

Foundations of a quasi-classical and quantum theory of gravity.

Alexander P. Sobolev

sapsolto@mail.ru

Abstract

The gravitational field equations were derived in general relativity (GR) using the assumption of their covariance relative to arbitrary transformations of coordinates. It has been repeatedly expressed an opinion over the past century that such equality of all coordinate systems may not correspond to reality. General covariance is restricted in the article due to the introduction of the constraint. The constraint is interpreted from a physical point of view as a sufficient condition for the adiabaticity of the process of evolution of the space-time metric. The initial equations of the theory of gravity with the constraint are formulated. A unified model of evolution of the modern, early and very early Universe is constructed on this basis which consistent with the observational astronomical data but without using of the hypotheses of the existence of "dark energy", "dark matter" and "inflaton". It is claimed that: the gravitational field is the main source of energy of the Universe, the maximum global energy density in the Universe was 64 orders of magnitude smaller the Planckian one, and the entropy density is 18 orders of magnitude higher the value predicted by GR. In addition, the value of the relative density of neutrinos at the present time and the maximum temperature of matter in the early Universe are calculated. The wave equation of the gravitational field is formulated and its solution is found.

Keywords: Gravitation, restricted covariance, nonsingular theory, entropy of space-time, evolution of the Universe.

1. Introduction

Over a hundred years ago at the derivation of the gravitational equations from the variational principle D. Hilbert formulated "an axiom of the general invariance of the action in relation to arbitrary transformations of the world parameters (coordinates)" and chose " R - the invariant built from the Riemann tensor (curvature of the four-dimensional manifold)" as Lagrangian of the gravitational field [1].

Three years earlier, A. Einstein wrote [2, p. 237, 243]: "Besides, it should be emphasized that we have no basis whatever for assuming a general covariance of the gravitational equations.... From this it seems to follow that the equations sought will be covariant only with respect to a particular group of transformations, which for the time being, however, is unknown to us. It seems most natural to demand that the system of equations should be covariant against *arbitrary* (Einstein's italics) transformations."

The success of the canonical theory of gravity ostensibly corroborated validity of such assumption and it has acquired the status of the fundamental principle eventually. Although the opposite point of view was also expressed earlier [3, p. 631]: "...the physical meaning of GR boils down to the creation of a new theory of gravity. However, the author of the theory A. Einstein and a number of his followers have another point of view. They believe that in addition to this, and in the first place, GR establishes the principle of equality of all reference frames. It is difficult to agree this point of view, however, since in this case the equality of reference frames from the point of view of a formal mathematical apparatus is illegitimately interpreted as equality on their physical essence.

GR doesn't seem as unshakeable as before any more in the light of the new experimental data [4-6]. For an explanation of the derived results within the framework of this theory it was necessary to introduce certain hypothetical entities (the Λ CDM model [7]), the nature of which

are still unclear. «*Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*», probably, the necessity of introduction of "inflavons" at first, and now of "dark energy" and "dark matter" in GR (with the development of new methods of astronomical observations) are symptoms of a defect in the very it basis?

GR violates the unity of the material world. The gravitational field itself does not have properties of the material medium in GR. Its energy-momentum density is zero. This is a direct consequence of general covariance of the gravitational field equations. Attempts to introduce the non-general covariant energy-momentum density actually mean a refusing the original axiom of general covariance.

In our opinion, precisely *general covariance of the equations is a source of the troubles of GR*. Detected on the stage of its formation, today these troubles have become the whole set of problems unresolved so far: the problem of energy, singularities, black holes, cosmological constant, cold dark matter, the problem of description of the elementary particles which appears in the canonical theory of gravitation as "micro black holes", and finally, the impossibility of creation of a quantum theory of gravitation on the basis of GR.

A possible way to construct the *non-generally covariant theory of gravity without violating of the axiom of Hilbert* (as we see it) is the introduction of a priori constraint that restricts the choice of coordinate system. Attempts of such kind had been being made previously the example of it is the unimodular theory of gravity whose origins date back to Einstein. A consequence of the constraint introduction is the appearance of the edge of space-time manifold, therefore restrictedly covariant geometric objects are defined only on manifolds with the edge. In the presence of the differential constraint there is an opportunity to choose a position of the edge so that to single out nonsingular interior region of the manifold.

Under such an approach, the fundamental principle of the equivalence of all reference systems compatible with the pseudo-Riemannian metric, underlying GR, is not violated. In addition, we don't put in doubt the principle of the invariance of *matter* action relative to arbitrary transformations of coordinates. At the same time, *a covariance of the gravitational equations is limited by the constraint* in contrast to GR. Thus, a priori only "medium-strong principle" of the equivalence is met in this case [8]. However, this cannot be ground for rejecting the proposed approach as contradicting the experiments on verifying the strong equivalence principle for bodies of cosmic scales [9].

The fact is that already in GR within the framework of the Λ CDM model, space itself is endowed with energy. The same thing happens when an a priori constraint is introduced. Space becomes a self-gravitating object because of the nonlinearity of the gravitational equations. One can determine inertial and gravitational mass for such an object. The solution of the gravitational equations has enough free parameters in order to not only ensure the requirement of the equality of inertial mass of the gravitational field to gravitational mass, but also to determine inertial mass in accordance with Mach's principle (the latter problem have not been solved in GR). From this point of view, the results of experiments [9] should be considered as an indication that *only such (quasi) stationary self-gravitating objects exists for which inertial mass is equal to gravitational mass*.

Hilbert's axioms are formulated in a coordinate language. The gravitational field was represented by the ten components $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ of the metric tensor. In addition, it was assumed that derivatives of metrics no higher than second order could enter into the gravitational equations.

There is no theorem prohibiting the existence of a constraint between the components of a metric in mathematical physics. However, the unimodular theory turned out to be unacceptable from a physical point of view, which prompted Einstein to abandon it in favor of the general covariant theory. Of course, there must be sufficiently substantial physical grounds to introduce the restrictions on the group of coordinate transformations.

Our basic assumption is that *the components of the metric tensor $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ are constrained by the conservation law*:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\nu} \right) = 0, \quad g = \det(g_{\mu\nu}), \quad g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu; \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3). \quad (1.1)$$

The left-hand side of (1.1) is not a generally covariant scalar. Such a scalar, including the second derivatives of some scalar function $\varphi(x)$, should have the form [8]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \right). \quad (1.2)$$

The left side of (1.1) will also be a scalar in view of (1.2) on the restricted group of coordinate transformations on which $\sqrt{-g}$ is a scalar. In this case, the constraint becomes a geometrical object in some region of space-time continuum and acquires a physical meaning (the physical interpretation of the constraint is given in Section 2).

For arbitrary coordinate transformation $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ [8]

$$g'(x') = g(x) \cdot J^2, \quad J = \det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right). \quad (1.3)$$

It follows from the definition of a scalar that the determinant of the metric tensor changes as a scalar under transformations of coordinates with the Jacobian of the transformation equal to unity in modulus.

$$g'(x') = g(x), \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu. \quad (1.4)$$

Thus, the constraint (1.1) is a geometric object only at the restriction of the group of admissible coordinate transformations, from local general diffeomorphisms to special diffeomorphisms with the Jacobian equal to unity. In addition, the constraint allows global linear transformations of coordinates unlike the unimodular theory.

2. Gravitational field equations in the presence of the constraint

In the currently accepted notations, the Hilbert action has the form:

$$S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x.$$

R is the scalar curvature, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$ is the Ricci tensor,

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\rho,$$

$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ is the Christoffel symbols,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} \right),$$

The derivation of the gravitational field equations from the Hilbert action in the presence of the constraint is a variational problem involving a conditional extremum. The standard method for solving such problems in cases where the constraints are not solvable in an explicit form is method of Lagrange multipliers. Introducing the Lagrange multiplier – the scalar field Φ , we write the action in the presence of one constraint (1.1) in the form:

$$S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int (R + Q) \sqrt{-g} d^4x, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu}. \quad (2.1)$$

Since Q is a restrictedly covariant scalar, then integration is defined not on a manifold but only on a manifold with the edge unlike the Hilbert action. Now *all the components of the metric tensor and the scalar Φ can be considered as independent quantities*, and when the action is varied, we obtain an equation that determines the edge, along with the equations of motion.

We get at varying the action with respect to field Φ (instead of the equal sign, arrow indicates that the full derivatives which are not giving a contribution to the equations of motion are omitted):

$$\delta S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int \delta(Q\sqrt{-g}) d^4x = -\frac{c^3}{16\pi G} \int \left(\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial\delta\Phi}{\partial x^\nu} \right) d^4x \rightarrow$$

$$\frac{c^3}{16\pi G} \int \delta\Phi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu} \right) d^4x$$

From the principle of stationarity action, in view of the arbitrariness of Φ variation, we derive the equation (1.1).

The scalar curvature is covariant relative to arbitrary transformations of coordinates, so the calculation of its variation and the contribution to the field equations has no differences from [8].

The presence in Lagrangian of the additional members besides the scalar curvature gives a contribution at the metric variation:

$$\delta(Q\sqrt{-g}) = \left[\frac{\partial\delta\sqrt{-g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu} (\delta g^{\mu\nu}) \frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu} \right] \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \left[g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(g^{\rho\lambda} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\lambda} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\nu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}$$

This leads to an occurrence of a new object $(\varepsilon_{gr})_{\mu\nu}$ in the Hilbert-Einstein equations along with energy-momentum tensor of matter $(\varepsilon_{mat})_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} (\varepsilon_{gr})_{\mu\nu} + \frac{8\pi G}{c^4} (\varepsilon_{mat})_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} (\varepsilon_{gr})_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(g^{\rho\lambda} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\lambda} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\nu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} \right]. \quad (2.3)$$

The object (2.3) contains ordinary derivatives instead of covariant ones, and therefore behaves like a tensor only under the restricted group of coordinates transformations. It is *covariant only relative to the local special diffeomorphisms and global linear transformations of coordinates*.

Since the covariant derivative is defined for arbitrary coordinate transformations, its action has also defined for objects that are tensors relative to restricted group of transformations. The only difference is that the new objects belong again to the same type of tensors on which it acts.

The constraint (1.1) does not include the fields of matter. Therefore, the action for matter remains invariant under general coordinate transformations as in GR, and the assertion that the covariant derivative of the mixed energy-momentum density tensor of matter is equal to zero remains also valid in the presence of the constraint (1.1).

The covariant derivative of the expression on the left-hand side of (2.2) is zero for mixed tensors in view of the reduced Bianchi identity (the validity of which is due only to general covariance of the curvature tensor), therefore, taking into account the above, the derivatives of the right-hand sides of both (2.2) and (2.3) must be equal to zero.

Thus, the object $(\varepsilon_{gr})_{\mu\nu}$ changes as a tensor at the stated transformations of coordinates, is symmetric, is a source of curvature of space-time like matter, and its covariant derivative on the field equation is equal to zero.

All this in aggregate makes it possible to call the object (2.3) as an energy-momentum density tensor of the gravitational field, expressed using the auxiliary field Φ . The field is auxiliary because it does not initially enter either the Hilbert action, the matter action, or the constraint equation. At the same time, the introduction of the field Φ is inevitable on the very essence of the mathematical problem. Section 3 considers the case when it is possible to

explicitly exclude the scalar field Φ from the gravitational field equations. The question of the positive definiteness of the energy density of the gravitational field will also be considered there.

Thus, we have derived the system of equations involving the constraint (1.1) and ten equations (2.2) for eleven unknowns listed above. It is impossible to fix the gauge arbitrariness by choosing a synchronous reference frame because of restricted covariance, in contrast to GR. However, it is always possible to synchronize a clock in a certain neighborhood by choosing a gauge $g_{0m}(x) = 0$ ($m = 1, 2, 3$).

Since the remaining terms in (2.2) are generally covariant, on the whole the system equations of gravitation will be covariant only relative to the indicated restricted group of coordinate transformations in the presence of the constraint.

The constraint (1.1) can be interpreted from a physical point of view as a sufficient condition for adiabaticity of the metric evolution process. We determine the vector of *the entropy density flux of the gravitational field* by the relation

$$s_{gr} v^\mu = \text{const} \cdot g^{\mu\lambda} \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\lambda}, \quad v^\mu v_\mu = 1, \quad s_{gr} = \text{const} \cdot v^\lambda(x) \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\lambda} \quad (2.4)$$

In the Planck system of units this constant can be written in the form:

$$\text{const} = a \cdot \frac{k}{l_{pl}^2}, \quad l_{pl}^2 = \frac{\hbar G}{c^3}, \quad (2.5)$$

where k is the Boltzmann constant, l_{pl} is the Planck length. For a quasi-classical theory, the condition $|a| \leq 1$ must be satisfied. The sign of the constant a must be chosen so that the entropy density would be positive on time-like geodesic lines. Now the constraint (1.1) can be written in the form of the relativistic adiabaticity condition

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} s_{gr} v^\mu) = 0. \quad (2.6)$$

We note that under the definition (2.4), all the thermodynamic potentials will be scalars only relative to the restricted group of transformation. Thus, the determination of the energy densities (2.3) and entropy (2.4) satisfying the conservation laws allows us to consider the gravitational field as an ordinary material medium [10] and restores the unity of the material world violated by GR.

For inclusion in the consideration of spinor matter and gauge fields, the system of equations (1.1, 2.2) can be formulated in a nonholonomic orthogonal frame. In addition to this, along with the affine connection, the spin connection is introduced. This is possible, despite the presence of the constraint, since the group of local Lorentz transformations is unimodular.

In the limiting case, when the energy-momentum density of the gravitational field is negligibly small in comparison with the energy-momentum density of matter, equations (2.2) become the equations of GR and, in the limit of a weak gravitational field, lead to Newton's law of gravitation. In this case, the equation (1.1) restricts the gauge arbitrariness.

If we assume that matter had been playing an insignificant role and that the energy-momentum density of matter can be neglected at the initial stage of evolution of the Universe, then the system of the equations (2.2) is radically simplified. In this case, we can find the exact general solution of the system of equations (1.1, 2.2), and this solution will be unique.

3. Evolution of space-time manifold in the absence of matter

If we imagine that matter was absent still at the initial instant of time in the Universe as and radiations generated by it, then there would have been no physical ability to distinguish the points of outer space. What could be the metric properties of such space in this case?

There are nine possible types of principal homogeneous spaces (admitting a group of motions) with a time-dependent metric (Bianchi classification) in three-dimensional space [11]. The introduction of the constraint restricts not only the group of coordinate transformations

admissible in GR, but also the group of motions that preserve the metric. If the first group is given by the condition (1.4), then at motion by virtue of the requirement of form-invariance this condition takes the form

$$g(x^0, x'^m) = g(x^0, x^m), \quad x^m \rightarrow x'^m, \quad (m=1,2,3),$$

that is, the determinant of the metric tensor does not depend on spatial coordinates. Note that it does not exclude the dependence of the components of the metric tensor on coordinates. These dependences are given in [12 p. 265-268] for all nine types of homogeneous spaces. Calculating the determinant of the metric tensor, we make sure that it does not depend on spatial coordinates only for homogeneous spaces of type I and II according to the Bianchi classification. This means that if there is the constraint (1.1), only these two types of homogeneous spaces can exist.

$$\text{I. } g_{mn} = a_{mn}(x^0), \quad g_{00} = a_{00}(x^0) > 0, \quad g_{0n} = 0 \quad (m, n = 1, 2, 3),$$

II

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12}x^1 + a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{22}x^1 + a_{23} \\ a_{12}x^1 + a_{13} & a_{22}x^1 + a_{23} & a_{22}(x^1)^2 + 2a_{23}x^1 + a_{33} \end{pmatrix}, \quad a_{mn} = a_{mn}(x^0), \quad g_{00} = a_{00}(x^0), \quad g_{0n} = 0$$

A component of the metric tensor depends only on time for the first of these. In this case, if the spatial metric is non-degenerate then the most general expression for the space-time interval by the transformation of coordinates with the Jacobian equal to unity [11]:

$$x^0 \rightarrow x^0, \quad x^m \rightarrow x^m + \varphi^m(x^0),$$

always can be reduced to the form:

$$ds^2 = g_{00}(x^0)(dx^0)^2 + g_{mn}(x^0)dx^m dx^n, \quad \gamma = -\det(g_{mn}) > 0, \quad (m, n = 1, 2, 3). \quad (3.1)$$

3.1 Gravitational equations for homogeneous spaces of type I.

An absence of the general invariance of the action (2.1) doesn't allow us to eliminate the metric component g_{00} . The expressions for Christoffel symbols and non-zero components of Ricci tensor for the metric (3.1) will take the form:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \frac{dg_{00}}{dx^0}, \quad \Gamma_{0l}^0 = 0, \quad \Gamma_{nl}^0 = -\frac{1}{2} g^{00} \frac{dg_{nl}}{dx^0}, \quad \Gamma_{00}^m = 0, \quad \Gamma_{0l}^m = \frac{1}{2} g^{mk} \frac{dg_{kl}}{dx^0}, \quad \Gamma_{nl}^m = 0 \quad . \quad (3.2)$$

$$R_0^0 = -\frac{1}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\gamma\sqrt{g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) - \frac{1}{4g_{00}} g^{mk} \frac{dg_{kp}}{dx^0} g^{pn} \frac{dg_{nm}}{dx^0}, \quad (3.3)$$

$$R_k^p = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{00}}} g^{mp} \frac{dg_{km}}{dx^0} \right). \quad (3.4)$$

Nonzero components of the energy-momentum density tensor (2.3) for the metric (3.1):

$$(\varepsilon_{gr})_0^0 = -\frac{c^4}{16\pi G} \left[\frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right) + \frac{2}{g_{00}\sqrt{g_{00}\gamma}} \frac{d\sqrt{g_{00}\gamma}}{dx^0} \frac{d\Phi}{dx^0} \right], \quad (3.5)$$

$$(\varepsilon_{gr})_k^p = -\frac{c^4}{16\pi G} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right) \delta_k^p. \quad (3.6)$$

Taking these relations into account, the gravitational field equations (2.2) in mixed components

$$R_\mu^\lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \left[(\varepsilon_{gr})_\mu^\lambda - \frac{1}{2} \delta_\mu^\lambda (\varepsilon_{gr})_\nu^\nu \right]$$

in the presence of the constraint take the form:

$$\frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dx^0} \right) = 0, \quad (3.7)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{g_{00}}}\frac{d}{dx^0}\left(\frac{1}{\gamma\sqrt{g_{00}}}\frac{d\gamma}{dx^0}\right)-\frac{1}{4g_{00}}g^{mk}\frac{dg_{kp}}{dx^0}g^{pn}\frac{dg_{nm}}{dx^0}=\frac{\sqrt{\gamma g_{00}}}{2}\frac{d}{dx^0}\left(\frac{1}{g_{00}\sqrt{\gamma g_{00}}}\frac{d\Phi}{dx^0}\right), \quad (3.8)$$

$$-\frac{d}{dx^0}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{g_{00}}}g^{mp}\frac{dg_{km}}{dx^0}\right)=\delta_k^p\frac{d}{dx^0}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{g_{00}}}\frac{d\Phi}{dx^0}\right). \quad (3.9)$$

3.2 Solution of the system of equations (3.7 ... 3.9).

Eq. (3.9) shows that:

$$g^{mp}\frac{dg_{km}}{dx^0}+\delta_k^p\frac{d\Phi}{dx^0}=\sqrt{\frac{g_{00}}{\gamma}}L_k^p. \quad (3.10)$$

The constant matrix L_k^p is not arbitrary. Since eq. (3.10) shows that

$$\frac{dg_{kn}}{dx^0}+g_{kn}\frac{d\Phi}{dx^0}=\sqrt{\frac{g_{00}}{\gamma}}g_{np}L_k^p, \quad (3.11)$$

the matrix must satisfy the conditions:

$$g_{np}(x^0)L_k^p\equiv g_{kp}(x^0)L_n^p. \quad (3.12)$$

For the metric tensor of the general form this condition will be accomplished only in case when the matrix L_k^p is proportional to the single matrix. Otherwise the matrix $L_k^p = \text{diag}(L_1, L_2, L_3)$ and the metric tensor must also be diagonal.

Simplifying eq. (3.10) on p and k indexes:

$$3\frac{d\Phi}{dx^0}=-\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dx^0}+\sqrt{\frac{g_{00}}{\gamma}}L_k^k. \quad (3.13)$$

Thus, in the case of a homogeneous space of type I, it is possible to explicitly express the derivative of the field Φ in terms of the metric field and its derivatives. This demonstrates the auxiliary nature of this field. Substituting (3.13) into (3.10) we get

$$g^{pm}\frac{dg_{km}}{dx^0}=\frac{1}{3\gamma}\frac{d\gamma}{dx^0}\delta_k^p+\sqrt{\frac{g_{00}}{\gamma}}\left(L_k^p-\frac{1}{3}\delta_k^pL_n^n\right). \quad (3.14)$$

Eq. (3.14) shows that:

$$g^{mk}\frac{dg_{kp}}{dx^0}g^{pn}\frac{dg_{nm}}{dx^0}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dx^0}\right)^2+\frac{g_{00}}{\gamma}\left[L_k^pL_p^k-\frac{1}{3}(L_n^n)^2\right]. \quad (3.15)$$

Using this expression and eq. (3.13) it is possible to eliminate Φ and all spatial metric components from the equation (3.8) and we can write it in the form:

$$3\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\right)^2+\frac{3c^2}{2\gamma}[L_k^pL_p^k-\frac{1}{3}(L_n^n)^2]=g_{00}\sqrt{\gamma}\frac{d}{dt}\frac{1}{\gamma g_{00}}\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\gamma}{dt}-cL_n^n\right), \quad (3.16)$$

where the following notation is entered $cdt = \sqrt{g_{00}}dx^0$.

Eq. (3.7) implies

$$\frac{1}{g_{00}}\frac{dg_{00}}{dt}+\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}=\frac{1}{T\sqrt{\gamma}}, T = \text{const}. \quad (3.17)$$

This equation allows to eliminate g_{00} from (3.16) and to write the equation for the function γ :

$$2\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{d\tau}\right)+\frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}}\frac{d\gamma}{d\tau}-\frac{\sigma}{\gamma}=0, \sigma = B_n^n - \frac{3}{2}[B_k^pB_p^k - \frac{1}{3}(B_n^n)^2], \quad (3.18)$$

where $\tau=t/T$ is the dimensionless proper time, $B_k^p = cTL_k^p$ is the matrix of the dimensionless constants. The order of the equation (3.18) can be lowered at the function $u(\gamma)$ introduction - dimensionless rate of change of the volume factor - $\sqrt{\gamma}$

$$u = \frac{d\sqrt{\gamma}}{d\tau}. \quad (3.19)$$

The equation takes the form:

$$8\gamma u \frac{du}{d\gamma} = 4u^2 - 2u + \sigma, \quad \frac{4udu}{4u^2 - 2u + \sigma} = \frac{d\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}. \quad (3.20)$$

It is remarkable that when $\sigma > 1/4$ determinant of the spatial metrics isn't equal to zero anywhere. *Therefore in this case there are no singularities.*

Integrating the equation (3.20) we find that:

$$\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_{\min}}} = f(u), \quad f(u) = \sqrt{\frac{4u^2 - 2u + \sigma}{\sigma}} \exp\left[\frac{1}{\sqrt{4\sigma - 1}} \left(\arctg \frac{4u - 1}{\sqrt{4\sigma - 1}} + \arctg \frac{1}{\sqrt{4\sigma - 1}} \right)\right], \quad (3.21)$$

where $\sqrt{\gamma_{\min}}$ is the *the minimum value of $\sqrt{\gamma}$ at $u = 0$.*

Differentiating (3.21) with respect to τ gives:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma_{\min}}} \frac{d\sqrt{\gamma}}{d\tau} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{d\tau}, \quad \frac{df}{du} = \frac{4u}{4u^2 - 2u + \sigma} f(u).$$

Hence we find the solution of the equation (3.18) in the parametric form in consideration of (3.19), (3.21).

$$\tau - \tau_{st} = \sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^u \frac{4f(y)}{4y^2 - 2y + \sigma} dy, \quad \sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma_{\min}} f(u). \quad (3.22)$$

Evolution of space begins in the time point τ_{st} from a state of rest with the minimal volume factor.

From the equation (3.17), taking into account (3.22), it follows that

$$d \ln(\gamma g_{00}) = \frac{dt}{T\sqrt{\gamma}} = \sqrt{\frac{\gamma_{\min}}{\gamma}} \frac{4f(u)du}{4u^2 - 2u + \sigma} = \frac{4du}{4u^2 - 2u + \sigma}.$$

Integrating this equation

$$\frac{\gamma(u)g_{00}(u)}{\gamma_{\min}g_{00}(0)} = \exp\left(\int_0^u \frac{4du}{4u^2 - 2u + \sigma}\right) = \exp\left[\frac{4}{\sqrt{4\sigma - 1}} \left(\arctg \frac{4u - 1}{\sqrt{4\sigma - 1}} + \arctg \frac{1}{\sqrt{4\sigma - 1}} \right)\right]$$

and taking into account the determination (3.21), we get

$$\sqrt{\frac{g_{00}(u)}{g_{00}(0)}} = \frac{\sigma \cdot f(u)}{4u^2 - 2u + \sigma}.$$

Using this relation, proceeding from the determination (3.19), we can show that

$$\sqrt{g_{00}(x^0)} dx^0 = cT\sqrt{\gamma_{\min}} \frac{4f(u)}{4u^2 - 2u + \sigma} du. \quad (3.23)$$

The world coordinate time x^0 has been determined up to an arbitrary linear transformation. The quantity $u \geq 0$ by definition and does not change under such a transformation. Therefore, the parameter u with the dimensional factor can be called world physical time.

3.3 Energy-momentum density and scalar curvature of a homogeneous space on the field equations.

Using the relations (3.13) and (3.17), we can transform (3.5) as follows:

$$(\varepsilon_{gr})_0^0 = \rho_{gr} = \frac{c^2}{48\pi GT^2} \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \frac{d\gamma}{d\tau} - \frac{1}{2\gamma} B_k^k \right]. \quad (3.24)$$

Using the equation (3.18), we eliminate the second derivative, then

$$\rho_{gr} = \frac{c^2}{96\pi GT^2} \left[\left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 - \frac{3}{2\gamma} [B_k^p B_p^k - \frac{1}{3} (B_k^k)^2] \right] = \frac{c^2}{48\pi GT^2 \gamma} \left[2u^2 - \frac{3}{4} [B_k^p B_p^k - \frac{1}{3} (B_k^k)^2] \right] \quad (3.25)$$

The first term in the brackets vanishing at the small values of u , the second term characterizing the global anisotropy of space is constant, positive and enters into the expression for the energy density with a minus sign. Now we can answer the question posed in 1972 by the authors [13, 30.1, p. 800]: “Accepting the agreement with observations, we want to understand *why the laws of physics should demand (rather than merely permit) a universe that is homogeneous and isotropic to high accuracy on large scales.*” *The energy density of the gravitational field will be positive only in the case when a homogeneous space is isotropic* ($B_m^n \propto \delta_m^n$).

In this case the solution of the equations (3.14) can be presented in the form:

$$g_{kn} = - \left(\frac{\gamma}{\gamma_{\min}} \right)^{1/3} g_{kn}(0). \quad (3.26)$$

Due to the invariance of the theory with respect to global linear transformations of coordinates, the original metric $g_{kn}(0)$ can always be reduced to a diagonal Euclidean form. Then (3.1), taking into account relations (3.26) and (3.23), (3.21), the interval (3.1) takes the form

$$ds^2 = \left(cT \sqrt{\gamma_{\min}} \frac{4f(u)}{4u^2 - 2u + \sigma} \right)^2 (du)^2 - f^{2/3}(u) dx^m dx^n \delta_{mn} \quad (3.27)$$

We note that a homogeneous space of the type II has an unremovable anisotropy. Therefore, bearing in mind the connection between the positive definiteness of the energy density and the absence of the anisotropy, it can be argued that *from a physical point of view there is no other noncontradictory theory of a three-dimensional homogeneous space beside the one described above.*

Introduce the Hubble parameter H and the acceleration parameter q (instead of the deceleration parameter [8]) according to the modern representations:

$$H \equiv \frac{1}{6T\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau}, \quad q \equiv 1 + \frac{1}{6H^2 T^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right). \quad (3.28)$$

The substitution of these expressions in (3.18) allows us to derive the equation describing change of the acceleration-deceleration eras.

$$q = \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{u(\gamma)} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right)^2 + 1 - \frac{3}{4\sigma}. \quad (3.29)$$

This implies that two scenarios are possible. When $\sigma > 3/4$ only acceleration ($q > 0$) is possible. When $3/4 > \sigma > 1/4$ the change of the eras is possible: acceleration-deceleration-acceleration. The change of the eras happens at the values

$$u_1 = \frac{\sigma}{1 + \sqrt{1 - 4\sigma/3}} > \frac{\sqrt{3}}{4(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \approx 0.1376, \quad u_2 = \frac{\sigma}{1 - \sqrt{1 - 4\sigma/3}} < \frac{\sqrt{3}}{4(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \approx 1.3624. \quad (3.30)$$

Discovered recently [4-6] the change of the eras indicates that the second scenario takes place.

The maximum value of the deceleration is reached at $u = \sigma$

$$q_{\max} = 1 - \frac{3}{4\sigma} > -2. \quad (3.31)$$

After the onset of the second era of the acceleration, q asymptotically approaches unity according to (3.29).

The energy density of the gravitational field (3.25) is related to the Hubble parameter (3.28) as:

$$\rho_{gr} = \frac{3c^2 H^2(\tau)}{8\pi G}. \quad (3.32)$$

Thus, *space is homogeneous and isotropic and has energy. And the density of energy is equal to the critical density at any moment of time.* The Hubble parameter reaches the maximum value during the era of the first acceleration at $u = \sigma/2 < u_1$

$$H_{\max} = \frac{\sqrt{\sigma}}{6T\sqrt{\gamma_{\min}}} \exp\left(-\frac{\arctg\sqrt{4\sigma-1}}{\sqrt{4\sigma-1}}\right), \quad (3.33)$$

and then monotonously decreases, tending to the constant value

$$H_{\infty} = \frac{\sqrt{\sigma}}{6T\sqrt{\gamma_{\min}}} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{4\sigma-1}}\left(\arctg\frac{1}{\sqrt{4\sigma-1}} + \frac{\pi}{2}\right)\right). \quad (3.34)$$

Determined by the relations (3.6) the spatial components of the energy-momentum density tensor are equal on the field equations to:

$$(\varepsilon_{gr})_k^p = \frac{c^2}{48\pi GT^2} \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} + \frac{1}{2\gamma} B_n^n \right] \delta_k^p, \quad (3.35)$$

and differ from expression for the energy density in the sign of the last two members. These components can possess both the positive and negative values during evolution. Eliminating the second derivate again by means of the equation (3.18) and assuming $(\varepsilon_{gr})_m^n = -p_{gr}\delta_m^n$ as it is accepted for macroscopic mediums, write the gravitational field pressure as:

$$p_{gr} = -\frac{c^2}{48\pi GT^2} \frac{2u^2 - 2u + \sigma}{\gamma}. \quad (3.36)$$

This implies when $0.25 < \sigma < 0.5$ there is a change of the pressure sign at the following u values:

$$u_3 = \frac{1 - \sqrt{1-2\sigma}}{2} > \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \approx 0.146, \quad u_4 = \frac{1 + \sqrt{1-2\sigma}}{2} < \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \approx 0.8536. \quad (3.37)$$

The gravitational field has a positive pressure in the interval $u_3 < u < u_4$, in other cases it has a negative pressure.

Let us consider the curvature tensor. Substituting the relations (3.14), (3.15) in (3.3), (3.4) we will find the expressions for the curvature tensor on the field equations:

$$R_0^0 = -\frac{1}{2c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right) - \frac{1}{12c^2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2, \quad R_k^k = -\frac{1}{2c^2\sqrt{\gamma}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right). \quad (3.38)$$

Excepting the second derivatives, write the expressions for the scalar curvature of space-time R .

$$R = R_0^0 + R_k^k = -\frac{1}{2c^2 T^2 \gamma} \left(\frac{8}{3} u^2 - 2u + \sigma \right). \quad (3.39)$$

The space-time curvature changes during evolution and possesses at first negative, then positive and at last again negative values.

3.4 Kinematics of a homogeneous space.

According (3.32), (3.33) the maximum density of the gravitational field energy is equal

$$\rho_{gr\max} = \frac{c^2 \sigma}{96\pi GT^2 \gamma_{\min}} \exp\left(-\frac{2\arctg\sqrt{4\sigma-1}}{\sqrt{4\sigma-1}}\right). \quad (3.40)$$

This follows for $\sigma \approx 1/4$

$$T\sqrt{\gamma_{\min}} = \left(\frac{c^2\sigma}{96\pi \cdot G \cdot \rho_{gr\max}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\arctg\sqrt{4\sigma-1}}{\sqrt{4\sigma-1}} \right) \approx \frac{c}{8e} \left(\frac{1}{6\pi G\rho_{gr\max}} \right)^{1/2}. \quad (3.41)$$

The relations (3.23), (3.28) can be written in the dimensional form:

$$t - t_{st} = T\sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^u \frac{4f(y)}{4y^2 - 2y + \sigma} dy, \quad H(u) = \frac{1}{3T\sqrt{\gamma_{\min}}} \frac{u}{f(u)}. \quad (3.42)$$

According (3.21) $f(u)$ depends on the constant σ only. Substituting in these relations the current values [14] of the time from the beginning of evolution till now ($t^0 - t_{st} = 13.81 \cdot 10^9$ years) and the Hubble parameter ($H^0 = 67.3 \text{ km} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$) gives, taking into account (3.41), couple of equations for two unknown – σ and the value of parameter u^0 at the current time

$$t^0 - t_{st} = T\sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^{u^0} \frac{4f(y)}{4y^2 - 2y + \sigma} dy, \quad H^0 = \frac{1}{3T\sqrt{\gamma_{\min}}} \frac{u^0}{f(u^0)}.$$

The quasi-classical approach is justified providing that the parameter $T\sqrt{\gamma_{\min}} \geq t_{pl}$, where t_{pl} is the Planck time. According to (3.40), the maximum energy density of the gravitational field, which is four orders of magnitude smaller than Planck density, corresponds to the minimum value of this parameter. In this case the solution of the system of equations is:

$$\sigma = 0.2501278984, \quad u^0 = 6.118625359. \quad (3.43)$$

The results of the calculations of other parameters for this case are presented in Table 1. Below in Table 2, the results of a similar calculation are given, but with the maximum energy density equal to that achieved on accelerators with an energy of 1 TeV ($\rho_{gr\max} = (1\text{TeV})^4 \approx 2 \cdot 10^{49} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$).

The characteristic values u^0 , $u2$, $u4$, σ , $u3$, $u1$, $\sigma/2$, supplemented by a number of the intermediate values, have chosen for the parameter u . In the table: q is the cosmic acceleration, z is the cosmological redshift, R is the scalar curvature of space-time, $t - t_{st}$ is the proper time, H is the Hubble parameter.

$T\sqrt{\gamma_{\min}} = t_{pl} \text{ c}; \rho_{gr\max} = 5.2 \cdot 10^{109} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}; \sigma=0.2501278984; u^0=6.118625359$					
u	q	z	R, m^{-2}	$t-t_{st}, \text{c}$	H, c^{-1}
6.118625359	0.7599	0	$-5.589 \cdot 10^{-52}$	$4.358 \cdot 10^{17}$	$2.181 \cdot 10^{-18}$
1.362294111	0	0.84987	$-6.308 \cdot 10^{-52}$	$1.876 \cdot 10^{17}$	$3.074 \cdot 10^{-18}$
0.853462941	-0.5	1.41598	$-6.144 \cdot 10^{-52}$	$1.129 \cdot 10^{17}$	$4.290 \cdot 10^{-18}$
0.8	-0.5819	1.52552	$-5.890 \cdot 10^{-52}$	$1.029 \cdot 10^{17}$	$4.594 \cdot 10^{-18}$
0.7	-0.7600	1.79266	$-4.732 \cdot 10^{-52}$	$8.275 \cdot 10^{16}$	$5.435 \cdot 10^{-18}$
0.6	-0.9789	2.20159	$-6.939 \cdot 10^{-53}$	$6.051 \cdot 10^{16}$	$7.019 \cdot 10^{-18}$
0.5	-1.2496	2.93915	$1.977 \cdot 10^{-51}$	$3.650 \cdot 10^{16}$	$1.089 \cdot 10^{-17}$
0.4	-1.5775	4.83051	$3.079 \cdot 10^{-50}$	$1.305 \cdot 10^{16}$	$2.826 \cdot 10^{-17}$
0.35	-1.7543	7.80386	$3.648 \cdot 10^{-49}$	$4.161 \cdot 10^{15}$	$8.511 \cdot 10^{-17}$
0.3	-1.9156	24.3239	$1.843 \cdot 10^{-46}$	$1.963 \cdot 10^{14}$	$1.737 \cdot 10^{-15}$
0.28	-1.9643	87.6127	$3.105 \cdot 10^{-43}$	$4.848 \cdot 10^{12}$	$6.945 \cdot 10^{-14}$
0.265826306	-1.9880	1090	$9.993 \cdot 10^{-37}$	$2.719 \cdot 10^9$	$1.230 \cdot 10^{-10}$
0.250127898	-1,9985	$8.09106 \cdot 10^{10}$	$1.484 \cdot 10^{11}$	$7.062 \cdot 10^{-15}$	$4.723 \cdot 10^{13}$
0.146537059	-0.5	$2.16717 \cdot 10^{20}$	$-9.435 \cdot 10^{66}$	$3.785 \cdot 10^{43}$	$5.317 \cdot 10^{41}$
0.137705891	0	$2.24648 \cdot 10^{20}$	$-2.067 \cdot 10^{67}$	$3.125 \cdot 10^{43}$	$5.565 \cdot 10^{41}$
0.125063950	1	$2.33685 \cdot 10^{20}$	$-4.321 \cdot 10^{67}$	$2.426 \cdot 10^{43}$	$5.689 \cdot 10^{41}$
0	∞	$2.58860 \cdot 10^{20}$	$-4.788 \cdot 10^{68}$	0	0

TABLE 1. Space kinematics at the maximum energy density $\rho_{gr\max} = 5.2 \cdot 10^{109} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$.

$\rho_{gr\max} = 2 \cdot 10^{49} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}; T\sqrt{\gamma_{\min}} = 8.6912868 \cdot 10^{-14} \text{ sec}; \sigma=0.2505131772; u^0=6.116607675$					
u	q	z	R, m^{-2}	$t-t_{st}, \text{sec}$	H, sec^{-1}
6.116607675	0.75979	0	$-5.588 \cdot 10^{-52}$	$4.358 \cdot 10^{17}$	$2.181 \cdot 10^{-18}$
1.362058100	0	0.84978	$-6.145 \cdot 10^{-52}$	$1.876 \cdot 10^{17}$	$3.074 \cdot 10^{-18}$
0.853190333	-0.5	1.41607	$-9.218 \cdot 10^{-52}$	$1.129 \cdot 10^{17}$	$4.291 \cdot 10^{-18}$
0.8	-.58143	1.52504	$-5.894 \cdot 10^{-52}$	$1.030 \cdot 10^{17}$	$4.592 \cdot 10^{-18}$
0.7	-.75942	1.79220	$-4.740 \cdot 10^{-52}$	$8.281 \cdot 10^{16}$	$5.433 \cdot 10^{-18}$
0.6	-.97810	2.20058	$-7.194 \cdot 10^{-53}$	$6.057 \cdot 10^{16}$	$7.014 \cdot 10^{-18}$
0.5	-1.2485	2.93699	$1.0963 \cdot 10^{-51}$	$3.656 \cdot 10^{16}$	$1.088 \cdot 10^{-17}$
0.4	-1.5757	4.82107	$3.042 \cdot 10^{-50}$	$1.313 \cdot 10^{16}$	$2.813 \cdot 10^{-17}$
0.35	-1.7519	7.76490	$3.545 \cdot 10^{-49}$	$4.218 \cdot 10^{15}$	$8.404 \cdot 10^{-17}$
0.3	-1.9124	23.6505	$1.564 \cdot 10^{-46}$	$2.130 \cdot 10^{14}$	$1.602 \cdot 10^{-15}$
0.28	-1.9607	78.6976	$1.638 \cdot 10^{-43}$	$6.670 \cdot 10^{12}$	$5.054 \cdot 10^{-14}$
0.263724335	-1.9863	1090	$9.820 \cdot 10^{-37}$	$2.741 \cdot 10^9$	$1.221 \cdot 10^{-10}$
0.250513177	-1,9939	$5.92654 \cdot 10^5$	$2.294 \cdot 10^{-20}$	17.963	0.001859
0.146809667	-0.5	$1.84758 \cdot 10^{10}$	$-3.638 \cdot 10^6$	$6.102 \cdot 10^{-13}$	$3.301 \cdot 10^{11}$
0.137941901	0	$1.91536 \cdot 10^{10}$	$-7.974 \cdot 10^6$	$5.037 \cdot 10^{-13}$	$3.456 \cdot 10^{11}$
0.125256589	1	$1.99255 \cdot 10^{10}$	$-1.6669 \cdot 10^7$	$3.910 \cdot 10^{-13}$	$3.533 \cdot 10^{11}$
0	∞	$2.20739 \cdot 10^{10}$	$-1.8450 \cdot 10^8$	0	0

TABLE 2. Space kinematics at the maximum energy density $\rho_{gr\max} = 2 \cdot 10^{49} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$.

Thus, instead of the standard cosmological model (SCM) in this case, we have a continuum of cosmological models parameterized by the value of the maximum energy density $\rho_{gr\max}$.

The comparison of the data in Tables 1, 2 shows that the results of the calculation are in good agreement up to red shift of the last-scattering surface at least,

$$z(0.2647 \pm 0.0011) = 1090, \quad z(u) = \left(\sqrt{\frac{\gamma(u^0)}{\gamma(u)}} \right)^{1/3} - 1 \quad (3.44)$$

despite the difference in the value of the maximum energy density on more than sixty orders. This circumstance excludes doubts in a possibility of the unambiguous description of space evolution in this range of the red shift variation. It should be noted that the “last scattering” occurred less than a hundred years after the beginning of the evolution process, as opposed to 373 000 years in the Λ CDM model [14].

Significant differences between the models are being only at large values of z . The scalar curvature has a definite final value at the moment of the beginning of evolution, therefore, it is possible to determine the characteristic initial size as the reciprocal of root of the curvature modulus. This size depends on the value ρ_{grmax} and for the energy ranges considered in Tables 1, 2 can be from 10^{-34} to 10^{-4} meters.

3.5 Geodesics and entropy of a homogeneous space.

The lines $x^1=x^2=x^3=const$ are geodesics for the metric (3.27), as for Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker metric, and in each point it is possible to introduce the concomitant coordinate system where *the variable t defined above will be a proper time*.

Substituting Christoffel symbols (3.2) for the metric (3.27) in the equations of geodesic x^μ (ξ) with the natural parameter ξ

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\xi^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\xi} \frac{dx^\lambda}{d\xi} = 0$$

and integrating the derived equations, we find:

$$\frac{dx^m}{d\xi} = A^m \gamma^{-1/3}(x^0), \quad \sqrt{g_{00}(x^0)} \frac{dx^0}{d\xi} = \pm \sqrt{A^2 \gamma^{-1/3}(x^0) + B}, \quad A^2 = A^m \delta_{mm} A^m, \quad A^m, B = const. \quad (3.45)$$

The hypersurface $t = t_{st}$ is the edge of found space-time manifold. On the edge $u(t_{st}) = 0$ and the cosmic acceleration (3.29), which is an invariant observable quantity, turns to infinite. In regard this any geodesic coming onto the edge will confront with an unremovable singularity at the final value ξ . Consequently, *the found manifold is maximally extendable along geodesics up to the edge*.

According to (3.45), the velocity 4-vector is defined in the concomitant coordinate system along the geodesic

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = (g_{00}^{-1/2}, 0, 0, 0)$$

In this case, it follows from the adiabatic equation in consideration of (2.4), (2.5), (3.17), (3.21) that:

$$s_{gr} = a \frac{k}{l_{pl}^2} v^\lambda(x) \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\lambda} = \frac{a \cdot k}{2l_{pl}^2 c T \sqrt{\gamma(u)}} = \frac{\sigma \cdot k}{2l_{pl}^2 c T \sqrt{\gamma(u)}} \quad (3.46)$$

In the last equality, we identified an unknown constant a with the only in the theory dimensionless parameter σ (3.18) that characterizes space-time manifold found. It follows from (3.46) that currently the entropy density of manifold depends rather weakly on the maximum energy density and, at $\rho_{grmax} = 2 \cdot 10^{49} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$, is equal to

$$s_{gr}(u^0) = \frac{\sigma \cdot k}{2l_{pl}^2 c T \sqrt{\gamma_{\min}} f(u^0)} \approx 1.7 \cdot 10^{42} \cdot k \cdot m^{-3} \quad .$$

This value is 18 orders of magnitude rank over the contribution of all remaining entropy sources taking into account in the framework of GR [15].

In view of (3.45), for an observer resting at the origin of coordinates and connected by 0-geodesic ($B = 0$) with a concomitant point, the distance (as in GR) is determined by the relation [7]:

$$d(t) = c \cdot a(t^0) \cdot \int_t^{t^0} \frac{dt}{a(t)} \quad , \quad (3.47)$$

where $a(t)$ is the scale factor, t is the proper time. The factor $a(t) = \gamma^{1/6}(t)$ is determined in the case under consideration by the relations given above, after discovering of cosmic acceleration it is determined in GR within the frameworks of the Λ CDM model [7]. The parameters of this model are selected proceeding from a condition of providing the best consent with all set of the experimental data which are available at the present time, their numerical values as at 2013 year are given in [14].

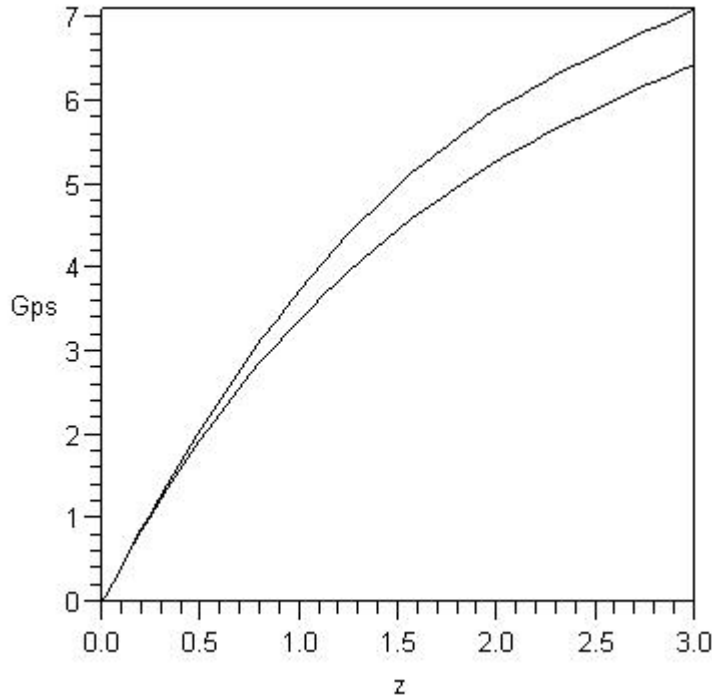


Figure 1. Distance to an object (Gps) depending on its red shift, calculated by (3.47) for this theory and the Λ CDM models. The upper curve displays this theory, the lower curve displays the Λ CDM model.

In [14] all data set of the dependence of a distance on red shift which was available at the moment of the publication is given in a graphic form (Fig. 24.2, Fig. 26.1). Comparison with the data [14] shows that both dependences presented in Fig. 1 lie in the range of an error of the experimental data. Moreover, as follows from the data in Fig. 2, even future experiments of this kind unlikely will allow to make a choice between these two dependencies. When the above dependence is continued to the region of large values of z , its course will be defined by the maximum energy density of the gravitational field, which is unknown at the present time.

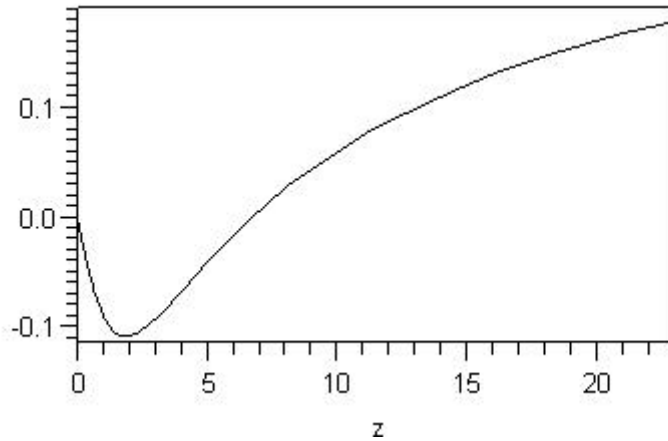


Figure 2. Deviation of the ratio of the distances from unity calculated according to GR and this theory (vertically) depending on the value of red shift.

A relatively small value of the deviation is associated with the integral nature of the dependence of a distance on redshift. For a local parameter, such as the Hubble parameter, the situation is different.

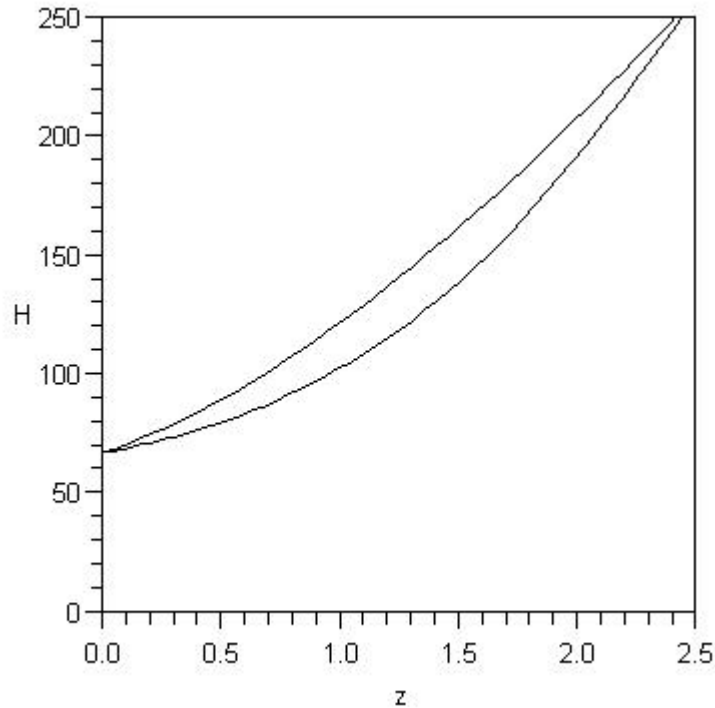


Figure 3. Dependence of the Hubble parameter ($\text{km} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$) on red shift. The upper curve represents the ΛCDM model, the lower curve represents this theory.

In this case, as the comparison of the calculation results with the experimental data shows ([16, p. 20] Fig.4), both dependences also is within the limits of the experiments error at $z < 2.5$. However, the discrepancy between them increases iteratively at large red shifts as it shown in Fig. 4. Thus, only one of the two theories can be valid.

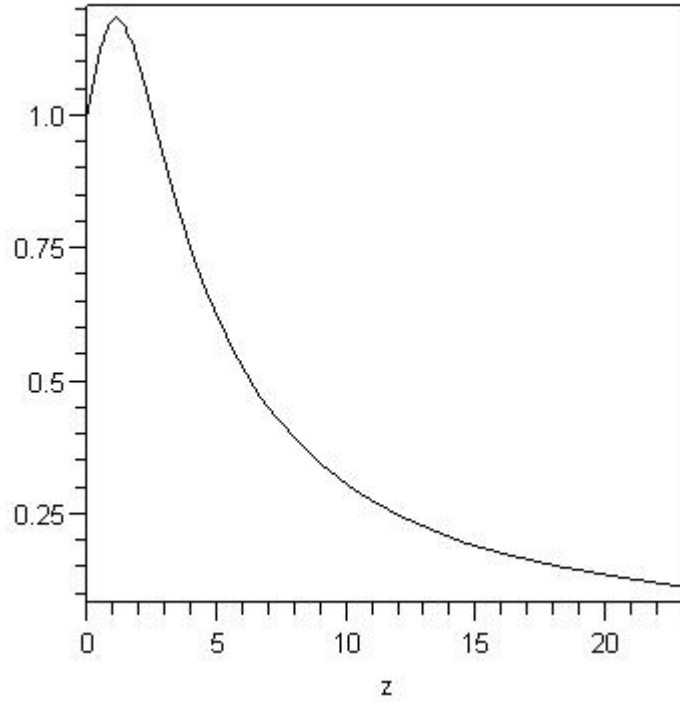


Figure 4. Dependence of the ratio of the Hubble parameter in the Λ CDM model to its value in this theory.

It is essential that, the dependence does not have free parameters in this region of red shifts, is determined only by the initial values at $z = 0$ and is valid up to the initial instant of time as it can be seen from Table 1. The hypotheses about the existence of dark energy and dark matter are introduced in GR within the frameworks of the Λ CDM model in order to ensure agreement with the experiment. To describe the dependence in the region of large z , the hypothesis about the existence of inflatons is introduced.

3.6 Temperature of the homogeneous gravitational field.

The gravitational field in empty space possesses the characteristics inherent in a material medium: energy, pressure and entropy. By virtue of the general laws of thermodynamics, one another characteristic of a medium state is temperature, the change of which in an equilibrium process without a heat supply is associated with a change of the pressure by the relation [17]:

$$s_{gr} \frac{d\theta_{gr}}{dt} = \frac{dp_{gr}}{dt}. \quad (3.48)$$

This equation allows us to determine the temperature of empty space from the found dependences of the pressure (3.36) and entropy density of the gravitational field (3.46) against u .

Substituting the corresponding relationships in (3.48), we have:

$$-\frac{c^2}{48\pi GT^2} \sqrt{\gamma(u)} d\left(\frac{2u^2 - 2u + \sigma}{\gamma(u)}\right) = \frac{\sigma \cdot k}{2l_{pl}^2 c T} d\theta_{gr}. \quad (3.49)$$

Integrating this equation taking into account the dependence $\gamma(u)$ (3.21), we find:

$$\theta_{gr}(u) = \frac{\hbar}{12\pi \cdot k \cdot T \sqrt{\gamma_{\min}}} \int_0^u \frac{1}{\sigma \cdot f(u)} \cdot \frac{\sigma - 2u(1 - \sigma)}{\sigma - 2u + 4u^2} du. \quad (3.50)$$

The value of the integral for the data of Tables 1, 2 is the same and is 0.5 (with an accuracy of eight characters) at $u = u^0$ (the present moment of time). At the same time, the temperature of the gravitational field $\theta_{gr}(u^0)$ varies from $1.879 \cdot 10^{30}$ K in the first case, to 1.166 K in the second.

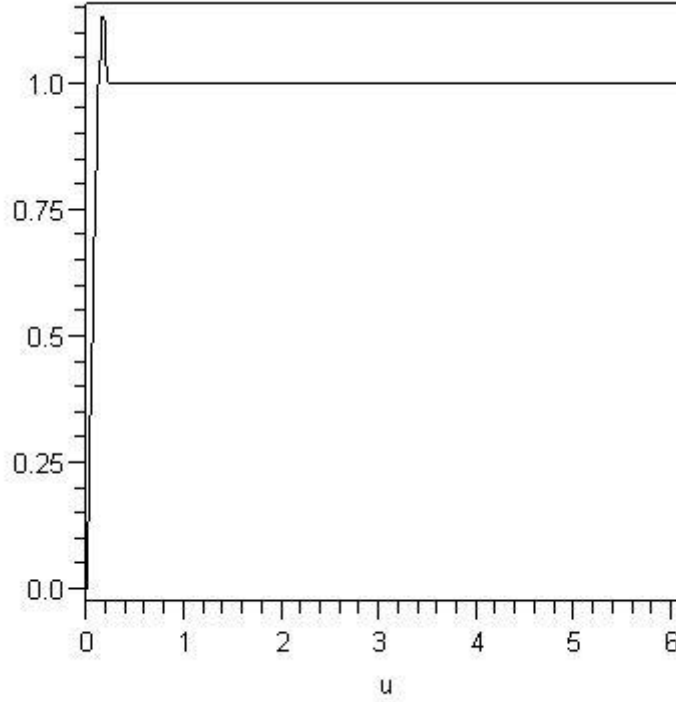


Figure 5. The vertical axis represents a ratio of the current temperature to its value at the present time, depending on u (3.19)

The relationship between the dimensionless velocity of bulk factor change and the proper time is seen in Table 1 and 2. It should be noted that for both variants presented in the table, the calculation dependences are almost identical. Except for a short initial time interval the temperature of manifold remains at the constant level equal to its current value. That is, the gravitational field has been having a constant temperature for almost 14 billion years up to the present moment and will be having it further up to achieving complete equilibrium. It acts as the thermostat of the Universe. The temperature of such a thermostat can be estimated by observing the temperature change of the bodies in thermal contact with it. The temperature of such a thermostat can be estimated by observing the temperature change of the bodies in thermal contact with it. Their temperature should asymptotically tend to the temperature of the thermostat when approaching the equilibrium state. In particular, if we consider the temperature of the CMB radiation, then it will tend to the temperature of the thermostat over time under an adiabatic cooling, but not to zero. At present the temperature of the CMB radiation is $\theta_{rel}^0 = 2.7255 \text{ } ^\circ\text{K}$ and no changes have been recorded in the course of its adiabatic cooling. From this we can conclude that the temperature of the gravitational field $\theta(u^0)$ is less than θ_{rel}^0 .

Eq. (3.50) shows that:

$$T\sqrt{\gamma_{\min}} = \frac{0.5 \cdot \hbar}{12\pi k\theta_{gr}(u^0)} \quad . \quad (3.51)$$

Using this relation and (3.41), it is possible to relate the maximum value of the global energy density $\rho_{gr\max}$ to the temperature value at present

$$\rho_{gr\max} = \frac{3\pi}{2e^2} \cdot \frac{c^2}{G} \cdot \left(\frac{k\theta_{gr}(u^0)}{\hbar} \right)^2 \quad . \quad (3.52)$$

If we take the temperature $\theta_{gr}(u^0)$ equal to the CMB radiation temperature at the present time $\theta_{rel}^0 = 2.7255 \text{ K}$ for estimation, then $\rho_{grmax} < 1 \cdot 10^{50} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \sim (1.5 \cdot \text{TeV})^4$. This is close to the value in the variant of evolution presented in Table 2 and *differs strikingly from the standard cosmological model (SCM), in which the energy density can reach the value of 64 orders of magnitude greater* $(10^{19} \text{ GeV})^4$. Perhaps, exactly this is the reason for absence in the Universe of the hypothetical forms of matter, which aren't found in experiments at the LHC.

4. Basic model of evolution of the homogeneous and isotropic Universe.

An increase in the intensity of the gravitational field during the evolution process will lead inevitably to appearance of new structures of matter.

Consider phenomenologically influences of matter on process of evolution of the Universe.

As shown in section 3, the only homogeneous space-time exists with an isotropic metric of the form

$$ds^2 = g_{00}(x^0)(dx^0)^2 - \gamma^{1/3}(x^0)dx^m dx^n \delta_{mn}.$$

Let matter be born at some point of time in this space-time. Owing to its homogeneity and isotropy, we write the tensor of average energy-momentum density of matter in the form $(\varepsilon_{mat})^\nu_\mu = \text{diag}(\rho_{mat}, -p_{mat}, -p_{mat}, -p_{mat})$. Since the constraint (1.1) does not include fields of matter, then, as noted in Section 3, the covariant derivative of this tensor must be equal to zero.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} (\varepsilon_{mat})^\nu_\mu) - \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda (\varepsilon_{mat})^\rho_\lambda = 0.$$

Substituting into this equation the expressions for connectivity (3.2) in the case of an isotropic metric we get:

$$\frac{d\rho_{mat}}{dx^0} = -(\rho + p)_{mat} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\sqrt{\gamma}}{dx^0}. \quad (4.1)$$

In the presence of matter the gravitational field equations (3.7-3.9) will take a form:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dx^0} \right) &= 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\gamma \sqrt{g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) - \frac{1}{6g_{00}} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \right)^2 &= \sqrt{\gamma g_{00}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00} \sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right) + \frac{8\pi G}{c^4} (\rho + 3p)_{mat}, \\ -\frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{g_{00}}} g^{mp} \frac{dg_{km}}{dx^0} \right) &= \delta_k^p \frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{\sqrt{\gamma g_{00}}}{g_{00}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right) - \frac{8\pi G}{c^4} (\rho - p)_{mat} \delta_k^p, \end{aligned}$$

Repeating all the computation taking into account these additional members, we have the following integro-differential equation instead (3.20)

$$8\gamma u \frac{du}{d\gamma} = 4u^2 - 2u + \sigma + M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}), \quad (4.2)$$

where

$$M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}) = \frac{48\pi G T^2}{c^2} \left(-\gamma(\rho + p)_{mat} + \frac{1}{4} \int_0^u (\rho - p)_{mat} \left(\frac{d\gamma}{du} \right) \frac{du}{u} \right),$$

and it's supposed that *the pressure and density of matter are equal to zero in the initial time.*

The equations for cosmic acceleration, energy density, pressure and scalar curvature of space are also modified in this case; instead of (3.29), (3.32), (3.36) and (3.39) we have

$$q = 1 - \frac{3}{2u} + \frac{3\sigma}{4u^2} + \frac{3}{4u^2} M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}), \quad (4.3)$$

$$\rho_{gr} + \rho_{mat} = \frac{c^2}{24\pi GT^2} \frac{u^2}{\gamma} = \frac{3c^2 H^2(u)}{8\pi G} \equiv \rho_{cr}(u), \quad (4.4)$$

$$p_{gr} + p_{mat} = -\frac{c^2}{48\pi GT^2} \frac{1}{\gamma} \left[2u^2 - 2u + \sigma + M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}) \right]. \quad (4.5)$$

$$R = -\frac{1}{2c^2 T^2 \gamma} \left[\frac{8}{3} u^2 - 2u + \sigma + M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}) \right]. \quad (4.6)$$

According to the observation data there are macroscopic matter, electromagnetic radiation, and neutrino in the Universe at the present time. These components weakly interact among themselves. In this case, the «conservation» laws for each type of matter are satisfied separately. The pressure can be considered equal to zero for baryon matter, $p=\rho/3$ for an electromagnetic radiation, for neutrinos the similar relation will be valid until it is possible to neglect their mass. Under these conditions, from (4.1) it follows:

$$\rho_b = \rho_b^0 \frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}}, \quad \rho_\gamma = \rho_\gamma^0 \left(\frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} \right)^{4/3}, \quad \rho_\nu = \rho_\nu^0 \left(\frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} \right)^{4/3}. \quad (4.7)$$

The values relating to the current time are marked by upper index.

It is known that the energy density of the two first components is respectively equal $\Omega_b = 0.0499$ and $\Omega_\gamma = 5.46 \cdot 10^{-5}$ of the critical energy density at the present time [14]. Data are less defined for neutrinos $\Omega_\nu < 5.52 \cdot 10^{-3}$. Then, to estimate the maximum degree of matter influence on the evolution process, it will be used exactly that value of the relative density of neutrinos.

At times not too far from the present we have the following dependence of the average energy density and pressure of matter from the bulk factor:

$$\rho_{mat} = \rho_{cr}^0 \left[\Omega_b \frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} + \Omega \left(\frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} \right)^{4/3} \right], \quad p_{mat} = \frac{\rho_{cr}^0}{3} \Omega \left(\frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} \right)^{4/3}, \quad \Omega = \Omega_\gamma + \Omega_\nu. \quad (4.8)$$

The functional on the right-hand side (4.2 - 4.6) describes the inverse effect of matter on the metric. The functional is equal to zero at the beginning of evolution and all the energy is concentrated in the gravitational field, therefore, in a first approximation, the inverse action can be neglected. Suppose that

$$M^{(1)}(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}) = 0,$$

where the index in parentheses indicates the approximation number.

In this case, the change of the bulk factor and its derivative will continue to be described by the relations (3.20), (3.21), and the critical density - by the relation (4.4). Thus, in this approximation, the energy density and matter pressure can be considered known functions of u at $u_b \leq u$.

$$\rho_{mat}(u) = \rho_{cr}^0 \frac{f(u^0)}{f(u)} \left[\Omega_b + \Omega \left(\frac{f(u^0)}{f(u)} \right)^{1/3} \right], \quad p_{mat} = \frac{\rho_{cr}^0}{3} \Omega \left(\frac{f(u^0)}{f(u)} \right)^{4/3}, \quad \Omega = \Omega_\gamma + \Omega_\nu. \quad (4.9)$$

4.1 Energy density of matter in the very early Universe.

The conditions under which the relations (4.9) are valid are violated at $0 \leq u \leq u_b$ (the very early Universe). The reason is the extremely high energy density of the gravitational field, reaching the level of energy density of the LHC (as shown in Section 3). Under these conditions, in addition to the particles listed, other components of the standard model of elementary particles and fields will also be born.

With this in mind, we redefine the dependences $\rho_{mat}(u)$ at the beginning of the evolution process as follows. Since there are no other sources of the energy than gravity during this period, we assume that it is proportional to $\rho_{gr}(u)$ with a dimensionless coefficient that depends on the energy density of the gravitational field:

$$\rho_{mat}(u) = \lambda \cdot \left(\frac{u}{f(u)} \right)^n \cdot \rho_{gr}(u), \quad \lambda < 1, \quad 0 \leq u \leq u_b, \quad n \geq 0. \quad (4.10)$$

Excluding the gravitational energy density from the relations (4.4), (4.10), we have:

$$\rho_{mat}(u) = \frac{\lambda \cdot u^n}{f^n(u) + \lambda \cdot u^n} \cdot \rho_{cr}(u), \quad 0 \leq u \leq u_b, \quad n \geq 0. \quad (4.11)$$

The constant λ and the quantity u_b are determined from the smooth conjugation conditions of the dependences (4.9), (4.11) at $u = u_b$. Equating separately the energy densities and their derivatives at $u = u_b$, we derive a system of two equations to determine u_b и λ :

$$\frac{\lambda \cdot u_b^n}{f^n(u_b) + \lambda \cdot u_b^n} = \left(\frac{u^0}{u_b} \right)^2 \left[\Omega_b \frac{f(u_b)}{f(u^0)} + \Omega \left(\frac{f(u_b)}{f(u^0)} \right)^{2/3} \right]. \quad (4.12)$$

$$4u_0^2 \cdot \left[\Omega_b \frac{f(u_b)}{f(u^0)} + \frac{4}{3} \Omega \left(\frac{f(u_b)}{f(u^0)} \right)^{2/3} \right] = \left(n + 2 - n \frac{\lambda \cdot u_b^n}{f^n(u_b) + \lambda \cdot u_b^n} \right) \frac{\lambda \cdot u_b^n (2u_b - \sigma)}{f^n(u_b) + \lambda \cdot u_b^n}. \quad (4.13)$$

This system of equations has two different solutions, the solution with a smaller value u_b is physical sensible. $u_b \ll f(u_b) \ll f(u^0)$ for this solution, therefore the equation (4.13) is simplified and the solution takes the form

$$u_b \approx \frac{3(2+n) - \sqrt{9(2+n)^2 - 48(2+n) \cdot \sigma}}{16}.$$

The value u_b determines that moment of world time when matter is being separated from the gravitational field. This is due to a decrease in the absolute value of the scalar curvature over time. This happens specifically at the time of its first conversion to zero. It follows from (3.39) that $R(u) = 0$ when

$$u = \frac{6 - \sqrt{36 - 96 \cdot \sigma}}{16}.$$

This expression is the same as u_b at $n = 0$. We find from (4.12) the ratio of the energy density of matter to the energy density of the gravitational field at the time of separation of matter from it for this value.

$$\lambda \approx \Omega \cdot \left(\frac{u^0}{u_b} \right)^2 \left(\frac{f(u_b)}{f(u^0)} \right)^{2/3}, \quad u_b \approx \frac{6 - \sqrt{36 - 96 \cdot \sigma}}{16}. \quad (4.14)$$

By substituting in this relation the values, corresponding to the data of Table 2, we find that this fraction was $2.754 \cdot 10^{-20}$. The energy density of the Universe is $1.390 \cdot 10^{49} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$ for $u = u_b$ at the time $t - t_{st} = 8.183 \cdot 10^{-13}$ seconds. When approaching the initial instant of time, the average energy density of matter decreases in accordance with (4.11), tending to zero together with the critical density.

4.2 Temperature history of the early and very early Universe.

Let us now turn to the temperature history of the early Universe. In doing so, we will proceed from the main points set forth in [7]. The early period includes the period of time when the temperature of electromagnetic radiation was in the range from 10^{11} to $4000 \text{ }^0\text{K}$. It is stated [7], that the following relations between the density of entropy s , temperature θ , and the scale

factor a for electromagnetic radiation and neutrino matter are valid (the corresponding quantities are marked with the subscript γ or ν):

$$s_\gamma(\theta)a^3 = \text{const}, \quad s_\gamma(\theta) = \frac{4}{3}a_B\theta_\gamma^3, \quad s_\nu(\theta)a^3 = \text{const}, \quad s_\nu(\theta) = \frac{7}{2}a_B\theta_\nu^3, \quad a_B = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3}$$

Using the expressions for the scale factor obtained in the previous section, we rewrite these relations in the form:

$$s_\gamma(\theta)\gamma^{1/2}(u) = s_\gamma(\theta_b)\gamma^{1/2}(u_b); \quad s_\gamma(\theta) = \frac{4}{3}a_B\theta_b^3 \frac{\gamma^{1/2}(u_b)}{\gamma^{1/2}(u)} = \frac{4}{3}a_B\theta_b^3 \frac{f(u_b)}{f(u)}; \quad \theta_b = \theta_\gamma(u_b). \quad (4.15)$$

$$s_\nu(\theta)\gamma^{1/2}(u) = s_\nu(\theta_b)\gamma^{1/2}(u_b); \quad s_\nu(\theta) = \frac{7}{2}a_B\theta_b^3 \frac{\gamma^{1/2}(u_b)}{\gamma^{1/2}(u)} = \frac{7}{2}a_B\theta_b^3 \frac{f(u_b)}{f(u)}; \quad \theta_b = \theta_\nu(u_b). \quad (4.16)$$

It is shown in [7] that the equation (3.48) is also applicable to describe the change in the temperature of matter in the Universe. In this case, by virtue of the additivity of the contributions of components to the pressure and entropy density, equation (3.48) takes the form:

$$dp_{mat} = (s_\gamma(\theta) + s_\nu(\theta))d\theta. \quad (4.17)$$

We apply this equation to the description of the initial stage of evolution at $0 \leq u \leq u_b \ll u^0$. In this case, as follows from (4.9), the contribution of baryons to the total energy density of matter is negligible, matter can be considered an ultrarelativistic medium, and taking into account (4.4), (4.11), we can write the pressure of matter in the form:

$$p_{mat}(u) = \frac{\lambda}{3} \cdot \frac{c^2}{24\pi GT^2 \gamma_{min}} \cdot \left(\frac{u}{f(u)} \right)^3, \quad 0 \leq u \leq u_b.$$

While neglecting the possible difference in temperatures of the components of matter, we write the equation (4.17) that determines the change in temperature.

$$\frac{\lambda}{3} \cdot \frac{c^2}{24\pi GT^2} \cdot \frac{f(u)}{f(u_b)} d\left(\frac{u}{f(u)} \right)^2 = \frac{29}{6} a_B \theta_b^3 d\theta. \quad (4.18)$$

Integrating this equation, taking into account the definition (3.21) of the function $f(u)$ and its derivative, we get at $0 \leq u \leq u_b$:

$$\theta^3(u_b) \cdot \theta(u) = \frac{\lambda}{29a_B} \cdot \frac{c^2}{6\pi GT^2 \gamma_{min}} \cdot \frac{1}{f(u_b)} \int_0^u \frac{(\sigma - 2u)udu}{(4u^2 - 2u + \sigma)f(u)}. \quad (4.19)$$

Substituting expression (4.14) for the parameter λ into this equation, we find the temperature $\theta(u_b)$ at the moment of separation of matter from the gravitational field.

$$\theta(u_b) = \left[\frac{1}{29a_B} \cdot \frac{c^2}{6\pi GT^2 \gamma_{min}} \cdot \frac{\Omega}{u_b} \left(\frac{u_b^3 \cdot f(u_b)}{u_b^3 \cdot f(u^0)} \right)^{2/3} I(u_b) \right]^{1/4}, \quad (4.20)$$

where

$$I(u_b) = \int_0^{u_b} \frac{(\sigma - 2u)udu}{(4u^2 - 2u + \sigma)f(u)}.$$

The calculation for the values of the parameters corresponding to the data in Table 1 and 2 gives $I(u_b) = 2.302 (\pm 0.0005) \cdot 10^{-4}$. At the same time, $\theta(u_b) = 1.345 \cdot 10^{21} \text{ } ^0\text{K}$ in the first case, $\theta(u_b) = 1.145 \cdot 10^{11} \text{ } ^0\text{K}$ in the second case.

According to the calculations given in [7], the radiation and neutrino temperatures coincide at $\theta = 10^{11} \text{ } ^0\text{K}$, below it neutrinos get out of equilibrium with other particles and their temperature decreases, asymptotically tending to the value

$$\theta_v = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} \theta_\gamma .$$

At the same time, the radiation temperature will decrease at $u > u_b$ with the growth of the scale factor according to the law [7]:

$$\frac{\theta_\gamma(u)}{\theta_\gamma(u_b)} = \frac{\gamma^{1/6}(u_b)}{\gamma^{1/6}(u)} = \frac{f^{1/3}(u_b)}{f^{1/3}(u)} . \quad (4.21)$$

Substituting expression (4.20) here, we find the dependence of the current value of radiation temperature on $u(t)$ at $u > u_b$:

$$\theta_\gamma(u) = \left[\frac{1}{29a_B} \cdot \frac{c^2}{8\pi GT^2 \gamma_{\min}} \cdot \frac{\Omega}{u_b} \left(\frac{u^{03} \cdot f(u_b)}{u_b^3 \cdot f(u^0)} \right)^{2/3} \int_0^{u_b} \frac{(\sigma - 2u)u^2 du}{(4u^2 - 2u + \sigma)f^2(u)} \right]^{1/4} \frac{f^{1/3}(u_b)}{f^{1/3}(u)} . \quad (4.22)$$

4.3 Relative density of neutrinos in the Universe.

For $u = u^0$, that is, at the present moment in our Universe, the value of the temperature $\theta_\gamma(u^0)$ should be equal to the experimentally observed temperature of the CMB radiation 2.7255 ^0K . The calculation by (4.22) for the parameters values corresponding to the data of Table 1 gives $\theta_\gamma(u^0) = 6.6215$ ^0K , for the data of Table 2 it gives $\theta_\gamma(u^0) = 6.6147$ ^0K .

In the constructed continuum of models of the Universe for two extreme cases, which differ in maximum energy density by 64 orders of magnitude, the temperatures of the CMB radiation practically coincide with each other in the same point of time (of our present), but they differ from the value observed in our Universe by more than two times. There are no free parameters in the described phenomenological model, therefore such a discrepancy could mean its collapse, if not for one circumstance. As noted at the beginning of the section, the relative neutrino density according to the data of [14] is $\Omega_\nu < 5.52 \cdot 10^{-3}$ and it, unlike the radiation density $\Omega_\gamma = 5.46 \cdot 10^{-5}$, is not exactly determined, as well as their sum $\Omega = \Omega_\gamma + \Omega_\nu$. This quantity is included in the expression for the temperature of the CMB radiation (4.22) in the form of a constant factor $\Omega^{1/4}$. Therefore, the discrepancy with the experiment can be eliminated if a new value Ω^* is introduced instead of the old density value.

$$\Omega^* = (\Omega_\nu^* + \Omega_\gamma) = 1.6068 \cdot 10^{-4}, \quad \Omega_\nu^* = 1.6068 \cdot 10^{-4} - 5.46 \cdot 10^{-5} = 1.0608 \cdot 10^{-4} . \quad (4.23)$$

Thus, if the stated theory is correct, then *the currently unknown relative density of neutrinos in the Universe is equal to $\Omega_\nu^* = 1.0608 \cdot 10^{-4}$* . In this case, at $\rho_{gr\max} = 2 \cdot 10^{49} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$, $\theta_\gamma(u_b) = 4.719 \cdot 10^{10} \text{ } ^0\text{K}$, and the maximum radiation temperature in the Universe $\theta_{\gamma\max} = 9.404 \cdot 10^{10} \text{ } ^0\text{K}$ is reached at $t_{st} = 4 \cdot 10^{-13} \text{ sec}$. As shown in Section 3 $\rho_{gr\max} < 2 \cdot 10^{50} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$. The temperature of matter in the Universe has never exceeded $\theta_{\gamma\max} = 1.230 \cdot 10^{11} \text{ } ^0\text{K}$ at this value of the maximum possible energy density.

4.4 Value of the relative density of matter observed in the Universe.

The total average energy density in the Universe (4.4) is always equal to critical one regardless of the presence or absence of matter. Therefore, taking into account (4.9), the fraction of the average energy density of matter in its total amount (at the found value of the relative neutrino density Ω_ν^*) is

$$quota(u) = \frac{\rho_{mat}(u)}{\rho_{cr}(u)} = \frac{u^{02} f^2(u)}{u^2 f^2(u^0)} \left[\Omega_b \frac{f(u^0)}{f(u)} + \Omega \cdot \left(\frac{f(u^0)}{f(u)} \right)^{4/3} \right] .$$

In view of (3.21), (3.42), this quantity depends on time as follows.

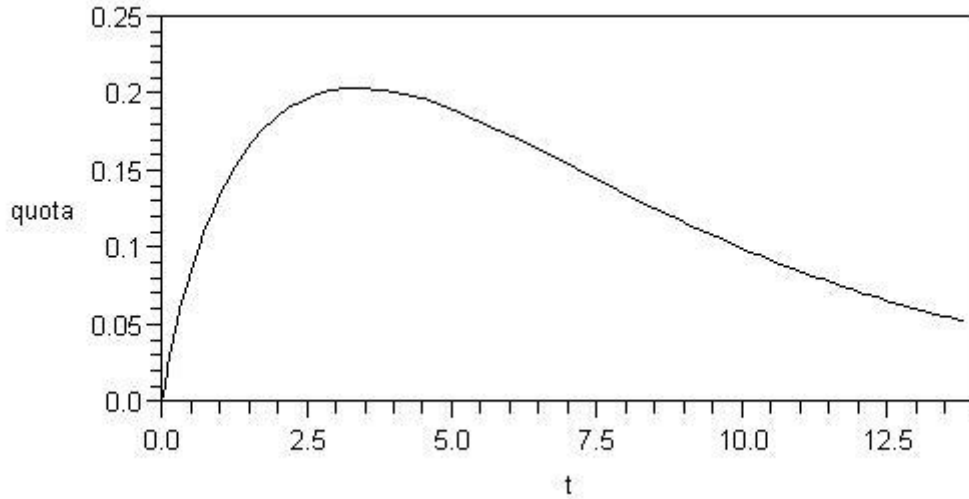


Figure 6. Time dependence of the ratio of the average energy density of matter to the energy density in the Universe (in billions of years), $\rho_{gr\max} = 2 \cdot 10^{49} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$.

The maximum fraction of the energy of matter does not exceed 0.1832, at the present time this value is less than 0.055, and continues to decrease with time. In contrast to GR, where the energy density of matter increases indefinitely at time decreasing, here it reaches a maximum and then begins to decrease.

The rest and main part of the energy of the Universe is the energy of the gravitational field -

$$\rho_{gr}(u) = \rho_{cr}(u)(1 - quota(u)) \quad .$$

In view of (3.44), this value can be related to the redshift of the observed objects. It is this energy, and not “dark matter”, evenly distributed in space, that exhibits in the character of dependences of the rotation curves of gravitation-coupled objects.

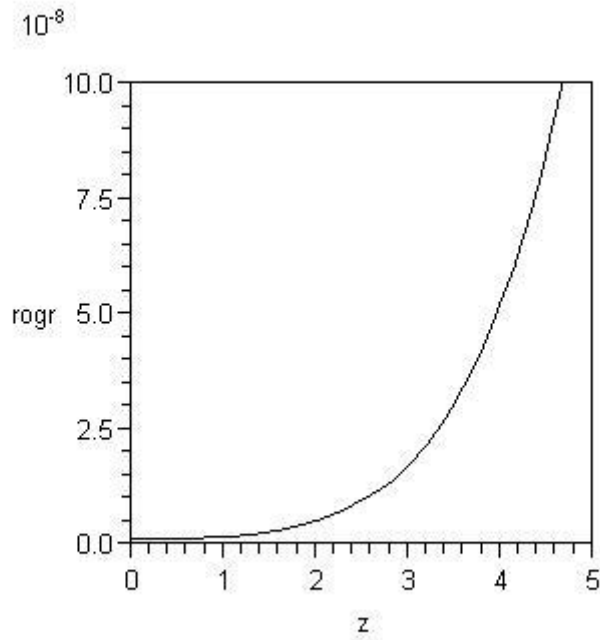


Figure 7. Dependence of the energy density of the gravitational field ρ_{gr} ($10^{-8} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$) on red shift in the location of the observed gravitation-coupled objects, $\rho_{gr\text{max}} = 2 \cdot 10^{49} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$.

It is this energy, and not “dark matter”, evenly distributed in space, that exhibits in the character of dependences of the rotation curves of gravitation-coupled objects. According to the data of [14], the energy density of cold dark matter in GR is equal to

$$\rho_{cdm}(z) = \Omega_{cdm} \rho_{cr}^0 (1+z)^3, \quad \Omega_{cdm} = 0.265^{+0.16}_{-0.17}.$$

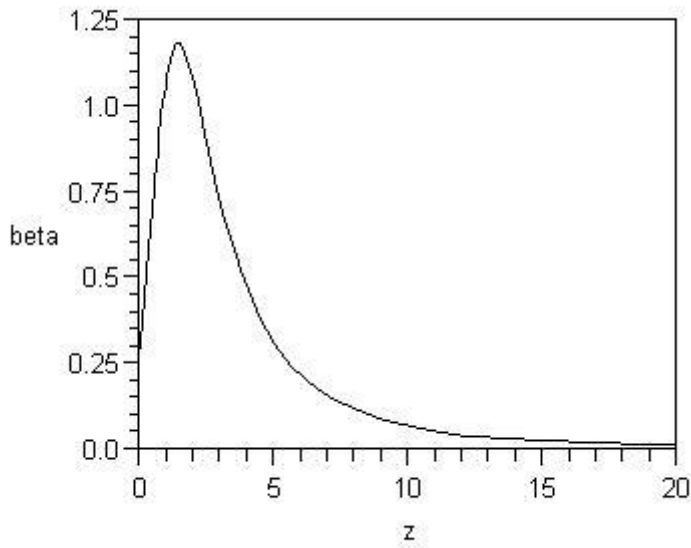


Figure 8. Ratio of the energy density of cold dark matter to the energy density of the gravitational field depending on red shift.

As it can be seen from the Figure, a reasonable agreement with experiment can be obtained in a certain region of redshifts when calculating the rotation curves of gravitationally bound objects using a hypothetical dark matter density, however, there is a vast region of these values where such a calculation will lead to erroneous results. There are no reasonable arguments for replacing the gravitational field, which is a real source of additional mass, with a hypothetical cold matter with a possible unpredictable error value.

Thus, it is not required to enter any new forms of matter besides the already known forms to describe features of evolution of the Universe in contrast to GR.

4.5 Influence of the presence of matter on evolution of the Universe.

Now we estimate the influence of matter on evolution of space-time manifold. In the second approximation, for the prescribed function $\gamma(u)$, we find:

$$M^{(2)}\left(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}\right) \cong w(u),$$

$$w(u) = -2u^{02} \left[\Omega_b \frac{f(u)}{f(u^0)} + \frac{4}{3} \Omega \left(\frac{f(u)}{f(u^0)} \right)^{2/3} \right] + \int_0^u \left[\Omega_b \frac{f(u)}{f(u^0)} + \frac{2}{3} \Omega \left(\frac{f(u)}{f(u^0)} \right)^{2/3} \right] \frac{4u^{02} du}{4u^2 - 2u + \sigma} \quad (4.24)$$

Substituting (4.24) in (4.2) we derive the equation describing how matter in turn affects the change of the metric. The solution of this equation can be written by a quadrature.

$$\sqrt{\frac{\gamma(u)}{\gamma_{\min}}} = \psi(u) = \exp\left(\int_0^u \frac{4udu}{4u^2 - 2u + \sigma + w(u)}\right). \quad (4.25)$$

$$t - t_{st} = T \sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^u \frac{4\psi(u) du}{4u^2 - 2u + \sigma + w(u)}. \quad (4.26)$$

The constant σ in these relations, in the same way as it was done in the previous section, has to be defined together with the value of u^0 from a condition of the equality of the evaluated time of the Universe existence and the Hubble parameter to their values observed now.

$$t^0 - t_{st} = T \sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^{u^0} \frac{4\psi(u)}{4u^2 - 2u + \sigma + w(u)} du, \quad H^0 = \frac{1}{3T \sqrt{\gamma_{\min}}} \frac{u^0}{\psi(u^0)}. \quad (4.27)$$

$\rho_{gr\max} = 2 \cdot 10^{49} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}; T \sqrt{\gamma_{\min}} = 8.6912868 \cdot 10^{-14} \text{ sec}; \Omega_b = 0.0499; \Omega_\gamma = 5.46 \cdot 10^{-5}; \Omega_v^* = 1.0608 \cdot 10^{-4}$
$u^0 = 6.79..; \quad \sigma = 0.25050968$

TABLE 3. Solution of the equations (4.27) ($t^0 - t_{st} = 4.355 \cdot 10^{17} \text{ sec}$, $H^0 = 2.181 \cdot 10^{-18} \text{ sec}^{-1}$) at the maximum energy density $\rho_{gr\max} = 2 \cdot 10^{49} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$.

Further, the results of calculations carried out both with and without taking into account the presence of matter in the Universe are presented in graphical form. The calculations were carried out at the value $\Omega_v = 5.52 \cdot 10^{-3}$, therefore the difference of each pair of the dependencies will be even smaller when calculating with the real value $\Omega_v^* = 1.0608 \cdot 10^{-4}$.

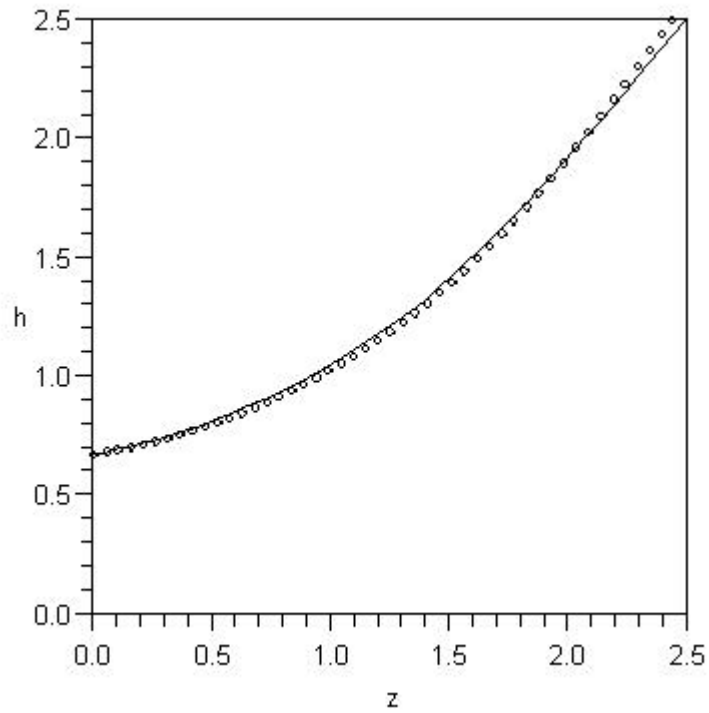


Figure 9. Results of the calculation of the dependence of the Hubble parameter ($H=100h \text{ km}\cdot\text{sec}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}$) on red shift taking into account (full line) and without taking into account (points) the presence of matter.

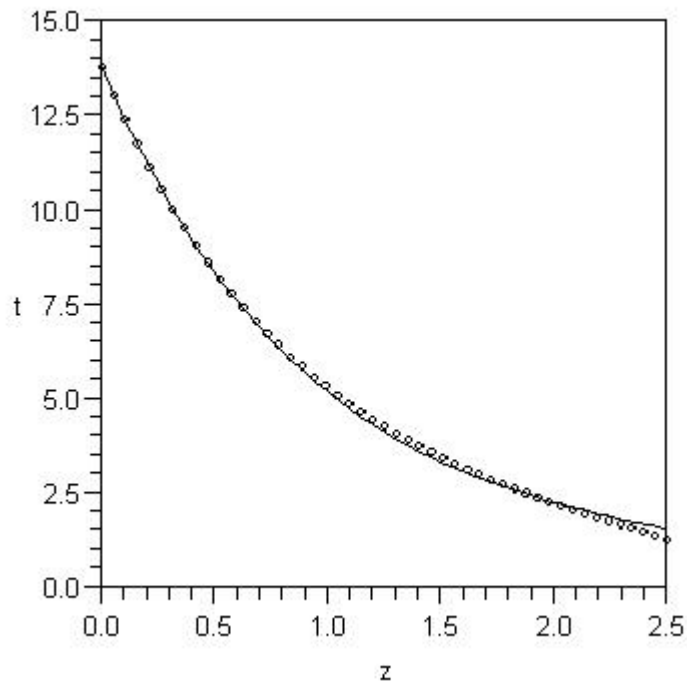


Figure 10. Results of the calculation of the object age (in billions of years) depending on its observed redshift taking into account (full line) and without taking into account (points) the presence of matter.

In view of the data provided in the previous section, it is possible to conclude that prehistory effect on the further course of the given dependences is insignificant in the range of red shifts less than 2.3.

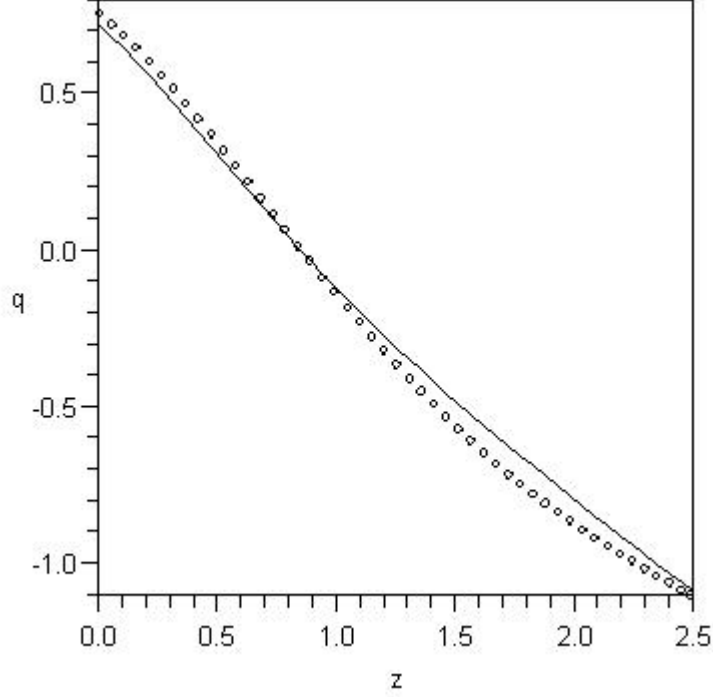


Figure 11. Results of the calculation of the dependence of the cosmic acceleration against red shift taking into account (full line) and without taking into account (points) the presence of matter.

The birth of matter also does not lead to a noticeable time shift of change of the deceleration-acceleration eras.

5. Static isotropic metrics

Let's consider the static spherically-symmetric metrics. The most general expression for the space-time interval can be reduced to the form by the coordinates transformation

$$x'^0 = x^0 + \varphi(x^m), \quad x'^m = x^m$$

with the Jacobian equal to unity [8]:

$$ds^2 = F(r)(dx^0)^2 - \frac{G(r)}{r^2} (\bar{x} \cdot d\bar{x})^2 - C(r)(d\bar{x} \cdot d\bar{x})$$

The constraint (2.1) is invariant relative to such transformations, but now in contrast to GR its existence doesn't allow to reduce quantity of the required metrics components till two.

Using the Kronecker symbols δ_{mn} , write the metric tensor $g_{\mu\nu}$ as:

$$g_{00} = F(r), \quad g_{0m} = 0, \quad g_{mn} = -C(r) \cdot \delta_{mn} - G(r) \frac{x_m x_n}{r^2}, \quad x_m \equiv x^m, \quad (5.1)$$

$$g(r) = \det g_{\mu\nu} = -FC^2(C + G).$$

The tensor $g^{\mu\nu}$ (inverse to the metric tensor):

$$g^{00} = \frac{1}{F(r)}, \quad g^{0m} = 0, \quad g^{mn} = -\frac{1}{C(r)} \delta^{mn} + \frac{G(r)}{C(C + G)} \frac{x^m x^n}{r^2}. \quad (5.2)$$

$$g_{mn} g^{nk} = \delta_m^k.$$

In the presence of the constraint (1.1) it is more convenient to proceed not from the equations derived at the action variation on the metrics components, but to choose as one of the varied functions $\Delta(r) = \sqrt{-g(r)}$.

The constraint gives the following contribution to the action (2.1):

$$\Lambda = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\nu} = -\frac{\Phi'(r)g'(r)}{2(C+G)g} = -\frac{\Phi'(r)\Delta'(r)}{\Delta^3} FC^2 \quad (5.3)$$

(The stroke hereinafter denotes differentiating with respect to r)

Other terms can be found using the known results of calculations [8,11]. The scalar curvature and volume element are generally covariant, therefore they can be found using “spherical” coordinates.

In “spherical” coordinates space-time interval is:

$$ds^2 = F(r)(dx^0)^2 - G(r)dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

By analogy to the “standard” form [8] write it as follows:

$$ds^2 = F(r)(dx^0)^2 - A(r)dr^2 - r^{*2}(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.4)$$

where $A(r)=G(r)+C(r)$, $r^*(r)=rC^{1/2}(r)$.

For this metrics the nonvanishing components of the connection differ slightly from the corresponding components of the “standard” form [8]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t &= \frac{F'}{2F}, & \Gamma_{rr}^r &= \frac{A'}{2A}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r^* r^{*'}}{A}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -\frac{r^* r^{*'} \sin^2 \theta}{A}, & \Gamma_{tt}^r &= \frac{F'}{2A}, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{r^{*'}}{r^*}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{r^{*'}}{r^*}, & \Gamma_{\theta\theta}^\varphi = \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \text{ctg } \theta. \end{aligned}$$

The curvature tensor changes according to this.

Using the expressions for the components of the connection, find the scalar curvature:

$$R = \frac{1}{2F} \left(\frac{F'}{A} \right)' + \frac{1}{2A} \left(\frac{F'}{F} \right)' + \frac{2}{r^{*2}} \left(\frac{r^* r^{*'}}{A} \right)' + \frac{2}{A} \left(\frac{r^{*'}}{r^*} \right)' - \frac{2}{r^{*2}} + \frac{2}{A} \left[\left(\frac{r^{*'}}{r^*} \right)^2 + \frac{r^{*'} F'}{r^* F} \right].$$

Singling out the divergent term, it can be written in the form:

$$R = \frac{1}{r^{*2} \sqrt{AF}} \frac{d}{dr} \left[r^{*2} \sqrt{AF} \left(\frac{F'}{AF} + \frac{4r^{*'}}{r^* A} \right) \right] - 2 \left[\frac{r^{*'} F'}{r^* AF} + \frac{1}{A} \left(\frac{r^{*'}}{r^*} \right)^2 + \frac{1}{r^{*2}} \right]. \quad (5.5)$$

The action for the gravitational field:

$$S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int (R + \Lambda) \sqrt{AF} r^{*2} \sin \theta dr d\theta d\varphi dx^0.$$

Substituting here the expression (5.5) for R and (5.3) for Λ , omitting the divergent term and taking into account that $A=\Delta^2/FC^2$, we get:

$$S_{gr} = \frac{c^3}{8\pi G} \int \left(\frac{\Delta}{r^{*2}} + \frac{r^{*2} F}{\Delta r^4} (r^{*'})^2 + \frac{1}{\Delta r^4} r^{*3} r^{*'} F' + \frac{\Phi' \Delta' r^{*4} F}{2\Delta^2 r^4} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi dx^0.$$

Introduce the variable $\xi=r^3$ instead of r , then the action takes the form:

$$S_{gr} = \frac{3c^3}{8\pi G} \int \left(\frac{\Delta}{9r^{*2}} + \frac{Fr^{*2}}{\Delta} \left(\frac{dr^*}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{\Delta} r^{*3} \frac{dr^*}{d\xi} \frac{dF}{d\xi} + \frac{Fr^{*4}}{2\Delta^2} \frac{d\Phi}{d\xi} \frac{d\Delta}{d\xi} \right) d\xi \sin \theta d\theta d\varphi dx^0.$$

From a principle of least action find the gravitational field equations in space free from matter:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^{*4} F}{\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} \right) = 0, \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{9r^{*2}} - \frac{r^{*2}}{\Delta^2} \left(\frac{dr^*}{d\xi} \right)^2 F - \frac{r^{*3}}{\Delta^2} \frac{dr^*}{d\xi} \frac{dF}{d\xi} - \frac{1}{2\Delta^2} \frac{d}{d\xi} \left(r^{*4} F \frac{d\Phi}{d\xi} \right) = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{r^{*2}}{\Delta} \left(\frac{dr^*}{d\xi} \right)^2 - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^{*3}}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) + \frac{r^{*4}}{2\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} \frac{d\Phi}{d\xi} = 0, \quad (5.8)$$

$$-\frac{2\Delta}{9r^{*3}} - 2r^* \frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^* F}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) - r^{*3} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{dF}{d\xi} \right) + 2 \frac{r^{*3} F}{\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} \frac{d\Phi}{d\xi} = 0. \quad (5.9)$$

Equation (5.6) implies:

$$\frac{r^{*4} F}{\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} = \alpha, \quad (5.6')$$

where α is the constant with the dimension of length.

Multiply the equation (5.7) by 2Δ , subtract from result - (5.8), multiplied by $2F$, and add the result to the equation (5.9), multiplied by r^* , after simple transformations reduce the equation to the form:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{r^{*4}}{\Delta} \left(\frac{dF}{d\xi} + F \frac{d\Phi}{d\xi} \right) \right] = 0.$$

This implies:

$$\frac{r^{*4} F}{\Delta} \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{d\xi} + \frac{d\Phi}{d\xi} \right) = \beta,$$

where β is one more constant with the dimension of length. Assuming $\beta = \sigma\alpha$, where σ is the numerical factor, and using (5.6') this equation can be written in the form:

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{d\xi} + \frac{d\Phi}{d\xi} = \sigma \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\xi}, \quad \sigma = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Taking into account that the function $\Phi(r)$ is defined accurate within a constant, find:

$$\Phi = -\ln(F\Delta^{-\sigma}). \quad (5.7')$$

Rewrite the equation (5.8) as follows:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^{*2}}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) = \frac{r^{*3}}{2\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} \frac{d\Phi}{d\xi}. \quad (5.8')$$

After the substitution of this expression in the equation (5.9) it takes the form:

$$r^{*4} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{dF}{d\xi} \right) + 2r^{*2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{Fr^*}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) - 4 \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{r^* dr^*}{d\xi} \right)^2 + r^{*2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^*}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) \right] F + \frac{2\Delta}{9r^{*2}} = 0$$

This equation is equivalent to the following:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{r^{*6}}{\Delta} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{F}{r^{*2}} \right) \right] + \frac{2\Delta}{9r^{*2}} = 0.$$

Integrating this equation over ξ we have:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{F}{r^{*2}} \right) - \beta_1 \frac{\Delta}{r^{*6}} + \frac{2}{9} \frac{\Delta}{r^{*6}} \int_0^\xi \frac{\Delta}{r^{*2}} d\xi = 0. \quad (5.9')$$

where $\beta_1 = \left[\frac{r^{*6}}{\Delta} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{F}{r^{*2}} \right) \right]_{\xi=0}$ is one more constant with the dimension of length.

Thus, the solution of the initial system of equations depends on the choice of the values of the three constants α, β_1, σ .

First of all, we consider the case when $\alpha = 0$. In this case, from (5.6') it follows

$$\Delta(r) = \text{const} = \Delta(\infty) = 1.$$

Next, sequentially from (5.7'), (5.8'), (5.9') we find

$$\Phi(r) = -\ln F(r).$$

$$\frac{r^*(r)}{r} = \text{const} = \frac{r^*(r)}{r} \Big|_{r=\infty} = 1.$$

$$F(r) = 1 - \frac{\beta_1}{r}.$$

This solution coincides in form with the Schwarzschild solution, however, there is a fundamental difference related to the presence of the scalar $\Phi(r)$. Its value on the gravitational radius tends to infinity. On the one hand, this means that the solution cannot be continued beyond the gravitational radius, and on the other hand, the energy of the gravitational field also tends to infinity (Appendix A.8). Therefore, this solution turns out to be nonphysical, and $\beta_1 = 0$ should be taken; the solution is the Minkowski metric.

Let us assume further $\beta_1 = 0$ in order that the Minkowski metric could be the solution of this system of equations (in case when the constant α is equal to zero).

Integrating the equation (5.9') one more time, represent the function $F(r)$ in the form:

$$F = \frac{2}{9} r^{*2} \int_{\xi}^{\infty} \left(\int_0^{\xi} \frac{\Delta}{r^{*2}} d\xi \right) \frac{\Delta}{r^{*6}} d\xi. \quad (5.9'')$$

Substituting the expression for the derivative Δ from the equation (5.6'), we rewrite equation (5.8') in the form:

$$\frac{d}{dr^*} \frac{1}{V} = \frac{3\alpha}{2r^* F} \frac{d\Phi}{dr^*}, \quad V = \frac{\Delta(r^*) d\xi}{3r^{*2} dr^*}.$$

Passing from the derivatives with respect to $\xi=r^3$ to the derivatives with respect to r^* in all relations and introducing the dimensionless coordinate's r/a and r^*/a (keeping the previous notation r and r^* for them), we can write the initial system of equations as follows:

$$\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dr^*} = \frac{3V(r^*)}{Fr^{*2}}, \quad (5.10)$$

$$V(r^*) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \int_{r^*}^{\infty} \frac{1}{r^* F} \frac{d\Phi}{dr^*} dr^*}, \quad \Phi = -\ln(F\Delta^{-\sigma}), \quad (5.11)$$

$$F(r^*) = 2r^{*2} \int_{r^*}^{\infty} \left(\int_{r^*_{\min}}^{r^*} V(r^*) dr^* \right) \frac{1}{r^{*4}} V(r^*) dr^*. \quad (5.12)$$

$$\frac{\Delta(r^*) r^2}{r^{*2}} \frac{dr}{dr^*} = V(r^*). \quad (5.13)$$

Generally speaking, the nonzero value $r^*_{\min} = r^*(0)$ means a presence of *the edge* of the space-time manifold.

Consider behavior of the metrics at $r^*_{\min} = 0$ and the small values r^* . If the integral

$$2 \int_0^{\infty} \left(\int_0^{r^*} V(r^*) dr^* \right) \frac{V(r^*)}{r^{*4}} dr^* = b > 0 \quad (5.14)$$

exists, eq.(5.12) implies that the function $F(r^*) \approx b \cdot r^{*2}$ at the small r^* . Then assumed that $V(r^*) \approx b_1 \cdot r^{*\nu} \geq 0$, $\Delta(r^*) \approx b_2 \cdot r^{*\delta} \geq 0$ and substituting these expressions in (5.8', 5.10) we have:

$$\nu = 3, \quad b_1 = \frac{2b}{2 - \sigma\delta}, \quad \delta = \frac{6}{2 - \sigma\delta}. \quad (5.15)$$

From the last relation follows:

$$\delta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 6\sigma}}{\sigma}.$$

therefore $\sigma \leq 1/6$.

Integrating the equation (5.13) find at the small values r, r^* :

$$r^3(r^*) = 3 \int_0^{r^*} \frac{V(r^*)}{\Delta(r^*)} r^{*2} dr^* \approx 3 \frac{b_1}{b_2} \int_0^{r^*} r^{*(5-\delta)} dr^*. \quad (5.16)$$

The last integral exists only at $\delta < 6$. In this case

$$\delta = \frac{1 - \sqrt{1 - 6\sigma}}{\sigma}, \quad \sigma < \frac{1}{6}. \quad (5.17)$$

Consider now the expression for the energy of the static isotropic gravitational field (Appendix I). In this case

$$E = \frac{c^4 \alpha}{4G} \left[\frac{r^{*2} F(r^*)}{V(r^*)} \frac{d \ln(F \Delta^{-\sigma})}{dr^*} \Big|_{r^*_{\min}}^{r^* \rightarrow \infty} - 3 \ln F \Delta^{-\sigma}(r^*_{\min}) \right]. \quad (A.8)$$

The last term in this relation has a logarithmic singularity at $r^*_{\min} = 0$.

The energy will have the finite value only at $r^*_{\min} \neq 0$, that is *in the presence of the edge*. It is possible only at the value $\sigma = 1/6$.

The quantity r^*_{\min} is an independent parameter and for its definition the additive considerations are necessary. First, suppose that according to *Mach's principle* inertial mass M_{in} is related to the total gravitational field energy E out of the edge by Einstein's formula $E = M_{in} c^2$. Secondly, in accordance with *the experimental data*, we assume the equality of the quantity of this inertial and gravitational mass $M_{in} = M_{gr}$. And at last, based on *correspondence principle with GR* we assume that at the large values of r^* the first term coefficient of the function $F(r^*)$ expansion in powers of $1/r^*$ is equal to the gravitational radius-to- α ratio.

$$F(r^*) = 1 - \frac{r_{gr}}{\alpha} \frac{1}{r^*} + \dots = 1 - \frac{2M_{gr}G}{c^2 \alpha} \frac{1}{r^*} + \dots \quad (5.18)$$

In this case the relation (A.8) passes into the equation defining a quantity r^*_{\min} .

$$\frac{r_{gr}}{\alpha} = \frac{2r^*_{\min} F(r^*_{\min})}{3V(r^*_{\min})} - \ln \frac{F(r^*_{\min})}{\Delta^{1/6}(r^*_{\min})}. \quad (5.19)$$

The solution of the system of equations (5.10) - (5.13), (5.19) can be found by a successive approximation method. Starting from the trial function $V^{(0)}(r^*)$ at the chosen initial value r^*_{\min} it is possible to find the function $F^{(0)}(r^*)$ as a first approximation from (5.12), and then to find $\Delta^{(0)}(r^*)$ from (5.10) and - new value $V^{(1)}(r^*)$ from (5.11). Continue this process before deriving on N step the values of the desired functions with the required accuracy. Find the value of r^*_{\min} from the equation (5.19). And then find the function $r(r^*)$ from the equation (5.13).

Construct a trial function. If eq. (5.18) is valid at large values of r^* , then eq. (5.10, 5.11) implies that $V(r^*) \approx 1 - v/r^{*2} + \dots$. As in the presence of the edge the behavior of the desired functions is not determined at small values of r^* , it is natural to assume that the relative size of r^*_{\min} is more than unit. Providing that $r^*_{\min} \geq 1$, specify a trial function as follows:

$$V^{(0)}(r^*) = 1 - v/r^{*2}. \quad (5.20)$$

Substituting this expression in eq. (5.12) we find

$$F^{(0)}(r^*) = 1 - \frac{2}{3} \left(r^*_{\min} + \frac{v}{r^*_{\min}} \right) \frac{1}{r^*} + \frac{2}{5} \left(r^*_{\min} + \frac{v}{r^*_{\min}} \right) \frac{v}{r^{*3}} - \frac{v^2}{3} \frac{1}{r^{*4}}. \quad (5.21)$$

Based on correspondence principle, in this approximation we have

$$\frac{r_{gr}}{\alpha} = \frac{2}{3} \left(r^*_{\min} + \frac{v}{r^*_{\min}} \right). \quad (5.22)$$

A constant v can be chosen so that the values of a trial function and first approximation coincide $V^{(0)}(r^*_{\min}) = V^{(1)}(r^*_{\min})$ in the point $r^* = r^*_{\min}$. Substituting (5.20), (5.21) in (5.10) we find

$$\ln \Delta^{(0)}(r^*) = -3 \int_{r^*}^{\infty} \frac{V^{(0)}(r^*)}{(r^*)^2 F^{(0)}(r^*)} dr^*, \quad (5.23)$$

and then from (5.11) we have

$$V^{(1)}(r^*) = \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{r^* F^{(0)}(r^*)} - \frac{3}{2} \int_{r^*}^{\infty} \left(1 + \frac{V^{(0)}(r^*)}{2r^* F^{(0)}(r^*)} \right) \frac{dr^*}{(r^*)^2 F^{(0)}(r^*)} \right)^{-1}. \quad (5.24)$$

In this case

$$v = (1 - V^{(1)}(r^*_{\min})) r^*_{\min}{}^2. \quad (5.25)$$

This equation defines v as a function of r^*_{\min} .

Spline approximations were used for the calculations in the higher approximations. After five successive approximations, solving the equation (5.19), we find (using six intervals in the calculations) with an error equal to fractions of a percent

$$r^*_{\min} \approx 1.74.$$

This value is more than unit, as it was supposed. In a dimensional form

$$r^*_{\min} \approx 0.935 r_{gr}.$$

The results of the calculations are presented in Table 4.

$\sigma=1/6; x_{\max}=0.575; r_{gr}/\alpha=1.859$				
$x=\alpha/r^*$	$V(x)$	$F(x)$	$\Delta(x)$	$C^{-1/2}(x)=r(x)/r^*$
0	1	1	1	1
0.1	0.9875	0.8160	0.7184	1.1792
0.2	0.9346	0.6381	0.4814	1.3523
0.3	0.8202	0.4746	0.2980	1.4556
0.4	0.6471	0.3386	0.1721	1.4378
0.5	0.4596	0.2366	0.0962	1.2288
0.575	0.3413	0.1813	0.0543	0

TABLE 4. Solution of the system of equations (5.10..5.13) at the value $\sigma=1/6$.

The value of one of the metric functions $C(r)$ increases indefinitely at approaching to the edge, that is, there is an irreducible singularity on the edge.

Thus, *at the presence of the constraint (1.1) there is a stationary distribution of the centrosymmetrical gravitational field for which the equality of inertial (defined according to Mach's principle) and gravitational mass is satisfied.* The found solution asymptotically tends to the Schwarzschild solution for $r \gg r_{gr}$.

6. Foundations of a quantum theory of gravity

The formulation of main provisions of a quantum theory is essentially impossible without involving the classical theory [18]. To construct a quantum theory, it is necessary to determine the dynamic degrees of freedom first of all. As it shown in section 3 in the quasi-classical theory of gravity, there exists a unique homogeneous space-time with an isotropic metric of the form

$$ds^2 = g_{00}(x^0)(dx^0)^2 - \gamma^{1/3}(x^0) dx^m dx^n \delta_{mn}.$$

For this metric, the expressions for Christoffel symbols and non-zero components of Ricci tensor have the form

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2g_{00}} \frac{dg_{00}}{dx^0}, \Gamma_{0l}^0 = 0, \Gamma_{nl}^0 = \frac{1}{2g_{00}} \frac{d\gamma^{1/3}}{dx^0} \delta_{nl}, \Gamma_{00}^m = 0, \Gamma_{0l}^m = \frac{1}{6\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \delta_l^m, \Gamma_{nl}^m = 0, \quad (6.1)$$

$$R_0^0 = -\frac{1}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\gamma\sqrt{g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) - \frac{1}{12g_{00}} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \right)^2, \quad (6.2)$$

$$R_k^p = -\frac{1}{6\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) \delta_k^p. \quad (6.3)$$

In the general case, the action of the gravitational field in the quasi-classical theory of gravity has the form (2.1)

$$S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int (R+Q) \sqrt{-g} d^4x, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu}.$$

Substituting expressions for the scalar curvature and omitting the total derivatives that do not contribute to the equation of motion, we find the expression for the action of homogeneous isotropic space of volume V

$$S_{gr} = \int L dt = \frac{c^2}{16\pi G} \int \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dt} \frac{d\Phi}{dt} \right] \sqrt{\gamma} dt V, \quad (6.4)$$

where L is Lagrangian of the gravitational field and the notation is introduced $cdt = \sqrt{g_{00}} dx^0$.

It should be noted that in the expression (6.4) we changed the sign of action from minus to plus in comparison with (2.1). It was proved in GR [11] that the scalar curvature must enter in the action with a minus sign, however, this proof does not pass for homogeneous space (3.1). If there is a minus sign before the integral (6.4), standard reasoning leads to the conclusion that this action cannot have a minimum. The correct sign is a plus.

The volume of homogeneous isotropic space can be represented in Planck units as

$$V = l_{pl}^3 \lambda = \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{3/2} \lambda, \quad \lambda = const.$$

Then the initial action for quantization will take the form

$$S_{qgr} = \int L dt = A \int \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dt} \frac{d\Phi}{dt} \right] \sqrt{\gamma} \lambda dt, \quad A = \frac{\hbar t_{pl}}{16\pi}, \quad t_{pl} = \left(\frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2}. \quad (6.5)$$

It is necessary to introduce a specific value λ for the transition to the quantum theory action, in contrast to the classical theory in which the equations of motion do not depend on the action magnitude. The solution of gravitational equations in the quasi-classical theory involves the parameter $(\gamma_{\min})^{1/2}$, which is the minimum value of the bulk factor (3.21). If we take

$$\lambda = \left(\sqrt{\gamma_{\min}} \right)^{-1}, \quad (6.6)$$

then the action (6.5) takes the form

$$S_{qgr} = \int L dt = A \int \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dt} \frac{d\Phi}{dt} \right] \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_{\min}}} dt, \quad A = \frac{\hbar t_{pl}}{16\pi}. \quad (6.7)$$

The action is turn out to be scale invariant with respect to the change in the magnitude of the bulk factor in this case.

Let us carry out the canonical quantization of the gravitational field based on the action (6.7).

We introduce scale invariant generalized time-dependent coordinates

$$q^1 = \sqrt{\gamma/\gamma_{\min}}, \quad q^2 = \ln \sqrt{g_{00} \gamma/\gamma_{\min}}, \quad q^3 = \Phi, \quad 0 < q^1 < \infty, \quad -\infty < q^2, q^3 < \infty \quad (6.8)$$

their velocities $v^i = \dot{q}^i$ (time derivatives), and the momenta conjugate to them

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} : p_1 = A \frac{4v^1}{3q^1}, p_2 = Aq^1v^3, p_3 = Aq^1v^2 \quad . \quad (6.9)$$

We find from here the velocities as functions of coordinates and moment

$$v^1 = \frac{3q^1 p_1}{4A}, v^2 = \frac{p_3}{Aq^1}, v^3 = \frac{p_2}{Aq^1}. \quad (6.10)$$

Let us find the energy of the gravitational field in the Lagrangian formalism

$$E = \frac{\partial L}{\partial v^i} v^i - L = A \left(\frac{2}{3q^1} (v^1)^2 + q^1 v^2 v^3 \right). \quad (6.11)$$

Eliminating the velocities from this relation, using (6.10) we find the Hamiltonian of the gravitational field

$$H_{gr} = \frac{1}{A} \left(\frac{3}{8} q^1 (p_1)^2 + \frac{1}{q^1} p_2 p_3 \right). \quad (6.12)$$

Passing in accordance with the rules of canonical quantization from coordinates and momenta to their operators [18], we find the wave equation of the gravitational field

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \hat{H}_{gr} \Psi. \\ i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\frac{3\pi\hbar}{t_{pl}} \left(q^1 \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \right)^2 q^1 + \frac{16}{3q^1} \frac{\partial}{\partial q^2} \frac{\partial}{\partial q^3} \right) \Psi. \end{aligned} \quad (6.13)$$

The Hamiltonian depends on only one coordinate q^1 , therefore, the wave function can be represented as a superposition of products of the wave eigen functions of the energy E and the p_2, p_3 .

$$\Psi = \int a(E)b(p_2)c(p_3) \exp \frac{i}{\hbar} (-Et + p_2 q^2 + p_3 q^3) \rho_E dE dp_2 dp_3, \quad (6.14)$$

where

$$E \varphi_E = -\frac{6\pi\hbar}{t_{pl}} \left(q^1 \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial q^1} - \frac{8}{3q^1} \frac{p_2 p_3}{\hbar^2} \right) \varphi_E. \quad (6.15)$$

Let us denote by a stroke the derivative with respect to the variable $x = q^1$, then the equation (6.13) takes the form

$$. x \varphi_E'' + \varphi_E' - \frac{8}{3x} \frac{p_2 p_3}{\hbar^2} \varphi_E + \frac{Et_{pl}}{6\pi\hbar} \varphi_E = 0 \quad (6.16)$$

This equation refers to the type of equations solvable in the Bessel functions [19, p. 245].

If

$$w'' + \frac{1-2\alpha}{x} w' + \left[(\beta\gamma x^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - v^2 \gamma^2}{x^2} \right] w = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma - const,$$

then $w = x^\alpha Z_\nu(\beta x^\gamma)$ is the Bessel function of the 1st, 2nd or 3rd kind. Comparing the last two equations, we find

$$. \alpha = 0, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad \beta = \pm \left(\frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar} \right)^{1/2}, \quad v = \pm 4 \sqrt{\frac{2p_2 p_3}{3\hbar^2}}, \quad \varphi_E = Z_\nu(\beta \sqrt{x}), \quad x = q^1 \quad (6.17)$$

The solutions of the equation (6.16) will decrease for large values of the argument only if the order of the Bessel functions is real. This requires that both p_2 and p_3 momenta have either a positive or negative value. In addition, solutions will be real for $\beta > 0$ and restricted for $x = 0$ if $v > 0$. Thus, the only solution to the equation (6.16) satisfying all these conditions is the function

$$\varphi_E = J_\nu \left(\sqrt{\frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} q^1 \right), \quad \nu = 4\sqrt{\frac{2p_2 \cdot p_3}{3\hbar^2}}, \quad p_2 \cdot p_3 \geq 0 \quad (6.18)$$

7. Conclusion

A distinctive feature of the presented theory is that space-time manifold with the edge is endowed with all the properties of a material medium in addition to the metric and connectivity. And the gravitational field is the main source of energy of the Universe. A consequence of this is the observed high degree of homogeneity and isotropy of the Universe. Another feature of the theory is the possibility of constructing of manifolds free from singularities.

However, there is singularity on the edge of manifold (the moment of the beginning of evolution of the Universe or the surface near the gravitational radius), where some observable invariant quantities take infinite values. This fact should be considered as the sign of a necessity of quantum effects accounting near the edge.

The accuracy of the available astronomical observations is still insufficient to make a choice on their basis between the predictions of GR and proposed theory of gravity. However, the physical nature of “dark energy”, “dark matter” and “inflaton” has not been established over the past twenty years, and no new particles with suitable properties have been detected at the LHC. It is an essential argument to make doubt their existence.

From the point of view of the theory presented in the paper, all observable effects associated with a “dark energy” and “dark matter” are only manifestations of the material essence of the gravitational field. On the one hand, the gravitational field has a negative pressure in the present era of the second acceleration, that is, it behaves like hypothetical “dark energy”. On the other hand, the energy density of the gravitational field exceeds the average energy density of matter on the galactic scale and, like “dark matter”, leads to an increase in the speed of observed gravitationally bound objects.

The initial expansion (inflation) is an immanent feature of space-time structure evolution associated with the presence of the gravitational field. The pressure of the gravitational field is negative in itself during this period of time and therefore there is no need for any inflatons.

The global energy density of the Universe is currently on 94.5% composed of the energy density of the gravitational field, and only 5.5% is the contribution to it of all known types of matter. And over time, the first will grow, and the second will decrease.

In being absent of hypothetical forms of matter in nature, cosmology of GR (Friedmann model) contradicts the results of experiments, while the predictions of the proposed theory are consistent with them.

It is established that the maximum global energy density in the Universe was less than Planck's one by 64 orders of magnitude and significantly lower than the value being currently attained in experiments at the Large Hadron Collider (LHC)!

Appendix I. Energy of the static isotropic gravitational field

By the Bianchi identity the energy density of the gravitational field T_{μ}^{ν} must satisfy to the relation:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{-g} T_{\mu}^{\nu}) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^{\mu}} T^{\lambda\rho} = 0.$$

In case of a static field the energy of the gravitational field is conserved:

$$E = \int \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{-g} T_0^{\nu}) d^4x = \int T_0^{\nu} \sqrt{-g} dS_{\nu}, \quad (\text{A.1})$$

where according to (2.3)

$$T_0^{\lambda} = -\frac{c^4}{16\pi G} \left[\delta_0^{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\nu}} \right) - g^{\lambda\eta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\eta}} - g^{\lambda\eta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\eta}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\mu}} \right]. \quad (\text{A.2})$$

In a static field the last two terms in this relation are equal to zero and (A.1) (taking into account (A.2)) takes the form:

$$E = -\frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\nu}} \right) dV. \quad (\text{A.3})$$

Substituting here the expressions for the components of the metric tensor we derive from (5.2):

$$E = \frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{C+G} \frac{d\Phi}{dr} \right) dV = \frac{c^4}{4G} \left[\int_0^{\infty} \sqrt{-g} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{(C+G)} \frac{d\Phi}{dr} \right) dr \right]. \quad (\text{A.4})$$

Let's consider now that by definition and by the relation (5.13) also:

$$C(r^*) + G(r^*) = \frac{r^4 (\sqrt{-g})^2}{r^{*4} F(r^*)}, \quad r^2 dr = \frac{V(r^*)}{\sqrt{-g}} r^{*2} dr^*. \quad (\text{A.5})$$

Substituting these expressions in (A.4) and passing to the dimensionless coordinate r^*/a , we have:

$$E = \frac{c^4 \alpha}{4G} \left[\frac{r^{*2} F(r^*)}{V(r^*)} \frac{d\Phi}{dr^*} \Big|_{r^*_{\min}}^{r^* \rightarrow \infty} - \int_{r^*_{\min}}^{\infty} \frac{r^{*2} F(r^*)}{V(r^*) \sqrt{-g}} \frac{d\Phi}{dr^*} \frac{d\sqrt{-g}}{dr^*} dr^* \right]. \quad (\text{A.6})$$

By the relations (5.7'), (5.10)

$$\Phi = -\ln(F\Delta^{-\sigma}), \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d\sqrt{-g}}{dr^*} = \frac{3V}{r^{*2} F}, \quad \Delta = \sqrt{-g}. \quad (\text{A.7})$$

Taking into account these relations

$$E = \frac{c^4 \alpha}{4G} \left[-\frac{r^{*2}}{V(r^*)} \frac{dF}{dr^*} \Big|_{r^*_{\min}}^{r^* \rightarrow \infty} - 3 \ln F \Delta^{-\sigma} (r^*_{\min}) \right]. \quad (\text{A.8})$$

Boundary values of the derivative of the function $F(r^*)$ appear in the relation.

Considering fields behavior at infinity and fact that $dF/dr^* = 2F/r^*_{\min}$ by the relation (5.12) at $r^* = r^*_{\min}$ we find:

$$-\frac{r^{*2}}{V(r^*)} \frac{dF}{dr^*} \Big|_{r^*_{\min}}^{r^* \rightarrow \infty} = -\frac{r_{gr}}{\alpha} + \frac{2F(r^*_{\min}) r^*_{\min}}{V(r^*_{\min})}. \quad (\text{A.9})$$

Bibliography

1. D. Hilbert. Die Grundlagen der Physik, Nachrichten K. Gesellschaft Wiss. Gottingen, Math.-phys. Klasse, Heft 3, s. 395, (1915).
2. A. Einstein, Collection of Scientific Papers, Volum 1, Nauka, Moscow (1965).
3. P. K. Rashevsky, Riemannian Geometry and Tensor Analysis, Third Edition, Nauka, Moscow (1967).
4. A. G. Riess et al., Astron. J. 116, 1009 (1998).
5. P. Schmidt et al., Astrophys. J. 507, 46 (1998).
6. S. Perlmutter et al., Astrophys. J. 517, 565 (1999).
7. S. Weinberg, Cosmology, Oxford University Press Inc., New York (2008).
8. S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley and Sons Inc., New York (1972).
9. Yu. L. Kokurin, Quantum Electronics, 33, 1 (2003), p. 45-47.
10. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics, Volum 6, Second English Edition, Pergamon Press, Oxford, New York (1987).
11. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, The classical theory of fields, Vol.2, Pergamon Press, Oxford (1971).
12. A. Z. Petrov, Einstein Spaces, Pergamon Press, Oxford (1969).
13. Ch. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation. San Francisco (1973).
14. J. Beringer et al. (Particle Data Group), Phys. Rev., D86, 010001 (2012).
15. Ch. A. Egan, Ch. H. Lineweaver; arXiv: astro-ph.CO/0909.3983v.1 (2009).
16. D. N. Spergel et al., Astrophys. J. 5 (2007); arXiv: astro-ph/0603449v.2 (2007).
17. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Statistical Physics, Third Edition, Part 1, Volum 5, Pergamon Press, Oxford (1980).
18. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Quantum Mechanics, Pergamon Press, Oxford (1977)
19. E. Janke, F. Emde, F. Lösch, Tables of Higher Function, 6 th ed. McGraw-Hill, New York (1960) [Tafeln höherer funktionen, 6 th ed. Teubner, Stuttgart, (1960)]

Основы квазиклассической и квантовой теории тяготения

Соболев Александр Павлович

sapsolto@mail.ru

Аннотация

В общей теории относительности (ОТО) при выводе уравнений гравитационного поля использовалось предположение о ковариантности их относительно произвольных преобразований координат. За истекшее столетие неоднократно высказывалось мнение, что такое равноправие всех систем координат, может не соответствовать реальности. Общая ковариантность ограничена в статье за счет введения связи. С физической точки зрения связь интерпретируется как достаточное условие адиабатичности процесса эволюции метрики пространственно-временного континуума. Сформулированы исходные уравнения теории тяготения со связью. На этой основе построена единая модель эволюции современной, ранней и очень ранней Вселенной, согласующаяся с наблюдательными астрономическими данными без привлечения гипотез о существовании «темной энергии», «темной материи» и «инфлатонов». Утверждается, что: основным источником энергии Вселенной является гравитационное поле, максимальная глобальная плотность энергии во Вселенной была на 64 порядка меньше планковской, а плотность энтропии на 18 порядков превышает предсказываемое ОТО значение. Кроме того рассчитана величина относительной плотности нейтрино в настоящее время и максимальная температура материи в ранней Вселенной. Сформулировано волновое уравнение гравитационного поля и найдено его решение.

Ключевые слова: гравитация, ограниченная ковариантность, несингулярная теория, энтропия гравитационного поля, эволюция Вселенной.

1. Введение

Более ста лет назад при выводе уравнений гравитации из вариационного принципа Д. Гильберт сформулировал «аксиому общей инвариантности действия по отношению к произвольным преобразованиям мировых параметров (координат)» и выбрал « R - инвариант тензора Римана (кривизны четырехмерного многообразия)» в качестве лагранжиана гравитационного поля [1].

Тремя годами ранее А. Эйнштейн писал [2, с. 237, 243]: «Необходимо, впрочем, подчеркнуть, что у нас нет никаких оснований для общей ковариантности уравнений гравитации.... Мы не знаем относительно какой группы преобразований должны быть ковариантны искомые уравнения. Сначала наиболее естественным кажется требование ковариантности системы уравнений относительно *произвольных* (курсив А. Эйнштейна) преобразований».

Успех канонической теории тяготения как будто бы подтвердил правильность такого допущения, а само оно со временем обрело статус фундаментального принципа. Хотя ранее высказывалась и другая противоположная точка зрения [3, с. 631]: «...физический смысл ОТО сводится именно к созданию новой теории тяготения. Правда, сам автор теории А. Эйнштейн и ряд его последователей придерживаются иной точки зрения. Они считают, что ОТО помимо этого (и в первую очередь) устанавливает принцип равноправия всех систем отсчета... С этой точкой зрения, однако, трудно согласиться, так как при этом равноправие систем отсчета с точки зрения формально-математического аппарата незаконно истолковывается как равноправие и по их физическому существу дела».

В свете новых экспериментальных данных [4-6] ОТО уже не кажется столь незыблемой, как прежде. Для объяснения полученных результатов в рамках этой теории пришлось ввести некие гипотетические сущности (Λ CDM – модель [7]), природа которых

до настоящего времени неясна. «*Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*», возможно необходимость введения в ОТО (по мере развития новых методов астрономических наблюдений) сначала «инфлатонов», а теперь еще «темной энергии» и «темной материи» это симптомы дефекта в самой её основе?

ОТО нарушает единство материального мира. В ОТО гравитационное поле само по себе не обладает свойствами материальной среды. Его плотность энергии-импульса равна нулю. Это прямое следствие общей ковариантности уравнений гравитационного поля. Попытки же ввести не обще ковариантную плотность энергии-импульса означают фактически отказ от исходной аксиомы общей ковариантности.

По нашему мнению, именно, *общая ковариантность уравнений является источником трудностей* ОТО. Обнаруженные уже на стадии ее формирования, сегодня эти трудности стали совокупностью нерешенных до настоящего времени проблем: проблемы энергии, сингулярностей, космологической постоянной, холодной темной материи, проблемы описания элементарных частиц, предстающих в канонической теории гравитации в облике «микроскопических черных дыр» и, наконец, невозможность построения квантовой теории тяготения на основе ОТО.

Возможный путь построения *не обще ковариантной теории тяготения без нарушения аксиом Гильберта* видится во введении априорной связи, ограничивающей выбор системы координат. Ранее предпринимались попытки такого рода, пример тому унимодулярная теория тяготения, истоки которой восходят к А. Эйнштейну. Следствием введения связи является возникновение края у пространственно - временного многообразия, поэтому ограничено ковариантные, геометрические объекты определены только на многообразиях с краем. При наличии дифференциальной связи появляется возможность выбрать положение края таким образом, чтобы выделить не сингулярную внутреннюю область многообразия.

При таком подходе лежащий в основании ОТО общий принцип относительности, как принцип эквивалентности всех систем отсчета, совместимых с псевдоримановой метрикой, не нарушается. Кроме того не ставится под сомнение и незыблемость принципа инвариантности действия *материи* относительно произвольных преобразований координат. В то же время в отличие от ОТО *связь ограничивает общую ковариантность уравнений гравитации*. Таким образом, априори в этом случае выполняется лишь «среднесильный принцип» эквивалентности [8]. Это, однако, не может являться основанием для того, чтобы отвергнуть предлагаемый подход как противоречащий экспериментам по проверке сильного принципа эквивалентности для тел космических масштабов [9].

Дело в том, что уже в ОТО в рамках Λ CDM – модели само пространство наделяется энергией. То же самое происходит и при введении априорной связи. В силу нелинейности уравнений гравитации пространство становится самогравитирующим объектом. Для такого объекта можно определить инертную массу и гравитационную массу. Решение уравнений гравитации имеет достаточно свободных параметров для того, чтобы не только обеспечить требование равенства инертной массы гравитационного поля массе тяготеющей, но и определить инертную массу в соответствии с принципом Маха (последняя задача так и не была решена в ОТО). С этой точки зрения результаты экспериментов [9] следует рассматривать как указание на то, что *существуют только такие (квази)стационарные самогравитирующие объекты, для которых инертная масса равна массе гравитационной*.

Аксиомы Гильберта сформулированы на координатном языке. Гравитационное поле представлялось десятью компонентами $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ метрического тензора. Кроме того предполагалось, что в уравнения гравитации могут входить производные метрики не выше второго порядка.

В математической физике не существует теоремы, запрещающей существование связи между компонентами метрики. Однако унимодулярная теория оказалась

неприемлемой с физической точки зрения, что и побудило Эйнштейна отказаться от нее в пользу обще ковариантной теории. Для введения ограничений на группу преобразований координат, безусловно, должны иметься, достаточно весомые физические основания.

Наше основное предположение состоит в том, что *компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ связаны законом сохранения*

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\nu} \right) = 0, \quad g = \det(g_{\mu\nu}), \quad g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu; \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3). \quad (1.1)$$

Левая сторона (1.1) не является обще ковариантным скаляром. Такой скаляр, включающий вторые производные от некоторой скалярной функции $\varphi(x)$, должен иметь вид [8]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \right). \quad (1.2)$$

На ограниченной группе преобразований координат, на которой $\sqrt{-g}$ является скаляром, в силу (1.2) левая сторона (1.1) также будет скаляром. В этом случае связь в некоторой области пространственно-временного континуума *становится геометрическим объектом и приобретает физический смысл* (физическая интерпретация связи дана в разделе 2).

При произвольном преобразовании координат $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ [8]

$$g'(x') = g(x) \cdot J^2, \quad J = \det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right). \quad (1.3)$$

Из определения скаляра следует, что детерминант метрического тензора изменяется как скаляр при преобразованиях координат с якобианом преобразования равным по модулю единице

$$g'(x') = g(x), \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu. \quad (1.4)$$

Таким образом, связь (1.1) является геометрическим объектом только при ограничении группы допустимых преобразований координат от локальных общих диффеоморфизмов до специальных диффеоморфизмов с равным единице якобианом. Кроме того в отличие от унимодулярной теории связь допускает глобальные линейные преобразования координат.

2. Уравнения гравитационного поля при наличии связи

В принятых сейчас обозначениях действие Гильберта имеет вид:

$$S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4 x.$$

R - скалярная кривизна, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$ - тензор Риччи,

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\rho,$$

$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ - символы Кристоффеля,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} \right).$$

Вывод уравнений гравитационного поля из действия Гильберта при наличии связи является вариационной задачей на условный экстремум. Стандартным методом решения таких задач в случаях, когда связи не разрешимы в явном виде, является метод множителей Лагранжа. При наличии одной связи (1.1), введем множитель Лагранжа - скалярное поле Φ , и запишем действие в виде:

$$S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int (R + Q) \sqrt{-g} d^4 x, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu}. \quad (2.1)$$

Поскольку Q является ограничено ковариантным скаляром, то в отличие от действия Гильберта интегрирование определено не на многообразии, а только на многообразии с краем. Теперь все компоненты метрического тензора и скаляр Φ могут рассматриваться, как независимые величины и при варьировании действия наряду с уравнениями движения получаем уравнение, определяющее край.

При варьировании действия по полю Φ (вместо знака равенства стрелка указывает на то, что опущены полные производные, не дающие вклада в уравнения движения) получим:

$$\delta S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int \delta(Q\sqrt{-g}) d^4x = -\frac{c^3}{16\pi G} \int \left(\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial\delta\Phi}{\partial x^\nu} \right) d^4x \rightarrow$$

$$\frac{c^3}{16\pi G} \int \delta\Phi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu} \right) d^4x$$

Из принципа стационарности действия в силу произвольности вариации Φ получим уравнение (1.1).

Скалярная кривизна ковариантна относительно произвольных преобразований координат, поэтому вычисление ее вариации и соответственно вклада в уравнения поля не имеет никаких отличий от [8].

Наличие в лагранжиане дополнительных членов помимо скалярной кривизны дает при варьировании по метрике вклад:

$$\delta(Q\sqrt{-g}) = \left[\frac{\partial\delta\sqrt{-g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu} (\delta g^{\mu\nu}) \frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu} \right] \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \left[g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(g^{\rho\lambda} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\lambda} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\nu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}$$

Это приводит к появлению в уравнениях Гильберта-Эйнштейна наряду с тензором энергии-импульса материи $(\varepsilon_{mat})_{\mu\nu}$ нового объекта $(\varepsilon_{gr})_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} (\varepsilon_{gr})_{\mu\nu} + \frac{8\pi G}{c^4} (\varepsilon_{mat})_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} (\varepsilon_{gr})_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(g^{\rho\lambda} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\lambda} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\mu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\nu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} \right]. \quad (2.3)$$

Объект (2.3) содержит обычные производные вместо ковариантных, и поэтому ведет себя как тензор только при ограниченной группе преобразований координат. Он ковариантен относительно локальных специальных диффеоморфизмов и глобальных линейных преобразований координат.

Поскольку ковариантная производная определена для произвольных преобразований координат, то ее действие определено и для объектов, являющихся тензорами относительно ограниченной группы преобразований. Разница заключается лишь в том, что при этом новые объекты относятся снова к тому же типу тензоров, на которые она действуют.

Связь (1.1) не включает поля материи. Поэтому как и в ОТО действие для материи остается инвариантным при общих преобразованиях координат, а утверждение о равенстве нулю ковариантной производной смешанного тензора плотности энергии-импульса материи остается в силе и при наличии связи (1.1).

Для смешанных тензоров ковариантная производная левой стороны (2.2) равна нулю в силу свернутого тождества Бианки (справедливость которого обусловлена лишь общей ковариантностью тензора кривизны), поэтому с учетом выше сказанного должны равняться нулю и производные правых сторон как (2.2), так и (2.3).

Таким образом, объект $(\varepsilon_{gr})_{\mu\nu}$ изменяется как тензор при указанных преобразованиях координат, симметричен, подобно материи является источником кривизны пространства-времени, а его ковариантная производная на уравнениях поля равна нулю.

Все это в совокупности позволяет назвать объект (2.3) тензором плотности энергии - импульса гравитационного поля, выраженным с помощью вспомогательного поля Φ . Поле является вспомогательным потому, что оно исходно не входит ни в действие Гильберта, ни в действие материи, ни в уравнение связи. В то же время введение поля Φ является неизбежным по самой сути математической проблемы. В разделе 3 рассмотрен случай, когда удается в явном виде исключить скалярное поле Φ из уравнений гравитационного поля. Там же будет рассмотрен вопрос о положительной определенности плотности энергии гравитационного поля.

Таким образом, мы получили систему уравнений, включающих связь (1.1) и десять уравнений (2.2) для одиннадцати перечисленных выше неизвестных. Вследствие ограниченной ковариантности в отличие от ОТО нельзя фиксировать калибровочный произвол выбрав синхронную систему отсчета. Однако синхронизация часов в некоторой окрестности за счет выбора калибровки $g_{0m}(x) = 0$ ($m=1,2,3$) всегда возможна.

Поскольку остальные члены в (2.2) обще ковариантны, то в целом система уравнений гравитации при наличии связи будет ковариантна лишь относительно указанной ограниченной группы преобразований координат.

С физической точки зрения связь (1.1) может быть интерпретирована как достаточное условие адиабатичности процесса эволюции метрики. Определим вектор потока плотности энтропии гравитационного поля соотношением:

$$s_{gr}v^\mu = const \cdot g^{\mu\lambda} \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\lambda}, \quad v^\mu v_\mu = 1, \quad s_{gr} = const \cdot v^\lambda(x) \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\lambda}. \quad (2.4)$$

В планковской системе единиц эту постоянную можно записать в виде:

$$const = a \cdot \frac{k}{l_{pl}^2}, \quad l_{pl}^2 = \frac{\hbar G}{c^3}, \quad (2.5)$$

где k постоянная Больцмана, l_{pl} планковская длина. Для квазиклассической теории должно выполняться условие $|a| \leq 1$. Знак постоянной a должен выбираться так, чтобы на времени - подобных геодезических линиях плотность энтропии была положительной. Теперь связь (1.1) можно записать в виде релятивистского условия адиабатичности

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} s_{gr} v^\mu) = 0. \quad (2.6)$$

Отметим, что в силу определения (2.4) все термодинамические потенциалы будут скалярами только относительно ограниченной выше группы преобразований. Таким образом, определение плотностей энергии (2.3) и энтропии (2.4), удовлетворяющих законам сохранения позволяет рассматривать гравитационное поле как обычную материальную среду [10] и восстанавливает нарушенное ОТО единство материального мира.

Для включения в рассмотрение спинорной материи и калибровочных полей система уравнений (1.1, 2.2) может быть сформулирована в неголономном ортогональном репере. При этом наряду с аффинной связностью вводится связность спиновая. Это возможно, несмотря на наличие связи, поскольку группа локальных лоренцевых преобразований унимодулярна.

В предельном случае, когда плотность энергии-импульса гравитационного поля будет пренебрежимо мала по сравнению с плотностью энергии-импульса материи, уравнения (2.2) переходят в уравнения ОТО и в пределе слабого гравитационного поля приводят к Ньютону закону тяготения. При этом уравнение (1.1) ограничивает калибровочный произвол.

Если предположить, что на начальном этапе эволюции Вселенной материя играла незначительную роль и можно пренебречь плотностью энергии-импульса материи, то система уравнений (2.2) радикально упрощается. В этом случае можно найти точное общее решение системы уравнений (1.1, 2.2), причем это решение будет единственным.

3. Эволюция пространственно - временного многообразия в отсутствии материи

Если представить, что в начальный момент во Вселенной еще отсутствовала материя, а вместе с ней и генерируемые ею излучения, то не было бы и физической возможности различать точки космического пространства. Какими могли бы быть в этом случае метрические свойства такого пространства?

В трехмерном пространстве имеется девять возможных типов главных однородных пространств (допускающих группу движений) с зависящей от времени метрикой (классификация Бианки) [11]. Введение связи ограничивает не только группу допустимых в ОТО преобразований координат, но и группу движений сохраняющих метрику. Если первая группа задана условием (1.4), то при движении в силу требования форм-инвариантности это условие принимает вид

$$g(x^0, x'^m) = g(x^0, x^m), \quad x^m \rightarrow x'^m, \quad (m = 1, 2, 3),$$

то есть детерминант метрического тензора не должен зависеть от пространственных координат. Заметим, что это не исключает зависимость компонент метрического тензора от координат. Эти зависимости приведены в [12 с. 265-268] для всех девяти типов однородных пространств. Вычисляя детерминант метрического тензора, убедимся в том, что он не зависит от пространственных координат лишь для однородных пространств типа I и II по классификации Бианки. Это означает, что при наличии связи (1.1) допустимо существование однородных пространств только этих двух типов.

$$I. \quad g_{mn} = a_{mn}(x^0), \quad g_{00} = a_{00}(x^0) > 0, \quad g_{0n} = 0 \quad (m, n = 1, 2, 3),$$

II

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12}x^1 + a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{22}x^1 + a_{23} \\ a_{12}x^1 + a_{13} & a_{22}x^1 + a_{23} & a_{22}(x^1)^2 + 2a_{23}x^1 + a_{33} \end{pmatrix}, \quad a_{mn} = a_{mn}(x^0), \quad g_{00} = a_{00}(x^0), \quad g_{0n} = 0$$

Для первого из них компоненты метрического тензора зависят только от времени. В этом случае, если пространственная метрика не вырождена, то наиболее общее выражение для пространственно-временного интервала преобразованием координат с равным единице якобианом [11]:

$$x^0 \rightarrow x^0, \quad x^m \rightarrow x^m + \varphi^m(x^0),$$

всегда может быть приведено к виду

$$ds^2 = g_{00}(x^0)(dx^0)^2 + g_{mn}(x^0)dx^m dx^n, \quad \gamma = -\det(g_{mn}) > 0, \quad (m, n = 1, 2, 3). \quad (3.1)$$

3.1 Уравнения гравитации для однородного пространства типа I.

Отсутствие общей инвариантности действия (2.1) не позволяет исключить g_{00} компоненту метрики. Выражения для символов Кристоффеля и отличных от нуля компонент тензора Риччи для метрики (3.1) примут вид:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \frac{dg_{00}}{dx^0}, \quad \Gamma_{0l}^0 = 0, \quad \Gamma_{nl}^0 = -\frac{1}{2} g^{00} \frac{dg_{nl}}{dx^0}, \quad \Gamma_{00}^m = 0, \quad \Gamma_{0l}^m = \frac{1}{2} g^{mk} \frac{dg_{kl}}{dx^0}, \quad \Gamma_{nl}^m = 0, \quad (3.2)$$

$$R_0^0 = -\frac{1}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\gamma\sqrt{g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) - \frac{1}{4g_{00}} g^{mk} \frac{dg_{kp}}{dx^0} g^{pn} \frac{dg_{nm}}{dx^0}, \quad (3.3)$$

$$R_k^p = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{g_{00}}} g^{mp} \frac{dg_{km}}{dx^0} \right). \quad (3.4)$$

Отличные от нуля компоненты тензора плотности энергии-импульса (2.3) для метрики (3.1):

$$(\varepsilon_{gr})_0^0 = -\frac{c^4}{16\pi G} \left[\frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right) + \frac{2}{g_{00}\sqrt{g_{00}\gamma}} \frac{d\sqrt{g_{00}\gamma}}{dx^0} \frac{d\Phi}{dx^0} \right], \quad (3.5)$$

$$(\varepsilon_{gr})_k^p = -\frac{c^4}{16\pi G} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right) \delta_k^p. \quad (3.6)$$

С учетом этих соотношений уравнения гравитационного поля (2.2) в смешанных компонентах

$$R_\mu^\lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \left[(\varepsilon_{gr})_\mu^\lambda - \frac{1}{2} \delta_\mu^\lambda (\varepsilon_{gr})_\nu^\nu \right]$$

при наличии связи примут вид:

$$\frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dx^0} \right) = 0, \quad (3.7)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\gamma\sqrt{g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) - \frac{1}{4g_{00}} g^{mk} \frac{dg_{kp}}{dx^0} g^{pn} \frac{dg_{nm}}{dx^0} = \frac{\sqrt{\gamma g_{00}}}{2} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00}\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right), \quad (3.8)$$

$$-\frac{d}{dx^0} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{g_{00}}} g^{mp} \frac{dg_{km}}{dx^0} \right) = \delta_k^p \frac{d}{dx^0} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{g_{00}}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right). \quad (3.9)$$

3.2 Решение системы уравнений (3.7...3.9).

Из (3.9) следует:

$$g^{mp} \frac{dg_{km}}{dx^0} + \delta_k^p \frac{d\Phi}{dx^0} = \sqrt{\frac{g_{00}}{\gamma}} L_k^p. \quad (3.10)$$

Постоянная матрица L_k^p не является произвольной. Поскольку из (3.10) следует

$$\frac{dg_{kn}}{dx^0} + g_{kn} \frac{d\Phi}{dx^0} = \sqrt{\frac{g_{00}}{\gamma}} g_{np} L_k^p, \quad (3.11)$$

матрица должна удовлетворять условию:

$$g_{np}(x^0) L_k^p = g_{kp}(x^0) L_n^p. \quad (3.12)$$

Для метрического тензора общего вида это условие будет выполняться только в случае, когда матрица L_k^p пропорциональна единичной матрице. В противном случае матрица $L_k^p = \text{diag}(L_1, L_2, L_3)$ и метрический тензор также должен быть диагональным.

Упрощая (3.10) по индексам p и k , получим:

$$3 \frac{d\Phi}{dx^0} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} + \sqrt{\frac{g_{00}}{\gamma}} L_k^k. \quad (3.13)$$

Таким образом, в случае однородного пространства типа I удастся в явном виде выразить производную поля Φ через метрическое поле и его производные. Что демонстрирует вспомогательный характер этого поля. Подставляя (3.13) в (3.10) получим

$$g^{pm} \frac{dg_{km}}{dx^0} = \frac{1}{3\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \delta_k^p + \sqrt{\frac{g_{00}}{\gamma}} \left(L_k^p - \frac{1}{3} \delta_k^p L_n^n \right). \quad (3.14)$$

Из (3.14) следует

$$g^{mk} \frac{dg_{kp}}{dx^0} g^{pn} \frac{dg_{nm}}{dx^0} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \right)^2 + \frac{g_{00}}{\gamma} \left[L_k^p L_p^k - \frac{1}{3} (L_n^n)^2 \right]. \quad (3.15)$$

Используя это выражение и (3.13), можно исключить Φ и все пространственные компоненты метрики из уравнения (3.8) и записать его в виде:

$$3 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \frac{3c^2}{2\gamma} [L_k^p L_p^k - \frac{1}{3} (L_n^n)^2] = g_{00} \sqrt{\gamma} \frac{d}{dt} \frac{1}{\gamma g_{00}} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\gamma}{dt} - c L_n^n \right), \quad (3.16)$$

где введено обозначение $cdt = \sqrt{g_{00}} dx^0$.

Из уравнения (3.7) следует

$$\frac{1}{g_{00}} \frac{dg_{00}}{dt} + \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{T\sqrt{\gamma}}, T = const. \quad (3.17)$$

Это уравнение позволяет исключить g_{00} из (3.16) и записать уравнение для функции γ :

$$2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right) + \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}} \frac{d\gamma}{d\tau} - \frac{\sigma}{\gamma} = 0, \quad \sigma = B_n^n - \frac{3}{2} [B_k^p B_p^k - \frac{1}{3} (B_n^n)^2], \quad (3.18)$$

где $\tau = t/T$ безразмерное время, $B_k^p = cTL_k^p$ - матрица безразмерных постоянных. Порядок уравнения (3.18) можно понизить при введении функции $u(\gamma)$ - безразмерной скорости изменения *объемного фактора* - $\sqrt{\gamma}$

$$u = \frac{d\sqrt{\gamma}}{d\tau}. \quad (3.19)$$

Уравнение примет вид:

$$8\gamma u \frac{du}{d\gamma} = 4u^2 - 2u + \sigma, \quad \frac{4udu}{4u^2 - 2u + \sigma} = \frac{d\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}. \quad (3.20)$$

Замечательно, что при $\sigma > 1/4$ определитель пространственной метрики нигде не равен нулю. *Следовательно, в этом случае нет сингулярностей.*

Интегрируя уравнение (3.20), найдем:

$$\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_{\min}}} = f(u), \quad f(u) = \sqrt{\frac{4u^2 - 2u + \sigma}{\sigma}} \exp \left[\frac{1}{\sqrt{4\sigma - 1}} \left(\arctg \frac{4u - 1}{\sqrt{4\sigma - 1}} + \arctg \frac{1}{\sqrt{4\sigma - 1}} \right) \right], \quad (3.21)$$

где $\sqrt{\gamma_{\min}}$ - минимальное значение $\sqrt{\gamma(u)}$ при $u = 0$.

Дифференцируя (3.21) по τ , получим:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma_{\min}}} \frac{d\sqrt{\gamma}}{d\tau} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{d\tau}, \quad \frac{df}{du} = \frac{4u}{4u^2 - 2u + \sigma} f(u).$$

Отсюда с учетом (3.19), (3.21) найдем в параметрическом виде решение уравнения (3.18)

$$\tau - \tau_{st} = \sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^u \frac{4f(y)}{4y^2 - 2y + \sigma} dy, \quad \sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma_{\min}} f(u). \quad (3.22)$$

Эволюция пространства начинается в момент времени τ_{st} из состояния покоя с минимальным объемным фактором.

Из уравнения (3.17) с учетом (3.22) следует

$$d \ln(\gamma g_{00}) = \frac{dt}{T\sqrt{\gamma}} = \sqrt{\frac{\gamma_{\min}}{\gamma}} \frac{4f(u)du}{4u^2 - 2u + \sigma} = \frac{4du}{4u^2 - 2u + \sigma}.$$

Интегрируя это уравнение

$$\frac{\gamma(u)g_{00}(u)}{\gamma_{\min}g_{00}(0)} = \exp\left(\int_0^u \frac{4du}{4u^2 - 2u + \sigma}\right) = \exp\left[\frac{4}{\sqrt{4\sigma-1}}\left(\operatorname{arctg} \frac{4u-1}{\sqrt{4\sigma-1}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{4\sigma-1}}\right)\right]$$

и учитывая определение (3.21), получим

$$\sqrt{\frac{g_{00}(u)}{g_{00}(0)}} = \frac{\sigma \cdot f(u)}{4u^2 - 2u + \sigma}.$$

Используя это соотношение, исходя из определения (3.19) можно показать, что

$$\sqrt{g_{00}(x^0)}dx^0 = cT\sqrt{\gamma_{\min}} \frac{4f(u)}{4u^2 - 2u + \sigma} du. \quad (3.23)$$

Мировое координатное время x^0 , определено с точностью до произвольного линейного преобразования. Величина же $u \geq 0$ по определению и не меняется при таком преобразовании. Поэтому параметр u с размерным фактором можно назвать мировым физическим временем.

3.3 Плотность энергии-импульса и скалярная кривизна однородного пространства на уравнениях поля.

Используя соотношения (3.13) и (3.17), преобразуем (3.5) следующим образом:

$$(\varepsilon_{gr})_0^0 = \rho_{gr} = \frac{c^2}{48\pi GT^2} \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{\gamma}\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} - \frac{1}{2\gamma} B_k^k \right]. \quad (3.24)$$

Используя уравнение (3.18) исключим вторую производную, тогда

$$\rho_{gr} = \frac{c^2}{96\pi GT^2} \left[\left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 - \frac{3}{2\gamma} [B_k^p B_p^k - \frac{1}{3} (B_k^k)^2] \right] = \frac{c^2}{48\pi GT^2 \gamma} \left[2u^2 - \frac{3}{4} [B_k^p B_p^k - \frac{1}{3} (B_k^k)^2] \right] \quad (3.25)$$

Первый член в скобках при малых значениях u стремится к нулю, второй член, характеризующий глобальную анизотропию пространства, постоянен, положителен и входит в выражение для плотности энергии со знаком минус. Теперь мы можем ответить на вопрос, поставленный в 1972 году авторами [13, Т 2, с. 481]: «Принимая согласие с экспериментами, мы хотим понять, почему законы физики должны требовать (а не просто позволять), чтобы в больших масштабах Вселенная была с высокой точностью однородна и изотропна». Плотность энергии гравитационного поля (3.25) будет положительной только в том случае, когда однородное пространство изотропно ($B_m^n \propto \delta_m^n$).

В этом случае решение уравнений (3.14) можно представить в виде:

$$g_{kn} = - \left(\frac{\gamma}{\gamma_{\min}} \right)^{1/3} g_{kn}(0). \quad (3.26)$$

В силу инвариантности теории относительно глобальных линейных преобразований координат, исходная метрика $g_{kn}(0)$ всегда может быть приведена к диагональной эвклидовой форме. Тогда интервал (3.1) с учетом соотношения (3.26) и (3.23), (3.21) примет вид

$$ds^2 = \left(cT\sqrt{\gamma_{\min}} \frac{4f(u)}{4u^2 - 2u + \sigma} \right)^2 (du)^2 - f^{2/3}(u) dx^m dx^n \delta_{mn}. \quad (3.27)$$

Заметим, что однородное пространство типа II имеет неустраняемую анизотропию. Поэтому имея в виду связь положительной определенности плотности энергии с отсутствием анизотропии, можно утверждать, что с физической точки зрения не существует другой кроме выше описанной непротиворечивой теории трехмерного однородного пространства.

Введем параметр Хаббла H и в соответствии с современными представлениями параметр ускорения q (вместо параметра замедления [8]):

$$H \equiv \frac{1}{6T\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau}, \quad q \equiv 1 + \frac{1}{6H^2 T^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right). \quad (3.28)$$

Подстановка этих выражений в (3.18) позволяет получить уравнение, описывающее смену эпох ускорения-замедления.

$$q = \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{u(\gamma)} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right)^2 + 1 - \frac{3}{4\sigma}. \quad (3.29)$$

Отсюда следует, что возможны два сценария. При $\sigma > 3/4$ возможно только ускорение ($q > 0$). При $3/4 > \sigma > 1/4$ возможна смена эпох: ускорение-замедление-ускорение. Смена эпох происходит при значениях

$$u_1 = \frac{\sigma}{1 + \sqrt{1 - 4\sigma/3}} > \frac{\sqrt{3}}{4(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \approx 0.1376, \quad u_2 = \frac{\sigma}{1 - \sqrt{1 - 4\sigma/3}} < \frac{\sqrt{3}}{4(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \approx 1.3624. \quad (3.30)$$

Обнаруженная недавно смена эпох [4-6] указывает на то, что имеет место второй сценарий.

Максимальная величина замедления достигается при $u = \sigma$

$$q_{\max} = 1 - \frac{3}{4\sigma} > -2. \quad (3.31)$$

После наступления второй эпохи ускорения в соответствии с (3.29) q асимптотически стремится к единице.

Плотность энергии гравитационного поля (3.25) связана с параметром Хаббла (3.28) соотношением:

$$\rho_{gr} = \frac{3c^2 H^2(\tau)}{8\pi G}. \quad (3.32)$$

Таким образом, пространство однородно и изотропно и обладает собственной энергией. Причем в любой момент времени плотность энергии равна критической плотности. Параметр Хаббла достигает максимального значения в эпоху первого ускорения при $u = \sigma/2 < u_1$

$$H_{\max} = \frac{\sqrt{\sigma}}{6T\sqrt{\gamma_{\min}}} \exp\left(-\frac{\arctg \sqrt{4\sigma - 1}}{\sqrt{4\sigma - 1}}\right), \quad (3.33)$$

а затем монотонно убывает, стремясь к постоянному значению

$$H_{\infty} = \frac{\sqrt{\sigma}}{6T\sqrt{\gamma_{\min}}} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{4\sigma - 1}} \left(\arctg \frac{1}{\sqrt{4\sigma - 1}} + \frac{\pi}{2} \right)\right). \quad (3.34)$$

Пространственные компоненты тензора плотности энергии-импульса, определенные соотношениями (3.6), на уравнениях поля равны:

$$(\varepsilon_{gr})_k^p = \frac{c^2}{48\pi GT^2} \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{\gamma\gamma}} \frac{d\gamma}{d\tau} + \frac{1}{2\gamma} B_n^n \right] \delta_k^p, \quad (3.35)$$

и отличаются от выражения для плотности энергии знаком последних двух членов. Эти компоненты могут принимать в процессе эволюции как положительные, так и отрицательные значения. Исключая снова вторую производную с помощью уравнение (3.18), и полагая, как это принято для макроскопических сред $(\varepsilon_{gr})_m^n = -p_{gr} \delta_m^n$, запишем давление гравитационного поля в виде:

$$p_{gr} = -\frac{c^2}{48\pi GT^2} \frac{2u^2 - 2u + \sigma}{\gamma}. \quad (3.36)$$

Отсюда следует, что при $0.25 < \sigma < 0.5$ происходит изменение знака давления при следующих значениях u :

$$u_3 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\sigma}}{2} > \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} \approx 0.146, \quad u_4 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\sigma}}{2} < \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} \approx 0.8536 \quad (3.37)$$

Гравитационное поле имеет положительное давление в промежутке $u_3 < u < u_4$, в остальных случаях его давление отрицательное.

Рассмотрим тензор Риччи. Подставляя соотношения (3.14), (3.15) в (3.3), (3.4) найдем выражения для его отличных от нуля компонент на уравнениях поля:

$$R_0^0 = -\frac{1}{2c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right) - \frac{1}{12c^2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2, \quad R_k^k = -\frac{1}{2c^2 \sqrt{\gamma}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right). \quad (3.38)$$

Исключая вторые производные, запишем выражения для скалярной кривизны пространства-времени R .

$$R = R_0^0 + R_k^k = -\frac{1}{2c^2 T^2 \gamma} \left(\frac{8}{3} u^2 - 2u + \sigma \right). \quad (3.39)$$

Кривизна пространства - времени изменяется в процессе эволюции и принимает сначала отрицательные затем положительные и, наконец, снова отрицательные значения.

3.4 Кинематика однородного пространства.

В силу (3.32), (3.33) максимальная плотность энергии гравитационного поля равна

$$\rho_{gr\max} = \frac{c^2 \sigma}{96\pi G T^2 \gamma_{\min}} \exp\left(-\frac{2 \operatorname{arctg} \sqrt{4\sigma - 1}}{\sqrt{4\sigma - 1}}\right). \quad (3.40)$$

Отсюда следует при $\sigma \approx 1/4$

$$T \sqrt{\gamma_{\min}} = \left(\frac{c^2 \sigma}{96\pi \cdot G \cdot \rho_{gr\max}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{4\sigma - 1}}{\sqrt{4\sigma - 1}}\right) \approx \frac{c}{8e} \left(\frac{1}{6\pi G \rho_{gr\max}} \right)^{1/2}. \quad (3.41)$$

Соотношения (3.22), (3.28) можно записать в размерном виде:

$$t - t_{st} = T \sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^u \frac{4f(y)}{4y^2 - 2y + \sigma} dy, \quad H(u) = \frac{1}{3T \sqrt{\gamma_{\min}}} \frac{u}{f(u)}. \quad (3.42)$$

Согласно (3.21) $f(u)$ зависит только от постоянной σ . При подстановке в эти соотношения значений [14]: времени от начала эволюции до текущего момента $t^0 - t_{st} = 13.81 \cdot 10^9$ лет и параметра Хаббла $H^0 = 67.3 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпс}^{-1}$, получим пару уравнений для двух неизвестных – σ и значения параметра u^0 на текущий момент времени

$$t^0 - t_{st} = T \sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^{u^0} \frac{4f(y)}{4y^2 - 2y + \sigma} dy, \quad H^0 = \frac{1}{3T \sqrt{\gamma_{\min}}} \frac{u^0}{f(u^0)}.$$

Квазиклассический подход оправдан при условии, что параметр $T \sqrt{\gamma_{\min}} \geq t_{pl}$, где t_{pl} – планковское время. Минимальному значению этого параметра согласно (3.40) соответствует максимальная плотность энергии гравитационного поля на четыре порядка меньшая планковской. В этом случае решение системы уравнений:

$$\sigma = 0.2501278984, \quad u^0 = 6.118625359. \quad (3.43)$$

Результаты расчетов остальных параметров для этого случая представлены в Таблице 1. Ниже в Таблице 2 приведены результаты аналогичного расчета, но с максимальной плотностью энергии равной той, которая достигается на ускорителях с энергией в 1 TeV ($\rho_{gr\max} = (1 \text{ TeV})^4 \approx 2 \cdot 10^{49} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}$).

Для параметра u выбраны характерные значения $u^0, u_2, u_4, \sigma, u_3, u_1, \sigma/2$, дополненные рядом промежуточных значений. В таблице: q – космическое ускорение, z – космологическое красное смещение, R – скалярная кривизна пространства-времени, $t-t_{st}$ – собственное время, H – параметр Хаббла.

$T\sqrt{\gamma_{\min}} = t_{pl} \text{ с}; \rho_{gr\max} = 5.2 \cdot 10^{109} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}; \sigma = 0.2501278984; u^0 = 6.118625359$					
u	q	z	$R, \text{м}^2$	$t-t_{st}, \text{с}$	$H, \text{с}^{-1}$
6.118625359	0.7599	0	$-5.589 \cdot 10^{-52}$	$4.358 \cdot 10^{17}$	$2.181 \cdot 10^{-18}$
1.362294111	0	0.84987	$-6.308 \cdot 10^{-52}$	$1.876 \cdot 10^{17}$	$3.074 \cdot 10^{-18}$
0.853462941	-0.5	1.41598	$-6.144 \cdot 10^{-52}$	$1.129 \cdot 10^{17}$	$4.290 \cdot 10^{-18}$
0.8	-0.5819	1.52552	$-5.890 \cdot 10^{-52}$	$1.029 \cdot 10^{17}$	$4.594 \cdot 10^{-18}$
0.7	-0.7600	1.79266	$-4.732 \cdot 10^{-52}$	$8.275 \cdot 10^{16}$	$5.435 \cdot 10^{-18}$
0.6	-0.9789	2.20159	$-6.939 \cdot 10^{-53}$	$6.051 \cdot 10^{16}$	$7.019 \cdot 10^{-18}$
0.5	-1.2496	2.93915	$1.977 \cdot 10^{-51}$	$3.650 \cdot 10^{16}$	$1.089 \cdot 10^{-17}$
0.4	-1.5775	4.83051	$3.079 \cdot 10^{-50}$	$1.305 \cdot 10^{16}$	$2.826 \cdot 10^{-17}$
0.35	-1.7543	7.80386	$3.648 \cdot 10^{-49}$	$4.161 \cdot 10^{15}$	$8.511 \cdot 10^{-17}$
0.3	-1.9156	24.3239	$1.843 \cdot 10^{-46}$	$1.963 \cdot 10^{14}$	$1.737 \cdot 10^{-15}$
0.28	-1.9643	87.6127	$3.105 \cdot 10^{-43}$	$4.848 \cdot 10^{12}$	$6.945 \cdot 10^{-14}$
0.265826306	-1.9880	1090	$9.993 \cdot 10^{-37}$	$2.719 \cdot 10^9$	$1.230 \cdot 10^{-10}$
0.250127898	-1.9985	$8.09106 \cdot 10^{10}$	$1.484 \cdot 10^{11}$	$7.062 \cdot 10^{15}$	$4.723 \cdot 10^{13}$
0.146537059	-0.5	$2.16717 \cdot 10^{20}$	$-9.435 \cdot 10^{66}$	$3.785 \cdot 10^{43}$	$5.317 \cdot 10^{41}$
0.137705891	0	$2.24648 \cdot 10^{20}$	$-2.067 \cdot 10^{67}$	$3.125 \cdot 10^{43}$	$5.565 \cdot 10^{41}$
0.125063950	1	$2.33685 \cdot 10^{20}$	$-4.321 \cdot 10^{67}$	$2.426 \cdot 10^{43}$	$5.689 \cdot 10^{41}$
0	∞	$2.58860 \cdot 10^{20}$	$-4.788 \cdot 10^{68}$	0	0

Таблица 1. Кинематика пространства при максимальной плотности энергии $\rho_{gr\max} = 5.2 \cdot 10^{109} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}$.

$\rho_{gr\max} = 2 \cdot 10^{49} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}; T\sqrt{\gamma_{\min}} = 8.691286792 \cdot 10^{-14} \text{ с}; \sigma = 0.2505131772; u^0 = 6.116607675$					
u	q	z	$R, \text{м}^2$	$t-t_{st}, \text{с}$	$H, \text{с}^{-1}$
6.116607675	0.7598	0	$-5.588 \cdot 10^{-52}$	$4.358 \cdot 10^{17}$	$2.181 \cdot 10^{-18}$
1.362058100	0	0.84978	$-6.145 \cdot 10^{-52}$	$1.876 \cdot 10^{17}$	$3.074 \cdot 10^{-18}$
0.853190333	-0.5	1.41607	$-9.218 \cdot 10^{-52}$	$1.129 \cdot 10^{17}$	$4.291 \cdot 10^{-18}$
0.8	-0.58143	1.52504	$-5.894 \cdot 10^{-52}$	$1.030 \cdot 10^{17}$	$4.592 \cdot 10^{-18}$
0.7	-0.75942	1.79220	$-4.740 \cdot 10^{-52}$	$8.281 \cdot 10^{16}$	$5.433 \cdot 10^{-18}$
0.6	-0.97810	2.20058	$-7.194 \cdot 10^{-53}$	$6.057 \cdot 10^{16}$	$7.014 \cdot 10^{-18}$
0.5	-1.2485	2.93699	$1.0963 \cdot 10^{-51}$	$3.656 \cdot 10^{16}$	$1.088 \cdot 10^{-17}$
0.4	-1.5757	4.82107	$3.042 \cdot 10^{-50}$	$1.313 \cdot 10^{16}$	$2.813 \cdot 10^{-17}$
0.35	-1.7519	7.76490	$3.545 \cdot 10^{-49}$	$4.218 \cdot 10^{15}$	$8.404 \cdot 10^{-17}$
0.3	-1.9124	23.6505	$1.564 \cdot 10^{-46}$	$2.130 \cdot 10^{14}$	$1.602 \cdot 10^{-15}$
0.28	-1.9607	78.6976	$1.638 \cdot 10^{-43}$	$6.670 \cdot 10^{12}$	$5.054 \cdot 10^{-14}$
0.263724335	-1.9863	1090	$9.820 \cdot 10^{-37}$	$2.741 \cdot 10^9$	$1.221 \cdot 10^{-10}$
0.250513177	-1.9939	$5.92654 \cdot 10^5$	$2.294 \cdot 10^{-20}$	17.963	0.001859
0.146809667	-0.5	$1.84758 \cdot 10^{10}$	$-3.638 \cdot 10^6$	$6.102 \cdot 10^{13}$	$3.301 \cdot 10^{11}$
0.137941901	0	$1.91536 \cdot 10^{10}$	$-7.974 \cdot 10^6$	$5.037 \cdot 10^{13}$	$3.456 \cdot 10^{11}$
0.125256589	1	$1.99255 \cdot 10^{10}$	$-1.6669 \cdot 10^7$	$3.910 \cdot 10^{13}$	$3.533 \cdot 10^{11}$
0	∞	$2.20739 \cdot 10^{10}$	$-1.8450 \cdot 10^8$	0	0

Таблица 2. Кинематика пространства при максимальной плотности энергии $\rho_{gr\max} = 2 \cdot 10^{49} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}$.

Таким образом, вместо стандартной космологической модели (СКМ) в этом случае мы имеем континуум космологических моделей, параметризованных значением максимальной плотности энергии ρ_{grmax} . Из сравнения этих данных Таблиц 1, 2 следует, что, по крайней мере, до космологического красного смещения поверхности «последнего рассеяния»

$$z(0.2647 \pm 0.0011) = 1090, \quad z(u) = \left(\sqrt{\frac{\gamma(u^0)}{\gamma(u)}} \right)^{1/3} - 1 \quad (3.44)$$

результаты расчетов хорошо согласуются между собой, несмотря на отличие в величине максимальной плотности энергии более чем на шестьдесят порядков. Это обстоятельство исключает сомнения в возможности однозначного описания эволюции пространства в этом диапазоне изменения красного смещения. Следует обратить внимание на тот факт, что «последнее рассеяние» произошло по истечении менее ста лет от начала процесса эволюции в отличие от 373 000 лет в Λ CDM – модели [14].

Существенные отличия между моделями имеются лишь при больших значениях z . В момент начала эволюции скалярная кривизна имеет определенное конечное значение, поэтому можно определить характерный начальный размер, как величину обратную корню из модуля кривизны. Этот размер зависит от величины ρ_{grmax} и для рассмотренного в Таблицах 1, 2 диапазона энергий может составлять от 10^{-34} до 10^{-4} метра.

3.5 Геодезические и энтропия однородного пространства.

Для метрики (3.27) как и для метрики Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера, линии $x^1 = x^2 = x^3 = const$ являются геодезическими, и в каждой точке можно ввести сопутствующую систему координат, в которой *определенная выше переменная t будет являться собственным временем.*

Подставляя в уравнения геодезической $x^\mu(\xi)$ с натуральным параметром ξ

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\xi^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\xi} \frac{dx^\lambda}{d\xi} = 0$$

символы Кристоффеля (3.2) для метрики (3.27) и интегрируя полученные уравнения, найдем:

$$\frac{dx^m}{d\xi} = A^m \gamma^{-1/3}(x^0), \quad \sqrt{g_{00}(x^0)} \frac{dx^0}{d\xi} = \pm \sqrt{A^2 \gamma^{-1/3}(x^0) + B}, \quad A^2 = A^m \delta_{mm} A^m, \quad A^m, B = const. \quad (3.45)$$

Гиперповерхность $t = t_{st}$ является краем найденного пространственно–временного многообразия. На краю $u(t_{st}) = 0$ и космическое ускорение (3.29), являющееся инвариантной наблюдаемой величиной, обращается в бесконечность. В связи с этим любая, выходящая на край геодезическая, при конечном значении ξ столкнется с неустранимой особенностью. Следовательно, *найденное многообразие является максимально продолжимым вдоль геодезических вплоть до края.*

Согласно (3.45) в сопутствующей системе координат вдоль геодезической определен вектор 4 - скорости

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = (g_{00}^{-1/2}, 0, 0, 0)$$

В этом случае из уравнения адиабатичности с учетом (2.4), (2.5), (3.17), (3.21) следует:

$$s_{gr} = a \frac{k}{l_{pl}^2} v^\lambda(x) \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\lambda} = \frac{a \cdot k}{2l_{pl}^2 cT \sqrt{\gamma(u)}} = \frac{\sigma \cdot k}{2l_{pl}^2 cT \sqrt{\gamma(u)}} \quad (3.46)$$

В последнем равенстве мы отождествили неизвестную постоянную a с единственным в теории безразмерным параметром σ (3.18), характеризующим найденное пространственно

– временное многообразие. Из (3.46) следует, что плотность энтропии в настоящее время достаточно слабо зависит от максимальной плотности энергии и при $\rho_{gr\max} = 2 \cdot 10^{49}$ Дж·м⁻³ равна

$$s_{gr}(u^0) = \frac{\sigma \cdot k}{2l_{pl}^2 c T \sqrt{\gamma_{\min}} f(u^0)} \approx 1.7 \cdot 10^{42} \cdot k \cdot m^{-3} \quad .$$

Эта величина на 18 порядков превосходит вклад всех остальных источников энтропии, учитываемых в рамках ОТО [15].

В силу (3.45) для наблюдателя, покоящегося в начале координат и связанного 0 – геодезической ($B=0$) с сопутствующей точкой, расстояние, как и в ОТО, определяется соотношением [7]:

$$d(t) = c \cdot a(t^0) \cdot \int_t^{t^0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.47)$$

где $a(t)$ – масштабный фактор, t – собственное время. В рассматриваемом случае фактор $a(t) = \gamma^{1/6}(t)$ определен приведенными выше соотношениями, в ОТО после открытия космического ускорения он определяется в рамках Λ CDM – модели [7]. Параметры этой модели подбираются исходя из условия обеспечения наилучшего согласия со всей совокупностью имеющихся в настоящее время экспериментальных данных, их численные значения по состоянию на 2013 год приведены в [14].

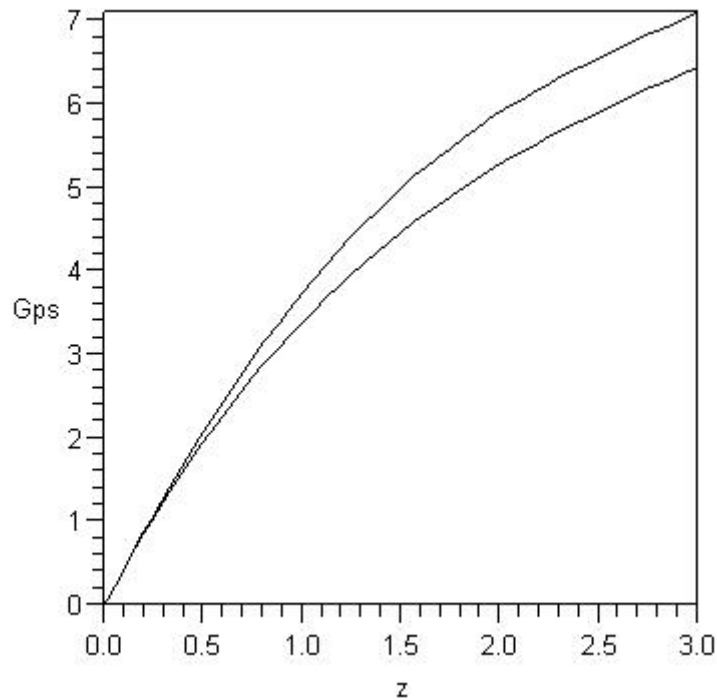


Рисунок 1. Расстояние до объекта в зависимости от его красного смещения, верхняя кривая - расчет по (3.47), нижняя – расчет по Λ CDM – модели.

В работе [14] приведена в графической форме вся имевшаяся на момент публикации совокупность данных по зависимости расстояния от красного смещения (Fig. 24.2, Fig. 26.1). Сравнение с данными [14] показывает, что обе представленные на рис. 1 зависимости лежат в пределах погрешности экспериментальных данных. Более того, как следует из приведенных на рис. 2 данных, даже будущие эксперименты такого рода вряд ли позволят сделать выбор между этими двумя зависимостями. При продолжении приведенной зависимости в область больших значений z ее ход будет определяться неизвестной в настоящее время максимальной плотностью энергии гравитационного поля.

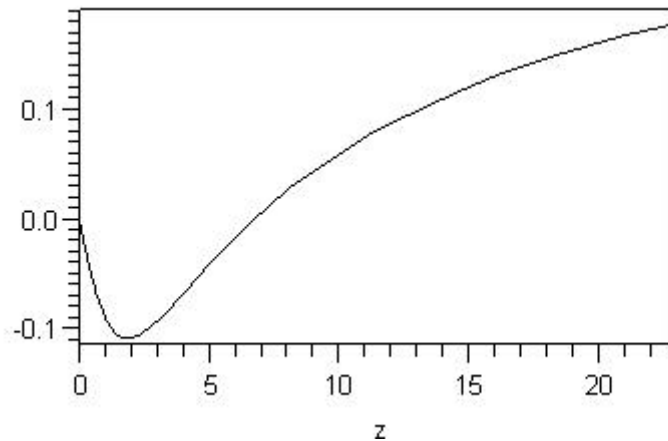


Рисунок 2. Отклонение от единицы отношения расстояний, вычисленных по *ОТО* и данной теории (по вертикали), в зависимости от величины красного смещения.

Сравнительно малая величина отклонения связана с интегральным характером зависимости расстояния от красного смещения. Для локального параметра, такого как параметр Хаббла, ситуация иная.

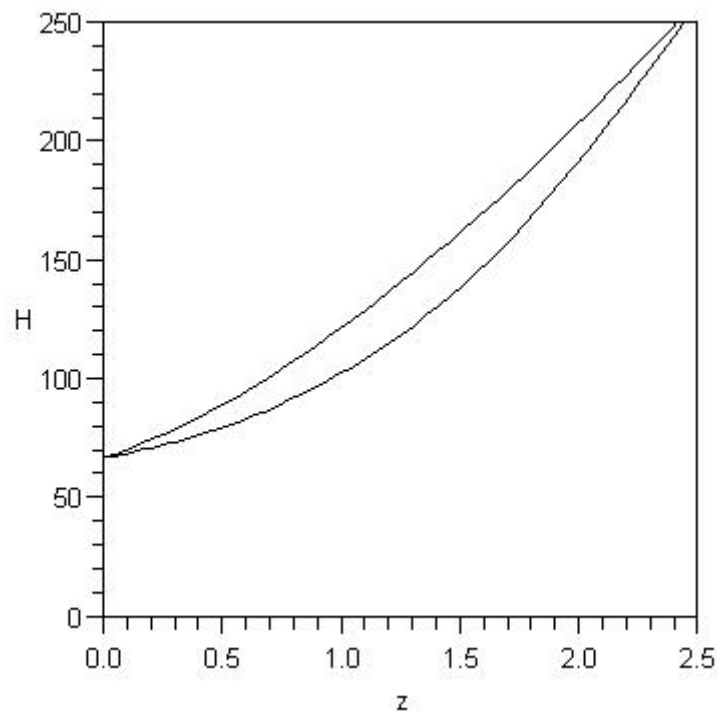


Рисунок 3. Зависимость параметра Хаббла ($\text{км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$) от красного смещения. Верхняя кривая – Λ CDM-модель, нижняя кривая – данная теория.

В этом случае, как показывает сравнение результатов расчета с экспериментальными данными ([16, с. 20] Fig.4) при $z < 2.5$ обе зависимости так же укладываются в пределы погрешности экспериментов. Однако как видно из рис. 4 при больших красных смещениях расхождение между ними увеличивается многократно. Таким образом, только одна из двух теорий может быть справедлива.

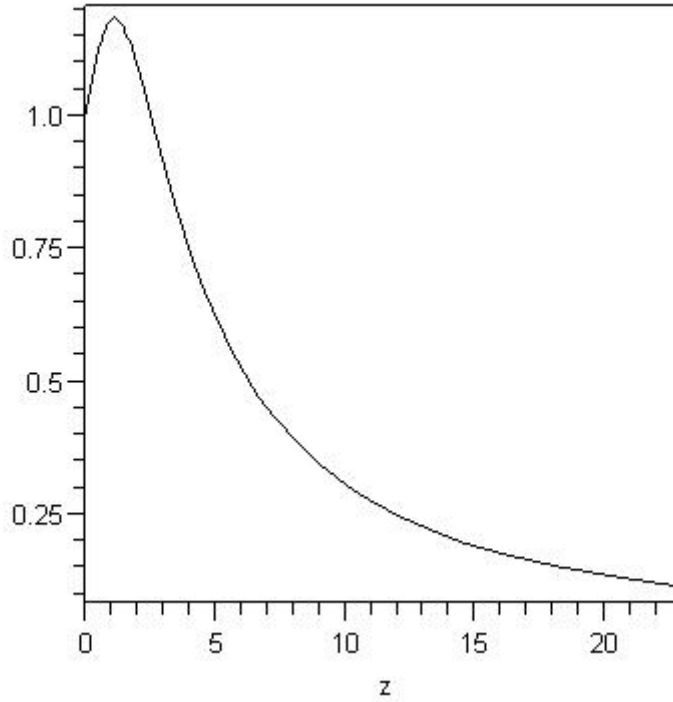


Рисунок 4. Зависимость отношения параметра Хаббла в Λ CDM-модели к его значению в данной теории от красного смещения.

Существенно то, что в этой области красных смещений зависимость не имеет свободных параметров, определяется только начальными значениями при $z = 0$ и, как видно из Таблицы 1, справедлива вплоть до начального момента времени. В ОТО, чтобы обеспечить согласие с экспериментом, в рамках Λ CDM-модели введены гипотезы о существовании темной энергии и темной материи. Для описания же зависимости в области больших z вводится гипотеза о существовании инфлатонов.

3.6 Температура однородного гравитационного поля.

В пустом пространстве гравитационное поле обладает характеристиками присущими материальной среде: энергией, давлением и энтропией. В силу общих законов термодинамики еще одной характеристикой состояния среды является температура - θ , изменение которой при равновесном процессе без подвода тепла связано с изменением давления соотношением [17]:

$$s_{gr} \frac{d\theta_{gr}}{dt} = \frac{dp_{gr}}{dt}. \quad (3.48)$$

Это уравнение позволяет по найденным зависимостям давления (3.36) и плотности энтропии гравитационного поля (3.46) от u определить его температуру.

Подставляя в (3.48) соответствующие зависимости, получим:

$$-\frac{c^2}{48\pi GT^2} \sqrt{\gamma(u)} d\left(\frac{2u^2 - 2u + \sigma}{\gamma(u)}\right) = \frac{\sigma \cdot k}{2l_{pl}^2 c T} d\theta_{gr}. \quad (3.49)$$

Интегрируя это уравнения с учетом зависимости $\gamma(u)$ (3.21), найдем:

$$\theta_{gr}(u) = \frac{\hbar}{12\pi \cdot k \cdot T \sqrt{\gamma_{\min}}} \int_0^u \frac{1}{\sigma \cdot f(u)} \cdot \frac{\sigma - 2u(1 - \sigma)}{\sigma - 2u + 4u^2} du. \quad (3.50)$$

При $u = u^0$ (настоящий момент времени) величина интеграла для данных Таблиц 1, 2 одинакова и составляет 0.5 (с точностью до восьми знаков). В тоже время температура

гравитационного поля $\theta_{gr}(u^0)$ изменяется от $1.879 \cdot 10^{30}$ °К в первом случае, до 1.166 °К во втором.

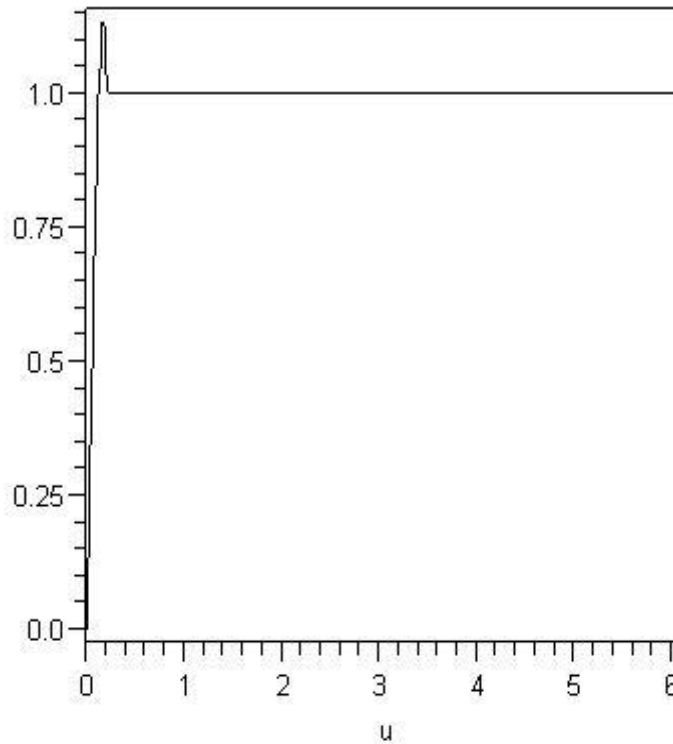


Рисунок 5. По вертикали отложено отношение текущей температуры к ее значению в настоящее время в зависимости от u (3.19).

Связь безразмерной скорости изменения объемного фактора u с собственным временем видна из Таблиц 1 и 2. Следует отметить, что для обоих представленных в таблице вариантов расчетные зависимости практически идентичны. Температура сохраняется на постоянном уровне равном ее современному значению за исключением короткого начального промежутка времени. То есть гравитационное поле уже почти 14 миллиардов лет вплоть до настоящего момента и далее вплоть до достижения полного равновесия имеет, и будет иметь постоянную температуру. Оно выступает в качестве термостата Вселенной. Температуру такого термостата можно оценить, наблюдая изменение температуры находящихся в тепловом контакте с ним тел. При приближении к равновесному состоянию их температура должна асимптотически стремиться к температуре термостата. В частности, если рассматривать температуру реликтового излучения, то со временем при адиабатическом охлаждении она будет стремиться не к нулю, а к температуре термостата. В настоящее время температура реликтового излучения равна $\theta_{rel}^0 = 2.7255$ °К и не зафиксированы, какие либо изменения в ходе её адиабатического охлаждения. Отсюда можно сделать вывод, что температура гравитационного поля $\theta(u^0)$ меньше θ_{rel}^0 .

Из (3.50) следует:

$$T\sqrt{\gamma_{\min}} = \frac{0.5 \cdot \hbar}{12\pi k \theta_{gr}(u^0)} \quad (3.51)$$

Используя это соотношение и (3.41) можно связать максимальную величину глобальной плотности энергии ρ_{grmax} со значением температуры в настоящее время

$$\rho_{gr\max} = \frac{3\pi}{2e^2} \cdot \frac{c^2}{G} \cdot \left(\frac{k\theta_{gr}(u^0)}{\hbar} \right)^2. \quad (3.52)$$

Если для оценки принять температуру $\theta_{gr}(u^0)$ равной температуре реликтового излучения в настоящее время $\theta_{rel}^0 = 2.7255 \text{ }^0\text{K}$, то $\rho_{gr\max} < 1 \cdot 10^{50} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3} \sim (1.5 \cdot \text{ТэВ})^4$. Это близко к значению в варианте эволюции, представленном в Таблице 2, и *разительно отличается от стандартной космологической модели (СКМ), в которой плотность энергии может достигать величины на 64 порядка большей* $(10^{19} \text{ТэВ})^4$. Возможно, именно это является причиной отсутствия во Вселенной гипотетических форм материи таких, которые не обнаруживаются в экспериментах на БАК.

4. Базовая модель эволюции однородной и изотропной Вселенной

Рост интенсивности гравитационного поля в процессе эволюции неизбежно приведет к появлению новых структур материи.

Рассмотрим феноменологически влияние материи на процесс эволюции Вселенной.

Как показано в разделе 3, существует единственное однородное пространство-время с изотропной метрикой вида

$$ds^2 = g_{00}(x^0)(dx^0)^2 - \gamma^{1/3}(x^0)dx^m dx^n \delta_{mn}.$$

Пусть в некоторый момент времени в этом пространстве-времени рождается материя. В силу его однородности и изотропии тензор средней плотности энергии-импульса материи запишем в виде $(\varepsilon_{mat})_{\mu}^{\nu} = \text{diag}(\rho_{mat} - p_{mat}, -p_{mat}, -p_{mat}, -p_{mat})$. Поскольку связь (1.1) не включает поля материи, то, как отмечалось в разделе 3, ковариантная производная этого тензора должна быть равна нулю.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{-g} (\varepsilon_{mat})_{\mu}^{\nu}) - \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} (\varepsilon_{mat})_{\lambda}^{\rho} = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражения для связности (3.2) в случае изотропной метрики получим:

$$\frac{d\rho_{mat}}{dx^0} = -(\rho + p)_{mat} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\sqrt{\gamma}}{dx^0}. \quad (4.1)$$

Тогда при наличии материи уравнения гравитационного поля (3.7-3.9) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dx^0} \right) &= 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\gamma \sqrt{g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) - \frac{1}{6g_{00}} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \right)^2 &= \sqrt{\gamma g_{00}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{g_{00} \sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right) + \frac{8\pi G}{c^4} (\rho + 3p)_{mat}, \\ -\frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{g_{00}}} \frac{1}{3\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) \delta_k^p &= \delta_k^p \frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{g_{00}}} \frac{d\Phi}{dx^0} \right) - \frac{8\pi G}{c^4} (\rho - p)_{mat} \delta_k^p. \end{aligned}$$

Повторяя все выкладки с учетом этих добавочных членов, вместо (3.20) получим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$8\gamma u \frac{du}{d\gamma} = 4u^2 - 2u + \sigma + M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}), \quad (4.2)$$

где введен функционал

$$M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}) = \frac{48\pi G T^2}{c^2} \left(-\gamma(\rho + p)_{mat} + \frac{1}{4} \int_0^u (\rho - p)_{mat} \left(\frac{d\gamma}{du} \right) \frac{du}{u} \right),$$

причем предполагается, что *давление и плотность энергии материи равны нулю в начальный момент времени.*

Уравнения для космического ускорения, плотности энергии, давления и скалярной кривизны в этом случае также видоизменяются, вместо (3.29), (3.32), (3.36) и (3.39) получим:

$$q = 1 - \frac{3}{2u} + \frac{3\sigma}{4u^2} + \frac{3}{4u^2} M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}), \quad (4.3)$$

$$\rho_{gr} + \rho_{mat} = \frac{c^2}{24\pi GT^2} \frac{u^2}{\gamma} = \frac{3c^2 H^2(u)}{8\pi G} \equiv \rho_{cr}(u), \quad (4.4)$$

$$p_{gr} + p_{mat} = -\frac{c^2}{48\pi GT^2} \frac{1}{\gamma} \left[2u^2 - 2u + \sigma + M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}) \right]. \quad (4.5)$$

$$R = -\frac{1}{2c^2 T^2 \gamma} \left[\frac{8}{3} u^2 - 2u + \sigma + M(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}) \right]. \quad (4.6)$$

Согласно наблюдательным данным во Вселенной в настоящее время имеется: барионная материя, электромагнитное излучение и нейтрино. Эти компоненты слабо взаимодействуют между собой. В этом случае законы «сохранения» для каждого вида материи выполняются в отдельности. Для барионной материи давление можно считать равным нулю, для электромагнитного излучения $p = \rho/3$, для нейтрино аналогичное соотношение будет справедливо до тех пор, пока можно пренебречь наличием у них массы. При этих условиях из (4.1) следует:

$$\rho_b = \rho_b^0 \frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}}, \quad \rho_\gamma = \rho_{\gamma_r}^0 \left(\frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} \right)^{4/3}, \quad \rho_\nu = \rho_\nu^0 \left(\frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} \right)^{4/3}. \quad (4.7)$$

Верхним индексом отмечены значения, относящиеся к настоящему моменту времени.

Известно, что плотность энергии двух первых компонентов составляет соответственно $\Omega_b = 0.0499$ и $\Omega_\gamma = 5.46 \cdot 10^{-5}$ от критической плотности энергии в настоящее время [14]. Для нейтрино данные менее определенные $\Omega_\nu < 5.52 \cdot 10^{-3}$. Далее, чтобы оценить максимальную степень влияния материи на процесс эволюции, будет использовано именно это значение относительной плотности нейтрино.

На временах не слишком далеких от настоящего времени имеем следующие зависимости средней плотности энергии и давления материи от объемного фактора:

$$\rho_{mat} = \rho_{cr}^0 \left[\Omega_b \frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} + \Omega \left(\frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} \right)^{4/3} \right], \quad p_{mat} = \frac{\rho_{cr}^0}{3} \Omega \left(\frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} \right)^{4/3}, \quad \Omega = \Omega_\gamma + \Omega_\nu. \quad (4.8)$$

Функционал в правой стороне (4.2 - 4.6), описывает обратное воздействие материи на метрику. В момент начала эволюции функционал равен нулю, а вся энергия сосредоточена в гравитационном поле, поэтому в первом приближении обратным воздействием можно пренебречь. Положим

$$M^{(1)}(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}) = 0,$$

где индекс в скобках обозначает номер приближения.

В этом случае изменение объемного фактора и его производной по-прежнему будет описываться соотношениями (3.20), (3.21), а критическая плотность - соотношением (4.4). Таким образом, в этом приближении плотность энергии и давление материи можно считать известными функциями от u при $u_b \leq u$.

$$\rho_{mat}(u) = \rho_{cr}^0 \frac{f(u^0)}{f(u)} \left[\Omega_b + \Omega \left(\frac{f(u^0)}{f(u)} \right)^{1/3} \right], \quad p_{mat} = \frac{\rho_{cr}^0}{3} \Omega \left(\frac{f(u^0)}{f(u)} \right)^{4/3}, \quad \Omega = \Omega_\gamma + \Omega_\nu. \quad (4.9)$$

4.1 Плотность энергии материи в очень ранней Вселенной.

При $0 \leq u \leq u_b$ (очень ранняя Вселенная) условия, при которых справедливы соотношения (4.9) нарушаются. Причиной является экстремально высокая плотность энергии гравитационного поля, достигающая, как показано в разделе 3, уровня плотности энергии БАК. В этих условиях помимо перечисленных частиц будут рождаться, и другие компоненты стандартной модели элементарных частиц и полей.

Имея это в виду, доопределим зависимости $\rho_{mat}(u)$ в начале процесса эволюции следующим образом. Поскольку в этот период других источников энергии кроме гравитации нет, примем, что она пропорциональна $\rho_{gr}(u)$ с безразмерным коэффициентом, зависящим от плотности энергии гравитационного поля:

$$\rho_{mat}(u) = \lambda \cdot \left(\frac{u}{f(u)} \right)^n \cdot \rho_{gr}(u), \quad \lambda < 1, \quad 0 \leq u \leq u_b, \quad n \geq 0. \quad (4.10)$$

Исключая плотность энергии гравитации из соотношений (4.4), (4.10) получим

$$\rho_{mat}(u) = \frac{\lambda \cdot u^n}{f^n(u) + \lambda \cdot u^n} \cdot \rho_{cr}(u), \quad 0 \leq u \leq u_b, \quad n \geq 0. \quad (4.11)$$

Постоянную λ и величину u_b определим из условий гладкого сопряжения зависимостей (4.9), (4.11) при $u = u_b$. Приравнявая отдельно плотности энергии и их производные при $u = u_b$, получим систему двух уравнений для определения u_b и λ :

$$\frac{\lambda \cdot u_b^n}{f^n(u_b) + \lambda \cdot u_b^n} = \left(\frac{u^0}{u_b} \right)^2 \left[\Omega_b \frac{f(u_b)}{f(u^0)} + \Omega \left(\frac{f(u_b)}{f(u^0)} \right)^{2/3} \right]. \quad (4.12)$$

$$4u_0^2 \cdot \left[\Omega_b \frac{f(u_b)}{f(u^0)} + \frac{4}{3} \Omega \left(\frac{f(u_b)}{f(u^0)} \right)^{2/3} \right] = \left(n + 2 - n \frac{\lambda \cdot u_b^n}{f^n(u_b) + \lambda \cdot u_b^n} \right) \frac{\lambda \cdot u_b^n (2u_b - \sigma)}{f^n(u_b) + \lambda \cdot u_b^n}. \quad (4.13)$$

Эта система уравнений имеет два различных решения, физически осмысленным является решение с меньшим значением u_b . Для него $u_b \ll f(u_b) \ll f(u^0)$, поэтому уравнение (4.13) упрощается и решение принимает вид

$$u_b \approx \frac{3(2+n) - \sqrt{9(2+n)^2 - 48(2+n) \cdot \sigma}}{16}.$$

Величина u_b определяет тот момент мирового времени, когда материя отделяется от гравитационного поля. Это происходит из-за уменьшения абсолютной величины скалярной кривизны с течением времени. Конкретно это происходит в момент ее первого обращения в ноль. Из (3.39) следует, что $R(u) = 0$ при

$$u = \frac{6 - \sqrt{36 - 96 \cdot \sigma}}{16}.$$

Это выражение совпадает с u_b при $n = 0$. Для этого значения из (4.12) найдем отношение плотности энергии материи к плотности энергии гравитационного поля на момент отделения от него материи

$$\lambda \approx \Omega \cdot \left(\frac{u^0}{u_b} \right)^2 \left(\frac{f(u_b)}{f(u^0)} \right)^{2/3}, \quad u_b \approx \frac{6 - \sqrt{36 - 96 \cdot \sigma}}{16}. \quad (4.14)$$

При подстановке в это соотношение значений, соответствующих данным Таблицы 2, найдем, что эта доля составляла $2.754 \cdot 10^{-20}$. Плотность энергии Вселенной при $u = u_b$ - $1.390 \cdot 10^{49}$ Дж·м⁻³ на момент времени $t - t_{st} = 8.183 \cdot 10^{-13}$ секунды. При приближении к начальному моменту времени средняя плотность энергии материи уменьшается в соответствии с (4.11), стремясь к нулю вместе с критической плотностью.

4.2 Температурная история ранней и очень ранней Вселенной.

Обратимся теперь к температурной истории ранней Вселенной. При этом мы будем исходить из основных положений, изложенных в [7]. К раннему периоду относят промежуток времени, когда температура электромагнитного излучения находилась в диапазоне от 10^{11} до 4000 ^0K . Утверждается [7], что справедливы следующие соотношения между плотностью энтропии s , температурой θ и масштабным фактором a для электромагнитного излучения и нейтринной материи (соответствующие величины помечены нижним индексом γ или ν):

$$s_\gamma(\theta)a^3 = \text{const}, \quad s_\gamma(\theta) = \frac{4}{3}a_B\theta_\gamma^3, \quad s_\nu(\theta)a^3 = \text{const}, \quad s_\nu(\theta) = \frac{7}{2}a_B\theta_\nu^3, \quad a_B = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3}.$$

Используя полученные в предыдущем разделе выражения для объемного фактора, перепишем эти соотношения в виде:

$$s_\gamma(\theta)\gamma^{1/2}(u) = s_\gamma(\theta_b)\gamma^{1/2}(u_b); \quad s_\gamma(\theta) = \frac{4}{3}a_B\theta_b^3 \frac{\gamma^{1/2}(u_b)}{\gamma^{1/2}(u)} = \frac{4}{3}a_B\theta_b^3 \frac{f(u_b)}{f(u)}; \quad \theta_b = \theta_\gamma(u_b). \quad (4.15)$$

$$s_\nu(\theta)\gamma^{1/2}(u) = s_\nu(\theta_b)\gamma^{1/2}(u_b); \quad s_\nu(\theta) = \frac{7}{2}a_B\theta_b^3 \frac{\gamma^{1/2}(u_b)}{\gamma^{1/2}(u)} = \frac{7}{2}a_B\theta_b^3 \frac{f(u_b)}{f(u)}; \quad \theta_b = \theta_\nu(u_b). \quad (4.16)$$

В [7] показано, что уравнение (3.48) применимо и для описания изменения температуры материи во Вселенной. В этом случае в силу аддитивности вкладов компонент в давление и плотность энтропии уравнение (3.48) принимает вид:

$$dp_{\text{mat}} = (s_\gamma(\theta) + s_\nu(\theta))d\theta. \quad (4.17)$$

Применим это уравнение к описанию начального этапа эволюции при $0 \leq u \leq u_b \ll u^0$. В этом случае, как следует из (4.9), вклад барионов в общую плотность энергии материи ничтожно мал, материю можно считать ультрарелятивистской средой и с учетом (4.4), (4.11) записать давление материи в виде:

$$p_{\text{mat}}(u) = \frac{\lambda}{3} \cdot \frac{c^2}{24\pi G T^2 \gamma_{\text{min}}} \cdot \left(\frac{u}{f(u)} \right)^2, \quad 0 \leq u \leq u_b.$$

Пренебрегая пока возможным различием температур компонент материи запишем уравнение (4.17), определяющее изменение температуры.

$$\frac{\lambda}{3} \cdot \frac{c^2}{24\pi G T^2} \cdot \frac{f(u)}{f(u_b)} d \left(\frac{u}{f(u)} \right)^2 = \frac{29}{6} a_B \theta_b^3 d\theta. \quad (4.18)$$

Интегрируя это уравнение с учетом определения (3.21) функции $f(u)$ и её производной, получим при $0 \leq u \leq u_b$:

$$\theta^3(u_b) \cdot \theta(u) = \frac{\lambda}{29a_B} \cdot \frac{c^2}{6\pi G T^2 \gamma_{\text{min}}} \cdot \frac{1}{f(u_b)} \int_0^u \frac{(\sigma - 2u)udu}{(4u^2 - 2u + \sigma)f(u)}. \quad (4.19)$$

Подставляя в это уравнение выражение (4.14) для параметра λ , найдем величину температуры $\theta(u_b)$ в момент отделения материи от гравитационного поля.

$$\theta(u_b) = \left[\frac{1}{29a_B} \cdot \frac{c^2}{6\pi G T^2 \gamma_{\text{min}}} \cdot \frac{\Omega}{u_b} \left(\frac{u_b^3 \cdot f(u_b)}{u_b^3 \cdot f(u^0)} \right)^{2/3} I(u_b) \right]^{1/4}, \quad (4.20)$$

где

$$I(u_b) = \int_0^{u_b} \frac{(\sigma - 2u)udu}{(4u^2 - 2u + \sigma)f(u)}.$$

Расчет при значениях параметров, соответствующих данным Таблиц 1 и 2 дает $I(u_b)=2.302 (\pm 0.0005) \cdot 10^{-4}$. При этом в первом случае $\theta(u_b) = 1.345 \cdot 10^{21}$ ^0K , во втором - $\theta(u_b) = 1.145 \cdot 10^{11}$ ^0K .

Согласно расчетам, приведенным в [7], температуры излучения и нейтрино совпадают при $\theta=10^{11}$ К, ниже неё нейтрино выходят из равновесия с другими частицами и их температура понижается, асимптотически стремясь к величине

$$\theta_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} \theta_\gamma .$$

В то же время температура излучения при $u > u_b$ будет убывать по мере роста масштабного фактора по закону [7]:

$$\frac{\theta_\gamma(u)}{\theta_\gamma(u_b)} = \frac{\gamma^{1/6}(u_b)}{\gamma^{1/6}(u)} = \frac{f^{1/3}(u_b)}{f^{1/3}(u)} . \quad (4.21)$$

Подставляя сюда выражение (4.20), найдем зависимость текущего значения температуры излучения от $u(t)$ при $u > u_b$:

$$\theta_\gamma(u) = \left[\frac{1}{29a_B} \cdot \frac{c^2}{6\pi G T^2 \gamma_{\min}} \cdot \frac{\Omega}{u_b} \left(\frac{u^{03} \cdot f(u_b)}{u_b^3 \cdot f(u^0)} \right)^{2/3} I(u_b) \right]^{1/4} \frac{f^{1/3}(u_b)}{f^{1/3}(u)} . \quad (4.22)$$

4.3 К вопросу об относительной плотности нейтрино во Вселенной.

При $u = u^0$, то есть в настоящий момент в нашей Вселенной значение температуры $\theta_\gamma(u^0)$ должно быть равно экспериментально наблюдаемой температуре реликтового излучения 2.7255 К. Расчет по (4.22) при значениях параметров, соответствующих данным Таблицы 1 дает $\theta_\gamma(u^0) = 6.6215$ К, для данных Таблицы 2 - $\theta_\gamma(u^0) = 6.6147$ К.

В построенном континууме моделей Вселенной для двух крайних случаев, отличающихся между собой по максимальной плотности энергии на 64 порядка, в один и тот же момент времени (нашего настоящего) температуры реликтового излучения практически совпадают между собой, но отличаются от наблюдаемого в нашей Вселенной значения более чем в два раза. В изложенной феноменологической модели нет свободных параметров, поэтому такое расхождение могло бы означать её крах, если бы не одно обстоятельство. Как отмечалось в начале раздела относительная плотность нейтрино согласно данным [14] $\Omega_\nu < 5.52 \cdot 10^{-3}$ и она в отличие от плотности излучения $\Omega_\gamma = 5.46 \cdot 10^{-5}$ точно не определена также как и их сумма $\Omega = \Omega_\gamma + \Omega_\nu$. Эта величина входит в выражение для температуры реликтового излучения (4.22) в виде постоянного множителя $\Omega^{1/4}$. Поэтому расхождение с экспериментом можно устранить, если вместо старого значения относительной плотности ввести новое значение Ω^* .

$$\Omega^* = (\Omega_\nu^* + \Omega_\gamma) = 1.6068 \cdot 10^{-4}, \Omega_\nu^* = 1.6068 \cdot 10^{-4} - 5.46 \cdot 10^{-5} = 1.0608 \cdot 10^{-4} . \quad (4.23)$$

Таким образом, если верна изложенная теория, то *неизвестная в настоящее время относительная плотность нейтрино во Вселенной равна $\Omega_\nu^* = 1.0608 \cdot 10^{-4}$* . В этом случае при $\rho_{g\max} = 2 \cdot 10^{49}$ Дж·м⁻³, $\theta_\gamma(u_b) = 4.719 \cdot 10^{10}$ К, а максимальная температура излучения во Вселенной - $\theta_{\gamma\max} = 9.404 \cdot 10^{10}$ К достигается при $t-t_{st} = 3.9 \cdot 10^{-13}$ с. Как показано в разделе 3 $\rho_{g\max} < 10^{50}$ Дж·м⁻³. При таком значении максимально возможной плотности энергии температура материи во Вселенной никогда не превышала $\theta_{\gamma\max} = 1.230 \cdot 10^{11}$ К.

4.4 Величина относительной плотности наблюдаемой во Вселенной материи.

Независимо от наличия или отсутствия материи суммарная средняя плотность энергии во Вселенной (4.4) всегда равна критической. Поэтому с учетом (4.9) доля средней плотности энергии материи в ее общем количестве при найденном значении относительной плотности нейтрино Ω_ν^* составляет

$$quota(u) = \frac{\rho_{mat}(u)}{\rho_{cr}(u)} = \frac{u^{02} f^2(u)}{u^2 f^2(u^0)} \left[\Omega_b \frac{f(u^0)}{f(u)} + \Omega \cdot \left(\frac{f(u^0)}{f(u)} \right)^{4/3} \right] .$$

С учетом (3.21), (3.42) эта величина следующим образом зависит от времени.

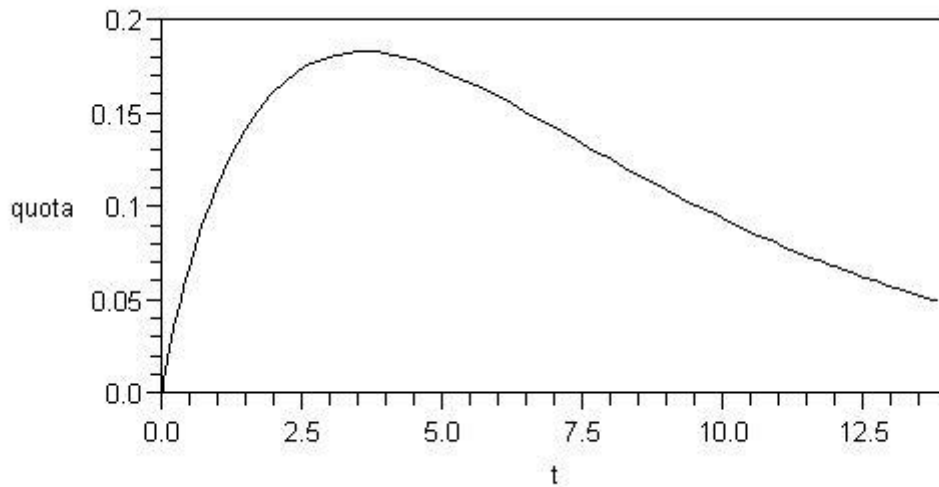


Рисунок 6. Зависимость отношения средней плотности энергии материи к плотности энергии во Вселенной от времени (в миллиардах лет), $\rho_{grmax} = 2 \cdot 10^{49}$ Дж·м⁻³.

Максимальная доля энергии материи не превышает 0.1832, в настоящее время эта величина составляет менее 0.055 и продолжает уменьшаться со временем. В отличие от *ОТО*, где плотность энергии материи неограниченно возрастает при уменьшении времени, здесь она достигает максимума, а затем начинает уменьшаться.

Остальная и основная часть энергии Вселенной это энергия гравитационного поля -

$$\rho_{gr}(u) = \rho_{cr}(u)(1 - quota(u)) .$$

С учетом (3.44) эта величина может быть связана с красным смещением наблюдаемых объектов.

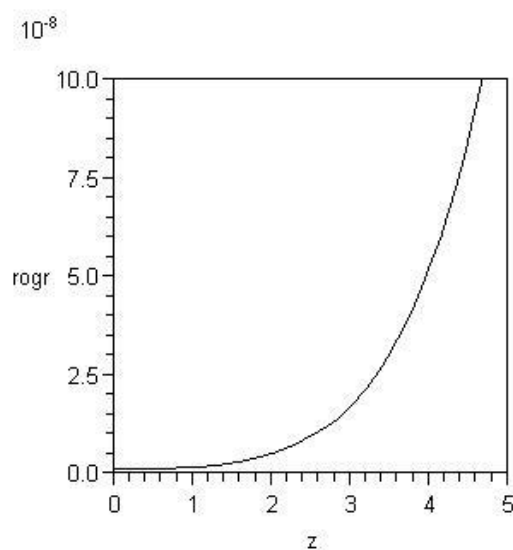


Рисунок 7. Зависимость плотности энергии гравитационного поля ρ_{gr} (10^{-8} Дж·м⁻³) от красного смещения в месте нахождения наблюдаемых гравитационно-связанных объектов, $\rho_{grmax} = 2 \cdot 10^{49}$ Дж·м⁻³.

Именно эта энергия, равномерно распределенная в пространстве, а не «темная материя» проявляется в характере зависимостей кривых вращения гравитационно-связанных объектов. Согласно данным [14] плотность энергии холодной темной материи в Λ CDM-модели ОТО равна

$$\rho_{cdm}(z) = \Omega_{cdm} \rho_{cr}^0 (1+z)^3, \quad \Omega_{cdm} = 0.265_{-0.17}^{+0.16}.$$

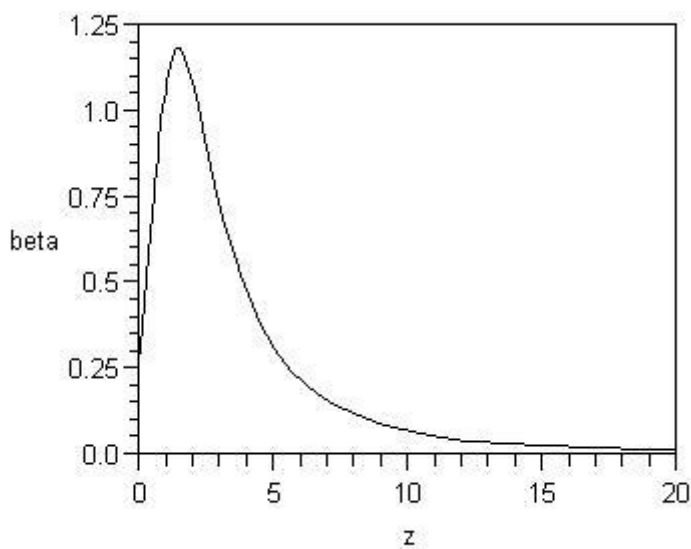


Рисунок 8. Отношение плотности энергии холодной темной материи к плотности энергии гравитационного поля в зависимости от красного смещения.

Как видно из рисунка 8, при расчете кривых вращения гравитационно-связанных объектов с использованием гипотетической плотности темной материи можно получить в определенной области красных смещений разумное согласие с экспериментом, однако имеется обширная область этих значений, где такой расчет приведет к ошибочным результатам. Не видно разумных доводов для замены гравитационного поля - реального источника дополнительной массы на гипотетическую холодную материю с возможной непредсказуемой величиной погрешности.

Таким образом, в отличие от ОТО для описания особенностей эволюции Вселенной не требуется вводить какие либо новые формы материи помимо уже известных форм.

4.5 Влияние наличия материи на процесс эволюции Вселенной.

Оценим теперь влияние материи на процесс эволюции пространственно-временного многообразия. Во втором приближении при заданной функции $\gamma(u)$ найдем:

$$M^{(2)}\left(u, \gamma, \frac{d\gamma}{du}\right) \cong w(u),$$

$$w(u) = -2u^{02} \left[\Omega_b \frac{f(u)}{f(u^0)} + \frac{4}{3} \Omega \left(\frac{f(u)}{f(u^0)} \right)^{2/3} \right] + \int_0^u \left[\Omega_b \frac{f(u)}{f(u^0)} + \frac{2}{3} \Omega \left(\frac{f(u)}{f(u^0)} \right)^{2/3} \right] \frac{4u^{02} du}{4u^2 - 2u + \sigma} \quad (4.24)$$

Подставляя (4.24) в (4.2), получим уравнение, описывающее, как материя в свою очередь влияет на изменение метрики. Решение этого уравнения может быть записано в квадратурах.

$$\sqrt{\frac{\gamma(u)}{\gamma_{\min}}} = \psi(u) = \exp \left(\int_0^u \frac{4udu}{4u^2 - 2u + \sigma + w(u)} \right). \quad (4.25)$$

$$t - t_{st} = T \sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^u \frac{4\psi(u) du}{4u^2 - 2u + \sigma + w(u)}. \quad (4.26)$$

Фигурирующая в этих соотношениях постоянная σ подобно тому, как это было сделано в предыдущем разделе, должна определяться вместе со значением u^0 из условия равенства вычисленного времени существования Вселенной и параметра Хаббла их наблюдаемым в настоящий момент значениям.

$$t^0 - t_{st} = T \sqrt{\gamma_{\min}} \int_0^{u^0} \frac{4\psi(u)}{4u^2 - 2u + \sigma + w(u)} du, \quad H^0 = \frac{1}{3T \sqrt{\gamma_{\min}}} \frac{u^0}{\psi(u^0)}. \quad (4.27)$$

$\rho_{gr\max} = 2 \cdot 10^{49} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}; T \sqrt{\gamma_{\min}} = 8.6912868 \cdot 10^{-14} \text{ с}; \Omega_b = 0.0499; \Omega_\gamma = 5.46 \cdot 10^{-5}; \Omega_v^* = 1.0608 \cdot 10^{-4}$
$u^0 = 6.79..; \quad \sigma = 0.25050968$

Таблица 3. Решение уравнений (4.27) ($t^0 - t_{st} = 4.355 \cdot 10^{17} \text{ с}$, $H^0 = 2.181 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$) при максимальной плотности энергии $\rho_{gr\max} = 2 \cdot 10^{49} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}$.

Далее в графической форме представлены результаты расчетов, проведенных как с учетом, так и без учета наличия материи во Вселенной. Расчеты проводились при значении $\Omega_v = 5.52 \cdot 10^{-3}$, поэтому при расчете с реальным значением $\Omega_v^* = 1.0608 \cdot 10^{-4}$ различие каждой пары зависимостей будет еще меньше.

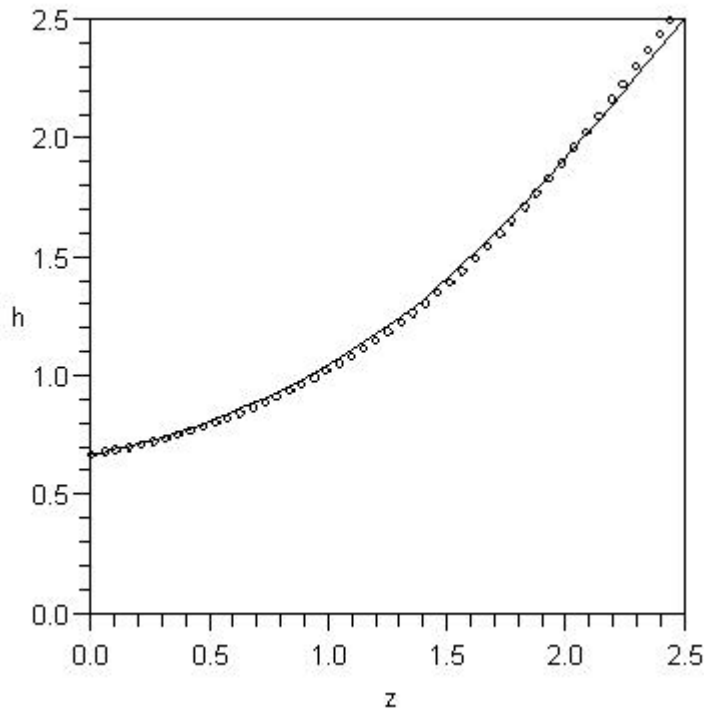


Рисунок 9. Результаты расчета зависимости параметра Хаббла ($H=100h \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$) от красного смещения с учетом (сплошная линия) и без учета (точки) наличия материи.

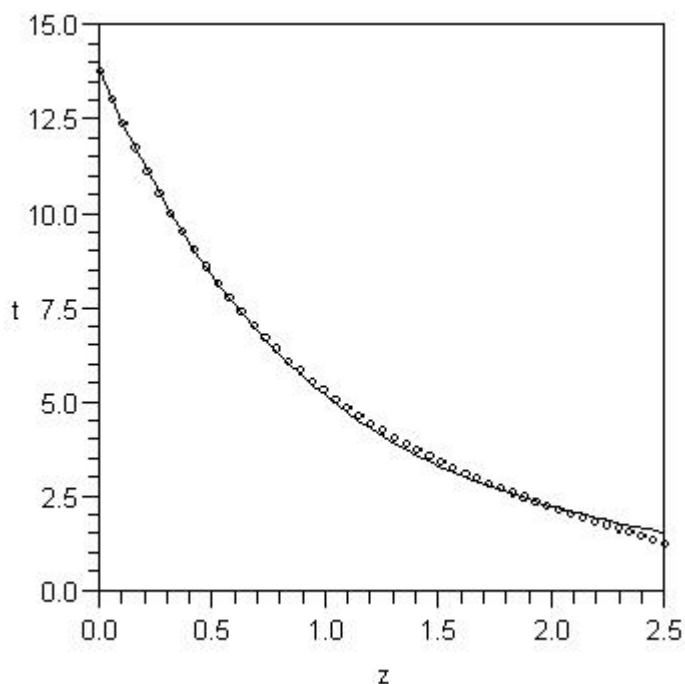


Рисунок 10. Рассчитанный возраст объекта (в миллиардах лет) в зависимости от его наблюдаемого красного смещения с учетом (сплошная линия) и без учета (точки) наличия материи.

Принимая во внимание приведенные в предыдущем разделе данные, можно сделать вывод о том, что в диапазоне красных смещений менее 2.3 влияние предыстории на дальнейший ход приведенных зависимостей незначительно.

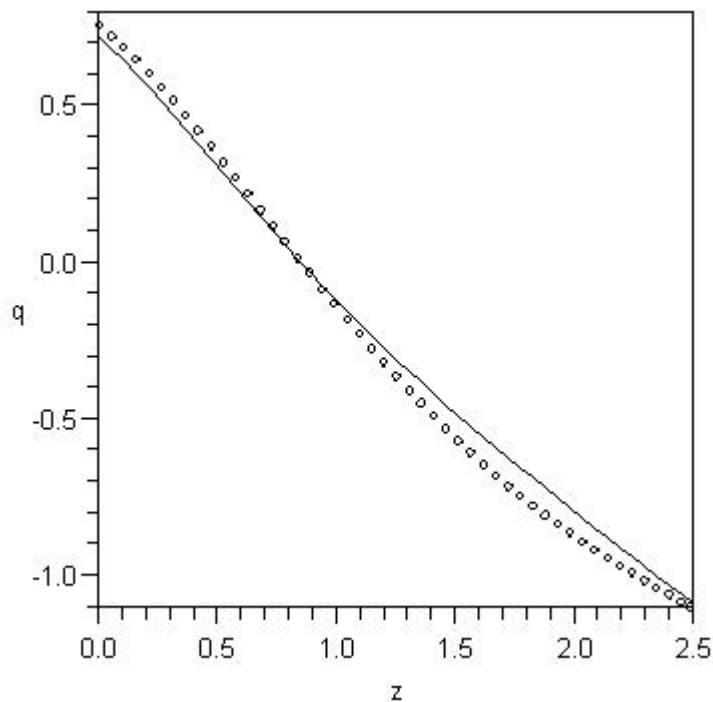


Рисунок 11. Результаты расчета зависимости космического ускорения от красного смещения с учетом (сплошная линия) и без учета (точки) наличия материи.

Рождение материи также не приводит к заметному изменению времени смены эпох замедления – ускорения.

5. Статическая изотропная метрика

Рассмотрим статическую сферически-симметричную метрику. Наиболее общее выражение для пространственно-временного интервала преобразованием координат

$$x'^0 = x^0 + \varphi(x^m), \quad x'^m = x^m$$

с равным единице якобианом может быть приведено к виду [8]:

$$ds^2 = F(r)(dx^0)^2 - \frac{G(r)}{r^2}(\bar{x} \cdot d\bar{x})^2 - C(r)(d\bar{x} \cdot d\bar{x})$$

Связь (1.1) инвариантна относительно таких преобразований, но теперь, в отличие от *ОТО*, ее наличие не позволяет уменьшить количество искомым компонент метрики до двух.

Используя символы Кронекера δ_{mn} , запишем метрический тензор $g_{\mu\nu}$ в виде:

$$g_{00} = F(r), \quad g_{0m} = 0, \quad g_{mn} = -C(r) \cdot \delta_{mn} - G(r) \frac{x_m x_n}{r^2}, \quad x_m \equiv x^m, \quad (5.1)$$

$$g(r) = \det g_{\mu\nu} = -FC^2(C + G).$$

Тензор $g^{\mu\nu}$ обратный метрическому тензору:

$$g^{00} = \frac{1}{F(r)}, \quad g^{0m} = 0, \quad g^{mn} = -\frac{1}{C(r)} \delta^{mn} + \frac{G(r)}{C(C + G)} \frac{x^m x^n}{r^2}. \quad (5.2)$$

$$g_{mn} g^{nk} = \delta_m^k.$$

При наличии связи (1.1) удобнее исходить не из уравнений, получаемых при варьировании действия по компонентам метрики, а выбрать в качестве одной из варьируемых функций $\Delta(r) = \sqrt{-g(r)}$.

Связь дает следующий вклад в действие (2.1):

$$\Lambda = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\nu} = -\frac{\Phi'(r)g'(r)}{2(C + G)g} = -\frac{\Phi'(r)\Delta'(r)}{\Delta^3} FC^2 \quad (5.3)$$

(Штрих здесь и далее обозначает дифференцирование по r).

Остальные члены можно найти, используя известные результаты расчетов [8,11].
Скалярная кривизна и элемент объема общековариантны, поэтому их можно вычислить, используя «сферические» координаты.

В «сферических» координатах пространственно-временной интервал:

$$ds^2 = F(r)(dx^0)^2 - G(r)dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

По аналогии со «стандартной» формой [8] запишем его следующим образом:

$$ds^2 = F(r)(dx^0)^2 - A(r)dr^2 - r^{*2}(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.4)$$

где $A(r) = G(r) + C(r)$, $r^*(r) = rC^{1/2}(r)$.

Для данной метрики неисчезающие компоненты связности несколько отличаются от соответствующих компонент «стандартной» формы [8]:

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{F'}{2F}, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{A'}{2A}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r^* r'^*}{A}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r^* r'^* \sin^2 \theta}{A}, \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{F'}{2A},$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{r^{*'}}{r^*}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{r^{*'}}{r^*}, \quad \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \operatorname{ctg}\theta.$$

Соответственно этому изменяется выражение для тензора кривизны.

Используя выражения для компонент связности, найдем скалярную кривизну:

$$R = \frac{1}{2F} \left(\frac{F'}{A} \right)' + \frac{1}{2A} \left(\frac{F'}{F} \right)' + \frac{2}{r^{*2}} \left(\frac{r^* r^{*'}}{A} \right)' + \frac{2}{A} \left(\frac{r^{*'}}{r^*} \right)' - \frac{2}{r^{*2}} + \frac{2}{A} \left[\left(\frac{r^{*'}}{r^*} \right)^2 + \frac{r^{*'} F'}{r^* F} \right].$$

Выделяя дивергентный член, можно записать ее в виде:

$$R = \frac{1}{r^{*2} \sqrt{AF}} \frac{d}{dr} \left[r^{*2} \sqrt{AF} \left(\frac{F'}{AF} + \frac{4r^{*'}}{r^* A} \right) \right] - 2 \left[\frac{r^{*'} F'}{r^* AF} + \frac{1}{A} \left(\frac{r^{*'}}{r^*} \right)^2 + \frac{1}{r^{*2}} \right]. \quad (5.5)$$

Действие для гравитационного поля:

$$S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int (R + \Lambda) \sqrt{AF} r^{*2} \sin\theta dr d\theta d\varphi dx^0.$$

Подставляя сюда выражение (5.5) для R и (5.3) для Λ , опуская дивергентный член и учитывая, что $A = \Delta^2 / FC^2$, получим:

$$S_{gr} = \frac{c^3}{8\pi G} \int \left(\frac{\Delta}{r^{*2}} + \frac{r^{*2} F}{\Delta r^4} (r^{*'})^2 + \frac{1}{\Delta r^4} r^{*3} r^{*'} F' + \frac{\Phi' \Delta' r^{*4} F}{2\Delta^2 r^4} \right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi dx^0.$$

Вместо r введем переменную $\xi = r^3$, тогда действие примет вид:

$$S_{gr} = \frac{3c^3}{8\pi G} \int \left(\frac{\Delta}{9r^{*2}} + \frac{Fr^{*2}}{\Delta} \left(\frac{dr^*}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{\Delta} r^{*3} \frac{dr^*}{d\xi} \frac{dF}{d\xi} + \frac{Fr^{*4}}{2\Delta^2} \frac{d\Phi}{d\xi} \frac{d\Delta}{d\xi} \right) d\xi \sin\theta d\theta d\varphi dx^0.$$

Из принципа наименьшего действия найдем уравнения гравитационного поля в свободном от материи пространстве:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^{*4} F}{\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} \right) = 0, \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{9r^{*2}} - \frac{r^{*2}}{\Delta^2} \left(\frac{dr^*}{d\xi} \right)^2 F - \frac{r^{*3}}{\Delta^2} \frac{dr^*}{d\xi} \frac{dF}{d\xi} - \frac{1}{2\Delta^2} \frac{d}{d\xi} \left(r^{*4} F \frac{d\Phi}{d\xi} \right) = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{r^{*2}}{\Delta} \left(\frac{dr^*}{d\xi} \right)^2 - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^{*3}}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) + \frac{r^{*4}}{2\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} \frac{d\Phi}{d\xi} = 0, \quad (5.8)$$

$$-\frac{2\Delta}{9r^{*3}} - 2r^* \frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^* F}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) - r^{*3} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{dF}{d\xi} \right) + 2 \frac{r^{*3} F}{\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} \frac{d\Phi}{d\xi} = 0. \quad (5.9)$$

Из уравнения (5.6) следует:

$$\frac{r^{*4} F}{\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} = \alpha, \quad (5.6')$$

где α – постоянная с размерностью длины.

Умножим уравнение (5.7) на 2Δ , вычтем из результата - (5.8), умноженное на $2F$, и сложим результат с уравнением (5.9), умноженным на r^* , после несложных преобразований приведем уравнение к виду:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{r^{*4}}{\Delta} \left(\frac{dF}{d\xi} + F \frac{d\Phi}{d\xi} \right) \right] = 0.$$

Отсюда следует:

$$\frac{r^{*4} F}{\Delta} \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{d\xi} + \frac{d\Phi}{d\xi} \right) = \beta,$$

где β – еще одна постоянная с размерностью длины. Полагая $\beta = \sigma \cdot \alpha$, где σ численный множитель, и используя (5.6') это уравнение можно записать в виде:

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{d\xi} + \frac{d\Phi}{d\xi} = \sigma \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\xi}, \quad \sigma = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Учитывая, что функция $\Phi(r)$ определена с точностью до постоянной, найдем:

$$\Phi = -\ln(F\Delta^{-\sigma}). \quad (5.7')$$

Уравнение (5.8) перепишем следующим образом:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^{*2}}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) = \frac{r^{*3}}{2\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\xi} \frac{d\Phi}{d\xi}. \quad (5.8')$$

После подстановки этого выражения в уравнение (5.9) оно примет вид:

$$r^{*4} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{dF}{d\xi} \right) + 2r^{*2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{Fr^*}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) - 4 \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{r^* dr^*}{d\xi} \right)^2 + r^{*2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{r^*}{\Delta} \frac{dr^*}{d\xi} \right) \right] F + \frac{2\Delta}{9r^{*2}} = 0$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{r^{*6}}{\Delta} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{F}{r^{*2}} \right) \right] + \frac{2\Delta}{9r^{*2}} = 0.$$

Интегрируя это уравнение по ξ , получим:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{F}{r^{*2}} \right) - \beta_1 \frac{\Delta}{r^{*6}} + \frac{2}{9} \frac{\Delta}{r^{*6}} \int_0^\xi \frac{\Delta}{r^{*2}} d\xi = 0. \quad (5.9')$$

где $\beta_1 = \left[\frac{r^{*6}}{\Delta} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{F}{r^{*2}} \right) \right]_{\xi=0}$ – еще одна постоянная с размерностью длины.

Таким образом, решение исходной системы уравнений зависит от выбора значений трех постоянных α , β_1 , σ .

Прежде всего, рассмотрим случай, когда $\alpha = 0$. В этом случае из (5.6') следует

$$\Delta(r) = \text{const} = \Delta(\infty) = 1.$$

Далее последовательно из (5.7'), (5.8'), (5.9') найдем

$$\Phi(r) = -\ln F(r).$$

$$\frac{r^*(r)}{r} = \text{const} = \frac{r^*(r)}{r} \Big|_{r=\infty} = 1.$$

$$F(r) = 1 - \frac{\beta_1}{r}.$$

Это решение по форме совпадает с решением Шварцшильда, однако имеется принципиальное отличие, связанное с наличием скаляра $\Phi(r)$. Его значение на гравитационном радиусе стремится к бесконечности. С одной стороны это означает, что решение нельзя продолжить за гравитационный радиус, а с другой стороны энергия гравитационного поля также стремится к бесконечности (Приложение П.8). Следовательно, это решение оказывается нефизическим, и следует принять $\beta_1 = 0$, решение является метрикой Минковского.

Положим далее $\beta_1=0$ для того, чтобы метрика Минковского могла быть решением данной системы уравнений (в случае, когда константа α равна нулю).

Интегрируя уравнение (5.9') еще раз, представим функцию $F(r)$ в виде:

$$F = \frac{2}{9} r^{*2} \int_{\xi}^{\infty} \left(\int_0^{\xi} \frac{\Delta}{r^{*2}} d\xi \right) \frac{\Delta}{r^{*6}} d\xi. \quad (5.9'')$$

Подставляя выражение для производной Δ из уравнения (5.6'), перепишем уравнение (5.8') в виде:

$$\frac{d}{dr^*} \frac{1}{V} = \frac{3\alpha}{2r^* F} \frac{d\Phi}{dr^*}, \quad V = \frac{\Delta(r^*) d\xi}{3r^{*2} dr^*}.$$

Переходя во всех соотношениях от производных по $\xi=r^3$ к производным по r^* и вводя безразмерные координаты r/α и r^*/α (сохраняя для них прежние обозначения r и r^*) исходную систему уравнений можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dr^*} = \frac{3V(r^*)}{Fr^{*2}}, \quad (5.10)$$

$$V(r^*) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \int_{r^*}^{\infty} \frac{1}{r^* F} \frac{d\Phi}{dr^*} dr^*}, \quad \Phi = -\ln(F\Delta^{-\sigma}), \quad (5.11)$$

$$F(r^*) = 2r^{*2} \int_{r^*}^{\infty} \left(\int_{r^*_{\min}}^{r^*} V(r^*) dr^* \right) \frac{1}{r^{*4}} V(r^*) dr^*. \quad (5.12)$$

$$\frac{\Delta(r^*) r^2}{r^{*2}} \frac{dr}{dr^*} = V(r^*). \quad (5.13)$$

Отличное от нуля значение $r^*_{\min} = r^*(0)$ означает, вообще говоря, наличие *края* у пространственно-временного многообразия.

Рассмотрим поведение метрики при $r^*_{\min} = 0$ и малых значениях r^* . Из (5.12) следует, что если существует интеграл

$$2 \int_0^{\infty} \left(\int_0^{r^*} V(r^*) dr^* \right) \frac{V(r^*)}{r^{*4}} dr^* = b > 0, \quad (5.14)$$

то при малых r^* функция $F(r^*) \approx b \cdot r^{*2}$. Тогда полагая $V(r^*) \approx b_1 \cdot r^{*v} \geq 0$, $\Delta(r^*) \approx b_2 \cdot r^{*\delta} \geq 0$ и подставляя эти выражения в (5.10, 5.13), получим:

$$v = 3, \quad b_1 = \frac{2b}{2 - \sigma\delta}, \quad \delta = \frac{6}{2 - \sigma\delta} > 0. \quad (5.15)$$

Из последнего соотношения следует:

$$\delta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 6\sigma}}{\sigma}.$$

поэтому $\sigma \leq 1/6$.

Интегрируя уравнение (5.13) найдем при малых значениях r, r^* :

$$r^3(r^*) = 3 \int_0^{r^*} \frac{V(r^*)}{\Delta(r^*)} r^{*2} dr^* \approx 3 \frac{b_1}{b_2} \int_0^{r^*} r^{*(5-\delta)} dr^*. \quad (5.16)$$

Последний интеграл существует только при $\delta < 6$. В этом случае

$$\delta = \frac{1 - \sqrt{1 - 6\sigma}}{\sigma}, \quad \sigma < \frac{1}{6}. \quad (5.17)$$

Рассмотрим теперь выражение для энергии статического изотропного гравитационного поля (см. Приложение I). В этом случае

$$E = \frac{c^4 \alpha}{4G} \left[\frac{r^{*2} F(r^*)}{V(r^*)} \frac{d \ln(F \Delta^{-\sigma})}{dr^*} \Big|_{r^*_{\min}}^{r^* \rightarrow \infty} - 3 \ln F \Delta^{-\sigma}(r^*_{\min}) \right]. \quad (\text{П.8})$$

Последний член в этом соотношении имеет логарифмическую особенность при $r^*_{\min}=0$. Энергия будет иметь конечное значение лишь при $r^*_{\min} \neq 0$, то есть при *наличии края*. Это возможно, только при значении $\sigma = 1/6$.

Величина r^*_{\min} является независимым параметром и для её определения необходимы добавочные соображения. Положим, во-первых, в соответствии с *принципом Маха*, что инертная масса M_{in} связана с полной энергией гравитационного поля E вне края формулой Эйнштейна $E=M_{in}c^2$. Во-вторых, в соответствии с *экспериментальными данными* примем, что эта инертная масса должна совпадать по величине с массой гравитационной $M_{in} = M_{gr}$. И, наконец, на основании *принципа соответствия с ОТО* положим при больших значениях r^* коэффициент при первом члене разложения функции $F(r^*)$ по степеням $1/r^*$ равным отношению гравитационного радиуса к α

$$F(r^*) = 1 - \frac{r_{gr}}{\alpha} \frac{1}{r^*} + \dots = 1 - \frac{2M_{gr}G}{c^2 \alpha} \frac{1}{r^*} + \dots \quad (5.18)$$

В этом случае соотношение (П.8) переходит в уравнение, определяющее величину r^*_{\min} .

$$\frac{r_{gr}}{\alpha} = \frac{2r^*_{\min} F(r^*_{\min})}{3V(r^*_{\min})} - \ln \frac{F(r^*_{\min})}{\Delta^{1/6}(r^*_{\min})}. \quad (5.19)$$

Решение системы уравнений (5.10) - (5.13), (5.19) можно найти методом последовательных приближений. Начиная с пробной функции $V^{(0)}(r^*)$ и выбранном начальном значении r^*_{\min} можно найти в первом приближении из (5.12) функцию $F^{(0)}(r^*)$, а затем из (5.10) - $\Delta^{(0)}(r^*)$ и новое значение $V^{(1)}(r^*)$ из (5.11). Продолжаем этот процесс до получения на N-ном шаге значений искомых функций с требуемой точностью. Значение размера r^*_{\min} найдем из уравнения (5.19). А затем из уравнения (5.13) найдем функцию $r(r^*)$.

Построим пробную функцию. Если при больших значениях r^* справедливо (5.18), то тогда из (5.10, 5.11) следует $V(r^*) \approx 1 - v/r^{*2} + \dots$. Поскольку при наличии края поведение искомых функций при малых значениях r^* не определено, естественно предположить, что относительный размер r^*_{\min} больше единицы. При $r^*_{\min} \geq 1$, зададим пробную функцию следующим образом:

$$V^{(0)}(r^*) = 1 - v/r^{*2}. \quad (5.20)$$

Подставляя это выражение в (5.12), найдем

$$F^{(0)}(r^*) = 1 - \frac{2}{3} \left(r^*_{\min} + \frac{v}{r^*_{\min}} \right) \frac{1}{r^*} + \frac{2}{5} \left(r^*_{\min} + \frac{v}{r^*_{\min}} \right) \frac{v}{r^{*3}} - \frac{v^2}{3} \frac{1}{r^{*4}}. \quad (5.21)$$

В этом приближении, исходя из принципа соответствия, получим

$$\frac{r_{gr}}{\alpha} = \frac{2}{3} \left(r^*_{\min} + \frac{v}{r^*_{\min}} \right). \quad (5.22)$$

Постоянную величину ν можно выбрать так, чтобы в точке $r^*=r^*_{min}$ значения пробной функции и первого приближения совпадали $V^{(0)}(r^*_{min}) = V^{(1)}(r^*_{min})$. Подставляя (5.20), (5.21) в (5.10), найдем

$$\ln \Delta^{(0)}(r^*) = -3 \int_{r^*}^{\infty} \frac{V^{(0)}(r^*)}{(r^*)^2 F^{(0)}(r^*)} dr^*, \quad (5.23)$$

а затем из (5.11)

$$V^{(1)}(r^*) = \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{r^* F^{(0)}(r^*)} - \frac{3}{2} \int_{r^*}^{\infty} \left(1 + \frac{V^{(0)}(r^*)}{2r^* F^{(0)}(r^*)} \right) \frac{dr^*}{(r^*)^2 F^{(0)}(r^*)} \right)^{-1}. \quad (5.24)$$

В этом случае

$$\nu = (1 - V^{(1)}(r^*_{min})) r^*_{min}{}^2. \quad (5.25)$$

Это уравнение определяет ν в зависимости от r^*_{min} .

В более высоких приближениях при вычислениях использовались сплайн аппроксимации. После пяти последовательных приближений, решая уравнение (5.19), найдем (при использовании в расчетах шести интервалов) с погрешностью в доли процента

$$r^*_{min} \approx 1.74.$$

Это значение, как и предполагалось, больше единицы. В размерном виде

$$r^*_{min} \approx 0.935 r_{gr}.$$

Результаты расчетов представлены в Таблице 4.

$\sigma=1/6 ; x_{max} = 0.575 ; r_{gr}/\alpha = 1.859$				
$x=\alpha/r^*$	$V(x)$	$F(x)$	$\Delta(x)$	$C^{-1/2}(x)=r(x)/r^*$
0	1	1	1	1
0.1	0.9875	0.8160	0.7184	1.1792
0.2	0.9346	0.6381	0.4814	1.3523
0.3	0.8202	0.4746	0.2980	1.4556
0.4	0.6471	0.3386	0.1721	1.4378
0.5	0.4596	0.2366	0.0962	1.2288
0.575	0.3413	0.1813	0.0543	0

Таблица 4. Решение системы уравнений (5.10..5.13) при значении $\sigma=1/6$.

Значение одной из инвариантных метрических функций - $C(r)$ неограниченно возрастает при приближении к краю, то есть на краю имеется неустранимая сингулярность.

Таким образом, при наличии связи (1.1) имеется стационарное распределение центрально-симметричного гравитационного поля, для которого выполняется равенство инертной (определенной в соответствии с принципом Маха) и гравитационной массы. При $r \gg r_{gr}$ найденное решение асимптотически стремится к решению Шварцшильда.

6. Основы квантовой теории тяготения

Формулировка основных положений квантовой теории, принципиально невозможна без привлечения теории классической [18]. Для построения квантовой теории следует, прежде всего, определить динамические степени свободы. Как показано в разделе 3, в

квазиклассической теории тяготения существует единственное однородное пространство-время с изотропной метрикой вида

$$ds^2 = g_{00}(x^0)(dx^0)^2 - \gamma^{1/3}(x^0)dx^m dx^n \delta_{mn}.$$

Для этой метрики выражения для символов Кристоффеля и отличных от нуля компонент тензора Риччи имеют вид:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2g_{00}} \frac{dg_{00}}{dx^0}, \Gamma_{0l}^0 = 0, \Gamma_{nl}^0 = \frac{1}{2g_{00}} \frac{d\gamma^{1/3}}{dx^0} \delta_{nl}, \Gamma_{00}^m = 0, \Gamma_{0l}^m = \frac{1}{6\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \delta_l^m, \Gamma_{nl}^m = 0, \quad (6.1)$$

$$R_0^0 = -\frac{1}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\gamma\sqrt{g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) - \frac{1}{12g_{00}} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx^0} \right)^2, \quad (6.2)$$

$$R_k^p = -\frac{1}{6\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\gamma}{dx^0} \right) \delta_k^p. \quad (6.3)$$

В общем случае действие гравитационного поля в квазиклассической теории тяготения имеет вид (2.1)

$$S_{gr} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int (R + Q) \sqrt{-g} d^4x, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu}.$$

Подставляя выражения для скалярной кривизны и опуская полные производные, не дающие вклада в уравнение движения, найдем выражение для действия однородного изотропного пространства объема V

$$S_{gr} = \int L dt = \frac{c^2}{16\pi G} \int \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dt} \frac{d\Phi}{dt} \right] \sqrt{\gamma} dt V, \quad (6.4)$$

где L - лагранжиан гравитационного поля и введено обозначение $cdt = \sqrt{g_{00}} dx^0$.

Следует отметить, что в выражении (6.4) мы изменили по сравнению с (2.1) знак действия с минуса на плюс. В ОТО доказано [11], что скалярная кривизна должна входить в действие со знаком минус, однако для однородного пространства (3.1) это доказательство не проходит. При наличии знака минус перед интегралом (6.4) стандартные рассуждения приводят к выводу, что это действие не может иметь минимум. Правильное значение знака – плюс.

В планковских единицах объем однородного изотропного пространства представим в виде

$$V = l_{pl}^3 \lambda = \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{3/2} \lambda, \quad \lambda = const.$$

Тогда исходное действие для квантования примет вид

$$S_{qgr} = \int L dt = A \int \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dt} \frac{d\Phi}{dt} \right] \sqrt{\gamma} \lambda dt, \quad A = \frac{\hbar t_{pl}}{16\pi}, \quad t_{pl} = \left(\frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2}. \quad (6.5)$$

В отличие от классической теории, в которой уравнения движения не зависят от величины действия, для перехода к действию квантовой теории необходимо ввести конкретное значение λ . В квазиклассической теории в решении уравнений гравитации фигурирует параметр $(\gamma_{\min})^{1/2}$ – минимальное значение объемного фактора (3.21). Если принять

$$\lambda = \left(\sqrt{\gamma_{\min}} \right)^{-1}, \quad (6.6)$$

то действие (6.5) примет вид

$$S_{qgr} = \int L dt = A \int \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma g_{00}}} \frac{d\sqrt{\gamma g_{00}}}{dt} \frac{d\Phi}{dt} \right] \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_{\min}}} dt, \quad A = \frac{\hbar t_{pl}}{16\pi}. \quad (6.7)$$

В этом случае действие оказывается масштабно инвариантным относительно изменения величины объемного фактора.

Исходя из действия (6.7), проведем каноническое квантование гравитационного поля.

Введем масштабно инвариантные обобщенные зависящие от времени координаты

$$q^1 = \sqrt{\gamma/\gamma_{\min}}, \quad q^2 = \ln \sqrt{g_{00} \gamma/\gamma_{\min}}, \quad q^3 = \Phi, \quad 0 < q^1 < \infty, \quad -\infty < q^2, q^3 < \infty \quad (6.8)$$

их скорости $v^i = \dot{q}^i$ (производные по времени) и сопряженные им импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} : p_1 = A \frac{4v^1}{3q^1}, \quad p_2 = Aq^1 v^3, \quad p_3 = Aq^1 v^2. \quad (6.9)$$

Отсюда найдем скорости как функции координат и импульсов

$$v^1 = \frac{3q^1 p_1}{4A}, \quad v^2 = \frac{p_3}{Aq^1}, \quad v^3 = \frac{p_2}{Aq^1}. \quad (6.10)$$

Найдем энергию гравитационного поля в лагранжевом формализме

$$E = \frac{\partial L}{\partial v^i} v^i - L = A \left(\frac{2}{3q^1} (v^1)^2 + q^1 v^2 v^3 \right). \quad (6.11)$$

Исключая скорости из этого соотношения с помощью (6.10) найдем гамильтониан гравитационного поля

$$H_{gr} = \frac{1}{A} \left(\frac{3}{8} q^1 (p_1)^2 + \frac{1}{q^1} p_2 p_3 \right). \quad (6.12)$$

Переходя в соответствии с правилами канонического квантования от координат и импульсов к их операторам [18], найдем волновое уравнение гравитационного поля

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_{gr} \Psi. \quad (6.13)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{3\pi\hbar}{t_{pl}} \left(q^1 \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \right)^2 q^1 + \frac{16}{3q^1} \frac{\partial}{\partial q^2} \frac{\partial}{\partial q^3} \right) \Psi.$$

Гамильтониан зависит только от одной координаты q^1 , поэтому волновую функцию можно представить в виде суперпозиции произведений волновых собственных функций энергии E и импульсов p_2, p_3 .

$$\Psi = \int a(E) b(p_2) c(p_3) \exp \frac{i}{\hbar} (-Et + p_2 q^2 + p_3 q^3) \varphi_E dE dp_2 dp_3, \quad (6.14)$$

где

$$E \varphi_E = -\frac{6\pi\hbar}{t_{pl}} \left(q^1 \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial q^1} - \frac{8}{3q^1} \frac{p_2 p_3}{\hbar^2} \right) \varphi_E. \quad (6.15)$$

Обозначим штрихом производную по переменной $x = q^1$, тогда уравнение (6.15) примет вид

$$x \varphi_E'' + \varphi_E' - \frac{8}{3x} \frac{p_2 p_3}{\hbar^2} \varphi_E + \frac{Et_{pl}}{6\pi\hbar} \varphi_E = 0. \quad (6.16)$$

Это уравнение относится к типу уравнений, разрешимых в функциях Бесселя [19, с. 245]. Если

$$w'' + \frac{1-2\alpha}{x} w' + \left[(\beta\gamma x^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - v^2 \gamma^2}{x^2} \right] w = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma - const,$$

то $w = x^\alpha Z_\nu(\beta x^\gamma)$ – бесселева функция 1-го, 2-го или 3-го рода. Сравнивая последние два уравнения, найдем

$$\alpha = 0, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad \beta = \pm \left(\frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar} \right)^{1/2}, \quad v = \pm 4 \sqrt{\frac{2p_2 p_3}{3\hbar^2}}, \quad \varphi_E = Z_\nu(\beta \sqrt{x}), \quad x = q^1. \quad (6.17)$$

Решения уравнения (6.16) будут убывать при больших значениях аргумента только в том случае, когда порядок функций Бесселя будет действительным. Для этого необходимо, чтобы оба импульса p_2 и p_3 имели либо положительное, либо отрицательное значение. Кроме того, решения будут действительными при $\beta > 0$ и ограниченными при $x = 0$, если $v > 0$. Таким образом, единственным решением уравнения (6.16), удовлетворяющим всем этим условиям, является функция

$$\varphi_E = J_\nu \left(\sqrt{\frac{2Et_{pl}}{3\pi\hbar}} q^1 \right), \quad v = 4 \sqrt{\frac{2p_2 \cdot p_3}{3\hbar^2}}, \quad p_2 \cdot p_3 \geq 0. \quad (6.18)$$

7. Заключение

Отличительной особенностью изложенной теории, во-первых, является то, что пространственно – временное многообразие с краем помимо метрики и связности наделяется всеми свойствами материальной среды. Причем гравитационное поле является основным источником энергии Вселенной. Следствием этого является наблюдаемая высокая степень однородности и изотропии Вселенной. Другая особенность теории состоит в возможности построения многообразий свободных от сингулярностей.

Сингулярным при этом является край многообразия (момент начала эволюции Вселенной или поверхность вблизи гравитационного радиуса), на котором те или иные наблюдаемые инвариантные величины принимают бесконечные значения. Этот факт следует рассматривать как указание на необходимость учета вблизи края квантовых эффектов.

Точности имеющихся астрономических наблюдений пока недостаточно, чтобы на их основании сделать выбор между предсказаниями ОТО и предложенной теории тяготения. Однако тот факт, что за истекшие двадцать лет так и не была установлена физическая природа «темной энергии», «темной материи» и «инфлатонов», а на БАК не обнаружено новых частиц с подходящими свойствами, заставляет усомниться в самом их существовании.

С точки зрения изложенной в статье теории все наблюдаемые эффекты, связываемые с «темной энергией» и «темной материей», являются лишь проявлениями материальной сущности гравитационного поля. С одной стороны в настоящую эпоху второго ускорения гравитационное поле имеет отрицательное давление, то есть ведет себя подобно гипотетической «темной энергии». С другой стороны в галактических масштабах плотность энергии гравитационного поля превышает среднюю плотность энергии материи и приводит к увеличению скорости наблюдаемых гравитационно-связанных объектов подобно «темной материи».

Начальное расширение (инфляция) является имманентным свойством процесса эволюции структуры пространства-времени, связанным с наличием гравитационного поля. В этот период времени давление гравитационного поля само по себе отрицательно и поэтому надобность в наличии, каких либо инфлатонов, отпадает.

Глобальная плотность энергии Вселенной в настоящее время на 94.5% состоит из плотности энергии гравитационного поля и лишь 5.5% это вклад в неё всех известных видов материи. Причем со временем первый будет расти, а второй убывать.

При отсутствии в природе гипотетических форм материи, космология ОТО (модель Фридмана) противоречит результатам экспериментов, в то время как предсказания предложенной теории с ними согласуются.

Установлено, что максимальная глобальная плотность энергии во Вселенной была меньше планковской на 64 порядка и значительно ниже той, которая в настоящее время достигнута на БАК!

Приложение I. Энергия статического изотропного гравитационного поля.

В силу тождества Бианки плотность энергии гравитационного поля T_{μ}^{ν} должна удовлетворять соотношению:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{-g} T_{\mu}^{\nu}) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^{\mu}} T^{\lambda\rho} = 0.$$

В случае статического поля сохраняется энергия гравитационного поля:

$$E = \int \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{-g} T_0^{\nu}) d^4x = \int T_0^{\nu} \sqrt{-g} dS_{\nu}, \quad (\text{П.1})$$

где в соответствии с (2.3)

$$T_0^{\lambda} = -\frac{c^4}{16\pi G} \left[\delta_0^{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\nu}} \right) - g^{\lambda\eta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^0} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\eta}} - g^{\lambda\eta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\eta}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^0} \right]. \quad (\text{П.2})$$

В статическом поле последние два члена в этом соотношении равны нулю и (П.1) с учетом (П.2) принимает вид:

$$E = -\frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\nu}} \right) dV. \quad (\text{П.3})$$

Подставляя сюда выражения для компонент метрического тензора из (5.2) получим:

$$E = \frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{C+G} \frac{d\Phi}{dr} \right) dV = \frac{c^4}{4G} \left[\int_0^{\infty} \sqrt{-g} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{(C+G)} \frac{d\Phi}{dr} \right) dr \right]. \quad (\text{П.4})$$

Учтем теперь, что по определению, а также в силу соотношения (5.13)

$$C(r^*) + G(r^*) = \frac{r^4 (\sqrt{-g})^2}{r^{*4} F(r^*)}, \quad r^2 dr = \frac{V(r^*)}{\sqrt{-g}} r^{*2} dr^*. \quad (\text{П.5})$$

Подставляя эти выражения в (П.4) и переходя к безразмерной координате r^*/α , получим:

$$E = \frac{c^4 \alpha}{4G} \left[\frac{r^{*2} F(r^*)}{V(r^*)} \frac{d\Phi}{dr^*} \Big|_{r^*_{\min}}^{r^* \rightarrow \infty} - \int_{r^*_{\min}}^{\infty} \frac{r^{*2} F(r^*)}{V(r^*) \sqrt{-g}} \frac{d\Phi}{dr^*} \frac{d\sqrt{-g}}{dr^*} dr^* \right]. \quad (\text{П.6})$$

В силу соотношений (5.7'), (5.10)

$$\Phi = -\ln(F\Delta^{-\sigma}), \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d\sqrt{-g}}{dr^*} = \frac{3V}{r^{*2} F}, \quad \Delta = \sqrt{-g}. \quad (\text{П.7})$$

С учетом этих соотношений

$$E = \frac{c^4 \alpha}{4G} \left[-\frac{r^{*2}}{V(r^*)} \frac{dF}{dr^*} \Big|_{r^*_{\min}}^{r^* \rightarrow \infty} - 3 \ln F \Delta^{-\sigma} (r^*_{\min}) \right]. \quad (\text{П.8})$$

В соотношении фигурируют граничные значения производной функции $F(r^*)$.

Учитывая поведение полей на бесконечности и тот факт, что в силу соотношения (5.12) при $r^* = r^*_{\min}$ $dF/dr^* = 2F/r^*_{\min}$, найдем:

$$-\frac{r^{*2}}{V(r^*)} \frac{dF}{dr^*} \Big|_{r^*_{\min}}^{r^* \rightarrow \infty} = -\frac{r_{gr}}{\alpha} + \frac{2F(r^*_{\min}) r^*_{\min}}{V(r^*_{\min})}. \quad (\text{П.9})$$

Список литературы

1. D. Hilbert. Die Grundlagen der Physik, Nachrichten K. Gesellschaft Wiss. Gottingen, Math.-phys. Klasse, 1915, Heft 3, S. 395.
2. А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, Т. 1, Наука, Москва (1965).
3. П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, Наука, Москва (1967).
4. A. G. Riess et al., Astron. J. 116, 1009 (1998).
5. P. Schmidt et al., Astrophys. J. 507, 46 (1998).
6. S. Perlmutter et al., Astrophys. J. 517, 565 (1999).
7. С. Вайнберг, Космология, УРСС Либроком, Москва (2013); S. Weinberg, Cosmology, Oxford, New York (2008).
8. С. Вайнберг, Гравитация и космология, Мир, Москва (1975); S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley and Sons Inc., New York (1972).
9. Ю. Л. Кокурин, Квантовая электроника 33, №1 (2003), с. 45-47.
10. Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Гидродинамика, Наука, Москва (1986).
11. Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля, Наука, Москва (1973); L.D. Landau, E.M. Lifshitz, The classical theory of fields, Vol.2, Oxford Pergamon Press (1971).
12. А. З. Петров, Пространства Эйнштейна, ФМЛ, Москва (1961).
13. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, Гравитация, Т. 1-3, Мир, Москва (1977); Ch. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler. Gravitation. San Francisco (1973).
14. J. Beringer et al. (Particle Data Group), Phys. Rev., D86, 010001 (2012).
15. Ch. A. Egan, Ch. H. Lineweaver; arXiv: astro-ph. CO/0909.3983v.1 (2009).
16. D. N. Spergel et al., Astrophys. J. 5 (2007); arXiv: astro-ph/0603449v.2 (2007).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, Наука, Москва (1964).
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, ГИФМЛ, (1963).
19. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, Специальные функции, Наука, Москва, (1968). E. Janke, F. Emde, F. Lösch, Tafeln höherer funktionen, Stuttgart, (1960).