Solving Problems of Mathematical Analysis by using Methods of Probability Theory

Yaremko O. ,Yaremko N.

Information about authors

> O.Yaremko , Penza STATE UNIVERSITY, Prof.

> N. Yaremko, Penza STATE UNIVERSITY, Prof.

MSC2010, 60Axx Foundations of probability theory

Abstract. The author proves statements from mathematical analysis by using methods of Probability theory. Inequalities were proved by means of geometric probability, the relationship of convex functions and random variables is grounded, the decomposition theorems in the limit shape are proved with the help of the law of large numbers, the normal distribution is used to calculate the volume and surface of the n-dimensional unit ball, some integrals are calculated as corollaries.

Keywords: geometric probability, random variable, normal distribution, law of large numbers (LLN), convex functions.

Освоение методов смежных дисциплин имеет мощный развивающий потенциал, служит дополнительным мотивационным источником и средством перестройки учебно-познавательной деятельности студентов.

Важнейшей задачей обучения в ВУЗе является интеллектуальное развитие студентов, формирование личности с заданными качествами психических познавательных процессов: мышления, памяти, восприятия, внимания. Продуктивность познавательных процессов характеризуется рационализмом мышления, четкой структурированностью памяти, адекватностью восприятия, высокой степенью концентрированности внимания. Под продуктивностью восприятия понимается быстрота и точность различений; продуктивность памяти выражается в скорости запоминания и воспроизведения, рациональном структурировании; для мышления- это скорость мыслительных операций, гибкость, оригинальность, критичность; для внимания- длительность концентрации, скорость переключения, точность переключения [4].

Математический материал представляет возможность для интеллектуального воспитания и развития студентов. Для работы выбираем творчески ориентированные задачи, варьируем методы решения, используем аппарат как классического математического анализа, так и смежных предметных областей, в частности, вероятностные методы. Во время занятия студенты имеют возможность проявить интеллектуальную инициативу, развивают способность увидеть объект с разных сторон, учатся осуществлять перенос методов из одной предметной области в другую, самостоятельно в новых условиях выстраивать доказательство. Учебная деятельность организованная таким образом позволяет развивать творческую активность студентов, формировать продуктивные качества мышления, памяти, внимания.

В настоящей статье дается новый взгляд на классические вопросы математического анализа с точки зрения теории вероятностей: проведены доказательства неравенства Йенсена и неравенства для среднего значения выпуклой функции вероятностными методами, изучено асимптотическое поведение интегралов Пуассона с помощью закона больших чисел, доказана формула площади поверхности единичной сферы применением многомерного нормального закона распределения. Несомненно, что такое взаимообогащение математических дисциплин служит средством реализации целей и принципов развивающей модели обучения.

1. Доказательство неравенств.

Доказать неравенство

$$\left(1-x^m\right)^n+\left(1-\left(1-x\right)^n\right)^m \geq 1, x\in\left[0,1\right]; m,n\in N .$$

Одно из решений этой задачи предложил Й. Стоянов в [2] –он использовал “вероятностно-матричную схему”. В настоящей статье предложено доказательство, основанное на понятии геометрической вероятности.

Доказательство. Выберем $x\in\left(0,1\right)$. Будем вбрасывать на отрезок $\left[0,1\right]$ случайным образом $m\cdot n$ точек двумя способами: n раз по m точек и m раз по n точек. Рассмотрим случайные события А и В:

A={в каждом из n вбрасываний по m точек имеется хотя бы одна точка, попавшая правее x}.

B={в каждом из m вбрасываний по n точек имеется хотя бы одна точка, попавшая левее x}.

Определим вероятности $p(A), p(B)$. Для одной точки вероятность попадания в отрезок $[0,x]$ равна x , а вероятность попадет в $[x,1]$ равна 1-x. Вероятность того, что хотя бы одна из m точек попала в $[x,1]$ равна $1-x^m$, и аналогично вероятность того, что хотя бы одна из n точек попадет в $[0,x]$ равна $1-(1-x)^n$. Отсюда следует, что

$$p(A)=\left(1-x^m\right)^n; \qquad p(B)=\left(1-(1-x)^n\right)^m$$

Замечая, что $A\cup B$-достоверное событие, имеем $p(A\cup B)=1$, поэтому

$$\begin{aligned} &p(A)+p(B)=p(A\cup B)+p(A\cap B)= \\ &=1+p(A\cap B)\geq 1 \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство доказано.

Обобщение указанного неравенства имеет вид:

$$\begin{aligned} &\left(1-x_1^{m_1}\right)^{\frac{m}{m_1}}+\left(1-x_2^{m_2}\right)^{\frac{m}{m_2}}+\ldots+\left(1-x_l^{m_l}\right)^{\frac{m}{m_l}}\geq 1, \\ &\left(x_1,\ldots x_l\right)\in\Delta; \quad m_i\in N, \quad i=1,\ldots,l \\ &m=m_1m_2\ldots m_l \end{aligned}$$

здесь Δ- единичный симплекс [3].

2. Выпуклые функции и неравенство Йенсена.

Пусть $u=u(x)$ – функция, определенная на открытом интервале I, и $M_0\left(x_0,u(x_0)\right)$- точка ее графика, $x_0\in I$. Прямая *l*, проходящая через точку M_0, называется *опорной прямой* функции $u=u(x)$ в точке x_0, если график функции $u=u(x)$ лежит не ниже *l*, т.е.

$$u(x)\geq u(x_0)+k(x-x_0), \tag{1}$$

где k – тангенс угла наклона прямой *l*.

Функция $u=u(x)$ называется *выпуклой* на I, если в каждой точке I существует её опорная прямая.

Теорема 1. [1] Если X –случайная величина с функцией распределения F, сосредоточенным на I, с математическим ожиданием $M(X)$, то

$$M(u(X)) \geq u(M(X)). \tag{2}$$

Доказательство. Положим в (1) $x_0 = M(X)$ и возьмем математическое ожидание от обеих частей неравенства (1), получим неравенство (2).

Следствие 1. Пусть распределение F имеет вид

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Применим теорему к данному распределению, неравенство (2) примет вид:

$$p_1u(x_1)+\ldots+p_nu(x_n) \geq u(p_1x_1+\ldots+p_nx_n) \tag{3}$$

Неравенство (3) известно в литературе как неравенство Йенсена [3]

Следствие 2. Пусть F-равномерное распределение на отрезке $[a,b]$ и функция $u=u(x)$ выпуклая и интегрируемая на $[a,b]$. Тогда неравенство (2) принимает вид:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)\,dx \geq u\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{4}$$

Неравенство (4) оценивает снизу среднее значение выпуклой интегрируемой на отрезке функции через ее значение в средней точке отрезка.

Теорема 1 и следствие 1 известны, следствие 2 получено авторами.

3. Использование закона больших чисел в математическом анализе.

В данном пункте приводим теорему 2 и пример 1 из [1], далее даем обобщение примера 1 на случай многих переменных и в примерах 2,3 устанавливаем асимптотическое поведение интегралов Пуассона.

Рассмотрим семейство распределений $F_{\sigma,a}$ с математическими ожиданиями, равными a и дисперсиями σ^2, примем обозначение:

$$M_{\sigma,a}(u)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)dF_{\sigma,a}(x).$$

Представим несколько измененный вариант теоремы, приведенной в [1], который является вариантом закона больших чисел.

Теорема 2. [1] Если $\sigma^2\to 0$, то $M_{\sigma,a}(u)\to u(a)$

для любой непрерывной и ограниченной функции $u=u(x)$ в $(-\infty,\infty)$. Эта сходимость равномерна в любом подинтервале, где $\sigma^2\to 0$ равномерно и функция $u=u(x)$ равномерно непрерывна.

Пример 1. Пусть $F_{n,a}$-биномиальное распределение, тогда $\sigma=\dfrac{a(1-a)}{n}$ и

$$\sum_{k=0}^{n}u\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k a^k(1-a)^{n-k}\to u(a) \qquad (5)$$

равномерно при $0\le a\le 1$.

Обобщим соотношение (5) на многие переменные:

Пусть функция $u=u(x_1,\dots,x_l)$– непрерывна на единичном (l-1)-мерном симплексе Δ, тогда имеет место равномерная сходимость:

$$\sum_{\|k\|=0}^{n}u\left(\frac{k}{n}\right)P(k)a^k\to u(a), a\in\Delta \qquad (6)$$

где

$$a=(a_1,\dots a_l),\quad \|k\|=k_1+\dots+k_l$$
$$P(k)=\frac{\|k\|!}{k_1!\dots k_l!},\quad a^k=a_1^{k_1}\dots a_l^{k_l}$$

$\sum_{\|k\|=0}^{n}u\left(\frac{k}{n}\right)P(k)a^k$ - полиномы Бернштейна в R^l.

Доказательство соотношения (6) следует из теоремы 2, если вместо биномиального распределения выбрать полиномиальное распределение.

Пример 2. Пусть $F_{\sigma,a}$ -нормальное распределение, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}{2\sqrt{\pi\sigma}} dx \to u(a), \tag{7}$$

при $\sigma \to 0$ равномерно на любом отрезке.

Пример 3. Пусть $F_{\sigma,a} = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sigma}{\sigma^2 + (x-a)^2}$ - распределение Коши, тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-a)^2} dx \to u(a) \tag{8}$$

при $\sigma \to 0$ равномерно на любом отрезке.

Интегралы в соотношениях (7) и (8) известны в математической физике как интегралы Пуассона. В примерах 2, 3 установлено поведение интегралов Пуассона при $\sigma \to 0$.

На языке статистики интегралы Пуассона являются асимптотически несмещенными оценками для неизвестного параметра $u(a)$. В терминах обратных ретроспективных или краевых задач соответственно эти интегралы дают оценки начального распределения температурного поля и значения распределения температурного поля на границе.

4.Вычисление площади поверхности *n*- мерной единичной сферы применением многомерного нормального закона распределения.

Площадь поверхности *n*-мерного шара единичного радиуса будем обозначать $S_n(1)$. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$-n-мерный случайный вектор, образованный независимыми гауссовскими случайными величинами $X_1, \ldots, X_n$, каждая из которых имеет нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию. Совместная плотность $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ распределения этих случайных величин равна:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}.$$

Обозначим через $f(z)$- плотность распределения случайной величины Z, Z-длина случайного вектора $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$:

$$Z = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

Пусть $P(R \le Z \le R+\Delta R)$ вероятность того, что вектор X попадет в область, заключенную между двумя концентрическими сферами с радиусами $R+\Delta R$ и R.

Справедлива формула:

$$P(R \le Z \le R+\Delta R) = f(R)\Delta R + \alpha\Delta R, \tag{9}$$

где

$$\lim_{\Delta R \to 0} \alpha = 0.$$

Эта же вероятность $P(R \le Z \le R+\Delta R)$ может быть найдена другим способом, через объемы $V_n(R+\Delta R)$, $V_n(R)$ n- мерных шаров радиусов $R+\Delta R$ и R соответственно:

$$P(R \le Z \le R+\Delta R) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{R^2}{2}\right\}\left[V_n(R+\Delta R) - V_n(R)\right] =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{R^2}{2}\right\} S_n(R)\Delta R = (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{R^2}{2}\right\} S_n(1) R^{n-1}\Delta R,$$

$$P(R \le Z \le R+\Delta R) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{R^2}{2}\right\} S_n(1) R^{n-1}\Delta R \tag{10}$$

Приравнивая правые части равенств (9), (10) и выполняя предельный переход при $\Delta R \to 0$, получим

$$f(R) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{R^2}{2}\right\} S_n(1) R^{n-1}.$$

Интегрируя обе части по всем R из $[0,\infty)$, будем иметь:

$$1 = (2\pi)^{-n/2} S_n(1) \int_0^{\infty} exp\left\{-\frac{R^2}{2}\right\} R^{n-1} dR.$$

Полученный интеграл хорошо известен [3]. Например, при n=3 $S_3(1) = 4\pi$. На указанном пути легко получить и формулу для n-мерного объема единичного шара $V_n(1)$.

References.

1. William Feller. An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 1, 3rd Edition 528 pages, January 1968.
2. C. Kleiber and J. Stoyanov, “Multivariate distributions and the moment problem,” Journal of Multivariate Analysis, vol. 113, pp. 7–18, 2013. View at Publisher · View at Google Scholar · View at MathSciNet
3. R. Courant, E. J. McShane. Differential and Integral Calculus, Volume 2 988 John Wiley & Sons.