

Swobodny spadek na wirującą planetę

Zbigniew Osiak

E-mail: zbigniew.osiak@gmail.com

<http://orcid.org/0000-0002-5007-306X>

http://vixra.org/author/zbigniew_osiak

Streszczenie

Rozszerzono zewnętrzną metrykę Schwarzschilda na przypadek wirującej planety, ograniczając się do odległości od centrum odpowiednio większych niż promień planety. Przedstawiono trójwymiarowe równania ruchu swobodnej cząstki. Zapisano przyspieszenie swobodnie spadającej cząstki na wirującą planetę w przypadku słabo zakrzywionej czasoprzestrzeni dla małych prędkości w postaci wektorowej umożliwiającej fizyczną interpretację poszczególnych członów. Wyznaczono wypadkowy moment obrotowy działający na cząstkę testową powodujący precesję jej momentu orbitalnego. Jako przykład podano między innymi wyrażenie dla pierwszej prędkości kosmicznej w przypadku orbity kołowej w płaszczyźnie równikowej.

Słowa kluczowe: ogólna teoria względności, metryka Schwarzschilda, metryka Kerra, równania ruchu, przyspieszenie Coriolisa, anomalny obrót peryhelium Merkurego, precesja momentu orbitalnego, precesja de Sittera, precesja Lensego-Thirringa, precesja Schiffa, satelita Gravity Probe B

01. Wprowadzenie

Rozszerzymy zewnętrzną metrykę Schwarzschilda na przypadek wirującej planety, ograniczając się do odległości od centrum odpowiednio większych niż promień planety. Przedstawimy trójwymiarowe równania ruchu swobodnej cząstki.

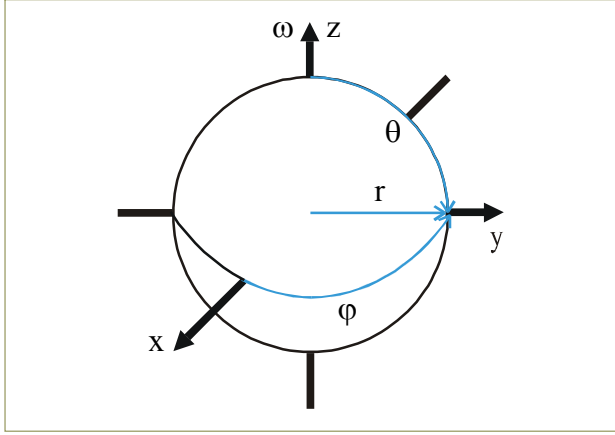
Zapiszemy przyspieszenie swobodnie spadającej cząstki na wirującą planetę w przypadku słabo zakrzywionej czasoprzestrzeni dla małych prędkości w postaci wektorowej umożliwiającej fizyczną interpretację poszczególnych członów.

Wyznamy wypadkowy moment obrotowy $m(\mathbf{r} \times \mathbf{a})$ działający na cząstkę testową o masie m powodujący precesję jej momentu orbitalnego.

Jako przykłady podamy między innymi:

1. Wyrażenie dla pierwszej prędkości kosmicznej w przypadku orbity kołowej w płaszczyźnie równikowej.
2. Uproszczoną postać równań ruchu swobodnej cząstki próbnej w polu grawitacyjnym wirującej planety w zmiennych (t, r, θ, φ) .
3. Uproszczoną postać równań ruchu swobodnej cząstki próbnej w polu grawitacyjnym niewirującej planety w zmiennych (t, r, θ, φ) .
4. Wartość prędkości rozchodzenia się światła według metryki Schwarzschilda w przypadku wirującej planety.

02. Zewnętrzna metryka Schwarzschilda w przypadku wirującej planety [9]



Układ nieprimowany obraca się wraz z planetą względem układu primowanego ze stałą prędkością kątową ω skierowaną wzdłuż osi Z . Mamy więc $\varphi = \varphi' - \omega t'$. Pozostałe współrzędne w obu układach są identyczne.

$$(ds')^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r'}\right)^{-1} (dr')^2 + r'^2 (d\theta')^2 + r'^2 \sin^2 \theta' (d\varphi')^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r'}\right) (dx'^4)^2, \quad r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

$$\begin{aligned} r &= r' & dr' &= dr \\ \theta &= \theta' & d\theta' &= d\theta \\ \varphi &= \varphi' - i^{-1} c^{-1} \omega x'^4 & d\varphi' &= d\varphi + i^{-1} c^{-1} \omega dx'^4 \\ x^4 &= x'^4 & dx'^4 &= dx^4 \end{aligned}$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + 2 i^{-1} c^{-1} \omega r^2 \sin^2 \theta d\varphi dx^4 + \left(1 - \frac{r_s}{r} - c^{-2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta\right) (dx^4)^2$$

Na podstawie formy metrycznej możemy wyznaczyć składowe kowariantnego tensora metrycznego i jego wyznacznik oraz składowe kontrawariantnego tensora metrycznego.

$$g_{rr} = g_{11} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}, \quad g_{\theta\theta} = g_{22} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = g_{33} = r^2 \sin^2 \theta,$$

$$g_{\varphi x^4} = g_{34} = i^{-1} c^{-1} \omega r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{x^4 \varphi} = g_{43} = i^{-1} c^{-1} \omega r^2 \sin^2 \theta,$$

$$g_{x^4 x^4} = g_{44} = 1 - \frac{r_s}{r} - c^{-2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta,$$

$$g = g_{11} g_{22} (g_{33} g_{44} - g_{34} g_{43}) = r^4 \sin^2 \theta \quad g_{33} g_{44} - g_{34} g_{43} = r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{r_s}{r}\right),$$

$$g^{11} = g_{11}^{-1} = 1 - \frac{r_s}{r}, \quad g^{22} = g_{22}^{-1} = r^{-2}, \quad g^{33} = \frac{g_{44}}{g_{33} g_{44} - g_{34} g_{43}},$$

$$g^{34} = g^{43} = \frac{-g_{34}}{g_{33} g_{44} - g_{34} g_{43}} = -i^{-1} c^{-1} \omega \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}, \quad g^{44} = \frac{g_{33}}{g_{33} g_{44} - g_{34} g_{43}} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}.$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 g_{44} \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\frac{g_{11}}{g_{44}} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{r^2}{g_{44}} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{g_{44}} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right] - \frac{2\omega r^2 \sin^2 \theta}{c^2 g_{44}} \frac{d\varphi}{dt} \right\}$$

03. Symbole Christoffela pierwszego rodzaju [9]:

| | |
|--|---|
| $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-2} \cdot \frac{r_s}{r^2}$ $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = -r$ $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} = -r \sin^2 \theta$ $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = -r^2 \sin \theta \cos \theta$ $\left[\begin{smallmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{r_s}{r^2} + \frac{1}{c^2} \cdot \omega^2 r \sin^2 \theta$ $\left[\begin{smallmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial \theta} = \frac{1}{c^2} \cdot \omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta$ $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = r$ $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} = r \sin^2 \theta$ $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{34}}{\partial r} = \frac{1}{ic} \cdot \omega r \sin^2 \theta$ | $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 3 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{43}}{\partial r} = \frac{1}{ic} \cdot \omega r \sin^2 \theta$ $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{r_s}{r^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \omega^2 r \sin^2 \theta$ $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = r^2 \sin \theta \cos \theta$ $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{34}}{\partial \theta} = \frac{1}{ic} \cdot \omega r^2 \sin \theta \cos \theta$ $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{34}}{\partial \theta} = \frac{1}{ic} \cdot \omega r^2 \sin \theta \cos \theta$ $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial \theta} = -\frac{1}{c^2} \cdot \omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta$ $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{34}}{\partial r} = -\frac{1}{ic} \cdot \omega r \sin^2 \theta$ $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{34}}{\partial \theta} = -\frac{1}{ic} \cdot \omega r^2 \sin \theta \cos \theta$ |
|--|---|

04. Symbole Christoffela drugiego rodzaju [9] (przybliżone wartości podano dla $r \gg r_s$):

| | |
|--|--|
| $\Gamma_{11}^1 = g^{11} \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right] = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \cdot \frac{r_s}{r^2} = -\left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{GM}{r^2} \approx -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{GM}{r^2}$ $\Gamma_{22}^1 = g^{11} \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right] = -\left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \cdot r \approx -r$ $\Gamma_{33}^1 = g^{11} \left[\begin{smallmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right] = -\left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \cdot r \sin^2 \theta \approx -r \sin^2 \theta$ $\Gamma_{34}^1 = \Gamma_{43}^1 = g^{11} \left[\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right] = -\left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \cdot \frac{1}{ic} \cdot \omega r \sin^2 \theta \approx -\frac{1}{ic} \cdot \omega r \sin^2 \theta$ $\Gamma_{44}^1 = g^{11} \left[\begin{smallmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right] = \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{r_s}{r^2} + \frac{1}{c^2} \cdot \omega^2 r \sin^2 \theta \right) \approx -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{GM}{r^2} + \frac{1}{c^2} \cdot \omega^2 r \sin^2 \theta$ $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = g^{22} \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{r}$ $\Gamma_{33}^2 = g^{22} \left[\begin{smallmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \right] = -\sin \theta \cos \theta$ $\Gamma_{34}^2 = \Gamma_{43}^2 = g^{22} \left[\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \right] = -\frac{1}{ic} \cdot \omega \sin \theta \cos \theta$ $\Gamma_{44}^2 = g^{22} \left[\begin{smallmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{c^2} \cdot \omega^2 \sin \theta \cos \theta$ | |
|--|--|

$$g^{33} + g^{34} \cdot \frac{\omega}{ic} = \frac{g_{44} - g_{34} \cdot \frac{\omega}{ic}}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{34}} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta},$$

$$g^{43} + g^{44} \cdot \frac{\omega}{ic} = \frac{-g_{34} + g_{33} \cdot \frac{\omega}{ic}}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{34}} = 0,$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = g^{33} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ & 3 \end{bmatrix} + g^{34} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ & 4 \end{bmatrix} = r \sin^2 \theta \cdot \left(g^{33} + g^{34} \cdot \frac{\omega}{ic} \right) = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{14}^3 = \Gamma_{41}^3 = g^{33} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ & 3 \end{bmatrix} + g^{34} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ & 4 \end{bmatrix} = \frac{\omega}{icr} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{r_s}{r} \cdot \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \right] \stackrel{r \gg r_s}{\approx} \frac{\omega}{c^2 r^2},$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = g^{33} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ & 3 \end{bmatrix} + g^{34} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ & 4 \end{bmatrix} = r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \left(g^{33} + g^{34} \cdot \frac{\omega}{ic} \right) = \text{ctg} \theta,$$

$$\Gamma_{24}^3 = \Gamma_{42}^3 = g^{33} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ & 3 \end{bmatrix} + g^{34} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{ic} \cdot \omega r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \left(g^{33} + g^{34} \cdot \frac{\omega}{ic} \right) = \frac{1}{ic} \cdot \omega \text{ctg} \theta,$$

$$\Gamma_{13}^4 = \Gamma_{31}^4 = g^{43} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ & 3 \end{bmatrix} + g^{44} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ & 4 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\Gamma_{14}^4 = \Gamma_{41}^4 = g^{43} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ & 3 \end{bmatrix} + g^{44} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{GM}{r^2} \cdot \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \stackrel{r \gg r_s}{\approx} \frac{1}{c^2} \cdot \frac{GM}{r^2},$$

$$\Gamma_{23}^4 = \Gamma_{32}^4 = g^{43} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ & 3 \end{bmatrix} + g^{44} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ & 4 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\Gamma_{24}^4 = \Gamma_{42}^4 = g^{43} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ & 3 \end{bmatrix} + g^{44} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ & 4 \end{bmatrix} = 0.$$

05. Trójwymiarowe równania ruchu swobodnej cząstki [9]:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = -\Gamma_{11}^1 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds} - \Gamma_{22}^1 \frac{d\theta}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \Gamma_{33}^1 \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\varphi}{ds} - 2\Gamma_{34}^1 \frac{d\varphi}{ds} \frac{dx^4}{ds} - \Gamma_{44}^1 \frac{dx^4}{ds} \frac{dx^4}{ds},$$

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} = -2\Gamma_{12}^2 \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \Gamma_{33}^2 \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\varphi}{ds} - 2\Gamma_{34}^2 \frac{d\varphi}{ds} \frac{dx^4}{ds} - \Gamma_{44}^2 \frac{dx^4}{ds} \frac{dx^4}{ds},$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} = -2\Gamma_{13}^3 \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} - 2\Gamma_{14}^3 \frac{dr}{ds} \frac{dx^4}{ds} - 2\Gamma_{23}^3 \frac{d\theta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} - 2\Gamma_{24}^3 \frac{d\theta}{ds} \frac{dx^4}{ds},$$

$$\frac{d}{ds} \approx \frac{1}{ic} \frac{d}{dt}, \quad \frac{d^2}{ds^2} \approx -\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2}, \quad \text{gdym } r \gg r_s, \quad \omega^2 r^2 \ll c^2, \quad v^2 \ll c^2,$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} \sqrt{g_{rr}} \frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{g_{rr}}} + \frac{d^2 \theta}{dt^2} \sqrt{g_{\theta\theta}} \frac{\mathbf{e}_\theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} + \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \sqrt{g_{\varphi\varphi}} \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}},$$

$$\sqrt{g_{rr}} = 1, \quad \sqrt{g_{\theta\theta}} = r, \quad \sqrt{g_{\varphi\varphi}} = r \sin \theta,$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \cdot \sqrt{g_{rr}} = -\frac{GM}{r^2} + \omega^2 r \sin^2 \theta + 2\omega r \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} \cdot \sqrt{g_{\theta\theta}} = \omega^2 r \sin \theta \cos \theta + 2\omega r \sin \theta \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \sin \theta \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \cdot \sqrt{g_{\varphi\varphi}} = -2\omega \sin \theta \frac{dr}{dt} - 2\omega r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - 2\sin \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - 2r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt}$$

Przyspieszenie swobodnie spadającej cząstki na wirującej planecie w przypadku słabo zakrzywionej czasoprzestrzeni dla małych prędkości zapiszemy w postaci wektorowej umożliwiającej fizyczną interpretację poszczególnych członów.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_G + \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_B, \quad \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{g_{rr}}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\mathbf{e}_\theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}},$$

\mathbf{a}_G – przyspieszenie grawitacyjne,

\mathbf{a}_O – przyspieszenie odśrodkowe,

\mathbf{a}_C – przyspieszenie Coriolisa,

\mathbf{a}_B – przyspieszenie balistyczne,

$$\mathbf{a}_G = -\frac{GM}{r^2} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r,$$

$$\mathbf{a}_O = \omega^2 r \sin^2 \theta \cdot \hat{\mathbf{e}}_r + \omega^2 r \sin \theta \cos \theta \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

$$\mathbf{a}_C = 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = a_C^r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r + a_C^\theta \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta + a_C^\varphi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi,$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega^r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r + \omega^\theta \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta + \omega^\varphi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi,$$

$$\mathbf{v} = v^r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r + v^\theta \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta + v^\varphi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi,$$

$$\omega^r = \omega \cos \theta, \quad \omega^\theta = -\omega \sin \theta, \quad \omega^\varphi = 0,$$

$$v^r = \frac{dr}{dt}, \quad v^\theta = r \frac{d\theta}{dt}, \quad v^\varphi = r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt},$$

$$a_C^r = 2(v^\theta \omega^\varphi - v^\varphi \omega^\theta) = 2\omega r \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt},$$

$$a_C^\theta = 2(v^\varphi \omega^r - v^r \omega^\varphi) = 2\omega r \sin \theta \cos \theta \frac{d\varphi}{dt},$$

$$a_C^\varphi = 2(v^r \omega^\theta - v^\theta \omega^r) = -2\omega \sin \theta \frac{dr}{dt} - 2\omega r \cos \theta \frac{d\theta}{dt},$$

$$\mathbf{a}_C = 2\omega r \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r + 2\omega r \sin \theta \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta - \left(2\omega \sin \theta \frac{dr}{dt} + 2\omega r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi,$$

$$\mathbf{a}_B = 2\omega \sin \theta v^\varphi \cdot \hat{\mathbf{e}}_r + 2\omega \cos \theta v^\varphi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta - 2\omega (\sin \theta v^r + \cos \theta v^\theta) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi,$$

$$\mathbf{a}_B = \left(r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_r + \left(-2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \sin \theta \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta + \left(-2 \sin \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - 2r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\mathbf{a}_B = \frac{1}{r} (v^\theta v^\theta + v^\varphi v^\varphi) \cdot \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} (-2v^r v^\theta + v^\varphi v^\varphi \operatorname{ctg} \theta) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r} (-2v^r v^\varphi - v^\theta v^\varphi \operatorname{ctg} \theta) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi.$$

UWAGA

Ze względu na pozorne osobliwości na biegunach sferycznego układu współrzędnych należy założyć, że $\theta \neq 0$ i $\theta \neq \pi$.

Przyspieszenie swobodnie spadającej cząstki na wirującej planecie w przypadku słabo zakrzywionej czasoprzestrzeni dla małych prędkości zapiszemy ponownie w postaci wektorowej.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\varphi, \quad \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{g_{rr}}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\mathbf{e}_\theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}},$$

$$\mathbf{a}_r = \left(-\frac{GM}{r^2} + \omega^2 r \sin^2 \theta + 2\omega r \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_r,$$

$$\mathbf{a}_\theta = \left(\omega^2 r \sin \theta \cos \theta + 2\omega r \sin \theta \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \sin \theta \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

$$\mathbf{a}_\varphi = - \left(2\omega \sin \theta \frac{dr}{dt} + 2\omega r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + 2 \sin \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + 2r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi.$$

Poniżej wyznaczmy wypadkowy moment obrotowy $m(\mathbf{r} \times \mathbf{a})$, działający na cząstkę testową o masie m , powodujący precesję jej momentu orbitalnego.

$$m(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = m\mathbf{r} \times (\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\varphi),$$

$$m(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = m\mathbf{r} \times \mathbf{a}_r + m\mathbf{r} \times \mathbf{a}_\theta + m\mathbf{r} \times \mathbf{a}_\varphi,$$

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r,$$

$$\mathbf{a}_r = a_r \hat{\mathbf{e}}_r, \quad a_r = -\frac{GM}{r^2} + \omega^2 r \sin^2 \theta + 2\omega r \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\mathbf{a}_\theta = a_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad a_\theta = \omega^2 r \sin \theta \cos \theta + 2\omega r \sin \theta \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \sin \theta \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\mathbf{a}_\varphi = a_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \quad a_\varphi = - \left(2\omega \sin \theta \frac{dr}{dt} + 2\omega r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + 2 \sin \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + 2r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right),$$

$$m(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = m r \hat{\mathbf{e}}_r \times a_r \hat{\mathbf{e}}_r + m r \hat{\mathbf{e}}_r \times a_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + m r \hat{\mathbf{e}}_r \times a_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi,$$

$$m(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = m r a_r (\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_r) + m r a_\theta (\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\theta) + m r a_\varphi (\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\varphi),$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_r = 0,$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\theta = +\hat{\mathbf{e}}_\varphi,$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

$$m(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = +m r a_\theta \hat{\mathbf{e}}_\varphi - m r a_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Niezerowy wypadkowy moment obrotowy można przedstawić w postaci sumy momentów odpowiadających odpowiednio przyspieszeniom \mathbf{a}_1 oraz \mathbf{a}_2

$$\mathbf{a}_1 = \left(-2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \sin \theta \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta - \left(2 \sin \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + 2r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi,$$

$$\mathbf{a}_2 = \left(\omega^2 r \sin \theta \cos \theta + 2\omega r \sin \theta \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta - \left(2\omega \sin \theta \frac{dr}{dt} + 2\omega r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi.$$

Tylko drugi z tych momentów obrotowych zależy od wartości prędkości kątowej ω wirowania planety.

06. Przykład: Pierwsza prędkość kosmiczna dla orbity kołowej w płaszczyźnie równikowej [10, 11]

Z założenia

$$r = \text{const}, \quad v^r = \frac{dr}{dt} = 0, \quad \theta = \frac{1}{2}\pi, \quad v^\theta = r \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad v^\varphi = r \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Mamy więc

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{0} \quad \text{lub} \quad \mathbf{a}_G + \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_B = \mathbf{0},$$

$$-\frac{GM}{r^2} + \omega^2 r + 2\omega |v^\varphi| + \frac{|v^\varphi||v^\varphi|}{r} = 0 \quad \text{oraz} \quad -\frac{GM}{r^2} + \omega^2 r - 2\omega |v^\varphi| + \frac{|v^\varphi||v^\varphi|}{r} = 0.$$

Wśród czterech rozwiązań powyższych równań będących trójmianami kwadratowymi względem $|v^\varphi|$, tylko dwa rozwiązania są fizyczne.

$$|v_1^\varphi| = +v_1^\varphi = -\omega r + \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \text{i} \quad |v_2^\varphi| = -v_2^\varphi = +\omega r + \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{doła}} = 7,3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$r = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

$$\omega r = 467,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \sqrt{\frac{GM}{r}} = 7,9 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_1^\varphi = +7,4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \mathbf{v}_1^\varphi = v_1^\varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

$$v_2^\varphi = -8,4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \mathbf{v}_2^\varphi = v_2^\varphi \mathbf{e}_\varphi.$$

Prędkość \mathbf{v}_1^φ należy nadać rakiecie wystrzelonej w kierunku wschodnim, przyspieszenie Coriolisa $\mathbf{a}_{C1} = 2m(\mathbf{v}_1^\varphi \times \boldsymbol{\omega})$ skierowane jest wtedy radialnie od centrum źródła pola. Prędkość \mathbf{v}_2^φ należy nadać rakiecie wystrzelonej w kierunku zachodnim, przyspieszenie Coriolisa $\mathbf{a}_{C2} = 2m(\mathbf{v}_2^\varphi \times \boldsymbol{\omega})$ skierowane jest wtedy radialnie ku centrum źródła pola. Okres obiegu orbity w kierunku wschodnim jest większy niż w kierunku zachodnim.

07. Przykład: Uproszczona postać równań ruchu swobodnej cząstki próbnej w polu grawitacyjnym wirującej planety w zmiennych (t, r, θ, φ) [9]

Dla $r \gg r_s$ oraz $v_r^2, v_\theta^2, v_\varphi^2, \omega^2 r^2 \ll c^2$ równania ruchu swobodnej cząstki próbnej redukują się do

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} + \omega^2 r \sin^2 \theta + 2\omega r \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} + r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \omega^2 \sin \theta \cos \theta + 2\omega \sin \theta \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} - \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{2\omega}{r} \frac{dr}{dt} - 2\omega \text{ctg} \theta \frac{d\theta}{dt} - \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - 2\text{ctg} \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt}$$

Równania te stanowią uproszczony opis efektów spowodowanych przyspieszeniami – grawitacyjnym, odśrodkowym, Coriolisa oraz balistycznym.

08. Przykład: Uproszczona postać równań ruchu swobodnej cząstki próbnej w polu grawitacyjnym niewirującej planety w zmiennych (t, r, θ, φ) [9]

Kiedy planeta nie wiruje, równania ruchu stają się jeszcze prostsze.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= -\frac{GM}{r^2} + r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= -\frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= -\frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

Z równań tych wynika, że swobodna cząstka próbna porusza się po orbicie eliptycznej (w szczególności kołowej), orbitalny moment pędu (prostopadły do płaszczyzny orbity) jest stały, a okres obiegu orbity nie zależy od kierunku ruchu cząstki.

09. Przykład: Wartość prędkości rozchodzenia się światła a zewnętrzna metryka Schwarzschilda w przypadku wirującej planety

Zewnętrzna metryka Schwarzschilda w przypadku wirującej planety, dla

$$\theta = \text{const} = \frac{\pi}{2}, \quad d\theta = 0, \quad \varphi = \text{const}, \quad d\varphi = 0,$$

redukuje się do postaci

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} (dr)^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) c^2 (dt)^2.$$

Wartość prędkości (v_{light}) rozchodzenia się światła wyznaczmy z warunku

$$(ds)^2 = 0$$

lub równoważnego

$$0 < v_{\text{light}}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2 \left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \right].$$

Warunek

$$\left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \right] \leq 1$$

jest spełniony gdy

$$r \gg r_s, \quad \omega^2 r^2 \ll c^2.$$

10. Metryka Kerr

W 1963 roku Kerr [7] zaproponował stacjonarne osiowo symetryczne rozwiązanie próżniowych równań pola grawitacyjnego, którego źródłem jest wirująca masa.

$$ds^2 = (r^2 + a^2 \cdot \cos^2\theta)(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2) + (2du + a \cdot \sin^2\theta \cdot d\varphi)(dr + a \cdot \sin^2\theta \cdot d\varphi) - \left(1 - \frac{r \cdot r_s}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2\theta}\right)(du + a \cdot \sin^2\theta \cdot d\varphi)^2.$$

Metryka ta po rozpisaniu ma postać

$$ds^2 = (r^2 + a^2 \cdot \cos^2\theta)d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 \cdot r \cdot r_s \cdot \sin^2\theta}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2\theta}\right)\sin^2\theta \cdot d\varphi^2 + 2a \cdot \sin^2\theta \cdot dr \cdot d\varphi + 2dr \cdot du + \frac{2a \cdot r \cdot r_s \cdot \sin^2\theta}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2\theta} d\varphi \cdot du - \left(1 - \frac{r \cdot r_s}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2\theta}\right) du^2.$$

gdzie

$$r_s = \frac{2GM}{c^2},$$

M – masa źródła,

$$a = \frac{\text{moment pędu źródła względem osi } z}{\text{całkowita masa źródła} \cdot c}, \quad [a] = m,$$

u jest funkcją r oraz t.

Metryka Kerr zapisywana jest zwykle przy wykorzystaniu współrzędnych i oznaczeń zaproponowanych przez Boyera i Lindquista [1].

$$ds^2 = \frac{r^2 + a^2 \cos^2\theta}{r^2 - r r_s + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2\theta)d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r r_s \sin^2\theta}{r^2 + a^2 \cos^2\theta}\right)\sin^2\theta d\varphi^2 - \frac{2a r r_s \sin^2\theta}{r^2 + a^2 \cos^2\theta} d\varphi \cdot d(ct) - \left(1 - \frac{r r_s}{r^2 + a^2 \cos^2\theta}\right)d(ct)^2,$$

gdzie

$$r = x^1, \quad \theta = x^2, \quad \varphi = x^3, \quad ct = x^4,$$

Metryka Kerr przedstawiana jest również jako

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r r_s \sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta d\varphi^2 - \frac{2a r r_s \sin^2\theta}{\rho^2} d\varphi \cdot d(ct) - \left(1 - \frac{r r_s}{\rho^2}\right)d(ct)^2,$$

gdzie

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - r r_S + a^2, \quad r_S = \frac{2GM}{c^2}.$$

Dla dużych wartości r , ($r^2 \gg a^2$), metryka Kerra przyjmuje graniczną postać

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 - 2a \frac{r_S}{r} \sin^2 \theta d\varphi d(ct) - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) d(ct)^2.$$

Dla $a = 0$ metryka Kerra redukuje się do metryki Schwarzschilda

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) d(ct)^2.$$

11. Wartość prędkości rozchodzenia się światła a zewnętrzna metryka Kerra

Zewnętrzna metryka Kerra, dla

$$\theta = \text{const} = \frac{\pi}{2}, \quad d\theta = 0, \quad \varphi = \text{const}, \quad d\varphi = 0,$$

redukuje się do postaci

$$ds^2 = \frac{r^2}{r^2 - r r_S + a^2} dr^2 - c^2 \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2.$$

Wartość prędkości (v_{light}) rozchodzenia się światła wyznaczymy z warunku

$$(ds)^2 = 0$$

lub równoważnego

$$0 < v_{\text{light}}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2 \left[\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \frac{a^2}{r^2} \right].$$

Warunki

$$\left[\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \frac{a^2}{r^2} \right] \leq 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} v_{\text{light}} = c$$

są spełnione gdy

$$r \neq r_S, \quad \frac{r_S}{a} \ll 1, \quad \left(r > \frac{1}{4} r_S \quad \text{lub} \quad r > \left(\frac{1}{4} r_S + \frac{1}{2} \frac{a^2}{r_S} \right) \right).$$

12. Bardzo krótki szkic historyczny

Gaspard Gustave de Coriolis (1792-1843) odkrył w 1835 nową siłę bezwładności, co pozwoliło mu sformułować równania ruchu w wirującym układzie odniesienia [2].

Albert Einstein (1879-1955) podał 18 listopada 1915 przybliżone rozwiązanie równań statycznego sferycznie symetrycznego pola grawitacyjnego w pustej przestrzeni, którego źródłem jest punktowa masa. Wyjaśnił jakościowo i ilościowo wiekowy obrót peryhelium Merkurego (i pozostałych planet) w ramach ogólnej teorii względności [3].

Anomalny obrót perihelium Merkurego to zjawisko polegające na tym, że peryhelium Merkurego przesuwają się o 574 sekundy kątowe na stulecie wskutek ruchu tej planety po rozecie eliptycznej, z czego 43 sekundy kątowe nie dają się wyjaśnić przez teorię Newtona.

Zjawisko to zaobserwował w 1859 Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811-1877), który przypuszczał, że 43 sekundowa nadwyżka może być spowodowana przez hipotetyczną planetę Wulkan lub planetoidy krążące bliżej Słońca niż Merkury [18].

Równanie orbity cząstki w stacjonarnym centralnie symetrycznym polu grawitacyjnym otrzymane w ramach ogólnej teorii względności różni się od analogicznego równania w teorii Newtona członem odpowiedzialnym za obrót orbity. Wielkość tej poprawki dla obrotu peryhelium orbity Merkurego potwierdza 43 sekundową nadwyżkę.

Albert Einstein (1879-1955) 25 listopada 1915 sformułował ostatecznie w ramach ogólnej teorii względności równania pola grawitacyjnego [4].

Carl Schwarzschild (1873-1916) znalazł 13 stycznia 1916 pierwsze dokładne rozwiązanie równań Einsteina w przypadku statycznego (a tym samym stacjonarnego) sferycznie symetrycznego pola grawitacyjnego w pustej przestrzeni, którego źródłem jest punktowa masa [16].

Willem de Sitter (1872-1934) opisał w 1916 efekt geodezyjny (geodetyczny), czyli wkład do precesji **orbitalnego** momentu pędu (prostopadłego do płaszczyzny orbity) swobodnie orbitującej cząstki **niezależny** od prędkości kątowej wirującego ciała źródłowego. Precesja ta nazywana jest precesją geodezyjną, precesją de Sittera oraz efektem de Sittera [17].

Efekt geodezyjny następnie dokładniej zbadał Jan Arnoldus Schouten (1883-1971) w 1919 [14] i 1922 [15] oraz Adriaan Daniël Fokker (1887-1972) w 1921 [6].

Joseph Lense (1890-1985) i Hans Thirring (1888-1976) przeanalizowali w 1918, wkład do precesji **orbitalnego** momentu pędu (prostopadłego do płaszczyzny orbity) swobodnie orbitującej cząstki **zależny** od prędkości kątowej wirującego ciała źródłowego [8]. Precesja ta znana jest jako precesja Lensego-Thirringa, efekt Lensego-Thirringa, efekt rotacyjny, precesja żyroskopowa, sprzężenie momentów pędów spinowego i orbitalnego, wleczenie układów inercjalnych.

Leonard Isaac Schiff (1915-1971) przedstawił w 1960 [12, 13] złożenie precesji de Sittera oraz precesji Lensego-Thirringa osi obrotu swobodnie orbitującego żyroskopu w polu grawitacyjnym wirującego ciała źródłowego. Zjawisko to nazywane jest precesją (efektem) Schiffa.

W przypadku orbity biegunowej (polarnej) o wysokości 642 km w ciągu roku precesja de Sittera odchyła oś żyroskopu w płaszczyźnie orbity o 6,6061 sekund kątowych, a precesja Lensego-Thirringa odchyła oś żyroskopu w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny orbity o 39,2 milisekund kątowych [5].

20 marca 2004 satelita Gravity Probe B został umieszczony na orbicie biegunowej (polarnej) o wysokości 642 km. Na pokładzie satelity znajdowały się cztery kriogeniczne żyroskopy, chociaż tylko jeden z nich był niezbędny. Rotory żyroskopów były kulami o średnicy 38 mm wykonanymi z kwarcu i pokrytymi warstwą niobu, zawieszane były elektrostatycznie.

Uzyskane w 2011 wyniki [5] potwierdziły z dużą dokładnością istnienie precesji Schiffa. Misja była prowadzona przez NASA i Uniwersytet Stanforda pod kierunkiem C. W. Francisa Everita.

Roy Patrick Kerr w 1963 podał [7] stacjonarne osiowo symetryczne rozwiązanie próżniowych równań pola grawitacyjnego, którego źródłem jest wirująca masa.

Metryka Kerra zapisywana jest zwykle przy wykorzystaniu współrzędnych i oznaczeń, które zaproponowali w 1967 Robert Hamilton Boyer (1932-1966) i Richard Wallace Lindquist [1].

13. Uwagi końcowe

W przedstawionej pracy przyjęliśmy następujące oznaczenia i ograniczenia:

$$r \geq R,$$

$$\frac{r_s}{r} \ll 1,$$

$$\frac{\omega^2 r^2}{c^2} \ll 1,$$

$$\mathbf{v}^r = \frac{dr}{dt}, \quad \mathbf{v}^\theta = r \frac{d\theta}{dt}, \quad \mathbf{v}^\varphi = r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt}, \quad \mathbf{v} = v^r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r + v^\theta \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta + v^\varphi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi,$$

$$v_r^2, v_\theta^2, v_\varphi^2, v^2 \ll c^2,$$

gdzie

R – promień planety,

ω – wartość prędkości kątowej wirowania planety,

c – maksymalna wartość prędkości propagacji sygnałów,

$$r_s = \frac{2GM}{c^2},$$

r_s – promień Schwarzschilda,

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2},$$

M – masa planety.

W przypadku Ziemi mamy:

$$M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg},$$

$$r_s \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ m},$$

$$R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m},$$

$$\frac{r_s}{R} \approx 1,4 \cdot 10^{-9},$$

$$\omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{doba}} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$\omega R = 467,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\frac{\omega^2 r^2}{c^2} = \frac{k^2 \omega^2 R^2}{c^2} \ll 1, \quad k^2 \ll \frac{c^2}{\omega^2 R^2}, \quad k \ll \frac{c}{\omega R} \approx 6 \cdot 10^5,$$

gdzie

$$r = kR, \quad 1 \leq k \ll 6 \cdot 10^5.$$

Cytowane prace

[1] Robert Hamilton Boyer and Richard Wallace Lindquist: *Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric*. Journal of Mathematical Physics **8** (1967) 265-281.

[2] Gaspard Gustave de Coriolis: *Sur les équations du mouvement relatif des systemes de corps*. Journal de l'École Polytechnique **15**, 24 (1835) 144-154.

[3] Albert Einstein: *Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie*. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften **2**, 47 (1915) 831-839.

[4] Albert Einstein: *Die Feldgleichungen der Gravitation*. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften **2**, 48 (1915) 844-847.

[5] C. W. Francis Everitt et al.: *Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity*. Physical Review Letters **106** (3 June 2011) 221101 (5 pages) [27 authors].

[6] Adriaan Daniël Fokker: *The geodesic precession: a consequence of Einsteins's theory of gravitation*. Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen **23**, I (1921) 729-738.

[7] Roy Patrick Kerr: *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*. Physical Review Letters **11**, 5 (1 September 1963) 237-238.

[8] Joseph Lense und Hans Thirring: *Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie*. Physikalische Zeitschrift **19**, 8 (15. April 1918) 156-163.

[Istnieje angielski przekład (B. Mashhoon, F. W. Hehl and D. S. Theiss):]

Josef Lense and Hans Thirring: *On the Influence of the Proper Rotation of Central Bodies on the Motions of Planets and Moons According to Einstein's Theory of Gravitation*. General Relativity and Gravitation **16**, 8 (1984) 727-741.

[9] Zbigniew Osiak: *Ogólna Teoria Względności*. viXra: 1804.0178 (2018)
Self Publishing (2012), ISBN: 978-83-272-3515-2, <http://vixra.org/abs/1804.0178>

[10] Zbigniew Osiak: *Pierwsza prędkość kosmiczna a siła Coriolisa*. Delta **4**, 371 (2005) 10-11.

[11] Zbigniew Osiak: *Pierwsza prędkość kosmiczna a siła Coriolisa*. viXra: 1809.0138 (2018), <http://vixra.org/abs/1809.0138>

- [12] Leonard Isaac Schiff: *Possible New Experimental Test of General Relativity Theory*. Physical Review Letters **4**, 5 (1960) 215-217.
- [13] Leonard Isaac Schiff: *Motion of a Gyroscope According to Einstein's Theory of Gravitation*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **46**, 6 (1960) 871-882.
- [14] Jan Arnoldus Schouten: *On the arising of a precession-motion owing to the non-euclidean linear element of the space in the vicinity of the Sun*. Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen **21**, 4 (1919) 533-539.
- [15] Jan Arnoldus Schouten: *On geodesic precession*. Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen **23**, 8 (1922) 1108-1112.
- [16] Carl Schwarzschild: *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften **1**, 7 (1916) 189-196.
[Istnieje angielski przekład:]
<https://arxiv.org/abs/physics/9905030>
- [17] Willem de Sitter: *On Einstein's Theory of Gravitation, and its Astronomical Consequences. II*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **77** (12/1916) 155-184.
- [18] Urbain Jean Joseph Le Verrier: *Sur la théorie de Mercure et sur le mouvement du périhélie de cette planète*. Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris **49** (1859) 379-383. [Séance du lundi 12 septembre 1859]