The Construction Of p-tables And Applications

Author: Luo Quan
(罗泉)
North Liao Kuo Road-321, Qujing, Yunnan, China
(云南省曲靖市寥廓北路321号)

Mr. Luo Quan is an independent researcher in number theory.

The article is edited, scanned and uploaded by members of the Independent Research Fellowship Of Geometry And Topology, Founded By Christians In Shandong (山东基督徒家庭教会 几何与拓扑独立研究团契).

Contact: Ren Shiquan, renshiquan@gmail.com.

Abstract. In this article we construct a sequence of p-tables for each prime number p and list out the p-tables for $p = 3, 5, 7$. Then we use these p-tables to study congruence equations. Some results about a spacial family of congruence equations, called combinatorial congruence equations, have been obtained. Finally, the Twin Primes Conjecture and the Goldbach Conjecture are discussed in language of p-tables.

罗泉 云南曲靖
寥廓北路321号

P表的建立与应用

素数数例：

$P_1=2$、$P_2=3$、$P_3=5$、$P_4=7$、…，P_n

如果$n\geq 2$，上面数例是n个从小到大不缺一个的不同素数数例，在这数例中，任意取出两个，则这两个素数是互素的。

一、孙子定理（陈景润初等数论1册84页）

定理：如果$k\geq 2$，而$m_1, m_2, \cdots, m_k$是二二互素的k个正整数，也就是说，在这k个正整数中任意取出二个来，则这二个正整数是互素的。

上面素数数例可以代替$m_1, m_2, \cdots, m_k$数例。

同余式组：$x\equiv b_1 \pmod{m_1}$，$x\equiv b_2 \pmod{m_2}$

$x\equiv b_3 \pmod{m_3}$，…，$x\equiv b_k \pmod{m_k}$

下面用$2=m_1$，$3=m_2$，$5=m_3$，…，$P_n=m_k$

$r_1=b_1$，$r_2=b_2$，$r_3=b_3$，…，$r_n=b_k$代替。

$x\equiv r_1 \pmod 2$，$x\equiv r_2 \pmod 3$，$x\equiv r_3 \pmod 5$，$x\equiv r_4 \pmod 7$，…，$x\equiv r_n \pmod{P_n}$。

为建立P表，把此同余式简化成

$$x\equiv\begin{cases}2\to r_1\\3\to r_2\\5\to r_3\\\cdots\\P_n\to r_n\end{cases} \pmod M \qquad M=2\times3\times5\times\cdots\times P_n$$

2，3，5，…，P_n表示素数模，→表示余，x被P_i除余r_i，求x。

$M=P_1P_2P_3\cdots P_n=P_1M_1=P_2M_2=P_3M_3=\cdots=P_nM_n$则

同時满足上面同余式组解是：

$x\equiv r_1M_1'M_1+r_2M_2'M_2+r_3M_3'M_3+\cdots+r_nM_n'M_n \pmod M$

这里M_i'是满足同余式$M_i'M_i\equiv1 \pmod{P_i}$的正整数解：$i=1,2,3,\cdots$。

例1：
$$x\equiv\begin{cases}2\to0\\3\to2\\5\to3\\7\to4\end{cases} \pmod{2\times3\times5\times7} \text{ 求}x$$

$M=2\times3\times5\times7=210$，$M_1=\frac{210}{2}=105$，

$M_2=\frac{210}{3}=70$，$M_3=\frac{210}{5}=42$，$M_4=\frac{210}{7}=30$

$M_1'105\equiv1 \pmod 2$，$M_1'=1$，$M_2'70\equiv1 \pmod 3$，$M_2'=1$。

$M_3'42\equiv1 \pmod 5$，$M_3'2\equiv1 \pmod 5$，$M_3'=3$

$M_4'30\equiv1 \pmod 7$，$M_4'2\equiv1 \pmod 7$，$M_4'=4$

$x\equiv0\times1\times105+2\times1\times70+3\times3\times42+4\times4\times30 \pmod{210}$

$x\equiv158+210k$，$k=0,1,2,\cdots$，取0，$x=158$。（以后一般都取0）其它A、B类未知数解法相同。

二、建立P表

（1）用素数2，3建立的一张表称P=3表，用素数2，3，5建立的一张表称P=5表，用素数2，3，5，7建立的一张表称P=7表，…，用素数2，3，5，7，…，P_n建立的表称$P=P_n$表。素数无限多，n无限大，n-1也无限大。P表有无限多张。由于篇幅，后面只例举P=3、P=5、P=7表。

（2）全余数、全余数分组：

全余数就是模P_i的非负最小的完全剩余系。2的全余数是0，1。分为两组，0是一组，1是1组。因$P_i-0=P_i$，$P_i\equiv0 \pmod{P_i}$，以后每组之和或0或P_i。3的全余数是0，1，2。分0，（1，2）共$\frac{3+1}{2}=2$组。5的全余数是0，1，2，3，4。分0，（1，4）（2，3）共$\frac{5+1}{2}=3$组。7的全余数是0，1，2，3，4，5，6，分0，（1，6），（2，5），（3，4）共$\frac{7+1}{2}=4$组。……

P_n的全余数分0，（1，P_n-1），（2，P_n-2），…，（$\frac{P_n-1}{2}$，$\frac{P_n+1}{2}$）共$\frac{P_n+1}{2}$组。

（3）组合型同余式组：

素数模相同多个同余式组组合起来称组合同余式组。

例2：
$x_1\equiv\begin{cases}2\to1\\3\to0\\5\to0\\7\to0\end{cases} \pmod{210}$，$x_2\equiv\begin{cases}2\to1\\3\to0\\5\to1\\7\to0\end{cases} \pmod{210}$，$x_3\equiv\begin{cases}2\to1\\3\to0\\5\to4\\7\to0\end{cases} \pmod{210}$

$x_4\equiv\begin{cases}2\to1\\3\to0\\5\to0\\7\to1\end{cases} \pmod{210}$，$x_5\equiv\begin{cases}2\to1\\3\to0\\5\to1\\7\to1\end{cases} \pmod{210}$，$x_6\equiv\begin{cases}2\to1\\3\to0\\5\to4\\7\to1\end{cases} \pmod{210}$

$x_7\equiv\begin{cases}2\to1\\3\to0\\5\to0\\7\to3\end{cases} \pmod{210}$，$x_8\equiv\begin{cases}2\to1\\3\to0\\5\to1\\7\to3\end{cases} \pmod{210}$，$x_9\equiv\begin{cases}2\to1\\3\to0\\5\to4\\7\to3\end{cases} \pmod{210}$

$x_{10}\equiv\begin{cases}2\to1\\3\to0\\5\to0\\7\to4\end{cases} \pmod{210}$，$x_{11}\equiv\begin{cases}2\to1\\3\to0\\5\to1\\7\to4\end{cases} \pmod{210}$，$x_{12}\equiv\begin{cases}2\to1\\3\to0\\5\to4\\7\to4\end{cases} \pmod{210}$

$x_{13}\equiv\begin{cases}2\to1\\3\to0\\5\to0\\7\to6\end{cases} \pmod{210}$，$x_{14}\equiv\begin{cases}2\to1\\3\to0\\5\to1\\7\to6\end{cases} \pmod{210}$，$x_{15}\equiv\begin{cases}2\to1\\3\to0\\5\to4\\7\to6\end{cases} \pmod{210}$

把上面的同余式组组合起来：

$$x_{1\sim15}\equiv\begin{cases}2\to1\\3\to0\\5\to0,1,4\\7\to0,1,3,4,6\end{cases} \pmod{210}$$

未知数个数是每项素数模余数个数之乘积。如例2组合同余式组的未知数是$1\times1\times3\times5=15$个

（4）P表的结构：（以后省去x，或x不写），后面(mod M)不写。P表有无限多张，每张分若干对，每对又分A类同余式组（写在左面）和B类同余式组，（写在右面）。A、B两类的素数模完全相同，A类每个素数模余数是该模全余数中的一组。B类素数模的余数是全余数减去A类用去一组外剩下的所有组，（参看P=7表）。有A类就有相对应的B类，合称一对。

设素数模P_i，f_i代表全余数中的一组，F_i代表P_i全余数减去f_i剩下的所有组，f_i和F_i是P_i的全余数。

罗泉

A	B
$2\to f_1$	$2\to F_1$
$3\to f_2$	$3\to F_2$
$5\to f_3$	$5\to F_3$
…	…
$P_n\to f_n$	$P_n\to F_n$

(5) $\underline{P}=P_n$表共有多少对？

A、B类成对，求A类有多少不同组合就知道有多少对。

2的全余数0，1共2组。

3的全余数0，(1，2)共$\frac{3+1}{2}=2$组。

5的全余数0，(1，4)，(2，3)共$\frac{5+1}{2}=3$组

7的全余数0，(1，6)，(2，5)，(3，4)，共$\frac{7+1}{2}=4$组。

……

P_n的全余数，0，$(1,P_n-1)$，$(2,P_n-2)$，…，$(\frac{P_n-1}{2},\frac{P_n+1}{2})=\frac{P_n+1}{2}$组

$\underline{P}=P_n$表共有$2\times\frac{3+1}{2}\times\frac{5+1}{2}\times\frac{7+1}{2}\times\cdots\times\frac{P_n+1}{2}$对

例如$\underline{P}=3$，$2\times\frac{3+1}{2}=4$对，$\underline{P}=5$，$2\times\frac{3+1}{2}\times\frac{5+1}{2}=12$对

$\underline{P}=7$，$2\times\frac{3+1}{2}\times\frac{5+1}{2}\times\frac{7+1}{2}=48$对，(参看$\underline{P}=3$，$\underline{P}=5$，$\underline{P}=7$表)

(6) $\underline{P}=P_n$表A类小于M的未知数共有多少个，有没有重复，有没有遗漏？

2的全余数0，1共2个

3的全余数0，1，2共3个

5的全余数0，1，2，3，4共5个

……

P_n的全余数0，1，2，3，…，(P_n-1)共P_n个

A类解有$2\times3\times5\times\cdots\times P_n=M$个不同组合就有M个不同数$(0\sim M-1)$，不重复，不遗漏。

(7) $\underline{P}=P_n$表B类解一共有多少个，每个数出现多少次？

2的余数0或1，每个余数出现$2-1=1$次

3的余数0，或(1，2)每个余数出现$\frac{3-1}{2}=1$次

5的余数(0，1，4)或(0，2，3)或(1，2，3，4)

每个数出现$\frac{5-1}{2}=2$次

7的余数(0，1，2，5，6)或(0，1，3，4，6)，或(0，2，3，4，5)或(1，2，3，4，5，6)每个余数出现$\frac{7-1}{2}=3$次

……

P_n的余数$\{0,1,2,\cdots,\boxed{\frac{P_n-1}{2},\frac{P_n+1}{2}},\cdots,(P_n-2),(P_n-1)\}$

或$\{0,1,\boxed{2},\cdots,\frac{P_n-1}{2},\frac{P_n+1}{2},\cdots,\boxed{P_n-2},(P_n-1)\}$

或$\{0,\boxed{1},\cdots,\frac{P_n-1}{2},\frac{P_n-1}{2},\cdots,(P_n-2),\boxed{P_n-1}\}$

或$\{1,2,\cdots,\frac{P_n-1}{2},\frac{P_n+1}{2},\cdots,(P_n-2),(P_n-1)\}$

每个数出现$\frac{P_n-1}{2}$次，□表示里面没有任何数，缺此项。

每个数在$\underline{P}=P_n$表中B类解出现的次数：

$1\times\frac{3-1}{2}\times\frac{5-1}{2}\times\frac{7-1}{2}\times\cdots\times\frac{P_n-1}{2}$次。

例如$\underline{P}=3$表，$1\times\frac{3-1}{2}=1$次。

$\underline{P}=5$表：$1\times\frac{3-1}{2}\times\frac{5-1}{2}=2$次。

$\underline{P}=7$表：$1\times\frac{3-1}{2}\times\frac{5-1}{2}\times\frac{7-1}{2}=6$次

如$\underline{P}=7$表里5解出在三十七，三十九，四十，四十一，四十三，四十四对里共6个5，B类解其它都是6个。

$\underline{P}=P_n$表B类共有多少个解？

有$M\times1\times\frac{3-1}{2}\times\frac{5-1}{2}\times\frac{7-1}{2}\times\cdots\times\frac{P_n-1}{2}$个B类解

如$\underline{P}=3$表，B类解共有$2\times3\times1\times\frac{3-1}{2}=6$个

$\underline{P}=5$表，B类解共有$2\times3\times5\times\frac{3-1}{2}\times\frac{5-1}{2}=60$个

$\underline{P}=7$表，B类解共有$2\times3\times5\times7\times\frac{5-1}{2}\times\frac{7-1}{2}=1260$个

(8). 同一张表，同对A类解中任取一个数，又从B类解中任取一个数，大数做被减数，为a，小数为b，只要$a+b<P_{n+1}^2$和$1<a-b<P_{n+1}^2$都是素数。

证、设P_i代表每个素数模，

A类　　　　B类

$P_i\to R_i$ $(x=SP_i+R_i)$，$P_i\to Y_i$ $(y=NP_i+Y_i)$

R_i和Y_i不同组，$R_i+Y_i\neq P_i$，$R_i\neq Y_i$

$0\le R_i<P_i$，$0\le Y_i<P_i$，$|R_i-Y_i|\neq0$

$SP_i+R_i+NP_i+Y_i=(S+N)P_i+R_i+Y_i$ $(a+b)$

因R_i和Y_i不同组，$R_i+Y_i\neq P_i$，所以$x+y$和P_i互素，

$(SP_i+R_i)-(NP_i+Y_i)=(S-N)P_i+R_i-Y_i$ $(a-b)$ $(S\ge N)$ 2

因$R_i\neq Y_i$，$|R_i-Y_i|\neq0$，所以$x-y$和P_i互素

$NP_i+Y_i-(SP_i+R_i)=(N-S)P_i+Y_i-R_i$ $(N\ge S)$

因$Y_i\neq R_i$，$|Y_i-R_i|\neq0$，所以$y-x$和P_i互素

模P_i从小到大，一个一个写论证，

$i=1$，$P_1=2$，a和b一奇一偶，$a\pm b=$奇数和2互素。

$i=2$，$P_2=3$，$|0\pm1,2|\neq0$，和3，$a\pm b$和3互素

$i=3$，$P_3=5$，$5S+R_3+(5N+Y_3)=5(S+N)+R_3+Y_3$

因R_3和Y_3不同组，所以$R_3+Y_3\neq5$，和5互素

$5S+R_3-(5N+Y_3)=5(S-N)+R_3-Y_3$ $(S\ge N)$

因$R_3\neq Y_3$，所以$|R_3-Y_3|\neq0$，和5互素。

$i=4$，$P_4=7$，$a\pm b$和7互素

……

$i=n$，P_n，$a\pm b$和P_n互素。$(x>y,x=a。x<y,y=a)$

引理，(陈景润初等数论1册6页)

如果C是一个大于1的整数，而所有$<\sqrt{C}$的素数都除不尽C，则C是素数。

$\underline{P}$表里a或b(也就是x或y)对每个素数模余或小于P_i的正整数，a和b都是用这些余数用孙子定理公式求出的。

$a+b$和$a-b$对每个素数模都互素。

所以，如果$a+b<P_{n+1}^2$和$1<a-b<P_{n+1}^2$都是素数

命题得证。

A类解出的数写在A类下面，B类解出的数写在B类下面。

例3，$\underline{P}=7$ 二对

A	B
$2\to\underline{1}$	$2\to\underline{0}$
$3\to\underline{1},2$	$3\to\underline{0}$
$5\to2,\underline{3}$	$5\to0,\underline{1},4$
$7\to\underline{2},5$	$7\to0,1,\underline{3},4,6$

23, 37, 47, 107　　0, 60, 90, 120, 150
187, 173, 163, 113　　6, 36, 66, 126, 186
　　24, 84, 144, 174, 204

B类解选66, $(2\to0, 3\to0, 5\to1, 7\to3)$ 为a,
A类解选23, $(2\to1, 3\to2, 5\to3, 7\to2)$ 为b;

$P_1=2$, $66=2\times33+\underline{0}$　$23=2\times11+\underline{1}$
$S=11, N=33, R=1$　$Y=0$　$N>S$
$66+23=2\times33+0+2\times11+1$
$=2\times44+1=89$　$(2,89)=1$
$66-23=2\times33+0-(2\times11+1)$
$=2\times22+0-1=43$　$(2,43)=1$

$P_2=3$, $66=3\times22+\underline{0}$　$23=3\times7+\underline{2}$
$S=7, N=22, R=2, Y=0$　$N>S$
$66+23=3\times22+0+3\times7+2$
$=3\times29+0+2=89$　$(3,89)=1$
$66-23=3\times22+0-(3\times7+2)$
$=3\times15+0-2=43$　$(3,43)=1$

$P_3=5$. $66=5\times13+\underline{1}$　$23=5\times4+\underline{3}$
$S=4, N=13, R=3, Y=1$　$N>S$
$66+23=5\times13+1+5\times4+3$
$=5\times17+1+3=89$.　$(5,89)=1$
$66-23=5\times13+1-(5\times4+3)$
$=5\times9+1-3=43$　$(5,43)=1$

$P_4=7$, $66=7\times9+\underline{3}$　$23=7\times3+\underline{2}$
$S=3, N=9, R=2, Y=3$　$N>S$
$66+23=7\times9+3+7\times3+2$
$=7\times12+3+2=89$　$(7,89)=1$
$66-23=7\times9+3-(7\times3+2)$
$=7\times6+3-2=43$　$(7,43)=1$

$89<P_{4+1}^2=11^2$, 89是素数, $1<43<11^2$, 43是素数.
又如: $60\pm37{=97 \atop =23}$, $47\pm6{=53 \atop =41}$, $84\pm23{=107 \atop =61}$
$103\pm6{=109 \atop =97}$　$120\pm23{=143 \atop =97}$, $23\pm0{=23 \atop =23}$
上面97, 23, 53, 41, 107, 61, 109都$<11^2$是素数, $143>11^2$, 不一定是素数.
(9), $a+b$和$a-b$所产生的素数都大于P_n,

证, 设某个素数模P_s, 有$P_s|P_sn$, $n=1,2,3,\cdots$ 和$P_s+a\pm b$ 异值, 因此所产生的素数都大于任何做模的素数. 例$11|11$, $11|11n$.

三, 双生素数有无限多对.

$\underline{P}=P_n$表其中一对

A　　B
$2\to1$　　$2\to0$
$3\to1,2$　　$3\to0$
$5\to1,4$　　$5\to0,2,3$
$\cdots$　　$\cdots$
$P_n\to1,(P_n-1)$　　$P_n\to0,2,3,\cdots,(P_n-2)$

A类共有A类解2^{n-1}个 其中一个是$x_1=1$

证, $2\to1$, $x_1\equiv1 \pmod 2$, $x_1=1+2k$, 取$k=0$, $x_1=1$
$\left\{\begin{matrix}2\to1\\3\to1,2\end{matrix}\right.$　$x_1\equiv1 \pmod{2\times3}$ $x_1=1+6k$ 取$k=0$, $x_1=1$
$\left\{\begin{matrix}2\to1\\3\to1,2\\5\to1,4\end{matrix}\right.$　$x_1\equiv1 \pmod{2\times3\times5}$ $x_1=1+30k$ 取$k=0$, $x_1=1$
$\cdots\cdots$
$\left\{\begin{matrix}2\to1\\3\to1,2\\5\to1,4\\\cdots\\P_n\to1,(P_n-1)\end{matrix}\right.$　$x_1\equiv1 \pmod M$, $x_1=1+Mk$ 取$k=0$, $x_1=1$

所以其中一个解$x_1=1$.
根据前面所证, 同对里A、B解各取一个数, 大数为a, 只要$a+b<P_{n+1}^2$和$1<a-b<P_{n+1}^2$, $a\pm b$都是素数. 这里取A类解1为b, 取B类解大于0, 小于P_{n+1}^2为a, $a-1=q$, $a+1=P$, P和q都是素数. $q+2=a-1+2=a+1=P$, a是中间数, P和q是双生素数. B类有$2\to0$, $3\to0$, 所以中间数a是6的倍数.

例4, $\underline{P}=7$表中七对
$2\to1$　,　$2\to0$
$3\to1,2$　　$3\to0$
$5\to1,4$　　$5\to0,2,3$
$7\to1,6$　　$7\to0,2,3,4,5$
1, 29, 41, 71　　0, 30, 60, 150, 180
209, 181, 169, 139,　12, 42, 72, 102, 192
　　18, 108, 138, 168, 198

B类解大于11, 小于11^2的数都是中间数, 共8个, 双生素数共8对:
$12\pm1{=13 \atop =11}$, $18\pm1{=19 \atop =17}$, $30\pm1{=31 \atop =29}$, $42\pm1{=43 \atop =41}$
$60\pm1{=61 \atop =59}$, $72\pm1{=73 \atop =71}$, $102\pm1{=103 \atop =101}$, $108\pm1{=109 \atop =107}$

A类同余式组里, 2的余数是1, 3和以后的素数模的余数都是两个, 即1和P_s-1, B类同余式组除3, 2余数是0, 3余数是0, 以后的数素模的余数都是P_s-2个, 设B类小于M的解共 $1\times(3-2)\times(5-2)\times(7-2)\times\cdots\times(P_n-2)=G$个
$\underline{P}=P_n$表中, $<M$的正整数是$2\times3\times5\times7\times\cdots\times P_n=M$个 $(0\sim M-1)$, 平均每隔$\frac{M}{G}$就有一个B类解, 小于P_{n+1}^2平均有$P_{n+1}^2\div\frac{M}{G}=\frac{P_{n+1}^2G}{M}$个B类解, 这些解除0外都是双生素数中间数. 有一个中间数就有一对双生素数. 下面P_{n+1}至P_{n+1}^2中间数个数的近似公式; 设中间数个数$=D$

$P_3=5$, $7<D_1<P_{3+1}^2=7^2$　(不含3和5)
$D_1=\frac{7^2\times1\times(3-2)\times(5-2)}{2\times3\times5}=4.9$, 实际5个
$P_4=7$, $11<D_2=P_{4+1}^2=11^2$　(不含3, 5, 5, 7)
$D_2=\frac{11^2\times(5-2)\times(7-2)}{2\times3\times5\times7}=8.64$个 实际8个.
$P_5=11$, $13<D_3<P_{5+1}^2=13^2$ (不含3, 5, 5, 7)

$$\frac{13^2\times(5-2)\times(7-2)\times(11-2)}{2\times3\times5\times7\times11}=9.87$$、实际 9个（不含3.5、5.7、11.13）

P_{n+1}至P^2_{n+1} $\frac{P^2_{n+1}G}{M}=D_b$ （近似公式）

P_{n+2}至P^2_{n+2} $\frac{P^2_{n+2}G(P_{n+1}-2)}{MP_{n+1}}=D_a$

$\frac{D_a}{D_b}=d$，若$d<1$说明双生素数越来越少，最后就没有了。若$d>1$说明双生素数中间数越来越多，双生素数也无限多对。

$$\frac{P^2_{n+2}G(P_{n+1}-2)}{MP_{n+1}}\div\frac{P^2_{n+1}G}{M}=\frac{P^2_{n+2}G(P_{n+1}-2)M}{MP_{n+1}P^2_{n+1}G}$$

$$=\frac{P^2_{n+2}(P_{n+1}-2)}{P^3_{n+1}}$$ ，$P_{n+2}\geq(P_{n+1}+2)$，$P^2_{n+2}\geq(P_{n+1}+2)^2$

$$\frac{P^2_{n+2}(P_{n+1}-2)}{P^3_{n+1}}\geq\frac{(P_{n+1}+2)^2(P_{n+1}-2)}{P^3_{n+1}}=$$

$$=\frac{(P^2_{n+1}+4P_{n+1}+4)(P_{n+1}-2)}{P^3_{n+1}}=\frac{P^3_{n+1}-2P^2_{n+1}+4P^2_{n+1}-8P_{n+1}+4P_{n+1}-8}{P^3_{n+1}}$$

$$=1+\frac{2P^2_{n+1}-4P_{n+1}-8}{P^3_{n+1}}=1+\frac{2(P^2_{n+1}-2P_{n+1}-4)}{P^3_{n+1}}$$

可以看出$P^2_{n+1}-2P_{n+1}-4>0$ 或 $P_{n+1}(P_{n+1}-2)-4>0$ 或$P_{n+1}(P_{n+1}-2)>4$就有$d>1$.

用$P_{n+1}=3$ $3(3-2)=3<4$

用$P_{n+1}=5$ $5(5-2)=15>4$

用$P_{n+1}=7$ $7(7-2)=35>4$

……

只要$n\geq2$、$P_{n+1}\geq5$就有$d>1$.说明中间数越来越多，双生素数也越来越多.

就标每增加一个素数模就增加一对（或半对）双生素数，素数无穷多，双生素数也无限多对。（不含做模的双生素数）.

设D为中间数个数，求D的近似公式：

$$P^2_{n+1}>D>P_n,\ D=\frac{P^2_{n+1}\times(3-2)\times(5-2)\times\cdots\times(P_n-2)}{2\times3\times5\times\cdots\times P_n}$$

$11^2>D_1>11$，计标有8.64个，实际8个

$13^2>D_2>13$，计标有9.87个，实际9个

$17^2>D_3>17$ 计标有14.29个，实际16个

$19^2>D_4>19$，计标有15.75个，实际17个

$23^2>D_5>23$，计标有20.65个，实际21个

……

四、也谈素数分布

数论书上是（shǔ）素数的实际个数，如$\pi(3)=2$，$\pi(100)=25$，$\pi(1000)=168$，…

下面是近似计标法（$P=P_n$其中一对）

A	B
$2\to0$	$2\to1$
$3\to0$	$3\to1,2$
$5\to0$	$5\to1,2,3,4$
…	…
$P_n\to0$	$P_n\to1,2,3,\cdots,(P_n-1)$

A类每项素数模余数都是0，A类解个数$=\underbrace{1\times1\times1\times\cdots1}_{n}=1$个，A类解就是0，据前面所证，同对A、B类解里各取一个数，大数为a，小数为b，如果$a+b<P^2_{n+1}$和$1<a-b<P^2_{n+1}$都是素数。这里取B类解大于1，小于P^2_{n+1}的数为a，取A类解0为b，$a+b=a+0=a$，$a-b=a-0=a$，所以只要$1<a<P^2_{n+1}$就是素数。B类解小于P^2_{n+1}、大于1有多少个数加上做模的n个减1，就是小于P^2_{n+1}所有素数个数。（做模的素数在B类解中没有，1表已把它看成是合数），小于M的整数有M个（0~M-1）也是A类，B类解可能出现的数字。

$M=2\times3\times5\times7\times\cdots\times P_n$

设B类解有$W=1\times(3-1)\times(5-1)\times(7-1)\times\cdots\times(P_n-1)$

$\frac{M}{W}$是平均每隔$\frac{M}{W}$就有一个B类解，$P^2_{n+1}\div\frac{M}{W}+n-1$就是小于$P^2_{n+1}$的平均近似个数，因B类解里有1，1不是素数应减去。做模的n个素数应加上。

计标$\pi(P^2_{n+1})$的近似公式：

$$P^2_{n+1}\div\frac{M}{W}+n-1=\frac{P^2_{n+1}W}{M}+n-1$$

罗泉

例5 $P=7$ 四十八对

$2\to0$	$2\to1$
$3\to0$	$3\to1,2$
$5\to0$	$5\to1,2,3,4$
$7\to0$	$7\to1,2,3,4,5,6$
	1,31,61,121,151,181
	37,67,97,127,157,187
	11,41,71,101,131,191
0	13,43,73,103,163,193
	17,47,107,137,167,197
	19,79,109,139,169,199
	23,53,83,113,143,173
	29,59,89,149,179,209

大于1，小于11^2的数是：11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,107,109,113,共26个，加上做模的2,3,5,7四个共30个素数。

P=3表　从下各表左边是A类，下面是A类解、右边是B类，下面是B类解。

	2→1　2→0 3→1,2　3→0 1,5　0 (一)	2→1　2→0 3→0　3→1,2 3　2,4 (二)	2→0　2→1 3→1,2　3→0 2,4　3 (三)	2→0　2→1 3→0　3→1,2 0　1,5 (四)	罗泉 云南曲靖 寥廓北路321号

P=5表

2→1　2→0 3→1,2　3→0 5→2,3　5→0,1,4 7,23　0 13,17,6,24 (一)	2→1　2→0 3→0　3→1,2 5→2,3　5→0,1,4 3,27　4,10,14,26,20,16 (二)	2→0　2→1 3→1,2　3→0 5→2,3　5→0,1,4 2,8　15 28,22,9,21 (三)	2→0　2→1 3→0　3→1,2 5→2,3　5→0,1,4 12,18　1,5,11,29,25,19 (四)	2→1　2→0 3→1,2　3→0 5→1,4　5→0,2,3 1,11　0 29,19,12,18 (五)	2→1　2→0 3→0　3→1,2 5→1,4　5→0,2,3 9,21　2,8,10,28,22,20 (六)
2→0　2→1 3→1,2　3→0 5→1,4　5→0,2,3 4,14　15 26,16,3,27 (七)	2→0　2→1 3→0　3→1,2 5→1,4　5→0,2,3 6,24　5,7,13,25,23,17 (八)	2→1　2→0 3→1,2　3→0 5→0　5→1,2,3,4 5,25　6,12,24,18 (九)	2→1　2→0 3→0　3→1,2 5→0　5→1,2,3,4 15　2,4,8,14,28,26,22,16 (十)	2→0　2→1 3→1,2　3→0 5→0　5→1,2,3,4 10,20　3,9,27,21 (十一)	2→0　2→1 3→0　3→1,2 5→0　5→1,2,3,4 0　1,7,11,13,29,23,19,17 (十二)

P=7表

（一）

2→1	2→0
3→1,2	3→0
5→2,3	5→0,1,4
7→3,4	7→0,1,2,5,6
17,193	0,30,90,120,180
53,157	6,36,96,126,156
67,143	54,84,114,174,204
73,137	

（二）

2→1	2→0
3→1,2	3→0
5→2,3	5→0,1,4
7→2,5	7→0,1,3,4,6
23,187	0,60,90,120,150
37,173	6,36,66,126,186
47,163	24,84,144,174,204
103,107	

（三）

2→1	2→0
3→1,2	3→0
5→2,3	5→0,1,4
7→1,6	7→0,2,3,4,5
13,197	0,30,60,150,180
43,167	66,96,126,156,186
83,127	24,54,84,114,144
97,113	

（四）

2→1	2→0
3→1,2	3→0
5→2,3	5→0,1,4
7→0	7→1,2,3,4,5,6
	30,60,90,120,150,180
7,203	6,36,66,96,156,186
77,133	24,54,114,144,174,204

（五）

2→1	2→0
3→1,2	3→0
5→1,4	5→0,2,3
7→3,4	7→0,1,2,5,6
11,199	0,30,90,120,180
31,179	12,42,72,132,162
59,151	48,78,138,168,198
101,109	

（六）

2→1	2→0
3→1,2	3→0
5→1,4	5→0,2,3
7→2,5	7→0,1,3,4,6
19,191	0,60,90,120,150
61,149	42,102,132,162,192
79,131	18,48,78,108,168
89,121	

罗泉

（七）

2→1	2→0
3→1,2	3→0
5→1,4	5→0,2,3
7→1,6	7→0,2,3,4,5
1,209	0,30,60,150,180
29,181	12,42,72,102,192
41,169	18,108,138,168,198
71,139	

（八）

2→1	2→0
3→1,2	3→0
5→1,4	5→0,2,3
7→0	7→1,2,3,4,5,6
	30,60,90,120,150,180
49,161	12,72,102,132,162,192
91,119	18,48,78,108,138,198

（九）

2→1	2→0
3→1,2	3→0
5→0	5→1,2,3,4
7→3,4	7→0,1,2,5,6
	6,36,96,126,156
25,185	12,42,72,132,162
95,115	48,78,138,168,198
	54,84,114,174,204

（十）

2→1	2→0
3→1,2	3→0
5→0	5→1,2,3,4
7→2,5	7→0,1,3,4,6
	6,36,66,126,186
5,205	42,102,132,162,192
65,145	18,48,78,108,168
	24,84,144,174,204

（十一）

2→1	2→0
3→1,2	3→0
5→0	5→1,2,3,4
7→1,6	7→0,2,3,4,5
	66,96,126,156,186
55,155	12,42,72,102,192
85,125	18,108,138,168,198
	24,54,84,114,144

（十二）

2→1	2→0
3→1,2	3→0
5→0	5→1,2,3,4
7→0	7→1,2,3,4,5,6
	6,36,66,96,156,186
	12,72,102,132,162,192
35,175	18,48,78,108,138,198
	24,54,114,144,174,204

（十三）

2→1	2→0
3→0	3→1,2
5→2,3	5→0,1,4
7→3,4	7→0,1,2,5,6
	34,64,124,154,184
3,207	40,70,100,160,190
	14,44,104,134,194
87,123	16,76,106,166,196
	20,50,110,140,170
	26,56,86,146,176

（十四）

2→1	2→0
3→0	3→1,2
5→2,3	5→0,1,4
7→2,5	7→0,1,3,4,6
	4,34,64,94,154
	10,70,130,160,190
33,177	14,74,104,134,164
93,117	46,76,106,136,196
	20,50,80,140,200
	56,116,146,176,206

（十五）

2→1	2→0
3→0	3→1,2
5→2,3	5→0,1,4
7→1,6	7→0,2,3,4,5
	4,94,124,154,184
	10,40,70,100,130
27,183	14,44,74,164,194
57,153	16,46,136,166,196
	80,110,140,170,200
	26,56,86,116,206

（十六）

2→1	2→0
3→0	3→1,2
5→2,3	5→0,1,4
7→0	7→1,2,3,4,5,6
	4,34,64,94,124,184
	10,40,100,130,160,190
63,147	44,74,104,134,164,194
	16,46,76,106,136,166
	20,50,80,110,170,200
	26,86,116,146,176,206

（十七）

2→1	2→0
3→0	3→1,2
5→1,4	5→0,2,3
7→3,4	7→0,1,2,5,6
	2,62,92,152,182
	8,68,98,128,188
39,171	40,70,100,160,190
81,129	20,50,110,140,170
	22,82,112,142,202
	28,58,118,148,208

（十八）

2→1	2→0
3→0	3→1,2
5→1,4	5→0,2,3
7→2,5	7→0,1,3,4,6
	32,62,92,122,182
	8,38,98,158,188
9,201	10,70,130,160,190
51,159	20,50,80,140,200
	22,52,112,172,202
	28,88,118,148,178

(十九)
2→1 2→0
3→0 3→1,2
5→1,4 5→0,2,3
7→1,6 7→0,2,3,4,5
2,32,122,152,182
38,68,98,128,158
10,40,70,100,130
69,141 80,110,140,170,200
99,111 52,82,112,142,172
28,58,88,178,208

(二十)
2→1 2→0
3→0 3→1,2
5→1,4 5→0,2,3
7→0 7→1,2,3,4,5,6
2,32,62,92,122,152
8,38,68,128,158,188
10,40,100,130,160,190
21,189 20,50,80,110,170,200
22,52,82,142,172,202
58,88,118,148,178,208

(二十一)
2→1 2→0
3→0 3→1,2
5→0 5→1,2,3,4
7→3,4 7→0,1,2,5,6
2,62,92,152,182
34,64,124,154,184
8,68,98,128,188
14,44,104,134,194
45,165 16,76,106,166,196
22,82,112,142,202
26,56,86,146,176
28,58,118,148,208

(二十二)
2→1 2→0
3→0 3→1,2
5→0 5→1,2,3,4
7→2,5 7→0,1,3,4,6
32,62,92,122,182
4,34,64,94,154
8,38,98,158,188
14,74,104,134,164
75,135 46,76,106,136,196
22,52,112,172,202
56,116,146,176,206
28,88,118,148,178

(二十三)
2→1 2→0
3→0 3→1,2
5→0 5→1,2,3,4
7→1,6 7→0,2,3,4,5
2,32,122,152,182
4,94,124,154,184
38,68,98,128,158
14,44,74,164,194
15,195 16,46,136,166,196
52,82,112,142,172
26,56,86,116,206
28,58,88,178,208

(二十四)
2→1 2→0
3→0 3→1,2
5→0 5→1,2,3,4
7→0 7→1,2,3,4,5,6
2,32,62,92,122,152
4,34,64,94,124,184
8,38,68,128,158,188
105 44,74,104,134,164,194
16,46,76,106,136,166
22,52,82,142,172,202
26,86,116,146,176,206
58,88,118,148,178,208

(二十五)
2→0 2→1
3→1,2 3→0
5→2,3 5→0,1,4
7→3,4 7→0,1,2,5,6
32,178
38,172 9,69,99,159,189
52,158 15,75,105,135,195
88,122 21,51,111,141,201

(二十六)
2→0 2→1
3→1,2 3→0
5→2,3 5→0,1,4
7→2,5 7→0,1,3,4,6
2,208 39,69,99,129,189
82,152 15,45,105,165,195
58,142 21,81,111,141,171
68,128

(二十七)
2→0 2→1
3→1,2 3→0
5→2,3 5→0,1,4
7→1,6 7→0,2,3,4,5
8,202 9,39,129,159,189
22,188 45,75,105,135,165
62,148 21,51,81,171,201
92,118

(二十八)
2→0 2→1
3→1,2 3→0
5→2,3 5→0,1,4
7→0 7→1,2,3,4,5,6
28,182 9,39,69,99,129,159
15,45,75,135,165,195
98,112 51,81,111,141,171,201

罗泉

(二十九)
2→0 2→1
3→1,2 3→0
5→1,4 5→0,2,3
7→3,4 7→0,1,2,5,6
4,206 33,63,93,153,183
46,164 15,75,105,135,195
74,136 27,57,117,147,177
94,116

(三十)
2→0 2→1
3→1,2 3→0
5→1,4 5→0,2,3
7→2,5 7→0,1,3,4,6
16,194 3,63,123,153,183
26,184 15,45,105,165,195
44,166 27,57,87,147,207
86,124

(三十一)
2→0 2→1
3→1,2 3→0
5→1,4 5→0,2,3
7→1,6 7→0,2,3,4,5
34,176 3,33,63,93,123
64,146 45,75,105,135,165
76,134 87,117,147,177,207
104,106

(三十二)
2→0 2→1
3→1,2 3→0
5→1,4 5→0,2,3
7→0 7→1,2,3,4,5,6
3,33,93,123,153,183
14,196 15,45,75,135,165,195
56,154 27,57,87,117,177,207

(三十三)
2→0 2→1
3→1,2 3→0
5→0 5→1,2,3,4
7→3,4 7→0,1,2,5,6
33,63,93,153,183
10,200 9,69,99,159,189
80,130 21,51,111,141,201
27,57,117,147,177

2→0 三 2→1
3→1,2 十 3→0
5→0 四 5→1,2,3,4
7→2,5 7→0,1,3,4,6
3,63,123,153,183
40,170 39,69,99,129,189
100,110 21,81,111,141,171
27,57,87,147,207

2→0 三 2→1
3→1,2 十 3→0
5→0 五 5→1,2,3,4
7→2,5 7→0,1,3,4,6
3,33,63,93,123
20,190 9,39,129,159,189
50,160 21,51,81,171,201
87,117,147,177,207

2→0 三 2→1
3→1,2 十 3→0
5→0 六 5→1,2,3,4
7→0 7→1,2,3,4,5,6
3,33,93,123,153,183
9,39,69,99,129,159
70,140 51,81,111,141,171,201
27,57,87,117,177,207

2→0 三 2→1
3→0 十 3→1,2
5→2,3 七 5→0,1,4
7→3,4 7→0,1,2,5,6
1,61,91,121,181
5,35,65,125,155
41,71,131,161,191
18,192 19,49,79,139,169
102,108 55,85,145,175,205
29,89,119,149,209

2→0 三 2→1
3→0 十 3→1,2
5→2,3 八 5→0,1,4
7→2,5 7→0,1,3,4,6
1,31,91,151,181
35,95,125,155,185
12,198 11,41,71,101,161
72,138 49,109,139,169,199
25,55,85,115,175
29,59,119,179,209

罗泉

2→0 三 2→1
3→0 十 3→1,2
5→2,3 九 5→0,1,4
7→1,6 7→0,2,3,4,5
31,61,91,121,151
5,35,65,95,185
48,162 11,101,131,161,191
78,132 19,49,79,109,199
25,115,145,175,205
59,89,119,149,179

2→0 四 2→1
3→0 十 3→1,2
5→2,3 5→0,1,4
7→0 7→1,2,3,4,5,6
1,31,61,121,151,181
5,65,95,125,155,185
42,168 11,41,71,101,131,191
19,79,109,139,169,199
25,55,85,115,145,205
29,59,89,149,179,209

2→0 四 2→1
3→0 十 3→1,2
5→1,4 一 5→0,2,3
7→3,4 7→0,1,2,5,6
5,35,65,125,155
24,186 7,37,97,127,187
13,43,103,133,163
66,144 47,77,107,167,197
23,83,113,173,203
55,85,145,175,205

2→0 四 2→1
3→0 十 3→1,2
5→1,4 二 5→0,2,3
7→2,5 7→0,1,3,4,6
35,95,125,155,185
7,67,97,127,157
54,156 13,43,73,133,193
96,114 17,77,137,167,197
53,83,113,143,203
25,55,85,115,175

2→0 四 2→1
3→0 十 3→1,2
5→1,4 三 5→0,2,3
7→1,6 7→0,2,3,4,5
5,35,65,95,185
7,37,67,157,187
6,204 73,103,133,163,193
36,174 17,47,77,107,137
23,53,143,173,203
25,115,145,175,205

2→0 四 2→1
3→0 十 3→1,2
5→1,4 四 5→0,2,3
7→0 7→1,2,3,4,5,6
5,65,95,125,155,185
37,67,97,127,157,187
84,126 13,43,73,103,163,193
17,47,107,137,167,197
23,53,83,113,143,173
25,55,85,115,145,205

2→0 四 2→1
3→0 十 3→1,2
5→0 五 5→1,2,3,4
7→3,4 7→0,1,2,5,6
1,61,91,121,181
7,37,97,127,187
41,71,131,161,191
69,150 19,49,79,139,169
13,43,103,133,163
47,77,107,167,197
23,83,113,173,203
29,89,119,149,209

2→0 四 2→1
3→0 十 3→1,2
5→0 六 5→1,2,3,4
7→2,5 7→0,1,3,4,6
1,31,91,51,181
7,67,97,127,157
30,180 11,41,71,101,161
13,43,73,133,193
17,77,137,167,197
49,109,139,169,199
53,83,113,143,203
29,59,119,179,209

2→0 四 2→1
3→0 十 3→1,2
5→0 七 5→1,2,3,4
7→1,6 7→0,2,3,4,5
31,61,91,121,151
7,37,67,157,187
11,101,131,161,191
90,120 73,103,133,163,193
17,47,77,107,137
19,49,79,109,199
23,53,143,173,203
59,89,119,149,179

2→0 四 2→1
3→0 十 3→1,2
5→0 八 5→1,2,3,4
7→0 7→1,2,3,4,5,6
1,31,61,121,151,181
37,67,97,127,157,187
11,41,71,101,131,191
0 13,43,73,103,163,193
17,47,107,137,167,197
19,79,109,139,169,199
23,53,83,113,143,173
29,59,89,149,179,209

用公式计标：$\frac{11^2\times1\times(3-1)\times(5-1)\times(7-1)}{2\times3\times5\times7}+4-1=30.66$。

$\pi(11^2)=30$，用公式计标：30.66，

$\pi(13^2)=39$，用公式计标：39.12

$\pi(17^2)=61$，用公式计标：60.43

$\pi(19^2)=72$，用公式计标：71.17

$\pi(23^2)=99$，用公式计标：97.47

$\pi(29^2)=146$，用公式计标：145.58

……

$\pi(73^2)=705$，用公式计标：700.34

……

五、表亲素数也有无限多对

两个相临素数相差4，($P_{n+1}-P_n=4$)的称表亲素数，如13和17、19和23、37和41、…等。

证法和证明双生素数有无限多对相同。

$2\to0$ $\qquad$ $2\to1$
$3\to1,2$ $\qquad$ $3\to0$
$5\to2,3$ $\qquad$ $5\to0,1,4$
$7\to2,5$ $\qquad$ $7\to0,1,3,4,6$
… $\qquad$ …
$P_n\to2,(P_n-2)$ $\qquad$ $P_n\to0,1,3,4,\cdots,(P_n-3),(P_n-1)$。

A类共有A类解2^{n-1}个，其中一个x_1是2

证，$2\to0$，$x_1\equiv0\pmod2$，$x_1=0+2k$，取$k=1$，$x_1=2$

$\begin{cases}2\to0\\3\to1,2\end{cases}$，$x_1\equiv2\pmod6$，$x_1=2+6k$，取$k=0$，$x_1=2$

$\begin{cases}2\to0\\3\to1,2\\5\to2,3\end{cases}$，$x_1\equiv2\pmod{30}$，$x_1=2+30k$，取$k=0$，$x_1=2$

$\begin{cases}2\to0\\3\to1,2\\5\to2,3\\7\to2,5\end{cases}$ $x_1\equiv2\pmod{210}$，$x_1=2+210k$，取$k=0$，$x_1=2$

……

$\begin{cases}2\to0\\3\to1,2\\5\to2,3\\7\to2,5\\\cdots\\P_n\to2,(P_n-2)\end{cases}$ $x_1\equiv2\pmod M$，$x_1=2+Mk$，取$k=0$，$x_1=2$

所以其中一个解$x_1=2$

据前面所证，同对里A、B类解中各任意取一个数，大数为a，小数为b，只要$a+b<P_{n+1}^2$和$1<a-b<P_{n+1}^2$都是素数。这里取A类解2为b，取B类解大于P_{n+1}，小于P_{n+1}^2为a，$a-2=q$，$a+2=P$，q、P都是素数。$q+4=a-2+4=a+2=P$，a是中间数。B类有$3\to0$，中间数都是3的倍数。

例5，$P=7$表中二六对，

$2\to0$ $\qquad$ $2\to1$
$3\to1,2$ $\qquad$ $3\to0$
$5\to2,3$ $\qquad$ $5\to0,1,4$
$7\to2,5$ $\qquad$ $7\to0,1,3,4,6$
2，58，68，82 $\qquad$ 39，69，99，129，189
$\qquad$ 15，45，105，165，195
208，152，142，128 $\qquad$ 21，81，111，141，171

B类解大于11，小于11^2的数都是中间数，共9对表亲素数

$15\pm2=\begin{smallmatrix}17\\13\end{smallmatrix}$，$21\pm2=\begin{smallmatrix}19\\23\end{smallmatrix}$，$39\pm2=\begin{smallmatrix}41\\37\end{smallmatrix}$，

$45\pm2=\begin{smallmatrix}47\\43\end{smallmatrix}$，$69\pm2=\begin{smallmatrix}71\\67\end{smallmatrix}$，$81\pm2=\begin{smallmatrix}83\\79\end{smallmatrix}$ 共9对表亲素数

$99\pm2=\begin{smallmatrix}101\\97\end{smallmatrix}$，$105\pm2=\begin{smallmatrix}107\\103\end{smallmatrix}$，$111\pm2=\begin{smallmatrix}113\\109\end{smallmatrix}$（不含7，11）

A类同余式里，2的余数1个，是0。3和以后的余数都是2和(P_n-2)，这对B类同余式里小于M的解共$1\times(3-2)\times(5-2)\times\cdots\times(P_n-2)=G$，G个数可选范围都在$(0\sim M-1)$之中。平均$\frac{M}{G}$就有一个B类解，小于$P_{n+1}^2$平均有$P_{n+1}^2\div\frac{M}{G}=\frac{P_{n+1}^2G}{M}$个，大于$P_{n+1}$小于$P_{n+1}^2$都是表亲素数中间数。下面是$P_{n+1}$至$P_{n+1}^2$的中间数个数D。

$P_3=5$、$7<D_1<7^2$，$\frac{7^2\times1\times(3-2)\times(5-2)}{2\times3\times5}=4.9$，实际5个

$P_4=7$，$\frac{11^2\times(5-2)\times(7-2)}{2\times3\times5\times7}=8.64=D_2$，实际9个

$P_5=11$，$\frac{13^2\times(5-2)\times(7-2)\times(11-2)}{2\times3\times5\times7\times11}=9.88=D_3$，实际11个
（不含5，11）

……

P_{n+1}至P_{n+1}^2。$\frac{P_{n+1}^2G}{M}=D_b$

P_{n+2}至P_{n+2}^2。$\frac{P_{n+2}^2G(P_{n+1}-2)}{M(P_{n+1})}=D_a$

$\frac{D_a}{D_b}=d$，若$d<1$，……

（从下证明和双生素数有无限多对证法一样）略；

大于P_{n+1}小于P_{n+1}^2中间数个数近似公式：

$$D=\frac{P_{n+1}^2\times(3-2)\times(5-2)\times(7-2)\times\cdots\times(P_n-2)}{2\times3\times5\times7\times\cdots\times P_n}$$

$P_4=7$，计标有8.64个，实际9个

$P_5=11$，计标有9.88个，实际11个

$P_6=13$，计标有14.29个，实际14个

$P_7=17$，计标有15.75个，实际17个

$P_8=19$，计标有20.6个，实际23个

罗泉

……

从理论上讲双生、表亲素数一样多。

六、关于哥德巴赫猜想

假如知道两个相临素数之比小于$\sqrt2$，($\frac{P_{n+1}}{P_n}<\sqrt2$)利用P表也许可以证明。

设$n\geq4$，$P_n\geq7$ $\quad$ $P_{n+1}\geq11$

把P_{n+1}^2分成三段：上段P_{n+1}^2至$\frac{2P_{n+1}^2}{3}+1$，中段$\frac{2P_{n+1}^2}{3}$至$\frac{P_{n+1}^2}{3}$，下段$\frac{P_{n+1}^2}{3}-1$至0。

据前面所证：同对里A、B类各取一个解数，大数为a，小数为b，如果$a+b<P_{n+1}^2$和$1<a-b<P_{n+1}^2$，那么$a+b$和$a-b$都是素数。

$a+b=P$ (1) $\qquad$ $a-b=q$ (2)

(1)+(2) $\quad a-b+a+b=2a=q+P$

a是大于40的正整数。

中段加下段：$(\frac{2P_{n+1}^2}{3}$至$\frac{P_{n+1}^2}{3})+(\frac{P_{n+1}^2}{3}-1$至$0)$
$=P_{n+1}^2-1$至$\frac{P_{n+1}^2}{3}$，都小于P_{n+1}^2

中段减下段：$(\frac{2P_{n+1}^2}{3}$至$\frac{P_{n+1}^2}{3})-(0$至$\frac{P_{n+1}^2}{3}-1)$
$=\frac{2P_{n+1}^2}{3}$至1，都小于P_{n+1}^2，（1不是素数

取大于1的数)

$P_5=11$，11^2中段：$40.\dot{3}$ 至 $80.\dot{6}$

$P_6=13$，13^2中段：$56.\dot{3}$ 至 $112.\dot{6}$

$P_7=17$，17^2中段：$96.\dot{3}$ 至 $192.\dot{6}$

$P_8=19$，19^2中段：$120.\dot{3}$ 至 $240.\dot{6}$

……

P_n P_n^2中段 $\frac{P_n^2}{3}$ 至 $\frac{2P_n^2}{3}$

P_{n+1} P_{n+1}^2中段 $\frac{P_{n+1}^2}{3}$ 至 $\frac{2P_{n+1}^2}{3}$

上面 $80.\dot{6}>56.\dot{3}$

$112.\dot{6}>96.\dot{3}$

$192.\dot{6}>120.\dot{3}$

……

$\frac{2P_n^2}{3}>\frac{P_{n+1}^2}{3}$，$2P_n^2>P_{n+1}^2$

$2>\frac{P_{n+1}^2}{P_n^2}$ $2>\left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right)^2$ $\sqrt{2}>\frac{P_{n+1}}{P_n}$ (待证)

用A类解中段为a，B类下段(1除外)为b。

下段有多少个数就有多少个解。

选B类解最少为G个，$G=1\times(3-2)\times(5-2)\times(7-2)\times\cdots\times(P_n-2)$

B类解可选数(小于M)有 $2\times3\times5\times7\times\cdots\times P_n=M$

$\frac{M}{G}$是平均每隔$\frac{M}{G}$有1个B类解。

$P_{n+1}^2\div\frac{M}{G}=\frac{P_{n+1}^2G}{M}$是平均小于$P_{n+1}^2$的解数个数。

$\frac{P_{n+1}^2G}{3M}$是B类解下段平均最少个数。

$P_4=7$，平均下段有 $\frac{11^2\times1\times(3-2)\times(5-2)\times(7-2)}{3\times2\times3\times5\times7}=2.88$

$P_5=11$ 平均下段有 $\frac{13^2\times(5-2)\times(7-2)\times(11-2)}{3\times2\times3\times5\times7\times11}=3.29$

$P_6=13$ 平均下段有 $\frac{17^2\times(5-2)\times(7-2)\times(11-2)\times(13-2)}{3\times2\times3\times5\times7\times11\times13}=4.76$

……

P_n平均下段有 $\frac{P_{n+1}^2G}{3M}=D_1$

P_{n+1}平均下段有 $\frac{P_{n+2}^2G(P_{n+1}-2)}{3MP_{n+1}}=D_2$

$\frac{D_2}{D_1}=d$，若$d>1$，说明B类解下段解数越来越多。

$\frac{P_{n+2}^2G(P_{n+1}-2)}{3MP_{n+1}}\div\frac{P_{n+1}^2G}{3M}=\frac{P_{n+2}^2G(P_{n+1}-2)3M}{3MP_{n+1}P_{n+1}^2G}$

$=\frac{P_{n+2}^2(P_{n+1}-2)}{P_{n+1}^3}\geqslant\frac{(P_{n+1}+2)^2(P_{n+1}-2)}{P_{n+1}^3}\cdots$

前面双生素数有无限多对一节里可知上面之比大于1，说明下段解数越来越多。$2a=p+q$也越来越多种解。

$a>40$ 的每个数都可以在某个P表或某几个P表中的某对A类解中段里找到。

例，$a=1000$，$2a=2000$，$\sqrt{2000}=44.72$。

44.72最接近的素数是41，43，47，53

$P_{n+1}^2=43^2$，中段$616.\dot{3}$至$1232.\dot{6}$或$P_{n+1}^2=47^2$中段：$736.\dot{3}$至$1472.\dot{6}$或$P_{n+1}^2=41^2$，中段：$560.\dot{3}$至$1120.\dot{6}$或$P_{n+1}^2=53^2$中段：$936.\dot{3}$至$1872.\dot{6}$。

1000都在$P_{n+1}^2=41^2$或43^2，47^2，53^2的中段上。

有没有某数a在P_n^2时属于上段，而P_{n+1}^2时属于下段呢？

$P_{n+1}^2\times\frac{1}{3}>a$ $P_n^2\times\frac{2}{3}<a$

$\frac{P_{n+1}^2}{3}>\frac{2P_n^2}{3}$，$P_{n+1}^2>2P_n^2$

$\frac{P_{n+1}^2}{P_n^2}>2$，$\left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right)^2>2$，$\frac{P_{n+1}}{P_n}>\sqrt{2}$

只有$\frac{P_{n+1}}{P_n}>\sqrt{2}$的情况下才有这种情况，和我们已先约定$\frac{P_{n+1}}{P_n}<\sqrt{2}$矛盾。

罗泉

电话 15911428441