Sulle connessioni matematiche tra le soluzioni analitiche dell'Equazione di Thomas-Fermi, il Numero Aureo e le modalità corrispondenti alle vibrazioni delle stringhe.

Michele Nardelli [1,2]

[1] Dipartimento di Scienze della Terra
Università degli Studi di Napoli Federico II, Largo S. Marcellino, 10
80138 Napoli, Italy

[2] Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli "Federico II" – Polo delle Scienze e delle Tecnologie
Monte S. Angelo, Via Cintia (Fuorigrotta), 80126 Napoli, Italy

Riassunto

Il modello di Thomas-Fermi, sviluppato nel 1927 da Llewellyn Thomas ed Enrico Fermi, è un modello che descrive gli elettroni attorno al nucleo atomico come un sistema di fermioni interagenti tramite un potenziale $U(\vec{r})$ agente sul singolo fermione, che contiene l'interazione con tutti gli altri (approssimazione di campo medio). Il punto di partenza è il modello a gas di Fermi: all'Hamiltoniana non interagente viene aggiunto il termine di potenziale $H_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + U(\vec{r})$, di conseguenza i livelli energetici consentiti (gli autovalori dell'hamiltoniana) risultano funzioni della posizione. Il gas di Fermi è un sistema di fermioni liberi, cioè non interagenti: possono essere in prima approssimazione descritti con questo modello i nucleoni all'interno del nucleo atomico o gli elettroni di conduzione in un metallo. L'hamiltoniana di un gas di Fermi costituito da N fermioni (spin $s = 1/2$) di massa m racchiuso all'interno di una scatola cubica di lato L è: $H_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m}$, e gli autovalori (ovvero i valori di energia accessibili al sistema) sono: $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Il principio di Pauli impone che si possano sistemare su ogni livello al più due fermioni, con spin opposto: lo stato fondamentale si ottiene occupando i livelli a partire dal più basso con due particelle ognuno. Il più alto stato occupato corrisponde all'energia di Fermi: $E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$, cui corrisponde l'impulso di Fermi $\mathbf{k_F}$. Il sistema di fermioni si troverà nel suo stato fondamentale soltanto allo zero assoluto, quando non è disponibile energia per transizioni a stati eccitati.
Nel presente lavoro, dopo aver descritto l'equazione (o funzione) di Thomas-Fermi, descriveremo le diverse connessioni matematiche ottenute tra le soluzioni analitiche di tale equazione, i numeri di Fibonacci, la sezione aurea, il rapporto aureo e le vibrazioni di stringhe ad essi connessi.

1. Equazione di Thomas-Fermi e nuove connessioni matematiche. [1][2][3][4][5]

In questa sezione mostriamo alcuni dei risultati sopra la distribuzione degli elettroni in un atomo pesante che si possono ottenere trattando tali elettroni come un "gas di elettroni" che circonda il nucleo. È possibile calcolare statisticamente la distribuzione degli elettroni attorno al nucleo, ed in

base ad essa calcolare poi l'energia necessaria a ionizzare completamente l'atomo, cioè a strappargli tutti gli elettroni. Il calcolo della distribuzione degli elettroni attorno al nucleo permette inoltre di determinare l'andamento del potenziale alle varie distanze dal nucleo e quindi di conoscere il campo elettrico in cui vengono a trovarsi gli elettroni dell'atomo.
Per determinare la distribuzione degli elettroni dobbiamo anzitutto cercare la relazione tra la loro densità ed il potenziale elettrico in ogni punto. La relazione tra la densità e la temperatura è la seguente:

$$n = \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} F\left(\alpha e^{\frac{eV}{kT}}\right), \quad (1.1)$$

dove α è costante per tutto il gas; la funzione F nel nostro caso (degenerazione completa) ha l'espressione asintotica

$$F(A) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log A)^{3/2}. \quad (1.2)$$

Si trova dunque per il nostro caso

$$n = \frac{2^{7/2}\pi m^{3/2} e^{3/2}}{3h^3} v^{3/2} \quad (1.3)$$

dove

$$v = V + \frac{kT}{e} \log \alpha \quad (1.4)$$

rappresenta, a meno di una costante additiva, il potenziale. Siccome si tratta di un gas di elettroni, bisogna tener conto del fatto che il peso statistico degli elettroni è 2 (corrispondentemente alle due possibilità di orientazione dell'elettrone rotante); e quindi per la densità degli elettroni si deve prendere un valore uguale al doppio del valore (1.3); si ha cioè:

$$n = \frac{2^{9/2}\pi m^{3/2} e^{3/2}}{3h^3} v^{3/2}. \quad (1.5)$$

L'energia cinetica media degli elettroni risulta data da:

$$L = \frac{3}{2} kTG\left(\alpha e^{\frac{eV}{kT}}\right) / F\left(\alpha e^{\frac{eV}{kT}}\right) \quad (1.6)$$

dove G rappresenta una funzione che, nel caso della degenerazione completa, prende l'espressione asintotica

$$G(A) = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (\log A)^{5/2}. \quad (1.7)$$

Si trova dunque per il nostro caso

$$L = \frac{3}{5} ev. \quad (1.8)$$

Osserviamo ora che la densità elettrica in un punto risulta evidentemente data da $-ne$ e quindi il potenziale v soddisfa all'equazione

$$\Delta v = 4\pi n e = \frac{2^{13/2}\pi^2 m^{3/2} e^{5/2}}{3h^3} v^{3/2}. \quad (1.9)$$

Nel nostro caso esso sarà poi evidentemente funzione soltanto della distanza r dal nucleo; la (1.9) può quindi scriversi:

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} = \frac{2^{13/2}\pi^2 m^{3/2} e^{5/2}}{3h^3} v^{3/2}. \quad (1.10)$$

Se con Z indichiamo il numero atomico del nostro atomo si avrà poi evidentemente:

$$\lim_{r=0} rv = Ze \qquad \int n\,d\tau = 4\pi \int_0^\infty r^2 n\,dr = Z. \quad (d\tau = \text{elemento di volume}) \quad (1.11)$$

Quest'ultima equazione, tenendo presente la (1.5), può scriversi:

$$\frac{2^{13/2}\pi^2 m^{3/2} e^{5/2}}{3h^3} \int_0^\infty v^{3/2} r^2 dr = Ze. \quad (1.12)$$

Il potenziale v si otterrà dunque cercando una funzione che soddisfi all'equazione (1.10) con le due condizioni (1.11) e (1.12). Per semplificare la ricerca di v cambiamo le variabili r, v in altre due x, ψ ad esse proporzionali ponendo

$$r = \mu x, \qquad v = \gamma\psi \quad (1.13)$$

dove si ha

$$\mu = \frac{3^{2/3} h^2}{2^{13/3}\pi^{4/3} m e^2 Z^{1/3}}, \qquad \gamma = \frac{2^{13/3}\pi^{4/3} m Z^{4/3} e^3}{3^{2/3} h^2}. \quad (1.14)$$

Le equazioni (1.10), (1.11) e (1.12) diventano allora

$$\psi'' + \frac{2}{x}\psi' = \psi^{3/2}, \quad \lim_{x=0} x\psi = 1, \quad \int_0^\infty \psi^{3/2} x^2 dx = 1. \quad (1.15)$$

Queste equazioni si semplificano ulteriormente ponendo

$$\varphi = x\psi. \quad (1.16)$$

Esse diventano infatti:

$$\varphi'' = \varphi^{3/2}/\sqrt{x}, \quad \varphi(0) = 1, \quad \int_0^\infty \varphi^{3/2}\sqrt{x}\,dx = 1. \quad (1.17)$$

È facile vedere che l'ultima condizione resta senz'altro verificata se φ si annulla per $x = \infty$. Resta dunque da cercare una soluzione della prima delle (1.17) con le condizioni limiti $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$. Fermi risolse tale equazione numericamente e per x prossimo a zero ottenne:

$$\varphi(x) = 1 - 1.58x + \frac{4}{3}x^{3/2} + \ldots \quad (1.18)$$

Da tale espressione E. Majorana ottenne la seguente più completa:

$$\varphi(x) = 1 - px + \frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{2p}{5}x^{5/2} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3p^2}{70}x^{7/2} - \frac{2p}{15}x^4 + \frac{56+3p^3}{756}x^{9/2} +$$
$$+ \frac{p^2}{175}x^5 + \frac{-992p + 45p^4}{47520}x^{11/2} + \frac{4(35-9p^3)}{14175}x^6 . \quad (1.18b)$$

Quindi, il potenziale elettrico dell'atomo ad una data distanza dal nucleo risulta dato da

$$v = \gamma\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\gamma\mu}{r}\varphi(x) = \frac{Ze}{r}\varphi\left(\frac{r}{\mu}\right). \quad (1.19)$$

Si può dunque dire che il potenziale in ogni punto è uguale a quello prodotto da una carica efficace

$$Ze\varphi\left(\frac{r}{\mu}\right).$$

L'energia totale dell'atomo dovrebbe calcolarsi come somma dell'energia cinetica di tutti gli elettroni e dell'energia potenziale del nucleo e degli elettroni. È più semplice però tener presente che in un atomo l'energia totale è uguale, salvo il segno, all'energia cinetica. Si ha dunque:

$$W = -\int L n d\tau \quad (1.20)$$

e tenendo presenti le (1.5), (1.8), (1.13), (1.14) e (1.16), si trova:

$$W = -\frac{3}{5}\int_0^\infty r^2 n v dr = -\frac{2^{13/3}3^{1/3}\pi^{4/3}me^4Z^{7/3}}{5h^2}\int_0^\infty \frac{\varphi^{5/2}}{\sqrt{x}}dx . \quad (1.21)$$

L'ultimo integrale può valutarsi tenendo presente che φ soddisfa alle (1.17) ed a (1.18); si trova:

$$-\int_0^\infty \frac{\varphi^{5/2}}{\sqrt{x}}dx = -\frac{5}{7}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = \frac{5}{7}1.58 \quad (1.22)$$

e quindi si ha

$$W = -1.58\frac{2^{13/3}3^{1/3}\pi^{4/3}me^4Z^{7/3}}{7h^2} = -1.58\frac{2^{1/3}3^{1/3}}{7\pi^{2/3}}RhZ^{7/3}, \quad (1.23)$$

cioè

$$W = -1.54RhZ^{7/3} \quad (1.24)$$

dove con R si è indicato il numero di Rydberg, per modo che $-Rh$ è l'energia dello stato fondamentale dell'idrogeno. La (1.24) fornisce l'energia necessaria per strappare da un atomo tutti i

suoi elettroni. Naturalmente, dati i criteri statistici da cui essa è stata dedotta, essa comincia ad essere valida soltanto per valori considerevoli di Z.
È infine interessante evidenziare la seguente Tabella che ci fornisce i valori di $\varphi(x)$ determinati numericamente da Fermi:

Tabella 1

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,00	1,000	0,8	0,485	8	0,037	38	0,0013
0,01	0,985	0,9	0,453	9	0,029	40	0,0011
0,02	0,972	1,0	0,425	10	0,024	45	0,00079
0,03	0,959	1,2	0,375	12	0,017	50	0,00061
0,04	0,947	1,4	0,333	14	0,012	55	0,00049
0,05	0,935	1,6	0,297	16	0,0093	60	0,00039
0,10	0,882	1,8	0,268	18	0,0072	65	0,00031
0,15	0,836	2,0	0,244	20	0,0056	70	0,00026
0,20	0,793	2,5	0,194	22	0,0045	75	0,00022
0,25	0,758	3,0	0,157	24	0,0037	80	0,00018
0,30	0,721	3,5	0,130	26	0,0031	85	0,00015
0,35	0,691	4,0	0,108	28	0,0026	90	0,00012
0,40	0,660	4,5	0,093	30	0,0022	95	0,00011
0,5	0,607	5,0	0,079	32	0,0019	100	0,00010
0,6	0,562	6	0,059	34	0,0017		
0,7	0,521	7	0,046	36	0,0015		

Riportiamo adesso la seguente Tabella, ricavata da E. Majorana, con i valori numerici della funzione di Thomas-Fermi che, pur non essendo chiaro come siano stati ottenuti, si sono rivelati molto precisi e, alla fine di essa la funzione di Fermi così come già riportata nella prima delle (1.17) insieme alle condizioni limite:

Tabella 2

x	$\varphi(x)$	$-\varphi'(x)$	x	$\varphi(x)$	$-\varphi'(x)$
0	1	1.58	4	0.108	
0.05	0.936	1.15	5	0.079	
0.1	0.882	0.995	6	0.059	
0.2	0.793	0.79	7	0.046	
0.3	0.721	0.66	8	0.036	
0.4	0.660	0.56	9	0.029	
0.5	0.607	0.49	10	0.024	
0.6	0.561	0.43	12	0.017	
0.7	0.521	0.38	14	0.012	
0.8	0.486	0.34	16	0.009	
0.9	0.453	0.31	18	0.007	
1	0.424	0.29	20	0.0056	
1.1	0.398		25	0.0034	
1.2	0.374		30	0.0022	
1.3	0.353		40	0.0011	
1.4	0.333		50	0.0006	
1.5	0.315		60	0.0004	
2	0.243		80	0.0002	
2.5	0.193		100	0.0001	
3	0.157				
3.5	0.129				

$$\varphi'' = \frac{\varphi^{3/2}}{\sqrt{x}}, \qquad \varphi(0) = 1, \qquad \varphi(\infty) = 0. \quad (1.25)$$

Posto:

$$t = 1 - \frac{1}{12}\sqrt{x^3\varphi}, \quad (1.26) \qquad \varphi = \exp\left\{\int u(t)dt\right\}, \quad (1.27)$$

si trova:

$$\frac{du}{dt} = \frac{16}{3(1-t)} + \left(8 + \frac{1}{3(1-t)}\right)u + \left(\frac{7}{3} - 4t\right)u^2 - \frac{2}{3}t(1-t)u^3, \quad (1.28)$$

$$u(0) = \infty, \quad (1.29) \qquad \varphi = \exp\left\{\int_1^t u(t)dt\right\}. \quad (1.30)$$

Se invece si pone:

$$t = 144^{-1/6}x^{1/2}\varphi^{1/6}, \quad (1.31) \qquad u = -\sqrt[3]{16/3}\,\varphi^{-4/3}\varphi', \quad (1.32)$$

vale la seguente relazione:

$$\frac{du}{dt} = 8\frac{tu^2-1}{1-t^2u}. \quad (1.33)$$

Per $x=0$, si ha: $t=0,\ u(0)=-\sqrt[3]{16/3}\varphi'_0$. Per $x=\infty$, dallo sviluppo asintotico di φ si trova $u=1$, $t=1$. Il tratto della u corrispondente alla φ è limitato fra i punti di ascissa $t=0$ e $t=1$. Questo tratto può essere ottenuto da uno sviluppo in serie sempre convergente a partire dall'estremo di destra. Precisamente posto $t_1=1-t$, si ha:

$$u=a_0+a_1t_1+a_2t_1^2+a_3t_1^3+\ldots \quad (1.34)$$

in cui $a_0=1,\ \ a_1=9-\sqrt{73}$, e gli altri coefficienti si calcolano con la relazione ricorrente lineare nell'ultimo:

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{2}\left[(m-n+1)a_{m-n+1}\left(\delta_n-(a_n-2a_{n-1}+a_{n-2})\right)+(n+1)a_{n+1}\left(\delta_{m-n}-(a_{m-n}-2a_{m-n-1}+a_{m-n-2})\right)\right.$$
$$\left.+16a_{m-n}a_n-8(a_{m-n}a_{n-1}+a_na_{m-n}-1)\right]=0\,. \quad (1.35)$$

I primi unduci coefficienti valgono:

$a_0\cong 1.000000$, $a_1\cong 0.455996$, $a_2\cong 0.304455$, $a_3\cong 0.222180$, $a_4\cong 0.168212$,
$a_5\cong 0.129804$, $a_6\cong 0.101300$, $a_7\cong 0.0796351$, $a_8\cong 0.0629230$, $a_9\cong 0.0499053$,
$a_{10}\cong 0.0396962$.

Se nello sviluppo (1.34) si pone $t_1=1$ si ricava per la (1.32):

$$-\varphi'_0=\left(\frac{3}{16}\right)^{1/3}(1+a_1+a_2+\ldots). \quad (1.36)$$

La serie di destra è a termini positivi e a convergenza geometrica; il rapporto di un termine ed il precedente tende a circa 4/5.
Dalla u si passa all'equazione parametrica della φ con sole quadrature. Si trova:

$$\varphi=\exp\left\{-\int_0^t\frac{6ut}{1-t^2u}dt\right\}, \quad (1.37) \qquad x=t^2\left(\frac{144}{\varphi}\right)^{1/3}. \quad (1.38)$$

Gli altri dieci coefficienti dello sviluppo sono:

$a_{11}\cong 0.0396962$, $a_{12}\cong 0.0252838$, $a_{13}\cong 0.0202322$, $a_{14}\cong 0.0162136$, $a_{15}\cong 0.0130101$,
$a_{16}\cong 0.0104518$, $a_{17}\cong 0.00840558$, $a_{18}\cong 0.00676660$, $a_{19}\cong 0.00545216$, $a_{20}\cong 0.00439678$.

Il Majorana cerca una soluzione parametrica dell'equazione di Thomas-Fermi nella forma

$$x=x(t), \qquad \varphi=\varphi(t),$$

dove t è un parametro. A questo punto, Majorana esegue il cambio di variabili rappresentato dalle equazioni (1.26) e (1.27). Schematicamente, il metodo è il seguente: Si considerino x e φ come funzioni di t, date rispettivamente dalle equazioni (1.26) e (1.27) (in maniera implicita). Successivamente, si calcolino da esse le loro derivate prime e seconde rispetto a t, e si sostituiscano i risultati nell'equazione di Thomas-Fermi (1.25); si noti che questa equazione contiene derivate di

φ rispetto ad x. Il risultato è un'equazione differenziale del primo ordine (del tipo Abel) per la funzione incognita $u(t)$, cioè la (1.28). Le condizioni ai limiti (1.25) sono infine prese in considerazione nelle equazioni (1.29) e (1.30). Il Majorana considera la descrizione parametrica di x e φ:

$$x = x(t), \qquad \varphi = \varphi(x(t)).$$

Quindi il problema viene riformulato in termini di t ed $u(t)$ usando le equazioni (1.31) e (1.32). La procedura adottata è la seguente: si calcola la derivata rispetto a t dell'equazione (1.32) [considerando $\varphi = \varphi(x(t))$] e si sostituisce in essa l'equazione di Thomas-Fermi (1.25). Allora dall'equazione (1.31) si ottiene x (e la sua derivata rispetto a t), la quale viene sostituita nella relazione appena ottenuta. Il risultato è un'equazione differenziale del primo ordine per $u(t)$, che viene risolta mediante uno sviluppo in serie. Una volta ottenuta $u(t)$, Majorana non deduce l'espressione per la funzione di Thomas-Fermi φ dalle equazioni (1.31) e (1.32), ma di nuovo cerca una soluzione parametrica del tipo

$$x = x(t), \qquad \varphi = \varphi(t),$$

ponendo

$$\varphi(t) = \exp\left\{\int w(t)dt\right\},$$

in cui $w(t)$ è una funzione che può essere espressa in termini di $u(t)$ sostituendo l'espressione di sopra per $\varphi(t)$ nelle equazioni (1.31) e (1.32). Il risultato finale è espresso dalle equazioni (1.37) e (1.38), dove si tiene conto anche delle condizioni ai limiti.

Assunte come unità di lunghezza μ e come unità di carica quella del nucleo, il numero degli elettroni compresi fra la distanza x e $x + dx$ dal nucleo vale:

$$Zx\varphi''dx, \quad (1.39)$$

e l'energia potenziale di uno di essi:

$$U = -\frac{1}{Z}\frac{\varphi}{x}. \quad (1.40)$$

Degli elettroni (1.39) hanno un'energia cinetica $T < -kU \quad (k < 1)$, un numero:

$$Zx\varphi''k^{3/2}dx. \quad (1.41)$$

Segue che gli elettroni il cui termine è minore di T sono:

$$n_T = \int_0^\infty Zx\varphi''\left(1 - \frac{x}{\varphi}y\right)^{3/2} dx, \quad y = \frac{T}{Z} \quad (1.42)$$

e posto: $\alpha = n_T / Z$:

$$\alpha = \int_0^\infty x\varphi''\left(1 - \frac{x}{\varphi}y\right)^{3/2} dx = \int_0^\infty \sqrt{x}(\varphi - xy)^{3/2} dx = F^{-1}(y), \quad (1.43) \qquad y = F(\alpha). \quad (1.44)$$

E poiché $T = Zy$ è manifestamente il termine del $(Z\alpha)$-esimo elettrone, si ricava l'espressione generale del termine dell'ennesimo elettrone, supposto di ordinare gli elettroni secondo i termini decrescenti:

$$T = ZF(\alpha), \text{ con } \alpha = n/Z; \quad (1.45)$$

e passando alle unità ordinarie, esprimendo cioè i termini in unità di Rydberg, si ottiene:

$$T = \frac{16}{(6\pi)^{2/3}} Z^{4/3} F(\alpha) = 2.2590 Z^{4/3} F(\alpha). \quad (1.46)$$

Prima di evidenziare le connessioni ottenute in questo capitolo con la sezione aurea ed il rapporto aureo, è interessante notare che quando una stringa si muove nello spazio-tempo e si divide e si ricombina, un gran numero di identità matematiche devono essere soddisfatte. Queste sono le identità di Ramanujan in funzione modulare. Il diagramma a "loop" KSV (Kikkawa-Sakita-Virasoro) di interazione tra le stringhe può essere descritto usando le funzioni modulari. La "funzione di Ramanujan" (una funzione modulare ellittica che soddisfa la "simmetria conforme") ha 24 "modalità" (24 + 2 = 26) che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica.
Quando la funzione di Ramanujan è generalizzata, 24 è sostituito da 8 (8 + 2 = 10), quindi, ha 8 "modalità" che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una superstringa.
Per quanto concerne il numero 24, dalla seguente equazione modulare di Ramanujan

$$\pi = \frac{24}{\sqrt{142}} \log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)} + \sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right] \quad (1.47),$$

e per la seguente equazione $\pi = 4\left[anti\log \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi t x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi x^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4}w'} \phi_{w'}(itw')}\right] \cdot \frac{1}{t^2 w'}$, (1.48) abbiamo che

$$\frac{24}{\sqrt{142}} \log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)} + \sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right] = 4\left[anti\log \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi t x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi x^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4}w'} \phi_{w'}(itw')}\right] \cdot \frac{1}{t^2 w'}; \quad (1.49)$$

$$24 = \frac{4\left[anti\log \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi t x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi x^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4}w'} \phi_{w'}(itw')}\right] \cdot \frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)} + \sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right]}. \quad (1.50)$$

Per il numero 8, dall'eq. (1.50), otteniamo:

$$8=\frac{1}{3}\frac{4\left[anti\log\frac{\int_0^\infty\frac{\cos\pi txw'}{\cosh\pi x}e^{-\pi x^2w'}dx}{e^{-\frac{\pi t^2}{4}w'}\phi_{w'}(itw')}\right]\cdot\frac{\sqrt{142}}{t^2w'}}{\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right]}. \quad (1.51)$$

Ma, sempre per il numero 8, abbiamo che, dalla seguente equazione modulare di Ramanujan:

$$\pi=\frac{4}{\sqrt{522}}\log\left[\left(\frac{5+\sqrt{29}}{\sqrt{2}}\right)^2\left(5\sqrt{29}+11\sqrt{6}\right)\times\left\{\sqrt{\left(\frac{9+3\sqrt{6}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{5+3\sqrt{6}}{4}\right)}\right\}^{7.5}\right],$$

otteniamo:

$$8=2\cdot\frac{\pi\sqrt{522}}{\log\left[\left(\frac{5+\sqrt{29}}{\sqrt{2}}\right)\left(5\sqrt{29}+11\sqrt{6}\right)\times\left\{\sqrt{\left(\frac{9+3\sqrt{6}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{5+3\sqrt{6}}{4}\right)}\right\}^{7.5}\right]}, \quad (1.52)$$

Quindi, per l'eq. (1.48), abbiamo che:

$$8=2\cdot\frac{4\left[anti\log\frac{\int_0^\infty\frac{\cos\pi txw'}{\cosh\pi x}e^{-\pi x^2w'}dx}{e^{-\frac{\pi t^2}{4}w'}\phi_{w'}(itw')}\right]\frac{\sqrt{522}}{t^2w'}}{\log\left[\left(\frac{5+\sqrt{29}}{\sqrt{2}}\right)\left(5\sqrt{29}+11\sqrt{6}\right)\times\left\{\sqrt{\left(\frac{9+3\sqrt{6}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{5+3\sqrt{6}}{4}\right)}\right\}^{7.5}\right]}. \quad (1.53)$$

Ricordiamo, inoltre, che la (1.50) e la (1.53) sono connesse anche all'equazione fondamentale che è alla base del modello Palumbo-Nardelli:

$$-\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right]=$$
$$=\int_0^\infty\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_\nu\left(\left|F_2\right|^2\right)\right]. \quad (1.53b)$$

Incominciamo ad evidenziare come le somme algebriche dei diversi valori della Tabella 2, siano quasi perfettamente uguali ai valori della sezione aurea e del rapporto aureo. Avremo infatti:

0,486 + 0,129 = **0,615**; 0,936 – 0,315 = **0,621**; 0,374 + 0,243 = **0,617**; 0,424 + 0,193 = **0,617**;

0,561 + 0,059 = **0,620**; 0,453 + 0,108 + 0,059 = **0,620**; 0,521 + 0,079 + 0,017 = **0,617**;
0,882 + 0,793 – 0,059 = **1,616**; 0,721 + 0,660 + 0,243 – 0,009 = **1,615**; 0,607 + 0,012 = **0,619**;
0,353 + 0,333 – 0,046 – 0,024 = **0,616**; 0,398 + 0,157 + 0,036 + 0,029 = **0,620**;
0,333 + 0,315 – 0,024 – 0,007 = **0,617**.

Ricordiamo che $1{,}618033 = \Phi = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ rappresenta il rapporto aureo, e che $0{,}618033 = \phi = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, la sezione aurea.

Riguardo all'equazione (1.32), notiamo che

$$\sqrt[3]{16/3} = 1{,}7471 \cong 1{,}747 \cong \sqrt[4]{\Phi} + \phi = \sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 1{,}7458 \cong 1{,}746. \quad (1.54)$$

Dall'equazione (1.33) e dalle (1.53) e (1.53b), otteniamo invece:

$$\frac{du}{dt}\frac{1-t^2u}{tu^2-1} = 8 = 2 \cdot \frac{4\left[anti\log\frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi txw'}{\cosh \pi x} e^{-\pi x^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4}w'}\phi_{w'}(itw')}\right]\frac{\sqrt{522}}{t^2 w'}}{\log\left[\left(\frac{5+\sqrt{29}}{\sqrt{2}}\right)\left(5\sqrt{29}+11\sqrt{6}\right)\times\left\{\sqrt{\left(\frac{9+3\sqrt{6}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{5+3\sqrt{6}}{4}\right)}\right\}^{7.5}\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2} e^{-2\Phi}\left[R + 4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_v\left(\left|F_2\right|^2\right)\right] =$$

$$= -\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right]. \quad (1.55)$$

Riguardo ai coefficienti della relazione (1.35), notiamo come la somma dei termini a_1 ed a_4 sia uguale a:

$$a_1 + a_4 = 0{,}455996 + 0{,}168212 = 0{,}624208 \cong 0{,}618033 \cong \phi = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right). \quad (1.56)$$

Per quanto concerne, invece, la somma di tutti gli undici termini avremo che:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 2{,}6141024 \cong 2{,}618030789 = \Phi^2, \quad (1.57)$$

con una differenza $d \cong 2{,}618030789 - 2{,}6141024 \cong 0{,}004$.

Anche per la (1.36) abbiamo che:

$\sqrt[3]{\frac{3}{16}} = \sqrt[3]{0{,}1875} = 0{,}572357121$, la cui differenza con $\phi = 0{,}618033$ è uguale a $d = 0{,}0456$.

Dalle (1.37) e (1.38), connesse con le (1.50) ed (1.53b), otteniamo la seguente interessante relazione:

$$\sqrt[3]{144}=\frac{1}{t^2}\cdot x\cdot\sqrt[3]{\exp\left(-\int_0^t\frac{6ut}{1-t^2u}dt\right)}\Rightarrow 144=\left[\frac{1}{t^2}\cdot x\cdot\sqrt[3]{\exp\left(-\int_0^t\frac{6ut}{1-t^2u}dt\right)}\right]^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24\cdot 6=\left[\frac{1}{t^2}\cdot x\cdot\sqrt[3]{\exp\left(-\int_0^t\frac{6ut}{1-t^2u}dt\right)}\right]^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot\frac{4\left[anti\log\frac{\int_0^\infty\frac{\cos\pi txw'}{\cosh\pi x}e^{-\pi x^2w'}dx}{e^{-\frac{\pi t^2}{4}w'}\phi_{w'}(itw')}\right]\cdot\frac{\sqrt{142}}{t^2w'}}{\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right]}=\left[\frac{1}{t^2}\cdot x\cdot\sqrt[3]{\exp\left(-\int_0^t\frac{6ut}{1-t^2u}dt\right)}\right]^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right]=$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_v\left(\left|F_2\right|^2\right)\right].\quad(1.58)$$

Notiamo, inoltre, che 144 è un numero di Fibonacci ed è dato dalla somma 144 = 89 + 55, anch'essi numeri di Fibonacci, e che $\sqrt[3]{144}\cong 5{,}24\cong 2\cdot(\Phi)^2\cong 5{,}236$. Evidenziamo, anche in questo caso, che la differenza tra i due valori è: $d=5{,}240-5{,}236=0{,}004$.
Infine, per quanto riguarda la somma degli altri dieci coefficienti della relazione (1.35), abbiamo che: $a_{11}+a_{12}+a_{13}+...+a_{20}=0{,}14990882$. Ora $\frac{1}{4}\phi=\frac{1}{4}(0{,}618033)=0{,}15450825$. La differenza tra i due valori ottenuti è $d=0{,}15450825-0{,}14990882=0{,}00456$.
Riguardo, infine, l'eq. (1.46) abbiamo che:

$$T=\frac{16}{(6\pi)^{2/3}}Z^{4/3}F(\alpha)\cong 2.26Z^{4/3}F(\alpha)\Rightarrow T=2.26Z^{4/3}F(\alpha)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T\cdot\frac{1}{Z^{4/3}F(\alpha)}\cong 2{,}26\cong(\Phi)^2-\left(\frac{\sqrt{\phi}}{2}\right)\cong(1{,}618033)^2-\left(\frac{\sqrt{0{,}618033}}{2}\right)\cong 2{,}22.$$

Anche in quest'ultimo caso, la differenza tra i due valori è: $d=2{,}26-2{,}22=0{,}04$.
Per quanto concerne i valori delle differenze, cioè 0,04 e 0,004 prima di concludere il paragrafo è interessante spendere qualche parola in più.
La teoria del Global-Scaling, spiega l'Universo di forma ovaloide secondo le immagini venute fuori dal satellite WMAP, in termini di onda G che con le sue vibrazioni di onda stazionaria determina intervalli stabili sulla retta logaritmica usando frazioni a catena per calcolarli che iniziano sempre con il numero 3. Questa onda alla nascita dell'Universo è stata riflessa al confine e quella riflessa si sovrappone a quella originale spostata di $\ln 6$. Cioè, queste due onde esistono in parallelo e sono leggermente spostate fra di loro. Christian Lange ha sempre pensato che seguono la logica dei numeri primi. Anche il famoso "OM, che è all'inizio dell'Universo come Verbo o "suono" creatrice, forma su un tonoscopio una perfetta forma geometrica che si basa su 9 triangoli. I due più grandi hanno come angolo base quello aureo e "pronunciando" l'OM, nello spettro di frequenze si ottengono rapporti aurei. Se alla base vi era un "suono" che ha messo in movimento l'onda G e se questo suono ha a che fare con la sezione aurea, Lange crede che debba esserci un sistema musicale in sezione aurea. Infine, quello che esiste in Natura è in sezione aurea per "risuonare" con queste

frequenze dell'onda G. Il sistema musicale in sezione aurea, si basa su 13 note per ottava, per la precisione **12,96** , ed ogni 9 note Lange ottiene una perfetta sezione aurea. Il sistema è esponenziale su base 2 (per avere l'ottava). Avremo quindi $2^{(x/12,96)}$ con $x = 9,18,27,...$ Lange ha ottenuto il sistema musicale in sezione aurea con 13 note (12,96) per ottava. In questo sistema c'è quindi un piccolo "errore" rispetto all'ottava, precisamente 0,04 pari alla differenza tra 13 e 12,96. Anche Nardelli, nei suoi lavori sulle connessioni tra stringhe-numeri primi-numeri di Fibonacci, afferma che deve esserci una leggera "imperfezione" per dare occasione alla ciclicità e questa corrisponderebbe al numero di Legendre "c" = 1,08366. È interessante evidenziare che la metà del $\ln(c)$, cioè del numero di Legendre "c", è uguale proprio a 0,04. Cioè:

$$\frac{1}{2}\ln(1,08366) = \frac{1}{2}\cdot 0,0803442 = 0,0401721 \cong 0,04 . \quad (1.59)$$

A tale numero è stato dato il nome di **costante del sistema musicale in sezione aurea**. Questo numero è stato trovato in svariate formule inerenti la Teoria delle Stringhe. Nel caso che stiamo esaminando, anche nelle formule collegate all'equazione di Thomas-Fermi che descrive gli elettroni, si trova tale valore (o un suo divisore). Quindi, le stringhe fermioniche che vibrando producono gli elettroni, emettono un "suono" corrispondente ad una ben precisa "nota" del sistema musicale in sezione aurea.

2. Su ulteriori connessioni matematiche tra teoremi e metodi per l'integrazione numerica dell'equazione differenziale di Fermi, Numero Aureo e Sezione Aurea. [6]

Nella fisica atomica è divenuta classica l'equazione differenziale del Fermi

$$y'' = \frac{y^{3/2}}{\sqrt{x}} , \quad (2.1)$$

per la quale sono stati considerati vari problemi di determinazione, interessanti il calcolo degli spettri degli atomi neutri e degli ioni. Tali problemi hanno attratto l'attenzione degli studiosi di analisi matematica, in quanto la trattazione di essi non può immediatamente farsi rientrare nelle classiche teorie dell'analisi, in quanto la (2.1) non è lineare, presenta una singolarità all'origine ed inoltre i problemi stessi riguardano anche l'intervallo $(0,+\infty)$. Il Fermi stesso ha dedicato vari lavori fondamentali allo studio della (2.1) e sono conosciute le ricerche del Sommerfeld per stabilire lo sviluppo asintotico dell'integrale $Y(x)$ della (2.1), che verifica le condizioni

$$Y(0) = 1, \quad (2.2) \qquad Y(+\infty) = 0 . \quad (2.3)$$

Interessa di tale integrale la determinazione, più approssimata possibile, della inclinazione iniziale $Y'(0)$, per la quale è stato trovato il valore $-1,589$.

Prima di iniziare lo studio della (2.1) è importante riportare alcuni risultati del matematico G. Scorza-Dragoni, che si possono riassumere nel modo seguente:

Comunque si prenda un punto (x_0, y_0) del primo quadrante del piano xy, per detto punto passano infinite curve integrali della (2.1), di cui però una soltanto, sempre decrescente, asintotica all'asse x. Delle altre, quelle con inclinazione iniziale maggiore sono al disopra della detta curva asintotica ed hanno ordinata infinitamente grande all'infinito; quelle con inclinazione iniziale minore rimangono invece al disotto e decrescono sempre fino ad incontrare l'asse x. (G. Scorza-Dragoni, 1928).

Ricordiamo adesso il seguente teorema di confronto:

TEOREMA 1.

Se $f_1(x)$ *e* $f_2(x)$ *sono due funzioni, continue, con le loro derivate prime e seconde, nell'intervallo* (a,b) *verificanti in esso le disuguaglianze*

$$f_1(a) \le f_2(a), \qquad f_1^{'}(a) \le f_2^{'}(a), \qquad f_1^{''}(x) \le f_2^{''}(x),$$

allora si ha in tutto (a,b)

$$f_1(x) \le f_2(x), \qquad f_1^{'}(x) \le f_2^{'}(x).$$

Ciò posto, cominciamo a vedere come si può effettuare il calcolo di un integrale $y(x)$ della (2.1), verificante le condizioni iniziali

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0. \quad (2.4)$$

Il metodo che segue, presuppone che sia $y_0^{'} < 0$ ed è valido fintanto che si mantiene $y' < 0$. Ci metteremo pertanto in queste ipotesi, che sono, del resto, quelle delle applicazioni. Si ha:

$$\frac{dy^{\frac{3}{2}}}{dx} = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} y' \le 0,$$

$$\frac{d^2 y^{\frac{3}{2}}}{dx} = \frac{3}{4} y^{-\frac{1}{2}} y'^2 + \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} y'' = \frac{3}{4} y^{-\frac{1}{2}} y'^2 + \frac{3}{2} \frac{y^2}{\sqrt{x}} > 0,$$

e quindi, per $x > x_0$, è:

$$y_0^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} y_0^{\frac{1}{2}} y_0^{'} (x - x_0) < y^{\frac{3}{2}} < y_0^{\frac{3}{2}}.$$

Definiamo $U(x, x_0, y_0, y_0^{'})$ e $u(x, x_0, y_0, y_0^{'})$ due funzioni di x verificanti le (2.4) le quali soddisfano, rispettivamente, alle equazioni differenziali

$$U'' = \frac{y_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}, \quad (2.5) \qquad u'' = \frac{y_0^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} y_0^{\frac{1}{2}} y_0^{'} (x - x_0)}{\sqrt{x}}, \quad (2.6)$$

poniamo cioè

$$U(x, x_0, y_0, y_0^{'}) = y_0 + y_0^{'}(x - x_0) + \frac{2}{3} y_0^{\frac{3}{2}} \left[2x_0^{\frac{3}{2}} - 3x x_0^{\frac{1}{2}} + x_0^{\frac{3}{2}} \right], \quad (2.7)$$

$$u(x, x_0, y_0, y_0^{'}) = U(x, x_0, y_0, y_0^{'}) + \frac{2}{5} y_0^{\frac{1}{2}} y_0^{'} \left[(x - x_0)\left(x^{\frac{3}{2}} + x_0^{\frac{3}{2}} \right) - 4\left(x_0 x^{\frac{3}{2}} - x_0^{\frac{3}{2}} x \right) \right]. \quad (2.8)$$

Per il primo teorema di confronto sarà, per $x < x_0$,

$$U(x) > y(x) > u(x), \qquad U'(x) > y'(x) > u'(x).$$

Queste formule sono utilizzabili per una effettiva valutazione numerica di $y(x)$ ed $y'(x)$ nelle vicinanze di x_0. Detto ora $x_1 (> x_0)$ un punto prossimo ad x_0, poniamo

$$U(x_1, x_0, y_0, y_0') = U_1, \quad U'(x_1, x_0, y_0, y_0') = U_1', \quad u(x_1, x_0, y_0, y_0') = u_1, \quad u'(x_1, x_0, y_0, y_0') = u_1'.$$

Sempre per il Teorema 1, sarà per $x > x_1$,

$$U(x, x_1, U_1, U_1') > y(x) > u(x, x_1, u_1, u_1'), \qquad U'(x, x_1, U_1, U_1') > y'(x) > u'(x, x_1, u_1, u_1').$$

Scelta allora, a destra di x_0, una successione di punti $x_1, x_2, \ldots$, che si succedono ad uguali intervalli e posto, con evidente significato dei simboli

$$Z(x) = U(x, x_n, U_n, U_n'), \quad \text{per } x_n \le x \le x_{n+1}, \qquad z(x) = u(x, x_n, u_n, u_n'), \quad \text{per } x_n \le x \le x_{n+1},$$

si ha

$$Z(x) > y(x) > z(x).$$

In tal modo il problema dell'integrazione numerica della (2.1), con le condizioni iniziali (2.4), è completamente risolto, perché la differenza $(z(x) - Z(x))$ può rendersi piccola quanto si vuole, prendendo opportunamente piccola la quantità $(x_{n+1} - x_n)$.
Indicheremo, adesso, con $y(x, \alpha)$ l'integrale della (2.1) che verifica le condizioni iniziali

$$y(0, \alpha) = 1, \qquad y'(0, \alpha) = \alpha. \quad (2.9)$$

In seguito considereremo anche la seguente funzione:

$$\eta(x, \alpha) = \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha}.$$

Infatti la conoscenza di $\eta(x, \alpha)$, per $\alpha = \alpha_0$, permette, quando si conosce $y(x, \alpha_0)$, di calcolare $y(x, \alpha)$ per valori di α prossimi ad α_0, mediante la formula approssimata

$$y(x, \alpha) = y(x, \alpha_0) + (\alpha - \alpha_0)\eta(x, \alpha_0). \quad (2.10)$$

La $\eta(x, \alpha)$ soddisfa alle equazioni alle variazioni delle (2.1) e (2.9):

$$\eta''(x, \alpha) = \frac{3}{2} \frac{y^{\frac{1}{2}}(x, \alpha)}{\sqrt{x}} \eta(x, \alpha), \quad (2.11) \qquad \eta(0, \alpha) = 0, \quad \eta'(0, \alpha) = 1, \quad (2.12)$$

dove gli apici continuano ad essere simboli di derivazione rispetto ad x. Dalle (2.11) e (2.12) si ricava, in base a noti teoremi sulle equazioni differenziali, che, per $x > x_0$, è

$$\eta(x, \alpha) > 0, \qquad \eta'(x, \alpha) > 1. \quad (2.13)$$

Detto x_0 un numero non negativo, supponiamo che riesca

$$\eta(x_0)=\eta_0, \qquad \eta'(x_0)=\eta'(0). \quad (2.14)$$

Potremo considerare come valori approssimati di $\eta(x)$, in punti prossimi ad x, i valori che prendono gli integrali $V(x,x_0,\eta_0,\eta_0')$ e $v(x,x_0,\eta_0,\eta_0')$ delle equazioni:

$$V''=\frac{3}{2}\frac{y_0^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}\eta_0, \quad (2.15) \qquad v''=\frac{3}{2}\frac{y_0^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}\left(\eta_0+\eta_0'(x-x_0)\right), \quad (2.16)$$

verificanti le (2.14). Si ha:

$$V(x,x_0,\eta_0,\eta_0')=\eta_0+\eta_0'(x-x_0)+y_0^{\frac{1}{2}}\left[2x^{\frac{3}{2}}-3xx_0^{\frac{1}{2}}+x_0^{\frac{3}{2}}\right], \quad (2.17)$$

$$v(x,x_0,\eta_0,\eta_0')=V(x,x_0,\eta_0,\eta_0')+\frac{2}{5}y_0^{\frac{1}{2}}\eta_0'\left[(x-x_0)\left(x^{\frac{3}{2}}+x_0^{\frac{3}{2}}\right)-4\left(x_0x^{\frac{3}{2}}-x_0^{\frac{3}{2}}x\right)\right]. \quad (2.18)$$

È interessante notare una proprietà di cui gode la funzione

$$\eta_1(x,\alpha)=\frac{\partial\eta(x,\alpha)}{\partial\alpha}.$$

La $\eta_1(x,\alpha)$ soddisfa alle equazioni

$$\eta_1''(x,\alpha)=\frac{3}{2}\frac{y^{\frac{1}{2}}(x,\alpha)}{\sqrt{x}}\eta_1(x,\alpha)+\frac{3}{4}\frac{y^{-\frac{1}{2}}(x,\alpha)}{\sqrt{x}}\eta(x,\alpha), \quad (2.19) \qquad \eta_1(0,\alpha)=\eta_1'(0,\alpha)=0, \quad (2.20)$$

da cui si deduce, per $x>0$,

$$\eta_1(x,\alpha)>0, \qquad \eta_1'(x,\alpha)>0. \quad (2.21)$$

Per poter applicare il metodo di integrazione numerica al calcolo di $Y(x)$, è necessario determinare preventivamente $Y'(0)$.

TEOREMA 2.

Siano $f(x,y,y')$ e $g(x,y,y')$ due funzioni finite e continue con le loro derivate parziali prime, per

$$a\le x\le b, \qquad A\le y\le B, \qquad -\infty<y'<+\infty,$$

verificanti le disuguaglianze

$$f(x,y,y')\le g(x,y,y'), \qquad f_y(x,y,y')\ge 0, \qquad g_y(x,y,y')\ge 0.$$

Se indichiamo con $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *due integrali rispettivamente delle equazioni differenziali*

$$y_1''(x) = f\left(x, y_1(x), y_1'(x)\right), \qquad y_2'' = g\left(x, y_2(x), y_2'(x)\right),$$

tali che

$$y_1(a) \geq y_2(a), \qquad y_1(b) \geq y_2(b),$$

risulta, in tutto l'intervallo (a, b),

$$y_1(x) \geq y_2(x).$$

Il teorema di confronto ora enunciato, permette di costruire subito delle funzioni verificanti le (2.2) e (2.3) e maggioranti $Y(x)$. Le derivate di tali funzioni per $x = 0$ sono numeri maggioranti $Y'(0)$. Dette m e p due costanti positive, vediamo se esistono funzioni maggioranti $Y(x)$ del tipo

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1+mx)^p}. \quad (2.22)$$

La $\varphi(x)$ verifica le (2.2) e (2.3) ed inoltre si ha

$$\varphi'' = \frac{m^2 p(p+1)}{(1+mx)^{p+2}} = \varphi^{\frac{3}{2}} \frac{m^2 p(p+1)}{(1+mx)^{2-\frac{p}{2}}}.$$

Per il Teorema 2 sarà $\varphi(x) \geq Y(x)$, non appena risulti

$$\frac{m^2 p(p+1)}{(1+mx)^{2-\frac{p}{2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (2.23)$$

È intanto evidente che, affinché la (2.23) sia soddisfatta, deve essere

$$2 - \frac{p}{2} \geq \frac{1}{2},$$

ossia

$$p \leq 3. \quad (2.24)$$

Si vede subito che:

TEOREMA 3.

Se $p = 3$ *condizione necessaria e sufficiente, affinché sia soddisfatta la (2.23), è che risulti*

$$m \leq 12^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{12^{0,666...}} = 0.190785707 \approx 0.191. \quad (2.24b)$$

Poiché $\varphi'(0) = -mp$, converrà scegliere $m = 12^{-\frac{2}{3}}$, in modo che $\varphi'(0)$ abbia il minimo valore possibile. Si ha in tal modo una prima funzione maggiorante $Y(x)$:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\left(1 + 12^{-\frac{2}{3}} x\right)^3}, \quad (2.25)$$

ed una prima maggiorazione per $Y'(0)$:

$$Y'(0) \le \varphi'(0) \approx -0.572 . \quad (2.26)$$

Supponiamo ora $p < 3$, la (2.23) può scriversi

$$A(x) = \frac{(1+mx)^{4-p}}{x} - m^4 p^2 (p+1)^2 \ge 0 .$$

Ora

$$A'(x) = \frac{(1+mx)^{3-p}}{x^2}\left[(3-p)mx - 1\right],$$

da cui

$$A'(x) \le 0, \; A'(x) \ge 0 \quad \text{secondo che è} \quad x \le \frac{1}{(3-p)m}, \; x \ge \frac{1}{(3-p)m},$$

e quindi, perché sia soddisfatta la (2.23), occorre e basta che sia

$$A\left(\frac{1}{(3-p)m}\right) \ge 0 .$$

Eseguiti i calcoli si può in definitiva concludere che:

TEOREMA 4.

La funzione $(1+mx)^{-p}$, con $p < 3$, maggiora $Y(x)$ se le costanti m e p verificano la disuguaglianza

$$mp \le \left[\frac{(4-p)^{4-p}}{(3-p)^{3-p}} \cdot \frac{p}{(1+p)^2}\right]^{\frac{1}{2}} . \quad (2.27)$$

Anche qui converrà scegliere p in modo che il secondo membro della (2.27) abbia il massimo valore possibile e successivamente determinare m, in modo che nella (2.27) valga il segno di eguaglianza. In tal modo si trova

$$p \approx \frac{2}{3}, \qquad m \approx 1{,}837 , \quad (2.27b)$$

e si ha la funzione maggiorante

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{(1+1{,}837x)^{\frac{2}{3}}}, \quad (2.28)$$

mentre per $Y'(0)$ si trova la nuova limitazione

$$Y'(0) \le -1{,}22 . \quad (2.29)$$

Vedremo ora come si possano ottenere funzioni minoranti $Y(x)$ e verificanti la (2.2), in modo che le derivate di tali funzioni per $x=0$ siano numeri minoranti $Y'(0)$. Detta $\varphi(x)$ una funzione maggiorante $Y(x)$ in tutto l'intervallo $(0,+\infty)$, consideriamo un integrale $\psi(x)$ dell'equazione

$$\psi'' = \frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}},$$

verificante le condizioni

$$\psi(0) = 1, \qquad \psi(x_0) = 0,$$

dove x_0 è un arbitrario numero positivo. Sarà

$$\psi(x) = 1 + Kx + \int_0^x \frac{x-t}{\sqrt{t}} \varphi^{\frac{3}{2}}(t)dt \qquad \text{con} \qquad k = -\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0}\int_0^{x_0} \frac{x_0 - t}{\sqrt{t}} \varphi^{\frac{3}{2}}(t)dt,$$

e risulterà per il Teorema 2,

$$Y(x) \ge \psi(x), \quad Y'(0) \ge \psi'(0) = k .$$

Poiché x_0 è arbitrario, vediamo di determinarlo in modo che k abbia il massimo valore possibile. Si ha

$$\frac{dk}{dx_0} = \frac{1}{x_0^2}\left[1 - \int_0^{x_0} \varphi^{\frac{3}{2}}(t)\sqrt{t}\,dt\right].$$

Poiché

$$\int_0^\infty Y^{\frac{3}{2}}(t)\sqrt{t}\,dt = 1,$$

l'integrale che compare nell'espressione $\frac{dk}{dx_0}$ assumerà, per x_0 abbastanza grande, valori maggiori di 1 e pertanto $\frac{dk}{dx_0}$, che è inizialmente positiva, finirà per diventare e restare negativa e quindi k ha il suo massimo valore quando

$$\frac{dk}{dx_0} = 0 .$$

Concludendo

TEOREMA 5.

Se $\varphi(x)$ *è una funzione maggiorante* $Y(x)$ *e* x_0 *è tale da risultare*

$$\int_0^{x_0} \varphi^{\frac{3}{2}}(t)\sqrt{t}\,dt = 1, \quad (2.30)$$

si ha

$$Y'(0) \geq -\int_0^{x_0} \frac{\varphi^{\frac{3}{2}}(t)}{\sqrt{t}}\,dt. \quad (2.31)$$

Prendendo come funzione maggiorante la $\varphi_1(x)$, definita dalla (2.25), e applicando la (2.31), si è trovata per $Y'(0)$ la limitazione

$$Y'(0) \geq -1{,}92. \quad (2.32)$$

La (2.29) e la (2.32) forniscono una prima indicazione sull'intervallo in cui bisogna ricercare $Y'(0)$, ma è evidente la necessità di stabilire formule di maggiorazione più ristrette ed è questo quello che faremo nel seguito del capitolo.
Per prima cosa, osserveremo che, come conseguenza immediata del Teorema 2, si ha:

TEOREMA 6.

Ogni integrale $y(x)$ *della (2.1), verificante la (2.2), ed avente per* $x = x_0$ *un valore minore (maggiore) di* $Y(x_0)$ *è tutto al disotto (disopra) di* $Y(x)$, *per* $0 \leq x \leq x_0$, *e si ha quindi*

$$y'(0) \leq Y'(0)\left[y'(0) \geq Y'(0)\right].$$

In particolare:

TEOREMA 7.

Se $y(x)$ *è un integrale della (2.1), verificante la (2.2) e nullo per* $x = \xi$, *si ha*

$$y(x) \leq Y(x), \qquad y'(0) \leq Y'(0).$$

Sussiste anche il teorema:

TEOREMA 8.

Se $y(x)$ *è un integrale della (2.1), verificante la (2.2) ed avente derivata prima nulla per* $x = \xi_1$, *si ha*

$$y(\xi_1) > 0, \qquad y(x) \geq Y(x), \qquad y'(0) \geq Y'(0).$$

Se infatti fosse $y(\xi_1)=0$, la $y(x)$ sarebbe minorante la $Y(x)$ in tutto l'intervallo $(0,\xi_1)$ e quindi si avrebbe

$$\int_0^{\xi_1} y^{\frac{3}{2}}(t)\sqrt{t}\,dt < \int_0^{\infty} Y^{\frac{3}{2}}(t)\sqrt{t}\,dt = 1,$$

e ciò è impossibile perché

$$\int_0^{\xi_1} y^{\frac{3}{2}}(t)\sqrt{t}\,dt = 1+\xi_1 y'(\xi_1) = 1.$$

Si ha quindi $y(\xi_1)>0$ e quindi anche $y''(\xi_1)>0$ per cui la $y'(x)$ è sempre positiva e crescente per $x>\xi_1$, per cui

$$y(+\infty)=+\infty.$$

Le altre due disuguaglianze del Teorema 8 seguono allora dal Teorema 2. Per quanto abbiamo detto $\xi(\alpha)$ è definita al variare di α nell'intervallo $(-\infty, Y'(0))$ e la $\xi_1(\alpha)$ nell'intervallo $(Y'(0),+\infty)$. Dalle relazioni

$$y(\xi(\alpha),\alpha)=0, \quad (2.33) \qquad y'(\xi_1(\alpha),\alpha)=0, \quad (2.34)$$

si deduce che $\xi(\alpha)$ e $\xi_1(\alpha)$ sono continue e derivabili e per le loro derivate si hanno le formule

$$\frac{d\xi}{d\alpha}=-\frac{\eta(\xi(\alpha),\alpha)}{y'(\xi(\alpha),\alpha)}, \quad (2.35) \qquad \frac{d\xi_1}{d\alpha}=-\frac{\eta'(\xi_1(\alpha),\alpha)}{y''(\xi_1(\alpha),\alpha)} \quad (2.36)$$

dove è, come al solito $\eta(x,\alpha)=\dfrac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha}$.

Vediamo ora come, conoscendo un valore per difetto di $Y'(0)$ si possa calcolare un valore per eccesso. Poniamo

$$\beta(\alpha)=y'(\xi(\alpha),\alpha),$$

con che si ha, tenendo conto delle (2.1), (2.11), (2.33), per $\alpha<Y'(0)$,

$$\beta(\alpha)<0, \qquad \frac{d\beta}{d\alpha}=\eta'(\xi(\alpha),\alpha)>0, \qquad \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}=\eta_1'(\xi(\alpha),\alpha)>0.$$

Pertanto la curva di equazione $\beta=\beta(\alpha)$ è crescente e volge la concavità verso l'alto, mentre, d'altra parte, essa incontra l'asse α per $\alpha=Y'(0)$. Ciò porta che la tangente alla detta curva, in un punto di ascissa minore di $Y'(0)$, incontra l'asse α a destra di $Y'(0)$. Concludendo:

TEOREMA 9.

Se è $\alpha<Y'(0)$, *è anche*

$$Y'(0)\le \alpha-\frac{y'(\xi(\alpha),\alpha)}{\eta'(\xi(\alpha),\alpha)}. \quad (2.37)$$

Poiché $\eta'(x)>1$, dalla (2.37) si deduce anche

$$Y'(0) \leq \alpha - y'(\xi(\alpha),\alpha); \quad (2.38)$$

tale formula può essere utile nei casi in cui non si conosce $\eta'(x)$. Poniamo ora, per $\alpha > Y'(0)$,

$$\beta_1(\alpha) = y(\xi_1(\alpha),\alpha).$$

Si ha

$$\beta_1(\alpha) > 0, \qquad \frac{d\beta_1}{d\alpha} = \eta(\xi_1(\alpha),\alpha) > 0.$$

Se fosse

$$\frac{d^2\beta_1}{d\alpha^2} < 0, \quad (2.39)$$

varrebbe la formula

$$Y'(0) \geq \alpha - \frac{y\,(\xi_1(\alpha),\alpha)}{\eta\,(\xi_1(\alpha),\alpha)}. \quad (2.40)$$

Precisiamo che tale formula è vera per tutti i valori di α prossimi ad $Y'(0)$.
Detto x_0 un numero positivo, è possibile calcolare rapidamente l'integrale $Y(x,\lambda)$ della (2.1), che verifica le condizioni

$$Y(x_0,\lambda) = \lambda, \qquad Y(+\infty,\lambda) = 0. \quad (2.41)$$

Poniamo

$$-1{,}5882 = \alpha_1, \qquad y(x_0,-1{,}5882) = \lambda_1.$$

Si ha certamente, detto x_1 un punto a destra di x_0,

$$Y(x_1) > Y(x_1,\lambda_1) > y(x,\alpha_1).$$

Diciamo allora α_2 un tale numero da risultare

$$y(x_1,\alpha_2) = Y(x_1,\lambda_1).$$

Il calcolo di α_2 può farsi con la formula approssimata

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{Y(x_1,\lambda_1) - y(x_1,\alpha_1)}{\eta(x_1,\alpha_1)}.$$

Si ha certamente

$$\alpha_1 < \alpha_2 < Y'(0),$$

e quindi, posto

$$y(x_0,\alpha_2) = \lambda_2,$$

si ha

$$y(x_1,\alpha_2) < Y(x_1,\lambda_1) < Y(x_1).$$

Si determina allora α_3, in modo che sia

$$y(x_1,\alpha_3) = Y(x_1,\lambda_2),$$

si pone cioè

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \frac{Y(x_1,\lambda_2) - y(x_1,\alpha_1)}{\eta(x_1,\alpha_1)}$$

e si prosegue. Naturalmente le $y(x,\alpha_i)$ si calcolano tutte con la formula approssimata

$$y(x,\alpha_i) = y(x,\alpha_1) + (\alpha_i - \alpha_1)\eta(x,\alpha_1).$$

Con questo procedimento si viene a costruire una successione crescente di numeri

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

aventi per limite $Y'(0)$. Ci si potrà arrestare nel calcolo delle α_i quando si troverà che $y(x,\alpha_i)$ e $Y(x,\lambda_i)$ hanno sensibilmente lo stesso valore per $x = x_1$. Tale metodo è stato applicato assumendo

$$x_0 = 6, \qquad x_1 = 9, \qquad x_2 = 9{,}5$$

e, dopo soltanto due approssimazioni, si è trovato per $Y'(0)$ il valore

$$Y'(0) = -1{,}5880464. \quad (2.42)$$

Determinato $Y'(0)$, è possibile effettuare il calcolo di $Y(x)$, con la formula approssimata

$$Y(x) = y(x,-1{,}5882) + 0{,}0001536\eta(x,-1{,}5882),$$

per $0 \le x \le 9$ e per mezzo di $Y(x,\lambda)$, per $9 \le x \le 1000$.
Fissato ora a piacere $x_0 > 0$, diciamo che $y(x,\lambda,\alpha)$ è l'integrale della (2.1), che verifica le condizioni

$$y(x_0,\lambda,\alpha) = \lambda, \qquad y'(x_0,\lambda,\alpha) = \alpha. \quad (2.43)$$

Siano λ_0 e α_0 due numeri reali, tali da risultare

$$y(x_0,\lambda_0,\alpha_0) = \lambda_0, \qquad y(+\infty,\lambda_0,\alpha_0) = 0. \quad (2.44)$$

Si potranno certo trovare due intorni complessi $C(\lambda_0)$ e $C(\alpha_0)$ di raggio ρ di λ_0 ed α_0 tali che, al variare di λ ed α in essi, $y(x,\lambda,\alpha)$ sia, per ogni x, una funzione olomorfa di λ e di α.
Sia $I(\lambda_0)$ l'intervallo di centro λ_0, staccato nell'asse reale da $C(\lambda_0)$. In $I(\lambda_0)$ si potrà sempre definire una funzione reale e continua $\alpha(\lambda)$, soddisfacente alla limitazione

$$|\alpha(\lambda)-\alpha_0|<\rho$$

tale che risulti

$$y(+\infty,\lambda,\alpha(\lambda))=0\,.$$

Evidentemente sarà

$$\alpha(\lambda_0)=\alpha_0\,.$$

Dimostriamo ora che $\alpha(\lambda)$ è una funzione analitica. Per questo consideriamo una funzione $\alpha_n(\lambda)$, definita in $C(\lambda_0)$, tale che risulti

$$y'(n,\lambda,\alpha_n(\lambda))=0\,,$$

essendo n un numero intero maggiore di x_0. Per dimostrare che tale funzione esiste, basterà far vedere che è

$$y'_\alpha(n,\lambda,\alpha)\neq 0$$

in tutto $C(\lambda_0)$. Per questo osserviamo che la funzione

$$\eta(x)=y_\alpha(x,\lambda,\alpha)$$

soddisfa al sistema

$$\begin{cases}\eta''=\dfrac{3}{2}\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}\eta,\\ \eta(x_0)=0,\eta'(x_0)=1.\end{cases}$$

Posto

$$y=|y|e^{i\theta}\,,\qquad \eta=|\eta|e^{i\gamma}$$

si ha che $|\eta|$ soddisfa al sistema

$$\begin{cases}|\eta'|=\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{|y|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}\cos\dfrac{\theta}{2}+\gamma'^2\right)|\eta|,\\ |\eta(x_0)|=0,|\eta(x_0)|'=1.\end{cases}$$

Poiché dev'essere

$$\cos\frac{\theta}{2}>0$$

si ha

$$|\eta'(x)|\geq|\eta(x)|'\geq 1\,,$$

il che prova l'esistenza delle $\alpha_n(\lambda)$. È inoltre possibile affermare che tali funzioni sono olomorfe in $C(\lambda_0)$. Per λ reale si ha anche

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(\lambda)=\alpha(\lambda).$$

Per un noto teorema di Vitali, affinché la $\alpha(\lambda)$ sia analitica, basta che le $\alpha_n(\lambda)$ rimangano in modulo inferiori ad un numero fisso. Per vedere questo anzitutto osserviamo che $|y(x,\lambda,\alpha)|$ soddisfa al sistema

$$\begin{cases} |y|''=\dfrac{|y|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}\cos\dfrac{\theta}{2}+\theta'^2|y|, \\ |y(x_0)|=|\lambda|, |y(n)|'=0, \end{cases}$$

da cui si deduce facilmente, tenendo presente che $\cos\frac{\theta}{2}>0$, che

$$|y(x)|<|\lambda|.$$

Si ha allora, posto $y(x,\lambda,\alpha_n(\lambda))=y_n(x,\lambda)$,

$$\left|\int_{x_0}^{n}\frac{y_n^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}dx\right|\le 2\frac{|\lambda|^{\frac{3}{2}}}{x_0^{\frac{1}{2}}}.$$

D'altra parte

$$\int_{x_0}^{n}\frac{y_n^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}dx=\int_{x_0}^{n}\frac{y_n''}{x}dx=-\frac{\alpha_n(\lambda)}{x_0}+\int_{x_0}^{n}\frac{y_n'}{x^2}dx=-\frac{\alpha_n(\lambda)}{x_0}+\frac{y_n(n,\lambda)}{n^2}-\frac{y_n(x_0,\lambda)}{x_0^2}+2\int_{x_0}^{n}\frac{y_n}{x^3}dx. \quad (2.45)$$

In definitiva

$$|\alpha_n(\lambda)|\le x_0\left[2\frac{|\lambda|^{\frac{3}{2}}}{x_0^{\frac{1}{2}}}+\frac{3|\lambda|}{x_0^2}\right].$$

Resta con ciò dimostrato che $\alpha(\lambda)$ è funzione olomorfa di λ in $C(\lambda_0)$. Tale sarà anche la funzione

$$Y(x,\lambda)=y(x,\lambda,\alpha(\lambda)),$$

che è proprio quell'integrale della (2.1) verificante le (2.41) di cui ci siamo serviti precedentemente. Poniamo adesso

$$Y_k(x,\lambda)=\frac{\partial^k Y(x,\lambda)}{\partial\lambda^k}.$$

Derivando la (2.1) e le (2.41) rispetto a λ si ottiene

$$\begin{cases} Y_1''(x,\lambda) = \dfrac{3}{2}\dfrac{Y^{\frac{1}{2}}(x,\lambda)}{\sqrt{x}} Y_1(x,\lambda), \\ Y(x_0,\lambda) = 1, Y(+\infty,\lambda) = 0. \end{cases} \quad (2.46)$$

Derivando le (2.46) $(k-1)$ volte rispetto a λ si ha

$$\begin{cases} Y_k''(x,\lambda) = \dfrac{3}{2}\dfrac{Y^{\frac{1}{2}}(x,\lambda)}{\sqrt{x}} Y_k(x,\lambda) + f_k(x,\lambda) \\ Y_k(x_0,\lambda) = 0, Y_k(+\infty,\lambda) = 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Dalla (2.47) si deduce facilmente per $f_k(x,\lambda)$ la formula ricorrente

$$f_k(x,\lambda) = \frac{3}{4}\frac{Y^{-\frac{1}{2}}(x,\lambda)}{\sqrt{x}} Y_1(x,\lambda) Y_k(x,\lambda) + \frac{\partial_{f_{k-1}}(x,\lambda)}{\partial\lambda}, \quad (2.48)$$

da cui si trae

$$f_k(x,\lambda) = \frac{3}{4\sqrt{x}} \sum_0^{k-2}{}_h \frac{\partial^h}{\partial\lambda^h}\left(Y^{-\frac{1}{2}}(x,\lambda) Y_1(x,\lambda) Y_{k-h-1}(x,\lambda)\right) =$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{x}} \sum_0^{k-2}{}_h \sum_0^{h}{}_i \sum_0^{i}{}_j \binom{h}{i}\binom{i}{j} \frac{\partial^{h-i} Y_{k-h-1}(x,\lambda)}{\partial\lambda^{h-i}} \cdot \frac{\partial^{i-j} Y_1(x,\lambda)}{\partial\lambda^{i-j}} \cdot \frac{\partial^j Y^{-\frac{1}{2}}(x,\lambda)}{\partial\lambda^j} =$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{x}} \sum_0^{k-2}{}_h \sum_0^{h}{}_i \sum_0^{i}{}_j \binom{h}{i}\binom{i}{j} Y_{k-i-1}(x,\lambda) Y_{i-j+1}(x,\lambda) \frac{\partial^j Y^{-\frac{1}{2}}(x,\lambda)}{\partial\lambda^j}. \quad (2.49)$$

La proprietà delle $Y_k(x,\lambda)$ è la seguente

TEOREMA 10.

Per $x \geq x_0$ le $Y_k(x,\lambda)$ verificano le disuguaglianze

$$(-1)^k Y_k(x,\lambda) \leq 0. \quad (2.50)$$

Le $Y_k(x,\lambda)$ sono positive o nulle agli estremi dell'intervallo $(x_0,+\infty)$, per cui, per un noto teorema sulle equazioni differenziali, perché sia soddisfatta la (2.50) basta che risulti

$$(-1)^k f_k(x,\lambda) \geq 0. \quad (2.51)$$

Si ha

$$(-1)^k f_k(x,\lambda) = \frac{3}{4\sqrt{x}} \sum_0^{k-2}{}_h \sum_0^{h}{}_i \sum_0^{i}{}_j \binom{h}{i}\binom{i}{j} \cdot (-1)^{k-i-1} Y_{k-i-1}(x,\lambda) \cdot (-1)^{i-j+1} Y_{i-j+1}(x,\lambda) \cdot (-1)^j \frac{\partial^j Y^{-\frac{1}{2}}(x,\lambda)}{\partial\lambda^j}.$$

Diciamo che

$$(-1)^j \frac{\partial^j Y^{-\frac{1}{2}}(x,\lambda)}{\partial \lambda^j} > 0 \qquad (j = 0,1,\ldots,k-2)\,. \quad (2.52)$$

Infatti

$$(-1)^j \frac{\partial^j Y^{-\frac{1}{2}}(x,\lambda)}{\partial \lambda^j} = (-1)^j \sum_1^j {}_p \frac{1}{p!}\left[\frac{d^p y^{-\frac{1}{2}}}{dy^p}\right]_{y=Y(x,\lambda)} \sum_1^{j-p+1} {}_{h_1 \ldots h_{p-1}} \frac{Y_{h_1}(x,\lambda)\ldots Y_{h_{p-1}}(x,\lambda) Y_{j-\sum h_m}(x,\lambda)}{h_1!\ldots P_{p-1}!\left(j-\sum h_m\right)!} =$$

$$= \sum_1^j {}_p \frac{(-1)^p}{p!}\left[\frac{d^p y^{-\frac{1}{2}}}{dy^p}\right]_{y=Y(x,\lambda)} \sum_1^{j-p+1} {}_{h_1 \ldots h_{p-1}} \frac{(-1)^{h_1-1} Y_{h_1}(x,\lambda)\ldots(-1)^{h_{p-1}-1} Y_{h_p-1}(x,\lambda)(-1)^{j-1-\sum h_m} Y_{j-\sum h_m}}{h_1!\ldots h_{p-1}!\left(j-\sum h_m\right)!},$$

per cui si vede che, se la (2.51) o quindi la (2.50) sono soddisfatte per $k = 1,\ldots,(n-1)$, la (2.52) è soddisfatta per $j = 0,1,\ldots,n-1$, da cui segue che la (2.51) e quindi la (2.50), lo sono anche per $k = n$. Poiché per $k = 1,2$ la (2.51) è subito verificata, resta con ciò dimostrato il Teorema.
Consideriamo ora la serie di Taylor di $Y(x,\lambda)$ di punto iniziale reale λ_0

$$Y(x,\lambda_0) + \frac{(\lambda-\lambda_0)}{1!} Y_1(x,\lambda_0) + \ldots + \frac{(\lambda-\lambda_0)^n}{n!} Y_n(x,\lambda_0) + \ldots \quad (2.53)$$

Se $0 \le \lambda \le \lambda_0$ la (2.50) ci assicura che tutti i termini della serie (2.53), dopo il primo, sono negativi, così che, detta $S_n(x,\lambda)$ la sua somma parziale n-esima, la successione delle $S_n(x,\lambda)$ risulta decrescente. D'altra parte si ha

$$Y(x,\lambda) = S_n(x,\lambda) + \frac{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}{(n+1)!} Y_{n+1}(x_1, \lambda_0 + \theta(\lambda-\lambda_0)),$$

essendo $0 \le \theta \le 1$. Da qui segue, sempre per la (2.50),

$$Y(x,\lambda) \le S_n(x,\lambda). \quad (2.54)$$

La successione delle $S_n(x,\lambda)$ e quindi la serie (2.53) sono perciò addirittura convergenti per $\lambda \le \lambda_0$. Poiché $Y(x,\lambda)$ è funzione olomorfa di λ sarà, per $|\lambda-\lambda_0| < \lambda_0$,

$$Y(x,\lambda) = \sum_0^\infty {}_k \frac{(\lambda-\lambda_0)^k}{k!} Y_k(x,\lambda). \quad (2.55)$$

Poiché tutte le $Y_k(x,\lambda)$ sono nulle per $x = +\infty$, la convergenza della serie (2.55) è tanto più rapida quanto più grande è x, e quindi ognuna della $S_n(x,\lambda)$ potrà assumersi come rappresentazione asintotica della $Y(x,\lambda)$. La (2.55) non può ancora essere utilizzata per il calcolo numerico di $Y(x,\lambda)$; per questo è necessario poter calcolare numericamente le $Y_k(x,\lambda_0)$, almeno per un particolare valore di λ_0. A tale scopo ricordiamo che la funzione

$$\eta_0(x) = \frac{144}{x^3} \quad (2.56)$$

è un integrale della (2.1) nullo all'infinito e che, perciò, posto

$$\overline{\lambda}_0 = \frac{144}{x_0^3}, \quad (2.57)$$

si ha

$$Y\left(x, \overline{\lambda}_0\right) = \frac{144}{x^3}. \quad (2.58)$$

Poniamo ancora

$$Y_k\left(x, \overline{\lambda}_0\right) = \eta_k(x). \quad (2.59)$$

Tali funzioni dovranno soddisfare alle equazioni che si ottengono dalle (2.46) e (2.47) ponendo in esse $\lambda = \overline{\lambda}_0$, ossia

$$\begin{cases} \eta_1'' = \dfrac{18}{x^2}\eta_1, \\ \eta_1(x_0) = 1, \eta_1(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (2.60)$$

$$\begin{cases} \eta_k'' = \dfrac{18}{x^2}\eta_k + f_k\left(x, \overline{\lambda}_0\right), \\ \eta_k(x_0) = 0, \eta_k(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (2.61)$$

I sistemi (2.60) e (2.61) si possono integrare in termini finiti, e posto

$$\gamma = \frac{-1+\sqrt{73}}{2} \approx 3{,}77200185, \quad (2.62)$$

si trova

$$\eta_1(x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\gamma}, \quad (2.63) \qquad \eta_k(x) = x_0^{3(k-1)} \sum_0^{k-1} {}_n q_{k_n} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\gamma + n(\gamma - 3)}, \quad (2.64)$$

dove le q_{k_n} sono costanti calcolabili numericamente.
In definitiva, per

$$\left|\lambda - \frac{144}{x_0^3}\right| < \frac{144}{x_0^3}, \qquad x \geq x_0$$

si ha per la $Y(x, \lambda)$ la formula

$$Y(x, \lambda) = \frac{144}{x^3} + \sum_1^{\infty} {}_k \frac{x_0^{3(k-1)}\left(\lambda - \dfrac{144}{x_0^3}\right)^k}{k!} \sum_0^{k-1} {}_n q_{k_n} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\gamma + n(\gamma - 3)}. \quad (2.65)$$

Se si effettua il calcolo delle q_{k_n} per $k \le 8$ e, posto $x_0 = 6$, si trova che la somma dei primi nove termini della (2.65) fornisce con ottima approssimazione il valore di $Y(x,\lambda)$ per $x > 9$. La (2.65) vale certo a rappresentare tutti gli integrali della (2.1), asintotici all'asse x e finiti per $x = 0$, perché essi sono tutti in ogni punto al disotto di $\eta_0(x)$ e quindi si ha:

$$\lambda = Y(x_0,\lambda) \le \frac{144}{x_0^3}.$$

Pertanto ci si può servire della (2.65) per calcolare il valore di $Y'(0)$. Posto poi nelle (2.65) $x_0 = 6$ e $\lambda = Y(6)$, si trova per la somma dei primi nove termini della (2.65) la seguente fondamentale espressione:

$$\frac{144}{x^3} - \frac{1529{,}025535}{x^{\gamma}} + \frac{8078{,}015344}{x^{2\gamma-3}} - \frac{26360{,}64055}{x^{3\gamma-6}} + \frac{56519{,}21714}{x^{4\gamma-9}} - \frac{80117{,}01748}{x^{5\gamma-12}} + \\ + \frac{72805{,}04493}{x^{6\gamma-15}} - \frac{37975{,}98081}{x^{7\gamma-18}} + \frac{8671{,}939517}{x^{8\gamma-21}}, \quad (2.66)$$

che rappresenta con ottima approssimazione $Y(x)$ per $x \ge 9$.

Andiamo adesso ad analizzare le connessioni matematiche tra alcune delle formule descritte nel presente paragrafo, la sezione aurea $\phi = 0{,}618033$ ed il rapporto aureo $\Phi = 1{,}618033$.
Prendiamo la (2.24b). Avremo le seguenti connessioni:

$$m \le 12^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{12^{0,666...}} = 0.190785707 \approx 0.191 \approx \frac{1}{3}\phi. \quad (2.67)$$

Tale formula può scriversi anche come

$m \le \frac{1}{\sqrt[3]{(12)^2}}$, da cui $12 \le \sqrt{\frac{1}{m^3}}$, che si può correlare con l'equazione modulare di Ramanujan (1.50) e con quella del modello Palumbo-Nardelli (1.53b), ottenendo:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4\left[anti\log \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi txw'}{\cosh \pi x} e^{-\pi x^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi t^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw')} \right] \cdot \frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)} + \sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)} \right]} \le \sqrt{\frac{1}{m^3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int d^{26}x \sqrt{g} \left[-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{8} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} Tr(G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma}) f(\phi) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right]. \quad (2.68)$$

Il valore assoluto della (2.26), cioè 0.572 è connesso con ϕ. Da notare che la differenza $d = 0.618033 - 0.572 = 0.046 \approx 0.04$ è uguale alla costante del sistema musicale in sezione aurea, già menzionata nella (1.59).

Prendiamo il valore di m della (2.27b), 1,837 ed il valore assoluto della (2.29), 1,22. Avremo che

$$2\phi = 1{,}236066 \cong 1{,}23 \ , \qquad \phi + 2\phi = 0{,}618033 + 1{,}236066 = 1{,}854066 \cong 1{,}85 \ , \quad (2.69)$$

valori vicinissimi a quelli forniti.
Anche per il valore assoluto della (2.32), cioè 1,92 avremo:

$$1{,}92 \cong \Phi + \frac{1}{2}\phi \cong 1{,}618033 + \frac{1}{2}(0{,}618033). \quad (2.70)$$

Per il valore assoluto della (2.42), cioè 1,5880464 avremo:

$$1{,}587 \cong \Phi - \frac{1}{2\cdot 5}\left(\frac{\phi}{2}\right) \cong 1{,}618033 - \frac{1}{2\cdot 5}\left(\frac{0{,}618033}{2}\right). \quad (2.71)$$

Riguardo alle equazioni (2.56) e (2.58), avremo le seguenti connessioni con le funzioni modulari di Ramanujan (1.50) e (1.51) e con la fondamentale relazione di Palumbo-Nardelli (1.53b):

$$24 = \frac{1}{6}x^3\eta_0(x) \Rightarrow \frac{4\left[anti\log\frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi txw'}{\cosh \pi x} e^{-\pi x^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi t^2}{4}w'}\phi_{w'}(itw')}\right]\cdot\frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right]} = \frac{1}{6}x^3\eta_0(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma})f(\phi) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right] =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R + 4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_v\left(\left|F_2\right|^2\right)\right]. \quad (2.72)$$

$$24 = \frac{1}{6}x^3 Y(x,\overline{\lambda}_0) \Rightarrow \frac{4\left[anti\log\frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi txw'}{\cosh \pi x} e^{-\pi x^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi t^2}{4}w'}\phi_{w'}(itw')}\right]\cdot\frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right]} = \frac{1}{6}x^3\eta_0(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma})f(\phi) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right] =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R + 4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_v\left(\left|F_2\right|^2\right)\right]. \quad (2.73)$$

$$8=\frac{1}{18}x^3\eta_0(x)\Rightarrow\frac{1}{3}\frac{4\left[anti\log\frac{\int_0^\infty\frac{\cos\pi txw'}{\cosh\pi x}e^{-\pi x^2w'}dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4}w'}\phi_{w'}(itw')}\right]\cdot\frac{\sqrt{142}}{t^2w'}}{\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right]}=\frac{1}{18}x^3\eta_0(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^\infty\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_\nu\left(\left|F_2\right|^2\right)\right]=$$

$$=-\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right].\quad(2.74)$$

$$8=\frac{1}{18}x^3Y\left(x,\overline{\lambda}_0\right)\Rightarrow\frac{1}{3}\frac{4\left[anti\log\frac{\int_0^\infty\frac{\cos\pi txw'}{\cosh\pi x}e^{-\pi x^2w'}dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4}w'}\phi_{w'}(itw')}\right]\cdot\frac{\sqrt{142}}{t^2w'}}{\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right]}=\frac{1}{18}x^3\eta_0(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^\infty\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_\nu\left(\left|F_2\right|^2\right)\right]=$$

$$=-\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right].\quad(2.75)$$

Dalla prima delle (2.61), otteniamo una connessione con la (1.50) e la (1.53b). Avremo infatti:

$\eta_k^{''}=24\cdot\frac{3}{4x^2}\eta_k+f_k\left(x,\overline{\lambda}_0\right)$, da cui:

$$24=\left[\eta_k^{''}-f_k\left(x,\overline{\lambda}_0\right)\right]\cdot\frac{4x^2}{3}\Rightarrow\frac{4\left[anti\log\frac{\int_0^\infty\frac{\cos\pi txw'}{\cosh\pi x}e^{-\pi x^2w'}dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4}w'}\phi_{w'}(itw')}\right]\cdot\frac{\sqrt{142}}{t^2w'}}{\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right]}=\left[\eta_k^{''}-f_k\left(x,\overline{\lambda}_0\right)\right]\cdot\frac{4x^2}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right]=$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_\nu\left(\left|F_2\right|^2\right)\right].\quad(2.76)$$

Per quanto riguarda il valore dell'espressione (2.62), notiamo la seguente connessione:

$$\gamma=\frac{-1+\sqrt{73}}{2}\cong 3{,}77200185\approx\pi+\phi\approx 3{,}758,\quad(2.77)$$

quindi sia con π, sia con ϕ.

Prendiamo adesso la (2.65). Vediamo che, riscrivendola, è possibile connetterla con la (1.50) e la (1.53b). Avremo infatti:

$$\frac{x^3}{6}\left[Y(x,\lambda)-\sum_1^\infty {}_k \frac{x_0^{3(k-1)}\left(\lambda-\frac{144}{x_0^3}\right)^k}{k!}\sum_0^{k-1} {}_n q_{k_n}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\gamma+n(\gamma-3)}\right]=24=$$

$$=\frac{4\left[anti\log\frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi txw'}{\cosh \pi x}e^{-\pi x^2 w'}dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4}w'}\phi_{w'}(itw')}\right]\cdot\frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right]}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma})f(\phi)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right]=$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_\nu\left(\left|F_2\right|^2\right)\right]. \quad (2.78)$$

Analizziamo adesso i valori al numeratore dei primi nove termini dell'espressione (2.65). Come di consueto in tali espressioni $\Phi=$ 1,618033 rappresenta il rapporto aureo, mentre $\phi = 0{,}618033$ è la sezione aurea. Avremo allora:

$144{,}172209268743000 = \Phi^{10}+\Phi^5+\Phi^4+\Phi^2+\phi$,

$1529{,}353282293680000 = \Phi^{15}+\Phi^{10}+\Phi^7+\Phi^5+\Phi+\phi$,

$8078{,}338767364620000 = \Phi^{18}+\Phi^{16}+\Phi^9+\Phi^6-\phi$,

$8671{,}735808372090000 = \Phi^{18}+\Phi^{16}+\Phi^{13}+\Phi^{10}+\Phi^7+\Phi^5+\Phi^2$,

$26360{,}384659383800000 = \Phi^{20}+\Phi^{19}+\Phi^{16}-\Phi^{12}-\phi$,

$37975{,}071230939500000 = \Phi^{21}+\Phi^{19}+\Phi^{17}+\Phi^{13}+\Phi^7+\Phi^6+\Phi^5$,

$56519{,}427099642300000 = \Phi^{22}+\Phi^{20}+\Phi^{16}-\Phi^{12}-\Phi^9-\Phi^6-\Phi$,

$72805{,}186673696600000 = \Phi^{23}+\Phi^{19}-\Phi^{14}+\Phi^{11}+\Phi^6+\Phi^2+\phi$,

$80117{,}539782920000000 = \Phi^{14}+\Phi^{20}+\Phi^{23}+\Phi^8+\Phi^5+\Phi^5-\phi$.

Osserviamo, quindi, che anche tali valori sono ottimamente correlati sia con Φ, sia con ϕ.

Riguardo alle connessioni matematiche con i numeri di Fibonacci (ed anche con la sezione aurea), prendiamo i valori al denominatore dell'equazione (1.18). Otteniamo:

$$5/3 = 1{,}6666 \approx 1{,}6687 = \phi \times 2{,}7$$
$$15/5 = 3 \approx 3{,}0901 = \phi \times 5$$
$$70/15 = 4{,}6666 \approx 4{,}6352 = \phi \times 7{,}5$$
$$175/70 = 2{,}5 \approx 2{,}4721 = \phi \times 4$$
$$756/175 = 4{,}32 \approx 4{,}3262 = \phi \times 7$$
$$14175/756 = 18{,}75 \approx 18{,}7264 = \phi \times 30{,}3$$
$$47520/14175 = 3{,}35 \approx 3{,}3992 = \phi \times 5{,}5$$

2,7 + 5 + 7,5 + 4 + 7 + 30,3 + 5,5 = 62 = **2** + **5** + **8** + **13** + **34** (numeri di Fibonacci). Inoltre abbiamo:

3 = 3; 5 = 5; 15 = 2 + 13; 70 = 2 + 13 + 55 ed anche 144 / 2 – 2 dove 144 = (55 + 89) / 2;
175 = 31 + 144 ed anche 175 – 144 = 31 = 34 – 3; 233 – 175 = 58 = 3 + 55;
756 = 2 + 144 + 610 ed anche 756 – 610 = 146 = 144 – 2; 987 – 756 = 231 = 233 – 2;
14175 = 10946 + 6765 – 3536; ed anche 14175 – 10946 = 3229; 17711 – 14175 = 3536;
3229 + 3536 = 6765;
47520 = 21 + 144 + 987 + 46368; ed anche 47520 – 46368 = 1152; 1152 – 987 = 165;
165 – 144 = 21; 21 – 13 = 8.

Prendiamo adesso i nove valori dei numeratori dei termini della (2.65). Avremo che:

144 = **144** – **89** = **55**; **55** – **34** = **21**; **21** – **13** = **8**.

1529 = 1529 – **987** = 542; 542 – **377** = 165; 165 – **144** = **21**; **21** – **13** = **8**.

8078 = 8078 – **6765** = 1313; 1313 – **987** = 326; 326 – **233** = 93; 93 – (**55** + **21** + **8** + **5** + **3**) = 1.

8671 = 8671 – **6765** = 1906; 1906 – **1597** = 309; 309 – **233** = 76; 76 – **55** = **21**; **21** – **13** = **8**.

26360 = 26360 – **17711** = 8649; 8649 – **6765** = 1884; 1884 – **1597** = 287; 287 – **233** = 54;
54 – **34** = 20; 20 – (**2** + **3** + **5** + **8**) = **2**.

37975 = 37975 – **28657** = 9318; 9318 – **6765** = 2553; 2553 – **1597** = 956; 956 – **610** = 346;
346 – **233** = 113; 113 – **89** = 24; 24 – **13** – **8** = **3**.

56519 = 56519 – **46368** = 10151; 10151 – **6765** = 3386; 3386 – **2584** = 802; 802 – **610** = 192;
192 – **144** = 48 = (24 + 24); 48 – **34** = 14; 14 – **5** – **8** = 1.

72805 = 72805 – **46368** = 26437; 26437 – **17711** = 8726; 8726 – **6765** = 1961;
1961 – **1597** = 364; 364 – **233** = 131; 131 – **89** = 42; 42 – **34** = **8**.

80117 = 80117 – **75025** = 5092; 5092 – **4181** = 911; 911 – **610** = 301; 301 – **233** = 68;
68 – **55** = **13**; **13** – **8** = **5**.

I numeri in grassetto sono tutti numeri di Fibonacci. Da notare che per i valori 144, 1529, 8671 e 72805, il numero di Fibonacci finale è 8, che corrisponde alle vibrazioni fisiche di una superstringa.

Inoltre, nelle somme dei valori 37975 e 56519 è incluso il numero 24, che corrisponde alle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica. Anche per tali valori quindi esiste una chiara connessione con le equazioni modulari di Ramanujan (1.50), (1.51) e (1.53) e con l'identità fondamentale (1.53b) alla base del modello Palumbo-Nardelli.
Concludendo, anche per la matematica e la fisica che vengono applicate per lo studio dell'equazione di Thomas-Fermi, che descrive gli elettroni attorno al nucleo atomico, è possibile evidenziare una chiarissima connessione con il rapporto aureo Φ, la sezione aurea ϕ, ed i numeri di Fibonacci. Quindi, anche l'elettrone, che altro non è che un modo di vibrazione di una stringa fermionica, è connesso con la Divina Proporzione.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Prof. **Antonino Palumbo** per le interessanti conversazioni e la sua disponibilità ed amicizia mostrate nei miei confronti. Inoltre un ringraziamento particolare a **Francesco Di Noto** del Gruppo Eratostene, per i suoi utili calcoli sui numeri di Majorana e per le sue geniali intuizioni nell'ambito della Teoria dei Numeri.

Bibliografia

[1] E. Fermi – "Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell'atomo" – "Rend. Lincei", 6, 602-607 (1927).

[2] E. Fermi – "Sulla deduzione statistica di alcune proprietà dell'atomo. Applicazione alla teoria del sistema periodico degli elementi" – "Rend. Lincei", 7, 342-346 (1928).

[3] E. Di Grazia and S. Esposito – "Fermi, Majorana and the statistical model of atoms" – arXiv: physics/0406030 v1 – 08.06.2004.

[4] E. Majorana – "Funzione di Fermi" – Volumetto 2: 23 Aprile 1928.

[5] E. Majorana – "Curva statistica dei termini fondamentali negli atomi neutri" – Volumetto 2: 23 Aprile 1928.

[6] C. Miranda – "Teoremi e metodi per l'integrazione numerica della equazione differenziale di Fermi" – 10.11.1933 "Carlo Miranda – Opere Scelte" – Edizioni Cremonese (1992).

Finito di Stampare nel mese di Gennaio 2008
presso DI. VI. Service – Via Miranda, 50 – 80131 Napoli