

# Une Démonstration Élémentaire de la Conjecture de BEAL

Par  
Abdelmajid BEN HADJ SALEM  
INGÉNIEUR GÉNÉRAL GÉOGRAPHE

SEPTEMBRE 2015

VERSION 1.

[abenhadsalem@gmail.com](mailto:abenhadsalem@gmail.com)

---

**Table des matières**

1	<b>Introduction</b>	2
2	<b>Calculs Préliminaires</b>	2
2.1	<b>Démonstration</b>	4
3	<b>La Démonstration du Principal Théorème</b>	7
3.1	Cas $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{1}{b}$	7
3.1.1	$b = 1$	7
3.1.2	$b = 2$	7
3.1.3	$b = 3$	8
3.2	Cas $a > 1$ , $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}$	8
3.2.1	<b>Hypothèse</b> : $\{3 p \text{ et } b 4p\}$	9
3.2.2	<b>Hypothèse</b> : $\{3 a \text{ et } b 4p\}$	14
4	<b>Un Exemple Numérique</b>	24

## Une Démonstration Élémentaire de la Conjecture de BEAL

**Abdelmajid Ben Hadj Salem, Ing. Général**

abenhadjalem@gmail.com<sup>1</sup>

### Résumé

En 1997, Andrew Beal [1] avait annoncé la conjecture suivante : *Soient  $A, B, C, m, n$ , et  $l$  des entiers positifs avec  $m, n, l > 2$ . Si  $A^m + B^n = C^l$  alors  $A, B$ , et  $C$  ont un facteur commun.*

Nous commençons par construire le polynôme  $P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) = x^3 - px + q$  avec  $p, q$  des entiers qui dépendent de  $A^m, B^n$  et  $C^l$ . Nous résolvons  $x^3 - px + q = 0$  et nous obtenons les trois racines  $x_1, x_2, x_3$  comme fonctions de  $p, q$  et d'un paramètre  $\theta$ . Comme  $A^m, B^n, -C^l$  sont les seules racines de  $x^3 - px + q = 0$ , nous discutons les conditions pour que  $x_1, x_2, x_3$  soient des entiers.

*O my Lord! Increase me further in knowledge.*

(Holy Quran, Surah Ta Ha, 20 :114.)

*To my Wife Wahida*

---

1. 6, Rue du Nil, Cité Soliman Erriadh, 8020 Soliman, TUNISIA.

## 1 Introduction

En 1997, Andrew Beal [1] avait annoncé la conjecture suivante :

**Conjecture 1.1.** *Soient  $A, B, C, m, n$ , et  $l$  des entiers positifs avec  $m, n, l > 2$ . Si :*

$$A^m + B^n = C^l \quad (1)$$

*alors  $A, B$ , et  $C$  ont un facteur commun.*

Dans cette communication, nous donnons une démonstration élémentaire de la conjecture de Beal. Notre idée est de construire le polynôme  $P(x)$  de degré trois ayant comme racines  $A^m, B^n$  et  $-C^l$ . Dans la section suivante, nous effectuerons des calculs préliminaires pour obtenir les expressions des trois racines de  $P(x) = 0$ . La démonstration de la conjecture (1.1) fera l'objet de la section 3. Dans la section 4, nous présenterons un exemple numérique.

Nous commençons avec le cas trivial où  $A^m = B^n$ . L'équation (1) devient :

$$2A^m = C^l \quad (2)$$

alors  $2|C^l \implies 2|C \implies \exists c \in \mathbb{N}^* / C = 2c$ , d'où  $2A^m = 2^l c^l \implies A^m = 2^{l-1} c^l$ . Comme  $l > 2$ , alors  $2|A^m \implies 2|A \implies 2|B^n \implies 2|B$ . La conjecture (1.1) est vérifiée.

Nous supposons dans la suite que  $A^m > B^n$ .

## 2 Calculs Préliminaires

Soient  $m, n, l \in \mathbb{N}^* > 2$  et  $A, B, C \in \mathbb{N}^*$  tels que :

$$A^m + B^n = C^l \quad (3)$$

Nous appellerons :

$$P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) = x^3 - x^2(A^m + B^n - C^l) + x[A^m B^n - C^l(A^m + B^n)] + C^l A^m B^n \quad (4)$$

Utilisant l'équation (3),  $P(x)$  peut s'écrire :

$$\boxed{P(x) = x^3 + x[A^m B^n - (A^m + B^n)^2] + A^m B^n (A^m + B^n)} \quad (5)$$

nous introduisons les notations :

$$p = (A^m + B^n)^2 - A^m B^n \quad (6)$$

$$q = A^m B^n (A^m + B^n) \quad (7)$$

Comme  $A^m \neq B^n$ , nous obtenons :

$$p > (A^m - B^n)^2 > 0 \quad (8)$$

L'équation (5) devient :

$$P(x) = x^3 - px + q \quad (9)$$

en utilisant l'équation (4),  $P(x) = 0$  a trois racines réelles différentes :  $A^m, B^n$  et  $-C^l$ .

Maintenant, occupons-nous de la résolution de l'équation :

$$P(x) = x^3 - px + q = 0 \quad (10)$$

Pour résoudre (10), posons :

$$x = u + v \quad (11)$$

Alors  $P(x) = 0$  donne :

$$P(x) = P(u+v) = (u+v)^3 - p(u+v) + q = 0 \implies u^3 + v^3 + (u+v)(3uv - p) + q = 0 \quad (12)$$

Pour déterminer  $u$  et  $v$ , nous obtenons les conditions :

$$u^3 + v^3 = -q \quad (13)$$

$$uv = p/3 > 0 \quad (14)$$

Alors  $u^3$  et  $v^3$  sont solutions de l'équation du second degré :

$$X^2 + qX + p^3/27 = 0 \quad (15)$$

Son discriminant  $\Delta$  s'écrit :

$$\Delta = q^2 - 4p^3/27 = \frac{27q^2 - 4p^3}{27} = \frac{\bar{\Delta}}{27} \quad (16)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= 27q^2 - 4p^3 = 27(A^m B^n (A^m + B^n))^2 - 4[(A^m + B^n)^2 - A^m B^n]^3 \\ &= 27A^{2m} B^{2n} (A^m + B^n)^2 - 4[(A^m + B^n)^2 - A^m B^n]^3 \end{aligned} \quad (17)$$

Notons :

$$\alpha = A^m B^n > 0 \quad (18)$$

$$\beta = (A^m + B^n)^2 \quad (19)$$

Nous pouvons écrire l'équation (17) comme :

$$\bar{\Delta} = 27\alpha^2\beta - 4(\beta - \alpha)^3 \quad (20)$$

Comme  $\alpha \neq 0$ , nous pouvons aussi re-écrire l'équation (20) comme :

$$\bar{\Delta} = \alpha^3 \left( 27\frac{\beta}{\alpha} - 4\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)^3 \right) \quad (21)$$

Nous appelons  $t$  le paramètre :

$$t = \frac{\beta}{\alpha} \quad (22)$$

$\bar{\Delta}$  devient :

$$\bar{\Delta} = \alpha^3(27t - 4(t-1)^3) \quad (23)$$

Appelons :

$$y = y(t) = 27t - 4(t-1)^3 \quad (24)$$

Comme  $\alpha > 0$ , le signe de  $\bar{\Delta}$  est aussi le signe de  $y(t)$ . Etudions le signe de  $y$ . Nous obtenons  $y'(t)$  :

$$y'(t) = y' = 3(1+2t)(5-2t) \quad (25)$$

$y' = 0 \implies t_1 = -1/2$  et  $t_2 = 5/2$ , alors le tableau de variations de  $y$  est donné ci-dessous :

t	$-\infty$	$-1/2$	$5/2$	$4$	$+\infty$				
$1+2t$	-	0	+		+				
$5-2t$	+		0	-					
$y'(t)$	-	0	+	0	-				
$y(t)$	$+\infty$	↘	0	↗	54	↘	0	↘	$-\infty$

Fig. 1: Le Tableau de variations

Le tableau de variations de la fonction  $y$  montre que  $y < 0$  pour  $t > 4$ . Dans notre cas, nous sommes intéressés à  $t > 0$ . Pour  $t = 4$  nous obtenons  $y(4) = 0$  et pour  $t \in ]0, 4[ \implies y > 0$ . Comme nous avons  $t = \frac{\beta}{\alpha} > 4$  parce que  $A^m \neq B^n$  :

$$(A^m - B^n)^2 > 0 \implies \beta = (A^m + B^n)^2 > 4\alpha = 4A^m B^n \quad (26)$$

Alors  $y < 0 \implies \bar{\Delta} < 0 \implies \Delta < 0$ . Alors l'équation (15) n'a pas de racines réelles  $u^3$  et  $v^3$ . Retrouvons les solutions  $u$  et  $v$  avec  $x = u + v$  un réel positif ou négatif et  $u.v = p/3$ .

## 2.1 Démonstration

*Démonstration.* Les solutions de l'équation (15) sont :

$$X_1 = \frac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad (27)$$

$$X_2 = \overline{X_1} = \frac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad (28)$$

Nous devons résoudre :

$$u^3 = \frac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad (29)$$

$$v^3 = \frac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad (30)$$

Ecrivait  $X_1$  sous la forme :

$$X_1 = \rho e^{i\theta} \quad (31)$$

avec :

$$\rho = \frac{\sqrt{q^2 - \Delta}}{2} = \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}} \quad (32)$$

$$\text{et } \sin\theta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho} > 0 \quad (33)$$

$$\cos\theta = -\frac{q}{2\rho} < 0 \quad (34)$$

alors  $\theta \in ] + \frac{\pi}{2}, +\pi[$ , soit :

$$\boxed{\frac{\pi}{2} < \theta < +\pi \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{3} < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < \cos\frac{\theta}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad (35)$$

et :

$$\boxed{\frac{1}{4} < \cos^2\frac{\theta}{3} < \frac{3}{4}} \quad (36)$$

d'où l'expression de  $X_2$  :

$$X_2 = \rho e^{-i\theta} \quad (37)$$

Soit :

$$u = r e^{i\psi} \quad (38)$$

$$\text{et } j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad (39)$$

$$j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \bar{j} \quad (40)$$

$j$  est une racine complexe cubique de l'unité  $\iff j^3 = 1$ . Alors les solutions  $u$  et  $v$  sont :

$$u_1 = r e^{i\psi_1} = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\theta}{3}} \quad (41)$$

$$u_2 = r e^{i\psi_2} = \sqrt[3]{\rho} j e^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\theta+2\pi}{3}} \quad (42)$$

$$u_3 = r e^{i\psi_3} = \sqrt[3]{\rho} j^2 e^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{4\pi}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\theta+4\pi}{3}} \quad (43)$$

et similairement :

$$v_1 = re^{-i\psi_1} = \sqrt[3]{\rho}e^{-i\frac{\theta}{3}} \quad (44)$$

$$v_2 = re^{-i\psi_2} = \sqrt[3]{\rho}j^2e^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{4\pi}{3}}e^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{4\pi-\theta}{3}} \quad (45)$$

$$v_3 = re^{-i\psi_3} = \sqrt[3]{\rho}je^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{2\pi-\theta}{3}} \quad (46)$$

Nous devons choisir  $u_k$  et  $v_h$  de façon que  $u_k + v_h$  soit réel. Dans ce cas, nous avons nécessairement :

$$v_1 = \overline{u_1} \quad (47)$$

$$v_2 = \overline{u_2} \quad (48)$$

$$v_3 = \overline{u_3} \quad (49)$$

Nous obtenons comme solutions réelles de l'équation (12) :

$$x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta}{3} > 0 \quad (50)$$

$$x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta+2\pi}{3} = -\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) < 0 \quad (51)$$

$$x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta+4\pi}{3} = \sqrt[3]{\rho}\left(-\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) > 0 \quad (52)$$

Utilisant les expressions de  $x_1$  et  $x_3$ , nous comparons  $x_1$  et  $x_3$  :

$$\begin{aligned} 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta}{3} &\stackrel{?}{>} \sqrt[3]{\rho}\left(-\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) \\ 3\cos\frac{\theta}{3} &\stackrel{?}{>} \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3} \end{aligned} \quad (53)$$

comme  $\frac{\theta}{3} \in ] + \frac{\pi}{6}, + \frac{\pi}{3}[$ , alors  $\sin\frac{\theta}{3}$  et  $\cos\frac{\theta}{3}$  sont  $> 0$ . Prenons le carré des deux membres de la dernière équation, nous obtenons :

$$\frac{1}{4} < \cos^2\frac{\theta}{3} \quad (54)$$

ce qui est vrai puisque  $\frac{\theta}{3} \in ] + \frac{\pi}{6}, + \frac{\pi}{3}[$  alors  $x_1 > x_3$ . Comme  $A^m, B^n$  et  $-C^l$  sont les seules solutions réelles de (10), nous considérons, comme  $A^m$  est supposé supérieur à  $B^n$ , les expressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} A^m = x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta}{3} \\ B^n = x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta+4\pi}{3} = \sqrt[3]{\rho}\left(-\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) \\ -C^l = x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta+2\pi}{3} = -\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) \end{array} \right. \quad (55)$$

□

### 3 La Démonstration du Principal Théorème

**Principal Théorème :** Soient  $A, B, C, m, n$ , et  $l$  des entiers positifs avec  $m, n, l > 2$ .  
Si :

$$A^m + B^n = C^l \quad (56)$$

alors  $A, B$ , et  $C$  ont un facteur commun.

*Démonstration.*  $A^m = 2\sqrt[3]{\rho} \cos^2 \frac{\theta}{3}$  est un entier  $\Rightarrow A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2} \cos^2 \frac{\theta}{3}$  est un entier. Mais :

$$\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3} \quad (57)$$

Alors :

$$A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2} \cos^2 \frac{\theta}{3} = 4\frac{p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} = p \cdot \frac{4}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} \quad (58)$$

Comme  $A^{2m}$  est un entier, et  $p$  est un entier, alors  $\cos^2 \frac{\theta}{3}$  doit être écrit sous la forme :

$$\boxed{\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{1}{b} \quad \text{ou} \quad \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}} \quad (59)$$

avec  $b \in \mathbb{N}^*$ , pour la dernière condition  $a \in \mathbb{N}^*$  et  $a, b$  copremiers.

#### 3.1 Cas $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{1}{b}$

Nous obtenons :

$$A^{2m} = p \cdot \frac{4}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4 \cdot p}{3 \cdot b} \quad (60)$$

Comme  $\frac{1}{4} < \cos^2 \frac{\theta}{3} < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{b} < \frac{3}{4} \Rightarrow b < 4 < 3b \Rightarrow b = 1, 2, 3$ .

##### 3.1.1 $b = 1$

$b = 1 \Rightarrow 4 < 3$  ce qui est impossible.

##### 3.1.2 $b = 2$

$b = 2 \Rightarrow A^{2m} = p \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot p}{3} \Rightarrow 3|p \Rightarrow p = 3p'$  avec  $p' \neq 1$  parceque  $3 \ll p$ , et  $b = 2$ , nous obtenons :

$$A^{2m} = \frac{2p}{3} = 2 \cdot p' \quad (61)$$

mais :

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left( 3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p}{3} \left( 3 - 4 \frac{1}{2} \right) = \frac{p}{3} = \frac{3p'}{3} = p' \quad (62)$$

d'un côté :

$$\begin{aligned} A^{2m} &= (A^m)^2 = 2p' \Rightarrow 2|p' \Rightarrow p' = 2p'^2 \Rightarrow A^{2m} = 4p'^2 \\ &\Rightarrow A^m = 2p' \Rightarrow 2|A^m \Rightarrow 2|A \end{aligned}$$

et de l'autre côté :

$B^n C^l = p' = 2p'^2 \Rightarrow 2|B^n$  or  $2|C^l$ . Si  $2|B^n \Rightarrow 2|B$ . Comme  $C^l = A^m + B^n$  et  $2|A$  et  $2|B$ , il s'ensuit  $2|A^m$  et  $2|B^n$ , alors  $2|(A^m + B^n) \Rightarrow 2|C^l \Leftrightarrow 2|C$ .

Alors, nous avons :  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun. De même si  $2|C^l$ , nous obtenons le même résultat :  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun.

### 3.1.3 $b = 3$

$b = 3 \Rightarrow A^{2m} = p \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4p}{9} \Rightarrow 9|p \Rightarrow p = 9p'$  avec  $p' \neq 1$  comme  $9 \ll p$  then  $A^{2m} = 4p' \Rightarrow p'$  n'est pas premier. Soit  $\mu$  un entier premier avec  $\mu|p' \Rightarrow \mu|A^{2m} \Rightarrow \mu|A$ .

D'autre part :

$$B^n C^l = \frac{p}{3} \left( 3 - 4\cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = 5p'$$

Alors  $\mu|B^n$  ou  $\mu|C^l$ . Si  $\mu|B^n \Rightarrow \mu|B$ . Comme  $C^l = A^m + B^n$  et  $\mu|A$  et  $\mu|B$ , il s'ensuit  $\mu|A^m$  et  $\mu|B^n$ , alors  $\mu|(A^m + B^n) \Rightarrow \mu|C^l \Rightarrow \mu|C$ .

Alors, nous avons :  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun. De même si  $\mu|C^l$ , nous obtenons le même résultat :  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun.

## 3.2 Cas $a > 1$ , $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}$

Nous avons donc :

$$\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} \tag{63}$$

$$A^{2m} = p \cdot \frac{4}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4 \cdot p \cdot a}{3 \cdot b} \tag{64}$$

où  $a, b$  vérifient l'une des deux conditions :

$$\boxed{\{3|p \text{ et } b|4p\}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\{3|a \text{ et } b|4p\}} \tag{65}$$

et en utilisant l'équation (36), nous obtenons une troisième condition :

$$\boxed{b < 4a < 3b} \tag{66}$$

Pour ces conditions,  $A^{2m} = 4 \sqrt[3]{\rho^2} \cos^2 \frac{\theta}{3} = 4 \frac{p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3}$  est un entier.

Etudions alors les conditions données par l'équation (65).

**3.2.1 Hypothèse :**  $\{3|p \text{ et } b|4p\}$ 

**3.2.1.1. Cas  $b = 2$  et  $3|p$  :**  $3|p \Rightarrow p = 3p'$  avec  $p' \neq 1$  parceque  $3 \ll p$ , et  $b = 2$ , nous obtenons :

$$A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4.3p'.a}{3b} = \frac{4.p'.a}{2} = 2.p'.a \quad (67)$$

Comme :

$$\frac{1}{4} < \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{2} < \frac{3}{4} \Rightarrow a < 2 \Rightarrow a = 1 \quad (68)$$

mais  $a > 1$  alors le cas  $b = 2$  et  $3|p$  est impossible.

**3.2.1.2. Cas  $b = 4$  et  $3|p$  :** nous avons  $3|p \Rightarrow p = 3p'$  avec  $p' \in \mathbb{N}^*$ , il s'ensuit :

$$A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4.3p'.a}{3 \times 4} = p'.a \quad (69)$$

et :

$$\frac{1}{4} < \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{4} < \frac{3}{4} \Rightarrow 1 < a < 3 \Rightarrow a = 2 \quad (70)$$

mais  $a, b$  sont copremiers. Alors le cas  $b = 4$  et  $3|p$  est impossible.

**3.2.1.3. Cas :**  $b \neq 2, b \neq 4, b|p$  et  $3|p$  : Comme  $3|p$  alors  $p = 3p'$  et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \frac{a}{b} = \frac{4 \times 3p' a}{3 b} = \frac{4p'a}{b} \quad (71)$$

Nous considérons le cas :  $b|p' \Rightarrow p' = bp''$  et  $p'' \neq 1$  (si  $p'' = 1$ , alors  $p = 3b$ , voir sous-paragraphe 2<sup>ème</sup> sous-cas équation (91)). D'où :

$$A^{2m} = \frac{4bp''a}{b} = 4ap'' \quad (72)$$

Calculons  $B^n C^l$  :

$$B^n C^l = \frac{p}{3} \left( 3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = p' \left( 3 - 4 \frac{a}{b} \right) = b.p'' \cdot \frac{3b - 4a}{b} = p'' \cdot (3b - 4a) \quad (73)$$

Finalement, nous avons les deux équations :

$$A^{2m} = \frac{4bp''a}{b} = 4ap'' \quad (74)$$

$$B^n C^l = p'' \cdot (3b - 4a) \quad (75)$$

**Sous-Cas 1 :**  $p''$  est premier . De (74),  $p''|A^{2m} \Rightarrow p''|A^m \Rightarrow p''|A$ . De (75),  $p''|B^n$  ou  $p''|C^l$ . Si  $p''|B^n \Rightarrow p''|B$ , comme  $C^l = A^m + B^n \Rightarrow p''|C^l \Rightarrow p''|C$ . If  $p''|C^l \Rightarrow p''|C$ , comme  $B^n = C^l - A^m \Rightarrow p''|B^n \Rightarrow p''|B$ .

Alors  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun.

**Sous-Cas 2 :  $p''$  n'est pas premier.** Soit  $\lambda$  un diviseur premier de  $p''$ . De (74), nous avons :

$$\lambda|A^{2m} \Rightarrow \lambda|A^m \quad \text{comme } \lambda \text{ est premier alors } \lambda|A \quad (76)$$

De (75), comme  $\lambda|p''$ , nous avons :

$$\lambda|B^n C^l \Rightarrow \lambda|B^n \quad \text{or } \lambda|C^l \quad (77)$$

Si  $\lambda|B^n$ ,  $\lambda$  est premier  $\lambda|B$ , et comme  $C^l = A^m + B^n$  alors nous avons aussi :

$$\lambda|C^l \quad \text{comme } \lambda \text{ est premier, alors } \lambda|C \quad (78)$$

De la même manière si  $\lambda|C^l$ , nous obtenons  $\lambda|B$ .

Alors :  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun.

Vérifions la condition (66) donnée par :

$$b < 4a < 3b$$

Dans notre cas, la dernière équation devient :

$$p < 3A^{2m} < 3p \quad \text{avec } p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n \quad (79)$$

et  $3A^{2m} < 3p \Rightarrow A^{2m} < p$  est vérifié.

Si :

$$p < 3A^{2m} \Rightarrow 2A^{2m} - A^m B^n - B^{2n} > 0$$

nous posons  $Q(Y) = 2Y^2 - B^n Y - B^{2n}$ , les racines de  $Q(Y) = 0$  sont  $Y_1 = -\frac{B^n}{2}$  et  $Y_2 = B^n$ .  $Q(Y) > 0$  pour  $Y < Y_1$  et  $Y > Y_2 = B^n$ . Dans notre cas, nous prenons  $Y = A^m$ . Comme  $A^m > B^n$  alors  $p < 3A^{2m}$  est vérifié. Alors la condition  $b < 4a < 3b$  est vraie.

Dans la suite du papier, nous vérifions facilement que la condition  $b < 4a < 3b$  implique à vérifier  $A^m > B^n$  ce qu'est vrai.

**3.2.1.4. Cas  $b = 3$  et  $3|p$  :** comme  $3|p \Rightarrow p = 3p'$ , nous écrivons :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \frac{a}{b} = \frac{4 \times 3p' a}{3 \times 3} = \frac{4p' a}{3} \quad (80)$$

Comme  $A^{2m}$  est un entier et que  $a$  et  $b$  sont copremiers et  $\cos^2 \frac{\theta}{3}$  ne peut pas prendre la valeur 1 en référence à l'équation (35), alors nous avons nécessairement  $3|p' \Rightarrow p' = 3p''$  avec  $p'' \neq 1$ , si non  $p = 3p' = 3 \times 3p'' = 9$  mais  $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n > 9$ , l'hypothèse  $p'' = 1$  est impossible, alors  $p'' > 1$ . D'où :

$$A^{2m} = \frac{4p' a}{3} = \frac{4 \times 3p'' a}{3} = 4p'' a \quad (81)$$

$$B^n C^l = \frac{p}{3} \left( 3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = p' \left( 3 - 4 \frac{a}{b} \right) = \frac{3p'' (9 - 4a)}{3} = p'' \cdot (9 - 4a) \quad (82)$$

Comme  $\frac{1}{4} < \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{3} < \frac{3}{4} \implies 3 < 4a < 9 \implies a = 2$  comme  $a > 1$ .  
 $a = 2$ , nous obtenons :

$$A^{2m} = \frac{4p'a}{3} = \frac{4 \times 3p''a}{3} = 4p''a = 8p'' \quad (83)$$

$$B^n C^l = \frac{p}{3} \left( 3 - 4\cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = p' \left( 3 - 4\frac{a}{b} \right) = \frac{3p''(9 - 4a)}{3} = p'' \quad (84)$$

Les 2 dernières équations impliquent que  $p''$  n'est pas premier. Alors nous utilisons le même raisonnement décrit ci-dessus pour le cas **3.2.1.3.**, et nous avons :  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun.

**3.2.1.5. Cas  $3|p$  et  $b = p$  :** nous avons :

$$\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{p}$$

et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{a}{p} = \frac{4a}{3} \quad (85)$$

Comme  $A^{2m}$  est un entier, ce-ci implique que  $3|a$ , mais  $3|p \implies 3|b$ . Comme  $a$  et  $b$  sont copremiers, d'où la contradiction. Alors le cas  $3|p$  et  $b = p$  est impossible.

**3.2.1.6. Cas  $3|p$  et  $b = 4p$  :**  $3|p \implies p = 3p', p' \neq 1$  car  $3 \ll p$ , par suite  $b = 4p = 12p'$ .

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \frac{a}{b} = \frac{a}{3} \implies 3|a \quad (86)$$

car  $A^{2m}$  est un entier. Mais  $3|p \implies 3|[(4p) = b]$ , ce qui en contradiction avec l'hypothèse  $a, b$  copremiers. Alors le cas  $b = 4p$  est impossible.

**3.2.1.7. Cas  $3|p$  et  $b = 2p$  :**  $3|p \implies p = 3p', p' \neq 1$  car  $3 \ll p$ , d'où  $b = 2p = 6p'$ .

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \frac{a}{b} = \frac{2a}{3} \implies 3|a \quad (87)$$

car  $A^{2m}$  est un entier, mais  $3|p \implies 3|(2p) \implies 3|b$ , ce qui en contradiction avec l'hypothèse  $a, b$  sont copremiers. Alors le cas  $b = 2p$  est impossible.

**3.2.1.8. Cas  $3|p$  et  $b \neq 3$  est un diviseur de  $p$  :** Nous avons  $b = p' \neq 3$ , et  $p$  s'écrit :

$$p = kp' \quad \text{avec} \quad 3|k \implies k = 3k' \quad (88)$$

et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{4 \times 3.k'p' a}{3 p'} = 4ak' \quad (89)$$

Calculons  $B^n C^l$  :

$$B^n C^l = \frac{p}{3} \cdot \left( 3 - 4\cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = k'(3p' - 4a) \quad (90)$$

1<sup>er</sup> sous-cas :  $k' \neq 1$ , nous utilisons le même raisonnement décrit pour le cas **3.1.2.3.**, et nous obtenons :  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun.

2<sup>ème</sup> sous-cas :

$$k' = 1 \implies p = 3b \quad (91)$$

Alors nous avons :

$$A^{2m} = 4a \implies a \text{ is even} \quad (92)$$

et :

$$A^m B^n = 2\sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\theta}{3} \cdot \sqrt[3]{\rho} \left( \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} - \cos \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} - 2a \quad (93)$$

soit :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = 2b\sqrt{3} \sin \frac{2\theta}{3} \quad (94)$$

Le membre à gauche de (94) est un entier et  $b$  aussi, alors  $2\sqrt{3} \sin \frac{2\theta}{3}$  peut être écrit sous la forme :

$$2\sqrt{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \quad (95)$$

où  $k_1, k_2$  sont deux entiers copremiers et  $k_2|b \implies b = k_2.k_3$ .

◇ - Nous supposons  $k_3 \neq 1$ , alors :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_3.k_1 \quad (96)$$

Soit  $\mu$  un entier premier tel que  $\mu|k_3$ . Si  $\mu = 2 \implies 2|b$  mais  $2|a$  ce-ci est en contradiction avec  $a, b$  copremiers. Nous supposons donc  $\mu \neq 2$  et  $\mu|k_3$ , alors  $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \implies \mu|A^m$  ou  $\mu|(A^m + 2B^n)$ .

\*A-1- Si  $\mu|A^m \implies \mu|A^{2m} \implies \mu|4a \implies \mu|a$ . Comme  $\mu|k_3 \implies \mu|b$  et que  $a, b$  sont copremiers d'où la contradiction.

\*A-2- Si  $\mu|(A^m + 2B^n) \implies \mu \nmid A^m$  et  $\mu \nmid 2B^n$  alors  $\mu \neq 2$  et  $\mu \nmid B^n$ .  $\mu|(A^m + 2B^n)$ , nous pouvons écrire :

$$A^m + 2B^n = \mu.t' \quad t' \in \mathbb{N}^* \quad (97)$$

Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \implies A^{2m} + B^{2n} + 2A^m B^n = \mu^2 t'^2 - 2t' \mu B^n + B^{2n}$$

En utilisant l'expression de  $p$ , nous obtenons :

$$p = t'^2 \mu^2 - 2t' B^n \mu + B^n (B^n - A^m) \quad (98)$$

Comme  $p = 3b = 3k_2.k_3$  et  $\mu|k_3$  d'où  $\mu|p \implies p = \mu\mu'$ , alors nous avons :

$$\mu'\mu = \mu(\mu t'^2 - 2t'B^n) + B^n(B^n - A^m) \quad (99)$$

et  $\mu|B^n(B^n - A^m) \implies \mu|B^n$  ou  $\mu|(B^n - A^m)$ .

\*A-2-1- Si  $\mu|B^n \implies \mu|B$  ce qui est en contradiction avec \*A-2.

\*A-2-2- Si  $\mu|(B^n - A^m)$  et utilisant  $\mu|(A^m + 2B^n)$ , nous obtenons :

$$\mu|3B^n \implies \begin{cases} \mu|B^n \implies \mu|B \text{ ce qui est impossible} \\ \text{ou} \\ \mu = 3 \end{cases} \quad (100)$$

\*A-2-2-1- Si  $\mu = 3 \implies 3|k_3 \implies k_3 = 3k'_3$ , et nous avons  $b = k_2k_3 = 3k_2k'_3$ , il s'ensuit  $p = 3b = 9k_2k'_3$  alors  $9|p$ , mais  $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$  alors :

$$9k_2k'_3 - 3A^mB^n = (A^m - B^n)^2$$

que nous écrivons :

$$3(3k_2k'_3 - A^mB^n) = (A^m - B^n)^2 \quad (101)$$

d'où  $3|(3k_2k'_3 - A^mB^n) \implies 3|A^mB^n \implies 3|A^m$  ou  $3|B^n$ .

\*A-2-2-1-1- Si  $3|A^m \implies 3|A$  et nous avons aussi  $3|A^{2m}$ , mais  $A^{2m} = 4a \implies 3|4a \implies 3|a$ . Comme  $b = 3k_2k'_3$  alors  $3|b$ , mais  $a, b$  sont copremiers d'où la contradiction. Alors  $3 \nmid A$ .

\*A-2-2-1-2- Si  $3|B^n \implies 3|B$ , or l'équation (101) implique  $3|(A^m - B^n)^2 \implies 3|(A^m - B^n) \implies 3|A^m \implies 3|A$ . Mais en utilisant le résultat du dernier paragraphe \*A-2-2-1-1, nous obtenons  $3 \nmid A$ . Alors l'hypothèse  $k_3 \neq 1$  est impossible.

◇- Maintenant, nous supposons que  $k_3 = 1 \implies b = k_2$  et  $p = 3b = 3k_2$ . nous avons alors :

$$2\sqrt{3}\sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{b} \quad (102)$$

avec  $k_1, b$  copremiers, nous écrivons (102) comme :

$$4\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3} = \frac{k_1}{b}$$

Prenons le carré des deux membres et en remplaçant  $\cos^2\frac{\theta}{3}$  par  $\frac{a}{b}$ , nous obtenons :

$$3 \times 4^2.a(b - a) = k_1^2 \quad (103)$$

ce qui implique que :

$$3|a \quad \text{ou} \quad 3|(b - a)$$

\*B-1- Si  $3|a$ , comme  $A^{2m} = 4a \implies 3|A^{2m} \implies 3|A$ , mais  $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^m B^n$  et que  $3|p \implies 3|(A^m - B^n)^2 \implies 3|(A^m - B^n)$ . Or  $3|A$  d'où  $3|B^n \implies 3|B$ , il s'ensuit  $3|C^l \implies 3|C$ .

nous obtenons :  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun.

\*B-2- Considérons maintenant que  $3|(b - a)$ . Comme  $k_1 = A^m(A^m + 2B^n)$  d'après l'équation (96) et que  $3|k_1 \implies 3|A^m(A^m + 2B^n) \implies 3|A^m$  ou  $3|(A^m + 2B^n)$ .

\*B-2-1- Si  $3|A^m \implies 3|A \implies 3|A^{2m}$  alors  $3|4a \implies 3|a$ , mais  $3|(b - a) \implies 3|b$  d'où la contradiction avec  $a, b$  copremiers.

\*B-2-2- Si :

$$3|(A^m + 2B^n) \implies 3|(A^m - B^n) \quad (104)$$

mais  $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n = (A^m - B^n)^2 + 3A^m B^n$  alors  $p - 3A^m B^n = (A^m - B^n)^2 \implies 9|(p - 3A^m B^n)$  ou  $9|(3b - 3A^m B^n)$ , d'où  $3|(b - A^m B^n)$  mais  $3|(b - a) \implies 3|(a - A^m B^n)$ . Comme  $A^{2m} = 4a = (A^m)^2 \implies \exists a' \in \mathbb{N}^*$  et  $a = a'^2 \implies A^m = 2a'$ . Nous arrivons à  $3|(a'^2 - 2a' B^n) \implies 3|a'(a' - 2B^n)$  :

\*B-2-2-1- Si  $3|a' \implies 3|A^m \implies 3|A$ , mais  $3|(A^m + 2B^n) \implies 3|2B^n \implies 3|B^n \implies 3|B$ , par suite  $3|C$ .

D'où  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun.

\*B-2-2-2- Maintenant si  $3|(a' - 2B^n) \implies 3|(2a' - 4B^n) \implies 3|(A^m - 4B^n) \implies 3|(A^m - B^n)$ , nous retrouvons l'hypothèse de départ (104) ci-dessus.

L'étude du cas 3.2.1.8. est achevée.

### 3.2.2 Hypothèse : $\{3|a \text{ et } b|4p\}$

Nous avons donc :

$$3|a \implies \exists a' \in \mathbb{N}^* / a = 3a' \quad (105)$$

**3.2.2.1. Cas  $b = 2$  et  $3|a$  :**  $A^{2m}$  s'écrit :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{2 \cdot p \cdot a}{3} \quad (106)$$

En utilisant l'équation (105),  $A^{2m}$  devient :

$$A^{2m} = \frac{2 \cdot p \cdot 3a'}{3} = 2 \cdot p \cdot a' \quad (107)$$

mais  $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{2} > 1$  ce qui est impossible, d'où  $b \neq 2$ .

**3.2.2.2. Cas  $b = 4$  et  $3|a$  :**  $A^{2m}$  s'écrit :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4.p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{4.p}{3} \cdot \frac{a}{4} = \frac{p.a}{3} = \frac{p.3a'}{3} = p.a' \quad (108)$$

$$\text{et } \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3.a'}{4} < \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} \implies a' < 1 \quad (109)$$

ce qui est impossible.

Alors le cas  $b = 4$  est impossible.

**3.2.2.3. Cas  $b = p$  et  $3|a$  :** Nous avons :

$$\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{p} \quad (110)$$

et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{3a'}{p} = 4a' = (A^m)^2 \quad (111)$$

$$\exists a'' \in \mathbb{N}^* / a' = a''^2 \quad (112)$$

Calculons  $A^m B^n$ , d'où :

$$\begin{aligned} A^m B^n &= p \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} - 2a' \\ \text{ou } A^m B^n + 2a' &= p \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} \end{aligned} \quad (113)$$

Le membre à gauche de (113) est un entier et  $p$  aussi, alors  $2 \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3}$  s'écrit sous la forme :

$$2 \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \quad (114)$$

où  $k_1, k_2$  sont deux entiers copremiers et  $k_2|p \implies p = b = k_2.k_3, k_3 \in \mathbb{N}^*$ .

◇ - Nous supposons que  $k_3 \neq 1$ , nous obtenons :

$$A^m(A^m + 2B^n) = k_1.k_3 \quad (115)$$

Soit  $\mu$  un entier premier avec  $\mu|k_3$ , alors  $\mu|b$  et  $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \implies \mu|A^m$  ou  $\mu|(A^m + 2B^n)$ .

\* Si  $\mu|A^m \implies \mu|A$  et  $\mu|A^{2m}$ , mais  $A^{2m} = 4a' \implies \mu|4a' \implies (\mu = 2 \text{ mais } 2|a') \text{ ou } (\mu|a')$ . Alors  $\mu|a$  d'où la contradiction avec  $a, b$  copremiers.

\* Si  $\mu|(A^m + 2B^n) \implies \mu \nmid A^m$  et  $\mu \nmid 2B^n$  alors  $\mu \neq 2$  et  $\mu \nmid B^n$ . Nous écrivons  $\mu|(A^m + 2B^n)$  comme :

$$A^m + 2B^n = \mu \cdot t' \quad t' \in \mathbb{N}^* \quad (116)$$

Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \implies A^{2m} + B^{2n} + 2A^m B^n = \mu^2 t'^2 - 2t' \mu B^n + B^{2n}$$

En utilisant l'expression de  $p$  :

$$p = t'^2 \mu^2 - 2t' B^n \mu + B^n (B^n - A^m) \quad (117)$$

Comme  $p = b = k_2 \cdot k_3$  et  $\mu|k_3$  alors  $\mu|b \implies \exists \mu' \in \mathbb{N}^*$  et  $b = \mu \mu'$ , ainsi nous pouvons écrire :

$$\mu' \mu = \mu(\mu t'^2 - 2t' B^n) + B^n (B^n - A^m) \quad (118)$$

De la dernière équation, nous obtenons  $\mu|B^n(B^n - A^m) \implies \mu|B^n$  ou  $\mu|(B^n - A^m)$ . Si  $\mu|B^n$  ce qui est en contradiction avec  $\mu \nmid B^n$ . Si  $\mu|(B^n - A^m)$  et utilisant  $\mu|(A^m + 2B^n)$ , nous arrivons à :

$$\mu|3B^n \implies \begin{cases} \mu|B^n \implies & \text{ce qui est en contradiction} \\ \text{ou} \\ \mu = 3 \end{cases} \quad (119)$$

Si  $\mu = 3$ , alors  $3|b$ , mais  $3|a$  alors la contradiction avec  $a, b$  coprimiers.

◇ - Nous assumons maintenant  $k_3 = 1$ , alors :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_1 \quad (120)$$

$$b = k_2 \quad (121)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{b} \quad (122)$$

Prenons le carré de la dernière équation, nous obtenons :

$$\frac{4}{3} \sin^2 \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1^2}{b^2}$$

$$\frac{16}{3} \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{k_1^2}{b^2}$$

$$\frac{16}{3} \sin^2 \frac{\theta}{3} \cdot \frac{3a'}{b} = \frac{k_1^2}{b^2}$$

Finalement :

$$4^2 a' (p - a) = k_1^2 \quad (123)$$

mais  $a' = a'^2$  alors  $p - a$  est un carré. Soit :

$$\lambda^2 = p - a \quad (124)$$

L'équation (155) devient :

$$4^2 a''^2 \lambda^2 = k_1^2 \implies k_1 = 4a'' \lambda \quad (125)$$

en prenant la racine carrée positive. En utilisant l'équation (152), nous obtenons :

$$k_1 = 4a'' \lambda \quad (126)$$

mais  $k_1 = A^m(A^m + 2B^n) = 2a''(A^m + 2B^n)$ , par suite :

$$A^m + 2B^n = 2\lambda \quad (127)$$

Soit  $\lambda_1$  un entier premier  $\neq 2$ , un diviseur de  $\lambda$  (si non  $\lambda_1 = 2|\lambda \implies 2|\lambda^2 \implies 2|(p-a)$  mais  $a$  is pair, then  $2|p \implies 2|b$  ce qui en contradiction avec  $a, b$  copremiers).

Nous considérons  $\lambda_1 \neq 2$  et :

$$\lambda_1|\lambda \implies \lambda_1|\lambda^2 \quad \text{et} \quad \lambda_1|(A^m + 2B^n) \quad (128)$$

$$\lambda_1|(A^m + 2B^n) \implies \lambda_1 \nmid A^m \quad \text{si non} \quad \lambda_1|2B^n \quad (129)$$

mais  $\lambda_1 \neq 2$  hence  $\lambda_1|B^n \implies \lambda_1|B$ , il s'ensuit :

$$\lambda_1|(p=b) \quad \text{et} \quad \lambda_1|A^m \implies \lambda_1|2a'' \implies \lambda_1|a \quad (130)$$

d'où la contradiction avec  $a, b$  copremiers.

Nous assumons maintenant  $\lambda_1 \nmid A^m$ .  $\lambda_1|(A^m + 2B^n) \implies \lambda_1|(A^m + 2B^n)^2$  c'est-à-dire  $\lambda_1|(A^{2m} + 4A^m B^n + 4B^{2n})$  que nous écrivons comme  $\lambda_1|(p + 3A^m B^n + 3B^{2n}) \implies \lambda_1|(p + 3B^n(A^m + 2B^n) - 3B^{2n})$ . Mais  $\lambda_1|(A^m + 2B^n) \implies \lambda_1|(p - 3B^{2n})$ , comme  $\lambda_1|(p-a)$  d'où par différence, nous obtenons  $\lambda_1|(a - 3B^{2n})$  ou  $\lambda_1|(3a' - 3B^{2n}) \implies \lambda_1|3(a' - B^{2n}) \implies \lambda_1 = 3$  ou  $\lambda_1|(a' - B^{2n})$ .

\*A-1- Si  $\lambda_1 = 3$  mais  $3|a \implies 3|(p=b)$  d'où la contradiction avec  $a, b$  copremiers.

\*A-2- Si  $\lambda_1|(a' - B^{2n}) \implies \lambda_1|(a''^2 - B^{2n}) \implies \lambda_1|(a'' - B^n)(a'' + B^n) \implies \lambda_1|(a'' + B^n)$  ou  $\lambda_1|(a'' - B^n)$ , car  $(a'' - B^n) \neq 1$  si non nous obtenons  $a''^2 - B^{2n} = a'' + B^n \implies a''^2 - a'' = B^n - B^{2n}$ . Le membre à gauche est positif et celui à droite est négatif, d'où la contradiction.

\*A-2-1- Si  $\lambda_1|(a'' - B^n) \implies \lambda_1|2(a'' - B^n) \implies \lambda_1|(A^m - 2B^n)$  mais  $\lambda_1|(A^m + 2B^n)$  d'où  $\lambda_1|2A^m \implies \lambda_1|A^m$ ,  $\lambda_1 \neq 2$ , il s'ensuit  $\lambda_1|A^m$  par suite la contradiction avec (161).

\*A-2-2- Si  $\lambda_1|(a'' + B^n) \implies \lambda_1|2(a'' + B^n) \iff \lambda_1|(A^m + 2B^n)$ . Nous retrouvons la condition (160).

Alors le cas  $k_3 = 1$  est impossible.

**3.2.2.4. Cas**  $b|p \Rightarrow p = b.p', p' > 1, b \neq 2, b \neq 4$  et  $3|a$  :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{4.b.p'.3.a'}{3.b} = 4.p'a' \quad (131)$$

Calculons  $B^n C^l$  :

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left( 3 \sin^2 \frac{\theta}{3} - \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \sqrt[3]{\rho^2} \left( 3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) \quad (132)$$

mais  $\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3}$  d'où en utilisant  $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3.a'}{b}$  :

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left( 3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p}{3} \left( 3 - 4 \frac{3.a'}{b} \right) = p \cdot \left( 1 - \frac{4.a'}{b} \right) = p'(b - 4a') \quad (133)$$

Comme  $p = b.p'$ , et  $p' > 1$ , nous avons alors :

$$B^n C^l = p'(b - 4a') \quad (134)$$

$$\text{et } A^{2m} = 4.p'.a' \quad (135)$$

**A** - Soit  $\lambda$  un diviseur premier de  $p'$  (nous supposons  $p'$  non premier). De l'équation (135), nous avons :

$$\lambda|A^{2m} \Rightarrow \lambda|A^m \quad \text{comme } \lambda \text{ est premier, alors } \lambda|A \quad (136)$$

De l'équation (134), comme  $\lambda|p'$  nous avons :

$$\lambda|B^n C^l \Rightarrow \lambda|B^n \quad \text{ou } \lambda|C^l \quad (137)$$

Si  $\lambda|B^n$ ,  $\lambda$  est premier  $\lambda|B$ , mais  $C^l = A^m + B^n$ , alors nous avons aussi :

$$\lambda|C^l \quad \text{comme } \lambda \text{ est premier, alors } \lambda|C \quad (138)$$

Par le même raisonnement, si  $\lambda|C^l$ , nous obtenons  $\lambda|B$ . Alors :  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun.

**B** - nous supposons maintenant que  $p'$  est premier, des équations (134) et (135), nous obtenons alors :

$$p'|A^{2m} \Rightarrow p'|A^m \Rightarrow p'|A \quad (139)$$

et :

$$p'|B^n C^l \Rightarrow p'|B^n \quad \text{ou } p'|C^l \quad (140)$$

$$\text{Si } p'|B^n \Rightarrow p'|B \quad (141)$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } C^l = A^m + B^n \quad \text{et que } p'|A, p'|B \Rightarrow p'|A^m, p'|B^n \Rightarrow p'|C^l \\ \Rightarrow p'|C \end{aligned} \quad (142)$$

Par le même raisonnement, si  $p'|C^l$ , nous arrivons à  $p'|B$ .

Alors :  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun.

**3.2.2.5. Cas  $b = 2p$  et  $3|a$  :** nous avons :

$$\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{2p} \implies A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{3a'}{2p} = 2a' \implies 2|A^m \implies 2|a \implies 2|a'$$

Alors  $2|a$  et  $2|b$  ce qui est en contradiction avec  $a, b$  copremiers.

**3.2.2.6. Cas  $b = 4p$  et  $3|a$  :** nous avons :

$$\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{4p} \implies A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{3a'}{4p} = a'$$

Calculons  $A^m B^n$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} A^m B^n &= \frac{p\sqrt{3}}{3} \cdot \sin \frac{2\theta}{3} - \frac{2p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{p\sqrt{3}}{3} \cdot \sin \frac{2\theta}{3} - \frac{a'}{2} \implies \\ A^m B^n + \frac{A^{2m}}{2} &= \frac{p\sqrt{3}}{3} \cdot \sin \frac{2\theta}{3} \end{aligned} \quad (143)$$

soit :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} \quad (144)$$

Le membre à gauche de (144) est un entier et  $p$  est un entier, alors  $\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3}$  sera écrit :

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \quad (145)$$

où  $k_1, k_2$  sont deux entiers copremiers et  $k_2|p \implies p = k_2.k_3$ .

◇ - Premièrement, nous supposons que  $k_3 \neq 1$ . D'où :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_3.k_1 \quad (146)$$

Soit  $\mu$  un entier premier et  $\mu|k_3$ , alors  $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \implies \mu|A^m$  ou  $\mu|(A^m + 2B^n)$ .

\* Si  $\mu|A^m \implies \mu|A$ . Comme  $\mu|k_3 \implies \mu|p$  et que  $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n \implies \mu|B^{2n}$  alors  $\mu|B$ , il s'ensuit  $\mu|C^l$ , par suite  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun.

\* Si  $\mu|(A^m + 2B^n) \implies \mu \nmid A^m$  et  $\mu \nmid 2B^n$  alors :

$$\mu \neq 2 \quad \text{et} \quad \mu \nmid B^n \quad (147)$$

$\mu|(A^m + 2B^n)$ , nous écrivons :

$$A^m + 2B^n = \mu.t' \quad t' \in \mathbb{N}^* \quad (148)$$

Alors :

$$\begin{aligned} A^m + B^n = \mu t' - B^n &\implies A^{2m} + B^{2n} + 2A^m B^n = \mu^2 t'^2 - 2t' \mu B^n + B^{2n} \\ &\implies p = t'^2 \mu^2 - 2t' B^n \mu + B^n (B^n - A^m) \end{aligned} \quad (149)$$

Comme  $b = 4p = 4k_2.k_3$  et  $\mu|k_3$  alors  $\mu|b \implies \exists \mu' \in \mathbb{N}^*$  tel que  $b = \mu\mu'$ , nous obtenons :

$$\mu' \mu = \mu(4\mu t'^2 - 8t' B^n) + 4B^n (B^n - A^m) \quad (150)$$

La dernière équation implique  $\mu|4B^n(B^n - A^m)$ , mais  $\mu \neq 2$  alors  $\mu|B^n$  ou  $\mu|(B^n - A^m)$ . Si  $\mu|B^n \implies$  c'est la contradiction avec (147). Si  $\mu|(B^n - A^m)$  et en utilisant  $\mu|(A^m + 2B^n)$ , nous avons :

$$\mu|3B^n \implies \begin{cases} \mu|B^n & \text{c'est contradictoire avec 147} \\ \text{ou} \\ \mu = 3 \end{cases} \quad (151)$$

Si  $\mu = 3$ , alors  $3|b$ , mais  $3|a$  ce qui est en contradiction avec  $a, b$  coprimiers.

◇ - nous assumons maintenant que  $k_3 = 1$ , d'où :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_1 \quad (152)$$

$$p = k_2 \quad (153)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{p} \quad (154)$$

Prenons le carré de la dernière équation, nous obtenons :

$$\frac{4}{3} \sin^2 \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

$$\frac{16}{3} \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

$$\frac{16}{3} \sin^2 \frac{\theta}{3} \cdot \frac{3a'}{b} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

Finalement :

$$a'(4p - 3a') = k_1^2 \quad (155)$$

mais  $a' = a''^2$  alors  $4p - 3a'$  est un carré. Soit :

$$\lambda^2 = 4p - 3a' = 4p - a = b - a \quad (156)$$

L'équation (155) devient :

$$a''^2 \lambda^2 = k_1^2 \implies k_1 = a'' \lambda \quad (157)$$

en prenons la racine carrée positive. Utilisant (152), nous obtenons :

$$k_1 = a'' \lambda \quad (158)$$

mais  $k_1 = A^m(A^m + 2B^n) = a''(A^m + 2B^n)$ , par suite :

$$(A^m + 2B^n) = \lambda \quad (159)$$

Soit  $\lambda_1$  un entier premier  $\neq 2$  un diviseur de  $\lambda$  (si non  $\lambda_1 = 2|\lambda \implies 2|\lambda^2$ . Comme  $2|(b = 4p) \implies 2|(a = 3a')$  ce qui en contradiction avec  $a, b$  copremiers).

Nous considérons donc  $\lambda_1 \neq 2$  et :

$$\lambda_1|\lambda \implies \lambda_1|(A^m + 2B^n) \quad (160)$$

$$\implies \lambda_1 \nmid A^m \quad \text{si non} \quad \lambda_1|2B^n \quad (161)$$

mais  $\lambda_1 \neq 2$  d'où  $\lambda_1|B^n \implies \lambda_1|B$ , par suite :

$$\lambda_1|(b = 4p) \quad \text{et} \quad \lambda_1|A^m \implies \lambda_1|2a'' \implies \lambda_1|a \quad (162)$$

d'où la contradiction avec  $a, b$  copremiers.

Nous assumons maintenant que  $\lambda_1 \nmid A^m$ .  $\lambda_1|(A^m + 2B^n) \implies \lambda_1|(A^m + 2B^n)^2$  c'est-à-dire  $\lambda_1|(A^{2m} + 4A^mB^n + 4B^{2n})$ , nous écrivons cela comme  $\lambda_1|(p + 3A^mB^n + 3B^{2n}) \implies \lambda_1|(p + 3B^n(A^m + 2B^n) - 3B^{2n})$ . Mais  $\lambda_1|(A^m + 2B^n) \implies \lambda_1|(p - 3B^{2n})$ , Comme  $\lambda_1|(4p - a)$  d'où par différence, nous obtenons  $\lambda_1|(a - 3(B^{2n} + p))$  ou  $\lambda_1|(3a' - 3(B^{2n} + p)) \implies \lambda_1|3(a' - B^{2n} - p) \implies \lambda_1 = 3$  ou  $\lambda_1|(a' - (B^{2n} + p))$ .

\*A-1- Si  $\lambda_1 = 3|\lambda \implies 3|\lambda^2 \implies 3|b - a$  mais  $3|a \implies 3|(p = b)$  par suite la contradiction avec  $a, b$  copremiers.

\*A-2- Si  $\lambda_1 \neq 3$  et  $\lambda_1|(a' - B^{2n} - p) \implies \lambda_1|(A^mB^n + B^{2n}) \implies \lambda_1|B^n(A^m + 2B^n) \implies \lambda_1|B^n$  ou  $\lambda_1|(A^m + 2B^n)$ . Le cas  $\lambda_1|B^n$  a été étudié ci-dessus.

\*A-2-1- Si  $\lambda_1|(A^m + 2B^n)$ , nous retrouvons la condition (160).

Alors le cas  $k_3 = 1$  est impossible.

**3.2.2.7. Cas  $3|a$  et  $b = 2p'$   $b \neq 2$  avec  $p'|p$  :**  $3|a \implies a = 3a'$ ,  $b = 2p'$  avec  $p = k.p'$ , d'où :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{4.k.p'.3.a'}{6p'} = 2.k.a' \quad (163)$$

Calculons  $B^n C^l$  :

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left( 3\sin^2 \frac{\theta}{3} - \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \sqrt[3]{\rho^2} \left( 3 - 4\cos^2 \frac{\theta}{3} \right) \quad (164)$$

mais  $\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3}$  d'où en utilisant  $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3.a'}{b}$  :

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left( 3 - 4\cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p}{3} \left( 3 - 4\frac{3.a'}{b} \right) = p \cdot \left( 1 - \frac{4.a'}{b} \right) = k(p' - 2a') \quad (165)$$

comme  $p = b.p'$ , et  $p' > 1$ , nous avons alors :

$$B^n C^l = k(p' - 2a') \quad (166)$$

$$\text{et } A^{2m} = 2k.a' \quad (167)$$

**A** - Soit  $\lambda$  un entier premier diviseur de  $k$  (nous supposons  $k$  non premier). De (167), nous avons :

$$\lambda|A^{2m} \Rightarrow \lambda|A^m \quad \text{comme } \lambda \text{ est premier alors } \lambda|A \quad (168)$$

De l'équation (166), comme  $\lambda|k$ , nous avons :

$$\lambda|B^n C^l \Rightarrow \lambda|B^n \quad \text{ou } \lambda|C^l \quad (169)$$

Si  $\lambda|B^n$ ,  $\lambda$  est premier  $\lambda|B$ , et comme  $C^l = A^m + B^n$  alors nous avons aussi :

$$\lambda|C^l \quad \text{comme } \lambda \text{ est premier alors } \lambda|C \quad (170)$$

Par le même raisonnement si  $\lambda|C^l$ , nous obtenons  $\lambda|B$ . Alors :  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun.

**B** - nous supposons maintenant que  $k$  est premier, des équations (166) et (167), nous obtenons :

$$k|A^{2m} \Rightarrow k|A^m \Rightarrow k|A \quad (171)$$

et :

$$k|B^n C^l \Rightarrow k|B^n \quad \text{ou } k|C^l \quad (172)$$

$$\text{si } k|B^n \Rightarrow k|B \quad (173)$$

$$\begin{aligned} \text{comme } C^l = A^m + B^n \quad \text{et que } k|A, k|B \Rightarrow k|A^m, k|B^n \Rightarrow k|C^l \\ \Rightarrow k|C \end{aligned} \quad (174)$$

Par le même raisonnement si  $k|C^l$ , nous arrivons à  $k|B$ .

D'où :  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun.

**3.2.2.8. Cas 3|a et  $b = 4p'$   $b \neq 2$  avec  $p'|p$  :**  $3|a \Rightarrow a = 3a'$ ,  $b = 4p'$  avec  $p = k.p'$ ,  $k \neq 1$  si non  $b = 4p$  ce cas a été étudié (voir paragraphe **3.2.2.6**), alors nous avons :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{4.k.p'.3.a'}{12p'} = k.a' \quad (175)$$

Calculons  $B^n C^l$  :

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left( 3 \sin^2 \frac{\theta}{3} - \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \sqrt[3]{\rho^2} \left( 3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) \quad (176)$$

mais  $\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3}$ , d'où en utilisant  $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3.a'}{b}$  :

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left( 3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p}{3} \left( 3 - 4 \frac{3.a'}{b} \right) = p \cdot \left( 1 - \frac{4.a'}{b} \right) = k(p' - a') \quad (177)$$

comme  $p = b.p'$ , et  $p' > 1$ , nous avons :

$$B^n C^l = k(p' - 2a') \quad (178)$$

$$\text{et } A^{2m} = 2k.a' \quad (179)$$

**A** - Soit  $\lambda$  un diviseur premier de  $k$  (nous supposons  $k$  non premier). De (179), nous avons :

$$\lambda | A^{2m} \Rightarrow \lambda | A^m \quad \text{comme } \lambda \text{ est premier, alors } \lambda | A \quad (180)$$

De (178), comme  $\lambda | k$  nous obtenons :

$$\lambda | B^n C^l \Rightarrow \lambda | B^n \quad \text{ou } \lambda | C^l \quad (181)$$

Si  $\lambda | B^n$ ,  $\lambda$  est premier  $\lambda | B$ , et comme  $C^l = A^m + B^n$ , alors nous avons :

$$\lambda | C^l \quad \text{comme } \lambda \text{ est premier, alors } \lambda | C \quad (182)$$

Par le même raisonnement si  $\lambda | C^l$ , nous obtenons  $\lambda | B$ . Alors :  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun.

**B** - nous supposons que  $k$  is premier, des équations (178) et (179), nous avons :

$$k | A^{2m} \Rightarrow k | A^m \Rightarrow k | A \quad (183)$$

et :

$$k | B^n C^l \Rightarrow k | B^n \quad \text{ou } k | C^l \quad (184)$$

$$\text{si } k | B^n \Rightarrow k | B \quad (185)$$

$$\begin{aligned} \text{comme } C^l = A^m + B^n \quad \text{et que } k | A, k | B \Rightarrow k | A^m, k | B^n \Rightarrow k | C^l \\ \Rightarrow k | C \end{aligned} \quad (186)$$

Par le même raisonnement si  $k | C^l$ , nous arrivons à  $k | B$ .

D'où :  $A, B$  et  $C$  solutions de (3) ont un facteur commun.  $\square$

**Le Principal Théorème est démontré.**

## 4 Un Exemple Numérique

Nous considérons l'exemple suivant :

$$6^3 + 3^3 = 3^5 \quad (187)$$

avec  $A^m = 6^3$ ,  $B^n = 3^3$  et  $C^l = 3^5$ . Avec les notations utilisées, nous obtenons :

$$p = 3^6 \times 73, \quad (188)$$

$$q = 8 \times 3^{11}, \quad (189)$$

$$\bar{\Delta} = 4 \times 3^{11}(3^6 \times 4^2 - 73^3) < 0, \quad (190)$$

$$\rho = \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}} = \frac{3^8 \times 73\sqrt{73}}{3}, \quad (191)$$

$$\cos\theta = -\frac{4 \times 3^3 \times \sqrt{3}}{73\sqrt{73}} \quad (192)$$

Comme  $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} \implies \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3A^{2m}}{4p} = \frac{3 \times 2^4}{73} = \frac{a}{b} \implies a = 3 \times 2^4, b = 73$  ;  
alors :

$$\cos \frac{\theta}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{73}} \quad (193)$$

$$p = 3^6 b \quad (194)$$

Vérifions alors l'équation (192) utilisant l'équation (193) :

$$\cos\theta = \cos 3(\theta/3) = 4\cos^3 \frac{\theta}{3} - 3\cos \frac{\theta}{3} = 4 \left( \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{73}} \right)^3 - 3 \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{73}} = -\frac{4 \times 3^3 \times \sqrt{3}}{73\sqrt{73}} \quad (195)$$

Ce qui est exact. Pour cet exemple, nous pouvons utiliser les deux conditions de (65) comme  $3|p, b|4p$  et  $3|a$ . Les cas **3.2.1.3** et **3.2.2.4** sont respectivement utilisés. Nous trouvons pour les deux cas que  $A^m, B^n$  et  $C^l$  de l'équation (187) ont un facteur commun ce qui est vrai.

## Références

- [1] R. DANIEL MAULDIN. *A Generalization of Fermat's Last Theorem : The Beal Conjecture et Prize Problem*. Notice of AMS, Vol 44, n°11, 1997, pp 1436-1437.