La Conjecture De Syracuse (The Syracuse Conjecture)

Florent Raynal

Abstract

Syracuse theory demonstration in French.

LA CONJECTURE DE SYRACUSE

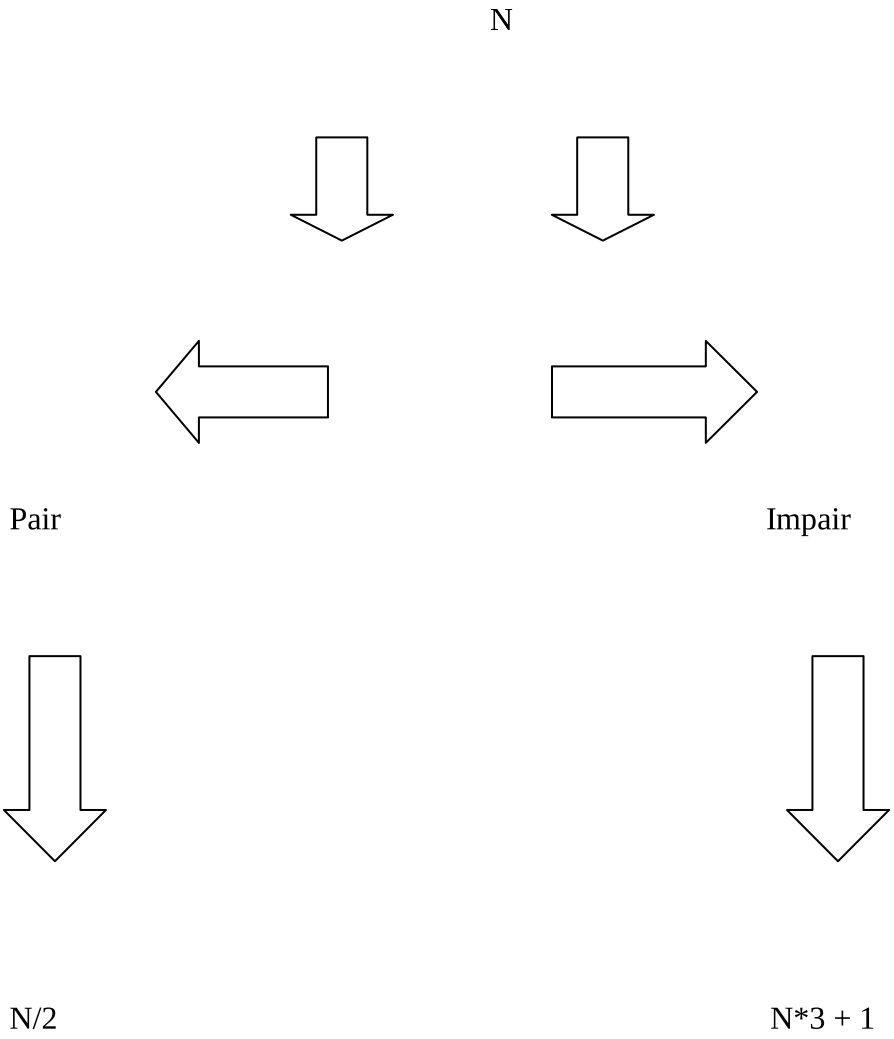
La conjecture de Syracuse est une énigme arithmétique qui propose l’énoncé suivant :

On choisit un nombre entier positif N, et on lui fait subir le processus suivant :

Si le N est pair, on le divise par 2

Si le N est impair, on le multiplie par 3 et on lui ajoute 1

Soit :



Puis on réitère le processus : Si le nombre obtenu est pair, on le redivise par 2, s’il est impair on le multiplie par 3 et on y ajoute 1. Et ainsi de suite.

La conjoncture affirme que peut importe le nombre de départ choisi, nous finirons forcément à un moment par tomber sur la valeur 1. Le nombre 1 étant impair, nous lui faisons subir la transformation N*3+1 et obtenons 4, qui est pair, que nous divisons donc par 2, pour obtenir a nouveau un, et ce processus 4,2,1 se répétera donc à l’infini. Il s’agit d’une conjoncture, cela signifie, que nous pouvons estimer que ce résultat est exact, sans pour autant qu’il ai été prouvé mathématiquement.

L’objectif du présent document est de démontrer que cette conjoncture est exacte.

Afin de démontrer que le nombre choisi finira au bout d’un certain temps (plus ou moins long) à chuter vers le processus 4,2,1 il faut démontrer 2 phénomènes :

1/ Que la série ne tend pas vers l’infini et tend à la baisse

2/ Que la série ne peut pas tomber dans un cycle répétitif autre que 4,2,1

1/ La série tend à la baisse

Nous estimons que le nombre de départ sera pair 50 % du temps, soit :

1/2 Pair 1/2 Impair

Lorsque nous divisons un nombre pair par 2, nous avons 50 % de chance de tomber sur un autre nombre pair, que nous redivisons par 2 avec une nouvelle fois 50 % de chance de tomber sur un nombre pair et ainsi de suite.

Nous pouvons donc écrire l'espérance E de tomber sur un nombre pair :

$E= 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 \ldots +1/N$

En effet, lorsque le nombre sur lequel on tombe est pair voici les différentes situations possibles

0	2	4	6	8
0 ou 5	1 ou 6	2 ou 7	3 ou 8	4 ou 9

On peut lire ce tableau comme ceci : Lorsque le nombre N-1 se termine par 4, en le divisant par 2 nous avons 50 % de chance de tomber sur un nombre se terminant par 2, et 50 % de chance de tomber sur un nombre se terminant par 7. Cela prouve donc l'espérance E du nombre pair écrite plus haut.

Lorsque nous multiplions un nombre impair par 3, nous tombons nécessairement sur un nombre impair. Donc lorsque nous ajoutons 1, nous avons un nombre pair.

Par conséquent, il n'est pas possible que notre série de nombre augmente en valeur plus d'une fois de suite. Nous dirons que la récurrence à la hausse du nombre impair est de 1.

Quand a la récurrence à la baisse du nombre pair, elle est au minimum de 1, et au Maximum de $+\infty$

En effet si nous considérons la série suivante : $t_k = f(t_k *2)$

1,2,4,8,16, 32……. N

Cette suite est donc infinie, et infiniment divisible par 2 jusqu'au processus 4,2,1. Plus elle converge vers $+\infty$, plus les valeurs sont éloignées entre elles. Cependant si nous répétons à l'infini le processus de départ, nous allons tomber sur une valeur de cette suite t_k Pour la simple raison que nous ne pouvons jamais tomber sur le méme nombre dans ce processus. Ainsi, la série finira au bout d'une certaine durée de vol à tomber sur cette suite, qui l'emmènera vers le cycle infini 4,2,1.

Mais ce cycle répétitif est-il le seul de notre processus ? N'y a ~~t~~il pas pour des valeurs plus élevées, d'autres cycles capable de piéger à l'infini notre processus ?

2/ La cycle 4,2,1 est le seul cycle répétitif de notre processus

Nous avons dit précédemment que la récurrence a la hausse était au maximum de 1. Cela implique que qu’a tout moment du processus, lorsque nous multiplions par 3 et ajoutons 1, nous ne pouvons pas tomber sur le nombre précédent N-1, car ce nombre a été seulement divisé par 2 pour donner N. La seule possibilité de retomber sur N-1 en multipliant N par 3 et ajoutant 1, est justement que le nombre N-1 soit suffisamment petit pour que l’ajout de 1 soit significatif dans l’opération.

Par exemple si N-1= 234 alors N= 117

Si nous multiplions donc par 3, nous obtenons un nombre bien supérieur a 234 car le rapport de force N/2 et N*3 est favorable a la multiplication par 3. Et ce rapport de force est amplifié alors que nous allons vers +∞

Lorsque les valeurs sont élevées, l’ajout de 1 après la multiplication n’a pour seul but de donner un nombre impair.

Autre exemple, si N-1 = 6 alors N=3

Nous multiplions donc par 3 et obtenons 9 , puis ajoutons 1 et obtenons 10. Nous ne sommes donc plus très loin de 12, qui est multiple de 6. Mais nous n’y sommes pas tout a fait.

Il faut descendre a N-1 =4 pour que l’ajout de 1 soit significatif, et apporte quelque chose à l’opération.

Le cycle 4,2,1 est donc le seul cycle de ce processus.

Conclusion : Le processus de Syracuse tend a la baisse de par la récurrence de la division par 2, qui l’emporte sur celle de la multiplication par 3. D’autre part, la différence de rapport de force entre la division par 2, et la multiplication par 3 empêche ce processus de tomber dans un cycle infini autre que 4,2,1.

La conjecture de Syracuse est donc exacte.