EINSTEINTENSOR - GRUNDLAGEN UND BERECHNUNG

DR. THOMAS GÜNTHER

Sammlung einiger differentialgeometrischer Grundlagen zur Berechnung des Einsteintensors.

Email: dr.thomas.guenther@gmail.com

Contents

1. Abbildungen auf Mannigfaltigkeiten

Sei $(\mathcal{M}, g)$ eine $m-$dimensionale Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Lorentzmetrik g und einem affinen Zusammenhang. Jeder Punkt $p \in \mathcal{M}$ besitze eine (hinreichend kleine) Umgebung U, die ähnlich zum euklidischen Raum $\mathbb{R}^m$ ist (Trotzdem kann die globale Struktur von $\mathcal{M}$ kompliziert sein). Eine Abbildung $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ heißt vom Typ C^r im Punkt $p \in \mathcal{M}$, wenn f in diesem Punkt $r-$fach stetig differenzierbar ist. $C^\infty(\mathcal{M})$ sei die Menge aller C^∞ Funktionen $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Eine Abbildung $\overrightarrow{F} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ heißt C^r in $p \in \mathcal{M}$, wenn die Komponenten von $\overrightarrow{F}(p)$ alle C^r- Funktionen sind. Eine Abbildung heißt $C^\infty-$Abbildung, wenn es eine C^r-Abbildung für alle $r \geq 0$ ist. Eine (zumindest) stetige Abbildung wird mit C^0 bezeichnet.

1.1. **Tangentialraum und Vektorfelder.**

Ein Tangentenvektor v an $\mathcal{M}$ in $p \in \mathcal{M}$ induziert eine lineare Abbildung[1] $v : C^\infty(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ mit

$$v\,[fh] \quad = \quad v\,[f]\,h\,(p) + f\,(p)\,v\,[h] \tag{1.1}$$

wobei $f, h \in C^\infty(\mathcal{M})$. Die Menge der Tangentenvektoren an $\mathcal{M}$ in p bildet den **Tangentialraum** $T_p\mathcal{M}$. Eine Basis des m-dimensionalen Vektorraums $T_p\mathcal{M}$ ist durch eine Menge von m linear unabhängigen Vektoren $\{b_1, \ldots, b_m\}$ mit $b_k \in T_p\mathcal{M}$ gegeben.

1.1.1. ***Koordinatenfelder.***

Sind $\left\{x^1, \ldots, x^m\right\}$ Koordinaten von $\mathcal{M}$, dann erfüllen in $p \in \mathcal{M}$ die m linear abhängigen Koordinatenfelder $\{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ mit $\partial_k := \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ die Bedingung[2] (1.1) und bilden eine Basis von $T_p\mathcal{M}$. Jeder Vektor $v \in T_p\mathcal{M}$ lässt sich darstellen als:

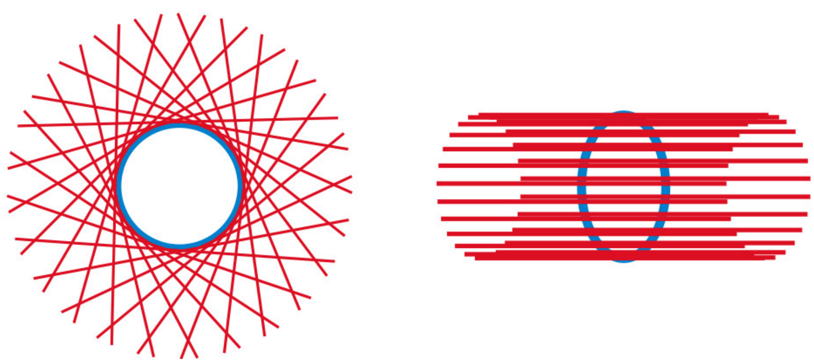
$$v = \sum_{k=1}^{m} v^k \left.\partial_k\right|_p \tag{1.2}$$

1.1.2. ***Tangentialbündel.***

Die (disjunkte) Vereinigung aller Tangentialräume bildet das **Tangentialbündel** $T\mathcal{M}$:

$$T\mathcal{M} \quad = \quad \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$$

Beispiel:
Sei $\mathcal{M} = \mathbb{S} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\right\}$ die Sphäre mit Radius r. Dann ist $T\mathcal{M} = T\mathbb{S} = \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ ein (unendlich langer) Zylinder:



Bildquelle: Wikipedia

1.1.3. ***Vektorfelder.***

Ein Vektorfeld $V : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}$ ordnet jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ einen Tangentialvektor $V_p := V(p) \in T_p\mathcal{M}$ zu. (Reduziert man diese Definition auf eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathcal{M}$ statt $\mathcal{M}$, so nennt man V ein Vektorfeld auf U). Die Addition zweier Vektorfelder V, W

$$(V + W)_p : \quad = \quad V_p + W_p$$

sowie die Multiplikation mit einer Funktion $f \in C^\infty(\mathcal{M})$

$$(fV)_p : \quad = \quad f\,(p)\,V_p$$

[1] Für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt: $v\,[c_1 f + c_2 h] = c_1 v\,[f] + c_2 v\,[h]$

[2] Für Koordinatenfelder gilt $\partial_k\,[c_1 f + c_2 h] = c_1 \partial_k f + c_2 \partial_k h$ und $\partial_k\,[fh] = h \partial_k f + f \partial_k h$.

lässt sich punktweise erklären. Ein C^∞ Vektorfeld $V : U \to TU$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathcal{M}$ kann für alle $p \in U$ ausgedrückt werden als $V_p = \sum_{k=1}^{m} V^k(p)\, \partial_k|_p$, wobei ∂_k die Koordinatenfelder auf U sind und $V^k : U \to \mathbb{R}$ Komponenten des Vektors V bezüglich der Koordinaten $\{x^1, \ldots, x^m\}$. Im Folgenden schreiben wir kurz:

$$V = \sum_{k=1}^{m} V^k \partial_k \tag{1.3}$$

1.2. Dualraum.

Die Linearformen auf dem Tangentialraum $T_p\mathcal{M}$ einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ im Punkt $p \in \mathcal{M}$ bilden den Dualraum $T_p^*\mathcal{M}$. Die (disjunkte) Vereinigung aller Kotangentialräume $T_p^*\mathcal{M}$ bildet zusammen das Kotangentialbündel $T^*\mathcal{M}$:

$$T^*\mathcal{M} = \bigcup_{p \in M} T_p^*\mathcal{M}$$

Elemente des Dualraums werden Kovektoren oder **1-Formen** genannt. Eine Basis des m-dimensionalen Dualraums $T_p^*\mathcal{M}$ ist durch eine Menge von m linear unabhängigen 1-Formen $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ mit $\beta_k \in T_p^*\mathcal{M}$ gegeben. Die 1-Formen $\{dx^1, \ldots, dx^m\}$ in p sind m linear unabhängige Kovektoren: Deshalb besitzt jede 1-Form $\omega \in T_p^*\mathcal{M}$ die Darstellung:

$$\omega = \sum_{k=1}^{m} \omega_k\, dx^k\big|_p \tag{1.4}$$

Im Folgenden wird auf die ausführliche Notation $|_p$ verzichtet. Analog zur Definition eines Vektorfeldes lässt sich punktweise ein Kovektorfeld $\omega : \mathcal{M} \to T^*\mathcal{M}$ erklären. Dabei wird jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ eine 1-Form $\omega_p := \omega(p) \in T_p^*\mathcal{M}$ zugeordnet.

1.3. Tensoren.

Sei $n \in \mathbb{N}$, allgemein ist das kartesische Produkt von den Mengen $\mathbb{M}_1, \ldots, \mathbb{M}_n$ ist definiert durch

$$\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2 \times \ldots \times \mathbb{M}_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \text{wobei jeweils } x_k \in \mathbb{M}_k\}$$

Für lineare Vektorräume $\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n$ über $\mathbb{R}$ ist der Raum $L(\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n\,; \mathbb{R})$ der $n-$fach linearen Abbildungen

$$f : \mathbb{E}_1 \times \ldots \times \mathbb{E}_n \to \mathbb{R}$$

isomorph zum Raum der iterierten linearen Abbildungen:

$$L(\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n\,; \mathbb{R}) \cong L(\mathbb{E}_1\,; L(\mathbb{E}_2\,; \ldots; L(\mathbb{E}_n\,; \mathbb{R})\,)\,) \tag{1.5}$$

Sei $\mathbb{E}$ ein linearer Raum über[3] $\mathbb{R}$ und $\mathbb{E}^*$ der Dualraum zu $\mathbb{E}$ (z.B. Tangentialraum T_pM und Dualraum T_p^*M). Ein $(r,s)-$Tensor T ist eine **multilineare** Abbildung

$$T : \underbrace{\mathbb{E}^* \times \ldots \times \mathbb{E}^*}_{r} \times \underbrace{\mathbb{E} \times \ldots \times \mathbb{E}}_{s} \to \mathbb{R} \tag{1.6}$$

aus dem Raum

$$T_{(r,s)}\mathbb{E} \equiv L\left(\underbrace{\mathbb{E}^*, \ldots, \mathbb{E}^*}_{r}, \underbrace{\mathbb{E}, \ldots, \mathbb{E}}_{s}; \mathbb{R}\right)$$

der $r-$fach kontravarianten und $s-$fach kovarianten Tensoren. Dabei ist die Summe $r+s$ die Stufe oder der Rang eines $(r,s)-$Tensors. Wegen $L(\mathbb{E}\,;\mathbb{R}) = \mathbb{E}^*$ und $L(\mathbb{E}^*\,;\mathbb{R}) = \mathbb{E}$ folgt aus Gleichung (1.5):

$$\begin{aligned} T_{(r,s)}\mathbb{E} = L(\underbrace{\mathbb{E}^*, \ldots, \mathbb{E}^*}_{r}, \underbrace{\mathbb{E}, \ldots, \mathbb{E}}_{s}; \mathbb{R}) &\cong L(\underbrace{\mathbb{E}^*, \ldots, \mathbb{E}^*}_{r-1}, \underbrace{\mathbb{E}, \ldots, \mathbb{E}}_{s}; \mathbb{E}) \\ &\cong L(\underbrace{\mathbb{E}^*, \ldots, \mathbb{E}^*}_{r}, \underbrace{\mathbb{E}, \ldots, \mathbb{E}}_{s-1}; \mathbb{E}^*) \end{aligned}$$

Tensoren vom Typ $(0,s)$ und $(1,s)$ sind Elemente aus

$$\begin{aligned} T_{(0,s)}\mathbb{E} &= L(\underbrace{\mathbb{E}, \ldots, \mathbb{E}}_{s}; \mathbb{R}) \\ T_{(1,s)}\mathbb{E} &= L(\underbrace{\mathbb{E}, \ldots, \mathbb{E}}_{s}; \mathbb{E}) \end{aligned}$$

und es gilt $T_{(0,1)}\mathbb{E} = L(\mathbb{E}\,;\mathbb{R}) = \mathbb{E}^*$ sowie $T_{(1,0)}\mathbb{E} = L(\mathbb{E}^*\,;\mathbb{R}) = \mathbb{E}$.

[3] Die Definition kann von $\mathbb{R}$ auf beliebige Körper $\mathbb{K}$ verallgemeinert werden.

1.3.1. ***Tensorfelder und Koordinatendarstellung***.
Analog zur Definition eines Vektorfeldes lässt sich punktweise ein Tensorfeld auf $\mathcal{M}$ erklären. Dabei wird jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ ein Tensor zugeordnet. Um ein Tensorfeld zu erhalten muss diese Zuordnung stetig differenzierbar (also mindestens C^1) sein. Tensorfelder vom Typ (r,s) nennt man auch einfach $(r,s)-$Tensoren. Sind $T^{a_1\ldots a_r}_{b_1\ldots b_s}$ die Komponenten eines $(r,s)-$Tensors T bezüglich der Basen $\{\partial_1,\ldots,\partial_m\}$ und $\{dx^1,\ldots,dx^m\}$, dann gilt[4]:

$$T = \sum_{a_1=1}^{m} \ldots \sum_{a_r=1}^{m} \sum_{b_1=1}^{m} \ldots \sum_{b_s=1}^{m} T^{a_1\ldots a_r}_{b_1\ldots b_s}\, \partial_{a_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{a_r} \otimes\, dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes dx^{b_s} \tag{1.7}$$

1.3.2. **Vektorfelder und 1-Formen als Tensoren**.
Ein Vektor $v \in T_p\mathcal{M}$ ist ein *kontravarianter* $(1,0)-$Tensor in $p \in \mathcal{M}$. Bezüglich der Koordinatenfelder ∂_k hat v die Darstellung $v = \sum_{k=1}^m v^k \partial_k$, siehe (1.2). Eine 1-Form $\omega \in T_p^*\mathcal{M}$ ist ein *kovarianter* $(0,1)-$Tensor in p und lässt sich nach (1.4) mit Hilfe der Basis dx^k darstellen als $\omega = \sum_{k=1}^m \omega_k dx^k$. Wendet man ω auf den Vektor v an, so ergibt sich der skalare $(0,0)-$Tensor $\omega(v)$. Die Operation $\omega(v)$ ist die **Kontraktion** $\mathcal{C}$ des Tensors $\omega \otimes v$. Das Tensorprodukt $\omega \otimes v$ ergibt einen $(1,1)-$Tensor mit den Komponenten $T_i^k = \omega_i v^k$. Die Kontraktion

$$\mathcal{C}(\omega \otimes v) = \sum_{k=1}^{m} T_k^k = \sum_{k=1}^{m} \omega_k v^k \tag{1.8}$$

verhält sich effektiv wie ein Skalarprodukt. Zur Unterscheidung zum "echten" Skalarprodukt $\langle \cdot,\cdot \rangle$ wird hier für das Anwenden einer 1-Form ω auf einen Vektor v die Dirac-Schreibweise $\langle \omega \mid v \rangle$ verwendet. Anwenden der dx^i auf die Koordinatenfelder ∂_k ergibt

$$dx^i(\partial_k) \;:=\; \left\langle dx^i \mid \partial_k \right\rangle \;=\; \delta_k^i \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{for } i = k \\ 0 & \text{for } i \neq k \end{cases}$$

und damit:

$$\omega(v) \;:=\; \langle \omega \mid v \rangle \;=\; \left\langle \sum_{i=1}^{m} \omega_i dx^i \;\middle|\; \sum_{k=1}^{m} v^k \partial_k \right\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \omega_i v^k \left\langle dx^i \mid \partial_k \right\rangle \;=\; \sum_{k=1}^{m} \omega_k v^k$$

1.4. **Metrik.**
Die Geometrie einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ wird vollständig beschrieben durch den metrischen Tensor g. An einem Punkt $p \in \mathcal{M}$ ist g ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe. Punktweise erhält man so die Metrik g auf $\mathcal{M}$ als *kovariantes* $(0,2)-$Tensorfeld. Seien x^k Koordinaten von $\mathcal{M}$, dann bezeichne

$$g_{ik} \;:=\; g(\partial_i, \partial_k)$$

die Komponenten von g bezüglich der Koordinatenfelder ∂_k. Für $v, w \in T_p\mathcal{M}$ erhält man mit (1.2)

$$g(v,w) = g\left(\sum_{i=1}^{m} v^i \partial_i, \sum_{k=1}^{m} w^k \partial_k\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} g_{ik} v^i w^k \tag{1.9}$$

wobei v^k und w^k die Komponenten von v und w bezüglich der Koordinatenbasis sind. Nach (1.7) lässt sich der $(0,2)-$Tensor g auch schreiben als:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} g_{ik}\, dx^i \otimes dx^k \tag{1.10}$$

Auf das Tensorproduktzeichen $\otimes$ wird bei der Schreibweise der Metrik meistens verzichtet. Die Signatur einer Metrik g im Punkt p ist definiert als das Tupel (σ_1, σ_2), wobei σ_1 die Anzahl der positiven und σ_2 die Anzahl der negativen Eigenwerte der Matrix (g_{ik}) in p ist. Wenn die Signatur der Metrik einer $m-$dimensionalen Mannigfaltigkeit $(1, m-1)$ ist, so nennt man $\mathcal{M}$ eine Lorentz Mannigfaltigkeit. Die Raumzeit der Allgemeinen Relativitätstheorie ist eine vierdimensionale Lorentz Mannigfaltigkeit, sie wird durch eine Metrik der Signatur $(1,3)$ beschrieben.

[4] Mit der Einsteinschen Summenkonvention verkürzt sich die Schreibweise zu $T = T^{a_1\ldots a_r}_{b_1\ldots b_s}\, \partial_{a_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{a_r} \otimes\, dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes dx^{b_s}$.

1.4.1. ***Längen und Winkel.***
Mit der Metrik g lässt sich jedem Vektor $v \in T_p\mathcal{M}$ eine Länge $|v|_g$ zurodnen:

$$|v|_g \quad := \quad \sqrt{|g(v,v)|}$$

Der Winkel α zwischen zwei Vektoren $v, w \in T_p\mathcal{M}$ ist definiert als

$$\cos\alpha \quad = \quad \frac{g(v,w)}{\sqrt{|g(v,v)\,g(w,w)|}}$$

Die Vektoren v und w heißen orthogonal wenn $g(v,w) = 0$.

1.4.2. ***Heben und senken von Indizes.***
Mit Hilfe der Metrik lassen sich kovariante und kontravariante Tensoren durch einen Isomorphismus verknüpfen. Mit den Komponenten g_{ik} der Metrik und den Komponenten g^{ik} der zu (g_{ik}) inversen Matrix lassen sich Indizes von Tensorkomponenten heben und senken. Für einen Vektor mit den Komponenten x^k gilt:

$$x_k = \sum_{a=1}^{m} g_{ka} x^a \qquad \text{und} \qquad x^k = \sum_{a=1}^{m} g^{ka} x_a$$

Seien T_{ik} die Komponenten eines Tensors T, so gilt:

$$T^i{}_k = \sum_{a=1}^{m} g^{ia} T_{ak} \qquad \text{und} \qquad T_k{}^i = \sum_{a=1}^{m} g^{ia} T_{ka}$$

Für symmetrische Tensoren T gilt $T_{ik} = T_{ki}$ und man definiert $T^i_k := T^i{}_k = T_k{}^i$. Außerdem ist:

$$T^{ik} \quad = \quad \sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m} g^{ia} g^{kb} T_{ab}$$

Analog lassen sich die Indizes von (r,s) −Tensoren mit den Komponenten $T^{a_1\ldots a_r}_{b_1\ldots b_s}$ heben und senken.

1.4.3. ***Metrik und Inverse.***
Offensichtlich ist $x^b = \sum_{a=1}^m \delta^b_a x^a$. Hebt man bei x_k den Index k, so folgt zusammen mit $x_k = \sum_{a=1}^m g_{ka} x^a$

$$x^b = \sum_{k=1}^{m} g^{bk} x_k \; = \; \sum_{k=1}^{m} g^{bk} \sum_{a=1}^{m} g_{ka} x^a \; = \; \sum_{a=1}^{m} \underbrace{\sum_{k=1}^{m} g^{bk} g_{ka}}_{\delta^b_a} \; x^a$$

also $\sum_{k=1}^m g^{bk} g_{ka} = \delta^b_a$. Analog ergibt sich bei x^k durch senken von k zusammen mit $x^k = \sum_{a=1}^m g^{ka} x_a$ der Ausdruck:

$$x_b = \sum_{k=1}^{m} g_{bk} x^k = \sum_{k=1}^{m} g_{bk} \sum_{a=1}^{m} g^{ka} x_a \; = \; \sum_{a=1}^{m} \underbrace{\sum_{k=1}^{m} g_{bk} g^{ka}}_{\delta^a_b} \; x_a$$

Tauscht man a und b gegeneinander aus, so erhält man $\sum_{k=1}^m g_{ak} g^{kb} = \delta^b_a$. Insgesamt ergibt sich also

$$\sum_{k=1}^{m} g^{bk} g_{ka} \; = \; \sum_{k=1}^{m} g_{ak} g^{kb} \; = \; \delta^b_a \; = \; \begin{cases} 1 & \text{for } a = b \\ 0 & \text{for } a \neq b \end{cases} . \tag{1.11}$$

Lemma 1.
Bezüglich der Koordinatenbasis $\{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ lässt sich ein Vektorfeld X darstellen als:

$$X = \sum_{l=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{ln} g(\partial_n, X)\,\partial_l \tag{1.12}$$

Beweis: Mit $X = \sum_{a=1}^m x^a \partial_a$ folgt direkt

$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{ln} g(\partial_n, X)\,\partial_l \quad = \quad \sum_{l=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{ln} g\left(\partial_n, \sum_{a=1}^{m} x^a \partial_a\right)\partial_l \; = \; \sum_{a=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \underbrace{\sum_{n=1}^{m} g^{ln} g_{na}}_{\delta^l_a} \; x^a \partial_l$$

$$= \quad \sum_{a=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \delta^l_a x^a \partial_l \; = \; \sum_{a=1}^{m} x^a \partial_a \; = \; X$$

□

2. Lie-Ableitung und kovariante Ableitung

Analog zur Ableitung für Kurven und Flächen im $\mathbb{R}^n$ lässen sich auch auf Mannigfaltigkeiten sogenannte Zusammenhänge definieren, durch welche die Änderung einer Abbildung (z.B. einer Funktion f oder einem Vektorfeld auf $\mathcal{M}$) in einer bestimmten Richtung beschrieben werden kann. "In einer bestimmten Richtung" bedeutet dabei entlang der Integralkurve eines Vektorfelds. Im Folgenden seinen X, Y, Z, ξ sowie X_k mit $k \in \mathbb{N}$ hinreichend oft differenzierbare Vektorfelder auf $\mathcal{M}$.

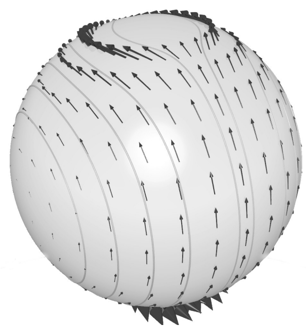
2.1. Integralkurve und Fluss eines Vektorfelds.

Sei I ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $\mu : I \to \mathcal{M}$ eine Kurve auf der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$. Für $t_0 \in I$ sei $\mu(t_0) = p$ ein Punkt auf $\mathcal{M}$. Dann ist μ eine Integralkurve von X durch p, wenn für alle $t \in I$ gilt:

$$\mu'(t) := \frac{d\mu}{dt} = X_{\mu(t)}$$

Der Tangentialvektor von μ an jeder Stelle ist identisch mit dem Vektorfeld X an dieser Stelle.

Der Fluss Φ ist die Vereinigung der Integralkurven, wobei $\Phi(t, p) = \mu(t)$. Es gilt also $\Phi(t_0, p) = p$.
(Oft wählt man $t_0 = 0$ und die Anfangsbedingung $\mu(0) = p$, in diesem Fall ist $\Phi(0, p) = p$.)



Bildquelle: Wikipedia

2.2. Lie-Ableitung.

Sei f eine skalares Feld, d.h. eine Funktion $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Die Lie-Ableitung $L_X f$ ist per Definition die Änderung der Funktion f entlang der Flusslinie (Integralkurve) des Vektorfelds X. Es ist

$$L_X(f) = L_X f := Xf \tag{2.1}$$

wobei punktweise an einer Selle p gilt $X_p f =< X_p, \nabla f >$. Um die Lie-Ableitung auf Vektorfelder anzuwenden, postuliert man die Produktregel

$$L_X(Yf) = L_X(Y)\, f + Y\, L_X(f) = L_X Y\, f + Y\, \underbrace{L_X f}_{=Xf} \tag{2.2}$$

Dabei ist Yf wie f eine skalare Funktion, nach (2.1) gilt also $L_X(Yf) = X(Yf) = XYf$ und damit wird (2.2) zu

$$XYf = L_X Y f + YXf$$

also folgt $L_X Y\, f = XYf - YXf = [X, Y]\, f$, also

$$L_X Y = [X, Y] \tag{2.3}$$

2.2.1. *Lie-Ableitung von Tensorfeldern.*

Seien $X_1, \ldots, X_r$ und Z Vektorfelder und T ein Tensor vom Typ $(0, s)$. Nach Definition ist:

$$(L_Z T)(X_1, \ldots, X_s) = Z(T(X_1, \ldots, X_s)) - \sum_{k=1}^{s} T(X_1, \ldots, X_{k-1}, L_Z X_k, X_{k+1}, \ldots, X_s) \tag{2.4}$$

Für einen Tensor T vom Typ $(1, s)$ ist definiert:

$$(L_Z T)(X_1, \ldots, X_s) = L_Z T(X_1, \ldots, X_s) - \sum_{k=1}^{s} T(X_1, \ldots, X_{k-1}, L_Z X_k, X_{k+1}, \ldots, X_s) \tag{2.5}$$

Für eine Metrik als Tensor vom Typ $(0, 2)$ ergibt sich zusammen mit (2.3):

$$\begin{aligned}(L_X g)(Y, Z) &= Xg(Y, Z) - g(L_X Y, Z) - g(Y, L_X Z) \\ &= Xg(Y, Z) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z])\end{aligned} \tag{2.6}$$

Lemma 2. *Jacobi-Identität*
Für die Lieklammer gilt:

$$\mathcal{J}(X,Y,Z) := [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \tag{2.7}$$

Beweis: Anwenden auf eine hinreichend oft differenzierbare beliebige Funktion f ergibt:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(X,Y,Z)f &= X[Y,Z]f - [Y,Z]Xf + Y[Z,X]f - [Z,X]Yf + Z[X,Y]f - [X,Y]Zf \\ &= \underbrace{XYZf}_{(1)} - \underbrace{XZYf}_{(2)} - \underbrace{YZXf}_{(3)} + \underbrace{ZYXf}_{(4)} + \underbrace{YZXf}_{(3)} - \underbrace{YXZf}_{(5)} \\ &\quad - \underbrace{ZXYf}_{(6)} + \underbrace{XZYf}_{(2)} + \underbrace{ZXYf}_{(6)} - \underbrace{ZYXf}_{(4)} - \underbrace{XYZf}_{(1)} + \underbrace{YXZf}_{(5)} = 0 \qquad \square\end{aligned}$$

2.3. Kovariante Ableitung.

An jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ ordnet ein (beliebiger) linearer Zusammenhang $\overline{\nabla}$ dem Vektorfeld X einen Differentialoperator $\overline{\nabla}_X$ zu, so dass Y auf das Vektorfeld $\overline{\nabla}_X Y$ mit folgenden Eigenschaften abbgebildet wird:

(1) Anwenden des Operators $\overline{\nabla}$ auf das Produkts eines Vektorfeldes mit einer skalaren Funktion f erfolgt nach der Produktregel:
$$\overline{\nabla}_X(fY) = X(f)Y + f\overline{\nabla}_X Y$$
(2) Der Zusammenhang $\overline{\nabla}_X Y$ ist linear über $C^\infty(M)$ in X und $\mathbb{R}-$linear in Y. Für skalare Funktionen f und h sowie für Konstanten $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\overline{\nabla}_{fX+hY}Z = f\overline{\nabla}_X Z + h\overline{\nabla}_Y Z \quad \text{und} \quad \overline{\nabla}_X(a_0Y + b_0Z) = a_0\overline{\nabla}_X Y + b_0\overline{\nabla}_X Z$$

2.3.1. *Torsionstensor*.

Der Torsionstensor eines Zusammenhangs $\overline{\nabla}$ ist gegeben durch:

$$T(X,Y) := \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X - [X,Y]$$

2.3.2. *Levi-Civita Zusammenhang*.

Auf einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, g)$ existiert unter den linearen Zusammenhängen $\overline{\nabla}$ ein eindeutig bestimmter Zusammenhang ∇ (*Levi-Civita Zusammenhang*), welcher **torsionsfrei** $(T \equiv 0)$[5] ist[6]

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \tag{2.8}$$

und die folgende Produktregel erfüllt:

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{2.9}$$

Theorem 3. *Levi-Civita Formel*
Torsionsfreiheit (2.8) zusammen mit der Produktregel (2.9) ist equivalent zur Levi-Civita Formel:

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\{Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z])\} \tag{2.10}$$

Proof. Mit der Produktregel ist $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ sowie $Yg(Z,X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$ und $Zg(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$ und es ergibt sich

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ &\quad -g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + \underbrace{g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X)}_{=-g(Y,[Z,X])} + \underbrace{g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X)}_{=g(X,[Y,Z])} + g(Z, \nabla_Y X) \\ &= 2\cdot g(\nabla_X Y, Z) - g(Y,[Z,X]) + g(X,[Y,Z]) + \underbrace{g(Z,\nabla_Y X) - g(\nabla_X Y, Z)}_{=-g(Z,[X,Y])} \end{aligned}$$

also

$$2\cdot g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z])$$

Division durch 2 ergibt die Levi-Civita Formel (2.10). $\square$

[5] Der Torsionstensor eines Zusammenhangs $\overline{\nabla}$ ist durch $T(X,Y) := \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X - [X,Y]$ gegeben. Für den torsionsfreien Zusammenhang ∇ erhält man also Gleichung (2.8).

[6] Bei einem torsionsfreien Zusammenhang unterscheiden sich die kovarianten Ableitungen $\nabla_X Y$ und $\nabla_Y X$ also offenbar durch die Lie-Ableitung. Zusammen mit (2.3) folgt $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X,Y]$ also $\nabla_X Y = \nabla_Y X + L_X Y$.

2.3.3. ***Kovariante Ableitung in Koordinatendarstellung.***
Sei $\{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ die Koordinatenbasis der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$. Ein Vektorfeld $Y \in T\mathcal{M}$ lässt sich dann (punktweise) darstellen als:

$$Y = \sum_{n=1}^{m} y^n \partial_n \tag{2.11}$$

Im Folgenden wird für die kovariante Ableitung die abkürzenden Schreibweise

$$\boxed{\begin{array}{rcccl} \nabla_k Y & := & \nabla_{\partial_k} Y & = & \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} Y \\ \nabla_{kn} & := & \nabla_{\partial_k} \partial_n & = & \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \dfrac{\partial}{\partial x^n} \end{array}}$$

verwendet. Seien Γ^l_{kn} die Komponenten von ∇_{kn} bezüglich der Koordinatenbasis, so gilt:

$$\nabla_{kn} = \sum_{a=1}^{m} \Gamma^a_{kn} \partial_a \tag{2.12}$$

Mit der Produktregel erhält man dann

$$\begin{aligned} \nabla_k Y &= \nabla_k \left(\sum_{n=1}^{m} y^n \partial_n \right) = \sum_{n=1}^{m} \left(\partial_k y^n \cdot \partial_n + y^n \nabla_{kn} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{m} \left(\partial_k y^n \cdot \partial_n + y^n \sum_{l=1}^{m} \Gamma^l_{kn} \partial_l \right) = \sum_{n=1}^{m} \partial_k y^n \cdot \partial_n + \sum_{n=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} y^n \Gamma^l_{kn} \partial_l \end{aligned}$$

Anwenden der 1-Form dx^a auf diesen Term liefert die $a-$te Komponente von $\nabla_k Y$ bezüglich des Koordinatenbasisvektors ∂_a. Diese wird auch mit $y^a_{;k}$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} y^a_{;k} &= \langle dx^a \mid \nabla_k Y \rangle = \left\langle dx^a \mid \sum_{n=1}^{m} \partial_k y^n \cdot \partial_n + \sum_{n=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} y^n \Gamma^l_{kn} \partial_l \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{m} \partial_k y^n \cdot \underbrace{\langle dx^a \mid \partial_n \rangle}_{\delta^a_n} + \sum_{n=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} y^n \Gamma^l_{kn} \underbrace{\langle dx^a \mid \partial_l \rangle}_{\delta^a_l} = \partial_k y^a + \sum_{n=1}^{m} y^n \Gamma^a_{kn} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Das Vektorfeld $\nabla_k Y$ erhält man also aus

$$Y_{;k} := \nabla_k Y = \sum_{a=1}^{m} y^a_{;k} \partial_a = \sum_{a=1}^{m} \left(\partial_k y^a + \sum_{n=1}^{m} \Gamma^a_{kn} y^n \right) \partial_a$$

2.3.4. ***Levi-Civita Formel und Christoffelsymbole.***
Wählt man $X = \partial_k, Y = \partial_l$ und $Z = \partial_n$ in der Levi-Civita Formel (2.10) so folgt

$$g(\nabla_{kl}, \partial_n) = \frac{1}{2} \{ \partial_k g(\partial_l, \partial_n) + \partial_l g(\partial_n, \partial_k) - \partial_n g(\partial_k, \partial_l) \} = \frac{1}{2} \{ \partial_k g_{ln} + \partial_l g_{nk} - \partial_n g_{kl} \}$$

da die Lieklammer von Koordinatenfeldern verschwindet, d.h. $[\partial_i, \partial_k] = 0$. Wegen

$$\nabla_{kl} = \sum_{a=1}^{m} \Gamma^a_{kl} \partial_a$$

Ergibt sich für die linke Seite der Gleichung

$$g(\nabla_{kl}, \partial_n) = g\left(\sum_{a=1}^{m} \Gamma^a_{kl} \partial_a, \partial_n \right) = \sum_{a=1}^{m} g_{an} \Gamma^a_{kl} =: \Gamma_{kln} \tag{2.14}$$

und damit die Christoffelsymbole erster Ordnung

$$\Gamma_{kln} = \frac{1}{2} \{ \partial_k g_{ln} + \partial_l g_{nk} - \partial_n g_{kl} \} . \tag{2.15}$$

Wegen $\Gamma^h_{ik} = \sum_{n=1}^m g^{hn}\Gamma_{ikn}$ erhält man die Christoffelsymbole zweiter Ordnung durch:

$$\Gamma^h_{ik} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^m g^{hn}\left\{\partial_i g_{kn} + \partial_k g_{ni} - \partial_n g_{ik}\right\} \tag{2.16}$$

Aus der Symmetrie der Metrik $g_{ik} = g_{ki}$ folgt direkt

$$\Gamma^h_{ki} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^m g^{hn}\left\{\partial_k g_{in} + \partial_i g_{nk} - \partial_n g_{ki}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^m g^{hn}\left\{\partial_i g_{kn} + \partial_k g_{ni} - \partial_n g_{ik}\right\} = \Gamma^n_{ik}$$

also die Symmetrie:

$$\Gamma^n_{ik} = \Gamma^n_{ki} \tag{2.17}$$

Insbesondere folgt deswegen natürlich für die kovariante Ableitung von Koordinatenfeldern $\nabla_{ik} = \nabla_{ki}$.

2.4. **Kovariante Ableitung von Tensorfeldern.**

Seien T, S Tensoren und $X \in T\mathcal{M}$ ein Vektorfeld. Für die kovariante Ableitung von Tensorfeldern fordert man die Produktregel

$$\nabla_X (T\otimes S) = (\nabla_X T)\otimes S + T\otimes(\nabla_X S) \tag{2.18}$$

und die Vertauschbarkeit mit der Spurbildung, bzw. Kontraktion:

$$\nabla_X (\mathcal{C}(T)) = \mathcal{C}(\nabla_X T) \tag{2.19}$$

Angewandt auf eine skalare Funktion f ist $\nabla_X f = Xf$. Angewandt auf einen Vektor $Y \in T\mathcal{M}$ entspricht der Zusammenhang dem bereits Eingeführten.

2.4.1. ***Kovariante Ableitung von 1-Formen.***

Das Anwenden einer 1-Form $\omega \in T^*\mathcal{M}$ auf ein Vektorfeld $Y \in T\mathcal{M}$ entspricht der Kontraktion

$$\mathcal{C}(\omega\otimes Y) = \langle\omega \mid Y\rangle$$

des Tensors $\omega\otimes Y$ und ergibt einen Skalar. Wendet man auf diesen die kovariante Ableitung ∇_X an, so erhält man mit (2.19) und der Produktregel (2.18):

$$\nabla_X(\mathcal{C}(\omega\otimes Y)) = \mathcal{C}(\nabla_X(\omega\otimes Y)) = \mathcal{C}((\nabla_X\omega)\otimes Y + \omega\otimes(\nabla_X Y)) = \mathcal{C}((\nabla_X\omega)\otimes Y) + \mathcal{C}(\omega\otimes(\nabla_X Y))$$

Da die Kontraktion $\mathcal{C}(\omega\otimes Y)$ eine skalare Funktion ist, gilt hier $\nabla_X(\mathcal{C}(\omega\otimes Y)) = X(\mathcal{C}(\omega\otimes Y))$ und damit

$$X(\mathcal{C}(\omega\otimes Y)) = \mathcal{C}((\nabla_X\omega)\otimes Y) + \mathcal{C}(\omega\otimes(\nabla_X Y))$$

oder in der kürzeren Schreibweise

$$X\langle\omega \mid Y\rangle = \langle\nabla_X\omega \mid Y\rangle + \langle\omega \mid \nabla_X Y\rangle\,. \tag{2.20}$$

Die kovariante Ableitung einer 1-Form ω kann also durch die Gleichung

$$\langle\nabla_X\omega \mid Y\rangle = X\langle\omega \mid Y\rangle - \langle\omega \mid \nabla_X Y\rangle \tag{2.21}$$

definiert werden. Insbesondere folgt aus Gleichung (2.21) für $X = \partial_k$, $\omega = dx^n$ und $Y = \partial_a$:

$$\langle\nabla_k dx^n \mid \partial_a\rangle = \partial_k\langle dx^n \mid \partial_a\rangle - \langle dx^n \mid \nabla_{ka}\rangle = \underbrace{\partial_k\delta^n_a}_{=0} - \left\langle dx^n \;\middle|\; \sum_{l=1}^m \Gamma^l_{ka}\partial_l\right\rangle = -\Gamma^n_{ka}.$$

In der Darstellung bezüglich der Koordinatenbasis ergibt sich

$$\nabla_k dx^n = \sum_{a=1}^m \langle\nabla_k dx^n \mid \partial_a\rangle\, dx^a = -\sum_{a=1}^m \Gamma^n_{ka}dx^a.$$

Also die Komponenten der kovarianten Ableitungen von ∂_n und dx^n gegeben durch:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla_{kn} &:= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^n} = \sum_{a=1}^m \Gamma^a_{kn}\partial_a \\ \nabla_k dx^n &:= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} dx^n = -\sum_{a=1}^m \Gamma^n_{ka}dx^a \end{aligned}}$$

Die $a-$te Komponente der kovarianten Ableitung $\nabla_k\omega$ einer 1-Form ω erhält man durch anwenden von $\nabla_k\omega$ auf das

Koordinatenbasisfeld ∂_a. Nach Gleichung (2.21) ergibt sich für Koordinatenfelder $X = \partial_k$ und $Y = \partial_a$ zusammen mit $\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i dx^i$ und $\nabla_{ka} = \sum_{n=1}^m \Gamma^n_{ka}\partial_n$:

$$\begin{aligned}
\omega_{a;k} &= \langle \nabla_k \omega \mid \partial_a \rangle = \partial_k \langle \omega \mid \partial_a \rangle - \langle \omega \mid \nabla_{ka} \rangle \\
&= \partial_k \left\langle \sum_{i=1}^m \omega_i dx^i \mid \partial_a \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^m \omega_i dx^i \mid \sum_{n=1}^m \Gamma^n_{ka}\partial_n \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^m \partial_k \omega_i \underbrace{\langle dx^i \mid \partial_a \rangle}_{\delta^i_a} - \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^m \omega_i \Gamma^n_{ka} \underbrace{\langle dx^i \mid \partial_n \rangle}_{\delta^i_n} = \partial_k \omega_a - \sum_{n=1}^m \omega_n \Gamma^n_{ka}
\end{aligned}$$

Die kovariante Ableitung $\nabla_k \omega$ erhält man also aus

$$\omega_{;k} := \nabla_k \omega = \sum_{a=1}^m \omega_{a;k} dx^a = \sum_{a=1}^m \left(\partial_k \omega_a - \sum_{n=1}^m \omega_n \Gamma^n_{ka} \right) dx^a$$

Insgesamt ergibt sich für die kovariante Ableitung von einem Vektor mit den Komponenten y^a und einer 1-Form mit den Komponenten ω_a in der klassischen Schreibweise:

$$\boxed{\begin{aligned}
y^a_{;k} &= \partial_k y^a + \sum_{n=1}^m \Gamma^a_{kn} y^n \\
\omega_{a;k} &= \partial_k \omega_a - \sum_{n=1}^m \omega_n \Gamma^n_{ka}
\end{aligned}}$$

2.4.2. ***Kovariante Ableitung von*** $(r,s)-$***Tensoren.***
Die kovariante Ableitung lässt sich auf einen $(r,s)-$Tensor übertragen. Nach (1.6) fassen wir den $(r,s)-$Tensor T als multilineare Abbildung

$$T : \underbrace{T^*\mathcal{M} \times \ldots \times T^*\mathcal{M}}_{r} \times \underbrace{T\mathcal{M} \times \ldots \times T\mathcal{M}}_{s} \to \mathbb{R}$$

auf. Seien $\Omega_1, \ldots, \Omega_r \in T^*\mathcal{M}$ und $Z, X_1, \ldots, X_s \in T\mathcal{M}$ dann ist die kovariante Ableitung des $(r,s)-$Tensors definiert als

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z T)(\Omega_1, \ldots, \Omega_r, X_1, \ldots, X_s) &= Z(T(\Omega_1, \ldots, \Omega_r, X_1, \ldots, X_s)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^r T(\Omega_1, \ldots, \Omega_{i-1}, \nabla_Z \Omega_i, \Omega_{i+1}, \ldots, \Omega_r, X_1, \ldots, X_s) \\
&\quad - \sum_{j=1}^s T(\Omega_1, \ldots, \Omega_r, X_1, \ldots, X_{j-1}, \nabla_Z X_j, X_{j+1}, \ldots, X_s)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Nach Gleichung (1.7) besitzt ein $(r,s)-$Tensor T die Darstellung

$$T = \sum_{a_1,\ldots a_r, b_1, \ldots b_s = 1}^m \underbrace{T(dx^{a_1}, \ldots, dx^{a_r}, \partial_{b_1}, \ldots, \partial_{b_s})}_{T^{a_1\ldots a_r}_{b_1\ldots b_s}} \partial_{a_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{a_r} \otimes dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes dx^{b_s}$$

Für $Z = \partial_k$, $\Omega_i = dx^{a_i}$ und $X_j = \partial_{b_j}$ in Gleichung (2.22) folgt für die kovarianten Ableitung:

$$\begin{aligned}
(\nabla_k T)(dx^{a_1}, \ldots, dx^{a_r}, \partial_{b_1}, \ldots, \partial_{b_s}) &= \partial_k T(dx^{a_1}, \ldots, dx^{a_r}, \partial_{b_1}, \ldots, \partial_{b_s}) \\
&\quad - \sum_{i=1}^r T(dx^{a_1}, \ldots, dx^{a_{i-1}}, \nabla_k dx^{a_i}, dx^{a_{i+1}} \ldots, dx^{a_r}, \partial_{b_1}, \ldots, \partial_{b_s}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^s T\left(dx^{a_1}, \ldots, dx^{a_r}, \partial_{b_1}, \ldots, \partial_{b_{j-1}}, \nabla_k \partial_{b_j}, \partial_{b_{j+1}}, \ldots, \partial_{b_s}\right)
\end{aligned}$$

Zusammen mit

$$\nabla_k dx^{a_i} = -\sum_{p=1}^m \Gamma^{a_i}_{kp} dx^p \quad \text{und} \quad \nabla_k \partial_{b_j} = \sum_{q=1}^m \Gamma^q_{kb_j} \partial_q$$

und der Linearität des Tensors erhält man

$$\begin{aligned}
\nabla_k T^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s} &= \partial_k T^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s} \\
&+\sum_{i=1}^{r}\sum_{p=1}^{m}\Gamma^{a_i}_{kp}T\left(dx^{a_1},\dots,dx^{a_{i-1}},\,dx^p,\,,dx^{a_{i+1}}\dots,dx^{a_r}\,,\,\partial_{b_1},\dots,\partial_{b_s}\right) \\
&-\sum_{j=1}^{s}\sum_{q=1}^{m}\Gamma^{q}_{kb_j}T\left(dx^{a_1},\dots,dx^{a_r}\,,\,\partial_{b_1},\dots,\partial_{b_{j-1}},\,\partial_q\,,\partial_{b_{j+1}},\dots,\partial_{b_s}\right) \\
&= \partial_k T^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{p=1}^{m}\Gamma^{a_i}_{kp}T^{a_1\dots a_{i-1}p\,a_{i+1}\dots a_r}_{b_1\dots b_s}-\sum_{j=1}^{s}\sum_{q=1}^{m}\Gamma^{q}_{kb_j}T^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_{j-1}q\,b_{j+1}\dots b_s}
\end{aligned}$$

Die Summen über p und q laufen beide von 1 bis m. Durch umbenennen von p und q jeweils in n erhält man

$$\nabla_k T^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s}=\partial_k T^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s}+\sum_{n=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{r}\Gamma^{a_i}_{kn}T^{a_1\dots a_{i-1}n\,a_{i+1}\dots a_r}_{b_1\dots b_s}-\sum_{j=1}^{s}\Gamma^{n}_{kb_j}T^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_{j-1}n\,b_{j+1}\dots b_s}\right)$$

Beim kovarianten Ableiten eines (r,s) −Tensors T wird also zur **gewöhnlichen Ableitung** $\partial_k T^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s}$

für jeden der r **oberen** Indizes der entsprechnende Term $\sum_{n=1}^{m}\Gamma^{a_i}_{kn}T^{a_1\dots a_{i-1}n\,a_{i+1}\dots a_r}_{b_1\dots b_s}$ **addiert** und

für jeden der s **unteren** Indizes der entsprechnende Term $\sum_{n=1}^{m}\Gamma^{n}_{kb_j}T^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_{j-1}n\,b_{j+1}\dots b_s}$ **subtrahiert**.

Oft wird die Schreibweise $T^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s;k}$ verwendet, die kovariante Ableitung des (r,s) −Tensors ist also:

$$\begin{aligned}
T^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s;k} &= \partial_k T^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_s} \\
&+ \sum_{n=1}^{m}\Gamma^{a_1}_{kn}T^{n\,a_2\dots a_r}_{b_1\dots b_s}+\sum_{n=1}^{m}\Gamma^{a_2}_{kn}T^{a_1 n\,a_3\dots a_r}_{b_1\dots b_s}+\dots+\sum_{n=1}^{m}\Gamma^{a_r}_{kn}T^{a_1\dots a_{r-1}n}_{b_1\dots b_s} \\
&- \sum_{n=1}^{m}\Gamma^{n}_{kb_1}T^{a_1\dots a_r}_{n\,b_2\dots b_s}-\sum_{n=1}^{m}\Gamma^{n}_{kb_2}T^{a_1\dots a_r}_{b_1 n\,b_3\dots b_s}-\dots-\sum_{n=1}^{m}\Gamma^{n}_{kb_s}T^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_{s-1}n}
\end{aligned}$$

Beispiele:

(1) Seien $R^a{}_{bcd}$ die Komponenten eines $(1,3)$ −Tensors R, dann ist:

$$R^a{}_{bcd;k}=\partial_k R^a{}_{bcd}+\sum_{n=1}^{m}\Gamma^a_{kn}R^n{}_{bcd}-\sum_{n=1}^{m}\Gamma^n_{kb}R^a{}_{ncd}-\sum_{n=1}^{m}\Gamma^n_{kc}R^a{}_{bnd}-\sum_{n=1}^{m}\Gamma^n_{kd}R^a{}_{bcn}$$

(2) Für den Metrischen $(0,2)$ −Tensor g ist $(\nabla_X g)(Y,Z)=Xg(Y,Z)-g(\nabla_X Y,Z)-g(Y,\nabla_X Z)$ und für den Levi-Civita Zusammenhang ∇ folgt wegen $\nabla_X g=0$ die Produktregel (2.9).

$$\begin{aligned}
g_{ik;l} &= \partial_l g_{ik}-\sum_{n=1}^{m}g_{nk}\Gamma^n_{il}-\sum_{n=1}^{m}g_{in}\Gamma^n_{kl} \\
&\overset{(2.16)}{=} \partial_l g_{ik}-\sum_{n=1}^{m}g_{kn}\cdot\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m}g^{np}\left\{\partial_i g_{lp}+\partial_l g_{pi}-\partial_p g_{il}\right\}-\sum_{n=1}^{m}g_{in}\cdot\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m}g^{np}\left\{\partial_k g_{lp}+\partial_l g_{pk}-\partial_p g_{kl}\right\} \\
&= \partial_l g_{ik}-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m}\underbrace{\sum_{n=1}^{m}g_{kn}g^{np}}_{\delta^p_k}\left\{\partial_i g_{lp}+\partial_l g_{pi}-\partial_p g_{il}\right\}-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m}\underbrace{\sum_{n=1}^{m}g_{in}g^{np}}_{\delta^p_i}\left\{\partial_k g_{lp}+\partial_l g_{pk}-\partial_p g_{kl}\right\} \\
&= \partial_l g_{ik}-\frac{1}{2}\left\{\partial_i g_{lk}+\partial_l g_{ki}-\partial_k g_{il}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\partial_k g_{li}+\partial_l g_{ik}-\partial_i g_{kl}\right\}\ =\ 0
\end{aligned}$$

2.5. **Kovariante Ableitung von $(1,s)$ −Tensoren und die Metrik.**
Die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes Y nach ∂_k ergibt wieder ein Vektorfeld $\nabla_k Y$, dessen a-te Komponente durch $y^a_{;k} = \partial_k y^a + \sum_{n=1}^m \Gamma^a_{kn} y^n$ gegeben ist, vgl. (2.13). Ein $(1,s)$ −Tensors T (mit den Komponenten $T^a_{b_1\ldots b_s}$) ausgewertet „an der Stelle“ $X_1,\ldots,X_s$ ist eine vektorielle Größe. Die kovariante Ableitung eines $(1,s)$ −Tensors ist in der Form $(\nabla_k T)(X_1,\ldots,X_s)$ wieder ein Vektorfeld. Sie enthält zudem einen Teil, welcher als Komponente der kovariante Ableitung eines Vektorfeldes, also $\nabla_k (T(X_1,\ldots,X_s))$, interpretiert werden kann:

$$T^a_{b_1\ldots b_s;k} = \underbrace{\partial_k T^a_{b_1\ldots b_s} + \sum_{n=1}^m \Gamma^a_{kn} T^n_{b_1\ldots b_s}}_{\nabla_k \text{ von } T \text{ als "Vektor"}} - \sum_{n=1}^m \Gamma^n_{kb_1} T^a_{n\,b_2\ldots b_s} - \cdots - \sum_{n=1}^m \Gamma^n_{kb_s} T^a_{b_1\ldots b_{s-1}n}$$

Dementsprechend lässt sich die kovariante Ableitung eines $(1,s)$ −Tensors schreiben als:

$$(\nabla_Z T)(X_1,\ldots,X_s) = \nabla_Z (T(X_1,\ldots,X_s)) - \sum_{j=1}^s T(X_1,\ldots,X_{j-1},\, \nabla_Z X_j\,, X_{j+1},\ldots,X_s) \tag{2.23}$$

Die die kovariante Ableitung eines $(1,s)$ −Tensors durch Gleichung (2.23) zu beschreiben lässt sich aber auch in koordinateninvarianter Schreibweise motivieren. Den $(1,s)$ −Tensoren kommt eine besondere Bedeutung zu, da sie über die Metrik g mit einem entsprechnenden $(0,s+1)$ −Tensor identifiziert werden können. Sei T ein $(1,s)$ −Tensor, dann gibt es einen zugehörigen $(0,s+1)$ −Tensor t, dessen Komponenten durch senken des oberen Index mit Hilfe der Metrik g zustande kommen. Wir definieren:

$$t(X_1,\ldots,X_s,Y) := g(T(X_1,\ldots,X_s),Y) \tag{2.24}$$

Betrachte zunächst einen $(1,1)$ −Tensor T und den zugehörigen $(0,2)$ −Tensor $t(X,Y) = g(T(X),Y)$. Es ist dann:

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z t)(X,Y) &\overset{(2.22)}{=} Z(t(X,Y)) - t(\nabla_Z X,Y) - t(X,\nabla_Z Y)\\
&\overset{(??)}{=} Zg(T(X),Y) - g(T(\nabla_Z X),Y) - g(T(X),\nabla_Z Y)\\
&\overset{(2.9)}{=} g(\nabla_Z T(X),Y) + g(T(X),\nabla_Z Y) - g(T(\nabla_Z X),Y) - g(T(X),\nabla_Z Y)\\
&= g(\nabla_Z T(X),Y) - g(T(\nabla_Z X),Y) \;=\; g(\nabla_Z T(X) - T(\nabla_Z X),Y)
\end{aligned}$$

Sinnvollerweise lässt sich die kovariante Ableitung des $(1,1)$ −Tensors also durch $(\nabla_Z T)(X) = \nabla_Z T(X) - T(\nabla_Z X)$ ausdrücken, so dass für die kovariante Ableitung der Bilinearform t gilt:

$$(\nabla_Z t)(X,Y) = g((\nabla_Z T)(X),Y) \tag{2.25}$$

Diese Überlegungen lassen sich nun verallgemeinern. Für die kovariante Ableitung des $(0,s+1)$ −Tensors t gilt analog:

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z t)(X_1,\ldots,X_s,Y) &\overset{(2.22)}{=} Z(t(X_1,\ldots,X_s,Y))\\
&\quad - \sum_{j=1}^s t(X_1,\ldots,X_{j-1},\, \nabla_Z X_j\,, X_{j+1},\ldots,X_s,Y) - t(X_1,\ldots,X_s,\nabla_Z Y)\\
&\overset{(2.24)}{=} Zg(T(X_1,\ldots,X_s),Y)\\
&\quad - \sum_{j=1}^s g(T(X_1,\ldots,X_{j-1},\, \nabla_Z X_j\,, X_{j+1},\ldots,X_s),Y) - g(T(X_1,\ldots,X_s),\nabla_Z Y)\\
&\overset{(2.9)}{=} g(\nabla_Z T(X_1,\ldots,X_s),Y) + g(T(X_1,\ldots,X_s),\nabla_Z Y)\\
&\quad - \sum_{j=1}^s g(T(X_1,\ldots,X_{j-1},\, \nabla_Z X_j\,, X_{j+1},\ldots,X_s),Y) - g(T(X_1,\ldots,X_s),\nabla_Z Y)\\
&= g\left(\nabla_Z T(X_1,\ldots,X_s) - \sum_{j=1}^s T(X_1,\ldots,X_{j-1},\, \nabla_Z X_j\,, X_{j+1},\ldots,X_s),Y\right)\\
&\overset{(2.23)}{=} g((\nabla_Z T)(X_1,\ldots,X_s),Y)
\end{aligned}$$

2.6. **Killing Vektorfelder.**
Ein Killing Vektorfeld ξ zeichnet sich dadurch aus, dass die Metrik unverändert bleibt, wenn man sich in Richtung ξ bewegt. Die Änderung der Metrik g entlang der Flusslinie eines Killingfeldes ξ ist also Null:

$$L_\xi g = 0$$

Nach Gleichung (2.6) folgt $0 = (L_\xi g)(Y, Z) = \xi g(Y, Z) - g([\xi, Y], Z) - g(Y, [\xi, Z])$ für ein Killingfeld ξ, also erhält man die Gleichung:

$$\xi g(Y, Z) = g([\xi, Y], Z) + g(Y, [\xi, Z]) \tag{2.26}$$

Wendet man die Produktregel (2.9) auf der linken Seite dieser Gleichung an und nutzt ferner die Torsionsfreiheit (2.8), dann folgt

$$\begin{aligned} g(\nabla_\xi Y, Z) + g(Y, \nabla_\xi Z) &= g(\nabla_\xi Y - \nabla_Y \xi, Z) + g(Y, \nabla_\xi Z - \nabla_Z \xi) \\ &= g(\nabla_\xi Y, Z) - g(\nabla_Y \xi, Z) + g(Y, \nabla_\xi Z) - g(Y, \nabla_Z \xi) \end{aligned}$$

und es ergibt sich die Killing Gleichung in der Form

$$g(\nabla_Y \xi, Z) + g(Y, \nabla_Z \xi) = 0. \tag{2.27}$$

Koordinatenbasis für Killingfelder
Wählt man in Gleichung (2.27) $Y = \partial_i$ und $Z = \partial_k$ so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_i \xi, Z) + g(Y, \nabla_k \xi) = g\left(\sum_{a=1}^m \xi^a_{;i} \partial_a, \partial_k\right) + g\left(\partial_i, \sum_{a=1}^m \xi^a_{;k} \partial_a\right) \\ &= \sum_{a=1}^m \underbrace{g(\partial_a, \partial_k)}_{g_{ak}} \xi^a_{;i} + \sum_{a=1}^m \underbrace{g(\partial_i, \partial_a)}_{g_{ia}} \xi^a_{;k} = \underbrace{\sum_{a=1}^m g_{ak} \xi^a_{;i}}_{=\xi_{k;i}} + \underbrace{\sum_{a=1}^m g_{ia} \xi^a_{;k}}_{=\xi_{i;k}} \end{aligned}$$

und es ergibt sich die Killing Gleichung

$$\xi_{k;i} + \xi_{i;k} = 0$$

Berechnung von Killing Feldern
Der Term $\nabla_k \xi$ lässt sich darstellen als $\nabla_k \xi = \sum_{a=1}^m \left(\partial_k \xi^a + \sum_{n=1}^m \Gamma^a_{kn} \xi^n\right) \partial_a$. Aus der Killing Gleichung (2.27) ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} 0 = g(\nabla_i \xi, \partial_k) + g(\partial_i, \nabla_k \xi) &= g\left(\sum_{a=1}^m \left(\partial_i \xi^a + \sum_{n=1}^m \Gamma^a_{in} \xi^n\right) \partial_a, \partial_k\right) + g\left(\partial_i, \sum_{a=1}^m \left(\partial_k \xi^a + \sum_{n=1}^m \Gamma^a_{kn} \xi^n\right) \partial_a\right) \\ &= \sum_{a=1}^m \left\{ g_{ak} \left(\partial_i \xi^a + \sum_{n=1}^m \Gamma^a_{in} \xi^n\right) + g_{ia} \left(\partial_k \xi^a + \sum_{n=1}^m \Gamma^a_{kn} \xi^n\right) \right\} \\ &= \sum_{a=1}^m (g_{ak} \partial_i \xi^a + g_{ia} \partial_k \xi^a) + \sum_{n=1}^m \underbrace{\sum_{a=1}^m g_{ak} \Gamma^a_{in}}_{\Gamma_{ink}} \xi^n + \sum_{n=1}^m \underbrace{\sum_{a=1}^m g_{ia} \Gamma^a_{kn}}_{\Gamma_{kni}} \xi^n \\ &= \sum_{a=1}^m (g_{ak} \partial_i \xi^a + g_{ia} \partial_k \xi^a) + \sum_{n=1}^m (\Gamma_{ink} \xi^n + \Gamma_{kni} \xi^n) \end{aligned}$$

In der zweiten Summe lässt sich der Index n umbenennen in a. Zusammen mit $\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}\{\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab}\}$ ergibt sich also

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{a=1}^m (g_{ak} \partial_i \xi^a + g_{ia} \partial_k \xi^a + \Gamma_{iak} \xi^a + \Gamma_{kai} \xi^a) \\ &= \sum_{a=1}^m \left(g_{ak} \partial_i \xi^a + g_{ia} \partial_k \xi^a + \frac{1}{2}\{\partial_i g_{ak} + \partial_a g_{ki} - \partial_k g_{ia}\} \xi^a + \frac{1}{2}\{\partial_k g_{ai} + \partial_a g_{ik} - \partial_i g_{ka}\} \xi^a \right) \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie der Metrik gilt $g_{ik} = g_{ki}$ fallen vier Terme heraus, die Killing Gleichung wird zu:

$$\sum_{a=1}^m (g_{ak} \partial_i \xi^a + g_{ia} \partial_k \xi^a + \partial_a g_{ik} \xi^a) = 0$$

3. Zweite kovariante Ableitung

Der Levi-Civita Zusammenhang $\nabla_X Y$ ist als linearer Zusammenhang linear über $C^\infty(\mathcal{M})$ in X, siehe 2.3. Für Vektorfelder V und $X = \sum_{i=1}^m x^i \partial_i$ gilt also:

$$\nabla_X V = \nabla_{\sum_{i=1}^m x^i \partial_i} V = \sum_{i=1}^m x^i \nabla_{\partial_i} V := \sum_{i=1}^m x^i \nabla_i V$$

Dementsprechend lässt sich die zweite kovariante Ableitung eines Vektorfeldes V nach X und $Y = \sum_{k=1}^m y^k \partial_k$ definieren als:

$$\nabla^2_{X,Y} V := \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m x^i y^k \nabla_i \nabla_k V \tag{3.1}$$

Für den Ausdruck $\nabla_x \nabla_y Z$ erhält man mit der Produktregel

$$\nabla_x \nabla_y V \;=\; \nabla_{\sum_{i=1}^m x^i \partial_i} \nabla_{\sum_{k=1}^m y^k \partial_k} V \;=\; \sum_{i=1}^m x^i \nabla_i \left(\sum_{k=1}^m y^k \nabla_k V \right) \;=\; \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m x^i \nabla_i y^k \cdot \nabla_k V + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m x^i y^k \nabla_i \nabla_k V$$

Die letzte Doppelsumme ist nach Definition (3.1) der Term $\nabla^2_{X,Y} V$. Für die andere Doppelsumme erhält man wegen der Linearität der kovarianten Ableitung

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m x^i \nabla_i y^k \cdot \nabla_k V \;=\; \nabla_{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m x^i \nabla_i y^k \cdot \partial_k} V \;=\; \nabla_{\sum_{i=1}^m x^i \nabla_i Y} V \;=\; \nabla_{\nabla_X Y} V$$

Aus $\nabla_X \nabla_Y V = \nabla^2_{X,Y} V + \nabla_{\nabla_X Y} V$ folgt damit für die zweite kovariante Ableitung:

$$\nabla^2_{X,Y} V \;=\; \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_{\nabla_X Y} V \tag{3.2}$$

3.0.1. ***Zweite kovariante Ableitung in Koordinatendarstellung***.

Wählt man in Gleichung (3.2) $X = \partial_i$, $Y = \partial_k$ und $V = \partial_n$ so folgt:

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{i,k\,n} : \;=\; \nabla^2_{\partial_i,\partial_k} \partial_n \;=\; \nabla_i \nabla_{kn} - \nabla_{\nabla_{ik}} \partial_n \;&=\; \nabla_i \left(\sum_{h=1}^m \Gamma^h_{kn} \partial_h \right) - \nabla_{\sum_{b=1}^m \Gamma^b_{ik} \partial_b} \partial_n \\
=\; \sum_{h=1}^m \left(\partial_i \left[\Gamma^h_{kn} \right] \cdot \partial_h + \Gamma^h_{kn} \nabla_{ih} \right) - \sum_{b=1}^m \Gamma^b_{ik} \nabla_{bn} \;&=\; \sum_{h=1}^m \left(\partial_i \left[\Gamma^h_{kn} \right] \cdot \partial_h + \Gamma^h_{kn} \sum_{c=1}^m \Gamma^c_{ih} \partial_c \right) - \sum_{b=1}^m \Gamma^b_{ik} \sum_{l=1}^m \Gamma^l_{bn} \partial_l \\
=\; \sum_{h=1}^m \partial_i \left[\Gamma^h_{kn} \right] \cdot \partial_h + \sum_{h=1}^m \sum_{c=1}^m \Gamma^h_{kn} \Gamma^c_{ih} \partial_c - \sum_{b=1}^m \sum_{l=1}^m \Gamma^b_{ik} \Gamma^l_{bn} \partial_l &
\end{aligned}$$

Für die $a-$te Komponente der zweiten kovarianten Ableitung gilt:

$$\begin{aligned}
\left\langle dx^a \mid \nabla^2_{i,k\,n} \right\rangle \;&=\; \left\langle dx^a \mid \sum_{h=1}^m \partial_i \left[\Gamma^h_{kn} \right] \cdot \partial_h + \sum_{h=1}^m \sum_{c=1}^m \Gamma^h_{kn} \Gamma^c_{ih} \partial_c - \sum_{b=1}^m \sum_{l=1}^m \Gamma^b_{ik} \Gamma^l_{bn} \partial_l \right\rangle \\
&=\; \partial_i \Gamma^a_{kn} + \sum_{h=1}^m \Gamma^h_{kn} \Gamma^a_{ih} - \sum_{b=1}^m \Gamma^b_{ik} \Gamma^a_{bn}
\end{aligned}$$

Umbennen von b in h ergibt also

$$\left\langle dx^a \mid \nabla^2_{i,k\,n} \right\rangle \;=\; \partial_i \Gamma^a_{kn} + \sum_{h=1}^m \Gamma^h_{kn} \Gamma^a_{ih} - \sum_{h=1}^m \Gamma^h_{ik} \Gamma^a_{hn} \;=\; \partial_i \Gamma^a_{kn} + \sum_{h=1}^m \left(\Gamma^h_{kn} \Gamma^a_{ih} - \Gamma^h_{ik} \Gamma^a_{hn} \right)$$

und für die zweite kovariante Ableitung folgt damit:

$$\nabla^2_{i,k\,n} \;=\; \sum_{a=1}^m \left(\partial_i \Gamma^a_{kn} + \sum_{h=1}^m \left(\Gamma^h_{kn} \Gamma^a_{ih} - \Gamma^h_{ik} \Gamma^a_{hn} \right) \right) \partial_a \tag{3.3}$$

3.1. Riemannscher Krümmungstensor.

Der Riemannsche Krümmungstensor ist ein $(1,3)-$Tensor. Sind $X,Y,Z \in T\mathcal{M}$ drei C^r Vektorfelder, dann ist der Riemannsche Krümmungstensor ein C^{r-2} Vektorfeld. Er kann mit Hilfe des Levi-Civita Zusammenhangs ∇ definiert werden durch:

$$R(X,Y)Z = \nabla^2_{X,Y}Z - \nabla^2_{Y,X}Z \tag{3.4}$$

Aus Gleichung (3.2) folgt damit

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y}Z - (\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{\nabla_Y X}Z) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y}Z + \nabla_{\nabla_Y X}Z \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X}Z. \end{aligned}$$

Wegen der Torsionsfreiheit des Levi-Civita Zusammenhangs ist $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, siehe (2.8) und man erhält:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{3.5}$$

3.1.1. *Riemanntensor in Koordinatendarstellung.*

Als $(1,3)-$Tensor besitzt der Riemannsche Krümmungstensor nach (1.7) die Koordinatendarstellung

$$R = \sum_{i,k,n,a=1}^{m} R^a{}_{nik}\, dx^i \otimes dx^k \otimes dx^n \otimes \partial_a$$

wobei zusammen mit (3.4) und $\Gamma^h_{ik} = \Gamma^h_{ki}$ (siehe 2.17) gilt

$$\begin{aligned} R^a{}_{nik} &= \langle dx^a \mid R(\partial_i,\partial_k)\partial_n\rangle = \left\langle dx^a \mid \nabla^2_{i,k\,n} - \nabla^2_{k,i\,n}\right\rangle = \left\langle dx^a \mid \nabla^2_{i,k\,n}\right\rangle - \left\langle dx^a \mid \nabla^2_{k,i\,n}\right\rangle \\ &= \partial_i\Gamma^a_{kn} + \sum_{h=1}^{m}\left(\Gamma^h_{kn}\Gamma^a_{ih} - \Gamma^h_{ik}\Gamma^a_{hn}\right) - \left\{\partial_k\Gamma^a_{in} + \sum_{h=1}^{m}\left(\Gamma^h_{in}\Gamma^a_{kh} - \Gamma^h_{ki}\Gamma^a_{hn}\right)\right\} \\ &= \partial_i\Gamma^a_{kn} - \partial_k\Gamma^a_{in} + \sum_{h=1}^{m}\left(\Gamma^h_{kn}\Gamma^a_{ih}\underbrace{-\Gamma^h_{ik}\Gamma^a_{hn} + \Gamma^h_{ki}\Gamma^a_{hn}}_{=0}-\Gamma^h_{in}\Gamma^a_{kh}\right) \end{aligned}$$

also

$$R^a{}_{nik} = \partial_i\Gamma^a_{kn} - \partial_k\Gamma^a_{in} + \sum_{h=1}^{m}\left(\Gamma^h_{kn}\Gamma^a_{ih} - \Gamma^h_{in}\Gamma^a_{kh}\right) \tag{3.6}$$

und damit:

$$R(\partial_i,\partial_k)\partial_n = \sum_{a=1}^{m} R^a{}_{nik}\partial_a = \sum_{a=1}^{m}\left\{\partial_i\Gamma^a_{kn} - \partial_k\Gamma^a_{in} + \sum_{h=1}^{m}\left(\Gamma^h_{kn}\Gamma^a_{ih} - \Gamma^h_{in}\Gamma^a_{kh}\right)\right\}\partial_a \tag{3.7}$$

Die letzten beiden unteren Indizes i und k in $R^a{}_{nik}$ sind also hier den ersten beiden Vektorfeldern X und Y in $R(X,Y)Z$ zugeordnet, der erste untere Index n dementsprechend dem letzten Vektorfeld Z. Diese Notation wird in der Literatur am häufigsten verwendet, unter anderem in [3] und [4]. In der Literatur findet man auch andere Notationen, welche eine andere Reihenfolge der Indizes vorsehen. In [2] z.B. sind die Indizes in chronologischer Reihenfolge angeordnet, so dass $R(\partial_i,\partial_k)\partial_n = \sum_a R^a_{ikn}\partial_a$. Dementsprechend wäre R^a_{ikn} statt $R^a{}_{nik}$ auf der linken Seite von Gleichung (3.6).

3.1.2. *Schiefsymmetrie des Riemanntensors.*

Der Riemanntensor ist Schiefsymmetrisch in X und Y, d.h. es ist

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z \tag{3.8}$$

und für die Komponenten gilt:

$$R^a{}_{nik} = -R^a{}_{nki}$$

Beweis: Aus der Definitionsgleichung (3.5) folgt direkt:

$$R(Y,X)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]}Z = -\left\{\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z\right\} = -R(X,Y)Z$$

und damit

$$R^a{}_{nik} = \langle dx^a \mid R(\partial_i,\partial_k)\partial_n\rangle = \langle dx^a \mid -R(\partial_k,\partial_i)\partial_n\rangle = -R^a{}_{nki} \qquad \square$$

Lemma 4. *Algebraische Bianchi-Identität*
Für den Riemannschen Tensor gilt

$$\mathcal{A}(X,Y,Z) := R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0 \tag{3.9}$$

und für die Komponenten:

$$R^a{}_{nik} + R^a{}_{ikn} + R^a{}_{kni} = 0 \tag{3.10}$$

Beweis: Wegen der Torsionsfreiheit des Levi-Civita Zusammenhangs ist $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$. Aus (3.5) folgt zusammen mit der Jacobi Identität (2.7):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(X,Y,Z) &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \underbrace{\nabla_X[Y,Z] - \nabla_{[Y,Z]}X}_{[X,[Y,Z]]} + \underbrace{\nabla_Y[Z,X] - \nabla_{[Z,X]}Y}_{[Y,[Z,X]]} + \underbrace{\nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z}_{[Z,[X,Y]]} \\
&= \mathcal{J}(X,Y,Z) \equiv 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

Damit ist Gleichung (3.9) bewiesen. Um Gleichung (3.10) zu erhalten wählt man $X = \partial_i$, $Y = \partial_k$ und $Z = \partial_n$ und erhält zusammen mit (3.7):

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle dx^a \mid \underbrace{R(\partial_i,\partial_k)\partial_n + R(\partial_k,\partial_n)\partial_i + R(\partial_n,\partial_i)\partial_k}_{=0,\text{ vgl. }(3.9)} \right\rangle \\
&= \langle dx^a \mid R(\partial_i,\partial_k)\partial_n\rangle + \langle dx^a \mid R(\partial_k,\partial_n)\partial_i\rangle + \langle dx^a \mid R(\partial_n,\partial_i)\partial_k\rangle = R^a{}_{nik} + R^a{}_{ikn} + R^a{}_{kni} \qquad \square
\end{aligned}$$

3.1.3. *Schiefsymmetrie des Riemanntensors zusammen mit der Metrik.*

Mit der Metrik lässt sich ein $(0,4)-$Tensor bilden, der eine zusätzliche Schiefsymmetrie in Z und U aufweist:

$$g(R(X,Y)Z,U) = -g(R(X,Y)U,Z) \tag{3.11}$$

Komponentenweise erhält man

$$R_{hnik} = -R_{nhik}. \tag{3.12}$$

Beweis: Zunächst erhält man durch zweifaches anwenden der Produktregel (2.9)

$$g(\nabla_X\nabla_Y Z,U) = Xg(\nabla_Y Z,U) - g(\nabla_Y Z,\nabla_X U) = Xg(\nabla_Y Z,U) - \{Yg(Z,\nabla_X U) - g(Z,\nabla_Y\nabla_X U)\}$$

also

$$g(\nabla_X\nabla_Y Z,U) = Xg(\nabla_Y Z,U) - Yg(Z,\nabla_X U) + g(Z,\nabla_Y\nabla_X U) \tag{3.13}$$

und analog:

$$g(\nabla_Y\nabla_X Z,U) = Yg(\nabla_X Z,U) - Xg(Z,\nabla_Y U) + g(Z,\nabla_X\nabla_Y U) \tag{3.14}$$

Außerdem folgt ebenfalls mit der Produktregel, sowie mit der Definition der Lieklammer angewandt auf eine skalare Funktion

$$\begin{aligned}
g\left(\nabla_{[X,Y]}Z,U\right) &= [X,Y]\,g(Z,U) - g\left(Z,\nabla_{[X,Y]}U\right) = XYg(Z,U) - YXg(Z,U) - g\left(Z,\nabla_{[X,Y]}U\right) \\
&= X\{g(\nabla_Y Z,U) + g(Z,\nabla_Y U)\} - Y\{g(\nabla_X Z,U) + g(Z,\nabla_X U)\} - g\left(Z,\nabla_{[X,Y]}U\right)
\end{aligned}$$

also:

$$g\left(\nabla_{[X,Y]}Z,U\right) = Xg(\nabla_Y Z,U) + Xg(Z,\nabla_Y U) - Yg(\nabla_X Z,U) - Yg(Z,\nabla_X U) - g\left(Z,\nabla_{[X,Y]}U\right) \tag{3.15}$$

Nun lässt sich die linke Seite von (3.11) mit der Definition (3.5) der Riemanntensors und den Gleichungen (3.13), (3.14) und (3.15) leicht umschreiben zu:

$$\begin{aligned}
g\left(R\left(X,Y\right)Z,U\right) &= g\left(\nabla_X\nabla_Y Z,U\right)-g\left(\nabla_Y\nabla_X Z,U\right)-g\left(\nabla_{[X,Y]}Z,U\right)\\[1em]
&= Xg\left(\nabla_Y Z,U\right)-Yg\left(Z,\nabla_X U\right)+g\left(Z,\nabla_Y\nabla_X U\right)\\
&\quad -\left\{Yg\left(\nabla_X Z,U\right)-Xg\left(Z,\nabla_Y U\right)+g\left(Z,\nabla_X\nabla_Y U\right)\right\}\\
&\quad -\left\{Xg\left(\nabla_Y Z,U\right)+Xg\left(Z,\nabla_Y U\right)-Yg\left(\nabla_X Z,U\right)-Yg\left(Z,\nabla_X U\right)-g\left(Z,\nabla_{[X,Y]}U\right)\right\}\\[1em]
&= g\left(Z,\nabla_Y\nabla_X U\right)-g\left(Z,\nabla_X\nabla_Y U\right)+g\left(Z,\nabla_{[X,Y]}U\right)\\
&\quad +Xg\left(\nabla_Y Z,U\right)-Yg\left(Z,\nabla_X U\right)-Yg\left(\nabla_X Z,U\right)+Xg\left(Z,\nabla_Y U\right)\\
&\quad -Xg\left(\nabla_Y Z,U\right)+Yg\left(Z,\nabla_X U\right)+Yg\left(\nabla_X Z,U\right)-Xg\left(Z,\nabla_Y U\right)\\[1em]
&= -\left\{g\left(Z,\nabla_X\nabla_Y U\right)-g\left(Z,\nabla_Y\nabla_X U\right)-g\left(Z,\nabla_{[X,Y]}U\right)\right\} = -g\left(R\left(X,Y\right)U,Z\right) \qquad \square
\end{aligned}$$

Um Gleichung (3.12) benötigt man wieder (3.7), es ist

$$g\left(R\left(\partial_i,\partial_k\right)\partial_n,\partial_h\right)=g\left(\sum_{a=1}^{m}R^a_{\ nik}\partial_a,\partial_h\right)=\sum_{a=1}^{m}g_{ah}R^a_{\ nik}=R_{hnik} \tag{3.16}$$

und analog $g\left(R\left(\partial_i,\partial_k\right)\partial_h,\partial_n\right)=R_{nhik}$. Aus (3.11) mit $X=\partial_i$, $Y=\partial_k$, $Z=\partial_n$ und $U=\partial_h$ folgt damit (3.12). $\square$

3.1.4. *Blockvertauschung.*

Vertauschen des vorderen „Zweier-Blocks“ mit dem hinteren „Zweier-Blocks“ lässt den Tensor unverändert:

$$g\left(R\left(X,Y\right)Z,U\right)=g\left(R\left(Z,U\right)X,Y\right) \tag{3.17}$$

Komponentenweise bedeutet das

$$R_{hnik}=R_{ikhn} \tag{3.18}$$

Beweis: Aus der Bianchi-Identität (3.9) erhält man

$$R\left(X,Y\right)Z = -R\left(Y,Z\right)X-R\left(Z,X\right)Y \tag{3.19}$$
$$R\left(Y,Z\right)U = -R\left(Z,U\right)Y-R\left(U,Y\right)Z \tag{3.20}$$
$$R\left(Z,X\right)U = -R\left(X,U\right)Z-R\left(U,Z\right)X \tag{3.21}$$
$$R\left(U,Y\right)X = -R\left(Y,X\right)U-R\left(X,U\right)Y \tag{3.22}$$

und zusammen mit den Schiefsymmetrien (3.8) und (3.11):

$$\begin{aligned}
g\left(R\left(X,Y\right)Z,U\right) &\overset{(3.19)}{=} -g\left(R\left(Y,Z\right)X,U\right)-g\left(R\left(Z,X\right)Y,U\right) = g\left(R\left(Y,Z\right)U,X\right)+g\left(R\left(Z,X\right)U,Y\right)\\[1em]
&\overset{(3.20),(3.21)}{=} -g\left(R\left(Z,U\right)Y,X\right)-g\left(R\left(U,Y\right)Z,X\right)-g\left(R\left(X,U\right)Z,Y\right)-g\left(R\left(U,Z\right)X,Y\right)\\[1em]
&= 2g\left(R\left(Z,U\right)X,Y\right)+g\left(R\left(U,Y\right)X,Z\right)+g\left(R\left(X,U\right)Y,Z\right)\\[1em]
&\overset{(3.22)}{=} 2g\left(R\left(Z,U\right)X,Y\right)-g\left(R\left(Y,X\right)U,Z\right)\underbrace{-g\left(R\left(X,U\right)Y,Z\right)+g\left(R\left(X,U\right)Y,Z\right)}_{=0}\\[1em]
&= 2g\left(R\left(Z,U\right)X,Y\right)-g\left(R\left(X,Y\right)Z,U\right)
\end{aligned}$$

Addition von $g\left(R\left(X,Y\right)Z,U\right)$ auf beiden Seiten führt zu

$$2g\left(R\left(X,Y\right)Z,U\right)=2g\left(R\left(Z,U\right)X,Y\right)$$

und Division durch 2 ergibt (3.17). Gleichung (3.18) folgt mit (3.16) sofort aus der Blockvertauschung (3.17) sowie den beiden Schiefsymmetrien (3.8) und (3.11):

$$R_{hnik} = g\left(R\left(\partial_i,\partial_k\right)\partial_n,\partial_h\right) = g\left(R\left(\partial_n,\partial_h\right)\partial_i,\partial_k\right) = g\left(R\left(\partial_h,\partial_n\right)\partial_k,\partial_i\right) = R_{ikhn} \qquad \square$$

3.2. Kovariante Ableitung des Riemanntensors.

Der Riemanntensor ist ein $(1,3)-$Tensor, dementsprechend lässt sich die kovariante Ableitung nach Gleichung (2.23) bilden:

$$(\nabla_W R)(X,Y,Z) = \nabla_W (R(X,Y)Z) - R(\nabla_W X, Y)Z - R(X, \nabla_W Y)Z - R(X,Y)\nabla_W Z \tag{3.23}$$

Die kovariante Ableitung des Riemanntensors weist zu den Symmetrien des Riemanntensors analoge Symmetrien auf.

3.2.1. *Schiefsymmetrie der kovarianten Ableitung des Riemanntensors.*

Die kovariante Ableitung des Riemanntensors ist schiefsymmetrisch in X und Y:

$$(\nabla_W R)(X,Y,Z) = -(\nabla_W R)(Y,X,Z) \tag{3.24}$$

Für die Komponenten gilt:

$$R^a{}_{nbc;k} = -R^a{}_{ncb;k} \tag{3.25}$$

Beweis: Aus Gleichung (3.23) zusammen mit (3.8) folgt

$$\begin{aligned}
(\nabla_W R)(X,Y,Z) &= -\nabla_W (R(Y,X)Z) + R(Y,\nabla_W X)Z + R(\nabla_W Y, X)Z + R(Y,X)\nabla_W Z \\
&= -\{\nabla_W (R(Y,X)Z) - R(\nabla_W Y, X)Z - R(Y,\nabla_W X)Z - R(Y,X)\nabla_W Z\} \\
&= -(\nabla_W R)(Y,X,Z). \qquad \square
\end{aligned}$$

Aus der Schiefsymmetrie (3.24) folgt dann direkt Gleichung (3.25):

$$R^a{}_{nbc;k} = \langle dx^a \mid (\nabla_k R)(\partial_b, \partial_c, \partial_n)\rangle = -\langle dx^a \mid (\nabla_k R)(\partial_c, \partial_b, \partial_n)\rangle = -R^a{}_{ncb;k} \qquad \square$$

Lemma 5. *Differentielle Bianchi Identität*
Für die kovariante Ableitung des Krümmungstensors gilt:

$$\mathcal{B}(W,X,Y,Z) := (\nabla_W R)(X,Y,Z) + (\nabla_X R)(Y,W,Z) + (\nabla_Y R)(W,X,Z) = 0 \tag{3.26}$$

In der Komponentendarstellung bedeutet das:

$$R^a{}_{nbc;k} + R^a{}_{nck;b} + R^a{}_{nkb;c} = 0 \tag{3.27}$$

Beweis: Jeder der drei Summanden lässt sich mit (3.23) und (3.5) in der Form

$$\begin{aligned}
(\nabla_W R)(X,Y,Z) &= \nabla_W (R(X,Y)Z) - R(\nabla_W X, Y)Z - R(X,\nabla_W Y)Z - R(X,Y)\nabla_W Z \\
&= \nabla_W \left(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z\right) - R(\nabla_W X, Y)Z - R(X, \nabla_W Y)Z \\
&\quad - \left(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\right)\nabla_W Z \\
&= \left\{\nabla_W \nabla_X \nabla_Y - \nabla_W \nabla_Y \nabla_X - \nabla_W \nabla_{[X,Y]} - \nabla_X \nabla_Y \nabla_W + \nabla_Y \nabla_X \nabla_W + \nabla_{[X,Y]} \nabla_W\right\} Z \\
&\quad -R(\nabla_W X, Y)Z - R(X, \nabla_W Y)Z
\end{aligned}$$

aufschreiben. Es folgt analog

$$\begin{aligned}
(\nabla_X R)(Y,W,Z) &= \left\{\nabla_X \nabla_Y \nabla_W - \nabla_X \nabla_W \nabla_Y - \nabla_X \nabla_{[Y,W]} - \nabla_Y \nabla_W \nabla_X + \nabla_W \nabla_Y \nabla_X + \nabla_{[Y,W]} \nabla_X\right\} Z \\
&\quad -R(\nabla_X Y, W)Z - R(Y, \nabla_X W)Z
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(\nabla_Y R)(W,X,Z) &= \left\{\nabla_Y \nabla_W \nabla_X - \nabla_Y \nabla_X \nabla_W - \nabla_Y \nabla_{[W,X]} - \nabla_W \nabla_X \nabla_Y + \nabla_X \nabla_W \nabla_Y + \nabla_{[W,X]} \nabla_Y\right\} Z \\
&\quad -R(\nabla_Y W, X)Z - R(W, \nabla_Y X)Z.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(W,X,Y,Z) \;=\; \Big\{ & \underbrace{\nabla_W\nabla_X\nabla_Y}_{(1)} - \underbrace{\nabla_W\nabla_Y\nabla_X}_{(2)} - \nabla_W\nabla_{[X,Y]} - \underbrace{\nabla_X\nabla_Y\nabla_W}_{(3)} + \underbrace{\nabla_Y\nabla_X\nabla_W}_{(4)} + \nabla_{[X,Y]}\nabla_W \\
& + \underbrace{\nabla_X\nabla_Y\nabla_W}_{(3)} - \underbrace{\nabla_X\nabla_W\nabla_Y}_{(5)} - \nabla_X\nabla_{[Y,W]} - \underbrace{\nabla_Y\nabla_W\nabla_X}_{(6)} + \underbrace{\nabla_W\nabla_Y\nabla_X}_{(2)} + \nabla_{[Y,W]}\nabla_X \\
& + \underbrace{\nabla_Y\nabla_W\nabla_X}_{(6)} - \underbrace{\nabla_Y\nabla_X\nabla_W}_{(4)} - \nabla_Y\nabla_{[W,X]} - \underbrace{\nabla_W\nabla_X\nabla_Y}_{(1)} + \underbrace{\nabla_X\nabla_W\nabla_Y}_{(5)} + \nabla_{[W,X]}\nabla_Y \Big\} Z \\
& - R(\nabla_W X, Y) Z - R(X, \nabla_W Y) Z - R(\nabla_X Y, W) Z \\
& - R(Y, \nabla_X W) Z - R(\nabla_Y W, X) Z - R(W, \nabla_Y X) Z
\end{aligned}$$

Die Terme (1) bis (6) treten jeweils einmal mit positivem und einmal mit negativem Vorzeichen auf und heben sich gegenseitig auf. Außerdem folgt aus der Schiefsymmetrie (3.8) direkt $-R(W, \nabla_Y X) Z = R(\nabla_X Y, W) Z$ usw. Es bleibt also übrig:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(W,X,Y,Z) &= \left\{\nabla_{[X,Y]}\nabla_W - \nabla_W\nabla_{[X,Y]} + \nabla_{[Y,W]}\nabla_X - \nabla_X\nabla_{[Y,W]} + \nabla_{[W,X]}\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_{[W,X]}\right\} Z \\
& \quad - R(\nabla_X Y, W) Z + R(\nabla_Y X, W) Z \\
& \quad - R(\nabla_Y W, X) Z + R(\nabla_W Y, X) Z \\
& \quad - R(\nabla_W X, Y) Z + R(\nabla_X W, Y) Z \\
&= \nabla_{[X,Y]}\nabla_W Z - \nabla_W\nabla_{[X,Y]} Z - \underbrace{\{R(\nabla_X Y, W) Z - R(\nabla_Y X, W) Z\}}_{R([X,Y],W)Z} \\
& \quad + \nabla_{[Y,W]}\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_{[Y,W]} Z - \underbrace{\{R(\nabla_Y W, X) Z - R(\nabla_W Y, X) Z\}}_{R([Y,W],X)Z} \\
& \quad + \nabla_{[W,X]}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{[W,X]} Z - \underbrace{\{R(\nabla_W X, Y) Z - R(\nabla_X W, Y) Z\}}_{R([W,X],Y)Z}
\end{aligned}$$

Nach Definition (3.5) des Riemanntensors ist offenbar

$$R([X,Y], W) Z = \nabla_{[X,Y]}\nabla_W Z - \nabla_W\nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[W,[X,Y]]} Z.$$

Hieraus folgt direkt

$$\nabla_{[X,Y]}\nabla_W Z - \nabla_W\nabla_{[X,Y]} Z - R([X,Y], W) Z \;=\; \nabla_{[W,[X,Y]]} Z$$

und analog:

$$\begin{aligned}
\nabla_{[Y,W]}\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_{[Y,W]} Z - R([Y,W], X) Z &= \nabla_{[X,[Y,W]]} Z \\
\nabla_{[W,X]}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{[W,X]} Z - R([W,X], Y) Z &= \nabla_{[Y,[W,X]]} Z
\end{aligned}$$

Ersetzt man diese Terme oben, so ergibt sich schließlich mit der Jacobi-Identität (2.7):

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(W,X,Y,Z) &= \nabla_{[W,[X,Y]]} Z + \nabla_{[X,[Y,W]]} Z + \nabla_{[Y,[W,X]]} Z \\
&= \nabla_{\underbrace{[W,[X,Y]] + [X,[Y,W]] + [Y,[W,X]]}_{=0}} Z \;=\; 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

Gleichung (3.27) erhält man dann direkt aus (3.26). Mit der Definition $R^a{}_{nbc;k} = \langle dx^a \mid (\nabla_k R)(\partial_b, \partial_c, \partial_n)\rangle$ ist:

$$\begin{aligned}
R^a{}_{nbc;k} + R^a{}_{nck;b} + R^a{}_{nkb;c} &= \langle dx^a \mid (\nabla_k R)(\partial_b, \partial_c, \partial_n)\rangle + \langle dx^a \mid (\nabla_b R)(\partial_c, \partial_k, \partial_n)\rangle + \langle dx^a \mid (\nabla_c R)(\partial_k, \partial_b, \partial_n)\rangle \\
&= \left\langle dx^a \mid \underbrace{(\nabla_k R)(\partial_b, \partial_c, \partial_n) + (\nabla_b R)(\partial_c, \partial_k, \partial_n) + (\nabla_c R)(\partial_k, \partial_b, \partial_n)}_{=0 \text{ wegen } (3.26)} \right\rangle \;=\; 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

3.2.2. ***Schiefsymmetrie der kovarianten Ableitung des Riemanntensors zusammen mit der Metrik.*** Für die kovariante Ableitung des Krümmungstensors gilt

$$g\left(\left(\nabla_W R\right)(X,Y,Z),U\right) = -g\left(\left(\nabla_W R\right)(X,Y,U),Z\right) \tag{3.28}$$

bzw.:

$$R_{inbc;k} \;=\; -R_{nibc;k} \tag{3.29}$$

Beweis: Mit (3.23), der Schiefsymmetrie (3.11) und der Produktregel (2.9) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
g\left(\left(\nabla_W R\right)(X,Y,Z),U\right) &\overset{(3.23)}{=} g\left(\nabla_W\left(R(X,Y)Z\right),U\right) \\
&\quad -g\left(R\left(\nabla_W X,Y\right)Z,U\right) - g\left(R\left(X,\nabla_W Y\right)Z,U\right) - g\left(R(X,Y)\nabla_W Z,U\right) \\
&\overset{(2.9)}{=} Wg\left(R(X,Y)Z,U\right) - g\left(R(X,Y)Z,\nabla_W U\right) \\
&\quad -g\left(R\left(\nabla_W X,Y\right)Z,U\right) - g\left(R\left(X,\nabla_W Y\right)Z,U\right) - g\left(R(X,Y)\nabla_W Z,U\right) \\
&\overset{(3.11)}{=} \underbrace{-Wg\left(R(X,Y)U,Z\right) + g\left(R(X,Y)U,\nabla_W Z\right)}_{-g\left(\nabla_W\left(R(X,Y)U\right),Z\right)} \\
&\quad +g\left(R\left(\nabla_W X,Y\right)U,Z\right) + g\left(R\left(X,\nabla_W Y\right)U,Z\right) + g\left(R(X,Y)U,\nabla_W Z\right) \\
&= -g\left(\left(\nabla_W R\right)(X,Y,U),Z\right) \qquad \square
\end{aligned}$$

Um (3.29) zu erhalten nutzt man die Definition $R^a{}_{nbc;k} \;=\; \langle dx^a \mid \left(\nabla_k R\right)\left(\partial_b,\partial_c,\partial_n\right)\rangle$. Es ist

$$g\left(\left(\nabla_k R\right)\left(\partial_b,\partial_c,\partial_n\right),\partial_i\right) \;=\; g\left(\sum_{a=1}^{m} R^a{}_{nbc;k}\partial_a,\partial_i\right) \;=\; \sum_{a=1}^{m} g_{ia}R^a{}_{nbc;k} \;=\; R_{inbc;k} \tag{3.30}$$

und mit (3.28) erhält man direkt (3.29):

$$R_{inbc;k} \;=\; g\left(\left(\nabla_k R\right)\left(\partial_b,\partial_c,\partial_n\right),\partial_i\right) \;=\; -g\left(\left(\nabla_k R\right)\left(\partial_b,\partial_c,\partial_i\right),\partial_n\right) \;=\; -R_{nibc;k} \qquad \square$$

3.2.3. ***Blockvertauschung bei der kovarianten Ableitung des Krümmungstensors.*** Für die kovariante Ableitung des Krümmungstensors gilt

$$g\left(\left(\nabla_W R\right)(X,Y,Z),U\right) = g\left(\left(\nabla_W R\right)(Z,U,X),Y\right) \tag{3.31}$$

bzw.:

$$R_{inbc;k} \;=\; R_{bcin;k} \tag{3.32}$$

Beweis: Zunächst wird der Ausdruck mit (3.23) und der Produktregel (2.9) umgewandelt wie oben. Dann lässt sich die Blockvertauschung (3.17) anwenden:

$$\begin{aligned}
g\left(\left(\nabla_W R\right)(X,Y,Z),U\right) &= Wg\left(R(X,Y)Z,U\right) - g\left(R(X,Y)Z,\nabla_W U\right) \\
&\quad -g\left(R\left(\nabla_W X,Y\right)Z,U\right) - g\left(R\left(X,\nabla_W Y\right)Z,U\right) - g\left(R(X,Y)\nabla_W Z,U\right) \\
&\overset{(3.17)}{=} Wg\left(R(Z,U)X,Y\right) - g\left(R\left(Z,\nabla_W U\right)X,Y\right) \\
&\quad -g\left(R(Z,U)\nabla_W X,Y\right) - g\left(R(Z,U)X,\nabla_W Y\right) - g\left(R\left(\nabla_W Z,U\right)X,Y\right) \\
&= \underbrace{Wg\left(R(Z,U)X,Y\right) - g\left(R(Z,U)X,\nabla_W Y\right)}_{g\left(\nabla_W\left(R(Z,U)X\right),Y\right)} \\
&\quad -g\left(R\left(\nabla_W Z,U\right)X,Y\right) - g\left(R\left(Z,\nabla_W U\right)X,Y\right) - g\left(R(Z,U)\nabla_W X,Y\right) \\
&= g\left(\left(\nabla_W R\right)(Z,U,X),Y\right) \qquad \square
\end{aligned}$$

Aus der Blockvertauschung (3.31) sowie den beiden Schiefsymmetrien (3.24) und (3.28) erhält man dann leicht (3.32):

$$R_{inbc;k} \;=\; g\left(\left(\nabla_k R\right)\left(\partial_b,\partial_c,\partial_n\right),\partial_i\right) \;=\; g\left(\left(\nabla_k R\right)\left(\partial_n,\partial_i\right)\partial_b,\partial_c\right) \;=\; g\left(\left(\nabla_k R\right)\left(\partial_i,\partial_n\right)\partial_c,\partial_b\right) \;=\; R_{bcin;k} \qquad \square$$

3.3. Kontraktion eines Tensors.
In Abschnitt 1.3.2 wurde bereits die Kontraktion $\mathcal{C}$ als Anwendung einer 1-Form auf einen Vektor eingeführt. Aus Gleichung (1.8) folgt offensichtlich:

$$\mathcal{C}\left(dx^b \otimes \partial_a\right) \;=\; \left\langle dx^b \mid \partial_a \right\rangle \;=\; \delta^b_a \;=\; \begin{cases} 1 & \text{for } a = b \\ 0 & \text{for } a \neq b \end{cases}$$

Sei nun $k \in \{1, \ldots, r\}$ und $l \in \{1, \ldots, s\}$. Die $k, l-$Kontraktion eines $(r, s)-$Tensors ist eine Abbildung

$$\mathcal{C}^k_l : T_{(r,s)}\mathbb{E} \to T_{(r-1,s-1)}\mathbb{E}$$

welche aus einem Tensor der Stufe $r + s$ einen Tensor der Stufe $r + s - 2$ macht. Im Folgenden wird die abkürzenden Schreibweise

$$\bigotimes_{p=1}^{r} \partial_{a_p} \;:=\; \partial_{a_1} \otimes \partial_{a_2} \otimes \ldots \otimes \partial_{a_r} \quad \text{und} \quad \bigotimes_{q=1}^{s} dx^q \;:=\; dx^{b_1} \otimes dx^{b_2} \otimes \ldots \otimes dx^{b_s}$$

verwendet. Ein $(r, s)-$Tensor T lässt sich damit schreiben als:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{a_1,\ldots a_r,\, b_1,\ldots b_s = 1}^{m} T^{a_1 \ldots a_r}_{b_1 \ldots b_s}\, \partial_{a_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{a_r} \otimes dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes dx^{b_s} \\ &= \sum_{a_1,\ldots a_r,\, b_1,\ldots b_s = 1}^{m} T^{a_1 \ldots a_r}_{b_1 \ldots b_s} \bigotimes_{p=1}^{r} \partial_{a_p} \otimes \bigotimes_{q=1}^{s} dx^{b_q} \end{aligned}$$

Für die $k, l-$Kontraktion gilt dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^k_l T &= \mathcal{C}^k_l \left(\sum_{a_1,\ldots a_r,\, b_1,\ldots b_s = 1}^{m} T^{a_1 \ldots a_r}_{b_1 \ldots b_s} \bigotimes_{p=1}^{r} \partial_{a_p} \otimes \bigotimes_{q=1}^{s} dx^{b_q} \right) \\ &= \sum_{a_1,\ldots a_r,\, b_1,\ldots b_s = 1}^{m} T^{a_1 \ldots a_r}_{b_1 \ldots b_s} \cdot \underbrace{\mathcal{C}\left(dx^{b_l} \otimes \partial_{a_k}\right)}_{=\delta^{b_l}_{a_k}} \bigotimes_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{r} \partial_{a_p} \otimes \bigotimes_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{s} dx^{b_q} \\ &= \sum_{a_1,\ldots a_r,\, b_1,\ldots b_{l-1}, b_{l+1}, \ldots b_s = 1}^{m} T^{a_1 \ldots a_k \ldots a_r}_{b_1 \ldots b_{l-1} a_k b_{l+1} \ldots b_s} \bigotimes_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{r} \partial_{a_p} \otimes \bigotimes_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{s} dx^{b_q} \end{aligned}$$

Da dem Index a_k bei der Kontraktion hier eine besondere Bedeutung zukommt, schreiben wir die Summe über a_k seperat aus und bennen den Index a_k danach in h um:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^k_l T &= \sum_{a_1,\ldots a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots a_r,\, b_1, \ldots b_{l-1}, b_{l+1}, \ldots b_s = 1}^{m} \; \sum_{a_k=1}^{m} T^{a_1 \ldots a_k \ldots a_r}_{b_1 \ldots b_{l-1} a_k b_{l+1} \ldots b_s} \bigotimes_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{r} \partial_{a_p} \otimes \bigotimes_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{s} dx^{b_q} \\ &= \sum_{a_1,\ldots a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots a_r,\, b_1, \ldots b_{l-1}, b_{l+1}, \ldots b_s = 1}^{m} \; \sum_{h=1}^{m} T^{a_1 \ldots a_{k-1}\, h\, a_{k+1} \ldots a_r}_{b_1 \ldots b_{l-1}\, h\, b_{l+1} \ldots b_s} \bigotimes_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{r} \partial_{a_p} \otimes \bigotimes_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{s} dx^{b_q} \end{aligned}$$

Die Komponenten des $(r - 1, s - 1)-$Tensors $\mathcal{C}^k_l T$ sind also gegeben durch

$$\left(\mathcal{C}^k_l T\right)^{i_1 \ldots i_{r-1}}_{\;\; j_1 \ldots j_{s-1}} = \sum_{h=1}^{m} T^{a_1 \ldots a_{k-1}\, h\, a_{k+1} \ldots a_r}_{b_1 \ldots b_{l-1}\, h\, b_{l+1} \ldots b_s}$$

wobei $i_1 = a_1, \ldots, i_{k-1} = a_{k-1}$ und $i_k = a_{k+1}, \ldots i_{r-1} = a_r$ sowie $j_1 = b_1, \ldots, j_{l-1} = b_{l-1}$ und $j_l = b_{l+1}, \ldots, j_{s-1} = b_s$. Für den neuen $(r - 1, s - 1)-$ Tensor $\mathcal{C}^k_l T$ gilt damit wieder

$$\mathcal{C}^k_l T = \sum_{i_1,\ldots i_{r-1},\, j_1, \ldots j_{l-1} = 1}^{m} \left(\mathcal{C}^k_l T\right)^{i_1 \ldots i_{r-1}}_{\;\; j_1 \ldots j_{s-1}} \bigotimes_{p=1}^{r-1} \partial_{i_p} \otimes \bigotimes_{q=1}^{s-1} dx^{j_q}$$

3.3.1. ***Kontraktion zusammen mit der Metrik.***
Betrachten wir zunächst einen $(1,1)-$Tensor T mit den Komponenten $T^i_k = \left\langle dx^i \mid T(\partial_k)\right\rangle$. Nach (1.12) lässt sich $T(X)$ als Vektor darstellen durch

$$T(X) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{ln} g(\partial_n, T(X))\,\partial_l$$

und für die Komponenten ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} T^i_k &= \left\langle dx^i \mid T(\partial_k)\right\rangle = \left\langle dx^i \mid \sum_{l=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{ln} g(\partial_n, T(\partial_k))\,\partial_l \right\rangle \\ &= \sum_{l=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{ln} g(\partial_n, T(\partial_k)) \underbrace{\left\langle dx^i \mid \partial_l\right\rangle}_{\delta^i_l} = \sum_{n=1}^{m} g^{in} g(\partial_n, T(\partial_k)) \end{aligned}$$

Die Kontraktion bzw. die Spur des $(1,1)-$Tensors ist dann:

$$\mathcal{C}^1_1 T = \sum_{k=1}^{m} T^k_k = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{kn} g(\partial_n, T(\partial_k)) \tag{3.33}$$

Für einen $(1,s)-$Tensor T gilt mit (1.12) analog

$$T(X_1,\dots,X_{l-1},\,\partial_k,\,X_{l+1},\dots,X_s) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{ln} g(\partial_n, T(X_1,\dots,X_{l-1},\,\partial_k,\,X_{l+1},\dots,X_s))\,\partial_l$$

und damit:

$$\begin{aligned} \left\langle dx^i \mid T(X_1,\dots,X_{l-1},\,\partial_k,\,X_{l+1},\dots,X_s)\right\rangle &= \left\langle dx^i \mid \sum_{l=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{ln} g(\partial_n, T(X_1,\dots,X_{l-1},\,\partial_k,\,X_{l+1},\dots,X_s))\,\partial_l \right\rangle \\ &= \sum_{l=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{ln} g(\partial_n, T(X_1,\dots,X_{l-1},\,\partial_k,\,X_{l+1},\dots,X_s)) \underbrace{\left\langle dx^i \mid \partial_l\right\rangle}_{\delta^i_l} \\ &= \sum_{n=1}^{m} g^{in} g(\partial_n, T(X_1,\dots,X_{l-1},\,\partial_k,\,X_{l+1},\dots,X_s)) \end{aligned}$$

Für die $\mathcal{C}^1_l$ Kontraktion folgt also

$$\left(\mathcal{C}^1_l T\right)(X_1,\dots,X_{l-1},\,X_{l+1},\dots,X_s) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{kn} g(\partial_n, T(X_1,\dots,X_{l-1},\,\partial_k,\,X_{l+1},\dots,X_s)) \tag{3.34}$$

3.3.2. ***Spur eines (0,s+1) Tensors.***
Sei t nun ein $(0,2)$ Tensor, dann existiert ein eindeutig bestimmter $(1,1)$ Tensor T, so dass zusammen mit der Metrik gilt $t(X,Y) = g(T(X),Y)$ vgl. (2.24) für $s=1$. Die Spur von t ist dann definiert als die Spur des Tensors T, siehe (3.33). Es ist also

$$\mathcal{C}^1_1 T = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{kn} g(T(\partial_k), \partial_n) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{kn}\, t(\partial_k, \partial_n)\,. \tag{3.35}$$

Für einen $(0,s+1)$ Tensor t folgt mit (2.24) aus (3.34) analog:

$$\left(\mathcal{C}^1_l T\right)(X_1,\dots,X_{l-1},\,X_{l+1},\dots,X_s) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{kn} t(T(X_1,\dots,X_{l-1},\,\partial_k,\,X_{l+1},\dots,X_s), \partial_n)$$

3.4. **Divergenz.**
Für Vektorfelder X ist die Divergenz definiert als Spur der Abbildung $\zeta \to \nabla_\zeta X$, d.h:

$$div(X) := \text{Spur}\{\,\zeta \to \nabla_\zeta X\,\}$$

Analog ist die Divergenz eines $(1,s)$ Tensors T definiert als die Spur der Abbildung $\zeta \to (\nabla_\zeta T)(X_1,\dots,X_s)$, also:

$$(div\,T)(X_1,\dots,X_s) := \text{Spur}\{\,\zeta \to (\nabla_\zeta T)(X_1,\dots,X_s)\,\}$$

3.4.1. ***Divergenz eines Vektors mit Hilfe der Metrik.***
Für die kovariante Ableitung des Vektors X nach dem Koordinatenfeld ∂_k gilt nach (1.12) zusammen mit der Metrik:

$$\nabla_k X = \sum_{l=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{ln} g\left(\partial_n, \nabla_k X\right)\partial_l$$

Die $a-$te Komponente ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} x^a_{\;;k} &= \langle dx^a \mid \nabla_k X\rangle = \left\langle dx^a \mid \sum_{l=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{ln} g\left(\partial_n, \nabla_k X\right)\partial_l \right\rangle \\ &= \sum_{l=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{ln} g\left(\partial_n, \nabla_k X\right)\underbrace{\langle dx^a \mid \partial_l\rangle}_{\delta^a_l} = \sum_{n=1}^{m} g^{an} g\left(\partial_n, \nabla_k X\right). \end{aligned}$$

Für die Divergenz des Vektorfeldes folgt also

$$div\,(X) = \sum_{k=1}^{m} x^k_{\;;k} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{kn} g\left(\partial_n, \nabla_k X\right)$$

3.4.2. ***Divergenz eines Tensors.***
Sei T ein $(1,1)$ Tensor und $(\nabla_k T)(X)$ die kovariante Ableitung nach dem Koordinatenfeld ∂_k, ausgewertet „an der Stelle“ X. Wir betrachten nun $(\nabla_k T)(\partial_b)$, nach (1.12) gilt

$$(\nabla_k T)(\partial_b) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{ln} g\left(\partial_n, (\nabla_k T)(\partial_b)\right)\partial_l$$

und für die $a-$te Komponente:

$$\begin{aligned} T^a_{\;b;k} &= \langle dx^a \mid (\nabla_k T)(\partial_b)\rangle = \left\langle dx^a \mid \sum_{l=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{ln} g\left(\partial_n, (\nabla_k T)(\partial_b)\right)\partial_l \right\rangle \\ &= \sum_{l=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{ln} g\left(\partial_n, (\nabla_k T)(\partial_b)\right)\underbrace{\langle dx^a \mid \partial_l\rangle}_{\delta^a_l} = \sum_{n=1}^{m} g^{an} g\left(\partial_n, (\nabla_k T)(\partial_b)\right). \end{aligned}$$

Für die Divergenz des Tensors gilt dann

$$(div\,T)(\partial_b) = \sum_{k=1}^{m} T^k_{\;b;k} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{kn} g\left(\partial_n, (\nabla_k T)(\partial_b)\right) \tag{3.36}$$

bzw. an der Stelle X:

$$(div\,T)(X) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{kn} g\left(\partial_n, (\nabla_k T)(X)\right) \tag{3.37}$$

Analog zur Rechnung oben ergibt sich für einen $(1,s)-$Tensor T

$$T^a_{\;b_1\ldots b_s;\,k} = \langle dx^a \mid (\nabla_k T)(\partial_{b_1},\ldots,\partial_{b_s})\rangle = \sum_{n=1}^{m} g^{an} g\left(\partial_n, (\nabla_k T)(\partial_{b_1},\ldots,\partial_{b_s})\right)$$

und damit:

$$(div\,T)(\partial_{b_1},\ldots,\partial_{b_s}) = \sum_{k=1}^{m} T^k_{\;b_1\ldots b_s;\,k} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{kn} g\left(\partial_n, (\nabla_k T)(\partial_{b_1},\ldots,\partial_{b_s})\right)$$

Die Divergenz eines $(1,s)$ Tensors T ist also definiert durch:

$$(div\,T)(X_1,\ldots,X_s) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{kn} g\left(\partial_n, (\nabla_k T)(X_1,\ldots,X_s)\right) \tag{3.38}$$

3.5. **Ricci Tensor.**
Der Ricci Tensor ist die Spur der linearen Abbildung $\zeta \to R(\zeta, Y)X$, also

$$ric(X,Y) = \text{Spur}\{\, \zeta \to R(\zeta,Y)X \,\}.$$

Die Vektorfelder X und Y treten dabei auf den jeweiligen Seiten der Gleichung in vertauschter Reihenfolge auf! Nach (3.34) ist die $\mathcal{C}_1^1 R$ Kontraktion des Riemanntensors gegeben durch

$$\left(\mathcal{C}_1^1 R\right)(Y,Z) \;=\; \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} g^{pq} g\left(\partial_q, R(\partial_p, Y) Z\right)$$

und der $(0,2)$ Tensor ric lässt sich schreiben als:

$$ric(X,Y) \;:=\; \left(\mathcal{C}_1^1 R\right)(Y,X) \;=\; \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} g^{pq} g\left(\partial_q, R(\partial_p, Y) X\right). \tag{3.39}$$

Wegen (3.7) ist $R(\partial_p,\, \partial_k)\,\partial_n = \sum_{a=1}^{m} R^a{}_{npk} \partial_a$ und für die Komponenten folgt

$$\begin{aligned}
ric(\partial_n, \partial_k) \;&=\; \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} g^{pq} g\left(\partial_q, R(\partial_p,\, \partial_k)\,\partial_n\right) \;=\; \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} g^{pq} g\left(\partial_q, \sum_{a=1}^{m} R^a{}_{npk}\partial_a\right) \\
&=\; \sum_{a=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}\underbrace{\sum_{q=1}^{m} g^{pq} g_{qa}}_{\delta_a^p}\; R^a{}_{npk} \;=\; \sum_{a=1}^{m} R^a{}_{nak} \;=\; R_{nk}
\end{aligned}$$

also mit Gleichung (3.6):

$$R_{nk} \;=\; ric(\partial_n, \partial_k) \;=\; \sum_{a=1}^{m} R^a{}_{nak} \;=\; \sum_{a=1}^{m}\left(\partial_a \Gamma^a_{kn} - \partial_k \Gamma^a_{an} + \sum_{h=1}^{m}\left(\Gamma^h_{kn}\Gamma^a_{ah} - \Gamma^h_{an}\Gamma^a_{kh}\right)\right) \tag{3.40}$$

3.5.1. ***Der Ricci Tensor als (1,1) Tensor*** *Ric.*
Nach 3.3.2 gibt es einen eindeutig bestimmten $(1,1)$ Tensor Ric, so dass

$$ric(X,Y) = g\left(Ric(X), Y\right). \tag{3.41}$$

Zusammen mit (3.39), der Blockvertauschbarkeit und der Linearität der Metrik g ergibt sich:

$$\begin{aligned}
g\left(Ric(X), Y\right) \;&=\; \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} g^{pq} g\left(R(\partial_p, Y) X, \partial_q\right) \;\overset{(3.17)}{=}\; \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} g^{pq} g\left(R(X, \partial_q)\,\partial_p, Y\right) \\
&=\; g\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} g^{pq} R(X, \partial_q)\,\partial_p, Y\right)
\end{aligned}$$

Am Anfang und am Ende der Gleichung steht im zweiten Argument der Metrik das Vektorfeld Y. Offensichtlich müssen also auch die Terme im ersten Argument der Metrik übereinstimmen und es folgt:

$$Ric(X) = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} g^{pq} R(X, \partial_q)\,\partial_p \tag{3.42}$$

Für die Komponenten folgt:

$$\begin{aligned}
\langle dx^n \mid Ric(\partial_k)\rangle \;&=\; \left\langle dx^n \mid \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} g^{pq} R(\partial_k, \partial_q)\,\partial_p \right\rangle \;=\; \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} g^{pq}\underbrace{\langle dx^n \mid R(\partial_k, \partial_q)\,\partial_p\rangle}_{R^n{}_{pkq}} \;=\; \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} g^{pq} R^n{}_{pkq} \\
&=\; \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} g^{pq} g^{nl} R_{lpkq} \;\overset{(3.12,3.8)}{=}\; \sum_{q=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} g^{nl}\underbrace{\sum_{p=1}^{m} g^{pq} R_{plqk}}_{R^q{}_{lqk}} = \sum_{l=1}^{m} g^{nl}\underbrace{\sum_{q=1}^{m} R^q{}_{lqk}}_{R_{lk}} = \sum_{l=1}^{m} g^{nl} R_{lk} = R^n_{\;k}
\end{aligned}$$

3.6. **Skalarkrümmung.**
Der Ricci Skalar Sc (oder auch R in der klassischen Schreibweise) ist dann mit (3.35) definiert als

$$\begin{aligned} Sc :&= \mathcal{C}_1^1 Ric = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{kn} g\left(\partial_n, Ric\left(\partial_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{kn}\, ric\left(\partial_k, \partial_n\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} g^{kn} R_{kn} = \sum_{k=1}^{m} R_k^k \end{aligned}$$

3.7. **Einsteintensor.**
Der Einsteintensor als $(0,2)$ Tensor ist gegeben als

$$G(X,Y) := ric(X,Y) - \frac{1}{2} Sc \cdot g(X,Y) - \Lambda \cdot g(X,Y) \tag{3.43}$$

und für Koordinatenfelder ergibt sich komponentenweise die klassische Schreibweise ($Sc = R$):

$$\begin{aligned} G_{nk} = G\left(\partial_n, \partial_k\right) &= ric\left(\partial_n, \partial_k\right) - \frac{1}{2} Sc \cdot g\left(\partial_n, \partial_k\right) - \Lambda \cdot g\left(\partial_n, \partial_k\right) \\ &= R_{nk} - \frac{1}{2} R\, g_{nk} - \Lambda\, g_{nk} \end{aligned}$$

Heben des Index n ergibt dann:

$$G_k^i = \sum_{n=1}^{m} g^{in} G_{nk} = \sum_{n=1}^{m} g^{in} R_{nk} - \frac{1}{2} R \underbrace{\sum_{n=1}^{m} g^{in} g_{nk}}_{\delta_k^i} - \Lambda \underbrace{\sum_{n=1}^{m} g^{in} g_{nk}}_{\delta_k^i}$$

also

$$G_k^i = R_k^i - \frac{1}{2} R\, \delta_k^i - \Lambda\, \delta_k^i \tag{3.44}$$

Um den Einsteintensor als $(1,1)$ Tensor in koordinatenunabhängiger Darstellung zu schreiben, definiert man die Identität Id: Die Abbildung Id bilde jeden Vektor X auf sich selbst ab, d.h. $Id(X) = X$. Nach 3.3.2 gibt es einen eindeutig bestimmten $(1,1)$ Tensor $\mathbf{G}$ mit $G(X,Y) = g(\mathbf{G}(X), Y)$. Zusammen mit (3.41) folgt aus (3.43)

$$\begin{aligned} g(\mathbf{G}(X), Y) &= g(Ric(X), Y) - \frac{1}{2} Sc \cdot g(Id(X), Y) - \Lambda \cdot g(Id(X), Y) \\ &= g\left(Ric(X) - \frac{1}{2} Sc \cdot Id(X) - \Lambda \cdot Id(X), Y\right). \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für beliebige X und Y gilt, kann man den Einsteintensor schreiben als:

$$\mathbf{G} = Ric - \frac{1}{2} Sc \cdot Id - \Lambda \cdot Id \tag{3.45}$$

3.8. **Einstein's Feldgleichungen.**
Der Energie-Impuls-Tensor beschreibt die Materie (und Energie) in einem Raumzeitmodell. Analog zum Einsteintensor sei $T(X,Y) = g(\mathbf{T}(X), Y)$. Einstein's Feldgleichungen beschreiben wie Masse und Raumzeitkrümmung miteinander in Verbindung stehen. Die Masse krümmt den Raum, die Raumzeitkrümmung bestimmt die Bewegung der Materie. Die Feldgleichungen $\mathbf{G} = 8\pi\gamma c^{-4}\mathbf{T}$ werden mit (3.43) und bzw mit (3.45) zu

$$ric(X,Y) - \frac{1}{2} Sc \cdot g(X,Y) - \Lambda \cdot g(X,Y) = \frac{8\pi\gamma}{c^4} \cdot T(X,Y) \tag{3.46}$$

$$Ric - \frac{1}{2} Sc \cdot Id - \Lambda \cdot Id = \frac{8\pi\gamma}{c^4} \cdot \mathbf{T} \tag{3.47}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit und γ die Gravitationskonstante[7] ist.

In dieser Form findet man die Feldgleichungen z.B. in [5]. Allerdings findet man in der Literatur auch alternativ ein positives Vorzeichen bei der kosmologischen Konstante. Dies ist Abhängig von der gewählten Signatur der Metrik, der Konvention für das Vorzeichen des Ricci-Tensors und dem Vorzeichen des Energie-Impuls-Tensors.

[7] $\gamma \approx 6,67259 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

4. Orthonormalbasis für die Lorentzmetrik

Im Folgenden soll bewiesen werden, dass für jede nicht-entartete Metrik eine Basis existiert, deren Elemente die Länge Eins haben und zu einander senkrecht sind. Eine Lorentzmetrik ist immer eine nicht-entartete Metrik. Mit Hilfe der Orthonormalbasis vereinfacht sich z.B. die Darstellung von Ricci-Tensor und Krümmungsskalar.

Definition 6. Entartet und nicht-entartet
Eine Metrik auf einem Vektorraum $\mathbb{E}$ nennt man entartet wenn es einen Vektor $w \in \mathbb{E}$ mit $w \neq 0$ gibt, so dass für alle $v \in \mathbb{E}$ gilt $g(v, w) = 0$. Bei einer **nicht-entarteten** Metrik g ist also folgende Bedingung erfüllt:

$$\text{Wenn für } \textbf{alle } v \in \mathbb{E} \text{ gilt } g(v, w) = 0 \text{ dann folgt } w = 0 \tag{4.1}$$

Existenz einer Orthonormalbasis
Für eine Orthogonal-Basis $\{b_1, \ldots, b_m\}$ eines Vektorraum $\mathbb{E}$ ist $g(b_i, b_k) = 0$ falls $i = k$ und $g(b_i, b_k) \neq 0$ sonst. Falls $g(b_k, b_k) \neq 0$ lässt sich aus der Orthogonalbasis eine Orthonormalbasis herstellen, indem man die Basisvektoren normiert:

$$e_k := \frac{b_k}{|b_k|} = \frac{b_k}{\sqrt{|g(b_k, b_k)|}} \tag{4.2}$$

Im Folgenden wird bewiesen, dass es für eine nicht-entartete Metrik eine Basis gibt, deren Basisvektoren b_k einen von Null verschieden Betrag haben, d.h. $\sqrt{|g(b_k, b_k)|} \neq 0$ also $g(b_k, b_k) \neq 0$:

Lemma 7. *Existenz eines normierbaren Vektors*
Sei g eine nicht-entartete Metrik, dann gibt es (mindestens) einen Vektor $v \in \mathbb{E}$, dessen Betrag $\sqrt{|g(v, v)|}$ nicht Null ist. Für den Vektor v gilt also $g(v, v) \neq 0$.

Proof. Nehmen wir an der Betrag **aller** Vektoren in $\mathbb{E}$ sei Null. Dann wäre für alle $v \in \mathbb{E}$ und $w \in \mathbb{E}$ also auch solche mit $w \neq 0$:

$$0 = g(v + w, v + w) = \underbrace{g(v, v)}_{=0} + 2g(v, w) + \underbrace{g(w, w)}_{=0} = 2g(v, w)$$

Es gäbe also einen Vektor $w \neq 0$, so dass für alle $v \in \mathbb{E}$ gilt $g(v, w) = 0$ und die Metrik wäre entartet. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung einer nicht-entarteten Metrik, siehe (4.1). □

Basisvektoren
Wählt man nun $b_1 = v$, dann erhält man aus (4.2) den ersten normierten Basisvektor als:

$$e_1 := \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{v}{|v|}$$

Der Vektorraum $\mathbb{E}$ lässt sich damit in zwei zueinander orthogonale Unterräume $\mathbb{U}$ und $\mathbb{U}^\perp$ aufteilen. Dabei sei $\mathbb{U}$ der vom Basisvektor e_1 aufgespannte Raum und $\mathbb{U}^\perp$ das orthogonale Komplement. Für $w^\perp \in \mathbb{U}^\perp$ und **alle** Vektoren $v \in \mathbb{U} = Spann\{e_1\}$ gilt also $g\left(v, w^\perp\right) = 0$.

Lemma 8. *Unterraum und orthogonales Komplement*
Seien $\mathbb{U}$ und $\mathbb{U}^\perp$ zueinander orthogonale Unterräume eines Vektorraums $\mathbb{E}$, so dass $\mathbb{E} = \mathbb{U} \cup \mathbb{U}^\perp$. Die Metrik g ist auf $\mathbb{E}$ und $\mathbb{U}$ nicht-entartet. Dann ist g auf $\mathbb{U}^\perp$ nicht-entartet und es gibt (mindestens) einen normierbaren Vektor in $\mathbb{U}^\perp$.

Proof. Seien $v \in \mathbb{U}$ und $w^\perp \in \mathbb{U}^\perp$ mit $w^\perp \neq 0$. Wegen der Orthogonalität der Unterräume $\mathbb{U}$ und $\mathbb{U}^\perp$ zueinander ist $g\left(v, w^\perp\right) = 0$ für alle $v \in \mathbb{U}$. Nehmen wir nun an, das auch für alle $v \in \mathbb{U}^\perp$ gilt $g\left(v, w^\perp\right) = 0$. Das würde bedeuteten, dass $g\left(v, w^\perp\right) = 0$ für alle $v \in \mathbb{E} = \mathbb{U} \cup \mathbb{U}^\perp$ ist. Da aber die Metrik auf $\mathbb{E}$ nach Voraussetzung nicht-entartet ist, kann dies nicht sein. Es gibt also kein $w^\perp \in \mathbb{U}^\perp$ mit $w^\perp \neq 0$, so dass $g\left(v, w^\perp\right) = 0$ für alle $v \in \mathbb{U}^\perp$. Somit ist die Metrik auf $\mathbb{U}^\perp$ nicht-entartet, und nach Lemma 7 gibt es dann einen normierbaren Vektor in $\mathbb{U}^\perp$. □

Nächster Basisvektor und Algorithmus
Sei $b_2 \in \mathbb{U}^\perp$ ein normierbarer Vektor. Es ist offensichtlich $g(b_1, b_2) = 0$. Als nächsten Basisvektor der Orthonormalbasis wählt man:

$$e_2 := \frac{b_2}{|b_2|}$$

Von nun an sei $\mathbb{U} = Spann\{e_1, e_2\}$ und $\mathbb{U}^\perp$ das hierzu orthogonale Komplement. Nach Lemma 8 gibt es wieder einen normierbaren Vektor b_3 in $\mathbb{U}^\perp$, als nächsten Basisvektor der Orthonormalbasis wählt man $e_3 := \frac{b_3}{|b_3|}$ usw.

4.1. **Orthonormalbasis bei Ricci-Tensor und Krümmungsskalar.**
Seien nun $\{E_1, \ldots, E_m\}$ orthonormale Felder auf einer Lorentz-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, dann ist:

$$g(E_i, E_k) = \begin{cases} \pm 1 & \text{für} \quad i = k \\ 0 & \text{für} \quad i \neq k \end{cases}$$

Definiert man nun

$$\varepsilon_k := g(E_k, E_k)^{-1}$$

dann ist $\varepsilon_k = \pm 1$. Im Fall der vierdimensionalen Raumzeit erhält man bei der hier gewählten Signatur der Metrik $\varepsilon_0 = -1$ und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$. Ein beliebiger Vektor X einer nicht-entarteten, $m-$dimensionalen Mannigfaltigkeit lässt sich darstellen als

$$X = \sum_{k=1}^{m} \bar{x}^k E_k \tag{4.3}$$

wobei $\bar{x}^k$ die Komponenten des Vektors bezüglich der ONB sind. Wegen $g(E_k, E_l) = 0$ für $k \neq l$ ist offensichtlich

$$\sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l g(E_k, E_l) E_l = \varepsilon_k g(E_k, E_k) E_k = E_k. \tag{4.4}$$

Mit der Linearität der Metrik folgt:

$$\sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l g(X, E_l) E_l \overset{(4.3)}{=} \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l g\left(\sum_{k=1}^{m} \bar{x}^k E_k, E_l\right) E_l = \sum_{k=1}^{m} \bar{x}^k \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l g(E_k, E_l) E_l \overset{(4.4)}{=} \sum_{k=1}^{m} \bar{x}^k E_k \overset{(4.3)}{=} X$$

Für einen Vektor X gibt es also die Darstellung:

$$X = \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l \, g(X, E_l) E_l \tag{4.5}$$

4.1.1. ***Kontraktion eines (1,s) Tensors mit ONB.***
Analog zu (3.34) ist die $\mathcal{C}_l^1$ Kontraktion eines $(1, s)$ Tensors mit der ONB definiert als:

$$\left(\mathcal{C}_l^1 T\right)(X_1, \ldots, X_{l-1}, X_{l+1}, \ldots, X_s) = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k g(E_k, T(X_1, \ldots, X_{l-1}, E_k, X_{l+1}, \ldots, X_s))$$

4.1.2. ***Ricci Tensor mit ONB.***
Der Ricci-Tensor ist die Kontraktion des Riemanntensors und anlaog zu (3.39) definiert man mit der ONB:

$$ric(X, Y) = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k g(R(E_k, Y) X, E_k) \tag{4.6}$$

Für den $(1, 1)$ Tensor Ric ergibt sich damit

$$\begin{aligned} g(Ric(X), Y) &= ric(X, Y) = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k g(R(E_k, Y) X, E_k) \\ &\overset{(3.17)}{=} \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k g(R(X, E_k) E_k, Y) = g\left(\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k R(X, E_k) E_k, Y\right). \end{aligned}$$

Vergleich der Komponenten ergibt dann:

$$Ric(X) = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k R(X, E_k) E_k \tag{4.7}$$

4.1.3. ***Scalarkrümmung und ONB.***
Für die Scalarkrümmung als Spur des Ricci-Tensors ergibt sich mit der ONB:

$$Sc = \sum_{h=1}^{m} \varepsilon_h ric(E_h, E_h) = \sum_{h=1}^{m} \varepsilon_h g(Ric(E_h), E_h) \overset{(4.6)}{=} \sum_{k=1}^{m} \sum_{h=1}^{m} \varepsilon_k \varepsilon_h g(R(E_k, E_h) E_h, E_k) \tag{4.8}$$

4.2. Divergenz eines Tensors mit ONB.

Analog zu Gleichung (3.38) erhält man für die Divergenz eines $(1,s)$ Tensors T mit Hilfe der ONB:

$$(div\, T)\,(X_1,\dots,X_s) \;=\; \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(\left(\nabla_{E_k}T\right)(X_1,\dots,X_s)\,,E_k\right) \tag{4.9}$$

Lemma 9. *Linearität - Addition*
Seien T und H zwei $(1,s)$ Tensoren, so gilt:

$$(div\,(T+H))\,(X_1,\dots,X_s) \;=\; (div\, T)\,(X_1,\dots,X_s) + (div\, H)\,(X_1,\dots,X_s)$$

Beweis: Zunächst gilt für die kovariante Ableitung der Summe zweier $(1,s)$ Tensoren T und H

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z (T+H))\,(X_1,\dots,X_s) &\overset{(2.23)}{=} \nabla_Z\left((T+H)\,(X_1,\dots,X_s)\right) - \sum_{j=1}^{m}(T+H)\,(X_1,\dots,\nabla_Z X_j,\dots,X_s)\\
&= \nabla_Z\left(T\,(X_1,\dots,X_s)\right) - \sum_{j=1}^{m}T\,(X_1,\dots,\nabla_Z X_j,\dots,X_s)\\
&\quad +\nabla_Z\left(H\,(X_1,\dots,X_s)\right) - \sum_{j=1}^{m}H\,(X_1,\dots,\nabla_Z X_j,\dots,X_s)\\
&\overset{(2.23)}{=} (\nabla_Z T)\,(X_1,\dots,X_s) + (\nabla_Z H)\,(X_1,\dots,X_s)
\end{aligned}$$

Aus (4.9) folgt dann

$$\begin{aligned}
(div\,(T+H))\,(X_1,\dots,X_s) &= \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(\left(\nabla_{E_k}(T+H)\right)(X_1,\dots,X_s)\,,E_k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(\left(\nabla_{E_k}T\right)(X_1,\dots,X_s)\,,E_k\right) + \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(\left(\nabla_{E_k}H\right)(X_1,\dots,X_s)\,,E_k\right)\\
&= (div\, T)\,(X_1,\dots,X_s) + (div\, H)\,(X_1,\dots,X_s) \qquad \square
\end{aligned}$$

Lemma 10. *Linearität - Multiplikation mit einer Funktion*
Seien T ein $(1,s)$ Tensor und f eine differenzierbare Funktion, dann ist:

$$(div\,(f\cdot T))\,(X_1,\dots,X_s) \;=\; f\cdot(div\, T)\,(X_1,\dots,X_s) + (T\,(X_1,\dots,X_s))\,f$$

Beweis: *Zunächst gilt für die kovariante Ableitung:*

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z (f\cdot T))\,(X_1,\dots,X_s) &\overset{(2.23)}{=} \nabla_Z\left(f\cdot T\,(X_1,\dots,X_s)\right) - \sum_{j=1}^{m}f\cdot T\,(X_1,\dots,\nabla_Z X_j,\dots,X_s)\\
&= Zf\cdot T\,(X_1,\dots,X_s) + f\cdot\nabla_Z\left(T\,(X_1,\dots,X_s)\right) - f\cdot\sum_{j=1}^{m}T\,(X_1,\dots,\nabla_Z X_j,\dots,X_s)\\
&= T\,(X_1,\dots,X_s)\cdot Zf + f\cdot(\nabla_Z T)\,(X_1,\dots,X_s)
\end{aligned}$$

Es ist $X=\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k\, g\,(X,E_k)\,E_k$, siehe (4.5). Für einen $(1,s)$ Tensor T gilt analog:

$$T\,(X_1,\dots,X_s) = \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k\, g\left(T\,(X_1,\dots,X_s)\,,E_k\right)E_k \tag{4.10}$$

Mit (4.9) erhält man

$$\begin{aligned}
(div\,(f\cdot T))\,(X_1,\dots,X_s) &= \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(\left(\nabla_{E_k}(f\cdot T)\right)(X_1,\dots,X_s)\,,E_k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(T\,(X_1,\dots,X_s)\cdot E_k f + f\cdot\left(\nabla_{E_k}T\right)(X_1,\dots,X_s)\,,E_k\right)\\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(T\,(X_1,\dots,X_s)\,,E_k\right)\cdot E_k}_{T(X_1,\dots,X_s)}\; f + f\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(\left(\nabla_{E_k}T\right)(X_1,\dots,X_s)\,,E_k\right)}_{(div\,T)(X_1,\dots,X_s)}\\
&= (T\,(X_1,\dots,X_s))\,f + f\cdot(div\, T)\,(X_1,\dots,X_s) \qquad \square
\end{aligned}$$

4.2.1. *Kovariante Ableitung des Ricci-Tensors mit ONB.*
Der folgende Zusammenhang zwischen der kovarianten Ableitung des Ricci-Tensors und der kovarianten Ableitung des Riemannschen Krümmungstensors wird später für den Beweis der Divergenzfreiheit des Einsteintensors benötigt.

Lemma 11. *Ricci-Tensor und kovariante Ableitung mit ONB*
Für die kovariante Ableitung des Ricci-Tensors gilt:

$$(\nabla_Z Ric)(X) = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k (\nabla_Z R)(X, E_k, E_k) \tag{4.11}$$

Beweis: Gleichung (4.11) folgt im Grunde sofort aus der geforderten Vertauschbarkeit von Kontraktion und kovarianter Ableitung, siehe (2.19). Alternativ lässt sich (4.11) aber auch direkt nachrechnen. Mit einer Orthonormalbasis $\{E_1, \ldots, E_m\}$ lässt sich der Ricci-Tensor durch $Ric(X) = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k R(X, E_k) E_k$ darstellen, vgl. (4.7). Da $\varepsilon_k = \pm 1$ ergibt sich mit direkt

$$(\nabla_Z Ric)(X) \overset{(2.23)}{=} \nabla_Z (Ric(X)) - Ric(\nabla_Z X) = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \nabla_Z (R(X, E_k) E_k) - \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k R(\nabla_Z X, E_k) E_k$$

Andererseits ergibt sich mit Gleichung (2.23):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k (\nabla_Z R)(X, E_k, E_k) &= \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \nabla_Z (R(X, E_k) E_k) - \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k R(\nabla_Z X, E_k) E_k}_{(\nabla_Z Ric)(X)} \\ &\quad - \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k R(X, \nabla_Z E_k) E_k}_{S_1} - \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k R(X, E_k) \nabla_Z E_k}_{S_2}\end{aligned}$$

Bleibt also noch zu zeigen, dass $S_1 = -S_2$ ist. Mit der Darstellung (4.5) lässt sich der Vektor $\nabla_Z E_k$ schreiben als

$$\nabla_Z E_k = \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l \, g(\nabla_Z E_k, E_l) E_l \tag{4.12}$$

und wir erhalten für die erste Summe:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k R(X, \nabla_Z E_k) E_k \overset{(4.12)}{=} \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k R\left(X, \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l \, g(\nabla_Z E_k, E_l) E_l\right) E_k \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_k \varepsilon_l \, g(\nabla_Z E_k, E_l) \cdot R(X, E_l) E_k \end{aligned}$$

Die zweite Summe lässt sich zunächst analog umzuschreiben. Außerdem verwendet man hier (oder alternativ bei S_1) eine besondere Eigenschaft der ONB: Das Produkt zweier ONB-Vektoren ist konstant, es gilt $g(E_k, E_l) = \pm 1$ und damit $Zg(E_k, E_l) = 0$. Aus der Produktregel (2.9) folgt dann

$$g(\nabla_Z E_k, E_l) = \underbrace{Zg(E_k, E_l)}_{0} - g(E_k, \nabla_Z E_l) = -g(E_k, \nabla_Z E_l)$$

und damit

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k R(X, E_k) \nabla_Z E_k = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k R(X, E_k) \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l \, g(\nabla_Z E_k, E_l) E_l \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_k \varepsilon_l \, g(\nabla_Z E_k, E_l) \cdot R(X, E_k) E_l = -\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_k \varepsilon_l \, g(E_k, \nabla_Z E_l) \cdot R(X, E_k) E_l. \end{aligned}$$

Sowohl k als auch l laufen von 1 bis m. Umbennen der Indizes ergibt:

$$S_2 = -\sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_l \varepsilon_k \, g(E_l, \nabla_Z E_k) \cdot R(X, E_l) E_k = -S_1 \qquad \square$$

4.3. **Divergenzfreiheit des Einsteintensors.**
Mit Hilfe der ONB lässt sich die Divergenzfreiheit des Einsteintensors jetzt leicht beweisen. Aus (3.45) folgt zusammen mit Lemma 9 und Lemma 10:

$$\begin{aligned}(div\,\mathbf{G})(X) &= \left(div\left\{Ric - \frac{1}{2}Sc\cdot Id - \Lambda\cdot Id\right\}\right)(X)\\ &= (div\,Ric)(X) - \left(div\left(\frac{1}{2}Sc\cdot Id\right)\right)(X) - (div\;(\Lambda\cdot Id))(X)\\ &= (div\,Ric)(X) - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{Id(X)}_{X}(Sc) + \frac{1}{2}Sc\cdot(div\,Id)(X) - \Lambda\cdot(div\,Id)(X)\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich daher:

$$(div\,\mathbf{G})(X) = (div\,Ric)(X) - \frac{1}{2}\cdot X\,Sc + \left(\frac{1}{2}Sc - \Lambda\right)\cdot(div\,Id)(X) \tag{4.13}$$

Man benötigt nun noch die Terme $(div\,Ric)(X)$ und $(div\,Id)(X)$.

4.3.1. *Divergenz des Ricci-Tensors.*
Um die Divergenz des Ricci-Tensors zu bestimmen, betrachten wir zunächst einen Ausdruck der mit der Skalarkrümmung zusammenhängt.

Lemma 12. *Skalarkrümmung und kovariante Ableitung*
Für die Ableitung der Skalarkrümmung Sc nach einem Vektorfeld X ergibt sich der Ausdruck

$$X\,Sc = \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left((\nabla_X Ric)(E_k), E_k\right) \tag{4.14}$$

Da es sich bei der Scalarkrümmung um eine skalare Funktion handelt ist nach Definition der kovarianten Ableitung $\nabla_X Sc = X\,Sc$, siehe Abschnitt 2.4. Mit (4.14) ist also ein Ausdruck für die kovariante Ableitung der Skalarkrümmung gegeben.

Beweis: Wie bei Lemma 11 folgt Gleichung (4.14) als kovariante Ableitung der Skalarkrümmung auch wieder direkt aus der geforderten Vertauschbarkeit von Kontraktion und kovarianter Ableitung, siehe (2.19). Die Gleichung lässt sich aber auch direkt nachrechnen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left((\nabla_X Ric)(E_k), E_k\right) &\overset{(2.23)}{=} \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(\nabla_X(Ric(E_k)), E_k\right) - \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(Ric(\nabla_X E_k), E_k\right)\\ &\overset{(2.9)}{=} \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k\left\{Xg\left(Ric(E_k), E_k\right) - g\left(Ric(E_k), \nabla_X E_k\right)\right\} - \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(Ric(\nabla_X E_k), E_k\right)\\ &= X\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(Ric(E_k), E_k\right) - \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(Ric(E_k), \nabla_X E_k\right) - \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(Ric(\nabla_X E_k), E_k\right)\\ &\overset{(4.8)}{=} X\,Sc - \underbrace{\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(Ric(E_k), \nabla_X E_k\right)}_{:=S_3} - \underbrace{\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(Ric(\nabla_X E_k), E_k\right)}_{:=S_4}\end{aligned}$$

Bleibt also noch zu zeigen, dass für die beiden Summen $S_3 = -S_4$ gilt. Die Vorgehensweise ist hier analog wie bei den Summen $S_1 = -S_2$ in Lemma 11. Mit der Darstellung (4.5) lässt sich der Vektor $\nabla_X E_k$ schreiben als

$$\nabla_X E_k = \sum_{l=1}^{m}\varepsilon_l\,g\left(\nabla_X E_k, E_l\right)E_l. \tag{4.15}$$

Für S_3 erhält man damit

$$\begin{aligned}S_3 &= \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(Ric(E_k), \nabla_X E_k\right) = \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k g\left(Ric(E_k), \sum_{l=1}^{m}\varepsilon_l\,g\left(\nabla_X E_k, E_l\right)E_l\right)\\ &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\varepsilon_k\varepsilon_l\,g\left(\nabla_X E_k, E_l\right)g\left(Ric(E_k), E_l\right)\end{aligned}$$

Bei S_4 (oder alternativ bei S_3) verwendet man wieder $Xg(E_k, E_l) = 0$ wegen $g(E_k, E_l) = \pm 1$. Aus der Produktregel (2.9) folgt dann $g(\nabla_X E_k, E_l) = -g(E_k, \nabla_X E_l)$. Insgesamt also

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k g\left(Ric\left(\nabla_X E_k\right), E_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k g\left(Ric\left(\sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l\, g\left(\nabla_X E_k, E_l\right) E_l\right), E_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l \varepsilon_k\, g\left(\nabla_X E_k, E_l\right) g\left(Ric\left(E_l\right), E_k\right) \;=\; -\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \varepsilon_l \varepsilon_k\, g\left(E_k, \nabla_X E_l\right) g\left(Ric\left(E_l\right), E_k\right) \end{aligned}$$

Sowohl k als auch l laufen von 1 bis m. Umbennen der Indizes ergibt:

$$S_4 = -\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \varepsilon_l\, g\left(E_l, \nabla_X E_k\right) g\left(Ric\left(E_k\right), E_l\right) = -S_3 \qquad \square$$

Im Folgenden soll nun die Divergenz des Ricci-Tensors berechnet werden.

Lemma 13. *Divergenz des Ricci-Tensors*
Für die Divergenz des Ricci-Tensors gilt:

$$(div\ Ric)(X) = \frac{1}{2} X\, Sc \tag{4.16}$$

Beweis: Für die Divergenz des Ricci-Tensors ergibt sich aus (4.9)

$$(div\ Ric)(X) \;=\; \sum_{h=1}^{m} \varepsilon_h\, g\left(\left(\nabla_{E_h} Ric\right)(X), E_h\right) \tag{4.17}$$

und zusammen mit (4.11) dann:

$$(div\ Ric)(X) \;=\; \sum_{h=1}^{m} \varepsilon_h\, g\,(\underbrace{\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \left(\nabla_{E_h} R\right)(X, E_k, E_k)}_{(\nabla_{E_h} Ric)(X)},\, E_h) \;=\; \sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \varepsilon_h g\left(\left(\nabla_{E_h} R\right)(X, E_k, E_k), E_h\right) \tag{4.18}$$

Aus der differentiellen Bianchi-Identität (3.26) erhält man

$$\left(\nabla_{E_h} R\right)(X, E_k, E_k) + \left(\nabla_X R\right)(E_k, E_h, E_k) + \left(\nabla_{E_k} R\right)(E_h, X, E_k) = 0$$

also

$$\left(\nabla_{E_h} R\right)(X, E_k, E_k) = -\left(\nabla_X R\right)(E_k, E_h, E_k) - \left(\nabla_{E_k} R\right)(E_h, X, E_k)$$

und damit in (4.18):

$$\begin{aligned} (div\ Ric)(X) \quad &= \quad \sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \varepsilon_h g\left(-\left(\nabla_X R\right)(E_k, E_h, E_k) - \left(\nabla_{E_k} R\right)(E_h, X, E_k), E_h\right) \\ &= \quad -\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \varepsilon_h g\left(\left(\nabla_X R\right)(E_k, E_h, E_k), E_h\right) - \sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \varepsilon_h g\left(\left(\nabla_{E_k} R\right)(E_h, X, E_k), E_h\right) \\ &\overset{(3.28)}{=} \quad \sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \varepsilon_h g\left(\left(\nabla_X R\right)(E_k, E_h, E_h), E_k\right) - \underbrace{\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \varepsilon_h g\left(\left(\nabla_{E_k} R\right)(X, E_h, E_h), E_k\right)}_{(div\ Ric)(X),\text{ siehe } (4.18)} \end{aligned}$$

Addiert man nun auf beiden Seiten den Term $(div\ Ric)(X)$ so folgt:

$$2\,(div\ Ric)(X) = \sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \varepsilon_h g\left(\left(\nabla_X R\right)(E_k, E_h, E_h), E_k\right) \tag{4.19}$$

Diese Gleichung lässt sich weiter vereinfachen. Aus (4.11) erhält man $(\nabla_X Ric)(E_k) = \sum_{h=1}^{m} \varepsilon_h \left(\nabla_X R\right)(E_k, E_h, E_h)$. Mit der Linearität der Metrik und Lemma 12 lässt sich dann Gleichung (4.19) umschreiben zu

$$2\,(div\ Ric)(X) \;=\; \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k g\left(\sum_{h=1}^{m} \varepsilon_h \left(\nabla_X R\right)(E_k, E_h, E_h), E_k\right) \;=\; \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k g\left(\left(\nabla_X Ric\right)(E_k), E_k\right) \overset{(4.14)}{=} X\, Sc$$

und man erhält (4.16). $\square$

4.3.2. *Divergenz der Identität.*
Nun fehlt noch die Divergenz der Identität $div\, Id$. Es handelt sich bei der Identität um ein $(1,1)$ Tensorfeld, weches jeden Vektor X auf sich selbst abbildet. Die kovariante Ableitung der Identität verschwindet, da nach (2.23) gilt:

$$(\nabla_Z Id)(X) \;=\; \nabla_Z (Id(X)) - Id(\nabla_Z X) \;=\; \nabla_Z X - \nabla_Z X \;=\; 0$$

Nach (4.9) ergibt sich für die Divergenz der Identität:

$$(div\, Id)(X) \;=\; \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k g \left(\underbrace{(\nabla_{E_k} Id)(X)}_{0}, E_k \right) \;=\; 0 \tag{4.20}$$

4.3.3. *Divergenz des Einsteintensors.*
Nun lässt sich die Divergenz des Einsteintensors vollständig berechnen:

Theorem 14. *Divergenz des Einsteintensors*
Der Einsteintensor ist divergenzfrei, es ist

$$div\, \mathbf{G} = 0$$

Beweis: Für alle Vektorfelder X gilt $(div\, Ric)(X) = \frac{1}{2} X\, Sc$, siehe Gleichung (4.16) in Lemma 13. Außerdem haben wir $(div\, Id)(X) = 0$, siehe (4.20). Aus (4.13) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}(div\, \mathbf{G})(X) &= (div\, Ric)(X) - \frac{1}{2} \cdot X\, Sc + \left(\frac{1}{2} Sc - \Lambda\right) \cdot (div\, Id)(X) \\ &= \frac{1}{2} X\, Sc - \frac{1}{2} X\, Sc + \left(\frac{1}{2} Sc - \Lambda\right) \cdot 0 \;=\; 0\end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle Vektorfelder X erfüllt ist, muss $div\, \mathbf{G} = 0$ sein. □

Bemerkung 15. Der Beweis für die Divergenzfreiheit des Einsteintensors kann natürlich auch mit der Koordinatenbasis geführt werden. Die Divergenz eines $(1,1)$ Tensors lässt sich durch Gleichung (3.36) darstellen. Hier hat man

$$(div\, \mathbf{G})(\partial_a) = \sum_{h=1}^{m} G^h{}_{a;h} \quad \text{und} \quad (div\, Ric)(\partial_a) = \sum_{h=1}^{m} R^h{}_{a;h}$$

und außerdem $\nabla_a Sc = \partial_a Sc = R_{;a}$. Für die Divergenz des Einsteintensors, siehe Abschnitt 3.7, ergibt sich mit $\delta^h_{a;h} = 0$:

$$(div\, \mathbf{G})(\partial_a) = \sum_{a=1}^{m} G^h{}_{a;h} = \sum_{h=1}^{m} \left(R^h{}_a - \frac{1}{2} R\, \delta^h_a - \Lambda\, \delta^h_a \right)_{;h} = \sum_{h=1}^{m} R^h{}_{a;h} - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{h=1}^{m} R_{;h}\, \delta^h_a}_{R_{;a}} = (div\, Ric)(\partial_a) - \frac{1}{2} \nabla_a Sc$$

Wegen $g_{hi;a} = 0$ folgt $g^{ik}_{;a} = 0$ aus $0 = \delta^k_{h;a} = \left(\sum_{i=1}^m g_{hi} g^{ik}\right)_{;a} = \sum_{i=1}^m g_{hi} g^{ik}_{;a}$. Für die Divergenz des Ricci-Tensors erhält man

$$(div\, Ric)(\partial_a) = \sum_{b=1}^{m} R^b{}_{a;b} = \sum_{b=1}^{m} \left(\sum_{c=1}^{m} g^{bc} R_{ca} \right)_{;b} = \sum_{b,c} g^{bc} R_{ca;b}$$

wobei zur Abkürzung die Doppelsumme am Ende zusammengefasst wurde. Mit der Differentiellen Bianchi-Identität[8] ergibt sich:

$$\begin{aligned}\nabla_a Sc \;&=\; \left(\sum_{k,n} g^{kn} R_{kn} \right)_{;a} = \sum_{k,n} g^{kn} R_{kn;a} = \sum_{k,n,h} g^{kn} R^h{}_{khn;a} \overset{(3.27)}{=} \sum_{k,n,h} g^{kn} \left(-R^h{}_{kna;h} - R^h{}_{kah;n} \right) \\ &\overset{(3.25)}{=} \sum_{k,n,h} g^{kn} \left(-R^h{}_{kna;h} + R^h{}_{kha;n} \right) = - \sum_{k,n,h,p} g^{kn} g^{hp} R_{pkna;h} + \underbrace{\sum_{k,n} g^{nk} R_{ka;n}}_{(div\, Ric)(\partial_a)} \\ &\overset{(3.29)}{=} \sum_{h,p} g^{hp} \underbrace{\sum_{k,n} g^{nk} R_{kpna;h}}_{R_{pa;h}} + (div\, Ric)(\partial_a) = \underbrace{\sum_{h,p} g^{hp} R_{pa;h}}_{(div\, Ric)(\partial_a)} + (div\, Ric)(\partial_a) = 2\,(div\, Ric)(\partial_a)\end{aligned}$$ □

[8]Es ist $R^h_{khn;a} = -R^h_{kna;h} - R^h_{kah;n}$ siehe (3.27)

References

[1] I. N. Bronstein: Taschenbuch der Mathematik, B.G.Teubner Stuttgart-Leibzig, 1996

[2] D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer: Riemannsche Geometrie im Großen, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1975

[3] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis: The large scale structure of space-time, Cambridge monographs on mathematical physiks, 1973

[4] L. D. Landau, E. M. Lifschitz: Lehrbuch der theoretischen Physik - Klassische Feldtheorie, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1997

[5] P. J. E. Peebles: Principles of Physical Cosmology, Princeton University Press, 1993