Preuve De La Conjecture D'erdos Sur Le Probleme De Brocard
(Proof of Erdos Conjecture about Brocard's Problem)

Babacar Gueye

July 1, 2021

Abstract

This article talk about Brocard's problem. This problem consist to find the solution of the diophancian equation n! + 1 = m^2. Paul Erdos conjecture that the only solutions are the Brown numbers corresponding to the values 4, 5 and 7 of n. Using here on fondamental result of number theory and studing some fonction between whitch the neperian logarithm we proof that there are any solution corresponding to a value of n greater than 10.

I) **INTRODUCTION**

Le problème de Brocard est un problème en mathématiques qui demande de trouver des valeurs entières de n et m de l'équation diophantienne
$n! + 1 = m^2$,
où $n!$ est la fonction factorielle.
Celui-ci a été posé par Henri Brocard dans deux articles en 1876 et 1885 et indépendamment en 1913 par Srinivasa Ramanujan.
NOMBRES DE BROWN :
Les couples d'entiers (n, m) étant solution du problème de Brocard sont dits nombres de Brown. Il n'y a que trois couples connus de nombres de Brown : $(4, 5)$, $(5, 11)$ et $(7, 71)$.
Paul Erdos a conjecturé que ceux-là, sont les seules solutions.
Berndt et Galway en 2000, ont effectué des calculs pour n inférieur à 10^9 et n'ont trouvé aucune solution supplémentaire.

En faisant une étude sur des valeurs de n assez grands, on va montrer ici qu'il n'existe pas d'autre solution à cette équation diophantienne.

II) **PREUVE**

Si n et m sont deux entiers naturels tels que $n! + 1 = m^2 \quad (1)$,
alors $n! = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$.
Pour $n \geq 2$ on a $n!+1$ impair et donc m impair. Alors $m-1$ et $m+1$ sont deux nombres pairs consécutifs, et alors $v_2(m-1) = 1$ et $v_2(m+1) = v_2(n!) - 1$, ou $v_2(m+1) = 1$ et $v_2(m-1) = v_2(n!) - 1$
où $v_2(x)$ est la valuation 2-adique de x.
On a alors si (1), $n! = 2^{v_2(n!)-1}s\big(2^{v_2(n!)-1}s \pm 2\big) = 4\big(2^{v_2(n!)-2}s\big(2^{v_2(n!)-2}s \pm 1\big)\big)$
où s est un entier naturel impair.
C'est dire que si (1), $\dfrac{n!}{4} = (M \pm 1)M \quad (2)$
où on a posé $M = 2^{v_2(n!)-2}s$ (notons que M et $M \pm 1$ sont premiers entre eux).
Rappelons le principe suivant : si deux nombres entiers A et B sont tels que $Au - vB = 1, u,\ v\ \in \mathbb{N}^*$, toutes les solutions U et V de $AU - VB = 1$ sont de la forme $U = u + Bb$ et $V = v + Ab$, b entier.
Résoudre l'équation diophantienne (1) pour n assez grand, revient à résoudre l'équation diophantienne : $\dfrac{n!}{4} = (M \pm 1)M$.
On va considérer n assez grand (par exemple ≥ 10) tel que $M \pm 1$ ait au

moins deux facteurs premiers.
Nous savons que 2 est un facteur de M. Soit $p = 2a + 1$ un nombre premier facteur de $M \pm 1$.
Si M existe on a :
$(M \pm 1)M = Pp \times 2Q = P(2a + 1) \times 2Q = \dfrac{n!}{4}, P,\, Q \in \mathbb{N}^* \quad (3)$
(Q est pair pour n assez grand).
$P = 2q + 1$, q entier, est un facteur de $M \pm 1$ (et 2 est un facteur de M).
On a $P - 2q = 1$, et alors d'après le principe rappelé ci-haut : il existerait un nombre entier d tel que : $P(1 + 2d) \times 2(q + Pd) = \dfrac{n!}{4}$. D'après (3), $d = a$ ($Q = q + Pd$).
On aurait alors $(M \pm 1)M = P(1 + 2a) \times 2(q + Pa) = \dfrac{n!}{4} \quad (3')$.
On a donc :
$P(1 + 2a) \times 2(q + Pa) = \dfrac{n!}{4} \iff P(1 + 2a)2q + P(1 + 2a)2Pa = \dfrac{n!}{4}$
$\iff P(1 + 2a)2q = \dfrac{n!}{4} - 2P^2(1 + 2a)a$
$\iff P(1 + 2a)2q = 2P(1 + 2a)a\big(2^{v_2(n!)-v_2(a)-3}r - P\big)$
$\iff q = a\big(2^{v_2(n!)-v_2(a)-3}r - P\big)$
où r est un nombre entier (pair pour n assez gand).
Alors a divise q et d'après $(3')$, a est un facteur de M.
Si $p^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a(a + 1)) + 1$ est une facteur de $M \pm 1$, alors il existerait $P' = 2q' + 1$, (P' et q' entiers) facteur de $M \pm 1$, tel que : $P'p^2 \times 2Q' = \dfrac{n!}{4}, Q' \in \mathbb{N}^*$ (en fait alors $P' = \dfrac{P}{p}$ et $Q' = Q$).
Le même raisonnement que ci-dessus implique alors que $2a(a + 1)$ est un facteur de M.
Cela entraine que $a + 1$ est un facteur de M.
$2a + 1$ est un facteur de $M \pm 1$ et $2(a + 1) - (2a + 1) = 1$, donc d'après le même principe, il existerait un entier c tel que : $\big(2 + (2a + 1)c\big)(a + 1) \times (2a + 1)\big(1 + (a + 1)c\big) = \dfrac{n!}{4}$.
Pour n assez grand (tel que $v_2(\dfrac{n!}{4}) > v_2(a+1)$), alors c est pair, c'est-a-dire $c = 2c'$, c' entier. C'est dire qu'on a :
$\big(2 + (2a + 1)2c'\big)(a + 1) \times (2a + 1)\big(1 + (a + 1)2c'\big) = \dfrac{n!}{4}$.
C'est-à-dire que : $(2a+1)\big(1+2(a+1)c'\big) \times 2\big(1+(2a+1)c'\big)(a+1) = \dfrac{n!}{4} \quad (4)$.
(4) et $(3')$ impliquent :
$$\begin{cases} 1 + 2(a + 1)c' = P \\ \big(1 + (2a + 1)c'\big)(a + 1) = q + Pa \end{cases}$$
La première égalité donne $c' = \dfrac{P - 1}{2(a + 1)} = \dfrac{q}{a + 1}$, et cette valeur de c' dans la deuxième égalité implique :

$a+1+(2a+1)q = q+Pa = q+(2q+1)a \iff a+1+2aq+q = q+2aq+a \iff 1=0$, ce qui est absurde.
C'est dire que $M \pm 1$ ne peut pas avoir un carré comme facteur.
Mais donc pour n assez grand (≥ 10), $M \pm 1$ ne peut avoir comme facteurs que des nombres premiers strictement supérieurs à $\frac{n}{2}$.
Montrons qu'alors que, pour n assez grand (≥ 10), il n'existe pas de valeur de M telle que $\frac{n!}{4} = (M \pm 1)M$.
On sait qu'il y a plus de nombres premiers (au pire autant) sur l'intervalle $[2, \frac{n}{2}]$ que sur l'intervalle $]\frac{n}{2}, n]$. Nous allons montrer que pour chaque nombre premier x du premier intervalle, $x^{v_x\left(\frac{n!}{4}\right)} > n$.
On a $v_x(\frac{n!}{4}) > \frac{n}{x} - 1$ sur l'intervalle $]2, \frac{n}{3}]$ et sur l'intervalle $]\frac{n}{3}, \frac{n}{2}]$ on a $v_x(\frac{n!}{4}) = 2$ (Et pour $x = 2$, il suffira que $n \geq 8$ pour que $v_2(\frac{n!}{4}) > \frac{n}{2}$).
Il suffira alors de montrer que $x^{\frac{n-x}{x}} - n > 0$ sur l'intervalle $]2, \frac{n}{3}]$, sachant que sur l'intervalle $]\frac{n}{3}, \frac{n}{2}]$ on a $x^2 > n$ (Et pour $x = 2$, on a bien que pour $n \geq 8$, $2^{\frac{n}{2}} > n$).
Pour n donné, soit la fonction $f(x) = x^{\frac{n-x}{x}} - n$. Montrons alors qu'elle est positive sur $]2, \frac{n}{3}]$.
Pour cela, on peut montrer que la fonction $g(x) = \frac{n-x}{x} ln(x) - ln(n)$ est positive sur $]2, \frac{n}{3}]$
(où ln est la fonction logarithme népérien).
On a $g'(x) = (\frac{n-x}{x})' ln(x) + \frac{1}{x}(\frac{n-x}{x}) = \frac{n - nln(x) - x}{x^2} < 0$ sur $]2, +\infty[$.
Donc la fonction g est décroissante sur cet intervalle, donc décroissante sur $]2, \frac{n}{3}]$.

$$\text{On a } g(\frac{n}{3}) = \frac{n - \frac{n}{3}}{\frac{n}{3}} ln(\frac{n}{3}) - ln(n) = 2ln(\frac{n}{3}) - ln(n) = ln(n) - 2ln(3).$$

Mais on a $g(\frac{n}{3}) > 0 \iff n > 3^2 = 9$.
On a donc montré que pour n assez grand (≥ 10), on aurait $\frac{M}{2} = \prod_{i=1}^{t} a_i$ et $M \pm 1 = \prod_{i=1}^{t'} a'_i$, avec $t \geq t'$ et $a_i > a'_i, \forall i \in [\![1, t']\!]$. Ce qui est évidemment absurde car $M > 2(M \pm 1)$, M entier supérieur à 2 est impossible.
Et donc pour $n \geq 10$, il n'y a pas de solution de l'équation (2), et par suite pas de solution de l'équation (1).
On vérifie aisément que pour $n < 10$, les seules solutions de l'équation (1), sont celles correspondant aux valeurs 4, 5 et 7 de n. On peut donc énoncer le théorème suivant.

Théorème :

Les seules solutions (n, m) de l'équation diophantienne $n! + 1 = m^2$, sont les couples de nombres de Brown $(4, 5), (5, 11)s$ et $(7, 71)$.

Auteur : Babacar Gueye
Professeur contractuel de mathématiques au lycée de Sébikhotane
e-mail :gbabacar155@yahoo.fr
Tel :221 77 651 49 09

....

Références :

- Les notes ont été partiellement prises dans WIKIPEDIA.
- Pour de plus amples informations sur le problème de Brocard, on peut consulter la page WIKIPEDIA qu'on retrouve en tapant dans google "le problème de Brocard".