

Autore: Raffaele Cogoni

Email: raff54cog@libero.it

Crivello di Eratostene Elaborato

Presentazione

Nel presente lavoro viene descritto un algoritmo per determinare la successione dei numeri primi.

Esso si presenta come una rielaborazione del noto Crivello di Eratostene e consiste nella costruzione di una tabella in cui nella prima riga compariranno i numeri primi p_1, p_2, \dots, p_k via via determinati mentre nelle varie colonne compariranno dei multipli successivi di p_1, p_2, \dots, p_k .

Descrizione dell'algoritmo

L'algoritmo per la costruzione della tabella ha inizio come segue:

Primo passo (avvio dell'algoritmo)

- si scrive il primo numero primo (ossia il 2)
- aggiungo il valore 4 (primo numero composto generato da 2) sotto il 2
- si considera il numero naturale compreso fra 2 e 4, ossia il 3
- si osserva che il 3 è primo in quanto non divisibile per 2 e pertanto lo si aggiunge alla prima riga

Passi successivi

Ad ogni passo successivo, si procede come segue:

- 1) Si aggiunge alla prima colonna il multiplo di 2 successivo all'ultimo numero precedentemente inserito.
- 2) Si individua il numero n , compreso fra il penultimo e l'ultimo elemento della prima colonna.
- 3) Indicando con r il numero dei primi successivi a 2 sin qui individuati e con k_i il numero degli elementi già inseriti nella i -sima colonna, si considera per $i=2,3,\dots,r+1$ l'ultimo elemento dell' i -sima colonna.

Se esso è minore di n , si aggiunge all' i -sima colonna il numero $k_i \cdot p_i$, dove p_i è l' i -simo numero primo.

4) Si verifica se n è primo o composto nel seguente modo:

- si considerano l'ultimo il penultimo elemento di ciascuna delle colonne successive alla prima. Se fra questi elementi vi è un numero uguale a n significa che n è composto, altrimenti significa che n è primo.
- Se n è primo lo si aggiunge alla prima riga, dando origine così ad una nuova colonna.

In questo modo al termine del k -simo passo si otterrà una tabella con le seguenti caratteristiche:

- nella prima riga compaiono i numeri primi minori o uguali di $2k+1$:
 p_1, p_2, \dots, p_r
- nella i -sima colonna compaiono dei multipli successivi dell' i -simo numero primo, con $i=1, 2, \dots, r$.

Di seguito viene presentata in dettaglio l'implementazione dei primi cinque passi dell'algoritmo:

Primo passo (avvio dell'algoritmo)

a) scrivo 2:

2

b) inserisco il 4 (primo numero composto generato da 2) sotto il 2:

2

4

c) considero il 3, numero compreso fra il penultimo e l'ultimo numero della prima colonna (ossia compreso fra 2 e 4).

Esso non è divisibile per 2 quindi è primo. Lo aggiungo pertanto alla prima riga:

2 3
4

Secondo passo

a) Nella prima colonna inserisco il 6 (secondo numero composto generato da 2):

2 3
4
6

b) considero il 5, numero compreso fra il penultimo e l'ultimo numero della prima colonna (ossia compreso fra 4 e 6).

Considero le colonne successive alla prima (nel caso in questione quindi devo considerare solo la seconda colonna).

Se l'ultimo elemento di queste colonne è minore di 5, aggiungo un elemento a esse (nel caso in questione pertanto devo aggiungere un elemento alla seconda colonna in quanto il suo ultimo numero è minore di 5):

2 3
4 6
6

c) Verifico se 5 è primo o composto nel seguente modo:

- confronto 5 con l'ultimo e il penultimo elemento delle colonne successive alla prima
- se fra questi elementi trovo il 5, significa che 5 è composto, altrimenti significa che è primo.

Poiché i numeri con cui devo fare il confronto sono 4-6-3-6, non avendo trovato il 5 concludo che 5 è primo.

Poiché 5 è primo, lo aggiungo alla prima riga:

2 3 5
4 6
6

Terzo passo

a) Nella prima colonna inserisco l'8 (terzo numero composto generato da 2):

2 3 5
4 6
6
8

b) considero il 7, numero compreso fra il penultimo e l'ultimo numero della prima colonna (ossia compreso fra 6 e 8).

Considero le colonne successive alla prima (nel caso in questione quindi devo considerare la seconda e la terza colonna).

Se l'ultimo elemento di queste colonne è minore di 7, aggiungo un elemento a esse (nel caso in questione pertanto devo aggiungere un elemento sia alla seconda che alla terza colonna, in quanto l'ultimo numero di esse è minore di 7):

2 3 5
4 6 10
6 9
8

c) Verifico se 7 è primo o composto nel seguente modo:

- confronto 7 con l'ultimo e il penultimo elemento delle colonne delle colonne successive alla prima

- se fra questi elementi trovo il 7, significa che 7 è composto, altrimenti significa che è primo.

Poiché i numeri con cui devo fare il confronto sono 6-8-6-9-5-10, non avendo trovato il 7 concludo che 7 è primo.

Poiché 7 è primo, lo aggiungo alla prima riga:

2	3	5	7
4	6	10	
6	9		
8			

Quarto passo

a) Nella prima colonna inserisco il 10 (quarto numero composto generato da 2):

2	3	5	7
4	6	10	
6	9		
8			
10			

b) considero il 9, numero compreso fra il penultimo e l'ultimo numero della prima colonna (ossia compreso fra 8 e il 10).

Considero le colonne dei multipli numeri primi successivi a 2 sinora individuati (nel caso in questione quindi devo considerare la seconda, la terza e la quarta colonna).

Se l'ultimo elemento di queste colonne è minore di 9, aggiungo un elemento a esse (nel caso in questione pertanto devo aggiungere un elemento alla quarta colonna in quanto l'ultimo numero di essa è minore di 9).

2	3	5	7
4	6	10	14
6	9		
8			
10			

c) Verifico se 9 è primo o composto nel seguente modo:

- confronto 9 con l'ultimo e il penultimo elemento delle colonne delle colonne successive alla prima
- se fra questi elementi trovo il 9, significa che il 9 è composto, altrimenti significa che è primo.

Poiché i numeri con cui devo fare il confronto sono 8-10-6-9-5-10-7-14, avendo trovato fra essi il 9, concludo che 9 è composto.

Poiché 9 è composto NON lo aggiungo alla prima riga.

Quinto passo

a) Nella prima colonna inserisco il 12 (quinto numero composto generato da 2):

2	3	5	7
4	6	10	14
6	9		
8			
10			

12

b) considero l'11, numero compreso fra il penultimo e l'ultimo numero della prima colonna (ossia compreso fra il 10 e il 12).

Considero le colonne dei multipli numeri primi successivi a 2 sinora individuati (nel caso in questione quindi devo considerare la seconda, la terza e la quarta colonna).

Se l'ultimo elemento di queste colonne è minore di 11, aggiungo un elemento a esse (nel caso in questione pertanto devo aggiungere un elemento alla seconda e alla terza colonna in quanto l'ultimo numero di esse è minore di 11):

2	3	5	7
4	6	10	14
6	9	15	
8	12		
10			
12			

c) Verifico se 11 è primo o composto nel seguente modo:

- confronto 11 con l'ultimo e il penultimo elemento delle colonne successive alla prima
- se fra questi elementi trovo l'11, significa che l'11 è composto, altrimenti significa che è primo.

Poiché i numeri con cui devo fare il confronto sono 10-12-9-12-10-15-7-14, non avendo trovato fra essi l'11, concludo che 11 è primo.

Poiché 11 è primo lo aggiungo alla prima riga:

2	3	5	7	11
4	6	10	14	
6	9	15		
8	12			
10				
12				

Sesto passo

a) Nella prima colonna inserisco il 14 (sesto numero composto generato da 2):

2	3	5	7	11
4	6	10	14	
6	9	15		
8	12			
10				
12				
14				

b) considero l'13, numero compreso fra il penultimo e l'ultimo numero della prima colonna (ossia compreso fra il 12 e il 14).

Considero le colonne dei multipli numeri primi successivi a 2 sinora individuati (nel caso in questione quindi devo considerare la seconda, la terza, la quarta e la quinta colonna).

Se l'ultimo elemento di queste colonne è minore di 13, aggiungo un elemento a esse (nel caso in questione pertanto devo aggiungere un elemento alla seconda e alla quinta colonna in quanto l'ultimo numero di esse è minore di 11):

2	3	5	7	11
4	6	10	14	22
6	9	15		
8	12			
10	15			
12				
14				

c) Verifico se 13 è primo o composto nel seguente modo:

- confronto 13 con l'ultimo e il penultimo elemento delle colonne successive alla prima
- se fra questi elementi trovo l'13, significa che l'13 è composto, altrimenti significa che è primo.

Poiché i numeri con cui devo fare il confronto sono 12-14-12-15-10-15-7-14-11-22, non avendo trovato fra essi l'13, concludo che 13 è primo.

Poiché 13 è primo lo aggiungo alla prima riga:

2	3	5	7	11	13
4	6	10	14	22	
6	9	15			
8	12				
10	15				
12					
14					

Settimo passo

a) Nella prima colonna inserisco il 16 (settimo numero composto generato da 2):

2	3	5	7	11	13
4	6	10	14	22	
6	9	15			
8	12				
10	15				
12					
14					
16					

b) considero l'15, numero compreso fra il penultimo e l'ultimo numero della prima colonna (ossia compreso fra il 14 e il 16).

Considero le colonne dei multipli numeri primi successivi a 2 sinora individuati (nel caso in questione quindi devo considerare la seconda, la terza, la quarta, la quinta e la sesta colonna).

Se l'ultimo elemento di queste colonne è minore di 15, aggiungo un elemento a esse (nel caso in questione pertanto devo aggiungere un elemento alla quarta e alla sesta colonna in quanto l'ultimo numero di esse è minore di 15):

2	3	5	7	11	13
---	---	---	---	----	----

4 6 10 14 22 26
6 9 15 21
8 12
10 15
12
14
16

c) Verifico se 15 è primo o composto nel seguente modo:

- confronto 15 con l'ultimo e il penultimo elemento delle colonne successive alla prima
- se fra questi elementi trovo l'15, significa che l'15 è composto, altrimenti significa che è primo.

Poiché i numeri con cui devo fare il confronto sono 14-16-12-15-10-15-14-21-11-22-13-26, avendo trovato fra essi l'15, concludo che 15 è composto.

Poiché 15 è composto NON lo aggiungo alla prima riga.

2 3 5 7 11 13
4 6 10 14 22 26
6 9 15 21
8 12
10 15
12
14
16

ottavo passo

a) Nella prima colonna inserisco il 18 (ottavo numero composto generato da 2):

2	3	5	7	11	13
4	6	10	14	22	26
6	9	15			
8	12				
10	15				
12					
14					
16					
18					

b) considero l'17, numero compreso fra il penultimo e l'ultimo numero della prima colonna (ossia compreso fra il 16 e il 18).

Considero le colonne dei multipli numeri primi successivi a 2 sinora individuati (nel caso in questione quindi devo considerare la seconda, la terza, la quarta, la quinta e la sesta colonna).

Se l'ultimo elemento di queste colonne è minore di 17, aggiungo un elemento a esse (nel caso in questione pertanto devo aggiungere un elemento alla seconda, alla terza e alla quarta colonna, in quanto l'ultimo numero di esse è minore di 17):

2	3	5	7	11	13
4	6	10	14	22	26
6	9	15	21		

8 12 20
10 15
12 18
14
16
18

c) Verifico se 17 è primo o composto nel seguente modo:

- confronto 17 con l'ultimo e il penultimo elemento delle colonne successive alla prima
- se fra questi elementi trovo l'17, significa che l'17 è composto, altrimenti significa che è primo.

Poiché i numeri con cui devo fare il confronto sono 14-16-15-18-15-20-14-21-11-22-13-26, non avendo trovato fra essi l'17, concludo che 17 è primo.

Poiché 17 è primo lo aggiungo alla prima riga.

2 3 5 7 11 13 17
4 6 10 14 22 26
6 9 15 21
8 12 20
10 15
12 18
14
16
18

nono passo

a) Nella prima colonna inserisco il 20 (nono numero composto generato da 2):

2	3	5	7	11	13	17
4	6	10	14	22	26	
6	9	15	21			
8	12	20				
10	15					
12	18					
14						
16						
18						
20						

b) considero l'19, numero compreso fra il penultimo e l'ultimo numero della prima colonna (ossia compreso fra il 18 e il 20).

Considero le colonne dei multipli numeri primi successivi a 2 sinora individuati (nel caso in questione quindi devo considerare la seconda, la terza, la quarta, la quinta, la sesta e la settima colonna).

Se l'ultimo elemento di queste colonne è minore di 19, aggiungo un elemento a esse (nel caso in questione pertanto devo aggiungere un elemento alla seconda e alla settima colonna, in quanto l'ultimo numero di esse è minore di 19):

2	3	5	7	11	13	17
4	6	10	14	22	26	34
6	9	15	21			

8 12 20
10 15
12 18
14 21
16
18
20

c) Verifico se 19 è primo o composto nel seguente modo:

- confronto 19 con l'ultimo e il penultimo elemento delle colonne successive alla prima
- se fra questi elementi trovo l'19, significa che l'19 è composto, altrimenti significa che è primo.

Poiché i numeri con cui devo fare il confronto sono 18-20-18-21-15-20-14-21-11-22-13-26-17-34, non avendo trovato fra essi l'19, concludo che 19 è primo.

Poiché 19 è primo lo aggiungo alla prima riga.

2 3 5 7 11 13 17 19
4 6 10 14 22 26 34
6 9 15 21
8 12 20
10 15
12 18
14 21
16
18

20

decimo passo

a) Nella prima colonna inserisco il 22 (decimo numero composto generato da 2):

2	3	5	7	11	13	17	19
4	6	10	14	22	26	34	
6	9	15	21				
8	12	20					
10	15						
12	18						
14	21						
16							
18							
20							
22							

b) considero l'21, numero compreso fra il penultimo e l'ultimo numero della prima colonna (ossia compreso fra il 20 e il 22).

Considero le colonne dei multipli numeri primi successivi a 2 sinora individuati (nel caso in questione quindi devo considerare la seconda, la terza , la quarta, la quinta, la sesta, la settima e l'ottava colonna).

Se l'ultimo elemento di queste colonne è minore di 21, aggiungo un elemento a esse (nel caso in questione pertanto devo aggiungere un elemento alla terza e alla ottava colonna, in quanto l'ultimo numero di esse è minore di 21):

2	3	5	7	11	13	17	19
4	6	10	14	22	26	34	38
6	9	15	21				
8	12	20					
10	15	25					
12	18						
14	21						
16							
18							
20							
22							

c) Verifico se 21 è primo o composto nel seguente modo:

- confronto 21 con l'ultimo e il penultimo elemento delle colonne successive alla prima
- se fra questi elementi trovo l'21, significa che l'21 è composto, altrimenti significa che è primo.

Poiché i numeri con cui devo fare il confronto sono 20-22-18-21-20-25-14-21-11-22-13-26-17-34-19-38, avendo trovato fra essi l'21, concludo che 21 è composto.

Poiché 21 è composto NON lo aggiungo alla prima riga.

2	3	5	7	11	13	17	19
4	6	10	14	22	26	34	38
6	9	15	21				
8	12	20					

10 15 25
12 18
14 21
16
18
20
22

undicesimo passo

a) Nella prima colonna inserisco il 24 (undicesimo numero composto generato da 2):

2 3 5 7 11 13 17 19
4 6 10 14 22 26 34 38
6 9 15 21
8 12 20
10 15 25
12 18
14 21
16
18
20
22
24

b) considero l'23, numero compreso fra il penultimo e l'ultimo numero della prima colonna (ossia compreso fra il 22e il 24).

Considero le colonne dei multipli numeri primi successivi a 2 sinora individuati (nel caso in questione quindi devo considerare la seconda, la terza , la quarta, la quinta, la sesta, la settima e l'ottava colonna).

Se l'ultimo elemento di queste colonne è minore di 23, aggiungo un elemento a esse (nel caso in questione pertanto devo aggiungere un elemento alla seconda , alla quarta e alla quinta colonna, in quanto l'ultimo numero di esse è minore di 23):

2	3	5	7	11	13	17	19
4	6	10	14	22	26	34	38
6	9	15	21	33			
8	12	20	28				
10	15	25					
12	18						
14	21						
16	24						
18							
20							
22							
24							

c) Verifico se 23 è primo o composto nel seguente modo:

- confronto 23 con l'ultimo e il penultimo elemento delle colonne successive alla prima
- se fra questi elementi trovo l'23, significa che l'23 è composto, altrimenti significa che è primo.

Poiché i numeri con cui devo fare il confronto sono 22-24-21-24-20-25-21-28-22-33-13-26-17-34-19-38, non avendo trovato fra essi l'23, concludo che 21 è primo.

Poiché 23 è primo lo aggiungo alla prima riga.

2	3	5	7	11	13	17	19	23
4	6	10	14	22	26	34	38	
6	9	15	21	33				
8	12	20	28					
10	15	25						
12	18							
14	21							
16	24							
18								
20								
22								
24								

E così di seguito, per i casi successivi...

Cagliari 03 - 04 - 2018