Polinomial natural solution of the Pythagorean equation

Solución natural polinómica de la ecuación pitagórica

Carlos Alejandro Chiappini

ABSTRACT

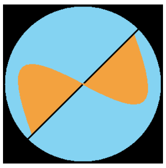
ENGLISH

While unsuccessfully playing with the last Fermat's theorem I noticed that this way of playing, applied to the Pythagorean equation $a^2 + b^2 = c^2$, leads to a polynomial general natural solution. The game combines arithmetic, common sense and logic. It is a bit like teaching and learning mathematical and geometric subjects with the help of colorful manipulatives, as is done at the most elementary levels of teaching. The only thing different in the adult experience is operating with mentally conceived objects. The way of operating with them does not change.

ESPAÑOL

Mientras jugaba sin éxito con el último teorema de Fermat noté que esa manera de jugar, aplicada a la ecuación pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$, conduce a una solución natural general polinómica. El juego combina aritmética, sentido común y lógica. Se parece un poco a enseñar y aprender asuntos matemáticos y geométricos con ayuda de objetos manipulables coloridos, como se hace en los niveles más elementales de la enseñanza. Lo único distinto en la experiencia adulta es operar con objetos concebidos mentalmente. La manera de operar no cambia.

Solución natural polinómica de la ecuación pitágórica



Parte 1 - Origen del procedimiento y motivación

Antes de hallar la solución presentada en este documento, he jugado por placer con el último teorema de Fermat. En ese juego noté que el mismo tipo de procedimiento conduce con sencillez a una solución natural polinómica de la ecuación pitagórica.

En electromagnetismo y en electrodinámica abundan los pares de vectores mutuamente perpendiculares que dan una resultante, la misma relación geométrica existente entre los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo. Las soluciones polinómicas podrian ser útiles cuando interese la cuantización de esos campos.

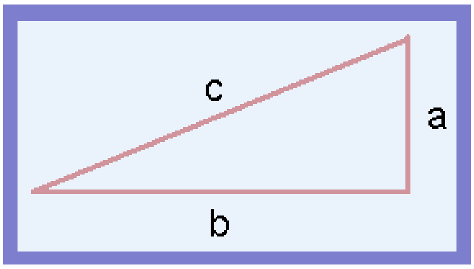
En el libro Matemática Para Ingenieros, de Francisco Vera, Tomo 1, EDIAR, Argentina, 1950, encontré la solución natural siguiente.

$$a = xy \qquad b = \frac{x^2 - y^2}{2} \qquad c = \frac{x^2 + y^2}{2} \tag{1}$$

Esta solución opera con x, y ambos impares, siendo $x > y$.

Cuando lleguemos a la solución polinómica podremos compararlas.

Parte 2 - Desarrollo



Escribamos la ecuación correspondiente al teorema de Pitágoras.

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{2}$$

La solución es natural cuando a, b, c son tres números naturales.

$$a > 0 \;\Rightarrow\; c > b \tag{3}$$

$$c = b + u \tag{4}$$

Elevo ambos miembros al cuadrado.

$$c^2 = b^2 + u^2 + 2bu \tag{5}$$

En (2) reemplazo c^2 como indica (5) . Después simplifico.

$$a^2 = u^2 + 2bu$$

Opero

$$a^2 - u^2 = 2bu \tag{6}$$

El segundo miembro de (6) es par. Esto significa que a, u son ambos pares o ambos impares y tenemos lo siguiente.

$$a - u = 2\ k \;\Rightarrow\; a = u + 2\ k \tag{7}$$

Elevo al cuadrado ambos miembros. Después opero.

$$a^2 = u^2 + 4uk + 4k^2$$

$$a^2 - u^2 = 4uk + 4k^2 \tag{8}$$

Reemplazo el primer miembro de (8) por el segundo miembro de (6) .

$$2bu = 4uk + 4k^2 \tag{9}$$

Simplifico. Después opero.

$$bu = 2uk + 2k^2$$

$$bu = 2k\,(u+k)$$

$$b = 2k\ \frac{u+k}{u} \tag{10}$$

Observando a (10) comprendemos lo siguiente. La condición imprescindible para obtener b natural es que u y k posean factor común. Sin esa condición el segundo miembro de (10) sería una fracción irreducible. Por eso tenemos lo siguiente.

$$u = p\ t \tag{11}$$

$$k = q\ t \tag{12}$$

$t\ \rightarrow$ factor común de u y k
$p, q\ \rightarrow$ factores no comunes

En (10) reemplazo u y k como indican respectivamente (11) y (12) .

$$b = 2qt\ \ \frac{pt+qt}{pt}$$

Simplifico

$$b = 2\ q\ t\ \ \frac{p+q}{p} \tag{13}$$

Entre p y q no hay factor común. Entonces la condición para obtener b natural en (13) es que t sea múltiplo de p .

$$t = n\ p \tag{14}$$

Antes de llegar a (13) la condición (14) no era evidente para mi. No podría haberla previsto. Si la hubiese previsto, en vez de (11) y (12) hubiese escrito el resultado de reemplazar en esas dos ecuaciones t por $n\ p$. Eso no sucedió y el reemplazo será efectuado ahora.

En (13) reemplazo t como indica (14) .

$$b = 2\ q\ n\ p\ \ \frac{p+q}{p}$$

Simplifico y ordeno.

$$b = 2\ n\ q\ \ (p+q)$$

Aplico propiedad distributiva.

$$b = 2\ n\ \ \left(p\ q + q^2\right)$$

Ordeno.

$$b = n\ \ \left(2\ p\ q + 2\ q^2\right) \tag{15}$$

La ecuación (15) contiene n porque pertenece la familia de soluciones naturales. La terna mínima de cada familia corresponde a $n = 1$.

$$\boxed{b = 2\ p\ q + 2\ q^2 \quad (16)}$$

Prosigamos para obtener las fórmulas de a y de c .

En (11) reemplazo t como indica (14) .

$$u = n\ p^2 \tag{17}$$

En (4) reemplazo B como indica (15) y u como indica (17) .

$$c = n\ \left(2\ p\ q + 2\ q^2\right) + np^2$$

Agrupo.

$$c = n\ \left(2\ p\ q + 2\ q^2 + p^2\right) \tag{18}$$

La ecuación (18) con tiene n porque pertenece la familia de soluciones naturales. La terna mínima de cada familia corresponde a n = 1 .

$$\boxed{c = 2\ p\ q{+}2\ q^2{+}p^2 \ \ (19)}$$

En (2) despejo a^2 .

$$a^2 = c^2 - b^2$$

Desarrollo la diferencia de cuadrados.

$$a^2 = (c - b)\,(c + b) \tag{20}$$

A (18) le resto M.A.M. (15) .

$$c - b = n\ p^2 \tag{21}$$

A (18) le sumo M.A.M. (15) .

$$c + b = n\left(4\ p^2 + 4\ q^2 + p^2\right) \tag{22}$$

En (20) reemplazo $c - b$ como indica (21) y $c + b$ como indica (22) . Después opero.

$$a^2 = n^2\ p^2\ \left(p^2 + 4\ p\ q + 4\ q^2\right)$$

El paréntesis es igual a $(p\ +\ 2\ q)^2$.

$$a^2 = n^2\ p^2\ (p\ +\ 2\ q)^2$$

Aplico radicación.

$$a = n\ p\ (p\ +\ 2\ q)$$

Propiedad distributiva.

$$a = n\left(p^2 + 2pq\right) \tag{23}$$

La ecuación (23) contiene n porque pertenece la familia de soluciones naturales. La terna mínima de cada familia corresponde a $n = 1$.

$$\boxed{a = p^2 + 2pq \quad (24)}$$

Quiero mostrar las fórmulas de a , de b y de c en forma visualmente cercana, para comentar algunos detalles.

$$\boxed{\begin{aligned} a &= p^2 + 2pq \\ b &= 2pq + 2q^2 \\ c &= 2pq + 2q^2 + p^2 \end{aligned}} \quad \leftarrow \quad \boxed{\textit{soluciones naturales polinómicas de la ecuación pitagórica}}$$

- Cada variable natural de la ecuación pitagórica está expresada por un polinomio de segundo orden. Pensemos esto en términos físicos. Si a, b, c fuesen lados de un triángulo físico, es decir longitudes, entonces p y q serían raices cuadradas de longitudes. ¿ Tiene interpretación física la raíz cuadrada de una longitud ? Lo ignoro. En la bibliografía que utilizo nunca he visto que la raíz cuadrada de una longitud tenga significado físico.
- La solución polinómica tiene significado físico cuando cada lado del triángulo representa una magnitud que es segunda potencia de otra. La energía del campo eléctrico y la energía del campo magnético dependen, cada una, del cuadrado de una magnitud. La solución polinómica tiene significado físico en esos casos.
- La energía de un campo electromagnético en régimen alterno presenta distribución discreta (cuántica). Ese podría ser, probablemente, un caso acorde con la solución polinómica.
- Según la solución polinómica, cada término (a, b, c) de la ecuación pitagórica es función de dos variables naturales (p, q) . Conociendo p y q podemos determinar la terna a, b, c . Entonces podemos comprimir información, memorizando dos datos en vez de tres. Aunque no es una compresión potente tiene valor didáctico, porque su forma es sencilla y evidente.

Quilmes

Provincia de Buenos Aires

Argentina

2 de marzo de 2023