DEMOSTRACIÓN HIPÓTESIS DE RIEMANN

Universidad de Cundinamarca
Universidad Sergio Arboleda
E-mail: wtorresovejero@gmail.com

El Titchmarsh nos dice que, la ecuación funcional de la función zeta de Riemann, puede ser escrita como

$$\zeta(s) = \chi(s)\,\zeta(1-s)$$

Donde

$$\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(1-s)$$

1. Colorario 1

La función $\chi(s)$ satisface

$$\chi(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}$$

1.1. Demostración

La función $\chi(s)$ se define como

$$\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(1-s) \tag{1}$$

Por la fórmula de reflexión de Euler, de la función Gamma, se tiene

$$\Gamma(1-z)\,\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{1}{2}\pi z\right)}$$

Haciendo $z = \frac{1}{2}s$ y despejando sin, se tiene

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right) = \frac{\pi}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)} \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos

$$\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \frac{\pi}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}\Gamma(1-s)$$

Simplificando, tenemos que se cancela un π

$$\chi(s) = 2^s \pi^{s} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)} \tag{3}$$

La fórmula de duplicación de la función Gamma, nos dice

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$$

Haciendo $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)}\sqrt{\pi}\Gamma\left(2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)\right)$$

Simplificando tenemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}s\right)=2^{s}\sqrt{\pi}\Gamma\left(1-s\right) \tag{4}$$

Pasando $2^s\sqrt{\pi}$ y $\Gamma\left(1-\frac{1}{2}s\right)$ a dividir respectivamente, se tiene

$$\frac{\Gamma\left(1-s\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}s\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)}{2^{s}\sqrt{\pi}} \tag{5}$$

Reemplazando (5) en (3) tenemos

$$\chi\left(s\right)=2^{s}\pi^{s}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)}{2^{s}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}$$

Simplificando, finalmente tenemos

$$\chi\left(s\right)=\pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}$$

2. COLORARIO 2

La función $\chi\left(s\right)$ satisface

$$\chi\left(s\right)\chi\left(1-s\right)=1$$

2.1. Demostración

Por definición, tenemos que:

$$\chi\left(s\right)=\pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}$$

Haciendo $s=1-s$, se tiene:

$$\chi\left(1-s\right)=\pi^{1-s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-s\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(1-s\right)\right)}$$

Simplificando, se obtiene:

$$\chi\left(1-s\right)=\pi^{\frac{1}{2}-s}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)}$$

Realizando el producto $\chi\left(s\right)\chi\left(1-s\right)$, tenemos:

$$\chi(s)\,\chi(1-s) = \left(\pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}\right)\left(\pi^{\frac{1}{2}-s}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)}\right)$$

Realizando el producto, tenemos:

$$\chi(s)\,\chi(1-s) = \pi^{s-s-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)}$$

Simplificando, finalmente obtenemos:

$$\chi(s)\,\chi(1-s) = 1$$

3. Hipótesis de Riemann

La parte real de todo cero no trivial de la función zeta de Riemann es 1/2

3.1. Demostración

La funcipon zeta de Riemann, está dada por

$$\zeta(s) = \chi(s)\,\zeta(1-s)$$

Donde

$$\chi(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(1-s)$$

Para encontrar un número complejo que sea cero de esta función, se debe cumplir que $\zeta(s)=0$, por lo tanto, $\chi(s)\,\zeta(1-s)=0$. Dada esta condición, tenemos que $\chi(s)=0$ ó $\zeta(1-s)=0$; aquí se puede ver que $\zeta(1-s)\neq 0$, esto debido a que está dada como una serie de número posivos, por lo tanto $\chi(s)=0$; según el colorario 1, se tiene que $\chi(s)=\pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}$; por lo tanto,

$$\pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)} = 0$$

La función Gamma, por definición, es diferente de cero, así que, la única manera que eso sea cero, es si $\pi^{s-\frac{1}{2}}$. Reemplazando s por $a+bi$, tenemos

$$\pi^{a+bi-\frac{1}{2}} = 0$$

Aquí si $a=\frac{1}{2}$, entonces la parte real es cero, por lo tanto, tendríamos que ver cuando

$$\pi^{bi} = 0$$

Es sabido que una función exponente nunca es cero, pero, si el exponenes negativo, su valor es cada vez más pequeño, en cuanto el exponen crece, por lo tanto se tiene que $\pi^{bi}=0$, siempre que $b\to-\infty$, sobra destacar que, esta condición se cumple siempre que b sea mayor o igual a cero.

La ecuación funcional de la función zeta de Riemann, relaciona $\zeta(s)$, con $\zeta(1-s)$; Aquí, acabamos de ver cuando $\zeta(s)=0$, ahora debemos ver, cuando $\zeta(1-s)=0$; esto debido a la simetría existente en la ecuación funcional. Entonces despejemos $\zeta(1-s)$, en términos de $\chi(s)$. Por el colorario 2, tenemos que $\chi(s)\,\chi(1-s)=1$, entonces, multiplicando a ambos lado de la igualdad, tenemos

$$\zeta(s)\,\chi(1-s)=\chi(s)\,\chi(1-s)\,\zeta(1-s)$$

Entonces, por el colorario 2, tenemos

$$\zeta(s)\,\chi(1-s)=\zeta(1-s)$$

En este caso, debemos encontrar un número $c+di$, tal que $\zeta(1-s)$ sea cero, entonces

$$\zeta(c+di)\,\chi(1-c-di)=0$$

Como $\zeta(s)$ es diferente de cero, entonces $\zeta(1-s)$ también es diferente de cero, así, aquí tenemos que $\chi(1-c-di)$ es cero. Por el colorario 1, se tiene que

$$\pi^{1-a-bi-\frac{1}{2}}=0$$

Simplificando, tenemos

$$\pi^{\frac{1}{2}-a-bi}=0$$

Aquí vemos que a es tambien $\frac{1}{2}$, por lo tanto, nos queda ver el comportamiento de b

$$\pi^{-bi}=0$$

En este caso, vemos que el número positivo que debe tomas b, es efectivamente, todos los valores positivos de los reales, es decir $\pi^{-bi}=0$, cuando $b\to\infty$.

Entonces, los ceros de la función zeta de Riemann tienen parte real $\frac{1}{2}$, con parte imaginaria $(-\infty,0]\cup[0,\infty)$, es decir $t\in\mathbb{R}$