Generalization of the Fermat's and Euler's Theorems

Обобщение теорем Ферма и Эйлера

Курмет Султан

Абстракт: в статье приводится расширенные версий малой теоремы Ферма и теоремы Эйлера, а также теорема, которая обобщает теоремы Ферма и Эйлера и показывает цикличность остатков по показателю степени делимых чисел.

1. Введение

Малая теорема Ферма утверждает, что если p - простое число и a - целое число, не делящейся на p, то $a^{p-1}-1$ делится на p, т.е. $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$, а если a – любое целое число, то $a^p \equiv a \ (mod\ p)$ [1].

Теорема Эйлера, которая обобщает малую теорему Ферма, гласит: если числа a и m взаимно просты, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \ (mod\ m)$, где $\varphi(m)$ – функция Эйлера [1].

2. Расширенные версии Малой теоремы Ферма и теоремы Эйлера

На основе результатов своих исследований автор предлагает следующие расширенные версии малой теоремы Ферма и Теоремы Эйлера:

2.1. Расширенная версия малой теоремы Ферма

Если p - простое число и a - целое число, не делящейся на p, то $a^{(p-1)t} \equiv 1 \ (mod\ p)$, где t =1, 2,…. А если p - простое число и a – любое целое число, то $a^{p+(p-1)t} \equiv a \ (mod\ p)$.

2.2. Расширенная версия теоремы Эйлера

Если числа a и m взаимно просты, то $a^{\varphi(m)t} \equiv 1 \ (mod\ m)$, где $\varphi(m)$ – функция Эйлера; $t = 1, 2, \dots$

Важностью расширенных версий Малой теоремы Ферма и Теоремы Эйлера заключается в том, что они показывает цикличность остатков по показателям степени делимых чисел.

Обобщение теорем Ферма и Эйлера

Ниже приводится теорема, которая обобщает теоремы Ферма и Эйлера:

Теорема 3.1 (Обобщение теорем Ферма и Эйлера)

1) Если a^n натуральная степень натурального числа, p^x натуральная степень простого числа, при этом $a^n \equiv r \ (mod\ p^x)$, то $a^{n+(p^x-p^{(x-1)})t} \equiv r \ (mod\ p^x)$, где $r = 0,1,2, \dots p^x-1$; $t = 1,2, \dots.$

2) Если a^n натуральная степень натурального числа, m натуральное число, при этом $a^n \equiv r \ (mod\ m)$, то $a^{n+\varphi(m)t} \equiv r \ (mod\ m)$, где $r = 0,1,2, \dots m-1$; $t = 1,2, \dots.$

Пример: если $p^x = 3^2$, $a^n = 7^1$, $7^1 \equiv 7 \ (mod\ 3^2)$, $t = 1$, тогда $7^{1+(3^2-3)\cdot 1} \equiv 7 \ (mod\ 3^2)$.

Теорема 3.1 показывает цикличность остатков по показателю степени делимых чисел, что является ранее не описанной интересной закономерностью. Доказательство Теоремы 3.1 не приводиться, так как она основана на теоремах Ферма и Эйлера.

3. Ссылки

[1] J. M. Cargal, Discrete Mathematics for Neophytes: Number Theory, Probability, Algorithms, and Other Stuff, 1988.