النسبية العامة و الكم

بقلم محمد ابوزيد

النسبية الخاصة اندمجت مع الكم فى معادلة كلاين جوردون لكن النسبية العامة والكم لم يتحدان ابدا

على ما هم عليه وهما غير متسقان تماما وهذا يقودنا الى القول ان احدهما قد يكون خاطئا

لكننا اذا تنبهنا الى ملاحظة بسيطة قد نعود ادراجنا مرة اخرى فى التفكير

بنيت نظرية الكم على المؤثرات والمؤثرات المستخدمة فى الكم هى مؤثرات خطية لذا فمن الطبيعى ان تتفق

مع معادلات النسبية الخاصة الخطية ايضا

هذا يبدو طبيعيا جدا

ويبدو طبيعيا ايضا بالتالى الا تتفق النسبية العامة اللاخطية مع الكم الخطية

والفكرة السهلة هى انشاء مؤثرات لا خطية

وان نفعل كما فعلنا بالتعويض عن مؤثر الطاقة وكمية الحركة الخطية فى معادلة الطاقة فى

النسبية الخاصة

لانشاء الكم النسبوى

ان نعوض بمؤثر الطاقة ومؤثر الزمكان اللاخطيان فى معادلة النسبية العامة

فيتحد الاثنان معا فى الحقيقة انه تم تعميم النسبية ولم يتم تعميم الكم
على ان وجود نظرية الاغشية فى 11 بعد بينما النظرية النسبية الخاصة والكم فى 4 ابعاد

يجعلنا نفكر ما هو الشىء الناقص

هل ينبغى علينا جعل النسبية و الكم فى 11 بعد بفرض خاص مع تحقيق الخواص السابقة

لاتحاد النسبية و الكم و الاوتار الفائقة

فلنعود الان الى النسبية الخاصة و الكم لن نتحدث عن فكرة تطوير النسبية الخاصة فى 11 بعد

ولكن عن تطوير المؤثرات فى نظرية الكم واقصد هنا المؤثرات الخطية

مشغل لابلاس فى بعدين:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

مشغل لابلاس فى ثلاثة ابعاد:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

مشغل لابلاس فى اربعة ابعاد:

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

الان لايجاد مشغل لابلاس فى ابعاد اعلى

نلاحظ ان الابعاد الاربعة الاولى هى ثلاثة ابعاد للمكان هى اطوال ثم البعد الرابع الزمن
وهى جميعها ابعاد فيزيائية اساسية او كميات فيزيائية اساسية
وبفرض الكميات الفيزيائية الاساسية هى ابعاد
نضع الكتلة وهو احد الكميات الفيزيائية الاساسية كبعد خامس
يصبح مشغل لابلاس فى خمسة ابعاد هو :

$$\frac{c^4}{G^2}\frac{\partial^2}{\partial M^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

وباخذ الشحنة بعد سادس على اعتبار انها كمية فيزيائية اساسية
فان مشغل لابلاس فى البعد السادس يصبح:

$$\frac{c^2}{\sqrt{Gk}}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{c^4}{G^2}\frac{\partial^2}{\partial M^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

واذا لاحظت فان

معادلة كلاين جوردون

$$\partial_x^2\psi + \partial_y^2\psi + \partial_z^2\psi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0.$$

ويمكن وضع معادلة كلاين جوردون فى الصورة:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi$$

حيث الطرف الايسر هو مشغل دالمبرت:

$$\Box u \equiv \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

حيث:
مشغل دالمبرت هو:

$$\Box u \equiv \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

وهو:

هو:

مشغل لابلاس فى اربعة ابعاد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

وبالتالى فان معادلة كلاين جوردون هى معادلة فى اربعة ابعاد يمكن تطويرها فى اكثر من اربع ابعاد

ويمكن وضع ايا من مشغل لابلاس او مشغل دالمبرت او معادلة كلاين جوردون فى احداثيات كروية منحنية

مشغل دالمبرت فى الاحداثيات الكروية المنحنية فى اربعة ابعاد:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\Theta}\frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

واذا لاحظت فان

معادلة كلاين جوردون

$$\partial_x^2\psi+\partial_y^2\psi+\partial_z^2\psi-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\psi-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi=0.$$

ويمكن وضع معادلة كلاين جوردون فى الصورة:

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi=\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi$$

حيث الطرف الايسر هو مشغل دالمبرت:

$$\Box u\equiv\Delta u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

حيث:

مشغل دالمبرت هو:

$$\Box u\equiv\Delta u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

وهو:

هو:

مشغل لابلاس فى اربعة ابعاد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

وبالتالى فان معادلة كلاين جوردون هى معادلة فى اربعة ابعاد يمكن تطويرها فى اكثر من اربع ابعاد

ويمكن وضع ايا من مشغل لابلاس او مشغل دالمبرت او معادلة كلاين جوردون فى احداثيات كروية منحنية

مشغل دالمبرت فى الاحداثيات الكروية المنحنية فى اربعة ابعاد:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial u}{\partial\Theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

اى ان معادلة كلاين جوردون يمكن تطويرها لتحتوى فى الطرف الايسر على

مشغل لابلاس فى 11 بعد يشمل بقية الابعاد الفيزيائية الاساسية

(ويمكن اشتقاق معادلة كلاين جوردون من علاقة الطاقة والزخم (كمية الحركة فى النسبية الخاصة لالبرت اينشتاين ولكن باسلوب كمى

كالاتى:

نحصل على تحويل الطاقة فى النسبية الخاصة لاينشتاين كالاتى:

$$E(\boldsymbol{v})=\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}}\,.$$

و تحويل كمية الحركة كالاتى:

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{v})=\frac{m\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}}\,.$$

ملاحظة هامة:
تحويل الكتلة يمكن الحصول عليه مباشرة باعتبار الكتلة بعد خامس

ونظرا لان المعادلة الاساسية للعلاقة بين الزخم والطاقة والناتجة عن مربع طول المتجه الرباعى

فى النسبية الخاصة فانه يجب استنتاج العلاقة بين الزخم والطاقة ولكن من مربع الطول لمتجه اعلى
اى خماسى وسداسى وهكذا وبالتالى فان معادلة كلاين جوردون سيتغير شكلها فى ابعاد اعلى عما هى عليه
حتى بعد تغيير مشغل لابلاس فى ابعاد اعلى

العلاقة بين الزخم والطاقة فى اربعة ابعاد تبعا لنسبية اينشتاين:

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$$

وبالتعويض عن :

$$E = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}\,,\ \mathbf{p} = -\mathrm{i}\,\hbar\,\nabla\,.$$

نصل الى معادلة كلاين جوردون :

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right]\phi(t,\mathbf{x}) = 0\,.$$

واستنتاج العلاقة بين الطاقة والزخم فى النسبية الخاصة تم استنتاجه من مربع عنصر الطول فى الفضاء الرباعى لذا فانه يلزم لاستنتاج القيمة الصحيحة بما يتناسب مع الافكار السابقة
ايجاد مربع عنصر الطول فى فضاءات اعلى حتى 11 بعد
ثم التعويض لاستنتاج معادلة كلاين جوردون فى 11 بعد حسب المفهوم السابق

:والترتيب كالاتى

من علاقة الطاقة والزخم فى النسبية الخاصة

$$E^2 = c^2\vec{p}^2 + m^2c^4$$

:بالتعويض عن المؤثرات

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

$$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

:المعادلة الناتجة

:معادلة كلاين جوردون

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\phi(t,\mathbf{x}) = 0\,.$$

وهذا يقودنا الى مشغل لابلاس غير اقليدى متعدد الابعاد

بحيث ان مشغل لابلاس غير الاقليدى الرباعى المقابل لمشغل لابلاس الاقليدى الرباعى يحتوى على 16 عامل بدلا من اربعة عوامل فقط ومشغل لابلاس فى 11 بعد يحتوى على 121 عامل وسيكون هذا ضروريا فى مقابل الفضاء الغير اقليدى من اجل معادلة غير اقليدية لكلاين جوردون

:مشغل لابلاس فى بعدين

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

:ويكون التصور كالاتى

مشغل لابلاس لا اقليدى فى بعدين:

حيث:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

مشغل لابلاس فى ثلاثة ابعاد:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

مشغل لابلاس لا اقليدى فى ثلاثة ابعاد :

$$\Delta f = \frac{1}{g_{11}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g_{12}}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{1}{g_{13}}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + \frac{1}{g_{21}}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{g_{22}}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{g_{23}}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + \frac{1}{g_{31}}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{1}{g_{32}}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{1}{g_{33}}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

مشغل لابلاس فى اربعة ابعاد:

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

او ما يطلق عليه مشغل دالمبرت

$$\Box u \equiv \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

ويكون مشغل لابلاس اللا اقليدى فى اربعة ابعاد هو:

$$\Delta f = \frac{1}{g_{11}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g_{12}}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{1}{g_{13}}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + \frac{1}{g_{14}}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} + \frac{1}{g_{21}}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{g_{22}}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{g_{23}}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + \frac{1}{g_{24}}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} + \frac{1}{g_{31}}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{1}{g_{32}}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{1}{g_{33}}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{g_{34}}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial z} + \frac{1}{g_{41}}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{1}{g_{42}}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} + \frac{1}{g_{43}}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} + \frac{1}{g_{44}}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

ويمكننا ان نفكر ان المؤثرات الخطية نتجت من معادلات تفاضلية خطية وبالتالى فان:

المؤثرات اللاخطية يمكن استنتاجها من معادلات تفاضلية لا خطية

والفكرة كالاتى :

اذا كان لدينا معادلة تفاضلية عادية على الشكل:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{y}}{\mathrm{d}t^2} + 2k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega^2 y = 0$$

ولاحظ انها جميعا تؤثر على الدالة y

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{y}}{\mathrm{d}t^2} + 2k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega^2 y = 0$$

فهل يمكن كتابتها فى شكل مؤثرات كالاتى:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2k\frac{\partial y}{\partial t} + \omega^2 y = 0$$

او:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2k\frac{\partial}{\partial t} + \omega^2 = 0$$

وما يلفت الانتباه عند دراسة معادلة حركة جسم يتذبذب ذبذبة دورية غير مخمدة اى حركة توافقية غير مخمدة

ويتم التعبير عنه بالمعادلة:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 y = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 y = 0$$

ويتم كتابتها فى صورة مؤثرات كالاتى:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \hat{\omega}^2 y = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{\omega}^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\hat{\omega}^2$$

وبضرب الطرفين فى $-\hbar^2$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -(-\hbar^2)\hat{\omega}^2$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \hbar^2 \hat{\omega}^2$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \hat{E}^2$$

وهى نفس قيمة مربع مؤثر الطاقة

ايضا:

عند دراسة المعادلة التفاضلية للموجه التوافقية البسيطة فاننا نصل الى المعادلة:

وبتحويلها الى مؤثرات:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

واذا كان البعد المكانى فى ثلاثة ابعاد:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla^2$$

وعند سرعة الضوء c تصبح:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla^2$$

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$$

وهذا المؤثر هو مؤثر لابلاس فى اربع ابعاد او مؤثر دالمبيرت

ايضا:

اذا كان لدينا معادلة مثل:

فان تحويلها الى مؤثرات بالشكل:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

يمكننا من اخذ الجذر التربيعى مباشرة للحدود المختلفة للمعادلة كالاتى:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \pm v \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} = \pm \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{i\hbar}{v}\frac{\partial}{\partial t} = \pm i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{E}{v} = \pm i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p} = \pm i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$