413	416	419	422	...
	359		368		377		386		395		404		413		422		431		440		449		458		39		88		138		186		235		284		333		382		431		480		529		578		627		676		725		602		611		620		629		
	539				566				593				620				647				674				137				480				823				1166				1509				1852				2195				2538				917				944		
	809								890								971								480								2881								5282								7683								1376						
	1214																1457																10084																26891														
																	2186																																94119														
																																																	329417														
																																																	1152669														

| ... | 5 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 5 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 5 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 8 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | ... |

Las cantidades de divisores de cada columna coinciden con las cantidades que hay en la tabla de los números pares, pero no a partir de k(1), ya que en la primera tabla (5n+1)/2, su primer impar, el número 1, está en k(22). En la segunda tabla (7n+1)/2, el número 1 está en k(103) y en la tercera tabla (9n+1)/2, el número 1 está en k(28).