SUPER-HYPER FATTORIALE E SUA ESTENSIONE:

IL NUMERO DEI RECORD

Marco Ripà

http://spiqrsociety.webs.com/

E-mail: marcokrt1984@yahoo.it

Questo articolo è ispirato all'ottavo capitolo del libro "La strana coda della serie n^n^…^n" (ISBN 987-88-6178-789-6).

$$\boxed{G\pounds\uparrow^{(k_{k_1})}G\pounds}$$

Si andrà qui di seguito a costruire un iperoperatore (a partire dalla nozione di superfattoriale) di magnitudo inimmaginabile. Esso, per ogni intero strettamente maggiore dell'unità, fornirà come *output* un valore ben maggiore del numero di Graham (il più grande numero mai utilizzato per una dimostrazione matematica) [1]**.**

Il titolo adatto, per questa elucubrazione ad alta voce, potrebbe essere "Verso l'infinito e oltre" [1], o magari "Viaggio allucinante". Certo è che i numeri di cui parlerò tra poco sono qualcosa di trascendente per la mente umana, tale è la crescita che produce un incremento unitario della base.

Nel 1995, nel suo libro "Keys to Infinity", Clifford Pickover definì come *superfattoriali* i numeri del tipo $n\$=(n!)\uparrow\uparrow(n!)$ (dove $\uparrow\uparrow$ rappresenta l'operatore "tetration" – o "tetrazione" -, espresso come $n\uparrow\uparrow m={}^{m}n=n\wedge n\wedge n\wedge\ldots\wedge n$ "m volte").

In questo modo si ha che, ad esempio, $3\$={}^{6}6=6\wedge6\wedge6\wedge6\wedge6\wedge6$ e in generale $n\$={}^{n!}(n!)$.

Altra nozione simile (anche se meno "potente") è quella di *ultrafattoriale*, definito come $U(n)=(n!)^{n!}$ (per $n=0,1,2,\ldots$).

Se volessimo ottenere una crescita ancora più vertiginosa, all'aumentare di n, potremmo calcolare la produttoria dei primi n superfattoriali: $\prod_{k=1}^{n} k\$ = 1\$ * 2\$ * \ldots * (n-1)\$ * n\$$.

La progressione è la seguente: $\prod_{k=1}^{n} k\$ = 1*(2\wedge2)*(6\wedge6\wedge6\wedge6\wedge6\wedge6)*\ldots*{}^{(n-1)!}((n-1)!)*{}^{n!}(n!)$.

Questo risultato potrebbe essere ancora migliorato costruendo degli operatori derivati.

Definisco (per $n\geq1$)

$$n¥ := {}^{n!}n\$\wedge{}^{(n-1)!}((n-1)\$)\wedge\ldots\wedge{}^{3!}(6\wedge6\wedge6\wedge6\wedge6\wedge6)\wedge{}^{2!}(2\wedge2)\wedge{}^{1!}1={}^{n}n\$\wedge{}^{(n-1)!}((n-1)\$)\wedge\ldots\wedge{}^{6}(6\wedge6\wedge6\wedge6\wedge6\wedge6)\wedge256\wedge1.$$

Volendo, potremmo apportare anche una piccola correzione a quanto appena detto, modificando l'operatore hyper-4 usato nel relativo fattoriale. Avremmo in questo modo la successione di potenze seguente:

$$n\tilde{¥} := {}^{n\$}n\$\wedge{}^{(n-1)\$}((n-1)\$)\wedge\ldots\wedge{}^{3\$}3\$\wedge{}^{2\$}2\$\wedge{}^{1\$}1\$={}^{n\$}n\$\wedge{}^{(n-1)\$}((n-1)\$)\wedge\ldots\wedge{}^{3\$}3\$\wedge{}^{4}4\wedge1.$$

Per rendere l'idea, già solo il terzultimo termine della torre di potenze è ${}^{(6\wedge6\wedge6\wedge6\wedge6\wedge6)}3\$$, pari a $6\wedge6\wedge6\wedge6\wedge6\wedge6\wedge\ldots$ il tutto ripetuto ben $6\wedge(6\wedge(6\wedge(6\wedge(6\wedge6))))$ volte.

Ma allora sarebbe persino lecito postulare l'esistenza di $n£ := {}^{n\tilde{¥}}n\tilde{¥}\wedge{}^{(n-1)\tilde{¥}}((n-1)\tilde{¥})\wedge\ldots\wedge{}^{3\tilde{¥}}3\tilde{¥}\wedge{}^{2\tilde{¥}}2\tilde{¥}\wedge{}^{1\tilde{¥}}1\tilde{¥}$.

Non essendo ancora soddisfatti, potremmo superare l'ultimo, incommensurabile, gradino della scalata verso l'Olimpo dei grandi numeri e definire una successione $(A_1,A_2,\ldots,A_{n£},\ldots)$, in cui:

[1] In matematica, il concetto di *infinito* non è univoco, bensì declinabile in vari "livelli" [2-3].

$\mathbf{A_1=n\pounds}$, $\mathbf{A_2={}^{A_1}A_1={}^{n\pounds}n\pounds}$, $\mathbf{A_3={}^{A_2}(A_2)={}^{({}^{n\pounds}n\pounds)}({}^{n\pounds}n\pounds)}$, e così via [2]; vale a dire che k, il generico termine della successione, sarà pari ad ${}^{A_{k-1}}(A_{k-1})$. Cavalcandola, non dovremmo pazientare molto prima di riuscire a fissare il simbolo "∞" diritto nelle sue due orbite gigantesche [3].

Ho deciso di scrivere queste righe, per indurre il lettore a riflettere (seppur superficialmente) su cosa significhi analizzare proprietà generali che possano valere per tutti i numeri, senza disporre di dimostrazioni rigorose e complete. Procedere per tentativi è come provare a prosciugare l'oceano con un cucchiaino da tè; per questo motivo consiglio di leggere, a chi si fosse realmente appassionato ai grandi numeri, qualche testo sulle *hyperoperations*.

Volendo *unire il sacro al profano*, potremmo costruire un iperoperatore del tipo $\mathbf{n\uparrow^{(M_{n\pounds}(A_{n\pounds}))!}n}$ (vedi nota 3) e sforzarci di visualizzarne l'indicibile progressione. Inutile aggiungere che persino un siffatto candidato dovrà inchinarsi alla maggiore velocità di crescita posseduta da infiniti altri suoi colleghi e un tale artificio si ridurrebbe semplicemente a una burla del tipo: "Dimmi un numero naturale e io te ne troverò immediatamente uno più grande".

Spero in ogni caso che possiate apprezzare l'essenza intrinseca dei risultati mostrati, soprassedendo sul labile procedimento induttivo adottato.

CONFRONTO CON IL NUMERO DI GRAHAM ($G:=g_{64}$)

Appare evidente che, affinché $\mathbf{n\uparrow^{(M_{n\pounds}(A_{n\pounds}))!}n}$ risulti (spropositatamente) maggiore di G, il valore di "n" non deve essere affatto "grande" (n:=1984, la mia data di nascita, sarebbe ok). Tuttavia, potremmo scegliere un numero molto più piccolo del precedente (ad esempio n=64 − mi ricorda il mio primo computer -), senza alterare le gerarchie.

---

[2] In questo caso le parentesi sono fondamentali, essendo la tetrazione non commutativa e vigendo la convenzione che, come per le potenze, a#a#a=(a#a)#a=${}^{(a\uparrow\uparrow a)}a$ – in generale diverso da a#(a#a) -.
Nel 2004, A. Rubstov e G. F. Romerio, hanno definito una sequenza di operazioni aritmetiche che inizia con la *zerazione*, poi passa attraverso somma, moltiplicazione ed elevamento a potenza, per sfociare quindi in tetrazione, pentazione, e così via. Se $k\in\aleph_0$, da k=3 risulta: $H_k(n\pounds)=n\pounds\uparrow^{(k-2)}n\pounds$.

L'n£-esimo elemento della serie è dato da $H_{n\pounds}(n\pounds)=n\pounds\uparrow^{(n\pounds-2)}n\pounds$, mentre l'elemento iniziale è $H_0=n\pounds\,^{o}\,n\pounds=n\pounds+n\pounds=2*n\pounds$ (cfr. *Ackermann's function and new arithmetical operations* – Web PDF version 2004-09-15 [4]).

[3] E anche laddove fallissimo, di sicuro avremmo già abbondantemente oltrepassato il concetto di "incommensurabile". Una titanica successione, scaturente da questa impostazione (limitandoci ai valori positivi di n), potrebbe essere la seguente: $M_1(n\pounds)=n\pounds\uparrow^{(n\pounds)}n\pounds$, $M_2(n\pounds)=\mathbf{n\pounds\uparrow^{(n\pounds\uparrow^{(n\pounds)}n\pounds)}n\pounds}$,… o magari addirittura $M_n(An)$, dove An è la successione definita poc'anzi tramite sostituzioni successive.

Operiamo ora il seguente cambio di notazione: **(Mn£(An£))!:=$\mathbf{k_1}$** .

Risolviamo $n\uparrow^{(k_1)}n$, per il valore di n fissato, e chiamiamo il risultato k_2; sostituiamo quindi k_2 al posto di k_1. Continuiamo a sostituire $n\uparrow^{(k_{i-1})}n$ con k_i (esattamente come descritto poc'anzi nel caso di i=2) e ci fermiamo non appena il contatore "i" raggiunge il valore "k_1".

Abbiamo così costruito il (super-)iperoperatore $\mathbf{n\uparrow^{(k_{k_1})}n}$.

Ebbene, adesso poniamo <u>n=2</u> (il più piccolo intero positivo tale che n^n>n) e osserviamo con il telescopio (dalla nostra quota siderale) G, il numero di Graham.

Volendo, potremmo porre n (a monte delle precedenti relazioni) pari a G… o magari a G£... Il numero che ne scaturirebbe dovrebbe soddisfare la voglia di "incommensurabile" della stragrande maggioranza dei lettori.

Osservazione 1: Da notare, infine, che si tratta di una nuova gerarchia di iperoperatori, della quale ho definito solo quello di rango 1. Agendo sul pedice "1" di k_k e aumentandolo, i valori impennano.
Per non parlare poi di k(k(...(k(i))))).

IL LIMITE SUPERIORE DEI NATURALI CONCRETI

È astrattamente possibile riuscire a definire un limite superiore per i numeri naturali, tale che, in valore assoluto, identifichi l'insieme di tutti gli interi che sono stati scritti/utilizzati/immaginati dall'essere umano fino ad oggi, nonché tutte le quantità fisiche conosciute?
La risposta è senz'altro affermativa ed è quanto ci proponiamo di fare nelle prossime pagine, sfruttando le nozioni (e la nomenclatura) precedentemente introdotte.

A tale scopo, utilizziamo la "chained arrow notation" di Conway [5]. Questo particolare metodo di scrittura dei grandissimi numeri è, in assoluto, il più performante che esista; il prezzo da pagare consiste però in una ridottissima precisione, qualora si desideri indicare sinteticamente (tramite numerose "frecce orizzontali") un valore specifico.
Per il nostro scopo, la notazione introdotta da Conway rappresenta l'opzione migliore.

Definiamo preliminarmente, in maniera ricorsiva, il super-iperoperatore "**ripation**" (giusto per prendermi qualche merito di allitterazione), nel quale il "k" appare G£ volte (secondo la nuova gerarchia di iperoperatori, avrà pertanto super-rango **G£-1**), come

$$\mathbf{\tilde{R}:=\uparrow^{\left(k_{k_{k_{\cdot_{\cdot_{\cdot_{k_{G\pounds}}}}}}}}\right)}}$$

Utilizziamo quindi la “chained arrow notation” per costruire la seguente funzione di sostituzione:

1° step: $G£ \uparrow^{\widetilde{R}} G£ \rightarrow G£ \uparrow^{\widetilde{R}} G£ \rightarrow G£ \uparrow^{\widetilde{R}} G£ \rightarrow \ldots \rightarrow G£ \uparrow^{\widetilde{R}} G£ := \widetilde{M}_1$ (dove l’operatore “freccia orizzontale” appare $G£ \uparrow^{\widetilde{R}} G£$ volte);

2° step: $\widetilde{M}_1 \rightarrow \widetilde{M}_1 \rightarrow \widetilde{M}_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \widetilde{M}_1 := \widetilde{M}_2$ (dove l’operatore “freccia orizzontale” appare $\widetilde{M}_1$ volte);

3° step: $\widetilde{M}_2 \rightarrow \widetilde{M}_2 \rightarrow \widetilde{M}_2 \rightarrow \ldots \rightarrow \widetilde{M}_2 := \widetilde{M}_3$ (dove l’operatore “freccia orizzontale” appare $\widetilde{M}_2$ volte);

…

($\widetilde{M}$+1)° step: $\widetilde{M}_{\widetilde{M}_1} \rightarrow \widetilde{M}_{\widetilde{M}_1} \rightarrow \widetilde{M}_{\widetilde{M}_1} \rightarrow \ldots \rightarrow \widetilde{M}_{\widetilde{M}_1} :=$ **BOX_$\widetilde{M}$** (in questo step si contano dunque $\widetilde{M}_1$ frecce orizzontali, a intervallare $\widetilde{M}_{\widetilde{M}_1}+1$ numeri “$\widetilde{M}_{\widetilde{M}_1}$”).

BOX_$\widetilde{M}$, a discapito dell’approccio *multi-dimensionale* utilizzato per la sua costruzione, si presenta come un semplice numero naturale fissato (enorme). Tale valore risulterà, verosimilmente, maggiore di qualsiasi numero reale che verrà mai utilizzato con scopi differenti dal voler deliberatamente superare questo limite (avendo in mente quest’unica finalità).

Esso, ad oggi (14 gennaio 2012), è altresì il più grande numero al quale sia stato dato un nome (e pertanto esprimibile con una notazione sintetica – 5 soli caratteri ASCII -). Può essere utilizzato per definire un *upper bound* relativo a qualche difficile problema matematico (soprattutto nella branca “combinatorics”) o dilemma inerente alle scienze computazionali, in virtù della sua pluridimensionalità. Si presenta un po’ come una presa universale… basta stimare per eccesso le molteplici quantità (per definizione numeri interi positivi) ignote di un problema e, automaticamente, la soluzione risulterà appartenere al sottoinsieme finito dei naturali minori di BOX_$\widetilde{M}$.

Osservazione 2: Il super-iperoperatore ***ripation*** (come già anticipato) ha super-rango G£-1, in una scala nella quale il numero di Graham ha super-rango nullo e in cui $\mathbf{G£\uparrow^{(k_{k_1})}G£}$ possiede super-rango unitario.

Osservazione 3: La funzione di sostituzione (funzioni composte) utilizzata nella costruzione di BOX_$\widetilde{M}$ è formalmente analoga a quella usata per estendere $\mathbf{n\uparrow^{(k_1)}n}$ ad $\mathbf{n\uparrow^{(k_{k_1})}n}$. È dunque immediata la possibilità di fare lo stesso anche a partire da BOX_$\widetilde{M}$. Essendo però BOX_$\widetilde{M}$ già sufficientemente grande da contenere tutti i naturali al momento utilizzabili per scopi diversi da quello da esso sotteso, il processo di iterazione si conclude con la sua definizione (e con esso il presente articolo).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Graham's_number

[2] http://www.vialattea.net/pagine/infinito/transfiniti.htm

[3] http://www.xamuel.com/the-higher-infinite/

[4] http://www.rotarysaluzzo.it/filePDF/Iperoperazioni%20(1).pdf

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Conway_chained_arrow_notation