

A Equação Guedes-Schroedinger: Sobre a Solução Estacionária Oriunda do Oscilador Harmônico Amortecido

EDIGLES GUEDES

12 de novembro de 2017

RESUMO. Derivamos algumas soluções gerais para o estado estacionário, oriundas do oscilador harmônico amortecido, por meio da equação Guedes-Schroedinger.

1. INTRODUÇÃO

O principal objetivo deste artigo é achar novas e distintas soluções gerais para o estado estacionário. Com este intuito em mente, partimos à procura de soluções gerais que satisfaçam a equação diferencial ordinária de segunda ordem:

$$\hbar \frac{d^2 \chi(t')}{dt'^2} + 2imc^2 \frac{d\chi(t')}{dt'} - 2mc^2 \omega \chi(t') = 0, \quad (1.1)$$

a qual é oriunda da equação Guedes-Schroedinger, veja artigos prévios [1] e [2].

Daí, então, usando a similaridade com o oscilador harmônico amortecido, bastante conhecido na mecânica clássica, derivamos as seguintes soluções gerais:

$$\chi(t') = F e^{(\sqrt{2\hbar\omega mc^2 - m^2 c^4} - imc^2)t'/\hbar}, \quad (1.2)$$

$$\chi(t') = (G + Ht') e^{-\frac{imc^2 t'}{\hbar}} \quad (1.3)$$

e

$$\chi(t') = (J \cos \varpi t' + L \sen \varpi t') e^{-\frac{imc^2 t'}{\hbar}}, \quad (1.4)$$

onde

$$\varpi = \frac{c\sqrt{m(mc^2 - 2\hbar\omega)}}{\hbar}.$$

Algumas observações úteis:

Primeiro, ressaltamos que estas equações não são obrigatoriamente iguais às de mecânica clássica. Antes, a mecânica clássica serviu-nos como ponto de partida para entendermos a mecânica quântica. E, como sempre, a mecânica quântica deve se comportar como uma generalização da mecânica clássica e não o inverso; isto é, haverá casos em que a mecânica quântica destoará da mecânica clássica por ser uma generalização daquela; cabe, então, ao físico impor condições para que a mecânica quântica concorde com a mecânica clássica, em termos de soluções para equação de onda; no entanto, este não foi o nosso alvo; porquanto, o que queríamos são as soluções gerais, a fim de melhor compreendermos o comportamento da partícula.

Segundo, ressaltamos que estas três soluções, distintas entre si, são novas do ponto de vista da mecânica quântica-relativística. Portanto, não são previstas pela equação clássica de Schroedinger dependente do tempo.

Terceiro, ressaltamos que podem existir outras soluções além destas que foram apresentadas neste minúsculo artigo; uma vez que estamos procurando soluções gerais e não soluções aceitáveis ou outra qualquer.

Quarto, ressaltamos que as três soluções gerais (1.2), (1.3) e (1.4), aqui cogitadas, satisfazem a equação diferencial (1.1); por isso, cumprem perfeitamente seus papéis de mostrar uma nova face da mecânica quântica, outrora jamais vista.

2. OS ESTADOS ESTACIONÁRIOS ORIUNDOS DA EQUAÇÃO DE SCHROEDINGER

Nesta seção, derivaremos uma solução estacionária para a equação de Schroedinger dependente do tempo, conforme a mecânica quântica ondulatória aventada no livro-texto [3], o qual é essencial para o entendimento da matéria em questão.

2.1. Separação de variáveis. Estados estacionários.

A função de onda $\Psi(\mathbf{r}, t)$ de uma partícula cuja energia potencial $V(\mathbf{r})$ não é dependente do tempo deve satisfazer a seguinte equação de Schroedinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t'} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.1)$$

2.1.1. A existência de estados estacionários.

Pela técnica de separação de variáveis, deve existir soluções para a equação (2.1) da seguinte forma:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})\chi(t). \quad (2.2)$$

Substituindo o lado direito de (2.2) em (2.1), obtemos

$$i\hbar \varphi(\mathbf{r}) \frac{d\chi(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2 \chi(t)}{2m} \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) + \chi(t) V(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}). \quad (2.3)$$

Divida ambos membros de (2.3) por $\varphi(\mathbf{r})\chi(t)$, e ache

$$\frac{i\hbar}{\chi(t)} \frac{d\chi(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m\varphi(\mathbf{r})} \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}). \quad (2.4)$$

Esta equação equivale a uma função de t somente no lado esquerdo e uma função somente de \mathbf{r} no lado direito. Esta igualdade só é possível se cada uma destas funções forem, de fato, uma constante, que colocaremos para ser igual a $\hbar\omega$, onde ω tem as dimensões de uma frequência angular, \hbar é a constante de Planck reduzida.

Ao colocar o lado esquerdo de (2.4) para ser igual a $\hbar\omega$, achamos para $\chi(t)$, a seguinte equação diferencial

$$\frac{i\hbar}{\chi(t)} \frac{d\chi(t)}{dt} = \hbar\omega \Rightarrow \frac{d\chi(t)}{dt} = -i\omega\chi(t). \quad (2.5)$$

A equação (2.5) pode ser facilmente integrada para dar a solução geral

$$\chi(t) = Ae^{-i\omega t}, \quad (2.6)$$

onde A é uma constante arbitrária.

Seguindo este caminho, $\varphi(\mathbf{r})$ deve satisfazer a equação abaixo:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m\varphi(\mathbf{r})} \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) &= \hbar\omega \\ \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) &= \hbar\omega\varphi(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Se colocarmos $A = 1$ na equação (2.6), (o que é possível se incorporarmos, por exemplo, a constante A em $\varphi(\mathbf{r})$), achamos o seguinte resultado

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \quad (2.8)$$

A função em (2.8) é uma solução da equação de Schroedinger dependente do tempo, sob a condição de que $\varphi(\mathbf{r})$ é uma solução da equação (2.7). Quanto ao tempo e ao espaço, dizemos que foram separados.

Uma função de onda da forma (2.8) é chamada uma *solução estacionária da equação de Schroedinger*. Ela leva-nos para uma densidade de probabilidade independente do tempo: $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = |\varphi(\mathbf{r})|^2$. Numa função estacionária, somente uma frequência ω aparece; de acordo com as relações Planck-Einstein, um estado estacionário é um estado com uma energia bem definida $E = \hbar\omega$ (autoestado de energia). Em mecânica clássica, quando a energia potencial é independente do tempo, a energia total é uma constante de movimento. Em mecânica quântica de Schroedinger, existem estados de energia bem determinados.

Isto tudo que foi dito acima, nesta seção, é o que comumente há nos livros de mecânica ondulatória. Na seção logo, abaixo seguiremos por um caminho muito diferente do que foi percorrido aqui.

3. OS ESTADOS ESTACIONÁRIOS ORIUNDOS DA EQUAÇÃO DE GUEDES-SCHROEDINGER

Nesta seção, derivaremos uma solução estacionária para a equação de Guedes-Schroedinger dependente do tempo, conforme a mecânica quântica-relativística aventada nos artigos [1] e [2], do ponto de vista do observador. Friso que se quiséssemos poderíamos tomar o velho caminho dos estados estacionários e chegar ao resultado: $\Psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, como na Seção anterior; porém, nesta Seção, encontraremos três novas e distintas soluções.

3.1. Separação de variáveis. Estados estacionários.

A função de onda $\Psi(\mathbf{r}', t')$ de uma partícula cuja energia potencial $V(\mathbf{r}')$ não é dependente do tempo deve satisfazer a seguinte equação de Guedes-Schroedinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} \Psi(\mathbf{r}', t') + \frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \Psi(\mathbf{r}', t') = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla'^2 \Psi(\mathbf{r}', t') + V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}', t'). \quad (3.1)$$

3.1.1. A existência de estados estacionários.

Pela técnica de separação de variáveis, deve existir soluções para a equação (3.1) da seguinte forma:

$$\Psi(\mathbf{r}', t') = \varphi(\mathbf{r}') \chi(t'). \quad (3.2)$$

Substituindo o lado direito de (3.2) em (3.1), obtemos

$$i\hbar \varphi(\mathbf{r}') \frac{d\chi(t')}{dt'} + \frac{\hbar^2 \varphi(\mathbf{r}')}{2mc^2} \frac{d^2 \chi(t')}{dt'^2} = -\frac{\hbar^2 \chi(t')}{2m} \nabla'^2 \varphi(\mathbf{r}') + \chi(t') V(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}'). \quad (3.3)$$

Divida ambos membros de (3.3) por $\varphi(\mathbf{r}') \chi(t')$, e ache

$$\frac{i\hbar}{\chi(t')} \frac{d\chi(t')}{dt'} + \frac{\hbar^2}{2mc^2 \chi(t')} \frac{d^2 \chi(t')}{dt'^2} = -\frac{\hbar^2}{2m \varphi(\mathbf{r}')} \nabla'^2 \varphi(\mathbf{r}') + V(\mathbf{r}'). \quad (3.4)$$

Esta equação equivale a uma função de t' somente no lado esquerdo e uma função somente de \mathbf{r}' no lado direito. Esta igualdade só é possível se cada uma destas funções forem, de fato, uma constante, que colocaremos para ser igual a $\hbar\omega$, onde ω tem as dimensões de uma frequência angular e \hbar é a constante de Planck reduzida.

Colocando o lado esquerdo de (3.4) para ser igual a $\hbar\omega$, achamos para $\chi(t')$, a seguinte equação diferencial

$$\frac{\hbar^2}{2mc^2 \chi(t')} \frac{d^2 \chi(t')}{dt'^2} + \frac{i\hbar}{\chi(t')} \frac{d\chi(t')}{dt'} = \hbar\omega. \quad (3.5)$$

Multiplique ambos os membros de (3.5) por $2mc^2 \chi(t') / \hbar$ e rearrange os termos até encontrar

$$\hbar \frac{d^2 \chi(t')}{dt'^2} + 2imc^2 \frac{d\chi(t')}{dt'} - 2mc^2 \omega \chi(t') = 0. \quad (3.6)$$

Obviamente, esta é uma equação de oscilador harmônico amortecido. A técnica usada para resolver equações diferenciais desse tipo é procurar uma solução da forma

$$\chi(t') = A e^{i\omega t'}, \quad (3.7)$$

onde A é uma constante arbitrária.

Note que a equação (3.7) é similar à equação (2.6), exceto pelo sinal da exponencial, que mudou de negativo para positivo, a variável que mudou de t para t' e ω mudou para ω_0 . Trocando em miúdos, se aplicarmos as argumentações da seção anterior, chegaremos, indubitavelmente, ao mesmíssimo resultado. No entanto, não é isto que almejamos. Por isso, doravante, mudaremos as argumentações, com intuito de achar novas soluções para (3.7).

Ao determos nossa atenção em (3.7), perceberemos que a solução acima apresentada é uma função de valores complexos. Logo, as soluções são a parte real ou imaginária de $\chi(t')$, isto é,

$$\chi_1(t') = \text{Re}(\chi(t'))$$

ou

$$\chi_2(t') = \text{Im}(\chi(t')).$$

A bem da verdade, ficaremos com uma superposição das duas opções acima.

Substitua o lado direito de (3.7) no lado esquerdo de (3.6), e ache

$$\begin{aligned} \hbar(-A\omega_0^2 e^{i\omega_0 t'}) + 2imc^2(Ai\omega_0 e^{i\omega_0 t'}) - 2mc^2\omega(Ae^{i\omega_0 t'}) &= 0 \\ \Rightarrow \hbar\omega_0^2 + 2mc^2\omega_0 + 2mc^2\omega &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

cujas soluções são

$$a_{\pm} = \frac{-mc^2 \pm \sqrt{mc^2(mc^2 - 2\hbar\omega)}}{\hbar}.$$

Portanto, a solução geral de (3.6) será dada por

$$\chi(t') = Be^{ia_+t'} + Ce^{ia_-t'}, \quad (3.9)$$

onde $B, C \in \mathbb{C}$.

Vamos recapitular um pouco de mecânica clássica, antes de prosseguirmos. No movimento oscilatório harmônico amortecido, há um efeito de “força restauradora” sobre a partícula, que provoca a oscilação em torno de uma posição de equilíbrio onde ela se anula; a grandeza que a caracteriza, no nosso caso específico, é a constante $-2mc^2\omega$. O efeito da “força de atrito” é provocar uma diminuição do deslocamento da partícula, à medida que passa o tempo; de acordo com as expressões acima, a grandeza que a caracteriza é $2imc^2/\hbar$. Esses dois efeitos combinados causam o movimento real do oscilador. Logo, podemos considerar três casos:

(a) A “força restauradora” é mais importante que a de “atrito”; o oscilador terá o seu movimento oscilatório, mas a “força de atrito” diminui a amplitude desse movimento até a partícula parar na sua posição de equilíbrio. O movimento resultante é chamado de movimento *sub-amortecido* ou *subcrítico*;

(b) A “força de atrito” é mais importante que a “restauradora”; não há movimento periódico e a partícula tende lentamente a parar na sua posição de equilíbrio, sem oscilar. O movimento é dito ser movimento *superamortecido* ou *supercrítico*;

(c) As duas “forças” são comparáveis; aí, ocorre um caso limite entre os anteriores e o movimento é chamado de movimento *amortecido crítico*.

Veja [4, p. 2].

Ao transpormos para a realidade quântica-relativística, podemos supor que esse movimento oscilatório harmônico amortecido, advém de uma força oriunda da energia relativística e de outra força oriunda da energia quântica; estas duas forças interagem com a partícula em questão do sistema estudado, provocando os efeitos abaixo elencados. No caso específico, a “força restauradora” sob os auspícios de $-2mc^2\omega$; e, a “força de atrito”^{3.1} sob os auspícios de $2imc^2/\hbar$.

Analisemos os três casos distintos citados acima em função dos valores relativos a $\hbar\omega$ e mc^2 , não necessariamente na ordem em que foram apresentados:

a) $mc^2 < 2\hbar\omega$ (oriunda do oscilador superamortecido). A solução mais geral será

$$\chi(t') = Fe^{\left(\sqrt{2\hbar\omega mc^2 - m^2c^4} - imc^2\right)t'/\hbar}. \quad (3.10)$$

Pela mecânica quântica de Schroedinger, é pouco provável que encontremos este tipo de oscilador na natureza quântica das partículas; porquanto a energia quântica ($\hbar\omega$) seria maior do que a metade da energia total relativística (mc^2); e até hoje não se tem, na literatura física, a aplicação do oscilador harmônico amortecido nos estados estacionários.

Contudo, em nossa teoria, oriunda da equação Guedes-Schroedinger, abre-se a porta para tal possibilidade, por conta da generalização; embora acreditemos que seja difícil a observação desse comportamento nas partículas da Natureza. Veja logo abaixo a Fig. 3.1.

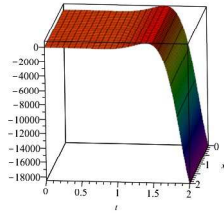


Figura 3.1. Representação gráfica complexa 3D de $\chi(t') = e^{5(1-i)t'}$, com $F = \hbar = c = 1$, $m = \omega = 5$ e t' variando de 0 a 2.

b) $mc^2 = 2\hbar\omega$ (oriunda do oscilador criticamente amortecido ou amortecido crítico). A solução mais geral será [5]

$$\chi(t') = (G + Ht') e^{-\frac{imc^2 t'}{\hbar}}. \quad (3.11)$$

O que há de peculiar nesta solução? A ausência de ω , que tem as dimensões de uma frequência angular; embora possamos interpretar que temos um caso particular em que $\omega = 1$ na exponencial. Por isso, esperamos um comportamento bastante peculiar desta equação, a qual, pelo gráfico da Fig. 3.2, observamos um efeito contrário ao que diz a mecânica clássica do oscilador criticamente amortecido. Em outras palavras, a função de onda não se contrai; mas, na verdade, expande-se com o passar do tempo.

3.1. É óbvio que, ao falarmos do mundo quântico-relativístico, não se trata de atrito propriamente dito, mas de uma força que se contrapõe à força restauradora; por isso, o uso constante das aspas.

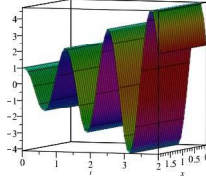


Figura 3.2. Representação gráfica complexa 3D de $\chi(t') = (1+t')e^{-5it'}$, com $G = H = \hbar = c = 1$, $m = 5$ e t' variando de 0 a 2.

c) $mc^2 > 2\hbar\omega$ (oriunda do oscilador sub-amortecido). A solução mais geral será [5]

$$\chi(t') = J e^{-\frac{imc^2 t'}{\hbar}} \cos \varpi t' + L e^{-\frac{imc^2 t'}{\hbar}} \sen \varpi t', \quad (3.12)$$

onde

$$\varpi = \frac{c\sqrt{m(mc^2 - 2\hbar\omega)}}{\hbar}.$$

A energia quântica ($\hbar\omega$) será menor do que a metade da energia relativística (mc^2). Veja Fig. 3.3.

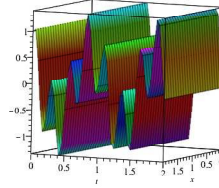


Figura 3.3. Representação gráfica complexa 3D de $\chi(t') = (\cos(5\sqrt{3} t') + \sin(5\sqrt{3} t'))e^{-15it'}$, com $J = L = \hbar = c = 1$, $m = 15$, $\omega = 5$ e t' variando de 0 a 2.

Agora, vamos voltar ao nosso raciocínio inicial.

Seguindo o caminho de colocar $\hbar\omega$ como uma constante no segundo termo da equação (3.4), $\varphi(\mathbf{r}')$ deve satisfazer a equação abaixo:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m\varphi(\mathbf{r}')} \nabla'^2 \varphi(\mathbf{r}') + V(\mathbf{r}') &= \hbar\omega \\ \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla'^2 \varphi(\mathbf{r}') + V(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') &= \hbar\omega \varphi(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Se colocarmos $F = G = H = J = L = 1$ nas equações (3.10), (3.11) e (3.12), (o que é possível se incorporarmos, por exemplo, a constante M em $\varphi(\mathbf{r}')$), achamos três resultados

$$\Psi(\mathbf{r}', t') = \varphi(\mathbf{r}') \left(e^{(\sqrt{2\hbar\omega mc^2 - m^2 c^4} - imc^2)t'/\hbar} \right), \quad (3.14)$$

$$\Psi(\mathbf{r}', t') = \varphi(\mathbf{r}') (1+t') e^{-\frac{imc^2 t'}{\hbar}} \quad (3.15)$$

e

$$\Psi(\mathbf{r}', t') = \varphi(\mathbf{r}') (\cos \varpi t' + \sen \varpi t') e^{-\frac{imc^2 t'}{\hbar}}, \quad (3.16)$$

As funções (3.14), (3.15) e (3.16) são soluções da equação de Guedes-Schroedinger dependente do tempo, sob a condição de que $\varphi(\mathbf{r}')$ é uma solução da equação (3.13). Quanto ao tempo e ao espaço, obviamente, dizemos que foram separados.

As funções de onda da forma (3.14), (3.15) e (3.16) serão chamadas de *soluções estacionárias anômalas da equação de Guedes-Schroedinger*.

4. CONCLUSÃO E OBSERVAÇÕES FINAIS

A teoria da mecânica quântica-relativística desenvolvida nas páginas de [1] e [2], permite-nos estudar os estados estacionários de maneira mais abrangente, muito além da conhecidíssima mecânica quântica de Schroedinger. Em outras palavras, podemos tanto derivar o estado estacionário clássico, previamente cogitado na Seção 2, quanto mudar de rumo e obter outros resultados, veja Seção 3.

Em termos de mecânica clássica, temos as seguintes páginas da *web* [4] e [5]; caso o leitor queira se familiarizar com o oscilador harmônico amortecido.

5. APÊNDICE

O Caso Unidimensional (1D + 1T) e Potencial Nulo

Neste apêndice, vamos aplicar uma dimensão de espaço (x') e uma dimensão de tempo (t') à equação de Guedes-Schroedinger, em que o potencial $V = 0$.

Em (3.13), faça $\mathbf{r}' \rightarrow x'$ e encontre

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x')}{dx'^2} = \hbar\omega\varphi(x').$$

A solução geral da equação acima é

$$\varphi(x') = N \cos\left(x' \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\right) + P \operatorname{sen}\left(x' \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\right). \quad (5.1)$$

Desta solução geral (5.1) juntamente com (3.14), (3.15) e (3.16), e considerando $N = P = 1$, obtemos as seguintes soluções

$$\Psi(x', t') = \left(\cos\left(x' \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\right) + \operatorname{sen}\left(x' \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\right) \right) \left(e^{(\sqrt{2\hbar\omega m c^2 - m^2 c^4} - im c^2)t'/\hbar} \right),$$

$$\Psi(x', t') = \left(\cos\left(x' \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\right) + \operatorname{sen}\left(x' \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\right) \right) (1 + t') e^{-\frac{imc^2 t'}{\hbar}}$$

e

$$\Psi(x', t') = \left(\cos\left(x' \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\right) + \operatorname{sen}\left(x' \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\right) \right) (\cos \pi t' + \operatorname{sen} \pi t') e^{-\frac{imc^2 t'}{\hbar}},$$

onde

$$\varpi = \frac{c\sqrt{m(mc^2 - 2\hbar\omega)}}{\hbar}.$$

Abaixo encontramos as representações gráficas complexas 3D para as três equações acima mencionadas. Veja Figuras 5.1, 5.2 e 5.3.

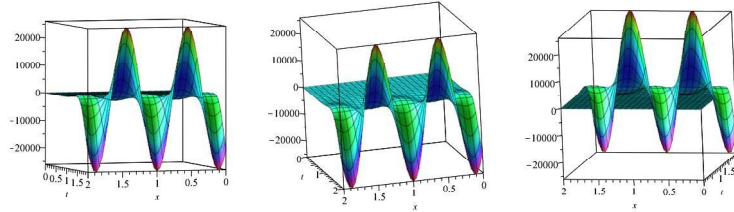


Figura 5.1. Representação gráficas complexas 3D da função de onda $\Psi(x', t') = (\cos(5\sqrt{2}x') + \text{sen}(5\sqrt{2}x'))e^{5(1-i)t'}$, x' variando de 0 a 2 e t' variando de 0 a 2.

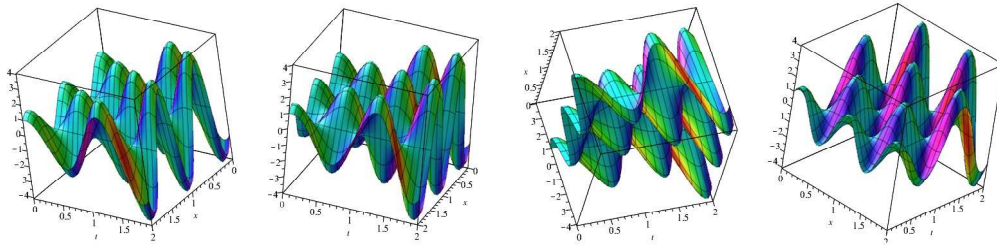


Figura 5.2. Representações gráficas complexas 3D da função de onda $\Psi(x', t') = (\cos(5\sqrt{2}x') + \text{sen}(5\sqrt{2}x'))(1 + t')e^{-5it'}$, x' variando de 0 a 2 e t' variando de 0 a 2.

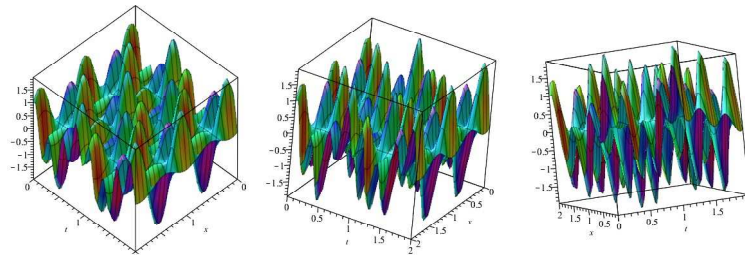


Figura 5.3. Representações gráficas complexas 3D da função de onda $\Psi(x', t') = (\cos(5\sqrt{2}x') + \text{sen}(5\sqrt{2}x'))(\cos(5\sqrt{3}t') + \text{sen}(5\sqrt{3}t'))e^{-15it'}$, x' variando de 0 a 2 e t' variando de 0 a 2.

Referências

- [1] Guedes, Edigles, *Uma Equação Similar à Equação de Schroedinger Para o Átomo com um Elétron, que se Move, do Ponto de Vista de um Observador*, [viXra:1303.0118](https://arxiv.org/abs/1303.0118).

- [2] Guedes, Edigles, *A Equação Guedes-Schroedinger: Uma Teoria Quântica-Relativística Para o Átomo com um Núcleo e um Elétron*, **viXra:1711.0302**, **DOI: 10.13140/RG.2.2.11476.71045**.
- [3] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. e Laloë, F., *Quantum Mechanics*, Vol. 1, First Edition, Wiley, 2005.
- [4] http://www.fisica.ufmg.br/~wag/TRANSF/FMECDIST/U15_A44_Oscilacoes_Amortecimento.pdf.
- [5] http://efisica.if.usp.br/mecanica/universitario/movimento/oscilador_harm_amortecido/.