各种自旋粒子方程及其量子化的新表述

—常数不变张量分析与应用

施水荣 著

Email: hytvssr@hotmail.com

广东省惠州市惠阳区淡水开城大道中73号广播电视大楼(516211)

2024 年 10 月 3 日

序言

本书是对相对论、粒子物理和量子场论的充实、完善和进一步发展，总体上采用严格、解析、优美的描述方法，尽量使整个文章具有一种数学和物理的美感。本书前十九章是基础部分，提出了多个十分有用的数学工具，特别是我独立发展和创建了用于物理研究的常数不变张量分析方法，并按我自己的方式重新表述了经典物理，大部分内容属于经典场论和量子力学领域；二十章及之后是高级进阶部分，大部分内容属于量子场论领域，特别是给出了新的量子化程式，此新程式不依赖哈密顿量直接给出量子化规则，本书按此程式完成了任意时空中任意自旋线性粒子的量子化，极大丰富和扩展了量子场论的内容。在此特别说明一点，新的量子化程式本质上属于基于方程的量子化方法，特别适合无法写出哈密顿量的系统进行量子化，是对传统基于作用量量子化方法的补充。对于高自旋粒子一般难于直接写出其哈密顿或拉式量，故而无法直接采用传统基于作用量的量子化方法，但新的量子化程式就可以避开这个困难，可以直接对高自旋粒子进行量子化，并成功建立了相应的高自旋量子场论。

在此新版本中，我改正了前面版本中的多个错误，并严格解析地证明了多年来一直未解决的多个猜想，彻底解决了一系列数学和物理问题，进一步为论文奠定了坚实的数学基础。为此也增加了一些新的章节，导致整个文章越来越长，显得有些繁琐，逻辑也有点混乱，不符合美学，所以我对整个文章进行了比较大的精简和优化。我直接删减了与文章主线无关的几个章节，也删减了多个章节中一些繁琐的内容，也合并或微调了少部分章节的内容，从而突出了主线和精简优化了文章，使文章更具美感和逻辑性。当然，如果读者对删减的章节和内容感兴趣，可以阅读前面的版本。同时我仍采用上一版本的做法，将复杂繁琐的几个推广章节剥离文章主线，放到文章后段。这样既保持了内容的基本完整性，也兼顾了逻辑的流畅性，使读者不会被复杂繁琐问题阻断和产生厌烦，能相对容易并愉快地读下去。这样的安排更符合阅读的规律，也符合美学特征。抓住主线，去掉旁支末节，从简单到复杂，逐渐深入，一步一步推广，深刻完美展示完整的物理和数学内容。

具体来说，在第一至第二章中我独自发展创立了常数不变张量分析法 [1–3]，发现了某些美妙的数学性质，提出了很多重要有用的常数不变张量，为物理研究提供了一个十分有用的数学工具。在本版新增的第三章中系统讲述了范德蒙矩阵方法 [4]，为后续求解多个问题提供了有力的数学工具。第四章我继续发展提出了多个重要的复合常数不变张量，并详细研究了它们的各种性质。第五章在高低维时空和无限维表示两个维度上推广了常数不变张量。在第六章中指明了常数不变张量与表象变换之间的本质联系。在第七至十章中我运用前面章节建立的常数不变张量分析法等数学工具，重新表述了电磁场、Yang-Mills场、引力场和引力微子场的方程 [5–15]，提出了多种等价的表述形式 [1,2]，并严格解析地证明了各种表述形式之间的等价性，特别是分析得到了引力场毕安奇恒等式 [12–15]的旋量形式。

第十一章是本书的重中之重，也是我最开始写作此书的初衷。在此章中我独立创新地提出了一种全新的粒子方程表述形式：自旋方程，此方程直接用自旋和自旋张量矩阵构造，并注意到自旋张量同时也是场量相应表示的变换矩阵，所以此方程物理意义十分明确，可以根据粒子场量变换规律简单直接地写出相应的粒子方程，它正确描述了中微子 [6]、电磁场 [8,9]、Yang-Mills场 [7]和电子 [5] 等经典方程，并发现其无质量表示完全等价于全对称的Penrose旋量方程 [1,2]，当然它比Penrose旋量方程更广泛，可以描述更多物理方程。我继续利用自旋表述这个思想，进一步得到了正确描述Einstein引力场和引力微子的低一阶导数自旋方程。在以上这些自旋表述形式中可以很自然地引入一个标量场，从而推广得到了一个更有意思的方程：开关型自旋方程，在标量场为零时，自由粒子可以存在，在标量场不为零时，自由粒子不存在。此标量场的作用就象开关一样，控制粒子的产生与湮灭，这就为粒子的产生与湮灭提供了一种新的物理机制，同时也能回答宇宙暴涨期 [16] 为何只由标量场就可以完全描述。并且此方程本身对标量场有内在固有的限制，从而使标量场自动量子化，每一种量子化值对应截然不同的物理方程，一种对应经典粒子方程，一种对应类似扭量的方程，一种对应常数平凡解。这为五种超弦 [17] 的统一表述提供了一种新的思路和启示。

在第十二至十三章中我对Penrose旋量方程 [1,2]、Penrose扭量方程 [3]和Bargmann-Wigner方程 [18] 进行了全面深入的分析。并在平坦时空中严格证明了Bargmann-Wigner方程在半整数自旋情形 [19,20]等价于Rarita-Schwinger方程 [21,22]，在整数自旋情形 [20]等价于Klein-Gordon方程 [22,23]，揭示了Bargmann-

Wigner方程的深刻物理内涵。通过对比研究，发现Bargmann-Wigner方程更适合描写有质量粒子，而Penrose旋量方程或自旋方程更适合描写无质量粒子。

第十四章是对前面章节内容的进一步充实和深化，我换成从表象变换的角度去研究同一个物理问题，为后续的各种自旋粒子洛伦兹变换多项式表示的证明提供了一个数学基础，并同时用表象变换技术提出了全新的粒子耦合理论。在第十五章中我对洛伦兹变换 [24–26]作了细致深入的分析，特别是得到了各种常见自旋粒子洛伦兹变换的多项式表示，为以后各种自旋粒子物理的研究提供了又一个十分有用的数学工具。在第十六至十八章中我建立了自旋代数、螺旋度、特殊拟微分算子和矩阵连乘迹的数学分析，为下一步任意自旋无质量粒子的成功量子化提供了多个十分有用的数学工具。在新增的第十九章中我汇总得到了一系列组合恒等式，并大多给予了系统严格的证明，为物理研究提供了有力实用的数学支持。

在第二十章中，充分运用四维傅里叶变换技巧，汇聚讨论了非相对论性粒子的二次量子化细节。由于大多量子场论的书均没有详细论述Majorana粒子和中微子的量子化 [27]，我也一直没找到相应内容，为了弥补这个缺憾，决定自己动手推导演算，在第二十一章中我应用洛伦兹推动变换先给出了Dirac粒子的量子化 [27,28]，然后在此基础上采用类似的技巧又给出了Majorana粒子和中微子的详细量子化细节。**2019.8.2** 重大灵感产生，在第二十二至二十六章中我应用以上章节创立的数学工具和常数不变张量分析，按新的协变量子化程式成功完成了各种无质量自旋粒子的量子化，特别对标量场和电磁场分别单独一章进行了详细讨论，从而对比经典结果印证了新的量子化程式的合理性和正确性，然后在此基础上对各种无质量自旋粒子按相同、统一的程式成功进行了量子化。

在第二十七至二十九章中，基于Bargmann-Wigner方程并对照无质量粒子量子化的成功经验，对各种有质量自旋粒子按新的程式统一进行了量子化，给出了几种等价场或势的协变对易规则和各种因果函数。在第三十章中，我对各种对称和反对称平面波解采用类似的数学技巧进行了统一的处理和证明。在第三十一章中我重新梳理分析了前面章节各种方程的自旋基，理清了自旋基分解的逻辑推演关系和不同表象下的自旋基分解关系。并进一步论证了自旋基就是一般自旋算符的共同本征态，且自旋基分解系数就是CG系数。在第三十二章中我推广发展了全对称指标的多项式定理，为上一步按新的程式统一量子化有质量粒子提供了数学支持，同时基于历史上Behrends和Fronsdal构造出来的公式 [29,30]，并结合自己新的结论，得到了一个十分有意义的投影算子猜想。在第三十三至三十五章中，我详细论述了有质量矢量粒子、有质量引力微子和有质量引力子的具体量子化方案和结论。在第三十六至三十九章中，我试着按新的程式去统一量子化所有高、低维时空中的粒子，进行了很多有意义的推广和探索，取得了一系列成果，得到了与四维时空中完全类似的结论。特别是自然而然地涌现出了反对称张量场，这是在我意料之外的一个美妙结论。

在第四十至四十三章中我具体研究了二阶、多重、Dirac型和反对称的完美常数不变张量，进一步发展和丰富了常数不变张量分析法的内容。在第四十四章中，类比无质量情形，我利用Dirac型完美常数不变张量建立了有质量粒子的高旋场量子化方案。以上第四十至四十四章正是我从主线剥离出来的内容，放在此处，感兴趣的读者可以对照前面对应的章节一块阅读，不感兴趣的可以略过。在第四十五章中，我大胆猜测提出了一种新的相互作用，是否正确有待实践验证。

本书的数学和物理都具有较强的原创性，一些数学和物理概念、方法、内容也有一定新颖性，均是我自己本人独立地一步步演算严格建立起来的。比较正规的研究起始时间远的可以追溯到十几年前 [31]，最早始于2004年5月，那时只是初步建立了目前这个理论体系的基础部分，持续了好几年，但极大地影响了我正常的生活，故一度想把它彻底忘掉，所以中间又断了几年。虽然如此，但是我对理论物理的兴趣依然没有减退，后来从2015年3月起我又开启了新一轮的研究，从那时起连续写作 [32–36] 至今，一直没停。它耗费了我大量的时间与精力，并利用业余时间长期写作而成，在此特别感谢家人多年的理解与支持！由于本书很多课题涉及了全新的领域，具有挑战性和开放性，充满了好多猜想、试探、验证和证明，有些数学和物理问题只是大部分得到了解决，但并没有彻底完全解决。再加上本人水平有限，不能面面俱到，书中难免有错误之处，欢迎大家指正！

备注：从2015年3月起到2022年5月的七年间我想法从未间断过，总有灵感产生，几乎每天都在写作之中。但之后一段时间，没有再像之前几年一样灵感想法不断，并满怀激情。虽然还有几个重要问题没有得到彻底解决，但那段时间研究的激情和强烈的好奇心似乎已离我而去了。也许是思想疲劳了，也许是厌倦了，也许是

想法枯竭了。总之，一下子突然感觉没意思了。故在此之后我没再连续写作，只有零星的进展、研究和写作；在2022年9月初又产生了少些新的灵感，理清和证明了之前的一些猜想，之后只有零星缓慢的进展。

幸好这种情况只持续了近一年，直到2023年7月8日那天之后，灵感又开始不断大量出现了，我进一步发展了高阶、多重和Dirac型等多种完美常数不变张量；在2023年8月15日又产生了一个新的重要灵感，我一下就求出了近三年未解决的两个二元数列的通项公式；在2023年9月5日-9月7日这三天灵感突发，我终于把Dirac矩阵连乘积那一章节的猜想都进行了严格的证明；在2023年9月15日又严密化了一个多项式展开的重要定义并初步证明了一个相关猜想；在2023年10月22日-24日我又提出了B-W方程的高旋量场量子化等价方案；在2023年10月25日-26日我轻松获得并证明了反对称排序规律，由此顺带一举解决了两年前的对称排序猜想，严格证明了它。并基于新的反对称排序规律和之前章节全对称完美常数不变张量内容，类比发展了全反对称完美常数不变张量，使常数不变张量理论得到了进一步扩展和完善。在2023年12月期间，我改正了一个关于因果函数计算方面的错误；在2024年2月20日我偶然看到了关于范德蒙行列式[4]的相关知识，并运用此行列式一举解决了求解有关自旋的低阶展开系数问题，同时也成功彻底求出了近三年未解决的第三个二元通项公式。正所谓一点突破，则全面突破，并以点带面，一系列问题得到了彻底地解决；在2024年3月29日至31日期间，我受卡特兰数和范德蒙卷积恒等式的启发和指引，解决了一系列组合学恒等式猜想；在2024年5月3日，一个关于自旋矩阵重要的基本结论终于获得了严格全面的证明，重要一环终于被我彻底补上了。总之，这段时间灵感不断迸发，整体有所进展，很多遗留问题得到了解决。

2024年5月5日小结：经过多年的坚持与努力，绝大多数猜想已被严格证明并彻底获得解决。只留下极少数问题未获彻底解决，如下：一、投影算子猜想(难以解决)；二、高自旋量子场论的角动量算符问题(难以解决)；三、高自旋量子场论的量子方程疑惑(有点疑惑)；四、各种隐含组合恒等式的证明(可以解决但有点难度)。2024年5月5日后物理内容几乎没有新的进展，只有零星的修修补补，修正了一些排版小错误，完善美化了一些版面。除非以后有新的重大突破，这个方面的研究工作基本告一段落了。

作者：施水荣

2015年3月-2024年10月于淡水

目录

第一章　常数不变张量分析

自我评述：本章我发展创立了常数不变张量分析方法，我是由已知的一些常数不变张量启发而发展起来的。本章发现了一大批新的基本常数不变张量，并且与物理联系紧密，具有天然的协变性与不变性，使用起来十分方便有用，是物理研究的一个新数学工具，其实我发展这个数学工具的初衷就是要用于物理研究。

1 类Penrose抽象指标 [1,2]

符号约定：$\sim$表示洛伦兹变换，$\prec$表示矩阵展开为分量，$\succ$表示分量收缩为矩阵，$\varsigma=\pm 1$。

自我评述：本节是对**Penrose**抽象指标的发展与推广，将$\frac{1}{2}$-自旋指标推广到了一般自旋指标，并引入了双重表示指标，双重表示指标对应无质量粒子的两种表示。这样做的好处是“一式两份”、一个表达两种表示同时呈现、一次处理同时得到两个结果，这样的抽象指标更美、更完备、更有力。

1.1 一般表象的厄密自旋矩阵$\sigma(s)$

$$\sigma(s)\times\sigma(s)=i\sigma(s),\sigma^2(s)=s(s+1),\sigma^+(s)=\sigma(s) \tag{1.1}$$

1.2 厄密自旋矩阵的一个具体表象 [37]

$$\sigma(s)=(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&A_1&0&0&0\\A_1&0&A_2&0&0\\0&A_2&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&A_{2s}\\0&0&0&A_{2s}&0\end{bmatrix},\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0&-A_1&0&0&0\\A_1&0&-A_2&0&0\\0&A_2&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&-A_{2s}\\0&0&0&A_{2s}&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}s&0&0&0&0\\0&s-1&0&0&0\\0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&-(s-1)&0\\0&0&0&0&-s\end{bmatrix}) \tag{1.2a}$$

$$A_n=\sqrt{n}\cdot\sqrt{2s+1-n},n=1,2,\cdots,2s;\sigma(s)\prec\sigma_{\alpha_\varsigma k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)\simeq\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s) \tag{1.2b}$$

$$\sigma(s)\times\sigma(s)=i\sigma(s),\sigma^2(s)=s(s+1),\sigma^+(s)=\sigma(s),s=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\cdots \tag{1.2c}$$

与此自旋矩阵相对应的度规张量如下：

$$\varepsilon(s)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&(-1)^0\\0&0&0&(-1)^1&0\\0&0&(-1)^2&0&0\\0&\cdots&0&0&0\\(-1)^{2s}&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0\\0&\cdots&0&0&0\\(-1)^{2s}&0&0&0&0\end{bmatrix},\sigma^*(s)=(-1)^{2s+1}\varepsilon(s)\sigma(s)\varepsilon(s) \tag{1.3}$$

$$\varepsilon(s)\prec\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s)\simeq\varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s)\simeq\varepsilon_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s)\simeq\varepsilon^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s),\varepsilon^2(s)=(-1)^{2s} \tag{1.4}$$

自我评述：自旋矩阵选取本质上是有无穷种选法，可以是厄密的，也可以不是厄密的。本书主要采用的是以上特殊表示的厄密自旋矩阵，这样做的理由是量子力学中观测量要求是厄密的，另一个理由是在这种表示自旋矩阵下存在下一章的完美常数不变张量，若采用其它表示的自旋矩阵，得不到这样完美的常数不变张量。事实上一开始我采用的是一个全整数的自旋矩阵，表面上似乎更漂亮，但没有以上两个优点，最终我还是放弃了它而采用了现在的这种厄密表示。

1.3 正交标架下洛伦兹变换参数ϑ^{ab}和自旋张量$S_{ab}(s,\varsigma)$(本书采用此标架)

$\epsilon\in R$表示O'(粒子)相对O的速度，$\omega\in R$表示O'(粒子)相对O的旋转角度。

自我评述：这样规定好，物理理解才不会混淆，尤其时间久了，就很容易搞不清参数与真实物理的对应了，一般是差个符号。万一忘了，可以回到此处，正本清源。

$$g_{ab}\simeq g^{ab}\succ diag(1,1,1,1),x^a\simeq x_a=(x,y,z,it),\vec{\vartheta}\equiv i\omega+\epsilon \tag{1.5a}$$

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\\it'\end{bmatrix}(=x'^a)=e^{\vartheta^a{}_b}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\it\end{bmatrix}(=x^b),\vartheta^a{}_b\succ\begin{bmatrix}0&\omega_z&-\omega_y&i\epsilon_x\\-\omega_z&0&\omega_x&i\epsilon_y\\\omega_y&-\omega_x&0&i\epsilon_z\\-i\epsilon_x&-i\epsilon_y&-i\epsilon_z&0\end{bmatrix}\prec\vartheta_a{}^b\simeq\vartheta^{ab}\simeq\vartheta_{ab}\succ i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L \tag{1.5b}$$

$$\vartheta_{ij}=\varepsilon_{ijk}\omega^k,\omega_k=\frac{1}{2}\varepsilon_{kij}\vartheta^{ij} \tag{1.5c}$$

$$x'^a=(g^a{}_b+\vartheta^a{}_b)x^b,x'^a=(g^{ab}+\vartheta^{ab})x_b,x'_a=(g_a{}^b+\vartheta_a{}^b)x_b,x'_a=(g_{ab}+\vartheta_{ab})x^b \tag{1.5d}$$

$$\begin{cases}\delta x_a=\vartheta_a{}^b x_b=\vartheta_{ab}x^b,\delta x^a=\vartheta^a{}_b x^b=\vartheta^{ab}x_b\\ \vec{S}_{abcd}=-i(g_{ac}g_{bd}-g_{ad}g_{bc})\succ\begin{bmatrix}0&R_z(s)&-R_y(s)&-L_x(s)\\-R_z(s)&0&R_x(s)&-L_y(s)\\R_y(s)&-R_x(s)&0&-L_z(s)\\L_x(s)&L_y(s)&L_z(s)&0\end{bmatrix}\end{cases}\tag{1.5e}$$

$$\begin{cases}\delta\varphi(s)=\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma)\varphi(s)=\frac{i}{2}\vartheta_{ab}S^{ab}(s,\varsigma)\varphi(s)\\ S^{ab}(s,\varsigma)\succ\begin{bmatrix}0&\sigma_z(s)&-\sigma_y(s)&-\varsigma\sigma_x(s)\\-\sigma_z(s)&0&\sigma_x(s)&-\varsigma\sigma_y(s)\\\sigma_y(s)&-\sigma_x(s)&0&-\varsigma\sigma_z(s)\\\varsigma\sigma_x(s)&\varsigma\sigma_y(s)&\varsigma\sigma_z(s)&0\end{bmatrix}\prec S_{ab}(s,\varsigma)=-i[\sigma(s),\frac{i\varsigma}{2}]_{[a}[\sigma(s),-\frac{i\varsigma}{2}]_{b]}\end{cases}\tag{1.5f}$$

$$\begin{cases}L_{ab}=x_ap_b-x_bp_a\succ\begin{bmatrix}0&xp_y-yp_x&-(zp_x-xp_z)&ixE-itp_x\\-(xp_y-yp_x)&0&yp_z-zp_y&iyE-itp_y\\zp_x-xp_z&-(yp_z-zp_y)&0&izE-itp_z\\-(ixE-itp_x)&-(iyE-itp_y)&-(izE-itp_z)&0\end{bmatrix}\\ M_{ab}=L_{ab}+S_{ab}(s,\varsigma)=-i(x_a\partial_b-x_b\partial_a)+S_{ab}(s,\varsigma)\end{cases}\tag{1.5g}$$

自我评述：标架选取本质上也有无穷种选法，常用的也有好几种。本书采用的是本节的正交标架，这样的好处是在这种标架下常数不变张量更简单、更统一、更有规律。当然通过等价变换也可以变换到其它标架表示。

1.4 其它标架下洛伦兹变换参数ϑ^{ab}和自旋张量$S_{ab}(s,\varsigma)$的对比

1.4.1 伪标架

$$g_{ab}=g^{ab}=diag(1,1,1,-1),x^a=(x,y,z,t),x_a=(x,y,z,-t)\tag{1.6a}$$

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{bmatrix}(=x'^a)=e^{\vartheta^a{}_b}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}(=x^b),\vartheta^a{}_b=\begin{bmatrix}0&\omega_z&-\omega_y&-\epsilon_x\\-\omega_z&0&\omega_x&-\epsilon_y\\\omega_y&-\omega_x&0&-\epsilon_z\\-\epsilon_x&-\epsilon_y&-\epsilon_z&0\end{bmatrix},x'_a=(g_a{}^b+\vartheta_a{}^b)x_b\tag{1.6b}$$

$$\vartheta_{ab}=g_{ac}\vartheta^c{}_b\succ\begin{bmatrix}0&\omega_z&-\omega_y&-\epsilon_x\\-\omega_z&0&\omega_x&-\epsilon_y\\\omega_y&-\omega_x&0&-\epsilon_z\\\epsilon_x&\epsilon_y&\epsilon_z&0\end{bmatrix},\vartheta^{ab}=\vartheta^a{}_cg^{cb}\succ\begin{bmatrix}0&\omega_z&-\omega_y&\epsilon_x\\-\omega_z&0&\omega_x&\epsilon_y\\\omega_y&-\omega_x&0&\epsilon_z\\-\epsilon_x&-\epsilon_y&-\epsilon_z&0\end{bmatrix},\vartheta_a{}^b=g_{ac}\vartheta^c{}_dg^{db}\succ\begin{bmatrix}0&\omega_z&-\omega_y&\epsilon_x\\-\omega_z&0&\omega_x&\epsilon_y\\\omega_y&-\omega_x&0&\epsilon_z\\\epsilon_x&\epsilon_y&\epsilon_z&0\end{bmatrix}\tag{1.6c}$$

$$x'^a=(g^a{}_b+\vartheta^a{}_b)x^b,x'^a=(g^{ab}+\vartheta^{ab})x_b,x'_a=(g_a{}^b+\vartheta_a{}^b)x_b,x'_a=(g_{ab}+\vartheta_{ab})x^b\tag{1.6d}$$

$$\delta x^a=\vartheta_a{}^bx_b=\vartheta_{ab}x^b,\delta x_a=\vartheta^a{}_bx^b=\vartheta^{ab}x_b,\delta\psi(s)=\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma)\psi(s)=\frac{i}{2}\vartheta_{ab}S^{ab}(s,\varsigma)\psi(s)\tag{1.6e}$$

$$\vec{S}_{abcd}\succ\begin{bmatrix}0&R_z(s)&-R_y(s)&L_x(s)\\-R_z(s)&0&R_x(s)&L_y(s)\\R_y(s)&-R_x(s)&0&L_z(s)\\-L_x(s)&-L_y(s)&-L_z(s)&0\end{bmatrix}=-i(g_{ac}g_{bd}-g_{ad}g_{bc}),\delta x_a=\vartheta^{cd}\vec{S}_{abcd}x^b,\delta x^a=\vartheta_{cd}S^{abcd}x_b\tag{1.6f}$$

$$S^{ab}(s,\varsigma)\succ\begin{bmatrix}0&\sigma_z(s)&-\sigma_y(s)&i\varsigma\sigma_x(s)\\-\sigma_z(s)&0&\sigma_x(s)&i\varsigma\sigma_y(s)\\\sigma_y(s)&-\sigma_x(s)&0&i\varsigma\sigma_z(s)\\-i\varsigma\sigma_x(s)&-i\varsigma\sigma_y(s)&-i\varsigma\sigma_z(s)&0\end{bmatrix},S_{ab}(s,\varsigma)\succ\begin{bmatrix}0&\sigma_z(s)&-\sigma_y(s)&-i\varsigma\sigma_x(s)\\-\sigma_z(s)&0&\sigma_x(s)&-i\varsigma\sigma_y(s)\\\sigma_y(s)&-\sigma_x(s)&0&-i\varsigma\sigma_z(s)\\i\varsigma\sigma_x(s)&i\varsigma\sigma_y(s)&i\varsigma\sigma_z(s)&0\end{bmatrix},\varsigma=\pm1\tag{1.6g}$$

$$L_{ab}=x_ap_b-x_bp_a\succ\begin{bmatrix}0&xp_y-yp_x&-(zp_x-xp_z)&-(xE-tp_x)\\-(xp_y-yp_x)&0&yp_z-zp_y&-(yE-tp_y)\\zp_x-xp_z&-(yp_z-zp_y)&0&-(zE-tp_z)\\xE-tp_x&yE-tp_y&zE-tp_z&0\end{bmatrix},M_{ab}=L_{ab}+S_{ab}(s,\varsigma)\tag{1.6h}$$

1.4.2 负伪标架

$$g_{ab}=g^{ab}=-diag(1,1,1,-1),x^a=(x,y,z,t),x_a=-(x,y,z,-t)\tag{1.7a}$$

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{bmatrix}(=x'^a)=e^{\vartheta^a{}_b}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}(=x^b),\vartheta^a{}_b=\begin{bmatrix}0&\omega_z&-\omega_y&-\epsilon_x\\-\omega_z&0&\omega_x&-\epsilon_y\\\omega_y&-\omega_x&0&-\epsilon_z\\-\epsilon_x&-\epsilon_y&-\epsilon_z&0\end{bmatrix},x'_a=(g_a{}^b+\vartheta_a{}^b)x_b\tag{1.7b}$$

$$\vartheta_{ab}=g_{ac}\vartheta^c{}_b\succ-\begin{bmatrix}0&\omega_z&-\omega_y&-\epsilon_x\\-\omega_z&0&\omega_x&-\epsilon_y\\\omega_y&-\omega_x&0&-\epsilon_z\\\epsilon_x&\epsilon_y&\epsilon_z&0\end{bmatrix},\vartheta^{ab}=\vartheta^a{}_cg^{cb}\succ-\begin{bmatrix}0&\omega_z&-\omega_y&\epsilon_x\\-\omega_z&0&\omega_x&\epsilon_y\\\omega_y&-\omega_x&0&\epsilon_z\\-\epsilon_x&-\epsilon_y&-\epsilon_z&0\end{bmatrix},\vartheta_a{}^b=g_{ac}\vartheta^c{}_dg^{db}\succ\begin{bmatrix}0&\omega_z&-\omega_y&\epsilon_x\\-\omega_z&0&\omega_x&\epsilon_y\\\omega_y&-\omega_x&0&\epsilon_z\\\epsilon_x&\epsilon_y&\epsilon_z&0\end{bmatrix}\tag{1.7c}$$

$$x'^a = (g^a{}_b + \vartheta^a{}_b)x^b, x'^a = (g^{ab} + \vartheta^{ab})x_b, x'_a = (g_a{}^b + \vartheta_a{}^b)x_b, x'_a = (g_{ab} + \vartheta_{ab})x^b \tag{1.7d}$$

$$\delta x^a = \vartheta_a{}^b x_b = \vartheta_{ab}x^b, \delta x_a = \vartheta^a{}_b x^b = \vartheta^{ab}x_b, \delta\psi(s) = \tfrac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma)\psi(s) = \tfrac{i}{2}\vartheta_{ab}S^{ab}(s,\varsigma)\psi(s) \tag{1.7e}$$

$$\vec{S}_{abcd} \succ \begin{bmatrix} 0 & R_z(s) & -R_y(s) & L_x(s) \\ -R_z(s) & 0 & R_x(s) & L_y(s) \\ R_y(s) & -R_x(s) & 0 & L_z(s) \\ -L_x(s) & -L_y(s) & -L_z(s) & 0 \end{bmatrix} = -i(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}), \delta x_a = \vartheta^{cd}\vec{S}_{abcd}x^b, \delta x^a = \vartheta_{cd}S^{abcd}x_b \tag{1.7f}$$

$$S^{ab}(s,\varsigma) \succ -\begin{bmatrix} 0 & \sigma_z(s) & -\sigma_y(s) & i\varsigma\sigma_x(s) \\ -\sigma_z(s) & 0 & \sigma_x(s) & i\varsigma\sigma_y(s) \\ \sigma_y(s) & -\sigma_x(s) & 0 & i\varsigma\sigma_z(s) \\ -i\varsigma\sigma_x(s) & -i\varsigma\sigma_y(s) & -i\varsigma\sigma_z(s) & 0 \end{bmatrix}, S_{ab}(s,\varsigma) \succ -\begin{bmatrix} 0 & \sigma_z(s) & -\sigma_y(s) & -i\varsigma\sigma_x(s) \\ -\sigma_z(s) & 0 & \sigma_x(s) & -i\varsigma\sigma_y(s) \\ \sigma_y(s) & -\sigma_x(s) & 0 & -i\varsigma\sigma_z(s) \\ i\varsigma\sigma_x(s) & i\varsigma\sigma_y(s) & i\varsigma\sigma_z(s) & 0 \end{bmatrix}, \varsigma = \pm 1 \tag{1.7g}$$

$$L_{ab} = x_a p_b - x_b p_a \succ -\begin{bmatrix} 0 & xp_y - yp_x & -(zp_x - xp_z) & -(xE - tp_x) \\ -(xp_y - yp_x) & 0 & yp_z - zp_y & -(yE - tp_y) \\ zp_x - xp_z & -(yp_z - zp_y) & 0 & -(zE - tp_z) \\ xE - tp_x & yE - tp_y & zE - tp_z & 0 \end{bmatrix}, M_{ab} = L_{ab} + S_{ab}(s,\varsigma) \tag{1.7h}$$

1.5 s-自旋旋量指标

s-自旋旋量指标定义:用阿拉伯小写字母$\{i,j,k,l,m,n,p,q,r,s\}$特别表示一般自旋情形。

$${}_{k_\varsigma} \sim e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma)} = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)} \qquad \Leftrightarrow {}_{k_+} := {}_k \sim e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\sigma(s)} \qquad {}_{k_-} := {}^{k'} \sim e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\sigma(s)} \tag{1.8}$$

$${}^{k_\varsigma} \sim e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^T_{ab}(s,\varsigma)} = e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma^T(s)} \qquad \Leftrightarrow {}^{k_+} := {}^k \sim e^{-(i\omega+\epsilon)\cdot\sigma^T(s)} \qquad {}^{k_-} := {}_{k'} \sim e^{-(i\omega-\epsilon)\cdot\sigma^T(s)} \tag{1.9}$$

$${}^{k'_\varsigma} \sim e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,-\varsigma)} = e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)} \qquad \Leftrightarrow {}^{k'_+} := {}^{k'} \sim e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\sigma(s)} \qquad {}^{k'_-} := {}_k \sim e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\sigma(s)} \tag{1.10}$$

$${}_{k'_\varsigma} \sim e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^T_{ab}(s,-\varsigma)} = e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma^T(s)} \qquad \Leftrightarrow {}_{k'_+} := {}_{k'} \sim e^{-(i\omega-\epsilon)\cdot\sigma^T(s)} \qquad {}_{k'_-} := {}^k \sim e^{-(i\omega+\epsilon)\cdot\sigma^T(s)} \tag{1.11}$$

指标关系: 指标恒等，旋量也恒等，是定义。

$$\begin{cases} {}^{k_\varsigma} \equiv {}_{k'_{-\varsigma}} \\ {}^{k_{-\varsigma}} \equiv {}_{k'_\varsigma} \end{cases} \quad \begin{cases} {}_{k_\varsigma} \equiv {}^{k'_{-\varsigma}} \\ {}_{k_{-\varsigma}} \equiv {}^{k'_\varsigma} \end{cases} \quad \begin{cases} {}^{k_+} \equiv {}_{k'_-} \equiv {}^k \\ {}^{k_-} \equiv {}_{k'_+} \equiv {}_{k'} \end{cases} \quad \begin{cases} {}_{k_+} \equiv {}^{k'_-} \equiv {}_k \\ {}_{k_-} \equiv {}^{k'_+} \equiv {}^{k'} \end{cases} \tag{1.12}$$

共轭指标: 指标相等，旋量可能等，可能不等。而且在特殊的厄密表象下才成立。

$$\begin{cases} ({}^{k_\varsigma})^* = {}^{k'_\varsigma} \\ ({}_{k_\varsigma})^* = {}_{k'_\varsigma} \end{cases} \quad \begin{cases} ({}^{k'_\varsigma})^* = {}^{k_\varsigma} \\ ({}_{k'_\varsigma})^* = {}_{k_\varsigma} \end{cases} \quad \begin{cases} ({}^{k})^* = {}^{k'} \\ ({}_{k})^* = {}_{k'} \end{cases} \quad \begin{cases} ({}^{k'})^* = {}^{k} \\ ({}_{k'})^* = {}_{k} \end{cases} \tag{1.13}$$

s-自旋旋量指标对应的度规张量和自洽的升降规则如下：

$$\begin{cases} \varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s) \simeq \varepsilon^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s) \simeq \varepsilon_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s) \simeq \varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s) \succ \varepsilon(s) \\ \psi_{k_\varsigma} = (-\varsigma)^{2s}\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s)\psi^{l_\varsigma}, \psi^{k_\varsigma} = \varsigma^{2s}\varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s)\psi_{l_\varsigma} \\ \psi_{k'_\varsigma} = (-\varsigma)^{2s}\varepsilon_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s)\psi^{l'_\varsigma}, \psi^{k'_\varsigma} = \varsigma^{2s}\varepsilon^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s)\psi_{l'_\varsigma} \end{cases} \tag{1.14}$$

自洽的升降规则本质如下，与Penrose的规则一致，且Penrose指标与我的指标一致。

$$\begin{cases} \varepsilon_{k'l'}(s) = [\varepsilon_{kl}(s)]^* \simeq \varepsilon_{kl}(s), \varepsilon^{k'l'}(s) = [\varepsilon^{kl}(s)]^* \simeq \varepsilon^{kl}(s) \\ \psi_k = (-1)^{2s}\varepsilon_{kl}(s)\psi^l, \psi^k = \varepsilon^{kl}(s)\psi_l \\ \psi_{k'} = (-1)^{2s}\varepsilon_{k'l'}(s)\psi^{l'}, \psi^{k'} = \varepsilon^{k'l'}(s)\psi_{l'} \end{cases} \tag{1.15}$$

自我评述：为什么要这样规定新抽象指标的升降规则，主要考虑是两点，一是尽量与Penrose抽象指标规则一致；二是新抽象指标内在自洽性要求的，也是后面大量常数不变张量实际计算实践的总结与提炼。

1.6 $\frac{1}{2}$-自旋旋量指标

$\frac{1}{2}$-自旋旋量指标是s-自旋旋量指标的特例，为了与Penrose抽象指标一致，仍用阿拉伯大写字母$\{A,B,C,\cdots\}$特别表示$\frac{1}{2}$-自旋情形，定义与规则如上节所示(取$s=\frac{1}{2}$)。

1.7 复矢量指标

光子自旋矩阵:用希腊字母$\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\}$特别表示复矢量指标。

$$\gamma=\{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\} \tag{1.16}$$

形式上取$\sigma(1)=\gamma$, 得复矢量指标如下:

$$\alpha_\varsigma\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma} \qquad \Leftrightarrow \alpha_+:=\alpha\sim e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma} \qquad \alpha_-:=\alpha'\sim e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma} \tag{1.17}$$

$$\alpha'_\varsigma\sim e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\gamma} \qquad \Leftrightarrow \alpha'_+:=\alpha'\sim e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma} \qquad \alpha'_-:=\alpha\sim e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma} \tag{1.18}$$

指标关系:

$$\alpha_\varsigma\equiv\alpha'_{-\varsigma},\alpha_{-\varsigma}\equiv\alpha'_\varsigma;\alpha_+\equiv\alpha'_-\equiv\alpha,\alpha_-\equiv\alpha'_+\equiv\alpha \tag{1.19}$$

共轭关系:

$$(\alpha_\varsigma)^*\equiv\alpha'_\varsigma,(\alpha'_\varsigma)^*\equiv\alpha_\varsigma;(\alpha)^*\equiv\alpha',(\alpha')^*\equiv\alpha \tag{1.20}$$

复矢量指标对应的度规张量及升降规则：

$$\begin{cases}g_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}=\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\succ I,g^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}=\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\succ I\\ g_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}=\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\succ I,g^{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}=\delta^{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\succ I\end{cases},\begin{cases}\psi_{\alpha_\varsigma}=g_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\psi^{\beta_\varsigma},\psi^{\alpha_\varsigma}=g^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\psi_{\beta_\varsigma}\\ \psi^{\alpha'_\varsigma}=g^{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\psi_{\beta'_\varsigma},\psi_{\alpha'_\varsigma}=g_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\psi^{\beta'_\varsigma}\end{cases} \tag{1.21}$$

此时度规张量是单位矩阵，可以不用区分逆变和协变张量，即上标与下标可以随意同步调换。

自我评述：复矢量指标来源于对电磁场、**Yang-Mills**场和引力场的描述，所以也特别适合描述它们。

1.8 矢量指标

空间旋转矩阵**R**和洛伦兹推动矩阵**L**：

$$R=\{\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\},L=\{\begin{bmatrix}0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-i&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&-i&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{bmatrix}\} \tag{1.22}$$

矢量指标如下:用阿拉伯小写字母$\{a,b,c,d,e,f,g,h,u,v,w\}$特别表示矢量指标.

$$a_\varsigma\sim e^{(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)} \qquad \Leftrightarrow a_+:=a\sim e^{\vartheta}=e^{(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)} \qquad a_-:=a'\sim e^{\vartheta^*}=e^{(i\omega\cdot R-\epsilon\cdot L)} \tag{1.23}$$

$$a'_\varsigma\sim e^{(i\omega\cdot R-\varsigma\epsilon\cdot L)} \qquad \Leftrightarrow a'_+:=a'\sim e^{\vartheta^*}=e^{(i\omega\cdot R-\epsilon\cdot L)} \qquad a'_-:=a\sim e^{\vartheta}=e^{(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)} \tag{1.24}$$

指标关系:

$$a_\varsigma\equiv a'_{-\varsigma},a_{-\varsigma}\equiv a'_\varsigma;a_+\equiv a'_-\equiv a,a_-\equiv a'_+\equiv a' \tag{1.25}$$

共轭关系:

$$(a_\varsigma)^*\equiv a'_\varsigma,(a'_\varsigma)^*\equiv a_\varsigma;(a)^*\equiv a',(a')^*\equiv a \tag{1.26}$$

矢量指标对应的度规张量及升降规则:

$$\begin{cases}g_{a_\varsigma b_\varsigma}=\delta_{a_\varsigma b_\varsigma}\succ I,g^{a_\varsigma b_\varsigma}=\delta^{a_\varsigma b_\varsigma}\succ I\\ g_{a'_\varsigma b'_\varsigma}=\delta_{a'_\varsigma b'_\varsigma}\succ I,g^{a'_\varsigma b'_\varsigma}=\delta^{a'_\varsigma b'_\varsigma}\succ I\end{cases},\begin{cases}\psi_{a_\varsigma}=g_{a_\varsigma b_\varsigma}\psi^{b_\varsigma},\psi^{a_\varsigma}=g^{a_\varsigma b_\varsigma}\psi_{b_\varsigma}\\ \psi^{a'_\varsigma}=g^{a'_\varsigma b'_\varsigma}\psi_{b'_\varsigma},\psi_{a'_\varsigma}=g_{a'_\varsigma b'_\varsigma}\psi^{b'_\varsigma}\end{cases} \tag{1.27}$$

此时度规张量是单位矩阵，可以不用区分逆变和协变张量，即上标与下标可以随意同步调换。

2 常用矩阵

2.1 泡利矩阵

$$\sigma=\{\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\},tr(\sigma_{\alpha_\varsigma})=0,tr(\sigma_{\alpha_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma})=2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \tag{1.28}$$

$$[\sigma_{\alpha_\varsigma},\sigma_{\beta_\varsigma}]=2i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\sigma_{\gamma_\varsigma},\{\sigma_{\alpha_\varsigma},\sigma_{\beta_\varsigma}\}=2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma},\sigma^2(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1) \tag{1.29}$$

2.2 光子矩阵

$$\gamma=\{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\},tr(\gamma_{\alpha_\varsigma})=0,tr(\gamma_{\alpha_\varsigma}\gamma_{\beta_\varsigma})=2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \tag{1.30}$$

$$[\gamma_{\alpha_\varsigma},\gamma_{\beta_\varsigma}]=i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\gamma_{\gamma_\varsigma},\gamma^2=1(1+1),\gamma_{\alpha_\varsigma}\prec\gamma_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\equiv-i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma} \tag{1.31}$$

2.3 旋转生成元矩阵

空间旋转生成元矩阵:

$$R=\{\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\},tr(R_{\alpha_\varsigma})=0,tr(R_{\alpha_\varsigma}R_{\beta_\varsigma})=2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \tag{1.32a}$$

洛伦兹推动生成元矩阵:

$$L=\{\begin{bmatrix}0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-i&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&-i&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{bmatrix}\},tr(L_{\alpha_\varsigma})=0,tr(L_{\alpha_\varsigma}L_{\beta_\varsigma})=2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \tag{1.32b}$$

$$[R_{\alpha_\varsigma},R_{\beta_\varsigma}]=i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}R_{\gamma_\varsigma},[L_{\alpha_\varsigma},L_{\beta_\varsigma}]=i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}R_{\gamma_\varsigma},[R_{\alpha_\varsigma},L_{\beta_\varsigma}]=[L_{\alpha_\varsigma},R_{\beta_\varsigma}]=i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}L_{\gamma_\varsigma} \tag{1.32c}$$

$$R^2=diag(2,2,2,0),L^2=diag(1,1,1,3),R\cdot L=0,L\cdot R=0 \tag{1.32d}$$

2.4 $SO(4)$群生成元矩阵

$SO(4)$群生成元矩阵的正分支：

$$\sigma_+=R+L=\{\begin{bmatrix}0&0&0&i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&i\\-i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{bmatrix}\} \tag{1.33a}$$

$$\sigma_+=\{-\sigma_y\otimes\sigma_x,-I\otimes\sigma_y,\sigma_y\otimes\sigma_z\},tr(\sigma_{+\alpha_\varsigma})=0,tr(\sigma_{+\alpha_\varsigma}\sigma_{+\beta_\varsigma})=4\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \tag{1.33b}$$

$SO(4)$群生成元矩阵的负分支：

$$\sigma_-=R-L=\{\begin{bmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&-i\\-i&0&0&0\\0&i&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{bmatrix}\} \tag{1.34a}$$

$$\sigma_-=\{\sigma_x\otimes\sigma_y,-\sigma_z\otimes\sigma_y,\sigma_y\otimes I\},tr(\sigma_{-\alpha_\varsigma})=0,tr(\sigma_{-\alpha_\varsigma}\sigma_{-\beta_\varsigma})=4\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \tag{1.34b}$$

$SO(4)$群生成元矩阵两个分支间的关系。

$$[\sigma_{+\alpha_\varsigma},\sigma_{+\beta_\varsigma}]=i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\sigma_{+\gamma_\varsigma},\{\sigma_{+\alpha_\varsigma},\sigma_{+\beta_\varsigma}\}=2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma},\sigma_+^2=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1) \tag{1.35a}$$

$$[\sigma_{-\alpha_\varsigma},\sigma_{-\beta_\varsigma}]=i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\sigma_{-\gamma_\varsigma},\{\sigma_{-\alpha_\varsigma},\sigma_{-\beta_\varsigma}\}=2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma},\sigma_-^2=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1) \tag{1.35b}$$

$$[\sigma_{+\alpha_\varsigma},\sigma_{-\beta_\varsigma}]=[\sigma_{-\alpha_\varsigma},\sigma_{+\beta_\varsigma}]=0 \tag{1.35c}$$

$SO(4)$群生成元矩阵的统一表示

$$\sigma_\varsigma=\{\begin{bmatrix}0&0&0&i\varsigma\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\-i\varsigma&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&i\varsigma\\-i&0&0&0\\0&-i\varsigma&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&i\varsigma\\0&0&-i\varsigma&0\end{bmatrix}\} \tag{1.36a}$$

$$[\sigma_{\kappa\alpha_\varsigma},\sigma_{\tau\beta_\varsigma}]=i\delta_{\kappa\tau}\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\sigma_{\kappa\gamma_\varsigma},\{\sigma_{\kappa\alpha_\varsigma},\sigma_{\tau\beta_\varsigma}\}=2\delta_{\kappa\tau}\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma},\sigma_\varsigma^2=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1) \tag{1.36b}$$

推论2.4.1. $\sigma^{ab}_{\varsigma\beta_\varsigma}=\sigma^a_\varsigma|_{\beta_\varsigma}{}^b=\{\begin{bmatrix}0&0&0&i\varsigma\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\varsigma\\i&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&i&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&i\varsigma\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-i\varsigma&0&0&0\\0&-i\varsigma&0&0\\0&0&-i\varsigma&0\end{bmatrix}\}$

推论2.4.2. $\sigma^{ab}_{-\varsigma\beta'_\varsigma}=\sigma^a_{-\varsigma}|_{\beta'_\varsigma}{}^b=\{\begin{bmatrix}0&0&0&-i\varsigma\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&-i\varsigma\\i&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&i&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&-i\varsigma\end{bmatrix},\begin{bmatrix}i\varsigma&0&0&0\\0&i\varsigma&0&0\\0&0&i\varsigma&0\end{bmatrix}\}$

自我评述：这对常数不变张量本质上就是**SO(4)**两个生成元矩阵；特霍夫特也用过，叫特霍夫特η矩阵；这对常数不变张量也出现于圈量子引力中**Ashtekar**作用量的构造，不过他们没叫常数不变张量。在这里它出现的地方更多，无处不在，应用十分广泛，是一个十分有用的基本常数不变张量，与自旋矩阵密切相关。应用它们也可以得到电磁场、**Yang-Mills**场方程的一种新表述-整旋量表述。

3 常数不变张量的发现与证明

3.1 各种常见度规常数不变张量

自我评述：这节的常数不变张量在我发展这个数学理论之前已经存在于数学与物理中了，我正是受它们和**Penrose**旋量分析的启发，才想发展出一般的常数不变张量理论，并应用到物理中，为物理研究提供一个有用

的数学工具。

3.1.1 四矢量度规常数不变张量$\delta_{a_\varsigma b_\varsigma}, \delta^{a_\varsigma b_\varsigma}, \delta_{a'_\varsigma b'_\varsigma}, \delta^{a'_\varsigma b'_\varsigma}$

定理3.1.1. $I_4 = e^{(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)} I_4 e^{(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)^T}$,即$\delta_{a_\varsigma b_\varsigma}, \delta^{a_\varsigma b_\varsigma}$是常数不变张量。

推论3.1.1. $I_4 = e^{(i\omega\cdot R-\varsigma\epsilon\cdot L)} I_4 e^{(i\omega\cdot R-\varsigma\epsilon\cdot L)^T}$,即$\delta_{a'_\varsigma b'_\varsigma}, \delta^{a'_\varsigma b'_\varsigma}$是常数不变张量。

3.1.2 复矢量度规常数不变张量$\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}, \delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}, \delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}, \delta^{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}$

定理3.1.2. $I_3 = e^{(i\omega+\varsigma\varepsilon)\cdot\gamma} I_3 e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^T}$,即$\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}, \delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}$是常数不变张量。

推论3.1.2. $I_3 = e^{(i\omega-\varsigma\varepsilon)\cdot\gamma} I_3 e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^T}$,即$\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}, \delta^{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}$是常数不变张量。

3.1.3 s-旋量度规常数不变张量$\varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s), \varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s), \varepsilon_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s), \varepsilon^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s)$

引理3.1.1. $\sigma^T(s) = (-1)^{2s+1}\varepsilon(s)\sigma(s)\varepsilon(s)$

定理3.1.3. $\varepsilon(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}\varepsilon(s)e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma^T(s)}$,即$\varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s)$是常数不变张量。

推论3.1.3. $\varepsilon(s) = e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}\varepsilon(s)e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma^T(s)}$,即$\varepsilon_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s)$是常数不变张量。

推论3.1.4. $\varepsilon(s) = e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma^T(s)}\varepsilon(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}$,即$\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s)$是常数不变张量。

推论3.1.5. $\varepsilon(s) = e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma^T(s)}\varepsilon(s)e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}$,即$\varepsilon^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s)$是常数不变张量。

3.1.4 反对称$\frac{1}{2}$-旋量度规张量$\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}, \varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}, \varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}, \varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}$

上节取$s = \frac{1}{2}$可得：$\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}, \varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}, \varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}, \varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}$是常数不变张量。

3.2 基本定理一及其相关常数不变张量

3.2.1 引理

引理3.2.1. $\vartheta_a{}^b(\Gamma, i\varsigma)_b \equiv (-\omega\times\Gamma-\varsigma\epsilon, -i\epsilon\cdot\Gamma)_a, \vartheta_a{}^b \succ \vartheta \equiv (i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)$

引理3.2.2. $\frac{1}{2}i\omega\cdot[\Gamma, \Gamma_{\alpha_\varsigma}] = (\omega\times\Gamma)_{\alpha_\varsigma}, \forall\omega\to 0 \Leftrightarrow [\Gamma_{\alpha_\varsigma}, \Gamma_{\beta_\varsigma}] = 2i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\Gamma_{\gamma_\varsigma}$

引理3.2.3. $\frac{1}{2}\epsilon\cdot\{\Gamma, \Gamma_{\alpha_\varsigma}\} = \epsilon_{\alpha_\varsigma}, \forall\epsilon\to 0 \Leftrightarrow \{\Gamma_{\alpha_\varsigma}, \Gamma_{\beta_\varsigma}\} = 2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}$

引理3.2.4. $\vartheta_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega^k, \vartheta_{i\pi} = i\epsilon_i, \vartheta_{\pi j} = -i\epsilon_j, \omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kij}\vartheta^{ij}$

3.2.2 基本定理一

在4维时空中存在如下定理：

定理3.2.1. $(\Gamma, i\varsigma)_a = [e^{(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)}]_a{}^b e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\Gamma}(\Gamma, i\varsigma)_b e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\Gamma} \Leftrightarrow \begin{cases}[\Gamma_{\alpha_\varsigma}, \Gamma_{\beta_\varsigma}] = 2i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\Gamma_{\gamma_\varsigma}\\ \{\Gamma_{\alpha_\varsigma}, \Gamma_{\beta_\varsigma}\} = 2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\end{cases}$

证明：$(\Gamma, i\varsigma)_a = [e^{(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)}]_a{}^b e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\Gamma}(\Gamma, i\varsigma)_b e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\Gamma}, \forall\omega, \forall\epsilon$

$\Leftrightarrow (\Gamma, i\varsigma)_a = (\delta_a{}^b + \vartheta_a{}^b)(1+(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\Gamma)(\Gamma, i\varsigma)_b(1-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\Gamma), \forall\omega\to 0, \forall\epsilon\to 0$

$\Leftrightarrow 0 = \vartheta_a{}^b(\Gamma, i\varsigma)_b + \frac{1}{2}i\omega\cdot[\Gamma, (\Gamma, i\varsigma)_a] + \frac{1}{2}\epsilon\cdot\{\Gamma, (\Gamma, i\varsigma)_a\}, \forall\omega\to 0, \forall\epsilon\to 0$

$\Leftrightarrow 0 = (-\omega\times\Gamma-\varsigma\epsilon, -i\epsilon\cdot\Gamma)_a + \frac{1}{2}i\omega\cdot[\Gamma, (\Gamma, i\varsigma)_a] + \frac{1}{2}\epsilon\cdot\{\Gamma, (\Gamma, i\varsigma)_a\}, \forall\omega\to 0, \forall\epsilon\to 0$

$\Leftrightarrow 0 = (-\omega\times\Gamma-\varsigma\epsilon)_{\alpha_\varsigma} + \frac{1}{2}i\omega\cdot[\Gamma, \Gamma_{\alpha_\varsigma}] + \frac{1}{2}\epsilon\cdot\{\Gamma, \Gamma_{\alpha_\varsigma}\}, \forall\omega\to 0, \forall\epsilon\to 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}i\omega\cdot[\Gamma, \Gamma_{\alpha_\varsigma}] = (\omega\times\Gamma)_{\alpha_\varsigma}, \frac{1}{2}\epsilon\cdot\{\Gamma, \Gamma_{\alpha_\varsigma}\} = \epsilon_{\alpha_\varsigma}, \forall\omega\to 0, \forall\epsilon\to 0$

$\Leftrightarrow [\Gamma_{\alpha_\varsigma}, \Gamma_{\beta_\varsigma}] = 2i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\Gamma_{\gamma_\varsigma}, \{\Gamma_{\alpha_\varsigma}, \Gamma_{\beta_\varsigma}\} = 2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}$ □

以上定理表明：对易关系$[\Gamma_{\alpha_\varsigma}, \Gamma_{\beta_\varsigma}] = 2i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\Gamma_{\gamma_\varsigma}$ 和反对易关系$\{\Gamma_{\alpha_\varsigma}, \Gamma_{\beta_\varsigma}\} = 2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}$ 意味着$(\Gamma, i\varsigma)_a$是常数不变张量，反之亦然。

3.2.3 常数不变张量$(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma},(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}$ [1,2]

推论3.2.1. $(\sigma,i\varsigma)^a=[e^{(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)}]^a{}_b e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma}(\sigma,i\varsigma)^b e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma}$,即$(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}$是常数不变张量。

推论3.2.2. $(\sigma,-i\varsigma)_a=[e^{(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)}]_a{}^b e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma}(\sigma,-i\varsigma)_b e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma}$,即$(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}$是常数不变张量。

自我评述：这对常数不变张量就是Penrose旋量分析 [1,2]的主角，这也是启示我发展一般常数不变张量理论的起因之一，在这里只是按我的方法重新发现而已。

3.2.4 基本定理一的推广

在任意N+1维时空中存在如下定理：(终于成功推广了)

定理3.2.2. $[\Gamma,i\varsigma]^a=[e^{\vartheta}]^a{}_b e^{\frac{1}{8}\vartheta^{ij}[\Gamma_i,\Gamma_j]+\varsigma\epsilon\cdot\frac{1}{2}\Gamma}[\Gamma,i\varsigma]^b e^{-\frac{1}{8}\vartheta^{ij}[\Gamma_i,\Gamma_j]+\varsigma\epsilon\cdot\frac{1}{2}\Gamma}\Leftrightarrow\{\Gamma_i,\Gamma_j\}=2\delta_{ij};S_{ij}:=-\frac{i}{4}[\Gamma_i,\Gamma_j]$

证明：$[\Gamma,i\varsigma]^a=[e^{\vartheta}]^a{}_b e^{\frac{1}{8}\vartheta^{ij}[\Gamma_i,\Gamma_j]+\varsigma\epsilon\cdot\frac{1}{2}\Gamma}[\Gamma,i\varsigma]^b e^{-\frac{1}{8}\vartheta^{ij}[\Gamma_i,\Gamma_j]+\varsigma\epsilon\cdot\frac{1}{2}\Gamma}$

$$\Leftrightarrow[\Gamma,i\varsigma]^a=[e^{\vartheta}]^a{}_b e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ij}S_{ij}+\varsigma\epsilon\cdot\frac{1}{2}\Gamma}[\Gamma,i\varsigma]^b e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ij}S_{ij}+\varsigma\epsilon\cdot\frac{1}{2}\Gamma}$$

$$\Leftrightarrow[\Gamma,i\varsigma]^a=(\delta^a{}_b+\vartheta^a{}_b)$$

$$[1+\tfrac{i}{2}\vartheta^{ij}S_{ij}+\varsigma\epsilon\cdot\tfrac{1}{2}\Gamma][\Gamma,i\varsigma]^b[1-\tfrac{i}{2}\vartheta^{ij}S_{ij}+\varsigma\epsilon\cdot\tfrac{1}{2}\Gamma]$$

$$\Leftrightarrow 0=\vartheta^a{}_b[\Gamma,i\varsigma]^b$$

$$+[\tfrac{i}{2}\vartheta^{ij}S_{ij}+\varsigma\epsilon\cdot\tfrac{1}{2}\Gamma][\Gamma,i\varsigma]^a+[\Gamma,i\varsigma]^a[-\tfrac{i}{2}\vartheta^{ij}S_{ij}+\varsigma\epsilon\cdot\tfrac{1}{2}\Gamma]$$

$$\Leftrightarrow 0=\vartheta^a{}_b[\Gamma,i\varsigma]^b+\tfrac{i}{2}\vartheta^{ij}[S_{ij},[\Gamma,i\varsigma]^a]+\tfrac{1}{2}\varsigma\{[\Gamma,i\varsigma]^a,\epsilon\cdot\Gamma\}$$

$$\Leftrightarrow 0=\vartheta^{ab}[\Gamma,i\varsigma]_b+\tfrac{i}{2}\vartheta^{ij}[S_{ij},[\Gamma,i\varsigma]^a]+\tfrac{1}{2}\varsigma\{[\Gamma,i\varsigma]^a,\epsilon\cdot\Gamma\}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0=\vartheta^{kb}[\Gamma,i\varsigma]_b+\frac{i}{2}\vartheta^{ij}[S_{ij},[\Gamma,i\varsigma]^k]+\frac{1}{2}\varsigma\{[\Gamma,i\varsigma]^k,\epsilon\cdot\Gamma\}\\0=\vartheta^{\pi b}[\Gamma,i\varsigma]_b+\frac{i}{2}\vartheta^{ij}[S_{ij},[\Gamma,i\varsigma]^\pi]+\frac{1}{2}\varsigma\{i\varsigma,\epsilon\cdot\Gamma\}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0=\vartheta^{kj}\Gamma_j+i\varsigma\vartheta^{k\pi}+\frac{i}{2}\vartheta^{ij}[S_{ij},\Gamma^k]+\frac{1}{2}\varsigma\epsilon_l\{\Gamma^k,\Gamma^l\}\\0=\vartheta^{\pi j}\Gamma_j+i\epsilon\cdot\Gamma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0=\vartheta^{kj}\Gamma_j+\frac{i}{2}\vartheta^{ij}[S_{ij},\Gamma^k]+\frac{1}{2}\varsigma\epsilon_l\{\Gamma^k,\Gamma^l\}-\varsigma\epsilon^k\\0=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0=\vartheta^{ij}\delta^k{}_i\Gamma_j+\tfrac{i}{2}\vartheta^{ij}[S_{ij},\Gamma^k]+\tfrac{1}{2}\varsigma\epsilon_l\{\Gamma^k,\Gamma^l\}-\varsigma\epsilon^k$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0=\frac{1}{2}\varsigma\epsilon_l\{\Gamma^k,\Gamma^l\}-\varsigma\epsilon^k\\0=\vartheta^{ij}\delta^k{}_i\Gamma_j+\frac{i}{2}\vartheta^{ij}[S_{ij},\Gamma^k]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0=\frac{1}{2}\varsigma\epsilon_l\{\Gamma^k,\Gamma^l\}-\varsigma\epsilon^k\\0=\vartheta^{ij}\{\frac{1}{2}\delta_{k[i}\Gamma_{j]}+\frac{i}{2}[S_{ij},\Gamma_k]\}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\{\Gamma_i,\Gamma_j\}=2\delta_{ij}\\i[\Gamma_k,S_{ij}]=\delta_{k[i}\Gamma_{j]}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\{\Gamma_i,\Gamma_j\}=2\delta_{ij}$$ □

以上定理表明：反对易关系$\{\Gamma_i,\Gamma_j\}=2\delta_{ij}$意味着$(\Gamma,i\varsigma)_a$是常数不变张量，反之亦然，基本定理一只是其特殊情形而已。

3.2.5 常数不变张量$[\Gamma(N),i\varsigma]^a_{A_\varsigma A'_\varsigma},[\Gamma(N),-i\varsigma]_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}$

推论3.2.3.
$\{\Gamma_i(N),\Gamma_j(N)\}=2\delta_{ij}\Rightarrow[\Gamma(N),i\varsigma]^a=[e^{\vartheta}]^a{}_b e^{\frac{1}{8}\vartheta^{ij}[\Gamma_i(N),\Gamma_j(N)]+\varsigma\epsilon\cdot\frac{1}{2}\Gamma(N)}[\Gamma(N),i\varsigma]^b e^{-\frac{1}{8}\vartheta^{ij}[\Gamma_i(N),\Gamma_j(N)]+\varsigma\epsilon\cdot\frac{1}{2}\Gamma(N)}$

自我评述：所以$[\Gamma(N),i\varsigma]^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}$和$[\Gamma(N),-i\varsigma]_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}$是常数不变张量，是Penrose旋量在高低维时空的推广。

3.3 基本定理二及其相关常数不变张量

3.3.1 基本定理二

定理3.3.1. $\Gamma_{\alpha_\varsigma}=[e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Gamma}\Gamma_{\beta_\varsigma}e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Gamma}\Leftrightarrow[\Gamma_{\alpha_\varsigma},\Gamma_{\beta_\varsigma}]=i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\Gamma_{\gamma_\varsigma}$

证明: $\Gamma_{\alpha_\varsigma} = [e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma} e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Gamma}\Gamma_{\beta_\varsigma} e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Gamma}, \forall\omega, \forall\epsilon$
$\Leftrightarrow \Gamma_{\alpha_\varsigma} = [\delta_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma} + (i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}][1+(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Gamma]\Gamma_{\beta_\varsigma}[1-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Gamma], \forall\omega\to 0, \forall\epsilon\to 0$
$\Leftrightarrow 0 = (i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\{\gamma_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}\Gamma_{\beta_\varsigma} + [\Gamma, \Gamma_{\alpha_\varsigma}]\}, \forall\omega\to 0, \forall\epsilon\to 0$
$\Leftrightarrow \gamma_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}\Gamma_{\beta_\varsigma} + [\Gamma, \Gamma_{\alpha_\varsigma}] = 0$
$\Leftrightarrow \gamma_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\Gamma_{\gamma_\varsigma} + [\Gamma_{\alpha_\varsigma}, \Gamma_{\beta_\varsigma}] = 0(\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma} \equiv i\gamma_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma})$
$\Leftrightarrow [\Gamma_{\alpha_\varsigma}, \Gamma_{\beta_\varsigma}] = i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\Gamma_{\gamma_\varsigma}$ □

以上定理表明：对易关系$[\Gamma_{\alpha_\varsigma}, \Gamma_{\beta_\varsigma}] = i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\Gamma_{\gamma_\varsigma}$ 意味着$\Gamma_{\alpha_\varsigma}$是常数不变张量，反之亦然。

3.3.2 广义基本定理二

定理3.3.2. $T_{\alpha_\varsigma} = [e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma} e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Gamma}T_{\beta_\varsigma} e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Gamma} \Leftrightarrow [\Gamma_{\alpha_\varsigma}, T_{\beta_\varsigma}] = i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}T_{\gamma_\varsigma}$

证明: $T_{\alpha_\varsigma} = [e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma} e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Gamma}T_{\beta_\varsigma} e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Gamma}, \forall\omega, \forall\epsilon$
$\Leftrightarrow T_{\alpha_\varsigma} = [\delta_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma} + (i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}][1+(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Gamma]T_{\beta_\varsigma}[1-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Gamma], \forall\omega\to 0, \forall\epsilon\to 0$
$\Leftrightarrow 0 = (i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\{\gamma_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}T_{\beta_\varsigma} + [\Gamma, T_{\alpha_\varsigma}]\}, \forall\omega\to 0, \forall\epsilon\to 0$
$\Leftrightarrow \gamma_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}T_{\beta_\varsigma} + [\Gamma, T_{\alpha_\varsigma}] = 0$
$\Leftrightarrow \gamma_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}T_{\gamma_\varsigma} + [\Gamma_{\alpha_\varsigma}, T_{\beta_\varsigma}] = 0(\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma} \equiv i\gamma_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma})$
$\Leftrightarrow [\Gamma_{\alpha_\varsigma}, T_{\beta_\varsigma}] = i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}T_{\gamma_\varsigma}$ □

3.3.3 推广：常数不变张量算符 [45]

定理3.3.3.
$$\begin{cases} \hat{T}(j,m) = \sum_{m'=j}^{-j}\langle j,m|U^+(R)|j,m'\rangle U(R)\hat{T}(j,m')U^+(R) \\ U(R)\hat{T}(j,m)U^+(R) = \sum_{m'=j}^{-j}\hat{T}(j,m')\langle j,m'|U(R)|j,m\rangle \\ U(R)|j,m\rangle = \sum_{m'=j}^{-j}|j,m'\rangle\langle j,m'|U(R)|j,m\rangle \end{cases}$$

3.3.4 常数不变张量$\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s), \sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s)$，$\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}, \sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}$

推论3.3.1. $\sigma^{\alpha_\varsigma}(s) = [e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma} e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}\sigma^{\beta_\varsigma}(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}$,即$\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)$是常数不变张量。

推论3.3.2. $\sigma^{\alpha_\varsigma} = [e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma} e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma}\sigma^{\beta_\varsigma}e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma}$,即$\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}$是常数不变张量。

推论3.3.3. $\sigma_{\alpha'_\varsigma}(s) = [e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha'_\varsigma}{}^{\beta'_\varsigma} e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}\sigma_{\beta'_\varsigma}(s)e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}$,即$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s)$是常数不变张量。

推论3.3.4. $\sigma_{\alpha'_\varsigma} = [e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha'_\varsigma}{}^{\beta'_\varsigma} e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma}\sigma_{\beta'_\varsigma}e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma}$,即$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}$是常数不变张量。

自我评述：这个定理表明自旋矩阵是常数不变张量，结合上一节的定理，发现泡利矩阵可以组合成两类常数不变张量，这很有意思，但其它自旋矩阵没这个性质，所以泡利矩阵很特别。

推论3.3.5. $\sigma_{\alpha'_\varsigma}(s) = [e^{i\omega\cdot\gamma}]_{\alpha'_\varsigma}{}^{\beta'_\varsigma} e^{i\omega\cdot\sigma(s)}\sigma_{\beta'_\varsigma}(s)e^{-i\omega\cdot\sigma(s)}[\Rightarrow]\sigma(s)\cdot\hat{p} = e^{i\omega\cdot\sigma(s)}\sigma_z(s)e^{-i\omega\cdot\sigma(s)}$

3.3.5 反对称常数不变张量$\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}, \varepsilon_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\gamma'_\varsigma}$

推论3.3.6. $\gamma_{\alpha_\varsigma}(s) = [e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma} e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}\gamma_{\beta_\varsigma}(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}$,即$\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}(\equiv i\gamma_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma})$是常数不变张量。

推论3.3.7. $\gamma_{\alpha'_\varsigma}(s) = [e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha'_\varsigma}{}^{\beta'_\varsigma} e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}\gamma_{\beta'_\varsigma}(s)e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}$,即$\varepsilon_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\gamma'_\varsigma}(\equiv i\gamma_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\gamma'_\varsigma})$是常数不变张量。

自我评述：以上表明三维反对称张量是四维洛伦兹常数不变张量。

3.3.6 过渡

推论3.3.8. $\sigma_{+\alpha_\varsigma} = [e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma} e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_+}\sigma_{+\beta_\varsigma}e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_+}$

推论3.3.9. $\sigma_{-\alpha_\varsigma} = [e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma} e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_-}\sigma_{-\beta_\varsigma}e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_-}$

3.3.7 常数不变张量$\sigma^{ab}_{+\alpha},\sigma^{ab}_{-\alpha'},\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma},\sigma^{ab}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}$

推论3.3.10. $\sigma_{+\alpha_\varsigma}=[e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}e^{(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)}\sigma_{+\beta_\varsigma}e^{-(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)}$,即$\sigma^{a_\varsigma b_\varsigma}_{+\alpha_\varsigma}$是常数不变张量。

证明: $\sigma_{+\alpha_\varsigma}=[e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_+}\sigma_{+\beta_\varsigma}e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_+}$

$\Leftrightarrow\sigma_{+\alpha_\varsigma}=[e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_+}[e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_-}\sigma_{+\beta_\varsigma}e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_-}]e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_+}$

$\Leftrightarrow\sigma_{+\alpha_\varsigma}=[e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}e^{(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)}\sigma_{+\beta_\varsigma}e^{-(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)}$,即$\sigma^{a_\varsigma b_\varsigma}_{+\alpha_\varsigma}$是常数不变张量。 □

推论3.3.11. $\sigma_{-\alpha'_\varsigma}=[e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha'_\varsigma}{}^{\beta'_\varsigma}e^{(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)}\sigma_{-\beta'_\varsigma}e^{-(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)}$, 即$\sigma^{a_\varsigma b_\varsigma}_{-\alpha'_\varsigma}$是常数不变张量。

证明: $\sigma_{-\alpha_\varsigma}=[e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_-}\sigma_{-\beta_\varsigma}e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_-}$

$\Leftrightarrow\sigma_{-\alpha_\varsigma}=[e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_-}[e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_+}\sigma_{-\beta_\varsigma}e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_+}]e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_-}$

$\Leftrightarrow\sigma_{-\alpha_\varsigma}=[e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}e^{(i\omega\cdot R-\varsigma\epsilon\cdot L)}\sigma_{-\beta_\varsigma}e^{-(i\omega\cdot R-\varsigma\epsilon\cdot L)}$,即$\sigma^{a'_\varsigma b'_\varsigma}_{-\alpha_\varsigma}$是常数不变张量。 □

综合$\sigma^{a_\varsigma b_\varsigma}_{+\alpha_\varsigma},\sigma^{a'_\varsigma b'_\varsigma}_{-\alpha_\varsigma}$ 两者可知: $\sigma^{ab}_{+\alpha},\sigma^{ab}_{-\alpha'}$ 是常数不变张量, 进一步可知: $\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma},\sigma^{ab}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}$ 是常数不变张量。

自我评述：以上严格证明了SO(4)两个生成元矩阵是常数不变张量。

3.3.8 基本定理二推广形式

引理3.3.1. $[\Gamma_i,\Gamma_j]=-2\gamma^k{}_{ij}\Gamma_k\Rightarrow[\gamma_i,\gamma_j]=-\gamma^k{}_{ij}\gamma_k$

定理3.3.4. $\Gamma_{\alpha_\varsigma}=[e^{\frac{i}{2}\omega^{ij}\vec{S}_{ij}+\varsigma\epsilon^k\gamma_k}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}e^{\frac{1}{8}\omega^{ij}[\Gamma_i,\Gamma_j]+\frac{1}{2}\varsigma\epsilon^k\Gamma_k}\Gamma_{\beta_\varsigma}e^{-(\frac{1}{8}\omega^{ij}[\Gamma_i,\Gamma_j]+\frac{1}{2}\varsigma\epsilon^k\Gamma_k)}$

$\Leftrightarrow[\Gamma_i,\Gamma_j]=-2\gamma^k{}_{ij}\Gamma_k,\frac{1}{4}[[\Gamma_i,\Gamma_j],\Gamma_k]=-i[\vec{S}_{ij}]_k{}^l\Gamma_l$

证明: $\Gamma_{\alpha_\varsigma}=[e^{\frac{i}{2}\omega^{ij}\vec{S}_{ij}+\varsigma\epsilon^k\gamma_k}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}e^{\frac{1}{8}\omega^{ij}[\Gamma_i,\Gamma_j]+\frac{1}{2}\varsigma\epsilon^k\Gamma_k}\Gamma_{\beta_\varsigma}e^{-(\frac{1}{8}\omega^{ij}[\Gamma_i,\Gamma_j]+\frac{1}{2}\varsigma\epsilon^k\Gamma_k)},\forall\omega,\forall\epsilon$

$\Leftrightarrow\Gamma_{\alpha_\varsigma}=[\delta_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}+(\frac{i}{2}\omega^{ij}\vec{S}_{ij}+\varsigma\epsilon^k\gamma_k)_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}][1+\frac{1}{8}\omega^{ij}[\Gamma_i,\Gamma_j]+\frac{1}{2}\varsigma\epsilon^k\Gamma_k]\Gamma_{\beta_\varsigma}[1-\frac{1}{8}\omega^{ij}[\Gamma_i,\Gamma_j]-\frac{1}{2}\varsigma\epsilon^k\Gamma_k],\forall\omega\to0,\forall\epsilon\to0$

$\Leftrightarrow0=(\frac{i}{2}\omega^{ij}\vec{S}_{ij}+\varsigma\epsilon^k\gamma_k)_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}\Gamma_{\beta_\varsigma}+[\frac{1}{8}\omega^{ij}[\Gamma_i,\Gamma_j]+\frac{1}{2}\varsigma\epsilon^k\Gamma_k,\Gamma_{\alpha_\varsigma}],\forall\omega\to0,\forall\epsilon\to0$

$\Leftrightarrow0=\epsilon^k\gamma_{k\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}\Gamma_{\beta_\varsigma}+[\epsilon^k\Gamma_k,\Gamma_{\alpha_\varsigma}],0=\frac{i}{2}\omega^{ij}[\vec{S}_{ij}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}\Gamma_{\beta_\varsigma}+[\frac{1}{8}\omega^{ij}[\Gamma_i,\Gamma_j],\Gamma_{\alpha_\varsigma}]$

$\Leftrightarrow[\Gamma_k,\Gamma_{\alpha_\varsigma}]=-2\gamma_{k\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}\Gamma_{\beta_\varsigma},\frac{1}{4}[[\Gamma_i,\Gamma_j],\Gamma_{\alpha_\varsigma}]=-i[\vec{S}_{ij}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}\Gamma_{\beta_\varsigma}$

$\Leftrightarrow[\Gamma_i,\Gamma_j]=-2\gamma^k{}_{ij}\Gamma_k,\frac{1}{4}[[\Gamma_i,\Gamma_j],\Gamma_k]=-i[\vec{S}_{ij}]_k{}^l\Gamma_l$

$\Leftrightarrow[\Gamma_i,\Gamma_j]=-2\gamma^k{}_{ij}\Gamma_k,\frac{1}{4}[[\Gamma_i,\Gamma_j],\Gamma_k]=\gamma^m{}_{ij}\gamma^l{}_{mk}\Gamma_l=\gamma_{ij}{}^m\gamma_{mk}{}^l\Gamma_l=-i[\vec{S}_{ij}]_k{}^l\Gamma_l$ □

以上$\gamma^k{}_{ij}$是四维类似物，$\vec{S}_{ij}$一般与$[\Gamma_i,\Gamma_j]$不直接相关。似乎无法推广，只有四维情形才满足。

推论3.3.12. $\Gamma_{\alpha_\varsigma}=[e^{\frac{i}{2}\omega^{ij}\vec{S}_{ij}}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}e^{\frac{1}{8}\omega^{ij}[\Gamma_i,\Gamma_j]}\Gamma_{\beta_\varsigma}e^{-\frac{1}{8}\omega^{ij}[\Gamma_i,\Gamma_j]}\Leftrightarrow\frac{1}{4}[[\Gamma_i,\Gamma_j],\Gamma_k]=-i[\vec{S}_{ij}]_k{}^l\Gamma_l$

3.4 基本定理三及其相关常数不变张量

3.4.1 基本定理三

在任意N+1维时空中存在如下定理：

定理3.4.1. $\Gamma_{ab}=[e^\vartheta]_a{}^c[e^\vartheta]_b{}^de^{\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\Gamma_{ef}}\Gamma_{cd}e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\Gamma_{ef}},\vartheta_{ab}=-\vartheta_{ba}$

$\Leftrightarrow i[\Gamma_{ab},\Gamma_{cd}]=\delta_{ad}\Gamma_{bc}-\delta_{ac}\Gamma_{bd}+\delta_{bc}\Gamma_{ad}-\delta_{bd}\Gamma_{ac}$

证明: $\Gamma_{ab}=[e^\vartheta]_a{}^c[e^\vartheta]_b{}^de^{\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\Gamma_{ef}}\Gamma_{cd}e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\Gamma_{ef}},\forall\vartheta^{ef}$

$\Leftrightarrow\Gamma_{ab}=[\delta_a{}^c+\vartheta_a{}^c][\delta_b{}^d+\vartheta_b{}^d](1+\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\Gamma_{ef})\Gamma_{cd}(1-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\Gamma_{ef}),\forall\vartheta^{ef}\to0$

$\Leftrightarrow0=\vartheta_a{}^c\Gamma_{cb}-\vartheta_b{}^d\Gamma_{da}-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}[\Gamma_{ab},\Gamma_{cd}],\forall\vartheta^{cd}\to0$

$\Leftrightarrow i\vartheta^{cd}[\Gamma_{ab},\Gamma_{cd}]=2(\vartheta_a{}^c\Gamma_{cb}-\vartheta_b{}^d\Gamma_{da}),\forall\vartheta^{cd}\to0$

$\Leftrightarrow i\vartheta^{cd}[\Gamma_{ab},\Gamma_{cd}]=\vartheta^{cd}(\delta_{ad}\Gamma_{bc}-\delta_{ac}\Gamma_{bd}+\delta_{bc}\Gamma_{ad}-\delta_{bd}\Gamma_{ac}),\forall\vartheta^{cd}\to0$

$\Leftrightarrow i[\Gamma_{ab},\Gamma_{cd}]=\delta_{ad}\Gamma_{bc}-\delta_{ac}\Gamma_{bd}+\delta_{bc}\Gamma_{ad}-\delta_{bd}\Gamma_{ac}$ □

以上定理表明: 对易关系$i[\Gamma_{ab},\Gamma_{cd}]=\delta_{ad}\Gamma_{bc}-\delta_{ac}\Gamma_{bd}+\delta_{bc}\Gamma_{ad}-\delta_{bd}\Gamma_{ac}$ 意味着Γ_{ab}是常数不变张量，反之亦然。

3.4.2 广义基本定理三

在任意N+1维时空中存在如下定理：

定理3.4.2. $T_{ab}=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\Gamma_{ef}}T_{cd}e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\Gamma_{ef}},\vartheta_{ab}=-\vartheta_{ba}$
$\Leftrightarrow i[T_{ab},\Gamma_{cd}]=\delta_{ac}T_{db}-\delta_{ad}T_{cb}+\delta_{bc}T_{ad}-\delta_{bd}T_{ac}$

证明: $T_{ab}=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\Gamma_{ef}}T_{cd}e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\Gamma_{ef}},\forall\vartheta^{ef}$
$\Leftrightarrow T_{ab}=[\delta_a{}^c+\vartheta_a{}^c][\delta_b{}^d+\vartheta_b{}^d](1+\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\Gamma_{ef})T_{cd}(1-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\Gamma_{ef}),\forall\vartheta^{ef}\to 0$
$\Leftrightarrow 0=\vartheta_a{}^cT_{cb}+\vartheta_b{}^dT_{ad}-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}[T_{ab},\Gamma_{cd}],\forall\vartheta^{cd}\to 0$
$\Leftrightarrow i\vartheta^{cd}[T_{ab},\Gamma_{cd}]=2(\vartheta_a{}^cT_{cb}+\vartheta_b{}^dT_{ad}),\forall\vartheta^{cd}\to 0$
$\Leftrightarrow i\vartheta^{cd}[T_{ab},\Gamma_{cd}]=2\vartheta^{cd}(-\delta_{ad}T_{cb}+\delta_{bc}T_{ad}),\forall\vartheta^{cd}\to 0$
$\Leftrightarrow i[T_{ab},\Gamma_{cd}]=\delta_{ac}T_{db}-\delta_{ad}T_{cb}+\delta_{bc}T_{ad}-\delta_{bd}T_{ac}$ □

3.4.3 自旋常数不变张量 [9]$S_{ab\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}}$

推论3.4.1. $S_{ab}=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ef}S_{ef}}S_{cd}e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}S_{ef}}$,即$S_{ab\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}}$是常数不变张量。

自我评述：以上表明在任意时空中物理的自旋张量都是常数不变张量。

3.4.4 自旋常数不变张量$S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,\varsigma),S_{ab}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,-\varsigma)$

推论3.4.2. $S_{ab}(s,\varsigma)=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ef}S_{ef}(s,\varsigma)}S_{cd}(s,\varsigma)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}S_{ef}(s,\varsigma)}$,即$S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,\varsigma)$是常数不变张量。

推论3.4.3. $S_{ab}(s,-\varsigma)=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ef}S_{ef}(s,-\varsigma)}S_{cd}(s,-\varsigma)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}S_{ef}(s,-\varsigma)}$,即$S_{ab}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,-\varsigma)$是常数不变张量。

3.4.5 自旋常数不变张量$S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2},\varsigma),S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}(\frac{1}{2},-\varsigma)$

上节取$s=\frac{1}{2}$可得： $S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2},\varsigma),S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}(\frac{1}{2},-\varsigma)$ **是常数不变张量。**

3.5 基本定理四及其相关常数不变张量

3.5.1 基本定理四

引理3.5.1. $[\Gamma_a,[\Gamma_c,\Gamma_d]]=\frac{1}{2}(\{\{\Gamma_a,\Gamma_c\},\Gamma_d\}-\{\Gamma_c,\{\Gamma_d,\Gamma_a\}\})$

在任意N+1维时空中存在如下定理：

定理3.5.1. $\Gamma_a=[e^{\vartheta}]_a{}^b e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\Gamma_{cd}}\Gamma_b e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\Gamma_{cd}}\Leftrightarrow i[\Gamma_a,\Gamma_{cd}]=\delta_{a[c}\Gamma_{d]}$

证明: $\Gamma_a=[e^{\vartheta}]_a{}^b e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\Gamma_{cd}}\Gamma_b e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\Gamma_{cd}},\forall\vartheta^{cd}$
$\Leftrightarrow\Gamma_a=[\delta_a{}^b+\vartheta_a{}^b](1+\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\Gamma_{cd})\Gamma_b(1-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\Gamma_{cd}),\forall\vartheta^{cd}\to 0$
$\Leftrightarrow 0=\vartheta_a{}^b\Gamma_b-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}[\Gamma_a,\Gamma_{cd}],\forall\vartheta^{cd}\to 0$
$\Leftrightarrow i\vartheta^{cd}[\Gamma_a,\Gamma_{cd}]=2\vartheta_a{}^b\Gamma_b,\forall\vartheta^{cd}\to 0$
$\Leftrightarrow i\vartheta^{cd}[\Gamma_a,\Gamma_{cd}]=\vartheta^{cd}(\delta_{ac}\Gamma_d-\delta_{ad}\Gamma_c),\forall\vartheta^{cd}\to 0$
$\Leftrightarrow i[\Gamma_a,\Gamma_{cd}]=\delta_{a[c}\Gamma_{d]}$ □

在任意N+1维时空中存在如下定理：

定理3.5.2. $\Gamma_a=[e^{\vartheta}]_a{}^b e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}}\Gamma_b e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}},S_{cd}=-\frac{i}{4}[\Gamma_c,\Gamma_d]\Leftrightarrow\frac{1}{4}[[\Gamma_c,\Gamma_d],\Gamma_a]=\Gamma_{[c}\delta_{d]a}$

证明: $\Gamma_a=[e^{\vartheta}]_a{}^b e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}}\Gamma_b e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}}$
$\Leftrightarrow\Gamma_a=(1+\vartheta)_a{}^b(1+\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd})\Gamma_b(1-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd})$
$\Leftrightarrow 0=\vartheta_a{}^b\Gamma_b+\frac{i}{2}\vartheta^{cd}[S_{cd},\Gamma_a]$
$\Leftrightarrow 0=-\frac{1}{2}\vartheta^{cd}\Gamma_{[c}\delta_{d]a}+\frac{i}{2}\vartheta^{cd}[S_{cd},\Gamma_a]$
$\Leftrightarrow i[\Gamma_a,S_{cd}]=\delta_{a[c}\Gamma_{d]}$
$\Leftrightarrow\frac{1}{4}[\Gamma_a,[\Gamma_c,\Gamma_d]]=\delta_{a[c}\Gamma_{d]}$ □

推论3.5.1. $\Gamma_k=[e^{\vartheta}]_k{}^l e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ij}S_{ij}}\Gamma_l e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ij}S_{ij}},S_{ij}=-\frac{i}{4}[\Gamma_i,\Gamma_j]\Leftrightarrow\frac{1}{4}[[\Gamma_i,\Gamma_j],\Gamma_k]=\Gamma_{[i}\delta_{j]k}$

3.5.2 $n=N+1$维时空中的常数不变张量$\Gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(n)$

引理3.5.2. $\{\Gamma_a,\Gamma_b\}=2\delta_{ab}\Rightarrow\frac{1}{4}[\Gamma_a,[\Gamma_c,\Gamma_d]]=\delta_{a[c}\Gamma_{d]}$

在任意N+1维时空中存在如下定理：

定理3.5.3. $\{\Gamma_a,\Gamma_b\}=2\delta_{ab}\Rightarrow\Gamma_a=[e^{\vartheta}]_a{}^b e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}}\Gamma_b e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}},S_{cd}=-\frac{i}{4}[\Gamma_c,\Gamma_d]$

定理3.5.4. $\{\Gamma_a,\Gamma_b\}=2\delta_{ab}\Rightarrow\begin{cases}\Gamma_{N+1}=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{*ab}S_{ab}}\Gamma_{N+1}e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}},S_{ab}=-\frac{i}{4}[\Gamma_a,\Gamma_b]\\\Gamma_{N+1}=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}}\Gamma_{N+1}e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{*ab}S_{ab}},S_{ab}=-\frac{i}{4}[\Gamma_a,\Gamma_b]\end{cases}$

定理3.5.5. $\{\Gamma_a,\Gamma_b\}=2\delta_{ab}\Rightarrow\begin{cases}\Gamma_{N+2}=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}}\Gamma_{N+2}e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}},S_{ab}=-\frac{i}{4}[\Gamma_a,\Gamma_b],\Gamma_{N+2}=\Gamma_1\cdots\Gamma_{N+1}\\\Gamma_{N+2}=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{*ab}S_{ab}}\Gamma_{N+2}e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{*ab}S_{ab}},S_{ab}=-\frac{i}{4}[\Gamma_a,\Gamma_b],\Gamma_{N+2}=\Gamma_1\cdots\Gamma_{N+1}\end{cases}$

自我评述：在任意N+1维时空中Dirac矩阵Γ_a和$\Gamma_{N+1},\Gamma_{N+2}$是常数不变张量。

3.5.3 常数不变张量 [5]$\gamma_{a\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\varsigma),\gamma_{5\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\varsigma),\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma},\gamma_4^{\lambda'_\varsigma\lambda_\varsigma}$

定义3.5.1. $\gamma_5(\varsigma)\equiv\gamma_x(\varsigma)\gamma_y(\varsigma)\gamma_z(\varsigma)\gamma_\pi(\varsigma),S_{ab}(e,\varsigma)\equiv-\frac{i}{4}[\gamma_a(\varsigma),\gamma_b(\varsigma)]$

定义3.5.2. $_{\lambda_\varsigma}\sim e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(e,\varsigma)},{}^{\mu_\varsigma}\sim e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^T_{ab}(e,\varsigma)}$

定义3.5.3. 一个特殊表象：$<\gamma_a(\varsigma),\gamma_5(\varsigma)>=[(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x),\varsigma I\otimes\sigma_z]$

推论3.5.2. $\gamma_a(\varsigma)=[e^{\vartheta}]_a{}^b e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(e,\varsigma)}\gamma_b(\varsigma)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(e,\varsigma)}$,即$\gamma_{a\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\varsigma)$是常数不变张量。

推论3.5.3. $\gamma_5(\varsigma)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(e,\varsigma)}\gamma_5(\varsigma)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(e,\varsigma)}$,即$\gamma_{5\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\varsigma)$是常数不变张量。

推论3.5.4. $I_4=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(e,\varsigma)}I_4e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(e,\varsigma)}$,即$\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}$是常数不变张量。

推论3.5.5. $\gamma_4=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{*ab}S_{ab}(e,\varsigma)}\gamma_4e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(e,\varsigma)}$,即$\gamma_4^{\lambda'_\varsigma\lambda_\varsigma}$是常数不变张量。

自我评述：以上表明四维时空中Dirac矩阵和γ_4,γ_5矩阵都是常数不变张量。

3.6 基本定理五及其相关常数不变张量

3.6.1 基本定理五

定理3.6.1. $T_\alpha=[e^{\theta^\gamma f_\gamma}]_\alpha{}^\beta e^{i\theta^\gamma T_\gamma}T_\beta e^{-i\theta^\gamma T_\gamma}\Leftrightarrow[T_\alpha,T_\beta]=if_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma,f_\alpha\prec f_{\alpha\beta}{}^\gamma$

证明：$T_\alpha=[e^{\theta^\gamma f_\gamma}]_\alpha{}^\beta e^{i\theta^\gamma T_\gamma}T_\beta e^{-\theta^{i\gamma}T_\gamma},\forall\theta^\gamma$

$\Leftrightarrow T_\alpha=(\delta_\alpha{}^\beta+\theta^\gamma f_{\gamma\alpha}{}^\beta)(1+i\theta^\gamma T_\gamma)T_\beta(1-i\theta^\gamma T_\gamma),\forall\theta^\gamma\to0$

$\Leftrightarrow0=\theta^\gamma(f_{\gamma\alpha}{}^\beta T_\beta+i[T_\gamma,T_\alpha]),\forall\theta^\gamma\to0$

$\Leftrightarrow0=f_{\gamma\alpha}{}^\beta T_\beta+i[T_\gamma,T_\alpha]$

$\Leftrightarrow[T_\alpha,T_\beta]=if_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma$ □

以上定理表明：对易关系$[T_\alpha,T_\beta]=if_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma$意味着Yang-Mills基$T_\alpha$是常数不变张量，反之亦然。并且基本定理二是本定理的特殊情形($f_{\alpha\beta}{}^\gamma=\varepsilon_{\alpha\beta}{}^\gamma,i\theta^\gamma=i\omega+\varsigma\epsilon,T_\alpha=\Gamma_\alpha$)，此定理更为广泛一般，可以描述内部空间和外部空间的协变性，并且对T_α的线性无关性没有要求。如果T_α满足线性无关性，则由群的结构方程可知群结构常数$f_{\alpha\beta}{}^\gamma$也满足类似Yang-Mills基T_α的对易关系，即有如下推论：

推论3.6.1. $[-if_\alpha,-if_\beta]=if_{\alpha\beta}{}^\gamma(-if_\gamma)\Leftrightarrow-if_\alpha=[e^{\theta^\gamma f_\gamma}]_\alpha{}^\beta e^{i\theta^\gamma(-if_\gamma)}(-if_\beta)e^{-i\theta^\gamma(-if_\gamma)}$

上式左侧就是群的结构方程，所以如果基T_α满足线性无关性，则群结构常数$f_{\alpha\beta}{}^\gamma$也是常数不变张量。
自我评述：以上表明Yang-Mills基和群结构常数是内部空间的常数不变张量。

3.7 基本定理六及其相关常数不变张量

3.7.1 基本定理六

定理3.7.1. $\Gamma = e^{(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)}\Gamma e^{-(i\omega\cdot R-\varsigma\epsilon\cdot L)} \Leftrightarrow [R,\Gamma]=0,\{L,\Gamma\}=0$

证明：$\Gamma = e^{(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)}\Gamma e^{-(i\omega\cdot R-\varsigma\epsilon\cdot L)},\forall\omega,\forall\epsilon$

$\Leftrightarrow \Gamma = [1+(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)]\Gamma[1-(i\omega\cdot R-\varsigma\epsilon\cdot L)],\forall\omega\to 0,\forall\epsilon\to 0$

$\Leftrightarrow 0 = (i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)]\Gamma-\Gamma(i\omega\cdot R-\varsigma\epsilon\cdot L),\forall\omega\to 0,\forall\epsilon\to 0$

$\Leftrightarrow 0 = i\omega\cdot[R,\Gamma]+\varsigma\epsilon\cdot\{L,\Gamma\},\forall\omega\to 0,\forall\epsilon\to 0$

$\Leftrightarrow [R,\Gamma]=0,\{L,\Gamma\}=0$ □

推论3.7.1. $\eta = e^{(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)}\eta e^{-(i\omega\cdot R-\varsigma\epsilon\cdot L)},\eta = diag(1,1,1,-1)$,即$\eta^{a_\varsigma}{}_{b'_\varsigma},\eta^{a}{}_{b'},\eta^{a'}{}_{b},\eta^{ab'},\eta^{a'b}$是常数不变张量。

自我评述：这个常数不变张量可以完成矢量与带撇矢量之间的相互转换，形式上与闵斯科夫度规一样。

3.8 新常数不变张量的各种获得方法

方法一：$\epsilon\leftrightarrow-\epsilon$

方法二：$\varsigma\leftrightarrow-\varsigma$

方法三：取复共轭、转置、相似变换、表象变换等矩阵操作

方法四：取直积、直和、缩并、加减乘除等运算

另外在六个基本定理的各种推论中已运用了以上方法得到了各种常数不变张量，各种推论的证明基本上是显而易见的，并且为了内容的紧凑性，大多略去了其证明过程。

3.9 对六个基本定理的评述

六个基本定理的数学证明过程中对变换参数$\omega,\epsilon,\vartheta^{ab},\theta^{\alpha}$无特别的限制，可以取任意复数，所以得到的常数不变张量具有很大的数学广泛性。但对于具体物理来讲，内部规范变换的各种参数仍可以取复数。然而对于外部时空变换，由于物理上自洽性要求，变换必须满足洛伦兹群表示 [13]，所以对变换矩阵和变换参数有限制，且ω,ϵ只能取实数。特别需要指出的是，基本定理一的推广形式、基本定理三和基本定理四不光在四维时空中成立，而且在任意N+1维时空中也成立，这样为高低维时空的物理研究提供了一个数学分析工具。从六个基本定理的证明还可以得到如下启示：矩阵的对易和反对易关系意味着存在对应的常数不变张量，反之，某种常数不变张量意味着存在相应的对易和反对易关系，从这个思路出发可以去寻找更多有意义的常数不变张量。从上还可以知道矩阵的对易和反对易关系意味着其自身的协变性，即该矩阵的对易和反对易关系本身隐含了其在任何参考系中均成立,这是一个很有趣很奇妙的自举数学性质,令人回味无穷。

4 几个直观基本常数不变张量的性质

4.1 基本常数不变张量$\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma},\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma},\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma},\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}$的性质 [1,2]

4.1.1 重要性质

$$\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma D_\varsigma} = \delta^{[A_\varsigma}_{C_\varsigma}\delta^{B_\varsigma]}_{D_\varsigma} = \delta^{A_\varsigma}_{[C_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{D_\varsigma]} \qquad \varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma D'_\varsigma} = \delta^{C'_\varsigma}_{[A'_\varsigma}\delta^{D'_\varsigma}_{B'_\varsigma]} = \delta^{[C'_\varsigma}_{A'_\varsigma}\delta^{D'_\varsigma]}_{B'_\varsigma} \tag{1.37}$$

对比：$S_{abcd} = \delta_{ac}\delta_{bd}-\delta_{ad}\delta_{bc}, S_{ab}{}^{cd} = \delta^{[c}_{a}\delta^{d]}_{b}$ (1.38)

$$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma D_\varsigma} = \varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma D_\varsigma}-\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma} \qquad \varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon_{C'_\varsigma D'_\varsigma} = \varepsilon_{A'_\varsigma C'_\varsigma}\varepsilon_{B'_\varsigma D'_\varsigma}-\varepsilon_{A'_\varsigma D'_\varsigma}\varepsilon_{B'_\varsigma C'_\varsigma} \tag{1.39}$$

$$\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{C_\varsigma D_\varsigma} = \varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}-\varepsilon^{A_\varsigma D_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma C_\varsigma} \qquad \varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma D'_\varsigma} = \varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma D'_\varsigma}-\varepsilon^{A'_\varsigma D'_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma C'_\varsigma} \tag{1.40}$$

$$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma D_\varsigma}+\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon_{D_\varsigma B_\varsigma}+\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma} = 0 \qquad \varepsilon_{A_\varsigma[B_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma D_\varsigma]} = 0 \tag{1.41}$$

$$\varepsilon_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} = \delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} = -\varepsilon^{B_\varsigma}{}_{A_\varsigma} \qquad \varepsilon^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} = \delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} = -\varepsilon_{B'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma} \tag{1.42}$$

4.1.2 复共轭性

$$[\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}]^* = \varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma} \qquad [\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}]^* = \varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma} \tag{1.43}$$

4.2 基本常数不变张量$(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}$, $(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}$的性质 [1,2]

4.2.1 转换性

转换性

$$\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}=[\varsigma\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}][\varsigma\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}]\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{aB_\varsigma B'_\varsigma} \tag{1.44}$$

$$\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}=[-\varsigma\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}][-\varsigma\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}]\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)^{aB'_\varsigma B_\varsigma} \tag{1.45}$$

$$\frac{(-i\varsigma)}{\sqrt{2}}[\sigma,-i(-\varsigma)]_a^{A'_{-\varsigma}A_{-\varsigma}}\simeq\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma} \tag{1.46}$$

不冗余版本:$\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma,-i)_a^{A'A}$, $\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma,-i)^a_{AA'}$

以上表明这两个常数不变张量不是独立的，真正独立的只有一个。

4.2.2 正交性

缩减一对矢量指标：(右边是Penrose简记法，用$\overset{P}{=}$表示。)

$$\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\delta^a_b\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}=\delta^{A_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma} \qquad \delta^a_b\overset{P}{=}\delta^A_B\delta^{A'}_{B'} \tag{1.47}$$

$$\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\delta^{ab}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma}=\varepsilon^{AB}\varepsilon^{A'B'} \qquad \delta^{ab}\overset{P}{=}\varepsilon^{AB}\varepsilon^{A'B'} \tag{1.48}$$

$$\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta_{ab}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}=\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma} \qquad \delta_{ab}\overset{P}{=}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'} \tag{1.49}$$

各种标架下的**iPenrose**对应规则

$$\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma^*,-i)_a^{AA'}x^a|_{++++}=\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma^*,-1)_a^{AA'}x^a|_{+++-}=\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma^*,1)_a^{AA'}x^a|_{---+}=x^{AA'} \tag{1.50}$$

$$\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma,-i)^a_{AA'}x_a|_{++++}=\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma,1)^a_{AA'}x_a|_{+++-}=\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma,1)^a_{AA'}x_a|_{---+}=x_{AA'} \tag{1.51}$$

$$\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma^*,-i)_a^{AA'}\partial^a|_{++++}=\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma^*,-1)_a^{AA'}\partial^a|_{+++-}=\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma^*,1)_a^{AA'}\partial^a|_{---+}=\partial_{x_{AA'}}=\nabla^{AA'} \tag{1.52}$$

$$\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma,-i)^a_{AA'}x_a|_{++++}=\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma,1)^a_{AA'}x_a|_{+++-}=\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma,1)^a_{AA'}x_a|_{---+}=\partial_{x^{AA'}}=\nabla_{AA'} \tag{1.53}$$

$(++++)$标架下规则: 矢量上标^{a}用$\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma^*,-i)_a^{AA'}$变换为$^{AA'}$，矢量下标$_a$用$\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma,-i)^a_{AA'}$变换为$_{AA'}$。
$(+++-)$标架下规则: 矢量上标^{a}用$\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma^*,-1)_a^{A'A}$变换为$^{AA'}$，矢量下标$_a$用$\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma,1)^a_{AA'}$变换为$_{AA'}$。
$(---+)$标架下规则: 矢量上标^{a}用$\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma^*,1)_a^{A'A}$变换为$^{AA'}$，矢量下标$_a$用$\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma,1)^a_{AA'}$变换为$_{AA'}$。

$$\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma^*,-i)_a^{AA'}\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma,-i)^a_{AA'}=\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma^*,-1)_a^{A'A}\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma,1)^a_{AA'}=-\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma^*,1)_a^{A'A}\frac{i}{\sqrt{2}}(-\sigma,1)^a_{AA'}=\delta^A_B\delta^{A'}_{B'} \tag{1.54}$$

缩减一对旋量指标：

$$(\sigma,i\varsigma)_{aA_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{A'_\varsigma B_\varsigma}=\delta_{ab}\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}+2iS_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \tag{1.55}$$

$$(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)_{bA_\varsigma B'_\varsigma}=\delta_{ab}\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}+2iS_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} \tag{1.56}$$

缩减两对指标：

$$(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{A'_\varsigma A_\varsigma}=2\delta^a_b \qquad tr[(\sigma,i\varsigma)_a(\sigma,-i\varsigma)_b]=2\delta_{ab} \tag{1.57}$$

$$(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma B_\varsigma}=4\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \qquad (\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma B'_\varsigma}=4\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} \tag{1.58}$$

缩减全部指标：

$$(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}=8 \tag{1.59}$$

4.2.3 复共轭性

$$[(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a]^* = (\sigma,i\varsigma)^a_{B_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a \qquad [(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma B_\varsigma}\partial^a]^* = (\sigma,-i\varsigma)_a^{B'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a \tag{1.60}$$

$$[(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a]^+ = (\sigma,i\varsigma)^a\partial_a \qquad [(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a]^+ = (\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a \tag{1.61}$$

4.3 基本常数不变张量$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma},\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}$ 的性质

4.3.1 正交性

三维自旋张量：

$$S_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} = \frac{i}{2}\gamma_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}{}^{\gamma'_\varsigma}\sigma_{\gamma'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}{}^{\gamma'_\varsigma}\sigma_{\gamma'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} \qquad S^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} = \frac{i}{2}\gamma^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \tag{1.62}$$

缩减一对复矢量指标：

$$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma C'_\varsigma}{}_{D'_\varsigma} = \delta^{A'_\varsigma}_{D'_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{B'_\varsigma} - \varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}\varepsilon_{B'_\varsigma D'_\varsigma} \qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma C_\varsigma}{}^{D_\varsigma} = \delta^{D_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{C_\varsigma} - \varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma} \tag{1.63}$$

缩减一对旋量指标：

$$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{C'_\varsigma}\sigma_{\beta'_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} = \delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} + 2iS_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} \qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{C_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{B_\varsigma} = \delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} + 2iS^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \tag{1.64}$$

缩减两对指标：

$$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}\sigma_{\beta'_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma} = 2\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma} \qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{A_\varsigma} = 2\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \tag{1.65}$$

$$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{C'_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma C'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} = 3\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} \qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{C_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma C_\varsigma}{}^{B_\varsigma} = 3\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \tag{1.66}$$

$$tr[\sigma_{\alpha'_\varsigma}\sigma_{\beta'_\varsigma}] = 2\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma} \qquad tr[\sigma^{\alpha_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}] = 2\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \tag{1.67}$$

缩减全部指标：

$$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma B'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma} = 6 \qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma B_\varsigma}{}^{A_\varsigma} = 6 \tag{1.68}$$

4.3.2 无迹性

$$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma} = 0 \qquad tr[\sigma_{\alpha_\varsigma}] = 0 \qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A_\varsigma} = 0 \qquad tr[\sigma^{\alpha'_\varsigma}] = 0 \tag{1.69}$$

4.3.3 复共轭性

$$[\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}]^* = \sigma_{\alpha_\varsigma B_\varsigma}{}^{A_\varsigma} \qquad [\sigma_{\alpha_\varsigma A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}]^* = \sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma} \tag{1.70}$$

4.4 基本常数不变张量$\sigma^{\alpha}_{+ab},\sigma^{\alpha'}_{-ab},\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab},\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}$的性质

4.4.1 隐藏的复合性

复合性:(事实上可以将下式作为定义)

$$\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma a}{}^{b} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{A'_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma} \tag{1.71}$$

$$\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}{}^{a}{}_{b} = \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}\delta^{A_\varsigma}{}_{B_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma} \tag{1.72}$$

证明：$(\sigma,i\varsigma)_{aA_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{A'_\varsigma B_\varsigma} = \delta_{ab}\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} + 2iS_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}$

$\Rightarrow (\sigma,i\varsigma)_{aA_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{A'_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{A_\varsigma} = (\delta_{ab}\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} - \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma A_\varsigma}{}^{B_\varsigma})\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{A_\varsigma}$

$\Rightarrow (\sigma,i\varsigma)_{aA_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{A'_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{A_\varsigma} = -2\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}$

$\Rightarrow 2\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab} = (\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)_{bB_\varsigma A'_\varsigma}$

$\Rightarrow \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab} = \frac{1}{2}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{A'_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)_{bB_\varsigma B'_\varsigma}$

$\Rightarrow \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma a}{}^{b} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{A'_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}$ □

基本常数不变张量间的联系：

$$\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^{a}{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma a}{}^{b}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_{b}^{B'_\varsigma B_\varsigma}=\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{A'_\varsigma}{}^{B'_\varsigma} \qquad \sigma^{\alpha}_{+a}{}^{b}\overset{P}{=}\sigma^{\alpha}{}_{A}{}^{B}\delta_{A'}{}^{B'} \tag{1.73}$$

$$\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_{a}{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}{}^{a}{}_{b}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^{b}_{B_\varsigma B'_\varsigma}=\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}\delta^{A_\varsigma}{}_{B_\varsigma} \qquad \sigma_{-\alpha'}{}^{a}{}_{b}\overset{P}{=}\sigma_{\alpha'}{}^{A'}{}_{B'}\delta^{A}{}_{B} \tag{1.74}$$

自我评述：以上表明$\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}$ 和$\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}$这两个基本常数不变张量不是独立的，是相互关联的。

4.4.2 正交性

三维自旋张量和四维自旋张量的关系：

$$S^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}_{ab}(\tfrac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma})=\tfrac{i}{2}\gamma^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma}_{\varsigma ab}=\tfrac{1}{2}i\sigma^{\gamma_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\gamma_\varsigma}{}^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}=\tfrac{1}{2}S_{ab}{}^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}(\gamma,\varsigma) \tag{1.75}$$

缩减一对复矢量指标：

$$\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}=-\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}+\varsigma\varepsilon_{abcd} \tag{1.76}$$

$$S_{abcd}=-\tfrac{1}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\sigma_{-\alpha' cd}+\sigma^{\alpha}_{+ab}\sigma_{+\alpha cd})=\delta_{ac}\delta_{bd}-\delta_{ad}\delta_{bc} \qquad \varepsilon_{abcd}=-\tfrac{1}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\sigma_{-\alpha' cd}-\sigma^{\alpha}_{+ab}\sigma_{+\alpha cd}) \tag{1.77}$$

缩减一对矢量指标：

$$\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ac}\delta^{cd}\sigma^{\gamma_\varsigma}_{\varsigma db}=\delta_{ab}\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}-\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}=\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\delta_{ab}+\tfrac{i}{2}S^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}{}_{ab}(\tfrac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma})=\delta_{ab}\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}+iS_{ab}{}^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}(\gamma,\varsigma) \tag{1.78}$$

缩减一对矢量和一对复矢量指标：

$$\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ac}\sigma^{\varsigma cb}_{\alpha_\varsigma}=3\delta_{a}{}^{b} \tag{1.79}$$

缩减两对矢量指标：

$$\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{ab}_{\varsigma\beta_\varsigma}=-4\delta^{\alpha_\varsigma}_{\beta_\varsigma} \qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{ab}_{-\varsigma\beta'_\varsigma}=0 \qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\kappa ab}_{\kappa}=-4\delta_{\varsigma\kappa}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} \tag{1.80}$$

$$tr(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma})=4\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \qquad tr(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{-\varsigma})=0 \qquad tr(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma}\sigma^{\beta_\kappa}_{\kappa})=4\delta_{\varsigma\kappa}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} \tag{1.81}$$

缩减全部指标：

$$\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}=-12 \qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{ab}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}=0 \tag{1.82}$$

4.4.3 对偶性

$$\sigma^{\alpha}_{+ab}=-*\sigma^{\alpha}_{+ab} \qquad \sigma^{\alpha'}_{-ab}=*\sigma^{\alpha'}_{-ab} \qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}=-\varsigma*\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab} \tag{1.83}$$

4.4.4 复共轭性

$$(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\partial^{a}\hat{\partial}^{b})^{*}=-\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\partial^{a}\hat{\partial}^{b} \qquad (\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\partial^{a}\hat{\partial}^{b})^{*}=-\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\partial^{a}\hat{\partial}^{b} \tag{1.84}$$

4.5 基本常数不变张量$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s),\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)$ 的性质

4.5.1 数学准备

利用公式：$\sum\limits_{k=1}^{2s}k^{2}=\frac{8}{3}s(s+\frac{1}{2})(s+\frac{1}{4})$，可得

$$tr[\sigma_x^2(s)]=tr[\sigma_y^2(s)]=\tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{2s}2k(2s+1-k)=\tfrac{2}{3}s(s+\tfrac{1}{2})(s+1) \tag{1.85}$$

$$tr[\sigma_z^2(s)]=\tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{2s}(2s-2k)^{2}=\tfrac{2}{3}s(s+\tfrac{1}{2})(s+1) \tag{1.86}$$

$$tr[\sigma_x^2(s)]=tr[\sigma_y^2(s)]=tr[\sigma_z^2(s)]=\tfrac{2}{3}s(s+\tfrac{1}{2})(s+1) \tag{1.87}$$

4.5.2 正交性

从旋量角度看：

$$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s)\sigma_{\beta'_\varsigma}{}^{l'_\varsigma}{}_{k'_\varsigma}(s)=\frac{2}{3}s(s+\frac{1}{2})(s+1)\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\qquad \sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{m'_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha'_\varsigma m'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s)=s(s+1)\delta^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma} \tag{1.88}$$

$$\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s)=\frac{2}{3}s(s+\frac{1}{2})(s+1)\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s)\sigma_{\alpha_\varsigma m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)=s(s+1)\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma} \tag{1.89}$$

$$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha'_\varsigma l'_\varsigma}{}_{m'_\varsigma}(s)=2s(s+\frac{1}{2})(s+1)\qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)\sigma_{\alpha_\varsigma l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s)=2s(s+\frac{1}{2})(s+1) \tag{1.90}$$

从矩阵角度看：

$$tr[\sigma_{\alpha'_\varsigma}(s)\sigma_{\beta'_\varsigma}(s)]=\frac{2}{3}s(s+\frac{1}{2})(s+1)\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\qquad tr[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma}(s)]=\frac{2}{3}s(s+\frac{1}{2})(s+1)\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \tag{1.91}$$

4.5.3 正交性

缩减一对复矢量指标：

$$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha'_\varsigma m'_\varsigma}{}_{n'_\varsigma}(s)=?\delta^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}\delta^{m'_\varsigma}{}_{n'_\varsigma}?-2\varepsilon^{k'_\varsigma m'_\varsigma}(s)\varepsilon_{l'_\varsigma n'_\varsigma}(s) \tag{1.92}$$

$$\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)\sigma_{\alpha_\varsigma m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s)=?\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}\delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}?-2\varepsilon_{k_\varsigma m_\varsigma}(s)\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s) \tag{1.93}$$

缩减一对旋量指标：

$$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{m'_\varsigma}(s)\sigma_{\beta'_\varsigma}{}^{m'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s)=?\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}?+\frac{i}{2}S_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s) \tag{1.94}$$

$$\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)=?\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}?+\frac{i}{2}S^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s) \tag{1.95}$$

缩减两对指标：

$$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s)\sigma_{\beta'_\varsigma}{}^{l'_\varsigma}{}_{k'_\varsigma}(s)=\frac{2}{3}s(s+\frac{1}{2})(s+1)\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\qquad \sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{m'_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha'_\varsigma m'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s)=s(s+1)\delta^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma} \tag{1.96}$$

$$\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s)=\frac{2}{3}s(s+\frac{1}{2})(s+1)\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s)\sigma_{\alpha'_\varsigma m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)=s(s+1)\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma} \tag{1.97}$$

$$tr[\sigma_{\alpha'_\varsigma}(s)\sigma_{\beta'_\varsigma}(s)]=\frac{2}{3}s(s+\frac{1}{2})(s+1)\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\qquad tr[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma}(s)]=\frac{2}{3}s(s+\frac{1}{2})(s+1)\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \tag{1.98}$$

缩减全部指标：

$$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha'_\varsigma l'_\varsigma}{}_{k'_\varsigma}(s)=2s(s+\frac{1}{2})(s+1)\qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)\sigma_{\alpha_\varsigma l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s)=2s(s+\frac{1}{2})(s+1) \tag{1.99}$$

4.5.4 无迹性

$$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{k'_\varsigma}(s)=0\qquad tr[\sigma_{\alpha'_\varsigma}(s)]=0\qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s)=0\qquad tr[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)]=0 \tag{1.100}$$

4.5.5 复共轭性

$$[\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s)]^*=\sigma_{\alpha_\varsigma l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s)\qquad [\sigma_{\alpha_\varsigma k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)]^*=\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{l'_\varsigma}{}_{k'_\varsigma}(s) \tag{1.101}$$

4.5.6 复杂性质

$$\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\sigma(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)=[s(s+1)-1]\sigma(s)\qquad \sigma_{\alpha'_\varsigma}(s)\sigma(s)\sigma^{\alpha'_\varsigma}(s)=[s(s+1)-1]\sigma(s) \tag{1.102}$$

$$[\sigma_{\alpha_\varsigma}(s),\sigma_{\beta_\varsigma}(s)]\sigma^{\beta_\varsigma}(s)=\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\qquad -i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)=\sigma_{\alpha_\varsigma}(s) \tag{1.103}$$

$$\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\varepsilon^{\gamma_\varsigma}{}_{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}=\delta_{\alpha_\varsigma\rho_\varsigma}\delta_{\beta_\varsigma\sigma_\varsigma}-\delta_{\alpha_\varsigma\sigma_\varsigma}\delta_{\beta_\varsigma\rho_\varsigma}\qquad \varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\varepsilon^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}{}_{\rho_\varsigma}=2\delta_{\alpha_\varsigma\rho_\varsigma} \tag{1.104}$$

推论4.5.1. $\sigma_\alpha(s)\sigma_i(s)\sigma^\alpha(s)=[s(s+1)-1]\sigma_i(s)$

推论4.5.2. $\sigma_\alpha(s)\sigma_i(s)\sigma_j(s)\sigma^\alpha(s)=s(s+1)\delta_{ij}-\sigma_j(s)\sigma_i(s)+[s(s+1)-2]\sigma_i(s)\sigma_j(s)$

证明： $\sigma_\alpha(s)\sigma_i(s)\sigma_j(s)\sigma^\alpha(s)$

$=[\sigma_\alpha(s),\sigma_i(s)]\sigma_j(s)\sigma^\alpha(s)+\sigma_i(s)\sigma_\alpha(s)\sigma_j(s)\sigma^\alpha(s)$

$=[\sigma_\alpha(s),\sigma_i(s)][\sigma_j(s),\sigma^\alpha(s)]+[\sigma_\alpha(s),\sigma_i(s)]\sigma^\alpha(s)\sigma_j(s)+\sigma_i(s)\sigma_\alpha(s)\sigma_j(s)\sigma^\alpha(s)$

$= \varepsilon_{jl}{}^{\alpha}\varepsilon_{\alpha ik}\sigma^k(s)\sigma^l(s) + [s(s+1)-2]\sigma_i(s)\sigma_j(s)$
$= s(s+1)\delta_{ij} - \sigma_j(s)\sigma_i(s) + [s(s+1)-2]\sigma_i(s)\sigma_j(s)$ □

推论4.5.3. $\sigma_\alpha(s)\sigma_{\{i}(s)\sigma_{j\}}(s)\sigma^\alpha(s) = s(s+1)\delta_{\{ij\}} + [s(s+1)-3]\sigma_{\{i}(s)\sigma_{j\}}(s)$

推论4.5.4. $[\sigma_\alpha(s), \sigma_{\{i}(s)]\sigma_{j\}}(s)\sigma^\alpha(s) = s(s+1)\delta_{\{ij\}} - 2\sigma_{\{i}(s)\sigma_{j\}}(s)$

推论4.5.5. $\sigma_\alpha(s)\sigma_{\{i}(s)\sigma_j(s)\sigma_{k\}}(s)\sigma^\alpha(s) = [3s(s+1)-1]\delta_{\{ij}\sigma_{k\}}(s) + [s(s+1)-6]\sigma_{\{i}(s)\sigma_j(s)\sigma_{k\}}(s)$

推论4.5.6. $[\sigma_\alpha(s), \sigma_i(s)]\sigma_j(s)\sigma^\alpha(s) = s(s+1)\delta_{ij} - \sigma_j(s)\sigma_i(s) - \sigma_i(s)\sigma_j(s)$

证明: $\sigma_\alpha(s)\sigma_i(s)\sigma_j(s)\sigma_k(s)\sigma^\alpha(s)$
$= [\sigma_\alpha(s), \sigma_i(s)]\sigma_j(s)\sigma_k(s)\sigma^\alpha(s) + \sigma_i(s)\sigma_\alpha(s)\sigma_j(s)\sigma_k(s)\sigma^\alpha(s)$
$= [\sigma_\alpha(s), \sigma_i(s)]\sigma_j(s)[\sigma_k(s), \sigma^\alpha(s)] + [\sigma_\alpha(s), \sigma_i(s)]\sigma_j(s)\sigma^\alpha(s)\sigma_k(s) + \sigma_i(s)\sigma_\alpha(s)\sigma_j(s)\sigma_k(s)\sigma^\alpha(s)$
$= \delta_{ik}\sigma_\alpha(s)\sigma_j(s)\sigma^\alpha(s) - \sigma_k(s)\sigma_j(s)\sigma_i(s) + [\sigma_\alpha(s), \sigma_i(s)]\sigma_j(s)\sigma^\alpha(s)\sigma_k(s) + \sigma_i(s)\sigma_\alpha(s)\sigma_j(s)\sigma_k(s)\sigma^\alpha(s)$
$= \delta_{ik}[s(s+1)-1]\sigma_j(s) - \sigma_k(s)\sigma_j(s)\sigma_i(s)$
$+ s(s+1)\delta_{ij}\sigma_k(s) - \sigma_j(s)\sigma_i(s)\sigma_k(s) - \sigma_i(s)\sigma_j(s)\sigma_k(s)$
$+ s(s+1)\delta_{jk}\sigma_i(s) - \sigma_i(s)\sigma_k(s)\sigma_j(s) + [s(s+1)-2]\sigma_i(s)\sigma_j(s)\sigma_k(s)$
$= \delta_{ik}\sigma_\alpha(s)\sigma_j(s)\sigma^\alpha(s) - \sigma_k(s)\sigma_j(s)\sigma_i(s) + [\sigma_\alpha(s), \sigma_i(s)]\sigma_j(s)\sigma^\alpha(s)\sigma_k(s) + \sigma_i(s)\sigma_\alpha(s)\sigma_j(s)\sigma_k(s)\sigma^\alpha(s)$
$= s(s+1)[\delta_{jk}\sigma_i(s) + \delta_{ij}\sigma_k(s) + \delta_{ik}\sigma_j(s)] - \delta_{ik}\sigma_j(s) - \sigma_k(s)\sigma_j(s)\sigma_i(s) - \sigma_j(s)\sigma_i(s)\sigma_k(s) - \sigma_i(s)\sigma_k(s)\sigma_j(s)$
$+ [s(s+1)-3]\sigma_i(s)\sigma_j(s)\sigma_k(s)$ □

证明: $\sigma_\alpha(s)\sigma_i(s)\sigma_j(s)\sigma_k(s)\sigma_l(s)\sigma^\alpha(s)$
$= [\sigma_\alpha(s), \sigma_i(s)]\sigma_j(s)\sigma_k(s)\sigma_l(s)\sigma^\alpha(s) + |||\sigma_i(s)\sigma_\alpha(s)\sigma_j(s)\sigma_k(s)\sigma_l(s)\sigma^\alpha(s)$
$= [\sigma_\alpha(s), \sigma_i(s)]\sigma_j(s)\sigma_k(s)[\sigma_l(s), \sigma^\alpha(s)] + |||[\sigma_\alpha(s), \sigma_i(s)]\sigma_j(s)\sigma_k(s)\sigma^\alpha(s)\sigma_l(s) + \sigma_i(s)\sigma_\alpha(s)\sigma_j(s)\sigma_k(s)\sigma_l(s)\sigma^\alpha(s)$ □

4.5.7 复杂性质

$$\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\sigma(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s) = [s(s+1)-1]\sigma(s) \qquad \sigma_{\alpha'_\varsigma}(s)\sigma(s)\sigma^{\alpha'_\varsigma}(s) = [s(s+1)-1]\sigma(s) \tag{1.105}$$

推论4.5.7. $\sigma_i(s)\sigma_\alpha(s) = i\varepsilon_{i\alpha\beta}\sigma^\beta(s) + \sigma_\alpha(s)\sigma_i(s)$

5 几个直观复合常数不变张量的性质

5.1 扩展常数不变张量$(\sigma, i\kappa)_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}, (\sigma, i\kappa)^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}$的性质

5.1.1 转换性

转换性：

$$(\sigma, i\kappa)_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} = -\varepsilon^{A'_\varsigma D'_\varsigma}\varepsilon_{B'_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma, -i\kappa)_{\alpha'_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}{}_{D'_\varsigma} \qquad (\sigma, i\kappa)^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} = -\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma C_\varsigma}(\sigma, -i\kappa)^{\alpha_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{D_\varsigma} \tag{1.106}$$

5.1.2 正交性

缩减一对复矢量指标：

$$(\sigma, i\kappa)_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}(\sigma, -i\kappa)^{\alpha'_\varsigma C'_\varsigma}{}_{D'_\varsigma} = 2\delta^{A'_\varsigma}_{D'_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{B'_\varsigma} \qquad (\sigma, i\kappa)^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\sigma, -i\kappa)_{\alpha_\varsigma C_\varsigma}{}^{D_\varsigma} = 2\delta^{D_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{C_\varsigma} \tag{1.107}$$

$$(\sigma, i\kappa)_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}(\sigma, i\kappa)^{\alpha'_\varsigma C'_\varsigma}{}_{D'_\varsigma} = -2\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}\varepsilon_{B'_\varsigma D'_\varsigma} \qquad (\sigma, i\kappa)^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\sigma, i\kappa)_{\alpha_\varsigma C_\varsigma}{}^{D_\varsigma} = -2\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma} \tag{1.108}$$

缩减一对旋量指标：

$$(\sigma, i\kappa)_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{C'_\varsigma}(\sigma, -i\kappa)_{\beta'_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} = \delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} + 2iS_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}(\kappa) \tag{1.109}$$

$$(\sigma, i\kappa)^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\sigma, -i\kappa)^{\beta_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{B_\varsigma} = \delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} + 2iS^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\kappa) \tag{1.110}$$

缩减两对指标：

$$(\sigma, i\kappa)_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}(\sigma, -i\kappa)_{\beta'_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma} = 2\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma} \qquad (\sigma, i\kappa)^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\sigma, -i\kappa)^{\beta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{A_\varsigma} = 2\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \tag{1.111}$$

$$(\sigma, i\kappa)_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{C'_\varsigma}(\sigma, -i\kappa)^{\alpha'_\varsigma C'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} = 4\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} \qquad (\sigma, i\kappa)^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\sigma, -i\kappa)_{\alpha_\varsigma C_\varsigma}{}^{B_\varsigma} = 4\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \tag{1.112}$$

缩减全部指标：

$$(\sigma,i\kappa)_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}(\sigma,-i\kappa)^{\alpha'_\varsigma B'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}=8 \qquad (\sigma,i\kappa)^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\sigma,-i\kappa)_{\alpha_\varsigma B_\varsigma}{}^{A_\varsigma}=8 \tag{1.113}$$

5.1.3 复共轭性

$$[(\sigma,i\kappa)_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}]^*=(\sigma,-i\kappa)_{\alpha_\varsigma B_\varsigma}{}^{A_\varsigma} \qquad [(\sigma,i\kappa)_{\alpha_\varsigma A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}]^*=(\sigma,-i\kappa)_{\alpha'_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma} \tag{1.114}$$

5.2 扩展常数不变张量$(\sigma_\varsigma,i\kappa)^{\alpha_\varsigma}_{ab},(\sigma_{-\varsigma},i\kappa)^{\alpha'_\varsigma}_{ab}$ 的性质

5.2.1 正交性

缩减一对复矢量指标：

$$(\sigma_\varsigma,i\kappa)^{\alpha_\varsigma}_{ab}(\sigma_\varsigma,i\kappa)_{\alpha_\varsigma cd}=-\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}+\varsigma\varepsilon_{abcd}-\delta_{ab}\delta_{cd} \tag{1.115}$$

$$(\sigma_\varsigma,i\kappa)^{\alpha_\varsigma}_{ab}(\sigma_\varsigma,-i\kappa)_{\alpha_\varsigma cd}=-\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}+\varsigma\varepsilon_{abcd}+\delta_{ab}\delta_{cd} \tag{1.116}$$

$$(\sigma_{-\varsigma},i\kappa)^{\alpha'_\varsigma}_{ab}(\sigma_{-\varsigma},i\kappa)_{\alpha'_\varsigma cd}=-\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}-\varsigma\varepsilon_{abcd}-\delta_{ab}\delta_{cd} \tag{1.117}$$

$$(\sigma_{-\varsigma},i\kappa)^{\alpha'_\varsigma}_{ab}(\sigma_{-\varsigma},-i\kappa)_{\alpha'_\varsigma cd}=-\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}-\varsigma\varepsilon_{abcd}+\delta_{ab}\delta_{cd} \tag{1.118}$$

缩减一对矢量指标：

$$(\sigma_\varsigma,i\kappa)^{ac}_{\alpha_\varsigma}(\sigma_\varsigma,-i\kappa)_{\beta_\varsigma cb}=\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta^a{}_b+2iS_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^a{}_b[\tfrac{1}{2}\sigma_\varsigma,\kappa] \tag{1.119}$$

$$(\sigma_{-\varsigma},i\kappa)^{ac}_{\alpha'_\varsigma}(\sigma_{-\varsigma},-i\kappa)_{\beta'_\varsigma cb}=\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\delta^a{}_b+2iS_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}{}^a{}_b[\tfrac{1}{2}\sigma_{-\varsigma},\kappa] \tag{1.120}$$

缩减两对矢量指标：

$$(\sigma_\varsigma,i\kappa)^{\alpha_\varsigma}_{ab}(\sigma_\varsigma,-i\kappa)^{ab}_{\beta_\varsigma}=-4\eta^{\alpha_\varsigma}_{\beta_\varsigma} \qquad (\sigma_\varsigma,i\kappa)^{\alpha_\varsigma}_{ab}(\sigma_\varsigma,i\kappa)^{ab}_{\beta_\varsigma}=-4\delta^{\alpha_\varsigma}_{\beta_\varsigma} \tag{1.121}$$

$$tr[(\sigma_\varsigma,i\kappa)^{\alpha_\varsigma}(\sigma_\varsigma,-i\kappa)^{\beta_\varsigma}]=4\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \qquad tr[(\sigma_\varsigma,i\kappa)^{\alpha_\varsigma}(\sigma_\varsigma,i\kappa)^{\beta_\varsigma}]=4\eta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \tag{1.122}$$

$$(\sigma_{-\varsigma},i\kappa)^{\alpha'_\varsigma}_{ab}(\sigma_{-\varsigma},-i\kappa)^{ab}_{\beta'_\varsigma}=-4\eta^{\alpha'_\varsigma}_{\beta'_\varsigma} \qquad (\sigma_{-\varsigma},i\kappa)^{\alpha'_\varsigma}_{ab}(\sigma_{-\varsigma},i\kappa)^{ab}_{\beta'_\varsigma}=-4\delta^{\alpha'_\varsigma}_{\beta'_\varsigma} \tag{1.123}$$

$$tr[(\sigma_{-\varsigma},i\kappa)^{\alpha'_\varsigma}(\sigma_{-\varsigma},-i\kappa)^{\beta'_\varsigma}]=4\delta^{\alpha'_\varsigma\beta_\varsigma} \qquad tr[(\sigma_{-\varsigma},i\kappa)^{\alpha'_\varsigma}(\sigma_{-\varsigma},i\kappa)^{\beta'_\varsigma}]=4\eta^{\alpha'_\varsigma\beta_\varsigma} \tag{1.124}$$

缩减全部指标：

$$(\sigma_\varsigma,i\kappa)^{\alpha_\varsigma}_{ab}(\sigma_\varsigma,-i\kappa)^{ab}_{\alpha_\varsigma}=-8 \qquad (\sigma_\varsigma,i\kappa)^{\alpha_\varsigma}_{ab}(\sigma_\varsigma,i\kappa)^{ab}_{\alpha_\varsigma}=-16 \tag{1.125}$$

$$(\sigma_{-\varsigma},i\kappa)^{\alpha'_\varsigma}_{ab}(\sigma_{-\varsigma},-i\kappa)^{ab}_{\alpha'_\varsigma}=-8 \qquad (\sigma_{-\varsigma},i\kappa)^{\alpha'_\varsigma}_{ab}(\sigma_{-\varsigma},i\kappa)^{ab}_{\alpha'_\varsigma}=-16 \tag{1.126}$$

5.2.2 恒等性

$$(\sigma_+,-i)^{\alpha}|_{ab}=(\sigma_-,-i)_a|_b{}^{\alpha} \qquad (\sigma_-,i)^{\alpha'}|_{ab}=(\sigma_+,i)_a|_b{}^{\alpha'} \tag{1.127}$$

$$(\sigma_\varsigma,-i\varsigma)^{\alpha_\varsigma}|_{ab}=(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a|_b{}^{\alpha_\varsigma} \qquad (\sigma_{-\varsigma},i\varsigma)^{\alpha'_\varsigma}|_{ab}=(\sigma_\varsigma,i\varsigma)_a|_b{}^{\alpha'_\varsigma} \tag{1.128}$$

5.2.3 复共轭性

$$[(\sigma_\varsigma,i\kappa)^{\alpha_\varsigma}_{ab}\partial^a\hat{\partial}^b]^*=-(\sigma_{-\varsigma},i\kappa)^{\alpha'_\varsigma}_{ab}\partial^a\hat{\partial}^b \qquad [(\sigma_{-\varsigma},i\kappa)^{\alpha'_\varsigma}_{ab}\partial^a\hat{\partial}^b]^*=-(\sigma_\varsigma,i\kappa)^{\alpha_\varsigma}_{ab}\partial^a\hat{\partial}^b \tag{1.129}$$

5.3 自旋常数不变张量$S_{ab}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,-\varsigma),S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,\varsigma)$ 的性质

5.3.1 复合性

$$S_{ab}(s,-\varsigma)=-i[\sigma(s),-\tfrac{i\varsigma}{2}]_{[a}[\sigma(s),\tfrac{i\varsigma}{2}]_{b]} \qquad S_{ab}(s,\varsigma)=-i[\sigma(s),\tfrac{i\varsigma}{2}]_{[a}[\sigma(s),-\tfrac{i\varsigma}{2}]_{b]} \tag{1.130}$$

$$S_{ab}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,-\varsigma)=i\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma' ab}\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s) \qquad S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,\varsigma)=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s) \tag{1.131}$$

$$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s)=\tfrac{i}{4}\sigma^{ab}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}S_{ab}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,-\varsigma) \qquad \sigma_{\alpha_\varsigma k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)=\tfrac{i}{4}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,\varsigma) \tag{1.132}$$

5.3.2 正交性

缩减两对矢量指标：

$$\begin{cases} S_{ab}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,-\varsigma)S^{abm'_\varsigma}{}_{n'_\varsigma}(s,-\varsigma)=4\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha'_\varsigma m'_\varsigma}{}_{n'_\varsigma}(s) \\ S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,\varsigma)S^{ab}{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s,\varsigma)=4\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)\sigma_{\alpha_\varsigma m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s) \end{cases} \tag{1.133}$$

缩减两对旋量指标：

$$\begin{cases} S_{ab}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,-\varsigma)S_{cd}{}^{l'_\varsigma}{}_{k'_\varsigma}(s,-\varsigma)=-\frac{2}{3}s(s+\frac{1}{2})(s+1)\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma cd} \\ S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,\varsigma)S_{cdl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s,\varsigma)=-\frac{2}{3}s(s+\frac{1}{2})(s+1)\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd} \end{cases} \tag{1.134}$$

缩减一对矢量和一对旋量指标：

$$\begin{cases} S_{ac}{}^{k'_\varsigma}{}_{m'_\varsigma}(s,-\varsigma)S^{cbm'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,-\varsigma)=-s(s+1)\delta_a{}^b\delta^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma} \\ S_{ack_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s,\varsigma)S^{cb}{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,\varsigma)=-s(s+1)\delta_a{}^b\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma} \end{cases} \tag{1.135}$$

缩减三对指标：

$$\begin{cases} S_{ac}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,-\varsigma)S^{cbl'_\varsigma}{}_{k'_\varsigma}(s,-\varsigma)=-2s(s+1)\delta_a{}^b \\ S_{ack_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,\varsigma)S^{cb}{}_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s,\varsigma)=-2s(s+1)\delta_a{}^b \end{cases} \tag{1.136}$$

$$\begin{cases} S_{ab}{}^{k'_\varsigma}{}_{m'_\varsigma}(s,-\varsigma)S^{abm'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,-\varsigma)=4s(s+1)\delta^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma} \\ S_{abk_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s,\varsigma)S^{ab}{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,\varsigma)=4s(s+1)\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma} \end{cases} \tag{1.137}$$

缩减全部指标：

$$\begin{cases} S_{ab}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,-\varsigma)S^{abl'_\varsigma}{}_{k'_\varsigma}(s,-\varsigma)=8s(s+\frac{1}{2})(s+1) \\ S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,\varsigma)S^{ab}{}_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s,\varsigma)=8s(s+\frac{1}{2})(s+1) \end{cases} \tag{1.138}$$

5.3.3 对偶性

$$S_{ab}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,-\varsigma)=\varsigma * S_{ab}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,-\varsigma) \qquad S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,\varsigma)=-\varsigma * S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,\varsigma) \tag{1.139}$$

5.3.4 复共轭性

$$[S_{ab}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,-\varsigma)\partial^a\hat{\partial}^b]^*=S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s,\varsigma)\partial^a\hat{\partial}^b \qquad [S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,\varsigma)\partial^a\hat{\partial}^b]^*=S_{ab}{}^{l'_\varsigma}{}_{k'_\varsigma}(s,-\varsigma)\partial^a\hat{\partial}^b \tag{1.140}$$

5.4 自旋常数不变张量$S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}, S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}$的性质

5.4.1 复合性

$$S_{ab}(\tfrac{1}{2},-\varsigma)=-\tfrac{i}{4}(\sigma,-i\varsigma)_{[a}(\sigma,i\varsigma)_{b]} \qquad S_{ab}(\tfrac{1}{2},\varsigma)=-\tfrac{i}{4}(\sigma,i\varsigma)_{[a}(\sigma,-i\varsigma)_{b]} \tag{1.141}$$

$$S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}\equiv S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}(-\varsigma)\equiv S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}(\tfrac{1}{2},-\varsigma) \qquad S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\equiv S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\varsigma)\equiv S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2},\varsigma) \tag{1.142}$$

$$S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}=\tfrac{i}{2}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} \qquad S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}=\tfrac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \tag{1.143}$$

$$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}=\tfrac{i}{2}\sigma^{ab}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} \qquad \sigma_{\alpha_\varsigma A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(s)=\tfrac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \tag{1.144}$$

5.4.2 正交性

缩减两对矢量指标：

$$S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}S^{abC'_\varsigma}{}_{D'_\varsigma}=\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma C'_\varsigma}{}_{D'_\varsigma} \qquad S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S^{ab}{}_{C_\varsigma}{}^{D_\varsigma}=\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma C_\varsigma}{}^{D_\varsigma} \tag{1.145}$$

缩减两对旋量指标：

$$S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}S_{cd}{}^{B'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}=-\tfrac{1}{2}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma cd} \qquad S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{cdB_\varsigma}{}^{A_\varsigma}=-\tfrac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd} \tag{1.146}$$

缩减一对矢量和一对旋量指标：

$$S_{ac}{}^{A'_\varsigma}{}_{C'_\varsigma}S^{cbC'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}=-\frac{3}{4}\delta_a{}^b\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} \qquad S_{acA_\varsigma}{}^{C_\varsigma}S^{cb}{}_{C_\varsigma}{}^{B_\varsigma}=-\frac{3}{4}\delta_a{}^b\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \tag{1.147}$$

缩减三对指标：

$$S_{ac}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}S^{cbB'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}=-\frac{3}{2}\delta_a{}^b \qquad S_{acA_\varsigma}{}^{C_\varsigma}S^{cb}{}_{C_\varsigma}{}^{B_\varsigma}=-\frac{3}{2}\delta_a{}^b \tag{1.148}$$

$$S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{C'_\varsigma}S^{abC'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}=3\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} \qquad S_{abA_\varsigma}{}^{C_\varsigma}S^{ab}{}_{C_\varsigma}{}^{B_\varsigma}=3\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \tag{1.149}$$

缩减全部指标：

$$S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}S^{abB'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}=6 \qquad S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S^{ab}{}_{B_\varsigma}{}^{A_\varsigma}=6 \tag{1.150}$$

5.4.3 对偶性

$$S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}=\varsigma * S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} \qquad S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}=-\varsigma * S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \tag{1.151}$$

5.4.4 复共轭性

$$[S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}\partial^a\hat{\partial}^b]^*=S_{abB_\varsigma}{}^{A_\varsigma}\partial^a\hat{\partial}^b \qquad [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\partial^a\hat{\partial}^b]^*=S_{ab}{}^{B'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}\partial^a\hat{\partial}^b \tag{1.152}$$

5.5 几个基本常数不变张量之间的关系

$$\begin{cases}S_{ab}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,-\varsigma)=i\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s)\\ S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,\varsigma)=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)\end{cases} \qquad \begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)_{bA_\varsigma B'_\varsigma}=\delta_{ab}\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}+2iS_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}\\ (\sigma,i\varsigma)_{aA_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b{}^{A'_\varsigma B_\varsigma}=\delta_{ab}\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}+2iS_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\end{cases} \tag{1.153}$$

$$\begin{cases}S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}=-\frac{i}{4}(\sigma,-i\varsigma)_{[a}{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)_{b]A_\varsigma B'_\varsigma}\\ \delta_{ab}\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}=\frac{1}{2}(\sigma,-i\varsigma)_{\{a}{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)_{b\}A_\varsigma B'_\varsigma}\end{cases} \qquad \begin{cases}S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}=-\frac{i}{4}(\sigma,i\varsigma)_{[aA_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_{b]}{}^{A'_\varsigma B_\varsigma}\\ \delta_{ab}\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}=\frac{1}{2}(\sigma,i\varsigma)_{\{aA_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_{b\}}{}^{A'_\varsigma B_\varsigma}\end{cases} \tag{1.154}$$

5.6 矢量自旋张量S_{abcd}和反对称张量ε_{abcd}的性质

定理5.6.1. $S_{abcd}=-\frac{1}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\sigma_{-\alpha' cd}+\sigma^{\alpha}_{+ab}\sigma_{+\alpha cd})=\delta_{ac}\delta_{bd}-\delta_{ad}\delta_{bc}=\delta_{a[c}\delta_{d]b}=\delta_{c[a}\delta_{b]d},\vec{S}_{ab}:=-iS_{ab|cd}$

定理5.6.2. $\varepsilon_{abcd}=-\frac{1}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\sigma_{-\alpha' cd}-\sigma^{\alpha}_{+ab}\sigma_{+\alpha cd})$

对以上两个定理分情况展开即可证明，这两个定理是以下一些推论的基础与前提。
结合(1.235), (1.259), (1.260)式可得**Penrose**对应记法：

推论5.6.1. $S_{abcd}\overset{P}{=}\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}\varepsilon_{A'C'}\varepsilon_{B'D'}-\varepsilon_{AD}\varepsilon_{BC}\varepsilon_{A'D'}\varepsilon_{B'C'}$

推论5.6.2. $\varepsilon_{abcd}=-\varepsilon_{acbd}\overset{P}{=}\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}\varepsilon_{A'D'}\varepsilon_{B'C'}-\varepsilon_{AD}\varepsilon_{BC}\varepsilon_{A'C'}\varepsilon_{B'D'}$

$$\begin{cases}S_{(*ab)(*cd)}=S_{abcd}\\ \varepsilon_{(*ab)(*cd)}=\varepsilon_{abcd}\end{cases} \qquad \begin{cases}S_{(*ab)cd}=S_{ab(*cd)}=\varepsilon_{abcd}\\ \varepsilon_{(*ab)cd}=\varepsilon_{ab(*cd)}=S_{abcd}\end{cases} \tag{1.155}$$

$$S_{abcd}=S_{cdab},S_{abcd}=-S_{bacd},S_{abcd}=S_{abdc},S_{abcd}=\frac{1}{2}S_{abef}S^{ef}{}_{cd},\vartheta_{ab}=\frac{1}{2}S_{abcd}\vartheta^{cd} \tag{1.156}$$

$$\begin{cases}\sigma^{\alpha'}_{-ab}\sigma_{-\alpha' cd}=-(S_{abcd}+\varepsilon_{abcd})=(-\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}-\varepsilon_{abcd})\\ \sigma^{\alpha}_{+ab}\sigma_{+\alpha cd}=-(S_{abcd}-\varepsilon_{abcd})=(-\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}+\varepsilon_{abcd})\end{cases} \tag{1.157}$$

$$\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}=-(S_{abcd}-\varsigma\varepsilon_{abcd})=(-\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}+\varsigma\varepsilon_{abcd}) \tag{1.158}$$

推论5.6.3. $\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{-\varsigma\alpha_\varsigma cd}=-\eta_{ac}\eta_{bd}+\eta_{ad}\eta_{bc}+\varsigma\varepsilon_{abc'd'}\eta^{c'}_c\eta^{d'}_d$

证明： $\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{-\varsigma\alpha_\varsigma cd}$
$=\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma c'd'}\eta^{c'}_c\eta^{d'}_d$
$=-(S_{abc'd'}-\varsigma\varepsilon_{abc'd'})\eta^{c'}_c\eta^{d'}_d$

$= (-\delta_{ac'}\delta_{bd'} + \delta_{ad'}\delta_{bc'} + \varsigma\varepsilon_{abc'd'})\eta_c^{c'}\eta_d^{d'}$

$= -\eta_{ac}\eta_{bd} + \eta_{ad}\eta_{bc} + \varsigma\varepsilon_{abc'd'}\eta_c^{c'}\eta_d^{d'}$ □

5.7 自旋张量$S_{ab}(\varsigma)$的性质

$$S_{ab}(\varsigma) = \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma} = -\frac{i}{4}(\sigma, i\varsigma)_{[a}(\sigma, -i\varsigma)_{b]} \quad \delta_{ab} = \frac{1}{2}(\sigma, i\varsigma)_{\{a}(\sigma, -i\varsigma)_{b\}} \tag{1.159}$$

$$\begin{cases} i[S_{ab}(\varsigma), S_{cd}(\varsigma)] = \delta_{a[c}S_{d]b}(\varsigma) + S_{a[c}(\varsigma)\delta_{d]b} = -\delta_{c[a}S_{b]d}(\varsigma) - S_{c[a}(\varsigma)\delta_{b]d} \\ \{S_{ab}(\varsigma), S_{cd}(\varsigma)\} = -\frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha cd} = \frac{1}{2}(S_{abcd} - \varsigma\varepsilon_{abcd}) \end{cases} \tag{1.160}$$

$$\varepsilon_{abcd} = \varsigma 2tr[S_{ab}(-\varsigma)S_{cd}(-\varsigma) - S_{ab}(\varsigma)S_{cd}(\varsigma)] \qquad S_{ab}(\varsigma) = -\varsigma * S_{ab}(\varsigma) \tag{1.161}$$

$$\begin{cases} 2iS_{ab}(\varsigma)(\sigma, i\varsigma)_c = (\sigma, i\varsigma)_{[a}\delta_{b]c} + \varsigma\varepsilon_{abcd}(\sigma, i\varsigma)^d \\ 2i(\sigma, -i\varsigma)_c S_{ab}(\varsigma) = \delta_{c[a}(\sigma, -i\varsigma)_{b]} - \varsigma\varepsilon_{abcd}(\sigma, -i\varsigma)^d \end{cases} \tag{1.162}$$

5.8 $Dirac$自旋张量$S_{ab}(e,\varsigma)$的性质 [20]

$$[\gamma_a(\varsigma), \gamma_5(\varsigma)] = [(\sigma \otimes \sigma_y, \varsigma I \otimes \sigma_x), \varsigma I \otimes \sigma_z] \tag{1.163}$$

$$S_{ab}(e,\varsigma) = -\frac{i}{4}[\gamma_a(\varsigma), \gamma_b(\varsigma)] = S_{ab}(\varsigma) \oplus S_{ab}(-\varsigma) \quad \delta_{ab} = \frac{1}{2}\{\gamma_a(\varsigma), \gamma_b(\varsigma)\} \tag{1.164}$$

$$\begin{cases} i[S_{ab}(e,\varsigma), S_{cd}(e,\varsigma)] = \delta_{a[c}S_{d]b}(e,\varsigma) + S_{a[c}(e,\varsigma)\delta_{d]b} = -\delta_{c[a}S_{b]d}(e,\varsigma) - S_{c[a}(e,\varsigma)\delta_{b]d} \\ \{S_{ab}(e,\varsigma), S_{cd}(e,\varsigma)\} = -\frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha'_\varsigma cd} \oplus \frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma cd} = \frac{1}{2}[S_{abcd} - \gamma_5(\varsigma)\varepsilon_{abcd}] \end{cases} \tag{1.165}$$

$$[S_{ab}(e,\varsigma), \gamma_c(\varsigma)] = -i\gamma_{[a}\delta_{b]c} \qquad \{S_{ab}(e,\varsigma), \gamma_c(\varsigma)\} = -i\varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^d(\varsigma) \tag{1.166}$$

$$S_{ab}(e,\varsigma) = -\gamma_5(\varsigma) * S_{ab}(e,\varsigma) \tag{1.167}$$

5.9 常数不变张量$\varepsilon_{abcd}, \gamma_a(\varsigma)$之间的关系 [20]

$$\varepsilon_{abcd}\gamma^a(\varsigma)\gamma^b(\varsigma)\gamma^c(\varsigma)\gamma^d(\varsigma) = 24\gamma_5(\varsigma) \tag{1.168}$$

$$\varepsilon_{abcd}\gamma^b(\varsigma)\gamma^c(\varsigma)\gamma^d(\varsigma) = -6\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma) \tag{1.169}$$

$$\varepsilon_{abcd}\gamma^c(\varsigma)\gamma^d(\varsigma) = -4\gamma_5(\varsigma)iS_{ab}(e,\varsigma) \tag{1.170}$$

$$\varepsilon_{abcd}\gamma^d(\varsigma) = \gamma_5(\varsigma)\{\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma) - [\delta_{ab}\gamma_c(\varsigma) + \gamma_{[a}(\varsigma)\delta_{b]c}]\} \tag{1.171}$$

$$\varepsilon_{abcd} = \gamma_5(\varsigma)\{\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma) \tag{1.172}$$

$$-[\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{a[c}\delta_{d]b} + 2i\delta_{ab}S_{cd}(e,\varsigma) + 2iS_{ab}(e,\varsigma)\delta_{cd} + 2i\delta_{a[c}S_{d]b}(e,\varsigma) - 2iS_{a[c}(e,\varsigma)\delta_{d]b}]\} \tag{1.173}$$

5.10 迹$tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\cdots]$的性质

$$tr[\gamma_a(\varsigma)] = 0 \qquad tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)] = 0 \qquad tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)\gamma_e(\varsigma)] = 0 \tag{1.174}$$

$$tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)] = 0 \qquad tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)] = 0 \qquad tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)\gamma_e(\varsigma)] = 0 \tag{1.175}$$

$$tr[\gamma_5(\varsigma)] = 0 \qquad tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)\gamma_e(\varsigma)] = 0 \qquad tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)\gamma_e(\varsigma)] = 0 \tag{1.176}$$

$$tr[S_{ab}(e,\varsigma)] = 0 \qquad tr[\gamma_c(\varsigma)S_{ab}(e,\varsigma)] = 0 \qquad tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)] = 0 \tag{1.177}$$

$$tr[\gamma_5(\varsigma)S_{ab}(e,\varsigma)] = 0 \qquad tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)S_{ab}(e,\varsigma)] = 0 \qquad tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)] = 0 \tag{1.178}$$

$$tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)] = 4\delta_{ab} \qquad tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)] = 4[\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{a[c}\delta_{d]b}] \tag{1.179}$$

$$tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)] = 0 \qquad tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)] = 4\varepsilon_{abcd} \tag{1.180}$$

$$tr[S_{ab}(e,\varsigma)S_{cd}(e,\varsigma)] = S_{abcd} = \delta_{ac}\delta_{db} - \delta_{ad}\delta_{cb} \qquad tr[\gamma_5 S_{ab}(e,\varsigma)S_{cd}(e,\varsigma)] = -\varepsilon_{abcd} \tag{1.181}$$

$$tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)S_{cd}(e,\varsigma)] = 2iS_{abcd} \qquad tr[\gamma_5\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)S_{cd}(e,\varsigma)] = -2i\varepsilon_{abcd} \tag{1.182}$$

$$tr[S_{ab}(e,\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)] = 2iS_{abcd} \qquad tr[\gamma_5 S_{ab}(e,\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)] = -2i\varepsilon_{abcd} \tag{1.183}$$

$$tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)S_{ef}(e,\varsigma)] = 2i\{\delta_{ab}S_{cdef} + \delta_{cd}S_{abef} + \delta_{a[c}S_{d]bef} - \delta_{b[c}S_{d]aef}\} \tag{1.184}$$

$$tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)S_{ef}(e,\varsigma)] = -2i\{\delta_{ab}\varepsilon_{cdef} + \delta_{cd}\varepsilon_{abef} + \delta_{a[c}\varepsilon_{d]bef} - \delta_{b[c}\varepsilon_{d]aef}\} \tag{1.185}$$

$$tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)\gamma_e(\varsigma)\gamma_f(\varsigma)] = 4\{(\delta_{ab}\delta_{cd} - S_{abcd})\delta_{ef} - (\delta_{ab}S_{cdef} + \delta_{cd}S_{abef} + \delta_{a[c}S_{d]bef} - \delta_{b[c}S_{d]aef})\} \tag{1.186}$$

$$tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)\gamma_e(\varsigma)\gamma_f(\varsigma)] = 4\{\varepsilon_{abcd}\delta_{ef} + \delta_{ab}\varepsilon_{cdef} + \delta_{cd}\varepsilon_{abef} + \delta_{a[c}\varepsilon_{d]bef} - \delta_{b[c}\varepsilon_{d]aef}\} \tag{1.187}$$

$$tr[\gamma_a(\varsigma)S_{bc}(e,\varsigma)\gamma_d(\varsigma)S_{ef}(e,\varsigma)] = \delta_{ab}S_{cdef} + \delta_{cd}S_{abef} + \delta_{a[c}S_{d]bef} - \delta_{b[c}S_{d]aef} - \delta_{bc}S_{adef} \tag{1.188}$$

$$tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)S_{bc}(e,\varsigma)\gamma_d(\varsigma)S_{ef}(e,\varsigma)] = \delta_{bc}\varepsilon_{adef} - \{\delta_{ab}\varepsilon_{cdef} + \delta_{cd}\varepsilon_{abef} + \delta_{a[c}\varepsilon_{d]bef} - \delta_{b[c}\varepsilon_{d]aef}\} \tag{1.189}$$

$$tr[\gamma_a(\varsigma)S_{bc}(e,\varsigma)\gamma_d(\varsigma)S_{ef}(e,\varsigma)] = \delta_{ad}S_{bcef} + \delta_{a[b}S_{c]def} + \delta_{d[b}S_{c]aef} \tag{1.190}$$

$$tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)S_{bc}(e,\varsigma)\gamma_d(\varsigma)S_{ef}(e,\varsigma)] = -\{\delta_{ad}\varepsilon_{bcef} + \delta_{a[b}\varepsilon_{c]def} + \delta_{d[b}\varepsilon_{c]aef}\} \tag{1.191}$$

5.11 常数不变张量$\varepsilon_{abcd},(\sigma,i\varsigma)_a$之间的关系

$$\varepsilon_{abcd}(\sigma,i\varsigma)^a(\sigma,-i\varsigma)^b(\sigma,i\varsigma)^c(\sigma,-i\varsigma)^d = 24\varsigma \tag{1.192}$$

$$\varepsilon_{abcd}(\sigma,i\varsigma)^b(\sigma,-i\varsigma)^c(\sigma,i\varsigma)^d = -6\varsigma(\sigma,i\varsigma)^a \tag{1.193}$$

$$\varepsilon_{abcd}(\sigma,i\varsigma)^c(\sigma,-i\varsigma)^d = -4i\varsigma S_{ab}(\varsigma) \tag{1.194}$$

$$\varepsilon_{abcd}(\sigma,i\varsigma)^d = \varsigma\{(\sigma,i\varsigma)_a(\sigma,-i\varsigma)_b(\sigma,i\varsigma)_c - [\delta_{ab}(\sigma,i\varsigma)_c + (\sigma,i\varsigma)_{[a}\delta_{b]c}]\} \tag{1.195}$$

$$\varepsilon_{abcd} = \varsigma\{(\sigma,i\varsigma)_a(\sigma,-i\varsigma)_b(\sigma,i\varsigma)_c(\sigma,-i\varsigma)_d \tag{1.196}$$

$$-[\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{a[c}\delta_{d]b} + 2i\delta_{ab}S_{cd}(\varsigma) + 2iS_{ab}(\varsigma)\delta_{cd} + 2i\delta_{a[c}S_{d]b}(\varsigma) + 2iS_{a[c}(\varsigma)\delta_{d]b}]\} \tag{1.197}$$

5.12 常数不变张量$\varepsilon_{abcd},\delta_{ab}$之间的关系

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{abcd}\varepsilon_{efgh} = {} & (\delta_{ae}\delta_{bf}\delta_{cg}\delta_{dh} - \delta_{ah}\delta_{be}\delta_{cf}\delta_{dg} + \delta_{ag}\delta_{bh}\delta_{ce}\delta_{df} - \delta_{af}\delta_{bg}\delta_{ch}\delta_{de} \\
& - (\delta_{ae}\delta_{bf}\delta_{ch}\delta_{dg} - \delta_{ag}\delta_{be}\delta_{cf}\delta_{dh} + \delta_{ah}\delta_{bg}\delta_{ce}\delta_{df} - \delta_{af}\delta_{bh}\delta_{cg}\delta_{de}) \\
& + (\delta_{ae}\delta_{bg}\delta_{ch}\delta_{df} - \delta_{af}\delta_{be}\delta_{cg}\delta_{dh} + \delta_{ah}\delta_{bf}\delta_{ce}\delta_{dg} - \delta_{ag}\delta_{bh}\delta_{cf}\delta_{de}) \\
& - (\delta_{ae}\delta_{bg}\delta_{cf}\delta_{dh} - \delta_{ah}\delta_{be}\delta_{cg}\delta_{df} + \delta_{af}\delta_{bh}\delta_{ce}\delta_{dg} - \delta_{ag}\delta_{bf}\delta_{ch}\delta_{de}) \\
& + (\delta_{ae}\delta_{bh}\delta_{cf}\delta_{dg} - \delta_{ag}\delta_{be}\delta_{ch}\delta_{df} + \delta_{af}\delta_{bg}\delta_{ce}\delta_{dh} - \delta_{ah}\delta_{bf}\delta_{cg}\delta_{de}) \\
& - (\delta_{ae}\delta_{bh}\delta_{cg}\delta_{df} - \delta_{af}\delta_{be}\delta_{ch}\delta_{dg} + \delta_{ag}\delta_{bf}\delta_{ce}\delta_{dh} - \delta_{ah}\delta_{bg}\delta_{cf}\delta_{de})
\end{aligned} \tag{1.198}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{abcd}\varepsilon_{efgh}\eta^{dh} = {} & (\delta_{ae}\delta_{bf}\delta_{cg}2 - \eta_{ag}\delta_{be}\delta_{cf} + \delta_{ag}\eta_{bf}\delta_{ce} - \delta_{af}\delta_{bg}\eta_{ce} \\
& - (\delta_{ae}\delta_{bf}\eta_{cg} - \delta_{ag}\delta_{be}\delta_{cf}2 + \eta_{af}\delta_{bg}\delta_{ce} - \delta_{af}\eta_{be}\delta_{cg}) \\
& + (\delta_{ae}\delta_{bg}\eta_{cf} - \delta_{af}\delta_{be}\delta_{cg}2 + \eta_{ag}\delta_{bf}\delta_{ce} - \delta_{ag}\eta_{be}\delta_{cf}) \\
& - (\delta_{ae}\delta_{bg}\delta_{cf}2 - \eta_{af}\delta_{be}\delta_{cg} + \delta_{af}\eta_{bg}\delta_{ce} - \delta_{ag}\delta_{bf}\eta_{ce}) \\
& + (\delta_{ae}\eta_{bg}\delta_{cf} - \delta_{ag}\delta_{be}\eta_{cf} + \delta_{af}\delta_{bg}\delta_{ce}2 - \eta_{ae}\delta_{bf}\delta_{cg}) \\
& - (\delta_{ae}\eta_{bf}\delta_{cg} - \delta_{af}\delta_{be}\eta_{cg} + \delta_{ag}\delta_{bf}\delta_{ce}2 - \eta_{ae}\delta_{bg}\delta_{cf})
\end{aligned} \tag{1.199}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{abcd}\varepsilon_{a'b'c'd'}\eta^{dd'} = &(\delta_{aa'}\delta_{bb'}\delta_{cc'}2 - \eta_{ac'}\delta_{ba'}\delta_{cb'} + \delta_{ac'}\eta_{bb'}\delta_{ca'} - \delta_{ab'}\delta_{bc'}\eta_{ca'}\\ &- (\delta_{aa'}\delta_{bb'}\eta_{cc'} - \delta_{ac'}\delta_{ba'}\delta_{cb'}2 + \eta_{ab'}\delta_{bc'}\delta_{ca'} - \delta_{ab'}\eta_{ba'}\delta_{cc'})\\ &+ (\delta_{aa'}\delta_{bc'}\eta_{cb'} - \delta_{ab'}\delta_{ba'}\delta_{cc'}2 + \eta_{ac'}\delta_{bb'}\delta_{ca'} - \delta_{ac'}\eta_{ba'}\delta_{cb'})\\ &- (\delta_{aa'}\delta_{bc'}\delta_{cb'}2 - \eta_{ab'}\delta_{ba'}\delta_{cc'} + \delta_{ab'}\eta_{bc'}\delta_{ca'} - \delta_{ac'}\delta_{bb'}\eta_{ca'})\\ &+ (\delta_{aa'}\eta_{bc'}\delta_{cb'} - \delta_{ac'}\delta_{ba'}\eta_{cb'} + \delta_{ab'}\delta_{bc'}\delta_{ca'}2 - \eta_{aa'}\delta_{bb'}\delta_{cc'})\\ &- (\delta_{aa'}\eta_{bb'}\delta_{cc'} - \delta_{ab'}\delta_{ba'}\eta_{cc'} + \delta_{ac'}\delta_{bb'}\delta_{ca'}2 - \eta_{aa'}\delta_{bc'}\delta_{cb'})\end{aligned} \quad (1.200)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{abcd}\varepsilon_{a'b'c'd'}\eta^{dd'}\partial^{c}\partial^{+c'} = &(\delta_{aa'}\delta_{bb'}\delta_{cc'}2 - \eta_{ac'}\delta_{ba'}\delta_{cb'} + \delta_{ac'}\eta_{bb'}\delta_{ca'} - \delta_{ab'}\delta_{bc'}\eta_{ca'}\\ &- (\delta_{aa'}\delta_{bb'}\eta_{cc'} - \delta_{ac'}\delta_{ba'}\delta_{cb'}2 + \eta_{ab'}\delta_{bc'}\delta_{ca'} - \delta_{ab'}\eta_{ba'}\delta_{cc'})\\ &+ (\delta_{aa'}\delta_{bc'}\eta_{cb'} - \delta_{ab'}\delta_{ba'}\delta_{cc'}2 + \eta_{ac'}\delta_{bb'}\delta_{ca'} - \delta_{ac'}\eta_{ba'}\delta_{cb'})\\ &- (\delta_{aa'}\delta_{bc'}\delta_{cb'}2 - \eta_{ab'}\delta_{ba'}\delta_{cc'} + \delta_{ab'}\eta_{bc'}\delta_{ca'} - \delta_{ac'}\delta_{bb'}\eta_{ca'})\\ &+ (\delta_{aa'}\eta_{bc'}\delta_{cb'} - \delta_{ac'}\delta_{ba'}\eta_{cb'} + \delta_{ab'}\delta_{bc'}\delta_{ca'}2 - \eta_{aa'}\delta_{bb'}\delta_{cc'})\\ &- (\delta_{aa'}\eta_{bb'}\delta_{cc'} - \delta_{ab'}\delta_{ba'}\eta_{cc'} + \delta_{ac'}\delta_{bb'}\delta_{ca'}2 - \eta_{aa'}\delta_{bc'}\delta_{cb'})\end{aligned} \quad (1.201)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{abcd}\varepsilon_{efgh}\delta^{de} = &(\delta_{ah}\delta_{bf}\delta_{cg} - \delta_{ah}\delta_{bg}\delta_{cf} + \delta_{ag}\delta_{bh}\delta_{cf} - 4\delta_{af}\delta_{bg}\delta_{ch})\\ &- (\delta_{ag}\delta_{bf}\delta_{ch} - \delta_{ag}\delta_{bh}\delta_{cf} + \delta_{ah}\delta_{bg}\delta_{cf} - 4\delta_{af}\delta_{bh}\delta_{cg})\\ &+ (\delta_{af}\delta_{bg}\delta_{ch} - \delta_{af}\delta_{bh}\delta_{cg} + \delta_{ah}\delta_{bf}\delta_{cg} - 4\delta_{ag}\delta_{bh}\delta_{cf})\\ &- (\delta_{ah}\delta_{bg}\delta_{cf} - \delta_{ah}\delta_{bf}\delta_{cg} + \delta_{af}\delta_{bh}\delta_{cg} - 4\delta_{ag}\delta_{bf}\delta_{ch})\\ &+ (\delta_{ag}\delta_{bh}\delta_{cf} - \delta_{ag}\delta_{bf}\delta_{ch} + \delta_{af}\delta_{bg}\delta_{ch} - 4\delta_{ah}\delta_{bf}\delta_{cg})\\ &- (\delta_{af}\delta_{bh}\delta_{cg} - \delta_{af}\delta_{bg}\delta_{ch} + \delta_{ag}\delta_{bf}\delta_{ch} - 4\delta_{ah}\delta_{bg}\delta_{cf})\end{aligned} \quad (1.202)$$

$$\varepsilon_{abcd}\varepsilon_{efgh}\delta^{de} = -(\delta_{af}\delta_{bg}\delta_{ch} - \delta_{af}\delta_{bh}\delta_{cg} + \delta_{ag}\delta_{bh}\delta_{cf} - \delta_{ag}\delta_{bf}\delta_{ch} + \delta_{ah}\delta_{bf}\delta_{cg} - \delta_{ah}\delta_{bg}\delta_{cf}) \quad (1.203)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} \quad (1.204)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{k}{}_{lm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}, \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{jk}{}_{l} = 2\delta_{il} \quad (1.205)$$

$$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma D_\varsigma} = \delta_{A_\varsigma C_\varsigma}\delta_{B_\varsigma D_\varsigma} - \delta_{A_\varsigma D_\varsigma}\delta_{B_\varsigma C_\varsigma} \quad (1.206)$$

$$\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\varepsilon^{\gamma_\varsigma}{}_{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma} = \delta_{\alpha_\varsigma\rho_\varsigma}\delta_{\beta_\varsigma\sigma_\varsigma} - \delta_{\alpha_\varsigma\sigma_\varsigma}\delta_{\beta_\varsigma\rho_\varsigma} \qquad \varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\varepsilon^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}{}_{\rho_\varsigma} = 2\delta_{\alpha_\varsigma\rho_\varsigma} \quad (1.207)$$

5.13 常数不变张量$\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}, \sigma_{\alpha_\varsigma}$之间的关系

$$\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma} \equiv \varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma 4} \quad (1.208)$$

$$\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma} = -i(\sigma_{\alpha_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma}\sigma_{\gamma_\varsigma} - \delta_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma} + \delta_{\gamma_\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma} - \delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\sigma_{\gamma_\varsigma}) \quad (1.209)$$

$$\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma} = -i(\sigma_{\alpha_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma} - \delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}) = -\frac{1}{2}i[\sigma_{\alpha_\varsigma}, \sigma_{\beta_\varsigma}] \quad (1.210)$$

$$\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma} = 2i\sigma_{\alpha_\varsigma} \qquad \varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma} = 6i \quad (1.211)$$

$$2S_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\sigma_{\gamma_\varsigma} = -i\sigma_{[\alpha_\varsigma}\delta_{\beta_\varsigma]\gamma_\varsigma} + \varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma} \qquad 2\sigma_{\gamma_\varsigma}S_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = -i\delta_{\gamma_\varsigma[\alpha_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma]} + \varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma} \quad (1.212)$$

$$[S_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}, \sigma_{\gamma_\varsigma}] = -i\sigma_{[\alpha_\varsigma}\delta_{\beta_\varsigma]\gamma_\varsigma} \qquad \{S_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}, \sigma_{\gamma_\varsigma}\} = \varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma} \quad (1.213)$$

5.14 常数不变张量$\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma},\varepsilon_{abcd}$之间的关系

$$\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\equiv\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma 4} \tag{1.214}$$

$$\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma d}A^d\equiv\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}A^4 \tag{1.215}$$

$$\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma cd}F^{cd}\equiv\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}(F^{\gamma_\varsigma 4}-F^{4\gamma_\varsigma}) \tag{1.216}$$

$$\varepsilon_{\alpha_\varsigma bcd}H^{bcd}\equiv\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}(H^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma 4}-H^{\beta_\varsigma 4\gamma_\varsigma}+H^{4\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}) \tag{1.217}$$

$$\varepsilon_{abcd}R^{abcd}\equiv\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}(R^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma 4}-R^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma 4\gamma_\varsigma}+R^{\alpha_\varsigma 4\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}-R^{4\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}) \tag{1.218}$$

5.15 常数不变张量$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma},\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}$之间的关系

$$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\equiv\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma 3} \tag{1.219}$$

$$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma\gamma_\varsigma}A^{\gamma_\varsigma}\equiv\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}A^3 \tag{1.220}$$

$$\varepsilon_{A_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}F^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\equiv\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}(F^{B_\varsigma 3}-F^{3B_\varsigma}) \tag{1.221}$$

$$\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}H^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\equiv\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}(H^{A_\varsigma B_\varsigma 3}-H^{A_\varsigma 3B_\varsigma}+H^{3A_\varsigma B_\varsigma}) \tag{1.222}$$

6 几个非直观复合常数不变张量的性质

6.1 复合常数不变张量$\sigma_{\alpha'_\varsigma}^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s),\sigma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma l_\varsigma}(s),\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s),\sigma^{k_\varsigma l_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(s)$ 的性质

6.1.1 定义

$$\begin{cases}\sigma_{\alpha'_\varsigma}^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s):=(\varsigma)^{2s}\varepsilon^{l'_\varsigma m'_\varsigma}(s)\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{m'_\varsigma}(s)\\ \sigma^{\alpha'_\varsigma}_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s):=(-\varsigma)^{2s}\varepsilon_{k'_\varsigma m'_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha'_\varsigma m'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s)\end{cases}\qquad\begin{cases}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma l_\varsigma}(s):=(-\varsigma)^{2s}\varepsilon_{l_\varsigma m_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s)\\ \sigma^{k_\varsigma l_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(s):=(\varsigma)^{2s}\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s)\sigma_{\alpha_\varsigma m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)\end{cases} \tag{1.223}$$

$$\begin{cases}\sigma_{\alpha'_\varsigma}^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s):=(-\varsigma)^{2s}[\sigma_{\alpha'_\varsigma}(s)\varepsilon(s)]^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\\ \sigma^{\alpha_\varsigma}_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s):=(-\varsigma)^{2s}[\varepsilon(s)\sigma^{\alpha'_\varsigma}(s)]_{k'_\varsigma l'_\varsigma}\end{cases}\qquad\begin{cases}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma l_\varsigma}(s):=(\varsigma)^{2s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\varepsilon(s)]_{k_\varsigma l_\varsigma}\\ \sigma^{k_\varsigma l_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(s):=(\varsigma)^{2s}[\varepsilon(s)\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)]^{k_\varsigma l_\varsigma}\end{cases} \tag{1.224}$$

$$\begin{cases}\sigma_{\alpha'_\varsigma}^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s)\simeq(-1)^{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma l_\varsigma}(s)\\ \sigma^{\alpha'_\varsigma}_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s)\simeq(-1)^{2s}\sigma^{k_\varsigma l_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(s)\end{cases}\qquad\begin{cases}\sigma_{\alpha'_\varsigma}^{k'_\varsigma m'_\varsigma}(s)\sigma_{\alpha'_\varsigma m'_\varsigma l'_\varsigma}(s)=(-1)^{2s}\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{m'_\varsigma}(s)\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{m'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s)\\ \sigma_{\alpha_\varsigma k_\varsigma m_\varsigma}(s)\sigma^{m_\varsigma l_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(s)=(-1)^{2s}\sigma_{\alpha_\varsigma k_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s)\sigma_{\alpha_\varsigma m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)\end{cases} \tag{1.225}$$

6.1.2 对称与反对称性

$$\sigma^*(s)=(-1)^{2s+1}\varepsilon(s)\sigma(s)\varepsilon(s)\Rightarrow \tag{1.226}$$

$$\begin{cases}\sigma_{\alpha'_\varsigma}^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s)=(-1)^{2s+1}\sigma_{\alpha'_\varsigma}^{l'_\varsigma k'_\varsigma}(s)\\ \sigma^{\alpha'_\varsigma}_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s)=(-1)^{2s+1}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{l'_\varsigma k'_\varsigma}(s)\end{cases}\qquad\begin{cases}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma l_\varsigma}(s)=(-1)^{2s+1}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{l_\varsigma k_\varsigma}(s)\\ \sigma^{k_\varsigma l_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(s)=(-1)^{2s+1}\sigma^{l_\varsigma k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(s)\end{cases} \tag{1.227}$$

6.1.3 复共轭性

$$\sigma^*(s)=(-1)^{2s+1}\varepsilon(s)\sigma(s)\varepsilon(s)\Rightarrow \tag{1.228}$$

$$[\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s)]^*=(-1)^{2s+1}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma l_\varsigma}(s)\qquad[\sigma_{\alpha'_\varsigma}^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s)]^*=(-1)^{2s+1}\sigma^{k_\varsigma l_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(s) \tag{1.229}$$

6.2 复合常数不变张量$\sigma_{\alpha'_\varsigma}^{A'_\varsigma B'_\varsigma},\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma},\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma},\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}$ 的性质

6.2.1 定义

$$\begin{cases}\sigma_{\alpha'_\varsigma}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}:=\varsigma\varepsilon^{B'_\varsigma C'_\varsigma}\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{C'_\varsigma}\\ \sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}:=-\varsigma\varepsilon_{A'_\varsigma C'_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma C'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}\end{cases}\qquad\begin{cases}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}:=-\varsigma\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{C_\varsigma}\\ \sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}:=\varsigma\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma C_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\end{cases} \tag{1.230}$$

$$\begin{cases}\sigma_{\alpha'_\varsigma}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}=-\varsigma[\sigma_{\alpha'_\varsigma}\varepsilon]^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\\ \sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}=-\varsigma[\varepsilon\sigma^{\alpha'_\varsigma}]_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\end{cases}\qquad\begin{cases}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}=\varsigma[\sigma^{\alpha_\varsigma}\varepsilon]_{A_\varsigma B_\varsigma}\\ \sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}=\varsigma[\varepsilon\sigma_{\alpha_\varsigma}]^{A_\varsigma B_\varsigma}\end{cases} \tag{1.231}$$

$$\begin{cases}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{i}{\sqrt{2}}[\sigma^{\alpha_\varsigma}\varepsilon]_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{i}{\sqrt{2}}[-\sigma_z,i,\sigma_x]_{A_\varsigma B_\varsigma}\\ \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}=\frac{i}{\sqrt{2}}[\varepsilon\sigma_{\alpha_\varsigma}]^{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{i}{\sqrt{2}}[\sigma_z,i,-\sigma_x]^{A_\varsigma B_\varsigma}\end{cases} \tag{1.232}$$

$$\begin{cases}\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\simeq-\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\\ \sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\simeq-\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\end{cases}\qquad\begin{cases}\sigma^{A'_\varsigma C'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\sigma^{\beta'_\varsigma}{}_{C'_\varsigma B'_\varsigma}=-\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{C'_\varsigma}\sigma^{\beta'_\varsigma C'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}\\ \sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma C_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma}{}^{C_\varsigma B_\varsigma}=-\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{C_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma C_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\end{cases} \tag{1.233}$$

6.2.2 正交性

缩减一对复矢量指标：

$$\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}=\varepsilon^{A_\varsigma D_\varsigma}\varepsilon^{C_\varsigma B_\varsigma}-\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}\qquad \sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma C'_\varsigma D'_\varsigma}=\varepsilon^{A'_\varsigma D'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma B'_\varsigma}-\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma D'_\varsigma} \tag{1.234}$$

$$\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}=\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma B_\varsigma}-\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma D_\varsigma}\qquad \sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\sigma_{\alpha'_\varsigma C'_\varsigma D'_\varsigma}=\varepsilon_{A'_\varsigma D'_\varsigma}\varepsilon_{C'_\varsigma B'_\varsigma}-\varepsilon_{A'_\varsigma C'_\varsigma}\varepsilon_{B'_\varsigma D'_\varsigma} \tag{1.235}$$

$$\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}=-\delta^{(A_\varsigma}_{C_\varsigma}\delta^{B_\varsigma)}_{D_\varsigma}=-\delta^{A_\varsigma}_{(C_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{D_\varsigma)}\qquad \sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{C'_\varsigma D'_\varsigma}=-\delta^{(A'_\varsigma}_{C'_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma)}_{D'_\varsigma}=-\delta^{A'_\varsigma}_{(C'_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{D'_\varsigma)} \tag{1.236}$$

$$\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}{}_{D'_\varsigma}=-\varsigma(\varepsilon_{A'_\varsigma D'_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{B'_\varsigma}+\delta^{C'_\varsigma}_{A'_\varsigma}\varepsilon_{B'_\varsigma D'_\varsigma})\qquad \sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{D_\varsigma}=\varsigma(\varepsilon^{A_\varsigma D_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{C_\varsigma}+\delta^{A_\varsigma}_{C_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}) \tag{1.237}$$

$$\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}{}_{D'_\varsigma}=\varsigma(\delta^{A'_\varsigma}_{D'_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma C'_\varsigma}+\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{D'_\varsigma})\qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{D_\varsigma}=-\varsigma(\delta^{D_\varsigma}_{A_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma C_\varsigma}+\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}\delta^{D_\varsigma}_{B_\varsigma}) \tag{1.238}$$

$$\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma C'_\varsigma}{}_{D'_\varsigma}=\delta^{A'_\varsigma}_{D'_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{B'_\varsigma}-\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}\varepsilon_{B'_\varsigma D'_\varsigma}\qquad \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma C_\varsigma}{}^{D_\varsigma}=\delta^{D_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{C_\varsigma}-\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma} \tag{1.239}$$

6.2.3 对称与反对称性

$$\begin{cases}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}=\sigma^{B_\varsigma A_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\\ \sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}=\sigma^{\alpha_\varsigma}_{B_\varsigma A_\varsigma}\end{cases}\qquad\begin{cases}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}=\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{B'_\varsigma A'_\varsigma}\\ \sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}=\sigma^{B'_\varsigma A'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\end{cases} \tag{1.240}$$

6.2.4 复共轭性

$$\sigma^T=\varepsilon\sigma\varepsilon \tag{1.241}$$

$$[\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}]^*=\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\qquad [\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}]^*=\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma} \tag{1.242}$$

6.3 常数不变张量$\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma},\sigma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{ab}$ 的性质

6.3.1 定义

$$\sigma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{ab}:=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b{}^{B'_\varsigma B_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\qquad \sigma^{\alpha'\alpha}_{ab}\overset{P}{=}\frac{1}{2}\sigma^{\alpha'}_{A'B'}\sigma^{\alpha}_{AB} \tag{1.243}$$

$$\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}:=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\qquad \sigma^{ab}_{\alpha\alpha'}\overset{P}{=}\frac{1}{2}\sigma^{AB}_{\alpha}\sigma^{A'B'}_{\alpha'} \tag{1.244}$$

性质：

$$\sigma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{ab}=\sigma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{ba}\qquad \sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}=\sigma^{ba}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\qquad \delta^{ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{ab}=0\qquad \delta_{ab}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}=0 \tag{1.245}$$

$$\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\simeq\sigma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{ab}\qquad (\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma})^*=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\qquad (\sigma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{ab})^*=\sigma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{ab}\qquad R^{ab}=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\psi^{\alpha_\varsigma}\psi^{*\alpha'_\varsigma} \tag{1.246}$$

推论6.3.1. $\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}=-\frac{1}{2}\sigma^{ac}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\delta_{cd}\sigma^{db}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma},\sigma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{ab}=-\frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ac}\delta^{cd}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma db},\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\simeq\sigma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{ab}$

证明： $\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma a}{}^{c}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}{}^{c}{}_{b}$

$$=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{A'_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^c_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^c{}_{C_\varsigma C'_\varsigma}\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}{}_{D'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}{}_{D_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b^{D'_\varsigma D_\varsigma}$$
$$=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{A'_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon_{B'_\varsigma C'_\varsigma}\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}{}_{D'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}{}_{D_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b^{D'_\varsigma D_\varsigma}$$
$$=-\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\varsigma\varepsilon_{B_\varsigma D_\varsigma})(-\varsigma\varepsilon_{A'_\varsigma C'_\varsigma})\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}{}_{D'_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b^{D'_\varsigma D_\varsigma}$$
$$=-\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma D_\varsigma}\sigma_{\alpha'_\varsigma A'_\varsigma D'_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b^{D'_\varsigma D_\varsigma}$$

□

推论6.3.2. $\sigma_{kl}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}=\frac{1}{2}(\delta_k^{\alpha_\varsigma}\delta_l^{\alpha'_\varsigma}+\delta_k^{\alpha'_\varsigma}\delta_l^{\alpha_\varsigma}-\delta_{kl}\delta^{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}),\sigma^{kl}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}=\frac{1}{2}(\delta^k_{\alpha_\varsigma}\delta^l_{\alpha'_\varsigma}+\delta^k_{\alpha'_\varsigma}\delta^l_{\alpha_\varsigma}-\delta^{kl}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma})$

证明: $\sigma_{kl}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}$
$=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma)_k{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma)_l{}^{B'_\varsigma B_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}$
$=-\frac{1}{4}(\sigma)_k{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}(\sigma)_l{}^{B'_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}$
$=-\frac{1}{4}(\sigma)_k{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}(\sigma)_l{}^{B'_\varsigma B_\varsigma}\varsigma[\sigma^{\alpha_\varsigma}\varepsilon]_{A_\varsigma B_\varsigma}\{-\varsigma[\varepsilon\sigma^{\alpha'_\varsigma}]_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\}$
$=\frac{1}{4}(\sigma)_k{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}[\sigma^{\alpha_\varsigma}\varepsilon]_{A_\varsigma B_\varsigma}(\sigma^T)_l{}^{B_\varsigma B'_\varsigma}[\sigma^{T\alpha'_\varsigma}\varepsilon^T]_{B'_\varsigma A'_\varsigma}$
$=\frac{1}{4}tr\{\sigma_k\sigma^{\alpha_\varsigma}\varepsilon\sigma_l^T\sigma^{T\alpha'_\varsigma}\varepsilon^T\}$
$=\frac{1}{4}tr\{\sigma_k\sigma^{\alpha_\varsigma}\varepsilon\sigma_l^T\varepsilon^T\varepsilon\sigma^{T\alpha'_\varsigma}\varepsilon^T\}$
$=\frac{1}{4}tr\{\sigma_k\sigma^{\alpha_\varsigma}\sigma_l\sigma^{\alpha'_\varsigma}\}$
$=\frac{1}{4}tr\{(\delta_k^{\alpha_\varsigma}+i\varepsilon_k{}^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma})(\delta_l^{\alpha'_\varsigma}+i\varepsilon_l{}^{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\sigma_{\beta'_\varsigma})\}$
$=\frac{1}{2}(\delta_k^{\alpha_\varsigma}\delta_l^{\alpha'_\varsigma}-\varepsilon_k{}^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\varepsilon_l{}^{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\delta_{\beta_\varsigma\beta'_\varsigma})$
$=\frac{1}{2}(\delta_k^{\alpha_\varsigma}\delta_l^{\alpha'_\varsigma}+\delta_k^{\alpha'_\varsigma}\delta_l^{\alpha_\varsigma}-\delta_{kl}\delta^{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma})$ □

推论6.3.3. $\sigma_{k\pi}^{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}=-\frac{\varsigma}{2}\varepsilon_k{}^{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma},\sigma^{k\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}=-\frac{\varsigma}{2}\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}$

证明: $\sigma_{k\pi}^{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}$
$=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma)_k{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}$
$=i\varsigma\frac{1}{4}(\sigma)_k{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}$
$=i\varsigma\frac{1}{4}(\sigma)_k{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma B_\varsigma}\varsigma[\sigma^{\alpha_\varsigma}\varepsilon]_{A_\varsigma B_\varsigma}\{-\varsigma[\varepsilon\sigma^{\alpha'_\varsigma}]_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\}$
$=-i\varsigma\frac{1}{4}(\sigma)_k{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}[\sigma^{\alpha_\varsigma}\varepsilon]_{A_\varsigma B_\varsigma}\delta^{B_\varsigma B'_\varsigma}[\sigma^{T\alpha'_\varsigma}\varepsilon^T]_{B'_\varsigma A'_\varsigma}$
$=-i\varsigma\frac{1}{4}tr\{\sigma_k\sigma^{\alpha_\varsigma}\varepsilon I\sigma^{T\alpha'_\varsigma}\varepsilon^T\}$
$=-i\varsigma\frac{1}{4}tr\{\sigma_k\sigma^{\alpha_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}\}$
$=i\varsigma\frac{1}{4}tr\{(\delta_k^{\alpha_\varsigma}+i\varepsilon_k{}^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma})\sigma^{\alpha'_\varsigma}\}$
$=-\varsigma\frac{1}{2}\varepsilon_k{}^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta_{\beta_\varsigma\alpha'_\varsigma}$
$=-\frac{\varsigma}{2}\varepsilon_k{}^{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}$ □

推论6.3.4. $\sigma_{\pi\pi}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}=\frac{1}{2}\delta^{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma},\sigma^{\pi\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}=\frac{1}{2}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}$

证明: $\sigma_{\pi\pi}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}$
$=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}$
$=\frac{1}{4}\delta^{A'_\varsigma A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}$
$=\frac{1}{4}\delta^{A'_\varsigma A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma B_\varsigma}\varsigma[\sigma^{\alpha_\varsigma}\varepsilon]_{A_\varsigma B_\varsigma}\{-\varsigma[\varepsilon\sigma^{\alpha'_\varsigma}]_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\}$
$=-\frac{1}{4}\delta^{A'_\varsigma A_\varsigma}[\sigma^{\alpha_\varsigma}\varepsilon]_{A_\varsigma B_\varsigma}\delta^{B_\varsigma B'_\varsigma}[\sigma^{T\alpha'_\varsigma}\varepsilon^T]_{B'_\varsigma A'_\varsigma}$
$=-\frac{1}{4}tr\{I\sigma^{\alpha_\varsigma}\varepsilon I\sigma^{T\alpha'_\varsigma}\varepsilon^T\}$
$=\frac{1}{4}tr\{\sigma^{\alpha_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}\}$
$=\frac{1}{2}\delta^{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}$ □

推论6.3.5. $\begin{cases}\sigma^{kl}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\partial_l=\partial_{\alpha_\varsigma}\partial_{\alpha'_\varsigma}-\frac{1}{2}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\nabla^2,\sigma^{\pi\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_\pi^2=\frac{1}{2}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_\pi^2\\\sigma^{k\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\partial_\pi=-\frac{\varsigma}{2}\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\partial_\pi,\sigma^{\pi k}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_\pi\partial_k=-\frac{\varsigma}{2}\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_\pi\partial_k\end{cases}$

推论6.3.6. $\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b=\partial_{\alpha_\varsigma}\partial_{\alpha'_\varsigma}-\frac{1}{2}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\nabla^2-\partial_\pi^2)-\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\partial_\pi$

正交性：

推论6.3.7. $\sigma_{ab}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{ab}_{\beta_\varsigma\beta'_\varsigma}=\delta^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma}\delta^{\alpha'_\varsigma}{}_{\beta'_\varsigma}$

推论6.3.8. $\sigma_{ab}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma cd}=\frac{1}{2}\delta_{ac}\delta_{bd}+\frac{1}{2}\delta_{ad}\delta_{bc}-\frac{1}{4}\delta_{ab}\delta_{cd}$

证明方法一：

证明: $\sigma_{ab}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma cd}$
$= \frac{1}{4}\delta^{ef}\delta^{gh}(\sigma_{\varsigma ae}^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cg})(\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma hd}\sigma_{-\varsigma fb}^{\alpha'_\varsigma})$
$= \frac{1}{4}\delta^{ef}\delta^{gh}(S_{aecg} - \varsigma\varepsilon_{aecg})(S_{hdfb} + \varsigma\varepsilon_{hdfb})$
$= \frac{1}{4}\delta^{ef}\delta^{gh}(\delta_{ac}\delta_{eg} - \delta_{ag}\delta_{ec} - \varsigma\varepsilon_{aecg})(\delta_{hf}\delta_{db} - \delta_{hb}\delta_{df} + \varsigma\varepsilon_{hdfb})$
$= \frac{1}{4}[(\delta_{ac}\delta_{eg} - \delta_{ag}\delta_{ec})(\delta_{hf}\delta_{db} - \delta_{hb}\delta_{df}) + (-\varsigma\varepsilon_{aecg})(\delta_{hf}\delta_{db} - \delta_{hb}\delta_{df}) + (\delta_{ac}\delta_{eg} - \delta_{ag}\delta_{ec})(\varsigma\varepsilon_{hdfb}) + (-\varsigma\varepsilon_{aecg})(\varsigma\varepsilon_{hdfb})]$
$= \frac{1}{4}[(2\delta_{ac}\delta_{db} + \delta_{ab}\delta_{cd}) + (-\varsigma\varepsilon_{abcd}) + (\varsigma\varepsilon_{abcd}) - (\varepsilon_{aceg})\delta^{ef}\delta^{gh}(\varepsilon_{fhbd})]$
$= \frac{1}{4}[(2\delta_{ac}\delta_{db} + \delta_{ab}\delta_{cd}) + (-2S_{acbd})]$
$= \frac{1}{4}[(2\delta_{ac}\delta_{db} + \delta_{ab}\delta_{cd}) - 2(\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ad}\delta_{cb})]$
$= \frac{1}{2}\delta_{ac}\delta_{bd} + \frac{1}{2}\delta_{ad}\delta_{bc} - \frac{1}{4}\delta_{ab}\delta_{cd}$ □

证明方法二：

证明:
$\sigma_{ab}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma cd}$
$= \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b{}^{B'_\varsigma B_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}^{\alpha_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma_{A'_\varsigma B'_\varsigma}^{\alpha'_\varsigma}\cdot\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{cC_\varsigma C'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{dD_\varsigma D'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha'_\varsigma}^{C'_\varsigma D'_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha_\varsigma}^{C_\varsigma D_\varsigma}$

$= \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b{}^{B'_\varsigma B_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{cC_\varsigma C'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{dD_\varsigma D'_\varsigma}\cdot\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}^{\alpha_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha_\varsigma}^{C_\varsigma D_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma_{A'_\varsigma B'_\varsigma}^{\alpha'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha'_\varsigma}^{C'_\varsigma D'_\varsigma}$

$= \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b{}^{B'_\varsigma B_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{cC_\varsigma C'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{dD_\varsigma D'_\varsigma}\cdot\frac{1}{2}(\delta_{A_\varsigma}^{C_\varsigma}\delta_{B_\varsigma}^{D_\varsigma} + \delta_{A_\varsigma}^{D_\varsigma}\delta_{B_\varsigma}^{C_\varsigma})\frac{1}{2}(\delta_{A'_\varsigma}^{C'_\varsigma}\delta_{B'_\varsigma}^{D'_\varsigma} + \delta_{A'_\varsigma}^{D'_\varsigma}\delta_{B'_\varsigma}^{C'_\varsigma})$

$= \frac{1}{4}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b{}^{B'_\varsigma B_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{cA_\varsigma A'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{dB_\varsigma B'_\varsigma}$

$+ \frac{1}{4}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b{}^{B'_\varsigma B_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{cB_\varsigma B'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{dA_\varsigma A'_\varsigma}$

$+ \frac{1}{4}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b{}^{B'_\varsigma B_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{cA_\varsigma B'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{dB_\varsigma A'_\varsigma}$

$+ \frac{1}{4}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b{}^{B'_\varsigma B_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{cB_\varsigma A'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{dA_\varsigma B'_\varsigma}$

$= \frac{1}{4}\delta_{ac}\delta_{bd} + \frac{1}{4}\delta_{ad}\delta_{bc} + \frac{1}{4}[\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{cA_\varsigma B'_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b{}^{B'_\varsigma B_\varsigma}][\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{dB_\varsigma A'_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}]$

$+ \frac{1}{4}[\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{cB_\varsigma A'_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}][\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{dA_\varsigma B'_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b{}^{B'_\varsigma B_\varsigma}]$

$= \frac{1}{4}\delta_{ac}\delta_{bd} + \frac{1}{4}\delta_{ad}\delta_{bc} + \frac{1}{4}[\frac{1}{2}\delta_{cb}\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} + iS_{cbA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}][\frac{1}{2}\delta_{da}\delta_{B_\varsigma}{}^{A_\varsigma} + iS_{daB_\varsigma}{}^{A_\varsigma}]$

$+ \frac{1}{4}[\frac{1}{2}\delta_{ca}\delta_{B_\varsigma}{}^{A_\varsigma} + iS_{caB_\varsigma}{}^{A_\varsigma}][\frac{1}{2}\delta_{db}\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} + iS_{dbA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}]$

$= \frac{3}{8}\delta_{ac}\delta_{bd} + \frac{3}{8}\delta_{ad}\delta_{bc} + \frac{1}{4}iS_{cbA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}iS_{daB_\varsigma}{}^{A_\varsigma} + \frac{1}{4}iS_{caB_\varsigma}{}^{A_\varsigma}iS_{dbA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}$

$= \frac{3}{8}\delta_{ac}\delta_{bd} + \frac{3}{8}\delta_{ad}\delta_{bc} + \frac{1}{8}\sigma_{\varsigma cb}^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma da} + \frac{1}{8}\sigma_{\varsigma ca}^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma db}$

$= \frac{3}{8}\delta_{ac}\delta_{bd} + \frac{3}{8}\delta_{ad}\delta_{bc} + \frac{1}{8}(-\delta_{cd}\delta_{ba} + \delta_{ca}\delta_{bd} + \varsigma\varepsilon_{cbda}) + \frac{1}{8}(-\delta_{cd}\delta_{ab} + \delta_{cb}\delta_{ad} + \varsigma\varepsilon_{cadb})$

$= \frac{1}{2}\delta_{ac}\delta_{bd} + \frac{1}{2}\delta_{ad}\delta_{bc} - \frac{1}{4}\delta_{ab}\delta_{cd}$ □

6.3.2 汇总

定义6.3.1. $\sigma_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}^{ab} := -\frac{1}{2}(\sigma_{+\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma})^{ab} = \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha'_\varsigma}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma}, \sigma_{\alpha\alpha'}^{ab} \stackrel{P}{=} \frac{1}{2}\sigma_\alpha^{AB}\sigma_{\alpha'}^{A'B'}$

推论6.3.9. $\sigma^{kl}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}=\frac{1}{2}(\delta^k_{\alpha_\varsigma}\delta^l_{\alpha'_\varsigma}+\delta^k_{\alpha'_\varsigma}\delta^l_{\alpha_\varsigma}-\delta^{kl}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}),\sigma^{k\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}=\sigma^{\pi k}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}=-\frac{\varsigma}{2}\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma},\sigma^{\pi\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}=\frac{1}{2}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}$

推论6.3.10. $\sigma^{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}_{ab}\sigma^{ab}_{\beta_\varsigma\beta'_\varsigma}=\delta^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma}\delta^{\alpha'_\varsigma}{}_{\beta'_\varsigma},\sigma^{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}_{ab}\sigma_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma cd}=\frac{1}{2}\delta_{ac}\delta_{bd}+\frac{1}{2}\delta_{ad}\delta_{bc}-\frac{1}{4}\delta_{ab}\delta_{cd}$

推论6.3.11. $\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b=\partial_{\alpha_\varsigma}\partial_{\alpha'_\varsigma}-\frac{1}{2}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\nabla^2-\partial^2_\pi)-\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\partial_\pi=\partial_{\alpha_\varsigma}\partial_{\alpha'_\varsigma}-\frac{1}{2}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\nabla^2+\partial^2_t)+i\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\partial_t$

6.4 自旋常数不变张量$S_{ab}{}^{k_\varsigma l_\varsigma}(s,\varsigma),S^{ab}{}_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s,-\varsigma),S^{ab}{}_{k\varsigma l_\varsigma}(s,\varsigma),S_{ab}{}^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s,-\varsigma)$ 的性质

6.4.1 定义

$$S_{ab}{}^{k_\varsigma l_\varsigma}(s,\varsigma)=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{k_\varsigma l_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(s) \qquad S^{ab}{}_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s,-\varsigma)=i\sigma^{ab}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s) \tag{1.247}$$

$$S^{ab}{}_{k_\varsigma l_\varsigma}(s,\varsigma)=i\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma l_\varsigma}(s) \qquad S_{ab}{}^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s,-\varsigma)=i\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{k'_\varsigma l'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}(s) \tag{1.248}$$

6.4.2 对称与反对称性

$$S_{ab}{}^{k_\varsigma l_\varsigma}(s,\varsigma)=(-1)^{2s+1}S_{ab}{}^{l_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma) \qquad S^{ab}{}_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s,-\varsigma)=(-1)^{2s+1}S^{ab}{}_{l'_\varsigma k'_\varsigma}(s,-\varsigma) \tag{1.249}$$

$$S^{ab}{}_{k_\varsigma l_\varsigma}(s,\varsigma)=(-1)^{2s+1}S^{ab}{}_{l_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma) \qquad S_{ab}{}^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s,-\varsigma)=(-1)^{2s+1}S_{ab}{}^{l'_\varsigma k'_\varsigma}(s,-\varsigma) \tag{1.250}$$

$$S_{ab}{}^{k'_\varsigma m'_\varsigma}(s,-\varsigma)S_{cdm'_\varsigma l'_\varsigma}(s,-\varsigma)=-S_{ab}{}^{k'_\varsigma}{}_{m'_\varsigma}(s,-\varsigma)S_{cd}{}^{m'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,-\varsigma) \tag{1.251}$$

$$S_{abk_\varsigma m_\varsigma}(s,\varsigma)S_{cd}{}^{m_\varsigma l_\varsigma}(s,\varsigma)=-S_{abk_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s,\varsigma)S_{cdm_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,\varsigma) \tag{1.252}$$

6.4.3 对偶性

$$S_{ab}{}^{k_\varsigma l_\varsigma}(s,\varsigma)=-\varsigma*S_{ab}{}^{k_\varsigma l_\varsigma}(s,\varsigma) \qquad S^{ab}{}_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s,-\varsigma)=\varsigma*S^{ab}{}_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s,-\varsigma) \tag{1.253}$$

$$S^{ab}{}_{k_\varsigma l_\varsigma}(s,\varsigma)=-\varsigma*S^{ab}{}_{k_\varsigma l_\varsigma}(s,\varsigma) \qquad S_{ab}{}^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s,-\varsigma)=\varsigma*S_{ab}{}^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s,-\varsigma) \tag{1.254}$$

6.4.4 复共轭性

$$[S_{ab}{}^{k_\varsigma l_\varsigma}(s,\varsigma)\partial^a\hat{\partial}^b]^*=(-1)^{2s+1}S_{ab}{}^{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s,-\varsigma)\partial^a\hat{\partial}^b \qquad [S^{ab}{}_{k_\varsigma l_\varsigma}(s,\varsigma)\partial_a\hat{\partial}_b]^*=(-1)^{2s+1}S^{ab}{}_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(s,-\varsigma)\partial_a\hat{\partial}_b \tag{1.255}$$

6.5 几个基本常数不变张量之间的重要联系

联系一：

$$\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma a}{}^b\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_b=\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{A'_\varsigma}{}^{B'_\varsigma} \qquad \sigma^{\alpha}_{+a}{}^b\overset{P}{=}\sigma^\alpha{}_A{}^B\delta_{A'}{}^{B'} \tag{1.256}$$

$$\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}{}^a{}_b\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}=\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}\delta^{A_\varsigma}{}_{B_\varsigma} \qquad \sigma_{-\alpha'}{}^a{}_b\overset{P}{=}\sigma_{\alpha'}{}^{A'}{}_{B'}\delta^A{}_B \tag{1.257}$$

$$\sigma^{\alpha_\varsigma b}_{\varsigma a}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{A'_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)_{bB_\varsigma B'_\varsigma} \tag{1.258}$$

联系二：

$$\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b{}^{B'_\varsigma B_\varsigma}=\varsigma\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma} \qquad \sigma^{ab}_{+\alpha}\overset{P}{=}\sigma^{AB}_\alpha\varepsilon^{A'B'} \tag{1.259}$$

$$\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a{}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sigma^{ab}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b{}^{B'_\varsigma B_\varsigma}=-\varsigma\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma} \qquad \sigma^{ab}_{-\alpha'}\overset{P}{=}-\sigma^{A'B'}_{\alpha'}\varepsilon^{AB} \tag{1.260}$$

$$\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}=\varsigma\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma} \qquad \sigma^\alpha_{+ab}\overset{P}{=}\sigma^\alpha_{AB}\varepsilon_{A'B'} \tag{1.261}$$

$$\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}=-\varsigma\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma} \qquad \sigma^{\alpha'}_{-ab}\overset{P}{=}-\sigma^{\alpha'}_{A'B'}\varepsilon_{AB} \tag{1.262}$$

联系三：

$$(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_{[a}(\sigma,i\varsigma)_{b]A_\varsigma B'_\varsigma}=-2\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} \qquad (\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_{\{a}(\sigma,i\varsigma)_{b\}A_\varsigma B'_\varsigma}=2\delta_{ab}\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} \tag{1.263}$$

$$(\sigma,i\varsigma)_{[aA_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma B_\varsigma}_{b]}=-2\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{\alpha'_\varsigma A'_\varsigma}{}^{B'_\varsigma} \qquad (\sigma,i\varsigma)_{\{aA_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma B_\varsigma}_{b\}}=2\delta_{ab}\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \tag{1.264}$$

6.6 自旋常数不变张量$S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}, S^{ab}{}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}, S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}, S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}$ 的性质

6.6.1 定义

$$S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma} = \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma} \qquad S^{ab}{}_{A'_\varsigma B'_\varsigma} = \frac{i}{2}\sigma^{ab}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma} \tag{1.265}$$

$$S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma} = \frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma} \qquad S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma} = \frac{i}{2}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma} \tag{1.266}$$

6.6.2 对称与反对称性

$$S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma} = S_{ab}{}^{B_\varsigma A_\varsigma} \qquad S^{ab}{}_{A'_\varsigma B'_\varsigma} = S^{ab}{}_{B'_\varsigma A'_\varsigma} \tag{1.267}$$

$$S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma} = S^{ab}{}_{B_\varsigma A_\varsigma} \qquad S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma} = S_{ab}{}^{B'_\varsigma A'_\varsigma} \tag{1.268}$$

$$S_{ab}{}^{A'_\varsigma C'_\varsigma} S_{cdC'_\varsigma B'_\varsigma} = -S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{C'_\varsigma} S_{cd}{}^{C'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} \qquad S_{abA_\varsigma C_\varsigma} S_{cd}{}^{C_\varsigma B_\varsigma} = -S_{abA_\varsigma}{}^{C_\varsigma} S_{cdC_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \tag{1.269}$$

6.6.3 对偶性

$$S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma} = -\varsigma * S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma} \qquad S^{ab}{}_{A'_\varsigma B'_\varsigma} = \varsigma * S^{ab}{}_{A'_\varsigma B'_\varsigma} \tag{1.270}$$

$$S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma} = -\varsigma * S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma} \qquad S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma} = \varsigma * S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma} \tag{1.271}$$

6.6.4 复共轭性

$$[S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\partial^a\hat{\partial}^b]^* = S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial^a\hat{\partial}^b \qquad [S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\partial_a\hat{\partial}_b]^* = S^{ab}{}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\hat{\partial}_b \tag{1.272}$$

6.7 不变常数自旋张量之间的重要关系

6.7.1 不变常数自旋张量之间的统一关系

$$\begin{cases} S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} = -\frac{i}{4}(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_{[a}\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)_{b]B_\varsigma B'_\varsigma} \\ \delta_{ab}\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} = \frac{1}{2}(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_{\{a}\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)_{b\}B_\varsigma B'_\varsigma} \end{cases} \quad \begin{cases} S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma} = -\frac{i}{4}(\sigma,i\varsigma)_{[aA_\varsigma A'_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_{b]} \\ \delta_{ab}\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} = \frac{1}{2}(\sigma,i\varsigma)_{\{aA_\varsigma A'_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_{b\}} \end{cases} \tag{1.273}$$

$$\begin{cases} S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma} = -\frac{i\varsigma}{4}(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_{[a}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_{b]} \\ \delta_{ab}\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma} = -\frac{1}{2}(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_{\{a}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_{b\}} \end{cases} \quad \begin{cases} S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{4}(\sigma,i\varsigma)^{[a}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^{b]}_{B_\varsigma B'_\varsigma} \\ \delta^{ab}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma} = -\frac{1}{2}(\sigma,i\varsigma)^{\{a}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^{b\}}_{B_\varsigma B'_\varsigma} \end{cases} \tag{1.274}$$

$$\begin{cases} S^{ab}{}_{A'_\varsigma B'_\varsigma} = -\frac{i\varsigma}{4}(\sigma,i\varsigma)^{[a}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^{b]}_{B_\varsigma B'_\varsigma} \\ \delta_{ab}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma} = -\frac{1}{2}(\sigma,i\varsigma)^{\{a}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^{b\}}_{B_\varsigma B'_\varsigma} \end{cases} \quad \begin{cases} S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{4}(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_{[a}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_{b]} \\ \delta_{ab}\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma} = -\frac{1}{2}(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_{\{a}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_{b\}} \end{cases} \tag{1.275}$$

6.7.2 乘积关系$S^{ac}\otimes S_{bc}$

推论6.7.1.
$$\begin{cases} S^{ac}{}_{A_\varsigma C_\varsigma}\delta^d_c S_{bd}{}^{B_\varsigma D_\varsigma} = -\frac{1}{8}(\delta_{ab}+2iS_{ab})_{\{A_\varsigma}{}^{(B_\varsigma}\delta_{C_\varsigma\}}{}^{D_\varsigma)} \\ S_{ac}{}^{A'_\varsigma C'_\varsigma}\delta^c_d S^{bd}{}_{B'_\varsigma D'_\varsigma} = -\frac{1}{8}(\delta_{ab}+2iS_{ab})^{\{A'_\varsigma}{}_{(B'_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma\}}{}_{D'_\varsigma)} \end{cases}$$

证明： $S^{ac}{}_{A_\varsigma C_\varsigma}\delta^d_c S_{bd}{}^{B_\varsigma D_\varsigma}$

$= \frac{i\varsigma}{4}(\sigma,i\varsigma)^{[a}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^{c]}_{C_\varsigma C'_\varsigma}\delta^d_c\frac{i\varsigma}{4}(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_{[b}\varepsilon_{B'_\varsigma D'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)^{D'_\varsigma D_\varsigma}_{d]}$

$= -\frac{1}{8}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_b\varepsilon_{B'_\varsigma D'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{D_\varsigma}\delta_{C'_\varsigma}{}^{D'_\varsigma}+\cdots$

$= -\frac{1}{8}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma B_\varsigma}_b\delta^{D_\varsigma}_{C_\varsigma}+\cdots$

$= -\frac{1}{8}(\delta_{ab}+2iS_{ab})_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta^{D_\varsigma}_{C_\varsigma}-\frac{1}{8}(\delta_{ab}+2iS_{ab})_{C_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta^{D_\varsigma}_{A_\varsigma}-\frac{1}{8}(\delta_{ab}+2iS_{ab})_{A_\varsigma}{}^{D_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{C_\varsigma}-\frac{1}{8}(\delta_{ab}+2iS_{ab})_{C_\varsigma}{}^{D_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}$

$= -\frac{1}{8}(\delta_{ab}+2iS_{ab})_{\{A_\varsigma}{}^{(B_\varsigma}\delta_{C_\varsigma\}}{}^{D_\varsigma)}$ □

推论6.7.2.
$$\begin{cases} S^{ac}{}_{A_\varsigma C_\varsigma}\delta_{cd}S^{bd}{}_{B'_\varsigma D'_\varsigma} = \frac{1}{8}(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{C_\varsigma\}D'_\varsigma)} \\ S_{ac}{}^{A'_\varsigma C'_\varsigma}\delta^{cd}S_{bd}{}^{B_\varsigma D_\varsigma} = \frac{1}{8}(\sigma,i\varsigma)^{\{A'_\varsigma(B_\varsigma}_a(\sigma,i\varsigma)^{C'_\varsigma\}D_\varsigma)}_b \end{cases}$$

证明： $S^{ac}{}_{A_\varsigma C_\varsigma}\delta_{cd}S^{bd}{}_{B'_\varsigma D'_\varsigma}$

$= \frac{i\varsigma}{4}(\sigma,i\varsigma)^{[a}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^{c]}_{C_\varsigma C'_\varsigma}\delta_{cd}(-\frac{i\varsigma}{4})(\sigma,i\varsigma)^{[b}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^{d]}_{D_\varsigma D'_\varsigma}$

$= -\frac{1}{8}\varepsilon_{C_\varsigma D_\varsigma}\varepsilon_{C'_\varsigma D'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}+\frac{1}{8}\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma D'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{C_\varsigma C'_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}$

$+\frac{1}{8}\varepsilon_{C_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{C'_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{D_\varsigma D'_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}-\frac{1}{8}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{C_\varsigma C'_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{D_\varsigma D'_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}$
$=\frac{1}{8}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma D'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{C_\varsigma B'_\varsigma}+\frac{1}{8}(\sigma,i\varsigma)^a_{C_\varsigma D'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{A_\varsigma B'_\varsigma}+\frac{1}{8}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{C_\varsigma D'_\varsigma}+\frac{1}{8}(\sigma,i\varsigma)^a_{C_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{A_\varsigma D'_\varsigma}$
$=\frac{1}{8}(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{C_\varsigma\}D'_\varsigma)}$ □

推论6.7.3. $S^{ac}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\delta_{cd}S^{bd}{}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}=\frac{1}{8}(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma\}B'_\varsigma)},S_{ac}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\delta^{cd}S_{bd}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{1}{8}(\sigma,-i\varsigma)_a^{\{A'_\varsigma(A_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma\}B_\varsigma)}$

推论6.7.4. $S^{ac}{}_{A_\varsigma C_\varsigma}\delta^d_c S_{bd}{}^{B_\varsigma D_\varsigma}\partial_a\partial^b=\frac{1}{8}(\delta_{ab}+2iS_{ab})_{\{A_\varsigma}{}^{(B_\varsigma}\delta_{C_\varsigma\}}{}^{D_\varsigma)}\partial^a\partial^b=\frac{1}{8}\delta^{(B_\varsigma}_{\{A_\varsigma}\delta^{D_\varsigma)}_{C_\varsigma\}}\partial^a\partial_a$

推论6.7.5. $S^{ac}{}_{A_\varsigma C_\varsigma}\delta^d_c S_{bd}{}^{B_\varsigma D_\varsigma}\partial_a\partial^b\Delta(x-x')=\frac{1}{8}m^2\delta^{(B_\varsigma}_{\{A_\varsigma}\delta^{D_\varsigma)}_{C_\varsigma\}}\Delta(x-x')$

6.7.3 乘积关系$S_{ab}\partial^b\otimes[\sigma_y()]^a,[()\sigma_y]^a\otimes S_{ab}\partial^b$

推论6.7.6.

$$\begin{cases}S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\partial_b\delta_{aa'}[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^{a'}{}_{B'_\varsigma}{}^{C_\varsigma}=-\frac{\varsigma}{2}\delta^{C_\varsigma}_{\{A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma\}B'_\varsigma}\partial_b\\ S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial^b\delta^{aa'}[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]_{a'}{}^{B_\varsigma}{}_{C'_\varsigma}=\frac{\varsigma}{2}\delta^{\{A'_\varsigma}_{C'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma\}B_\varsigma}\partial^b\end{cases}$$
$$\begin{cases}S^{ab}{}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial_b\delta_{aa'}[(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]^{a'C'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}=-\frac{\varsigma}{2}\delta^{C'_\varsigma}_{\{A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma\}}\partial_b\\ S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\partial^b\delta^{aa'}[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]_{a'C_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}=\frac{\varsigma}{2}\delta^{\{A_\varsigma}_{C_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma\}}\partial^b\end{cases}$$

证明： $S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\partial_b\delta_{aa'}[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^{a'}{}_{B'_\varsigma}{}^{C_\varsigma}$
$=\frac{i\varsigma}{4}(\sigma,i\varsigma)^{[a}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^{b]}_{B_\varsigma C'_\varsigma}\partial_b\delta_{aa'}\sigma^y_{B'_\varsigma D'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_{a'}^{D'_\varsigma C_\varsigma}$
$=\frac{\varsigma}{2}\delta^{C_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{D'_\varsigma}_{A'_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}\varepsilon_{B'_\varsigma D'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma C'_\varsigma}\partial_b+\cdots$
$=-\frac{\varsigma}{2}\delta^{C_\varsigma}_{A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_b-\frac{\varsigma}{2}\delta^{C_\varsigma}_{B_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{A_\varsigma B'_\varsigma}\partial_b$
$=-\frac{\varsigma}{2}\delta^{C_\varsigma}_{\{A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma\}B'_\varsigma}\partial_b$ □

证明： $S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial^b\delta^{aa'}[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]_{a'}{}^{B_\varsigma}{}_{C'_\varsigma}$
$=-\frac{i\varsigma}{4}(\sigma,-i\varsigma)_{[a}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_{b]}^{B'_\varsigma C_\varsigma}\partial^b\delta^a_{a'}\sigma_y^{B_\varsigma D_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^{a'}_{D_\varsigma C'_\varsigma}$
$=-\frac{\varsigma}{4}(\sigma,-i\varsigma)_{[a}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_{b]}^{B'_\varsigma C_\varsigma}\partial^b\delta^a_{a'}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^{a'}_{D_\varsigma C'_\varsigma}$
$=-\frac{\varsigma}{2}\delta^{A'_\varsigma}_{C'_\varsigma}\delta^{A_\varsigma}_{D_\varsigma}\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma C_\varsigma}\partial^b+\cdots$
$=\frac{\varsigma}{2}\delta^{\{A'_\varsigma}_{C'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma\}B_\varsigma}\partial^b$ □

推论6.7.7.

$$\begin{cases}S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\partial_b\delta^{a'}_a[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]_{a'}{}^{C_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}=-\frac{\varsigma}{2}\delta^{C_\varsigma}_{\{A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma\}B'_\varsigma}\partial_b\\ S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial^b\delta^a_{a'}[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^{a'}{}_{C'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}=\frac{\varsigma}{2}\delta^{\{A'_\varsigma}_{C'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma\}B_\varsigma}\partial^b\end{cases}$$
$$\begin{cases}S^{ab}{}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial_b\delta^{a'}_a[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]_{a'B_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}=-\frac{\varsigma}{2}\delta^{C'_\varsigma}_{\{A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma\}}\partial_b\\ S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\partial^b\delta^a_{a'}[(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]^{a'B'_\varsigma}{}_{C_\varsigma}=\frac{\varsigma}{2}\delta^{\{A_\varsigma}_{C_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma\}}\partial^b\end{cases}$$

证明： $S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\partial_b\delta^{a'}_a[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]_{a'}{}^{C_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}$
$=\frac{i\varsigma}{4}(\sigma,i\varsigma)^{[a}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^{b]}_{B_\varsigma C'_\varsigma}\partial_b\delta_{aa'}\sigma_y^{C_\varsigma D_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^{a'}_{D_\varsigma B'_\varsigma}$
$=\frac{\varsigma}{4}(\sigma,i\varsigma)^{[a}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^{b]}_{B_\varsigma C'_\varsigma}\partial_b\delta_{aa'}\varepsilon^{C_\varsigma D_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^{a'}_{D_\varsigma B'_\varsigma}$
$=-\frac{\varsigma}{2}\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma}\varepsilon^{C_\varsigma D_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma C'_\varsigma}\partial_b+\cdots$
$=-\frac{\varsigma}{2}\delta^{C_\varsigma}_{\{A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma\}B'_\varsigma}\partial_b$ □

证明： $S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial^b\delta^a_{a'}[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^{a'}{}_{C'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}$
$=-\frac{i\varsigma}{4}(\sigma,-i\varsigma)_{[a}^{A'_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_{b]}^{B'_\varsigma C_\varsigma}\partial^b\delta^{aa'}\sigma^y_{C'_\varsigma D'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_{a'}^{D'_\varsigma B_\varsigma}$
$=\frac{\varsigma}{2}\varepsilon^{A'_\varsigma D'_\varsigma}\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon_{C'_\varsigma D'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma C_\varsigma}\partial^b+\cdots$
$=\frac{\varsigma}{2}\delta^{\{A'_\varsigma}_{C'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma\}B_\varsigma}\partial^b$ □

6.7.4 乘积关系$[()\sigma_y]^a \otimes [\sigma_y()]_a$

推论6.7.8. $\begin{cases}[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{aa'}[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^{a'}{}_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}=2\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}\\ [(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]_a{}^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}\delta^{aa'}[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]_{a'}{}^{A_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}=2\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{A_\varsigma}_{B_\varsigma}\end{cases}$

证明： $[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{aa'}[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^{a'}{}_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}$
$=(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma C'_\varsigma}\sigma_y^{C'_\varsigma B'_\varsigma}\delta^{a'}_a\sigma^y_{A'_\varsigma D'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)^{D'_\varsigma B_\varsigma}_{a'}$
$=-2\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{D'_\varsigma}_{C'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma D'_\varsigma}$
$=2\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}$ □

推论6.7.9. $\begin{cases}[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta^{a'}_a[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]_{a'}{}^{B_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}=2\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}\\ [(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]_a{}^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}\delta^a_{a'}[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]^{a'}{}_{B'_\varsigma}{}^{A_\varsigma}=2\delta^{A_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}\end{cases}$

证明： $[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta^{a'}_a[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]_{a'}{}^{B_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}$
$=(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma C'_\varsigma}\sigma_y^{C'_\varsigma B'_\varsigma}\delta_{aa'}\sigma_y^{B_\varsigma D_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^{a'}_{D_\varsigma A'_\varsigma}$
$=2\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}\varepsilon_{C'_\varsigma A'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}$
$=2\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}$ □

6.7.5 重要定理的详细证明

引理6.7.1. $[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\partial_a[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^b{}_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\partial_b+(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_b\partial^b$
$=(i\sigma_z,I,-i\sigma_x,i\varsigma\sigma_y)^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z,I,i\sigma_x,-i\varsigma\sigma_y)^b{}_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\partial_b+(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_b\partial^b$

定理6.7.1. $[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\partial_a[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^b{}_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\partial_b+(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_b\partial^b=\partial^a\partial_a\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}$

证明： $(i\sigma_z,I,-i\sigma_x,i\varsigma\sigma_y)^a{}_{1_\varsigma}{}^{1'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z,I,i\sigma_x,-i\varsigma\sigma_y)^b{}_{1'_\varsigma}{}^{1_\varsigma}\partial_b+(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,i\varsigma)^a_{1_\varsigma 1'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,-i\varsigma)^{1'_\varsigma 1_\varsigma}_b\partial^b$
$=(i\partial_x+\partial_y)(-i\partial_x+\partial_y)+(\partial_z+i\varsigma\partial_\pi)(\partial_z-i\varsigma\partial_\pi)$
$=(\partial_x^2+\partial_y^2)+(\partial_z^2+\partial_\pi^2)$
$=\partial^a\partial_a\delta^{1_\varsigma}_{1_\varsigma}\delta^{1'_\varsigma}_{1'_\varsigma}$ □

证明： $(i\sigma_z,I,-i\sigma_x,i\varsigma\sigma_y)^a{}_{1_\varsigma}{}^{1'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z,I,i\sigma_x,-i\varsigma\sigma_y)^b{}_{1'_\varsigma}{}^{2_\varsigma}\partial_b+(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,i\varsigma)^a_{1_\varsigma 1'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,-i\varsigma)^{1'_\varsigma 2_\varsigma}_b\partial^b$
$=(i\partial_x+\partial_y)(i\partial_z-\varsigma\partial_\pi)+(\partial_z+i\varsigma\partial_\pi)(\partial_x-i\partial_y)$
$=0$
$=\partial^a\partial_a\delta^{2_\varsigma}_{1_\varsigma}\delta^{1'_\varsigma}_{1'_\varsigma}$ □

证明： $(i\sigma_z,I,-i\sigma_x,i\varsigma\sigma_y)^a{}_{1_\varsigma}{}^{1'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z,I,i\sigma_x,-i\varsigma\sigma_y)^b{}_{2'_\varsigma}{}^{1_\varsigma}\partial_b+(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,i\varsigma)^a_{1_\varsigma 2'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,-i\varsigma)^{1'_\varsigma 1_\varsigma}_b\partial^b$
$=(i\partial_x+\partial_y)(i\partial_z+\varsigma\partial_\pi)+(\partial_x-i\partial_y)(\partial_z-i\varsigma\partial_\pi)$
$=0$
$=\partial^a\partial_a\delta^{1_\varsigma}_{1_\varsigma}\delta^{2'_\varsigma}_{1'_\varsigma}$ □

证明： $(i\sigma_z,I,-i\sigma_x,i\varsigma\sigma_y)^a{}_{1_\varsigma}{}^{1'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z,I,i\sigma_x,-i\varsigma\sigma_y)^b{}_{2'_\varsigma}{}^{2_\varsigma}\partial_b+(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,i\varsigma)^a_{1_\varsigma 2'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,-i\varsigma)^{1'_\varsigma 2_\varsigma}_b\partial^b$
$=(i\partial_x+\partial_y)(i\partial_x+\partial_y)+(\partial_x-i\partial_y)(\partial_x-i\partial_y)$
$=0$
$=\partial^a\partial_a\delta^{2_\varsigma}_{1_\varsigma}\delta^{1'_\varsigma}_{2'_\varsigma}$ □

证明： $(i\sigma_z, I, -i\sigma_x, i\varsigma\sigma_y)^{a}{}_{1_\varsigma}{}^{2'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z, I, i\sigma_x, -i\varsigma\sigma_y)^{b}{}_{1'_\varsigma}{}^{1_\varsigma}\partial_b + (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, i\varsigma)^{a}_{1_\varsigma 1'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, -i\varsigma)_{b}^{2'_\varsigma 1_\varsigma}\partial^b$
$= (-i\partial_z + \varsigma\partial_\pi)(-i\partial_x + \partial_y) + (\partial_z + i\varsigma\partial_\pi)(\partial_x + i\partial_y)$
$= 0$
$= \partial^a\partial_a\delta^{1_\varsigma}_{1_\varsigma}\delta^{2'_\varsigma}_{1'_\varsigma}$ □

证明： $(i\sigma_z, I, -i\sigma_x, i\varsigma\sigma_y)^{a}{}_{1_\varsigma}{}^{2'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z, I, i\sigma_x, -i\varsigma\sigma_y)^{b}{}_{1'_\varsigma}{}^{2_\varsigma}\partial_b + (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, i\varsigma)^{a}_{1_\varsigma 1'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, -i\varsigma)_{b}^{2'_\varsigma 2_\varsigma}\partial^b$
$= (-i\partial_z + \varsigma\partial_\pi)(i\partial_z - \varsigma\partial_\pi) + (\partial_z + i\varsigma\partial_\pi)(-\partial_z - i\varsigma\partial_\pi)$
$= 0$
$= \partial^a\partial_a\delta^{2_\varsigma}_{1_\varsigma}\delta^{2'_\varsigma}_{1'_\varsigma}$ □

证明： $(i\sigma_z, I, -i\sigma_x, i\varsigma\sigma_y)^{a}{}_{1_\varsigma}{}^{2'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z, I, i\sigma_x, -i\varsigma\sigma_y)^{b}{}_{2'_\varsigma}{}^{1_\varsigma}\partial_b + (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, i\varsigma)^{a}_{1_\varsigma 2'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, -i\varsigma)_{b}^{2'_\varsigma 1_\varsigma}\partial^b$
$= (-i\partial_z + \varsigma\partial_\pi)(i\partial_z + \varsigma\partial_\pi) + (\partial_x - i\partial_y)(\partial_x - i\partial_y)$
$= (\partial_z^2 + \partial_\pi^2) + (\partial_x^2 + \partial_y^2)$
$= \partial^a\partial_a\delta^{1_\varsigma}_{1_\varsigma}\delta^{2'_\varsigma}_{2'_\varsigma}$ □

证明： $(i\sigma_z, I, -i\sigma_x, i\varsigma\sigma_y)^{a}{}_{1_\varsigma}{}^{2'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z, I, i\sigma_x, -i\varsigma\sigma_y)^{b}{}_{2'_\varsigma}{}^{2_\varsigma}\partial_b + (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, i\varsigma)^{a}_{1_\varsigma 2'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, -i\varsigma)_{b}^{2'_\varsigma 2_\varsigma}\partial^b$
$= (-i\partial_z + \varsigma\partial_\pi)(i\partial_x + \partial_y) + (\partial_x - i\partial_y)(-\partial_z - i\varsigma\partial_\pi)$
$= 0$
$= \partial^a\partial_a\delta^{2_\varsigma}_{1_\varsigma}\delta^{2'_\varsigma}_{2'_\varsigma}$ □

证明： $(i\sigma_z, I, -i\sigma_x, i\varsigma\sigma_y)^{a}{}_{2_\varsigma}{}^{1'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z, I, i\sigma_x, -i\varsigma\sigma_y)^{b}{}_{1'_\varsigma}{}^{1_\varsigma}\partial_b + (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, i\varsigma)^{a}_{2_\varsigma 1'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, -i\varsigma)_{b}^{1'_\varsigma 1_\varsigma}\partial^b$
$= (-i\partial_z - \varsigma\partial_\pi)(-i\partial_x + \partial_y) + (\partial_x + i\partial_y)(\partial_z - i\varsigma\partial_\pi)$
$= 0$
$= \partial^a\partial_a\delta^{1_\varsigma}_{2_\varsigma}\delta^{1'_\varsigma}_{1'_\varsigma}$ □

证明： $(i\sigma_z, I, -i\sigma_x, i\varsigma\sigma_y)^{a}{}_{2_\varsigma}{}^{1'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z, I, i\sigma_x, -i\varsigma\sigma_y)^{b}{}_{1'_\varsigma}{}^{2_\varsigma}\partial_b + (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, i\varsigma)^{a}_{2_\varsigma 1'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, -i\varsigma)_{b}^{1'_\varsigma 2_\varsigma}\partial^b$
$= (-i\partial_z - \varsigma\partial_\pi)(i\partial_z - \varsigma\partial_\pi) + (\partial_x + i\partial_y)(\partial_x - i\partial_y)$
$= (\partial_z^2 + \partial_\pi^2) + (\partial_x^2 + \partial_y^2)$
$= \partial^a\partial_a\delta^{2_\varsigma}_{2_\varsigma}\delta^{1'_\varsigma}_{1'_\varsigma}$ □

证明： $(i\sigma_z, I, -i\sigma_x, i\varsigma\sigma_y)^{a}{}_{2_\varsigma}{}^{1'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z, I, i\sigma_x, -i\varsigma\sigma_y)^{b}{}_{2'_\varsigma}{}^{1_\varsigma}\partial_b + (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, i\varsigma)^{a}_{2_\varsigma 2'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, -i\varsigma)_{b}^{1'_\varsigma 1_\varsigma}\partial^b$
$= (-i\partial_z - \varsigma\partial_\pi)(i\partial_z + \varsigma\partial_\pi) + (-\partial_z + i\varsigma\partial_\pi)(\partial_z - i\varsigma\partial_\pi)$
$= 0$
$= \partial^a\partial_a\delta^{1_\varsigma}_{2_\varsigma}\delta^{1'_\varsigma}_{2'_\varsigma}$ □

证明： $(i\sigma_z, I, -i\sigma_x, i\varsigma\sigma_y)^{a}{}_{2_\varsigma}{}^{1'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z, I, i\sigma_x, -i\varsigma\sigma_y)^{b}{}_{2'_\varsigma}{}^{2_\varsigma}\partial_b + (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, i\varsigma)^{a}_{2_\varsigma 2'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, -i\varsigma)_{b}^{1'_\varsigma 2_\varsigma}\partial^b$
$= (-i\partial_z - \varsigma\partial_\pi)(i\partial_x + \partial_y) + (-\partial_z + i\varsigma\partial_\pi)(\partial_x - i\partial_y)$
$= 0$
$= \partial^a\partial_a\delta^{2_\varsigma}_{2_\varsigma}\delta^{1'_\varsigma}_{2'_\varsigma}$ □

证明： $(i\sigma_z, I, -i\sigma_x, i\varsigma\sigma_y)^{a}{}_{2_\varsigma}{}^{2'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z, I, i\sigma_x, -i\varsigma\sigma_y)^{b}{}_{1'_\varsigma}{}^{1_\varsigma}\partial_b + (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, i\varsigma)^{a}_{2_\varsigma 1'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, -i\varsigma)_{b}^{2'_\varsigma 1_\varsigma}\partial^b$
$= (-i\partial_x + \partial_y)(-i\partial_x + \partial_y) + (\partial_x + i\partial_y)(\partial_x + i\varsigma\partial_y)$
$= 0$
$= \partial^a\partial_a\delta^{1_\varsigma}_{2_\varsigma}\delta^{2'_\varsigma}_{1'_\varsigma}$ □

证明： $(i\sigma_z, I, -i\sigma_x, i\varsigma\sigma_y)^a{}_{2_\varsigma}{}^{2'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z, I, i\sigma_x, -i\varsigma\sigma_y)^b{}_{1'_\varsigma}{}^{2_\varsigma}\partial_b + (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, i\varsigma)^a_{2_\varsigma 1'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, -i\varsigma)^{2'_\varsigma 2_\varsigma}_b\partial^b$
$= (-i\partial_x + \partial_y)(i\partial_z - \varsigma\partial_\pi) + (\partial_x + i\partial_y)(-\partial_z - i\varsigma\partial_\pi)$
$= 0$
$= \partial^a\partial_a\delta^{2_\varsigma}_{2_\varsigma}\delta^{2'_\varsigma}_{1'_\varsigma}$ □

证明： $(i\sigma_z, I, -i\sigma_x, i\varsigma\sigma_y)^a{}_{2_\varsigma}{}^{2'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z, I, i\sigma_x, -i\varsigma\sigma_y)^b{}_{2'_\varsigma}{}^{1_\varsigma}\partial_b + (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, i\varsigma)^a_{2_\varsigma 2'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, -i\varsigma)^{2'_\varsigma 1_\varsigma}_b\partial^b$
$= (-i\partial_x + \partial_y)(i\partial_z + \varsigma\partial_\pi) + (-\partial_z + i\varsigma\partial_\pi)(\partial_x + i\partial_y)$
$= 0$
$= \partial^a\partial_a\delta^{1_\varsigma}_{2_\varsigma}\delta^{2'_\varsigma}_{2'_\varsigma}$ □

证明： $(i\sigma_z, I, -i\sigma_x, i\varsigma\sigma_y)^a{}_{2_\varsigma}{}^{2'_\varsigma}\partial_a(-i\sigma_z, I, i\sigma_x, -i\varsigma\sigma_y)^b{}_{2'_\varsigma}{}^{2_\varsigma}\partial_b + (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, i\varsigma)^a_{2_\varsigma 2'_\varsigma}\partial_a(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, -i\varsigma)^{2'_\varsigma 2_\varsigma}_b\partial^b$
$= (-i\partial_x + \partial_y)(i\partial_x + \partial_y) + (-\partial_z + i\varsigma\partial_\pi)(-\partial_z - i\varsigma\partial_\pi)$
$= (\partial_x^2 + \partial_y^2) + (\partial_z^2 + \partial_\pi^2)$
$= \partial^a\partial_a\delta^{2_\varsigma}_{2_\varsigma}\delta^{2'_\varsigma}_{2'_\varsigma}$ □

定理6.7.2. $(\sigma, i\varsigma)^a_{[A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma, i\varsigma)^b_{B_\varsigma]B'_\varsigma}\partial_a\partial_b = -\partial^a\partial_a\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}, (\sigma, -i\varsigma)^{[A'_\varsigma A_\varsigma}_a(\sigma, -i\varsigma)^{B'_\varsigma]B_\varsigma}_b\partial^a\partial^b = -\partial^a\partial_a\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}$

定理6.7.3. $(\sigma, i\varsigma)^a_{[A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma, i\varsigma)^b_{B_\varsigma]B'_\varsigma}\delta_{ab} = -\delta^a{}_a\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}, (\sigma, -i\varsigma)^{[A'_\varsigma A_\varsigma}_a(\sigma, -i\varsigma)^{B'_\varsigma]B_\varsigma}_b\delta^{ab} = -\delta^a{}_a\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}$

定理6.7.4. $[(\sigma, i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}[\sigma_y(\sigma, -i\varsigma)]^b{}_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\partial_a\partial_b + (\sigma, i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma, -i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_b\partial_a\partial^b = \partial^a\partial_a\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}$

定理6.7.5. $[(\sigma, i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}[\sigma_y(\sigma, -i\varsigma)]^b{}_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta^{ab} + (\sigma, i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma, -i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_b\delta_a{}^b = \delta^a{}_a\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}$

6.8 复合常数不变张量$\Sigma^{k_s l_s}_{k_{s'} l_{s'}}(s, s')$ 的性质

6.8.1 定义

$$c(s) = [(-1)^{2s}\tfrac{8}{3}s(s+\tfrac{1}{2})(s+1)]^{-\frac{1}{2}} \tag{1.276}$$

$$\Sigma^{k_s l_s}_{ab}(s) := \begin{cases} c(|s|)S_{ab}{}^{kl}(|s|, +), s > 0 \\ c(|s|)S_{abk'l'}(|s|, -), s < 0 \end{cases} \qquad \Sigma^{ab}_{k_s l_s}(s) := \begin{cases} c(|s|)S^{ab}{}_{kl}(|s|, +), s > 0 \\ c(|s|)S^{abk'l'}(|s|, -), s < 0 \end{cases} \tag{1.277}$$

定义：$\Sigma^{k_s l_s}_{k_{s'} l_{s'}}(s, s') := \Sigma^{k_s l_s}_{ab}(s)\Sigma^{ab}_{k_{s'} l_{s'}}(s')$ (1.278)

6.8.2 传递性

$$\Sigma^{k_s l_s}_{k_{s'} l_{s'}}(s, s')\Sigma^{k_{s'} l_{s'}}_{k_{s''} l_{s''}}(s', s'') = \Sigma^{k_s l_s}_{k_{s''} l_{s''}}(s, s'') \tag{1.279}$$

6.8.3 对称性与反对称性

$$\Sigma^{k_s l_s}_{k_{s'} l_{s'}}(s, s') = (-1)^{2s+1}\Sigma^{l_s k_s}_{k_{s'} l_{s'}}(s, s') \qquad \Sigma^{l_s k_s}_{k_{s'} l_{s'}}(s, s') = (-1)^{2s'+1}\Sigma^{k_s l_s}_{l_{s'} k_{s'}}(s, s') \tag{1.280}$$

$$\Sigma^{k_s l_s}_{k_{s'} l_{s'}}(s, s') = (-1)^{2(s+s')}\Sigma^{l_s k_s}_{l_{s'} k_{s'}}(s, s') \tag{1.281}$$

7 常数不变张量的一般理论

7.1 常数不变张量的一般定义

定义洛伦兹变换：$\Lambda[L_i]:=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}[L_i]}$,定义YM场变换：$\Lambda[Y_j]:=e^{i\theta^\alpha T_\alpha[Y_j]}$ (1.282)

常数不变张量的一般定义：

在任何参考系中$C^{Y_1Y_2\cdots Y_m}_{L_1L_2\cdots L_n}$是常数并且相等，并满足如下变换：

$$C^{Y_1Y_2\cdots Y_m}_{L_1L_2\cdots L_n}=\prod_{i=1}^{n}\Lambda^{L'_i}_{L_i}[L_i]\prod_{j=1}^{m}\Lambda^{Y_j}_{Y'_j}[Y_j]C^{Y'_1Y'_2\cdots Y'_m}_{L'_1L'_2\cdots L'_n} \tag{1.283}$$

则$C^{Y_1Y_2\cdots Y_m}_{L_1L_2\cdots L_n}$是常数不变张量,$L_i\sim e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}[L_i]}$,$Y_j\sim e^{i\theta^\alpha T_\alpha[Y_j]}$

无穷小变换

$$0=\delta C^{Y_1Y_2\cdots Y_m}_{L_1L_2\cdots L_n}=\tfrac{1}{2}\vartheta^{ab}\sum_{i=1}^{n}S_{ab}{}^{L'_i}_{L_i}[L_i]C^{Y_1Y_2\cdots Y_m}_{L_1L_2\cdots L'_i\cdots L_n}+i\theta^\alpha\sum_{j=1}^{m}T_\alpha{}^{Y_j}_{Y'_j}[L_i]C^{Y_1Y_2\cdots Y'_j\cdots Y_m}_{L_1L_2\cdots L_n},\forall\vartheta^{ab},\forall\theta^\alpha \tag{1.284}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}S_{ab}{}^{L'_i}_{L_i}[L_i]C^{Y_1Y_2\cdots Y_m}_{L_1L_2\cdots L'_i\cdots L_n}=0,\sum_{j=1}^{m}T_\alpha{}^{Y_j}_{Y'_j}[L_i]C^{Y_1Y_2\cdots Y'_j\cdots Y_m}_{L_1L_2\cdots L_n}=0 \tag{1.285}$$

7.2 常数不变张量的协变导数为零

$$D_uC^{Y_1Y_2\cdots Y_m}_{L_1L_2\cdots L_n}=\partial_uC^{Y_1Y_2\cdots Y_m}_{L_1L_2\cdots L_n}+\tfrac{1}{2}\omega_u{}^{ab}\sum_{i=1}^{n}S_{ab}{}^{L'_i}_{L_i}[L_i]C^{Y_1Y_2\cdots Y_m}_{L_1\cdots L'_i\cdots L_n}+iA_u{}^\alpha\sum_{j=1}^{m}T_\alpha{}^{Y_j}_{Y'_j}[L_i]C^{Y_1\cdots Y'_j\cdots Y_m}_{L_1L_2\cdots L_n} \tag{1.286}$$

$$D_uC^{Y_1Y_2\cdots Y_m}_{L_1L_2\cdots L_n}=0+0+0=0 \tag{1.287}$$

因此所有常数不变张量的协变导数全为零，这是一个很好、很方便的性质。

第二章　完美常数不变张量

自我评述：本章创立的完美常数不变张量，具有一些完美的性质，有很大的广泛性，适用于多种情形。它将全对称的低自旋张量与高自旋量联系起来了，是研究一般自旋粒子的一个有力数学工具。我是受全反对称张量的启发，去尝试寻找一个类似的全对称张量，经过不断尝试，最后就找到了这样一个全对称旋量张量。然后结合上一章得到的各种基本常数不变张量，进一步发展得到了多个有用的特殊常数不变张量。

1 $w+1$阶对称指标正向排序规律

1.1 $w+1$阶对称指标正向排序规律的严格证明(本质上用了数学归纳法，从0排起)

定义1.1.1. $\lambda_i=\{0,1,2,\cdot\cdot,w\},1\le i\le 2s=w+1;\lambda_{2s+1}:=0,\lambda_0:=0$

定理1.1.1. $\pi(\lambda_{2s}\le\lambda_{2s-1}\cdot\cdot\le\lambda_1;w)=\sum\limits_{l=0}^{2s-1}(C_{l+1+w-\lambda_{l+2}}^{l+1}-C_{l+1+w-\lambda_{l+1}}^{l+1})=\sum\limits_{l=1}^{2s}(C_{l+w-\lambda_{l+1}}^{l}-C_{l+w-\lambda_l}^{l})$

证明: $\pi(\lambda_{2s}\le\lambda_{2s-1}\cdot\cdot\le\lambda_1;w)=\pi(\lambda_{2s-1}\cdot\cdot\lambda_1-\lambda_{2s}\cdot\cdot\lambda_{2s};w-\lambda_{2s})+\sum\limits_{k=0}^{\lambda_{2s}-1}C_{2s-1+w-k}^{2s-1}$

$=\pi(\lambda_{2s-2}\cdot\cdot\lambda_1-\lambda_{2s-1}\cdot\cdot\lambda_{2s-1};w-\lambda_{2s-1})+\sum\limits_{k=0}^{\lambda_{2s}-1}C_{2s-1+w-k}^{2s-1}+\sum\limits_{k=0}^{\lambda_{2s-1}-\lambda_{2s}-1}C_{2s-2+w-\lambda_{2s}-k}^{2s-2}$

$=\pi(\lambda_1-\lambda_2;w-\lambda_2)+\sum\limits_{k=0}^{\lambda_{2s}-1}C_{2s-1+w-k}^{2s-1}+\sum\limits_{k=0}^{\lambda_{2s-1}-\lambda_{2s}-1}C_{2s-2+w-\lambda_{2s}-k}^{2s-2}\cdot\cdot+\sum\limits_{j=0}^{\lambda_2-\lambda_3-1}C_{1+w-\lambda_3-k}^{1}$

$=\sum\limits_{k=0}^{\lambda_{2s}-1}C_{2s-1+w-k}^{2s-1}+\sum\limits_{k=0}^{\lambda_{2s-1}-\lambda_{2s}-1}C_{2s-2+w-\lambda_{2s}-k}^{2s-2}\cdot\cdot+\sum\limits_{j=0}^{\lambda_2-\lambda_3-1}C_{1+w-\lambda_3-k}^{1}+\lambda_1-\lambda_2$

$=\sum\limits_{l=1}^{2s-1}\sum\limits_{k=0}^{\lambda_{l+1}-\lambda_{l+2}-1}C_{l+w-\lambda_{l+2}-k}^{l}+(\lambda_1-\lambda_2)$

$=\sum\limits_{l=0}^{2s-1}(\sum\limits_{k=0}^{\lambda_{l+1}-\lambda_{l+2}}C_{l+w-\lambda_{l+2}-k}^{l}-C_{l+w-\lambda_{l+1}}^{l})$

$=\sum\limits_{l=0}^{2s-1}(C_{l+1+w-\lambda_{l+2}}^{l+1}-C_{l+w-\lambda_{l+1}}^{l+1}-C_{l+w-\lambda_{l+1}}^{l})$

$=\sum\limits_{l=0}^{2s-1}(C_{l+1+w-\lambda_{l+2}}^{l+1}-C_{l+1+w-\lambda_{l+1}}^{l+1})$

$=\sum\limits_{l=1}^{2s}(C_{l+w-\lambda_{l+1}}^{l}-C_{l+w-\lambda_l}^{l})$ □

证明: $\pi(ww\cdot\cdot w;w)$

$=\sum\limits_{l=0}^{2s-1}(C_{l+1+w-\lambda_{l+2}}^{l+1}-C_{l+1+w-\lambda_{l+1}}^{l+1})$

$=(C_{2s+w-\lambda_{2s+1}}^{2s}-C_{2s+w-\lambda_{2s}}^{2s})+(C_{2s-1+w-\lambda_{2s}}^{2s-1}-C_{2s-1+w-\lambda_{2s-1}}^{2s-1})+\cdot\cdot+(C_{1+w-\lambda_2}^{1}-C_{1+w-\lambda_1}^{1})$

$=(C_{2s+w}^{2s}-C_{2s}^{2s})+(C_{2s-1}^{2s-1}-C_{2s-1}^{2s-1})+\cdot\cdot+(C_1^1-C_1^1)$

$=C_{2s+w}^{2s}-1$ □

引理1.1.1. $\sum\limits_{l'=2l-1}^{2l}(C_{l'+1+w-\lambda_{l'+2}}^{l'+1}-C_{l'+1+w-\lambda_{l'+1}}^{l'+1})=C_{2l+1+w-\lambda_{2l+2}}^{2l+1}-C_{2l+w-\lambda_{2l+1}}^{2l+1}-C_{2l+w-\lambda_{2l}}^{2l}$

定理1.1.2. $\sum\limits_{l=0}^{2s-1}(C_{l+1+w-\lambda_{l+2}}^{l+1}-C_{l+1+w-\lambda_{l+1}}^{l+1})=\sum\limits_{l=0}^{[s]}(C_{2l+1+w-\lambda_{2l+2}}^{2l+1}-C_{2l+w-\lambda_{2l+1}}^{2l+1}-C_{2l+w-\lambda_{2l}}^{2l})$

定理1.1.3. $\pi(\underbrace{i_0\cdot\cdot i_0}_{l_0}\underbrace{i_1\cdot\cdot i_1}_{l_1}\cdot\cdot\underbrace{i_n\cdot\cdot i_n}_{l_n}),l_0+\cdot\cdot+l_n=2s;l_0,\cdot\cdot,l_n\ge 1$

$=(C_{l_n+w-i_{n-1}}^{l_n}-C_{l_n+w-i_n}^{l_n})+(C_{l_{n-1}+l_n+w-i_{n-2}}^{l_{n-1}+l_n}-C_{l_{n-1}+l_n+w-i_{n-1}}^{l_{n-1}+l_n})+\cdot\cdot+(C_{l_0+\cdot\cdot+l_n+w}^{l_0+\cdot\cdot+l_n}-C_{l_0+\cdot\cdot+l_n+w-i_0}^{l_0+\cdot\cdot+l_n})$

证明: $\pi(\underbrace{i_0\cdot\cdot i_0}_{l_0}\underbrace{i_1\cdot\cdot i_1}_{l_1}\cdot\cdot\underbrace{i_n\cdot\cdot i_n}_{l_n}) = \sum\limits_{l=1}^{2s}(C^l_{l+w-\lambda_{l+1}} - C^l_{l+w-\lambda_l})$

$$= \sum_{l=1}^{l_n}(C^l_{l+w-\lambda_{l+1}} - C^l_{l+w-\lambda_l}) + \sum_{l=l_n+1}^{l_{n-1}+l_n}(C^l_{l+w-\lambda_{l+1}} - C^l_{l+w-\lambda_l}) + \cdot\cdot + \sum_{l=l_1+\cdot\cdot+l_n+1}^{l_0+\cdot\cdot+l_n}(C^l_{l+w-\lambda_{l+1}} - C^l_{l+w-\lambda_1})$$

$$= (C^{l_n}_{l_n+w-i_{n-1}} - C^{l_n}_{l_n+w-i_n}) + (C^{l_{n-1}+l_n}_{l_{n-1}+l_n+w-i_{n-2}} - C^{l_{n-1}+l_n}_{l_{n-1}+l_n+w-i_{n-1}}) + \cdot\cdot + (C^{l_0+\cdot\cdot+l_n}_{l_0+\cdot\cdot+l_n+w} - C^{l_0+\cdot\cdot+l_n}_{l_0+\cdot\cdot+l_n+w-i_0})$$ □

1.2 四阶对称指标正向排序规律的验证

性质1.2.1.

$0:0000\to1:0001\to2:0002\to3:0003\to$

$4:0011\to5:0012\to6:0013\to7:0022\to8:0023\to9:0033\to$

$10:0111\to11:0112\to12:0113\to13:0122\to14:0123\to15:0133\to$

$16:0222\to17:0223\to18:0233\to19:0333\to$

$20:1111\to21:1112\to22:1113\to23:1122\to24:1123\to25:1133\to$

$26:1222\to27:1223\to28:1233\to29:1333\to$

$30:2222\to31:2223\to32:2233\to33:2333\to34:3333$

2 完美常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s;w),\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;w)$

2.1 常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s),\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s)$ 的引入

定义2.1.1.
$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s) = \frac{1}{(2s)!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)}_{2s}}(s), \Gamma^{k}_{\underbrace{1\cdot\cdot1}_{l}\underbrace{0\cdot\cdot0}_{2s-l}}(s) = \sqrt{C^{-k}_{2s}}\delta_{kl}, k,l=0,1,\cdot\cdot,2s \\ \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s) = \frac{1}{(2s)!}\Gamma^{\overbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)}^{2s}}_{k_\varsigma}(s), \Gamma^{\overbrace{1\cdot\cdot1}^{l}\overbrace{0\cdot\cdot0}^{2s-l}}_{k}(s) = \sqrt{C^{-k}_{2s}}\delta_{kl}, k,l=0,1,\cdot\cdot,2s\end{cases}$$

定义2.1.2. $\psi^{k_\varsigma}(s) = \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)\psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}} = \sqrt{C^{k_\varsigma}_{2s}}\psi^{\overbrace{2\cdot\cdot2}^{k_\varsigma}\overbrace{1\cdot\cdot1}^{2s-k_\varsigma}}$

定义2.1.3. $\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma} = (\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix})_{k_\varsigma}$

2.2 常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s;w),\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;w)$的引入

定义2.2.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w) = \frac{1}{(2s)!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)}_{2s}}(s;w)$

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}_{l_0}\underbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}_{l_1}\cdot\cdot\underbrace{w_\varsigma\cdot\cdot w_\varsigma}_{l_w}}(s;w) = \sqrt{\frac{l_0!l_1!\cdot\cdot l_w!}{(2s)!}}\delta\{k_\varsigma,\sum_{l=1}^{2s}(C^l_{l+w-\lambda_{l+1}} - C^l_{l+w-\lambda_l})\}, l_0+l_1+\cdot\cdot+l_w=2s$$

定义2.2.2. $\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w) = \frac{1}{(2s)!}\Gamma^{\overbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)$

$$\Gamma^{\overbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}^{l_0}\overbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}^{l_1}\cdot\cdot\overbrace{w_\varsigma\cdot\cdot w_\varsigma}^{l_w}}_{k_\varsigma}(s;w) = \sqrt{\frac{l_0!l_1!\cdot\cdot l_w!}{(2s)!}}\delta\{k_\varsigma,\sum_{l=1}^{2s}(C^l_{l+w-\lambda_{l+1}} - C^l_{l+w-\lambda_l})\}, l_0+l_1+\cdot\cdot+l_w=2s$$

推论2.2.1. $[A_\varsigma]=w+1,[k_\varsigma(s)]=C^{2s}_{2s+w}$

推论2.2.2. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s) = \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;1), \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s) = \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;1)$

自我评述：以上表明$\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s;w)$，$\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;w)$是常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s)$，$\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s)$的推广。

2.3 定义的解读

上述定义本质上是对所有$\underbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}_{l_0}\underbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}_{l_1}\cdot\cdot\underbrace{w_\varsigma\cdot\cdot w_\varsigma}_{l_w}$先进行排序编号。然后对每一个$\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}$赋值，即先排成$\underbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}_{l_0}\underbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}_{l_1}\cdot\cdot\underbrace{w_\varsigma\cdot\cdot w_\varsigma}_{l_w}$的形式，并与之前所有编号进行对比，如果与编号不一致的为零；与编号一致的不为零，并归一化，归一化系数是$\underbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}_{l_0}\underbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}_{l_1}\cdot\cdot\underbrace{w_\varsigma\cdot\cdot w_\varsigma}_{l_w}$ 全对称化后所有种类数的倒数开方。以上常数不变张量只与旋量全对称代数性质相关，与旋量变换性质无直接相关，是全对称性张量内在固有的代数性质，与A_ς指标阶数直接本质相关。

2.4 常数矩阵$\Gamma(s;w),\bar\Gamma(s;w)$的引入

定义2.4.1. $\Gamma(s;w)\succ\Gamma_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}{}^{k_\varsigma}(s;w),\bar\Gamma(s;w)\succ\Gamma_{k_\varsigma}{}^{\overbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma\otimes\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\simeq\Gamma^T(s;w)$

推论2.4.1. $[\Gamma(s;w)]=(w+1)^{2s}\times C_{2s+w}^{2s},[\bar\Gamma(s;w)]=C_{2s+w}^{2s}\times(w+1)^{2s}$

$\Gamma(s),\bar\Gamma(s)$的显式表示：

推论2.4.2. $\Gamma(s=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdot\cdot)=1,I,\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}\sqrt2&0&0\\0&\sqrt1&0\\0&\sqrt1&0\\0&0&\sqrt2\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}\sqrt3&0&0&0\\0&\sqrt1&0&0\\0&\sqrt1&0&0\\0&0&\sqrt1&0\\0&\sqrt1&0&0\\0&0&\sqrt1&0\\0&0&\sqrt1&0\\0&0&0&\sqrt3\end{bmatrix},\cdot\cdot$

推论2.4.3. $\bar\Gamma(s=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdot\cdot)=1,I,\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}\sqrt2&0&0&0\\0&\sqrt1&\sqrt1&0\\0&0&0&\sqrt2\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}\sqrt3&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt1&\sqrt1&0&\sqrt1&0&0&0\\0&0&0&\sqrt1&0&\sqrt1&\sqrt1&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt3\end{bmatrix},\cdot\cdot$

推论2.4.4.

$$\bar\Gamma(s)=\begin{bmatrix}\sqrt{C_{2s}^{-0}}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\cdot\\0&\sqrt{C_{2s}^{-1}}&\sqrt{C_{2s}^{-1}}&0&\sqrt{C_{2s}^{-1}}&0&0&0&\sqrt{C_{2s}^{-1}}&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\cdot\\0&0&0&\sqrt{C_{2s}^{-2}}&0&\sqrt{C_{2s}^{-2}}&\sqrt{C_{2s}^{-2}}&0&0&\sqrt{C_{2s}^{-2}}&\sqrt{C_{2s}^{-2}}&0&\sqrt{C_{2s}^{-2}}&0&0&0&\cdot\cdot\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{C_{2s}^{-3}}&0&0&0&\sqrt{C_{2s}^{-3}}&0&\sqrt{C_{2s}^{-3}}&\sqrt{C_{2s}^{-3}}&0&\cdot\cdot\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{C_{2s}^{-4}}&\cdot\cdot\\\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot\end{bmatrix}$$

2.5 常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s;w),\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;w)$ 的基本性质

相等性：

性质2.5.1. $\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\simeq\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\simeq\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\simeq\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)$

性质2.5.2. $[\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)]^*\simeq\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w),[\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)]^*\simeq\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)$

推论2.5.1. $\Gamma(s;w)=\Gamma^*(s;w),\bar\Gamma(s;w)=\bar\Gamma^*(s;w),\bar\Gamma(s;w)=\Gamma^+(s;w),\Gamma(s;w)=\bar\Gamma^+(s;w)$

正交性：

性质2.5.3. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)=\delta^{k_\varsigma}{}_{l_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar\Gamma(s;w)\Gamma(s;w)=I$

性质2.5.4. $\Gamma^{k_\varsigma}_{A_{1\varsigma}A_{2\varsigma}\cdot\cdot A_{2s\varsigma}}(s;w)\Gamma_{k_\varsigma}^{B_{1\varsigma}B_{2\varsigma}\cdot\cdot B_{2s\varsigma}}(s;w)=\frac{1}{(2s)!}\delta^{(B_{1\varsigma}}_{A_{1\varsigma}}\delta^{B_{2\varsigma}}_{A_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{B_{2s\varsigma})}_{A_{2s\varsigma}}=\frac{1}{(2s)!}\delta^{B_{1\varsigma}}_{(A_{1\varsigma}}\delta^{B_{2\varsigma}}_{A_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{B_{2s\varsigma}}_{A_{2s\varsigma})}$

对比性：

性质2.5.5. $\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}\varepsilon^{b_1b_2\cdot\cdot b_n}=\delta_{a_1}^{[b_1}\delta_{a_2}^{b_2}\cdot\cdot\delta_{a_n}^{b_n]}=\delta_{[a_1}^{b_1}\delta_{a_2}^{b_2}\cdot\cdot\delta_{a_n]}^{b_n}$

其它性质：

性质2.5.6. $\Gamma_{A_\varsigma}^{k_\varsigma}(\frac{1}{2};w)=\delta_{A_\varsigma}^{k_\varsigma},\Gamma_{k_\varsigma}^{A_\varsigma}(\frac{1}{2};w)=\delta_{k_\varsigma}^{A_\varsigma};\Gamma(0;w)=1,\bar{\Gamma}(0;w)=1$

性质2.5.7.

$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{0_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)=\sqrt{\frac{2s-k_\varsigma}{2s}}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})\\ \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{1_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)=\sqrt{\frac{k_\varsigma}{2s}}\Gamma^{k_\varsigma-1}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})\end{cases}\quad\begin{cases}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{0_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s)=\sqrt{\frac{2s-k_\varsigma}{2s}}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2}),k_\varsigma=0,1,\cdot\cdot,2s-1\\ \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{1_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s)=\sqrt{\frac{k_\varsigma}{2s}}\Gamma_{k_\varsigma-1}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2}),k_\varsigma=1,2,\cdot\cdot,2s\end{cases}$$

性质2.5.8.

$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}_{l}\underbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}_{n}\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)=\sqrt{\frac{C_{2s-l-n}^{(k_\varsigma-l)}}{C_{2s}^{k_\varsigma}}}\Gamma^{k_\varsigma-l}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-l-n}}(s-\frac{l+n}{2}),k_\varsigma=l,l+1,\cdot\cdot,2s-n\\ \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}^{l}\overbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}^{n}\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-l-n}}(s)=\sqrt{\frac{C_{2s-l-n}^{(k_\varsigma-l)}}{C_{2s}^{k_\varsigma}}}\Gamma_{k_\varsigma-l}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-l-n}}(s-\frac{l+n}{2}),k_\varsigma=l,l+1,\cdot\cdot,2s-n\end{cases}$$

2.6 度规常数不变张量$\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$的引入及其性质(存在$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}$为前提条件)

定义2.6.1. $\varepsilon(\frac{1}{2};w)\varepsilon^{+}(\frac{1}{2};w)=\varepsilon^{+}(\frac{1}{2};w)\varepsilon(\frac{1}{2};w)=1;\varepsilon(\frac{1}{2};w)=\varepsilon^{*}(\frac{1}{2};w)$

度规定义：

定义2.6.2.
$$\begin{cases}\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;w):=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\\ \varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;w):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon^{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\end{cases}$$

性质2.6.1.
$$\begin{cases}\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\text{关于}ABC...\text{全对称}\\ \overbrace{\varepsilon^{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon^{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\text{关于}ABC...\text{全对称}\end{cases}$$

推论2.6.1. $\varepsilon(s;w):=\bar{\Gamma}(s;w)\underbrace{\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(\frac{1}{2};w)}_{2s}\Gamma(s;w);\varepsilon(s;1)=\varepsilon(\frac{1}{2};2s)$

推论2.6.2. $\varepsilon(s;w)\varepsilon^{+}(s;w)=\varepsilon^{+}(s;w)\varepsilon(s;w)=1;\varepsilon(s;w)=\varepsilon^{*}(s;w)$

升降指标：

性质2.6.2.
$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)=\varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\\ \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)=\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon^{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\end{cases}$$

推论2.6.3. $\Gamma(s;w)\varepsilon(s;w)=\underbrace{\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(\frac{1}{2};w)}_{2s}\Gamma(s;w),\varepsilon(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\bar{\Gamma}(s;w)\underbrace{\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(\frac{1}{2};w)}_{2s}$

证明: $\varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)$

$$=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma E'_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma F'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma G'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E'_\varsigma F'_\varsigma G'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)$$

$$= \frac{1}{(2s)!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma E'_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma F'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma G'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\delta^{E_\varsigma}_{(E'_\varsigma}\delta^{F_\varsigma}_{F'_\varsigma}\delta^{G_\varsigma}_{G'_\varsigma}\cdot\cdot)\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}$$

$$= \frac{1}{(2s)!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma(E_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma G_\varsigma)}\cdot\cdot}^{2s}\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}$$

$$= \frac{1}{(2s)!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\delta^{A'_\varsigma}_{(A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot)$$

$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w) \qquad \square$$

Penrose标准升降规则：

性质2.6.3.
$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w) = (-1)^{2s}[\varsigma^{2s}\varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;w)]\underbrace{(-\varsigma\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma})(-\varsigma\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma})(-\varsigma\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma})\cdot\cdot}_{2s}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;w)\\ \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w) = (-1)^{2s}[(-\varsigma)^{2s}\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;w)]\overbrace{(\varsigma\varepsilon^{A_\varsigma E_\varsigma})(\varsigma\varepsilon^{B_\varsigma F_\varsigma})(\varsigma\varepsilon^{C_\varsigma G_\varsigma})\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\end{cases}$$

2.7 常数不变张量$\Omega^{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s;w)$,$\Omega(s;w)$ 的引入及其基本性质

定义2.7.1.

$$\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w) := \overbrace{\underbrace{\sigma_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s} + \underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\sigma_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s} + \underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\sigma_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\cdot\cdot}_{2s} + \cdots}^{2s}$$

[⇕] [⇕]

定义2.7.2. $\Omega(s;w) := \sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}} + I_{w+1}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}} + \cdot\cdot + I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)$

定义2.7.3. $S(s;w) := \overbrace{S_{w+1}\otimes S_{w+1}\otimes S_{w+1}\otimes\cdot\cdot\otimes S_{w+1}}^{2s}, S_{w+1}S^+_{w+1} = S^+_{w+1}S_{w+1} = I_{w+1}$

推论2.7.1. $\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s+1}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w) := \sigma_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\underbrace{\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s-1} + \delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Omega^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

[⇕] [⇕]

推论2.7.2. $\Omega(s;w) = \sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}} + I_{w+1}\otimes\Omega(s-\frac{1}{2};w)$

推论2.7.3. $\Omega(s;w) = \Omega(s-s';w)\otimes I_{(w+1)^{2s'}} + I_{(w+1)^{2(s-s')}}\otimes\Omega(s';w)$

2.8 常数不变张量$\Omega_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s;w)$,$\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)$的引入及其基本性质

定义2.8.1.

$$\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w) := \overbrace{\underbrace{S_{ab A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s} + \underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}S_{ab B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s} + \underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}S_{ab C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\cdot\cdot}_{2s} + \cdots}^{2s}$$

[⇕] [⇕]

定义2.8.2. $\Omega_{ab}(s,\varsigma;w) := S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}} + I_{w+1}\otimes S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}} + \cdot\cdot + I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)$

推论2.8.1. $\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s+1}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w) := S_{ab A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\underbrace{\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s-1} + \delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Omega_{ab}{}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

[⇕] [⇕]

推论2.8.2. $\Omega_{ab}(s,\varsigma;w) = S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}} + I_{w+1}\otimes\Omega_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)$

推论2.8.3. $\Omega_{ab}(s,\varsigma;w) = \Omega_{ab}(s-s',\varsigma;w)\otimes I_{(w+1)^{2s'}} + I_{(w+1)^{2(s-s')}}\otimes\Omega_{ab}(s',\varsigma;w)$

2.9 自旋常数不变张量$\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w),\sigma(s;w)$的引入

定义2.9.1. $\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{Z_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{Z_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w):=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)[\Leftrightarrow]\sigma(s;w):=\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)$

2.10 自旋常数不变张量$S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w),S_{ab}(s,\varsigma;w)$的引入

定义2.10.1.

$$\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{Z_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{Z_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w):=\frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)[\Leftrightarrow]S_{ab}(s,\varsigma;w):=\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)$$

2.11 常数矩阵$\Omega(s;w)$的两个重要引理

引理2.11.1. $\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\Omega(s;w)\Gamma(s;w)$

证明: $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A''_\varsigma B''_\varsigma C''_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A''_\varsigma B''_\varsigma C''_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)$

$\Leftrightarrow\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\Omega(s;w)\Gamma(s;w)$ □

引理2.11.2. $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)$

证明: $\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A''_\varsigma B''_\varsigma C''_\varsigma\cdots}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;w)=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Omega^{\overbrace{A''_\varsigma B''_\varsigma C''_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)$

$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)$ □

2.12 常数矩阵$\Omega_{ab}(s;w)$的两个重要引理

引理2.12.1. $\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s;w)=\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s;w)$

证明: $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A''_\varsigma B''_\varsigma C''_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A''_\varsigma B''_\varsigma C''_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)$

$\Leftrightarrow\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s;w)=\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s;w)$ □

引理2.12.2. $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s;w)$

证明: $\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A''_\varsigma B''_\varsigma C''_\varsigma\cdots}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;w)=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A''_\varsigma B''_\varsigma C''_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)$

$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s;w)$ □

2.13 关于常数矩阵$\bar{\Gamma}(s;w),\Omega(s;w),\sigma(s;w),\Gamma(s;w)$的置换性质及其推论

定理2.13.1. $\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)\sigma(s;w)[\Leftrightarrow]\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$

证明: $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\sigma(s;w)$

$\Leftrightarrow\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)\sigma(s;w)$

$\Leftrightarrow\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)\sigma(s;w)$

$\Leftrightarrow\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$ □

定理2.13.2. $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)=\sigma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)[\Leftrightarrow]\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Omega_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)=\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)$

证明: $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\sigma(s;w)$
$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\sigma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)$
$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)=\sigma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)$
$\Leftrightarrow\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Omega_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)=\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)$ □

推论2.13.1. $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\sigma(s;w)\Leftrightarrow\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)\sigma(s;w)\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)=\sigma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)$

推论2.13.2. $\Omega^2(s;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)\sigma^2(s;w),\bar{\Gamma}(s;w)\Omega^2(s;w)=\sigma^2(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)$

证明: $\Omega^2(s;w)\Gamma(s;w)$
$=\Omega(s;w)\cdot\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\Omega(s;w)\cdot\Gamma(s;w)\sigma(s;w)$
$=\Omega(s;w)\Gamma(s;w)\cdot\sigma(s;w)=\Gamma(s;w)\sigma(s;w)\cdot\sigma(s;w)$
$=\Gamma(s;w)\sigma^2(s;w)$ □

证明: $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega^2(s;w)$
$=\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\cdot\Omega(s;w)=\sigma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\cdot\Omega(s;w)$
$=\sigma(s;w)\cdot\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)=\sigma(s;w)\cdot\sigma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)$
$=\sigma^2(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)$ □

推论2.13.3. $\Omega^2(s)\Gamma(s)=s(s+1)\Gamma(s),\bar{\Gamma}(s)\Omega^2(s)=\bar{\Gamma}(s)s(s+1)$

2.14 关于常数矩阵$\bar{\Gamma}(s;w),\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),S_{ab}(s,\varsigma;w),\Gamma(s;w)$的置换性质及其推论

定理2.14.1. $\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$[\Leftrightarrow]\Omega_{ab\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$

证明: $\bar{\Gamma}(s,\varsigma;w)\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow\Omega_{ab\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$ □

定理2.14.2. $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{\Gamma}(s;w)$
$[\Leftrightarrow]\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Omega_{ab\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)=S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)$

证明: $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{\Gamma}(s;w)$
$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{\Gamma}(s;w)$
$\Leftrightarrow\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Omega_{ab\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)=S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)$ □

推论2.14.1. $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s,\varsigma;w)=\Gamma(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{\Gamma}(s;w)$

2.15 关于常数矩阵$\Omega(s;w),\sigma(s;w)$的重要推论及洛伦兹群表示

推论2.15.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{(2s-1)!}\sigma(\frac{1}{2};w)_{(A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)$

证明: $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)=\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)$

$=\sigma(\frac{1}{2};w)_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)+\sigma(\frac{1}{2};w)_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B'_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)+\sigma(\frac{1}{2};w)_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)+\cdots$

$=\sigma(\frac{1}{2};w)_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+\sigma(\frac{1}{2};w)_{B_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma C_\varsigma\cdots A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+\sigma(\frac{1}{2};w)_{C_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+\cdots$

$=\frac{1}{(2s-1)!}\sigma(\frac{1}{2};w)_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{(B_\varsigma C_\varsigma\cdots)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+\frac{1}{(2s-1)!}\sigma(\frac{1}{2};w)_{B_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{(A_\varsigma C_\varsigma\cdots)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+\frac{1}{(2s-1)!}\sigma(\frac{1}{2};w)_{C_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma\cdots)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)\cdots$

$\Leftrightarrow\frac{1}{(2s-1)!}\sigma(\frac{1}{2};w)_{(A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)$ □

推论2.15.2. $\sigma(\frac{1}{2};w)\times\sigma(\frac{1}{2};w)=i\sigma(\frac{1}{2};w)[\Rightarrow]\Omega(s;w)\times\Omega(s;w)=i\Omega(s;w)[\Rightarrow]\sigma(s;w)\times\sigma(s;w)=i\sigma(s;w)$

证明: $\sigma(\frac{1}{2};w)\times\sigma(\frac{1}{2};w)=i\sigma(\frac{1}{2};w)$

$\Rightarrow\Omega(s;w)\times\Omega(s;w)$

$=[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}+\cdots+I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)]$

$\times[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}+\cdots+I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)]$

$=[\sigma(\frac{1}{2};w)\times\sigma(\frac{1}{2};w)]\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes[\sigma(\frac{1}{2};w)\times\sigma(\frac{1}{2};w)]\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}+\cdots+I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes[\sigma(\frac{1}{2};w)\times\sigma(\frac{1}{2};w)]$

$=i\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+iI_{w+1}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}+\cdots+iI_{(w+1)^{2s-1}}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)$

$=i\Omega(s;w)$ □

证明: $\Omega(s;w)\times\Omega(s;w)=i\Omega(s;w)$

$\Rightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\times\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=i\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)$

$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\times\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=i\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)$

$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)\times\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=i\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)$

$\Leftrightarrow\sigma(s;w)\times\sigma(s;w)=i\sigma(s;w)$ □

2.16 关于常数矩阵$\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),S_{ab}(s,\varsigma;w)$的重要推论及洛伦兹群表示

推论2.16.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{(2s-1)!}S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{(A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)$

证明: $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)=\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)$

$=S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)+S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B'_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)+S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)+\cdots$

$=S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{B_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma C_\varsigma\cdots A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{C_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+\cdots$

$=\frac{1}{(2s-1)!}S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{(B_\varsigma C_\varsigma\cdots)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+\frac{1}{(2s-1)!}S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{B_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{(A_\varsigma C_\varsigma\cdots)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+\cdots$

$\Leftrightarrow\frac{1}{(2s-1)!}S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{(A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)$ □

推论2.16.2. $i[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w),S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)]=\delta_{ad}S_{bc}(\frac{1}{2},\varsigma;w)-\delta_{ac}S_{bd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)+\delta_{bc}S_{ad}(\frac{1}{2},\varsigma;w)-\delta_{bd}S_{ac}(\frac{1}{2},\varsigma;w)$

$[\Rightarrow]i[\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),\Omega_{cd}(s,\varsigma;w)]=\delta_{ad}\Omega_{bc}(s,\varsigma;w)-\delta_{ac}\Omega_{bd}(s,\varsigma;w)+\delta_{bc}\Omega_{ad}(s,\varsigma;w)-\delta_{bd}\Omega_{ac}(s,\varsigma;w)$

$[\Rightarrow]i[S_{ab}(s,\varsigma;w),S_{cd}(s,\varsigma;w)]=\delta_{ad}S_{bc}(s,\varsigma;w)-\delta_{ac}S_{bd}(s,\varsigma;w)+\delta_{bc}S_{ad}(s,\varsigma;w)-\delta_{bd}S_{ac}(s,\varsigma;w)$

证明：$i[\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),\Omega_{cd}(s,\varsigma;w)]$
$= i[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}} + I_{w+1}\otimes S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}} + \cdot\cdot + I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)$
$,S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}} + I_{w+1}\otimes S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}} + \cdot\cdot + I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)]$
$= i\{[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w),S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)]\otimes I_{(w+1)^{2s-1}} + I_{w+1}\otimes[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w),S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)]\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}$
$+\cdot\cdot + I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w),S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)]\}$
$= [\delta_{ad}S_{bc}(\frac{1}{2},\varsigma;w) - \delta_{ac}S_{bd}(\frac{1}{2},\varsigma;w) + \delta_{bc}S_{ad}(\frac{1}{2},\varsigma;w) - \delta_{bd}S_{ac}(\frac{1}{2},\varsigma;w)]\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}$
$+ I_{w+1}\otimes[\delta_{ad}S_{bc}(\frac{1}{2},\varsigma;w) - \delta_{ac}S_{bd}(\frac{1}{2},\varsigma;w) + \delta_{bc}S_{ad}(\frac{1}{2},\varsigma;w) - \delta_{bd}S_{ac}(\frac{1}{2},\varsigma;w)]\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}$
$+\cdot\cdot + I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes[\delta_{ad}S_{bc}(\frac{1}{2},\varsigma;w) - \delta_{ac}S_{bd}(\frac{1}{2},\varsigma;w) + \delta_{bc}S_{ad}(\frac{1}{2},\varsigma;w) - \delta_{bd}S_{ac}(\frac{1}{2},\varsigma;w)]$
$= \delta_{ad}\Omega_{bc}(s,\varsigma;w) - \delta_{ac}\Omega_{bd}(s,\varsigma;w) + \delta_{bc}\Omega_{ad}(s,\varsigma;w) - \delta_{bd}\Omega_{ac}(s,\varsigma;w)$ □

证明：$i[\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),\Omega_{cd}(s,\varsigma;w)] = \delta_{ad}\Omega_{bc}(s,\varsigma;w) - \delta_{ac}\Omega_{bd}(s,\varsigma;w) + \delta_{bc}\Omega_{ad}(s,\varsigma;w) - \delta_{bd}\Omega_{ac}(s,\varsigma;w)$
$\Rightarrow \bar{\Gamma}(s;w)i[\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),\Omega_{cd}(s,\varsigma;w)]\Gamma(s;w)$
$= \bar{\Gamma}(s;w)[\delta_{ad}\Omega_{bc}(s,\varsigma;w) - \delta_{ac}\Omega_{bd}(s,\varsigma;w) + \delta_{bc}\Omega_{ad}(s,\varsigma;w) - \delta_{bd}\Omega_{ac}(s,\varsigma;w)]\Gamma(s;w)$
$\Leftrightarrow \bar{\Gamma}(s;w)i[\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Omega_{cd}(s,\varsigma;w) - \Omega_{cd}(s,\varsigma;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]\Gamma(s;w)$
$= \bar{\Gamma}(s;w)[\delta_{ad}\Omega_{bc}(s,\varsigma;w) - \delta_{ac}\Omega_{bd}(s,\varsigma;w) + \delta_{bc}\Omega_{ad}(s,\varsigma;w) - \delta_{bd}\Omega_{ac}(s,\varsigma;w)]\Gamma(s;w)$
$\Leftrightarrow \bar{\Gamma}(s;w)i[\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{cd}(s,\varsigma;w) - \Omega_{cd}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]\Gamma(s;w)$
$= \bar{\Gamma}(s;w)[\delta_{ad}\Omega_{bc}(s,\varsigma;w) - \delta_{ac}\Omega_{bd}(s,\varsigma;w) + \delta_{bc}\Omega_{ad}(s,\varsigma;w) - \delta_{bd}\Omega_{ac}(s,\varsigma;w)]\Gamma(s;w)$
$\Leftrightarrow i[\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{cd}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w) - \bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{cd}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)]$
$= \bar{\Gamma}(s;w)[\delta_{ad}\Omega_{bc}(s,\varsigma;w) - \delta_{ac}\Omega_{bd}(s,\varsigma;w) + \delta_{bc}\Omega_{ad}(s,\varsigma;w) - \delta_{bd}\Omega_{ac}(s,\varsigma;w)]\Gamma(s;w)$
$\Leftrightarrow i[S_{ab}(s,\varsigma;w),S_{cd}(s,\varsigma;w)] = \delta_{ad}S_{bc}(s,\varsigma;w) - \delta_{ac}S_{bd}(s,\varsigma;w) + \delta_{bc}S_{ad}(s,\varsigma;w) - \delta_{bd}S_{ac}(s,\varsigma;w)$ □

2.17 常数矩阵$\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),S_{ab}(s,\varsigma;w)$与$\Omega(s;w),\sigma(s;w)$之间关系的讨论

性质2.17.1. $S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma) = \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})[\Rightarrow]\Omega_{ab}(s,\varsigma) = \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\Omega_{\alpha_\varsigma}(s)[\Rightarrow]S_{ab}(s,\varsigma) = \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)$

第一种可能的关系(四维时空自旋型)：

猜想2.17.1. $S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w) = \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2};w)[\Rightarrow]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w) = \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\Omega_{\alpha_\varsigma}(s;w)[\Rightarrow]S_{ab}(s,\varsigma;w) = \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s;w)$

第二种可能的关系(任意时空自旋型,四维时空自旋型是其特例。)：

猜想2.17.2. $S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w) = \begin{bmatrix} -i[\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2};w),\sigma_{\beta_\varsigma}(\frac{1}{2};w)] & -\varsigma\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2};w) \\ \varsigma\sigma_{\beta_\varsigma}(\frac{1}{2};w) & 0 \end{bmatrix}$

$[\Rightarrow]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w) = \begin{bmatrix} -i[\Omega_{\alpha_\varsigma}(s;w),\Omega_{\beta_\varsigma}(s;w)] & -\varsigma\Omega_{\alpha_\varsigma}(s;w) \\ \varsigma\Omega_{\beta_\varsigma}(s;w) & 0 \end{bmatrix}$

$[\Rightarrow]S_{ab}(s,\varsigma;w) = \begin{bmatrix} -i[\sigma_{\alpha_\varsigma}(s;w),\sigma_{\beta_\varsigma}(s;w)] & -\varsigma\sigma_{\alpha_\varsigma}(s;w) \\ \varsigma\sigma_{\beta_\varsigma}(s;w) & 0 \end{bmatrix}$

第三种可能的关系(高维时空型Dirac型)：

猜想2.17.3. $S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w) = -\frac{i}{4}[\gamma_a(\frac{1}{2},\varsigma;w),\gamma_b(\frac{1}{2},\varsigma;w)]$
$[\Rightarrow]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w) = -\frac{i}{4}[\Omega_a(s,\varsigma;w),\Omega_b(s,\varsigma;w)][\Rightarrow]S_{ab}(s,\varsigma;w) = -\frac{i}{4}[\gamma_a(s,\varsigma;w),\gamma_b(s,\varsigma;w)]$

第四种可能的关系(无关联型)：相对独立。

2.18 推论：常数矩阵$\Gamma(s;w),\bar{\Gamma}(s;w)$的几个恒等式

性质2.18.1. $\begin{cases} \bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w) = \sigma(s;w), [\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w),\Omega(s;w)] = 0 \\ \Gamma(s;w)\sigma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w) = \Omega(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w) = \Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w) \end{cases}$

性质2.18.2. $\begin{cases} \bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w) = S_{ab}(s,\varsigma;w), [\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w),\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)] = 0 \\ \Gamma(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{\Gamma}(s;w) = \Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w) = \Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w) \end{cases}$

性质2.18.3. $\begin{cases}\bar{\Gamma}(s;w)[\vartheta\cdot\Omega(s;w)]^n\Gamma(s;w)=[\vartheta\cdot\sigma(s;w)]^n,[\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w),[\vartheta\cdot\Omega(s;w)]^n]=0\\ \Gamma(s;w)[\vartheta\cdot\sigma(s;w)]^n\bar{\Gamma}(s;w)=[\vartheta\cdot\Omega(s;w)]^n\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)[\vartheta\cdot\Omega(s;w)]^n\end{cases}$

性质2.18.4. $\begin{cases}\bar{\Gamma}(s;w)[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]^n\Gamma(s;w)=[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)]^n,[\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w),[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]^n]=0\\ \Gamma(s;w)[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)]^n\bar{\Gamma}(s;w)=[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]^n\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]^n\end{cases}$

推论2.18.1. $\begin{cases}\bar{\Gamma}(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)},[\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w),e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}]=0\\ \Gamma(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\bar{\Gamma}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\end{cases}$

2.19 常数矩阵$\Gamma(s;w),\bar{\Gamma}(s;w)$的对称置换性质

定义2.19.1. $S_{ex}(s,n)=(\overbrace{I_{w+1}\otimes\cdot\cdot\otimes I_{w+1}\otimes}^{n-1}S_{ex}\overbrace{\otimes I_{w+1}\otimes\cdot\cdot\otimes I}^{2s-n-1})$

推论2.19.1. $\Gamma(s;w)=S_{ex}(s,n)\Gamma(s;w),\bar{\Gamma}(s;w)=\bar{\Gamma}(s;w)S_{ex}(s,n)$

推论2.19.2. $S_{ex}(s,n)\Omega(s;w)S_{ex}(s,n)=\Omega(s;w)$

推论2.19.3. $\hat{\psi}(s,\varsigma;w)=S_{ex}(s,n)\hat{\psi}(s,\varsigma;w),\forall n\in\{1,2,\cdot\cdot,2s+1\}$

2.20 矩阵$\Gamma(s;w),\bar{\Gamma}(s;w)$的常数不变张量性质

定理2.20.1. $\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)},\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)}$

证明: $\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow 0=\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)-\Gamma(s;w)\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}$ □

定理2.20.2. $\bar{\Gamma}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\bar{\Gamma}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)},\bar{\Gamma}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)}\bar{\Gamma}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}$

证明: $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{\Gamma}(s;w)$
$\Leftrightarrow 0=-\bar{\Gamma}(s;w)\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{\Gamma}(s;w)$
$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\bar{\Gamma}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}$ □

定理2.20.3. $\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)}$
$\Leftrightarrow\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)\Gamma(s;w)}$

证明: $\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)}$
$\Leftrightarrow S^{+}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}S^{+}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)}$
$\Leftrightarrow S^{+}(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}S^{+}(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)}$
$\Leftrightarrow\Gamma(s;w)=[S(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}S^{+}(s;w)]\Gamma(s;w)[\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)]e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)}[\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)]^{+}$
$\Leftrightarrow\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)S^{+}(s;w)\Gamma(s;w)}$
$\Leftrightarrow\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)\Gamma(s;w)}$
$\Leftrightarrow\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)\Gamma(s;w)}$ □

推论2.20.1.
$e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)\Gamma(s;w)}=[\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)}[\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)]^{+}$

定理2.20.4. $S(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}S(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^{+}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)}$

证明: $\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)=\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w),\forall\varsigma=\pm1$
$\Leftrightarrow S(s;w)S^{+}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)=\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w),\forall\vartheta^{ab},\varsigma=\pm1$
$\Leftrightarrow 0=-S(s;w)\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^{+}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w),\forall\vartheta^{ab},\varsigma=\pm1$

$\Leftrightarrow S(s;w) = S(s;w)[1 - \frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^{+}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)] + \frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w), \forall\vartheta^{ab}, \varsigma = \pm 1$

$\Leftrightarrow S(s;w) = [1 + \frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]S(s;w)[1 - \frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^{+}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)], \forall\vartheta^{ab}, \varsigma = \pm 1$

$\Leftrightarrow S(s;w) = e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}S(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^{+}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)}, \forall\vartheta^{ab}, \varsigma = \pm 1$ □

定理2.20.5. $S(s;w) = e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)}S(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}$

证明： $S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w) = S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w), \forall\varsigma = \pm 1$

$\Leftrightarrow S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)S(s;w) = S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w), \forall\vartheta^{ab}, \varsigma = \pm 1$

$\Leftrightarrow 0 = \frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)S(s;w) - S(s;w)\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w), \forall\vartheta^{ab}, \varsigma = \pm 1$

$\Leftrightarrow S(s;w) = [1 + \frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)]S(s;w) - S(s;w)\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w), \forall\vartheta^{ab}, \varsigma = \pm 1$

$\Leftrightarrow S(s;w) = [1 + \frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)]S(s;w)[1 - \frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)], \forall\vartheta^{ab}, \varsigma = \pm 1$

$\Leftrightarrow S(s;w) = e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)}S(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}, \forall\vartheta^{ab}, \varsigma = \pm 1$ □

推论2.20.2.

$$\begin{cases} S(s;w) = e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}S(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^{+}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)} \\ S(s;w) = e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)}S(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)} \\ S^{+}(s;w) = e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}S^{+}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)} \\ S^{+}(s;w) = e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^{+}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)}S^{+}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)} \end{cases}$$

2.21 矩阵$\Gamma(s), \bar{\Gamma}(s)$的常数不变张量性质

定理2.21.1. $\Gamma(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}\Gamma(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}, \Gamma(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}\Gamma(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)\Gamma(s)}$

证明： $\Omega(s)\Gamma(s) = \Gamma(s)\sigma(s)$

$\Leftrightarrow 0 = (i\omega + \varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)\Gamma(s) - (i\omega + \varsigma\epsilon)\cdot\Gamma(s)\sigma(s)$

$\Leftrightarrow \Gamma(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}\Gamma(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}$ □

定理2.21.2. $\bar{\Gamma}(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}\bar{\Gamma}(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}, \bar{\Gamma}(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)\Gamma(s)}\bar{\Gamma}(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}$

证明： $\bar{\Gamma}(s)\Omega(s) = \sigma(s)\bar{\Gamma}(s)$

$\Leftrightarrow 0 = -(i\omega + \varsigma\epsilon)\cdot\bar{\Gamma}(s)\Omega(s) + (i\omega + \varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)\bar{\Gamma}(s)$

$\Leftrightarrow \bar{\Gamma}(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}\bar{\Gamma}(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}$ □

定理2.21.3. $\Gamma(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}\Gamma(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)\Gamma(s)} \Leftrightarrow \Gamma(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot S(s)\Omega(s)S^{+}(s)(s)}\Gamma(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\bar{\Gamma}(s)S\Omega(s)S^{+}(s)\Gamma(s)}$

证明： $\Gamma(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}\Gamma(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)\Gamma(s)}$

$\Leftrightarrow S^{+}(s)S(s)\Gamma(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}S^{+}(s)S(s)\Gamma(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)\Gamma(s)}$

$\Leftrightarrow S^{+}(s)\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)S(s)\Gamma(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}S^{+}(s)\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)S(s)\Gamma(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)\Gamma(s)}$

$\Leftrightarrow \Gamma(s) = [S(s)e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}S^{+}(s)]\Gamma(s)[\bar{\Gamma}(s)S(s)\Gamma(s)]e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)\Gamma(s)}[\bar{\Gamma}(s)S(s)\Gamma(s)]^{+}$

$\Leftrightarrow \Gamma(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot S(s)\Omega(s)S^{+}(s)}\Gamma(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\bar{\Gamma}(s)S(s)\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)S^{+}(s)\Gamma(s)}$

$\Leftrightarrow \Gamma(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot S(s)\Omega(s)S^{+}(s)}\Gamma(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\bar{\Gamma}(s)S(s)\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)S^{+}(s)\Gamma(s)}$

$\Leftrightarrow \Gamma(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot S(s)\Omega(s)S^{+}(s)}\Gamma(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\bar{\Gamma}(s)S(s)\Omega(s)S^{+}(s)\Gamma(s)}$ □

推论2.21.1. $e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\bar{\Gamma}(s)S(s)\Omega(s)S^{+}(s)\Gamma(s)} = [\bar{\Gamma}(s)S(s)\Gamma(s)]e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)\Gamma(s)}[\bar{\Gamma}(s)S(s)\Gamma(s)]^{+}$

推论2.21.2.

$$\begin{cases} S(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}S(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot S^{+}(s)\Omega(s)S(s)}, S^{+}(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}S^{+}(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot S(s)\Omega(s)S^{+}(s)} \\ S(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot S(s)\Omega(s)S^{+}(s)}S(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}, S^{+}(s) = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot S^{+}(s)\Omega(s)S(s)}S^{+}(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)} \end{cases}$$

2.22 常数矩阵$I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w),I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)$的置换性质

定理2.22.1. $\Omega(s;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]$

证明: $\Omega(s;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]$
$=\Omega(s;w)I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)$
$=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}]+I_{w+1}\otimes[\Gamma(s-\frac{1}{2};w)\sigma(s-\frac{1}{2};w)]$
$=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]$ □

定理2.22.2. $[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega(s;w)=[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]$

证明: $[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega(s;w)$
$=[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega(s;w)$
$=[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]+I_{w+1}\otimes[\sigma(s-\frac{1}{2};w)\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]$
$=[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]$ □

定理2.22.3. $\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]$

证明: $\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]$
$=\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)$
$=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}]+I_{w+1}\otimes[\Gamma(s-\frac{1}{2};w)S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]$
$=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]$ □

定理2.22.4. $[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)=[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]$

证明: $[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)$
$=[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)$
$=[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]+I_{w+1}\otimes[S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]$
$=[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]$ □

2.23 推论：常数矩阵$\Gamma(s-\frac{1}{2};w),\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)$的几个恒等式

性质2.23.1.

$$\begin{cases}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega(s;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]\\ [I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\\ =\Omega(s;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega(s;w)\\ [[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)],\Omega(s;w)]=0\end{cases}$$

性质2.23.2.

$$\begin{cases}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\\ [I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\\ =\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\\ [[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)],\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]=0\end{cases}$$

性质2.23.3.

$$\begin{cases}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)][\vartheta\cdot\Omega(s;w)]^n[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=\{\vartheta\cdot[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]\}^n\\ [I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]\{\vartheta\cdot[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]\}^n[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\\ =[\vartheta\cdot\Omega(s;w)]^n[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)][\vartheta\cdot\Omega(s;w)]^n\\ [[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)],[\vartheta\cdot\Omega(s;w)]^n]=0\end{cases}$$

性质2.23.4.
$$\begin{cases}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)][\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]^n[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\}^n\\ [I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\}^n[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\\ =[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]^n[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)][\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]^n\\ [[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)],[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]^n]=0\end{cases}$$

推论2.23.1.
$$\begin{cases}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]}\\ [I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\\ =e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\\ [[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)],e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}]=0\end{cases}$$

推论2.23.2.
$$\begin{cases}I_{(w+1)^{2s-1}}\Gamma(s-\frac{1}{2};w)=\Gamma(s-\frac{1}{2};w)I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)I_{(w+1)^{2s-1}}=I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)\\ [I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}\\ [\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}[I_{w+1}]\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}]\\ [I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)][\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}]=[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\end{cases}$$

性质2.23.5. $(\sigma\otimes I_{(w+1)^{2s-1}},-i\varsigma)_a[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w)=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]Z_a(s,\varsigma;w)$

2.24 矩阵$I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w),I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)$的常数不变张量性质

定理2.24.1. $[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}$

证明: $\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]$
$\Leftrightarrow 0=\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]$
$-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]$
$\Leftrightarrow[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}$ □

定理2.24.2. $[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}$

证明: $[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)=[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]$
$\Leftrightarrow 0=-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)$
$+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]$
$\Leftrightarrow[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}$ □

2.25 矩阵$I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2}),I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})$的常数不变张量性质

定理2.25.1. $[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}$

证明: $\Omega(s)[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]=[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})][\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2})]$
$\Leftrightarrow 0=(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]$
$-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})][\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2})]$
$\Leftrightarrow[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}$ □

定理2.25.2. $[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})]=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})]e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}$

证明: $[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})]\Omega(s)=[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2})][I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})]$
$\Leftrightarrow 0=-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})]\Omega(s)$
$+(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2})][I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})]$
$\Leftrightarrow[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})]=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})]e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s)}$ □

2.26 两个定理的另外一种证明方法(强调思路启发而不求全)

定理2.26.1. $\Omega(s)\Gamma(s)=\Gamma(s)\sigma(s),\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)=\sigma(s)\bar{\Gamma}(s)$

证明: 采用数学归纳法
1: 当$s=\frac{1}{2}$时,$\sigma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})=\Gamma(\frac{1}{2})\sigma(\frac{1}{2})$成立。
2: 假设$s=k$时,$\Omega(k)\Gamma(k)=\Gamma(k)\sigma(k)$成立。
3: 当$s=k+\frac{1}{2}$时
$\Omega(k+\frac{1}{2})\Gamma(k+\frac{1}{2})$
$=[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2^{2k}}+I\otimes\Omega(k)][I\otimes\Gamma(k)]N(k+\frac{1}{2})$
$=\{[I\otimes\Gamma(k)][\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2(k+1)}]+I\otimes[\Gamma(k)\sigma(k)]\}N(k+\frac{1}{2})$
$=[I\otimes\Gamma(k)][\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2(k+1)}+I\otimes\sigma(k)]N(k+\frac{1}{2})$
$=[I\otimes\Gamma(k)]N(k+\frac{1}{2})\sigma(k+\frac{1}{2})$
$=\Gamma(k+\frac{1}{2})\sigma(k+\frac{1}{2})$
所以命题成立，证毕。 □

定理2.26.2. $\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)=\sigma(s)\bar{\Gamma}(s)$

证明: 采用数学归纳法
1: 当$s=\frac{1}{2}$时,$\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})\sigma(\frac{1}{2})=\sigma(\frac{1}{2})\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})$成立。
2: 假设$s=k$时,$\bar{\Gamma}(k)\Omega(k)=\sigma(k)\bar{\Gamma}(k)$成立。
3: 当$s=k+\frac{1}{2}$时
$\bar{\Gamma}(k+\frac{1}{2})\Omega(k+\frac{1}{2})$
$=\bar{N}(k+\frac{1}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(k)]\{\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2^{2k}}+I\otimes\Omega(k)\}$
$=\bar{N}(k+\frac{1}{2})\{[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2(k+1)}][I\otimes\bar{\Gamma}(k)]+[I\otimes\sigma(k)][I\otimes\bar{\Gamma}(k)]\}$
$=\bar{N}(k+\frac{1}{2})[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2(k+1)}+I\otimes\sigma(k)][I\otimes\bar{\Gamma}(k)]$
$=\sigma(k+\frac{1}{2})\bar{N}(k+\frac{1}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(k)]$
$=\sigma(k+\frac{1}{2})\bar{\Gamma}(k+\frac{1}{2})$
所以命题成立，证毕。 □

3 完美常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$

3.1 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$的引入

定义3.1.1. $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2}),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s):=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})$

定义3.1.2. $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w):=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

推论3.1.1. $N(s;w)=[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Gamma(s;w),\bar{N}(s;w)=\bar{\Gamma}(s;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]$

性质3.1.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w),\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)=N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

推论3.1.2. $\Gamma(s;w)=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w),\bar{\Gamma}(s;w)=\bar{N}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)],$

推论3.1.3. $\bar{N}(s;w)\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}N(s;w)=\bar{\Gamma}(s;w)\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}\Gamma(s;w)$

性质3.1.2. $\Gamma(s;w)=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Gamma(s;w)$

推论3.1.4. $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s)=N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;1),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)=N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;1)$

自我评述：以上表明$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$,$N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$是常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s)$,$N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)$ 的推广。

3.2 常数矩阵$N_{A_\varsigma}(s;w),N^{A_\varsigma}(s;w);\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w),\bar{N}^{A_\varsigma}(s;w);N(s;w),\bar{N}(s;w)$的引入

定义3.2.1.

$$\begin{cases}N_{A_\varsigma}(s;w)\prec N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w),N^{A_\varsigma}(s;w)\prec N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)|_{I_{C^{2s}_{2s+w}}\times I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}}\\ \bar{N}_{A_\varsigma}(s;w):=N^{+}_{A_\varsigma}(s;w)\succ N_{A_\varsigma l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;w),\bar{N}^{A_\varsigma}(s;w):=N^{+A_\varsigma}(s;w)\succ N^{A_\varsigma l_\varsigma}{}_{k_\varsigma}(s;w)|_{I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}\times I_{C^{2s}_{2s+w}}}\\ N(s;w)\prec N_{A_\varsigma\otimes l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;w)|_{(w+1)I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}\times I_{C^{2s}_{2s+w}}},\bar{N}(s;w)=N^{+}(s;w)\prec N_{k_\varsigma}{}^{A_\varsigma\otimes l_\varsigma}(s;w)|_{I_{C^{2s}_{2s+w}}\times(w+1)I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}}\end{cases}$$

推论3.2.1. $[N_{A_\varsigma}(s;w)]=C^{2s}_{2s+w}\times C^{2s-1}_{2s-1+w},[\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)]=C^{2s-1}_{2s-1+w}\times C^{2s}_{2s+w}$

推论3.2.2. $[N(s;w)]=(w+1)C^{2s-1}_{2s-1+w}\times C^{2s}_{2s+w},[\bar{N}(s;w)]=C^{2s}_{2s+w}\times(w+1)C^{2s-1}_{2s-1+w}$

3.3 $N_{A_\varsigma}(s),\bar{N}_{A_\varsigma}(s)$的显式表示

性质3.3.1.

$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{0_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)=\sqrt{\frac{2s-k_\varsigma}{2s}}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})\\ \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{1_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)=\sqrt{\frac{k_\varsigma}{2s}}\Gamma^{k_\varsigma-1}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})\end{cases}\quad\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{0_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)=\sqrt{\frac{2s-k_\varsigma}{2s}}\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2}),k_\varsigma=0,1,\cdot\cdot,2s-1\\ \Gamma^{\overbrace{1_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)=\sqrt{\frac{k_\varsigma}{2s}}\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{k_\varsigma-1}(s-\frac{1}{2}),k_\varsigma=1,2,\cdot\cdot,2s\end{cases}$$

推论3.3.1. $N^{k_\varsigma}_{0_\varsigma l_\varsigma}(s)=\sqrt{\frac{2s-k_\varsigma}{2s}}\delta^{k_\varsigma}{}_{l_\varsigma},N^{k_\varsigma}_{1_\varsigma l_\varsigma}(s)=\sqrt{\frac{k_\varsigma}{2s}}\delta^{k_\varsigma-1}{}_{l_\varsigma}$

证明：$N^{k_\varsigma}_{0_\varsigma l_\varsigma}(s)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{0_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{2s-k_\varsigma}{2s}}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{2s-k_\varsigma}{2s}}\delta^{k_\varsigma}{}_{l_\varsigma}$ □

证明：$N^{k_\varsigma}_{1_\varsigma l_\varsigma}(s)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{1_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{k_\varsigma}{2s}}\Gamma^{k_\varsigma-1}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{k_\varsigma}{2s}}\delta^{k_\varsigma-1}{}_{l_\varsigma}$ □

推论3.3.2. $N_{A_\varsigma}(s)\simeq N^{A_\varsigma}(s)=\{\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0\\0&\sqrt{2s-1}&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&0\\0&0&0&0&\sqrt{1}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\\sqrt{1}&0&0&0&0\\0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&\sqrt{2s-1}&0\\0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}\}$

推论3.3.3. $\bar{N}_{A_\varsigma}(s)\simeq\bar{N}^{A_\varsigma}(s)=\{\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{1}&0\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}0&\sqrt{1}&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2s-1}&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}\}$

3.4 $N(s),\bar{N}(s)$的显式表示

推论3.4.1. $N^{A_\varsigma}(s)\leftrightarrow N^{+}(s)\simeq\bar{N}(s)=\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{1}&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&\sqrt{2s-2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\cdot\cdot&\cdot\cdot&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2s-1}&\sqrt{1}&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}$

推论3.4.2. $N^{+}(s)\simeq\bar{N}(s)=\begin{bmatrix}\sqrt{1}&0\\0&\sqrt{1}\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0&0\\0&\sqrt{1}&\sqrt{1}&0\\0&0&0&\sqrt{2}\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{1}&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&\sqrt{1}&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{3}\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix}\sqrt{4}&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{1}&\sqrt{3}&0&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{3}&\sqrt{1}&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{4}\end{bmatrix},\cdot\cdot$

3.5 一个重要结论的严格证明(2024.5.3终于补上了)

定理3.5.1. $\bar{N}(s)\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}N(s)=\frac{1}{2s}\sigma(s)[\Leftrightarrow]\bar{\Gamma}(s)\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2^{2s}}\Gamma(s)=\frac{1}{2s}\sigma(s); A_n=\sqrt{n}\cdot\sqrt{2s+1-n}, n=1,2,\cdot\cdot,2s$

$$\sigma(s)=(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&A_1&0&0&0\\A_1&0&A_2&0&0\\0&A_2&0&\cdot\cdot&0\\0&0&\cdot\cdot&0&A_{2s}\\0&0&0&A_{2s}&0\end{bmatrix},\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0&-A_1&0&0&0\\A_1&0&-A_2&0&0\\0&A_2&0&\cdot\cdot&0\\0&0&\cdot\cdot&0&-A_{2s}\\0&0&0&A_{2s}&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}s&0&0&0&0\\0&s-1&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&-(s-1)&0\\0&0&0&0&-s\end{bmatrix})$$

证明：$\bar{N}(s)\sigma_x(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}N(s)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{1}&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&\sqrt{2s-2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\cdot\cdot&\cdot\cdot&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2s-1}&\sqrt{1}&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}\sigma_x(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{1}&0&0&0&0\\0&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&\sqrt{2s-2}&0&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2s-1}&0\\0&0&0&0&\sqrt{1}&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4s}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{1}&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&\sqrt{2s-2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\cdot\cdot&\cdot\cdot&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2s-1}&\sqrt{1}&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\sqrt{1}&0&0&0&0\\\sqrt{2s}&0&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{3}&0&0\\0&0&\sqrt{2s-2}&0&0&0\\0&0&0&0&\cdot\cdot&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2s}\\0&0&0&0&\sqrt{1}&0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4s}\begin{bmatrix}0&\sqrt{2s\cdot1}&0&0&0&0\\\sqrt{1\cdot2s}&0&\sqrt{(2s-1)\cdot2}&0&0&0\\0&\sqrt{2\cdot(2s-1)}&0&\sqrt{(2s-2)\cdot3}&0&0\\0&0&\sqrt{3\cdot(2s-2)}&0&\cdot\cdot&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&\sqrt{1\cdot2s}\\0&0&0&0&\sqrt{2s\cdot1}&0\end{bmatrix}=\frac{1}{4s}\begin{bmatrix}0&A_1&0&0&0\\A_1&0&A_2&0&0\\0&A_2&0&\cdot\cdot&0\\0&0&\cdot\cdot&0&A_{2s}\\0&0&0&A_{2s}&0\end{bmatrix}$$ □

证明：$\bar{N}(s)\sigma_y(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}N(s)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{1}&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&\sqrt{2s-2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\cdot\cdot&\cdot\cdot&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2s-1}&\sqrt{1}&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}\sigma_y(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{1}&0&0&0&0\\0&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&\sqrt{2s-2}&0&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2s-1}&0\\0&0&0&0&\sqrt{1}&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{i}{4s}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{1}&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&\sqrt{2s-2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\cdot\cdot&\cdot\cdot&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2s-1}&\sqrt{1}&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-\sqrt{1}&0&0&0&0\\\sqrt{2s}&0&0&0&0&0\\0&0&-\sqrt{2}&0&0&0\\0&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0\\0&0&0&-\sqrt{3}&0&0\\0&0&\sqrt{2s-2}&0&0&0\\0&0&0&0&\cdot\cdot&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&0&0&-\sqrt{2s}\\0&0&0&0&\sqrt{1}&0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{i}{4s}\begin{bmatrix}0&-\sqrt{2s\cdot1}&0&0&0&0\\\sqrt{1\cdot2s}&0&-\sqrt{(2s-1)\cdot2}&0&0&0\\0&\sqrt{2\cdot(2s-1)}&0&-\sqrt{(2s-2)\cdot3}&0&0\\0&0&\sqrt{3\cdot(2s-2)}&0&\cdot\cdot&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&-\sqrt{1\cdot2s}\\0&0&0&0&\sqrt{2s\cdot1}&0\end{bmatrix}=\frac{i}{4s}\begin{bmatrix}0&-A_1&0&0&0\\A_1&0&-A_2&0&0\\0&A_2&0&\cdot\cdot&0\\0&0&\cdot\cdot&0&-A_{2s}\\0&0&0&A_{2s}&0\end{bmatrix}$$ □

证明：$\bar{N}(s)\sigma_z(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}N(s)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{1}&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&\sqrt{2s-2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\cdot\cdot&\cdot\cdot&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2s-1}&\sqrt{1}&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}\sigma_z(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{1}&0&0&0&0\\0&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&\sqrt{2s-2}&0&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2s-1}&0\\0&0&0&0&\sqrt{1}&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4s}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{1}&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&\sqrt{2s-2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\cdot\cdot&\cdot\cdot&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2s-1}&\sqrt{1}&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0\\0&-\sqrt{1}&0&0&0&0\\0&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0\\0&0&-\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&\sqrt{2s-2}&0&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&0&-\sqrt{2s-1}&0\\0&0&0&0&\sqrt{1}&0\\0&0&0&0&0&-\sqrt{2s}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2s}\begin{bmatrix}s&0&0&0&0&0\\0&s-1&0&0&0&0\\0&0&s-2&0&0&0\\0&0&0&s-3&0&0\\0&0&0&0&\cdot\cdot&0\\0&0&0&0&0&-s\end{bmatrix}=\frac{1}{2s}\begin{bmatrix}s&0&0&0&0\\0&s-1&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&-(s-1)&0\\0&0&0&0&-s\end{bmatrix}\qquad\square$$

以前直接利用$\bar\Gamma(s),\Gamma(s)$证明$\bar\Gamma(s)\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}\Gamma(s)=\frac{1}{2s}\sigma(s)$十分困难，没有成功，根本原因在于$\bar\Gamma(s),\Gamma(s)$没有简洁规律的显式表示，所以无从下手。那时只是对低自旋情形给出了严格的证明，对于一般情形实际上仍是猜想。而本节利用$\bar N(s),N(s)$简洁有规律的显式表示，就很容易严格证明了$\bar N(s)\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}N(s)=\frac{1}{2s}\sigma(s)$这个结论，且$\sigma(s)$ 正是第一章的那个自旋矩阵。当然$\bar N(s)\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}N(s)=\frac{1}{2s}\sigma(s)$成立也意味着$\bar\Gamma(s)\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}\Gamma(s)=\frac{1}{2s}\sigma(s)$成立，它们两者是等价的，也相当于间接证明了$\bar\Gamma(s)\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}\Gamma(s)=\frac{1}{2s}\sigma(s)$。这给出了一种启示：对于原本很难或不能实现的计算，等价变换为一种新的形式后，就可以方便或容易计算了。

3.6 另一个简洁的证明方法(2024.5.3)

定理3.6.1. $N^{A_\varsigma}(s)\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\bar N_{B_\varsigma}(s)=\frac{1}{2s}\sigma(s);A_n=\sqrt{n}\cdot\sqrt{2s+1-n},n=1,2,\cdot\cdot,2s$

$$\sigma(s)=(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&A_1&0&0&0\\A_1&0&A_2&0&0\\0&A_2&0&\cdot\cdot&0\\0&0&\cdot\cdot&0&A_{2s}\\0&0&0&A_{2s}&0\end{bmatrix},\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0&-A_1&0&0&0\\A_1&0&-A_2&0&0\\0&A_2&0&\cdot\cdot&0\\0&0&\cdot\cdot&0&-A_{2s}\\0&0&0&A_{2s}&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}s&0&0&0&0\\0&s-1&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&-(s-1)&0\\0&0&0&0&-s\end{bmatrix})$$

证明: $N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{x_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\bar N_{B_\varsigma}(s)=\frac{1}{2}[N^{1_\varsigma}(s)\bar N_{2_\varsigma}(s)+N^{2_\varsigma}(s)\bar N_{1_\varsigma}(s)]$

$$=\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0\\0&\sqrt{2s-1}&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&0\\0&0&0&0&\sqrt{1}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}0&\sqrt{1}&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2s-1}&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\\sqrt{1}&0&0&0&0\\0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&\sqrt{2s-1}&0\\0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{1}&0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4s}\begin{bmatrix}0&\sqrt{2s}\sqrt{1}&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{2s-1}\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2}\sqrt{2s-1}&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{1}\sqrt{2s}\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{1}{4s}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\\sqrt{1}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{2}\sqrt{2s-1}&0&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2s-1}\sqrt{2}&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2s}\sqrt{1}&0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4s}\begin{bmatrix}0&\sqrt{2s\cdot1}&0&0&0&0\\\sqrt{1\cdot2s}&0&\sqrt{(2s-1)\cdot2}&0&0&0\\0&\sqrt{2\cdot(2s-1)}&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&\sqrt{2\cdot(2s-1)}&0\\0&0&0&\sqrt{(2s-1)\cdot2}&0&\sqrt{1\cdot2s}\\0&0&0&0&\sqrt{2s\cdot1}&0\end{bmatrix}=\frac{1}{4s}\begin{bmatrix}0&A_1&0&0&0\\A_1&0&A_2&0&0\\0&A_2&0&\cdot\cdot&0\\0&0&\cdot\cdot&0&A_{2s}\\0&0&0&A_{2s}&0\end{bmatrix}\qquad\square$$

证明: $N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{y_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\bar N_{B_\varsigma}(s)=\frac{i}{2}[-N^{1_\varsigma}(s)\bar N_{2_\varsigma}(s)+N^{2_\varsigma}(s)\bar N_{1_\varsigma}(s)]$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0\\0&\sqrt{2s-1}&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&0\\0&0&0&0&\sqrt{1}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\frac{i}{2\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}0&\sqrt{1}&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2s-1}&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\\sqrt{1}&0&0&0&0\\0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&\sqrt{2s-1}&0\\0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}\frac{i}{2\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{1}&0\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{i}{4s}\begin{bmatrix}0&\sqrt{2s}\sqrt{1}&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{2s-1}\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2}\sqrt{2s-1}&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{1}\sqrt{2s}\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{i}{4s}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\\sqrt{1}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{2}\sqrt{2s-1}&0&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2s-1}\sqrt{2}&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2s}\sqrt{1}&0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{i}{4s}\begin{bmatrix}0&-\sqrt{2s\cdot1}&0&0&0&0\\\sqrt{1\cdot2s}&0&-\sqrt{(2s-1)\cdot2}&0&0&0\\0&\sqrt{2\cdot(2s-1)}&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&-\sqrt{2\cdot(2s-1)}&0\\0&0&0&\sqrt{(2s-1)\cdot2}&0&-\sqrt{1\cdot2s}\\0&0&0&0&\sqrt{2s\cdot1}&0\end{bmatrix}=\frac{i}{4s}\begin{bmatrix}0&-A_1&0&0&0\\A_1&0&-A_2&0&0\\0&A_2&0&\cdot\cdot&0\\0&0&\cdot\cdot&0&-A_{2s}\\0&0&0&A_{2s}&0\end{bmatrix}\qquad\square$$

证明: $N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{x_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\bar N_{B_\varsigma}(s)=\frac{1}{2}[N^{1_\varsigma}(s)\bar N_{1_\varsigma}(s)-N^{2_\varsigma}(s)\bar N_{2_\varsigma}(s)]$

$$=\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0\\0&\sqrt{2s-1}&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&0\\0&0&0&0&\sqrt{1}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{2s-1}&0&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{1}&0\end{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\\sqrt{1}&0&0&0&0\\0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&\sqrt{2s-1}&0\\0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2s}}\begin{bmatrix}0&\sqrt{1}&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2s-1}&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2s}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4s}\begin{bmatrix} 2s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2s-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{4s}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2s-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2s \end{bmatrix} = \frac{1}{2s}\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(s-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s \end{bmatrix} \qquad \square$$

3.7 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w), N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$的基本性质

相等性：

性质3.7.1.

$$\begin{cases} N^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma l'_\varsigma}(s;w) \simeq N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w) \simeq N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w) \simeq N^{A'_\varsigma l'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;w) \\ [N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)]^* \simeq N^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma l'_\varsigma}(s;w), [N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)]^* \simeq N^{A'_\varsigma l'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;w) \end{cases}$$

推论3.7.1.

$$\begin{cases} N_{A_\varsigma}(s;w) \simeq N^{A_\varsigma}(s;w) \simeq N_{A'_\varsigma}(s;w) \simeq N^{A'_\varsigma}(s;w); \bar{N}_{A_\varsigma}(s;w) \simeq \bar{N}^{A_\varsigma}(s;w) \simeq \bar{N}_{A'_\varsigma}(s;w) \simeq \bar{N}^{A'_\varsigma}(s;w) \\ N_{A_\varsigma}(s;w) = N^*_{A_\varsigma}(s;w), \bar{N}_{A_\varsigma}(s;w) = \bar{N}^*_{A_\varsigma}(s;w); N(s;w) = N^*(s;w), \bar{N}(s;w) = \bar{N}^*(s;w) \end{cases}$$

3.8 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w), N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$的正交性质

正交性：

引理3.8.1. $\sum\limits_{k=0}^{2s-1} C^w_{w+k} = C^{w+1}_{w+2s}$

引理3.8.2. $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w) N^{A'_\varsigma l_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;w) = \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;w)$

证明： $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w) N^{A'_\varsigma l_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;w)$

$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \frac{1}{(2s-1)!}\delta^{B_\varsigma}_{(B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdot\cdot)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;w)$$

$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;w)\overbrace{\delta^{B_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-1}$$

$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;w) \qquad \square$$

定理3.8.1.

$$\begin{cases} N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w) N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w) = \delta^{k_\varsigma}_{m_\varsigma}[\Leftrightarrow] N^{A_\varsigma}(s;w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w) = I_{C^{2s}_{2s+w}}[\Leftrightarrow]\bar{N}(s;w)N(s;w) = I_{C^{2s}_{2s+w}} \\ N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w) N^{A_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w) = (1+\frac{w}{2s})\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)N^{A_\varsigma}(s;w) = (1+\frac{w}{2s})I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}} \\ N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w) N^{B_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w) = \frac{1}{w+1}C^{2s}_{2s+w}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}[\Leftrightarrow]tr[\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)N^{B_\varsigma}(s;w)] = \frac{1}{w+1}C^{2s}_{2s+w}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma} \end{cases}$$

证明： $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w) N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)$

$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}^{2s}}_{m_\varsigma}(s;w)$$

$$= \delta^{k_\varsigma}_{m_\varsigma} \qquad \square$$

证明： $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w) N^{A_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$

$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$
\begin{aligned}
&=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\delta^{A_\varsigma}_{A'_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\\
&=\tfrac{1}{(2s)!}\overbrace{\delta^{(A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot)}^{2s}\delta^{A_\varsigma}_{A'_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\\
&=\tfrac{1}{(2s)!}\delta^{(A_\varsigma}_{A_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\\
&=\tfrac{1}{(2s)!}[\delta^{A_\varsigma}_{A_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{(B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)+(2s-1)\Gamma^{\overbrace{(A_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)]\\
&=\tfrac{1}{(2s)!}[(2s-1)!\delta^{A_\varsigma}_{A_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)+(2s-1)(2s-1)!\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)]\\
&=\tfrac{1}{(2s)!}[(2s-1)!\delta^{A_\varsigma}_{A_\varsigma}+(2s-1)(2s-1)!]\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}\\
&=(1+\tfrac{w}{2s})\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}
\end{aligned}
$$
□

证明： $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N^{A'_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$

$$
\begin{aligned}
&=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\\
&=\tfrac{1}{(2s)!}\overbrace{\delta^{(A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot)}^{2s}\\
&=\tfrac{1}{(2s)!}[\overbrace{\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{(B_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot)}^{2s}+\overbrace{\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{(A'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot)}^{2s}+\overbrace{\delta^{C_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{(B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot)}^{2s}+\cdot\cdot]\\
&=\tfrac{1}{(2s)!}[\overbrace{\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{(B_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot)}^{2s}+\overbrace{\delta^{(A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot)}^{2s}+\overbrace{\delta^{(B_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\cdot\cdot)}^{2s}+\cdot\cdot]\\
&=\tfrac{1}{(2s)!}[\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\overbrace{\delta^{(B_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot)}^{2s-1}+(2s-1)\overbrace{\delta^{(A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot)}^{2s-1}]\\
&=\tfrac{1}{(2s)!}[\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}(2s-1)!\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)+(2s-1)\overbrace{\delta^{(A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot)}^{2s-1}]\\
&=\tfrac{1}{(2s)!}[\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}(2s-1)!\delta^{l_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)+(2s-1)\overbrace{\delta^{(A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot)}^{2s-1}]\\
&=\tfrac{1}{(2s)!}[\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}(2s-1)!C^{2s-1}_{2s-1+w}+(2s-1)\overbrace{\delta^{(A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot)}^{2s-1}]\\
&=\tfrac{1}{(2s)!}[\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\tfrac{(2s-1)!}{(2s-1)!}\tfrac{(2s-1+w)!}{w!}+(2s-1)\overbrace{\delta^{(A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot)}^{2s-1}]\\
&=\tfrac{1}{(2s)!}[\tfrac{(2s-1)!}{(2s-1)!}\tfrac{(2s-1+w)!}{w!}+\tfrac{(2s-1)!}{(2s-2)!}\tfrac{(2s-2+w)!}{w!}+\tfrac{(2s-1)!}{(2s-3)!}\tfrac{(2s-3+w)!}{w!}+\cdot\cdot+\tfrac{(2s-1)!}{0!}\tfrac{(0+w)!}{w!}]\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\\
&=\tfrac{1}{2s}[\tfrac{(2s-1+w)!}{(2s-1)!w!}+\tfrac{(2s-2+w)!}{(2s-2)!w!}+\tfrac{(2s-3+w)!}{(2s-3)!w!}+\cdot\cdot+\tfrac{(0+w)!}{0!w!}]\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\\
&=\tfrac{1}{2s}\sum_{k=0}^{2s-1}C^{w}_{w+k}\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}=\tfrac{1}{2s}C^{w+1}_{w+2s}\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}=\tfrac{1}{w+1}C^{2s}_{2s+w}\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}
\end{aligned}
$$
□

性质3.8.1.
$$
\begin{cases}
N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)=\tfrac{1}{2s}[\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}+(2s-1)N^{m_\varsigma}_{A_\varsigma n_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)]\\
\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)N^{B_\varsigma}(s;w)=\tfrac{1}{2s}[\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+(2s-1)N^{B_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)]
\end{cases}
$$

证明： $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N^{A'_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$

$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \tfrac{1}{(2s)!}\overbrace{\delta^{(A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot^{)}}^{2s}\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \tfrac{1}{(2s)!}[\overbrace{\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{(B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot^{)}}^{2s}+\overbrace{\delta^{B'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{(A'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot^{)}}^{2s}+\overbrace{\delta^{C'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{(B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot^{)}}^{2s}+\cdot\cdot]\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \tfrac{1}{2s}(\overbrace{\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}+\overbrace{\delta^{B'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}+\overbrace{\delta^{C'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}+\cdot\cdot)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \tfrac{1}{2s}[\overbrace{\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}+(2s-1)\overbrace{\delta^{B'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}]\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \tfrac{1}{2s}[\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)+(2s-1)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma C_\varsigma \cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)]$$

$$= \tfrac{1}{2s}[\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}+(2s-1)N^{m_\varsigma}_{A_\varsigma n_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)N^{A'_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)] \qquad \square$$

3.9 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$, $N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$的升降指标(存在$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}$为前提条件)

升降指标：

性质3.9.1.

$$\begin{cases} N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)=\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s;w)\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w) \\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)=\varepsilon_{k_\varsigma m_\varsigma}(s;w)\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)N^{m_\varsigma}_{B_\varsigma n_\varsigma}(s;w) \end{cases}$$

证明： $\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s;w)\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)$

$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma E'_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma F'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma G'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{E'_\varsigma F'_\varsigma G'_\varsigma \cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}$$

$$\Gamma^{\overbrace{B''_\varsigma C''_\varsigma \cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\underbrace{\varepsilon_{B''_\varsigma F''_\varsigma}\varepsilon_{C''_\varsigma G''_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s-1}\Gamma^{\overbrace{F''_\varsigma G''_\varsigma \cdot\cdot}^{2s-1}}_{n_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)$$

$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma E'_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma F'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma G'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{E'_\varsigma F'_\varsigma G'_\varsigma \cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{B''_\varsigma C''_\varsigma \cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\underbrace{\varepsilon_{B''_\varsigma F''_\varsigma}\varepsilon_{C''_\varsigma G''_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s-1}\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma F''_\varsigma G''_\varsigma \cdot\cdot}^{2s}}_{m_\varsigma}(s;w)$$

$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma E'_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma F'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma G'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\tfrac{1}{(2s)!}\underbrace{\delta^{B_\varsigma}_{(E'_\varsigma}\delta^{F''_\varsigma}_{F'_\varsigma}\delta^{G''_\varsigma}_{G'_\varsigma}\cdot\cdot_{)}}_{2s}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\underbrace{\varepsilon_{B''_\varsigma F''_\varsigma}\varepsilon_{C''_\varsigma G''_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s-1}\Gamma^{\overbrace{B''_\varsigma C''_\varsigma \cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma F''_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma G''_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{B''_\varsigma F''_\varsigma}\varepsilon_{C''_\varsigma G''_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}\Gamma^{\overbrace{B''_\varsigma C''_\varsigma \cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\underbrace{\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{B''_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C''_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}\Gamma^{\overbrace{B''_\varsigma C''_\varsigma \cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w) \qquad \square$$

推论3.9.1.

$$\begin{cases} N_{A_\varsigma}(s;w)\varepsilon(s-\frac{1}{2};w)=\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon(s;w)N^{B_\varsigma}(s;w),\varepsilon(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)=\bar{N}^{B_\varsigma}(s;w)\varepsilon_{B_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon(s;w)\\ N^{A_\varsigma}(s;w)\varepsilon(s-\frac{1}{2};w)=\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon(s;w)N_{B_\varsigma}(s;w),\varepsilon(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}^{A_\varsigma}(s;w)=\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)\varepsilon^{B_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon(s;w)\\ N(s;w)\varepsilon(s;w)=[\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\varepsilon(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w),\varepsilon(s;w)\bar{N}(s;w)=\bar{N}(s;w)[\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\varepsilon(s-\frac{1}{2};w)] \end{cases}$$

证明： $\Gamma(s;w)\varepsilon(s;w)=\underbrace{\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(\frac{1}{2};w)}_{2s}\Gamma(s;w)$

$\Leftrightarrow[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Gamma(s;w)\varepsilon(s;w)=[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\underbrace{\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(\frac{1}{2};w)}_{2s}\Gamma(s;w)$

$\Leftrightarrow N(s;w)\varepsilon(s;w)=[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\underbrace{\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(\frac{1}{2};w)}_{2s}\Gamma(s;w)$

$\Leftrightarrow N(s;w)\varepsilon(s;w)=\{\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes[\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)\underbrace{\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(\frac{1}{2};w)]}_{2s-1}\}\Gamma(s;w)$

$\Leftrightarrow N(s;w)\varepsilon(s;w)=[\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\varepsilon(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Gamma(s;w)$

$\Leftrightarrow N(s;w)\varepsilon(s;w)=[\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\varepsilon(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w)$ □

Penrose标准升降规则：

性质3.9.2.

$$\begin{cases} N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)=(-1)^{2s}[\varsigma^{2s}\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s;w)](-\varsigma\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma})[(-\varsigma)^{2s-1}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)=(-1)^{2s}[(-\varsigma)^{2s}\varepsilon_{k_\varsigma m_\varsigma}(s;w)](\varsigma\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma})[\varsigma^{2s-1}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]N^{m_\varsigma}_{B_\varsigma n_\varsigma}(s;w) \end{cases}$$

3.10 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$的自旋变换

性质3.10.1.

$$\begin{cases} N^{A_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)[\Leftrightarrow]N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\\ [\Leftrightarrow]\bar{N}(s;w)\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}N(s;w)=\frac{1}{2s}\sigma(s;w)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)[\Leftrightarrow]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{A_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w) \end{cases}$$

证明： $N^{A_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;w)$

$=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

$=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\frac{1}{(2s)!}\overbrace{\delta^{(B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_{2\varsigma}}\cdot\cdot)}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)$

$=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)$

$=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$ □

证明： $N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{A'_\varsigma m_\varsigma}(s;w)$

$=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

$=\frac{1}{(2s)!}\delta^{A_\varsigma}_{(A'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdot\cdot)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

$=\frac{1}{(2s)!}[\delta^{A_\varsigma}_{A'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{(B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdot\cdot)+\delta^{A_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{(A'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdot\cdot)+\delta^{A_\varsigma}_{C'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{(B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{A'_\varsigma}\cdot\cdot)+\cdot\cdot]\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

$$= \frac{1}{(2s)!}[\delta^{A_\varsigma}_{A'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{(B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdot\cdot_) + (2s-1)\delta^{A_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{(A'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdot\cdot_)]\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \frac{1}{(2s)!}(2s-1)\delta^{A_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{(A'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdot\cdot_)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \frac{1}{(2s)!}(2s-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{(A'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot)}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \frac{1}{2s}(2s-1)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w) \qquad \square$$

性质3.10.2.

$$\begin{cases} N^{A_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;w) = \frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)[\Leftrightarrow]N^{A_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w) = \frac{1}{2s}S_{ab}(s,\varsigma;w) \\ [\Leftrightarrow]\bar{N}(s;w)S_{ab}(\tfrac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}N(s;w) = \frac{1}{2s}S_{ab}(s,\varsigma;w) \\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;w) = \frac{1}{2s}S_{abm_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)[\Leftrightarrow]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)N^{A_\varsigma}(s;w) = \frac{1}{2s}S_{ab}(s-\tfrac{1}{2},\varsigma;w) \end{cases}$$

证明：$N^{A_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;w)$

$$= \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\frac{1}{(2s)!}\overbrace{\delta^{(B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_{2\varsigma}}\cdot\cdot{}^{)}}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)$$

$$= \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)$$

$$= \frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w) \qquad \square$$

证明：$N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{A'_\varsigma m_\varsigma}(s;w)$

$$= \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \frac{1}{(2s)!}\delta^{A_\varsigma}_{(A'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdot\cdot_)S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \frac{1}{(2s)!}[\delta^{A_\varsigma}_{A'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{(B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdot\cdot_) + \delta^{A_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{(A'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdot\cdot_) + \delta^{A_\varsigma}_{C'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{(B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{A'_\varsigma}\cdot\cdot_) + \cdot\cdot]S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \frac{1}{(2s)!}[\delta^{A_\varsigma}_{A'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{(B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdot\cdot_) + (2s-1)\delta^{A_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{(A'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdot\cdot_)]S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \frac{1}{(2s)!}(2s-1)\delta^{A_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{(A'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdot\cdot_)S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \frac{1}{(2s)!}(2s-1)S_{abB'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{(A'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot)}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \frac{1}{2s}(2s-1)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)S_{abB'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \frac{1}{2s}S_{abm_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w) \qquad \square$$

3.11 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w), N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$的置换性质

定理3.11.1.

$$\begin{cases}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)+\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma m_\varsigma}(s;w)=N^{j_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;w)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)+N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)=\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{j_\varsigma}(s;w)N^{B_\varsigma l_\varsigma}_{j_\varsigma}(s;w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)+\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)=\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\\ N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)+N^{B_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)=\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)N^{B_\varsigma}(s;w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\sigma(\tfrac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)]N(s;w)=N(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\\ \bar{N}(s;w)[\sigma(\tfrac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)]=\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\bar{N}(s;w)\end{cases}$$

证明：$\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$

$$\Rightarrow \Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}[\sigma_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\underbrace{\delta^{B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdots}_{2s-1}+\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\Omega^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)]\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$$

$$\Leftrightarrow [\sigma_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s-1}}+\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\sigma_{j_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma_{n_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)]\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{A'_\varsigma j_\varsigma}(s;w)+\sigma_{j_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{A_\varsigma n_\varsigma}(s;w)=N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma j_\varsigma}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$$
$$\Leftrightarrow \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)+\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma m_\varsigma}(s;w)=N^{j_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;w) \qquad \square$$

定理3.11.2.

$$\begin{cases}S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)+S_{abl_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma m_\varsigma}(s;w)=N^{j_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)S_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;w)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)+N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)S_{abm_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)=S_{abk_\varsigma}{}^{j_\varsigma}(s;w)N^{B_\varsigma l_\varsigma}_{j_\varsigma}(s;w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)+S_{ab}(s-\tfrac{1}{2},\varsigma;w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)=\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)\\ N^{A_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)+N^{B_\varsigma}(s;w)S_{ab}(s-\tfrac{1}{2},\varsigma;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)N^{B_\varsigma}(s;w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}[S_{ab}(\tfrac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\tfrac{1}{2},\varsigma;w)]N(s;w)=N(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)\\ \bar{N}(s;w)[S_{ab}(\tfrac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\tfrac{1}{2},\varsigma;w)]=S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{N}(s;w)\end{cases}$$

证明：$\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$

$$\Rightarrow \Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}[S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\underbrace{\delta^{B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdots}_{2s-1}+\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\Omega_{ab}{}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)]\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$$

$$\Leftrightarrow [S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}} + \delta_{A_\varsigma}^{A'_\varsigma}\sigma_{j_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma_{n_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)]\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w) = \Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$$

$$\Leftrightarrow S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{A'_\varsigma j_\varsigma}(s;w) + S_{abj_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{A_\varsigma n_\varsigma}(s;w) = N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma j_\varsigma}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$$

$$\Leftrightarrow S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w) + S_{abl_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma m_\varsigma}(s;w) = N^{j_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)S_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;w) \qquad \square$$

3.12 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_\varsigma}(s;w), N_{k_\varsigma}^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_\varsigma}(s;w)$的引入及其性质

定义3.12.1.
$$\begin{cases} N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;w) := \Gamma^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;w)\Gamma_{l_\varsigma}^{A_{\varsigma n+1}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s-\tfrac{n}{2};w) \\ N_{k_\varsigma}^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;w) := \Gamma_{k_\varsigma}^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{A_{\varsigma n+1}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s-\tfrac{n}{2};w) \end{cases}$$

相等性：

性质3.12.1. $N^{k'_\varsigma}_{A'_{\varsigma1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}(s;w) \simeq N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;w) \simeq N_{k_\varsigma}^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;w) \simeq N_{k'_\varsigma}^{A'_{\varsigma1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}(s;w)$

性质3.12.2. $[N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;w)]^* \simeq N^{k'_\varsigma}_{A'_{\varsigma1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}(s;w), [N_{k_\varsigma}^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;w)]^* \simeq N_{k'_\varsigma}^{A'_{\varsigma1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}(s;w)$

展开性：

性质3.12.3.
$$\begin{cases} N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;w) = N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}l_{\varsigma1}}(s;w)N^{l_{\varsigma1}}_{A_{\varsigma2}l_{\varsigma2}}(s-\tfrac{1}{2};w)\cdot\cdot N^{l_{\varsigma n-1}}_{A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s-\tfrac{n-1}{2};w) \\ N_{k_\varsigma}^{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;w) = N_{k_\varsigma}^{A_{\varsigma1}l_{\varsigma1}}(s;w)N_{l_{\varsigma1}}^{A_{\varsigma2}l_{\varsigma2}}(s-\tfrac{1}{2};w)\cdot\cdot N_{l_{\varsigma n-1}}^{A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s-\tfrac{n-1}{2};w) \end{cases}$$

性质3.12.4.
$$\begin{cases} \Gamma^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;w) = N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}l_{\varsigma1}}(s;w)N^{l_{\varsigma1}}_{A_{\varsigma2}l_{\varsigma2}}(s-\tfrac{1}{2};w)\cdot\cdot N^{l_{\varsigma2s-1}}_{A_{\varsigma2s}l_{\varsigma2s}}(\tfrac{1}{2};w) \\ \Gamma_{k_\varsigma}^{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;w) = N_{k_\varsigma}^{A_{\varsigma1}l_{\varsigma1}}(s;w)N_{l_{\varsigma1}}^{A_{\varsigma2}l_{\varsigma2}}(s-\tfrac{1}{2};w)\cdot\cdot N_{l_{\varsigma2s-1}}^{A_{\varsigma2s}l_{\varsigma2s}}(\tfrac{1}{2};w) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;w) \succ \Gamma_{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;w) = N_{A_{\varsigma1}}(s;w)N_{A_{\varsigma2}}(s-\tfrac{1}{2};w)\cdot\cdot N_{A_{\varsigma2s}}(\tfrac{1}{2};w) \\ \Gamma_{k_\varsigma}^{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;w) \succ \Gamma^{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;w) = N^{A_{\varsigma1}}(s;w)N^{A_{\varsigma2}}(s-\tfrac{1}{2};w)\cdot\cdot N^{A_{\varsigma2s}}(\tfrac{1}{2};w) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar\Gamma(s;w) = \bar N(s;w)[I_{w+1}\otimes \bar N(s-\tfrac{1}{2};w)]\cdot\cdot[I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes \bar N(1)][I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes \bar N(\tfrac{1}{2};w)] \\ \Gamma(s;w) = [I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes N(\tfrac{1}{2};w)][I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes N(1)]\cdot\cdot[I_{w+1}\otimes N(s-\tfrac{1}{2};w)]N(s;w) \end{cases}$$

3.13 推论1：常数矩阵$N(s;w),\bar N(s;w)$的几个恒等式

性质3.13.1.
$$\begin{cases} \bar N(s;w)[\sigma(\tfrac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}} + I_{w+1}\otimes\sigma(s-\tfrac{1}{2};w)]N(s;w) = \sigma(s;w) \\ N(s;w)\sigma(s;w)\bar N(s;w) = [\sigma(\tfrac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}} + I_{w+1}\otimes\sigma(s-\tfrac{1}{2};w)]N(s;w)\bar N(s;w) \\ N(s;w)\sigma(s;w)\bar N(s;w) = N(s;w)\bar N(s;w)\{\vartheta\cdot[\sigma(\tfrac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}} + I_{w+1}\otimes\sigma(s-\tfrac{1}{2};w)]\}^n \\ [N(s;w)\bar N(s;w), \sigma(\tfrac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}} + I_{w+1}\otimes\sigma(s-\tfrac{1}{2};w)] = 0 \end{cases}$$

性质3.13.2.
$$\begin{cases} \bar N(s;w)[S_{ab}(\tfrac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}} + I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\tfrac{1}{2},\varsigma;w)]N(s;w) = S_{ab}(s,\varsigma;w) \\ N(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar N(s;w) = [S_{ab}(\tfrac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}} + I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\tfrac{1}{2},\varsigma;w)]N(s;w)\bar N(s;w) \\ N(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar N(s;w) = N(s;w)\bar N(s;w)[S_{ab}(\tfrac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}} + I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\tfrac{1}{2},\varsigma;w)] \\ [N(s;w)\bar N(s;w), S_{ab}(\tfrac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}} + I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\tfrac{1}{2},\varsigma;w)] = 0 \end{cases}$$

性质3.13.3.
$$\begin{cases} \bar N(s;w)\{\vartheta\cdot[\sigma(\tfrac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}} + I_{w+1}\otimes\sigma(s-\tfrac{1}{2};w)]\}^n N(s;w) = [\vartheta\cdot\sigma(s;w)]^n \\ N(s;w)[\vartheta\cdot\sigma(s;w)]^n\bar N(s;w) = \{\vartheta\cdot[\sigma(\tfrac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}} + I_{w+1}\otimes\sigma(s-\tfrac{1}{2};w)]\}^n N(s;w)\bar N(s;w) \\ N(s;w)[\vartheta\cdot\sigma(s;w)]^n\bar N(s;w) = N(s;w)\bar N(s;w)\{\vartheta\cdot[\sigma(\tfrac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}} + I_{w+1}\otimes\sigma(s-\tfrac{1}{2};w)]\}^n \\ [N(s;w)\bar N(s;w), \{\vartheta\cdot[\sigma(\tfrac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}} + I_{w+1}\otimes\sigma(s-\tfrac{1}{2};w)]\}^n] = 0 \end{cases}$$

性质3.13.4.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;w)\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\}^n N(s;w)=[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)]^n\\ N(s;w)[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)]^n\bar{N}(s;w)=\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\}^n N(s;w)\bar{N}(s;w)\\ N(s;w)[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)]^n\bar{N}(s;w)=N(s;w)\bar{N}(s;w)\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\}^n\\ [N(s;w)\bar{N}(s;w),\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\}^n]=0\end{cases}$$

推论3.13.1.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]}N(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\\ N(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\bar{N}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]}N(s;w)\bar{N}(s;w)\\ N(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\bar{N}(s;w)=N(s;w)\bar{N}(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]}\\ [N(s;w)\bar{N}(s;w),e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]}]=0\end{cases}$$

3.14 推论2：常数矩阵$N(s;w),\bar{N}(s;w)$的另外几个恒等式

推论3.14.1.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;w)\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}N(s;w)=\frac{1}{2s}\sigma(s;w)\\ \bar{N}(s;w)I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)N(s;w)=(1-\frac{1}{2s})\sigma(s;w)\\ N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)=(1-\frac{1}{2s})\sigma(s;w)\\ \bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)\sigma(s;w)N^{A_\varsigma}(s;w)=(1+\frac{w+1}{2s})\sigma(s-\frac{1}{2};w)\end{cases}$$

推论3.14.2.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;w)S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}N(s;w)=\frac{1}{2s}S_{ab}(s,\varsigma;w)\\ \bar{N}(s;w)I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)N(s;w)=(1-\frac{1}{2s})S_{ab}(s,\varsigma;w)\\ N^{A_\varsigma}(s;w)S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)=(1-\frac{1}{2s})S_{ab}(s,\varsigma;w)\\ \bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)N^{A_\varsigma}(s;w)=(1+\frac{w+1}{2s})S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)\end{cases}$$

推论3.14.3.

$$\begin{cases}\bar{N}(1)[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_2+I_{w+1}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)]N(1)=\sigma(1)\\ \bar{N}(\frac{3}{2})\{\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_3+I_{w+1}\otimes\{\bar{N}(1)[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_2+I_{w+1}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)]N(1)\}\}N(\frac{3}{2})=\sigma(\frac{3}{2})\\ \bar{N}(s;w)\cdot\cdot\bar{N}(\frac{3}{2})\{\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_3+I_{w+1}\otimes\{\bar{N}(1)[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_2+I_{w+1}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)]N(1)\}\}N(\frac{3}{2})\cdot\cdot N(s;w)=\sigma(s;w)\end{cases}$$

3.15 矩阵$N(s;w),\bar{N}(s;w)$的常数不变张量性质

定理3.15.1. $N(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}N(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}$

证明: $[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]N(s;w)=N(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow 0=[\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]N(s;w)-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}N(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow N(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}N(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}$ □

定理3.15.2. $\bar{N}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\bar{N}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}$

证明: $\bar{N}(s;w)[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]=S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{N}(s;w)$
$\Leftrightarrow 0=\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{N}(s;w)-\bar{N}(s;w)[\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]$
$\Leftrightarrow \bar{N}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\bar{N}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}$ □

3.16 矩阵$N(s),\bar{N}(s)$的常数不变张量性质

定理3.16.1. $N(s)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}N(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}$

证明: $[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2})]N(s)=N(s)\sigma(s)$
$\Leftrightarrow 0=[(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2})]N(s)-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot N(s)\sigma(s)$
$\Leftrightarrow N(s)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}N(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}$ □

定理3.16.2. $\bar{N}(s)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}\bar{N}(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}$

证明: $\bar{N}(s)[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2})]=\sigma(s)\bar{N}(s)$
$\Leftrightarrow 0=(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)\bar{N}(s)-\bar{N}(s)[(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2})]$
$\Leftrightarrow \bar{N}(s)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}\bar{N}(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}$ □

3.17 矩阵$(\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_a$的常数不变张量性质

定理3.17.1.

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_a\\=[e^{\vartheta}]_a{}^b[e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},-\varsigma;w)}\otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}](\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_b[e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}]\\(\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_a\\=[e^{\vartheta}]_a{}^b[e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},-\varsigma;w)}\otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(s-\frac{1}{2},-\varsigma;w)}](\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_b[e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(s-\frac{1}{2},-\varsigma;w)}]\end{cases}$$

证明: $(\sigma,-i\varsigma)_a=[e^{\vartheta}]_a{}^b e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},-\varsigma;w)}(\sigma,-i\varsigma)_b e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}$
$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_a=[e^{\vartheta}]_a{}^b[e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},-\varsigma;w)}\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}](\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_b[e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}]$
$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_a$
$=[e^{\vartheta}]_a{}^b[e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},-\varsigma;w)}\otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}](\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_b[e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}]$ □

证明: $(\sigma,-i\varsigma)_a=[e^{\vartheta}]_a{}^b e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},-\varsigma;w)}(\sigma,-i\varsigma)_b e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}$
$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_a=[e^{\vartheta}]_a{}^b[e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},-\varsigma;w)}\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}](\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_b[e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}]$
$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_a$
$=[e^{\vartheta}]_a{}^b[e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},-\varsigma;w)}\otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(s-\frac{1}{2},-\varsigma;w)}](\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_b[e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(s-\frac{1}{2},-\varsigma;w)}]$ □

3.18 矩阵$(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a$的常数不变张量性质

定理3.18.1.

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a=[e^{(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)}]_a{}^b e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_b e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}\\(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a=[e^{(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)}]_a{}^b e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_b e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}\end{cases}$$

证明: $(\sigma,-i\varsigma)_a=[e^{(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)}]_a{}^b e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}(\sigma,-i\varsigma)_b e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}$
$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a=[e^{(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)}]_a{}^b[e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes I_{2s}](\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_b[e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes I_{2s}]$
$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a=[e^{(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)}]_a{}^b e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_b e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}$ □

证明: $(\sigma,-i\varsigma)_a=[e^{(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)}]_a{}^b e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}(\sigma,-i\varsigma)_b e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}$
$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a=[e^{(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)}]_a{}^b[e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes I_{2s}](\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_b[e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes I_{2s}]$
$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a=[e^{(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)}]_a{}^b e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_b e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}$ □

4 完美常数不变张量$X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w),X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$(存在$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}$为前提)

只有满足$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}=-\varepsilon_{B_\varsigma A_\varsigma}$反对称条件时，本章节内容才全部成立，否则只有部分成立。

4.1 完美常数不变张量$X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w),X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$的引入

定义4.1.1. $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w):=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w),X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w):=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

性质4.1.1. $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)\simeq X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$

4.2 常数矩阵$X(s;w),\bar{X}(s;w)$的引入

定义4.2.1. $\begin{cases} X^{A_\varsigma}(s;w) \prec X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w), X_{A_\varsigma}(s;w) \prec X_{A_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;w) \\ \bar{X}_{A_\varsigma}(s;w) \prec X_{A_\varsigma l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s;w), \bar{X}^{A_\varsigma}(s;w) \prec X^{A_\varsigma l_\varsigma}{}_{m_\varsigma}(s;w) \\ X(s;w) \prec X_{A_\varsigma \otimes l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s;w), \bar{X}(s;w) \prec X_{m_\varsigma}{}^{A_\varsigma \otimes l_\varsigma}(s;w) = X^{+}(s;w) \end{cases}$

$X(s),\bar{X}(s)$的显式表示：

推论4.2.1. $\bar{X}(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2s-1} & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2s-2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{1} & \sqrt{2s-1} & 0 \end{bmatrix}$

推论4.2.2. $\bar{X}(s=1,\frac{3}{2},2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{1} & \sqrt{1} & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{1} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{1} & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$

4.3 常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w), X_{A_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;w)$的升降指标

性质4.3.1.

$$\begin{cases} X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w) = \varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon_{m_\varsigma r_\varsigma}(s-1;w)X_{B_\varsigma n_\varsigma}^{r_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w) \\ X_{A_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;w) = \varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{m_\varsigma r_\varsigma}(s-1;w)X_{r_\varsigma}^{B_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w) \end{cases}$$

证明: $N_{A_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w) = \varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-1;w)N_{m_\varsigma}^{B_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

$\Leftrightarrow \varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}N_{A_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w) = \varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-1;w)N_{m_\varsigma}^{B_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

$\Leftrightarrow X_{l_\varsigma}^{C_\varsigma k_\varsigma}(s;w) = \varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-1;w)X_{A_\varsigma m_\varsigma}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

$\Leftrightarrow X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w) = \varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon_{m_\varsigma r_\varsigma}(s-1;w)X_{B_\varsigma n_\varsigma}^{r_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$ □

4.4 常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w), X_{A_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;w)$的正交性

性质4.4.1. $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)X_{A_\varsigma l_\varsigma}^{n_\varsigma}(s;w) = \delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}[\Leftrightarrow]X^{A_\varsigma}(s;w)\bar{X}_{A_\varsigma}(s;w) = I_{C_{2s-2+w}^{2s-2}}[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;w)X(s;w) = I_{C_{2s-2+w}^{2s-2}}$

证明: $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)X_{A_\varsigma l_\varsigma}^{n_\varsigma}(s;w)$

$= \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N_{C_\varsigma m_\varsigma}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}N_{l_\varsigma}^{D_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

$= \frac{2s-1}{2s-1+w}N_{C_\varsigma m_\varsigma}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\delta_{D_\varsigma}{}^{C_\varsigma}N_{l_\varsigma}^{D_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

$= \frac{2s-1}{2s-1+w}(1+\frac{w}{2s-1})\delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}$

$= \delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}$ □

性质4.4.2. $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N_{A_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;w) = 0$

$[\Leftrightarrow]X^{A_\varsigma}(s;w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w) = 0, N_{A_\varsigma}(s;w)\bar{X}^{A_\varsigma}(s;w) = 0[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;w)N(s;w) = 0, \bar{N}(s;w)X(s;w) = 0$

证明: $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N_{A_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;w)$

$= \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N_{C_\varsigma m_\varsigma}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N_{A_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;w)$

$= \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{C_\varsigma C''_\varsigma D''_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{C''_\varsigma D''_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}(s-1;w)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma D'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma D'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$= \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}\frac{1}{(2s-1)!}\delta^{B'_\varsigma}_{(C_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C''_\varsigma}\delta^{D'_\varsigma}_{D''_\varsigma}\cdot\cdot{}_{)}\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{C''_\varsigma D''_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}(s-1;w)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma D'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)$

$= \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C''_\varsigma D''_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{C''_\varsigma D''_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}(s-1;w)$

$= 0$ □

性质4.4.3. $X_{A_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;w)X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma k_\varsigma}(s;w) = \frac{2s-1}{2s-1+w}\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar{X}_{A_\varsigma}(s;w)X^{A_\varsigma}(s;w) = \frac{2s-1}{2s-1+w}I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}$

证明： $X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)X^{A_\varsigma k_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)$
$= \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$= \frac{2s-1}{2s-1+w}N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$= \frac{2s-1}{2s-1+w}\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}$ □

性质4.4.4. $X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)X^{B_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w) = \frac{1}{w+1}C^{2s-2}_{2s-2+w}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}[\Leftrightarrow]tr[\bar{X}_{A_\varsigma}(s;w)X^{B_\varsigma}(s;w)] = \frac{1}{w+1}C^{2s-2}_{2s-2+w}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}$

证明： $X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)X^{B_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)$
$= \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}N^{C_\varsigma m_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{D_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$= \frac{2s-1}{2s-1+w}\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N^{C_\varsigma m_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{D_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$= \frac{2s-1}{2s-1+w}\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}\frac{1}{w+1}C^{2s-1}_{2s-1+w}\delta^{C_\varsigma}_{D_\varsigma}$
$= \frac{1}{w+1}C^{2s-2}_{2s-2+w}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}$ □

推论4.4.1. $\bar{N}(s;w)N(s;w) = I_{C^{2s}_{2s+w}}, \bar{X}(s;w)X(s;w) = I_{C^{2s-2}_{2s-2+w}}, \bar{N}(s;w)X(s;w) = 0, \bar{X}(s;w)N(s;w) = 0$

4.5 矩阵$N(s), \bar{N}(s), X(s), \bar{X}(s)$的联合正交性质

性质4.5.1. $\begin{cases} X^{n_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s)X^{B_\varsigma m_\varsigma}_{n_\varsigma}(s) = \frac{1}{2s}[(2s-1)\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma} - (2s-1)N^{m_\varsigma}_{A_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2})N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})] \\ \bar{X}_{A_\varsigma}(s)X^{B_\varsigma}(s) = \frac{1}{2s}[(2s-1)\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}I_{2s} - (2s-1)N^{B_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{A_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)] \end{cases}$

证明： $X^{n_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s)X^{A'_\varsigma m_\varsigma}_{n_\varsigma}(s) = \frac{2s-1}{2s}\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma E'_\varsigma}N^{E_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})N^{m_\varsigma}_{E'_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2})$

$$= \frac{2s-1}{2s}\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma E'_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\Gamma^{n_\varsigma}_{\underbrace{F_\varsigma G_\varsigma\cdots}_{2s-2}}(s-1)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{E'_\varsigma F'_\varsigma G'_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})\Gamma^{\overbrace{F'_\varsigma G'_\varsigma\cdots}^{2s-2}}_{n_\varsigma}(s-1)$$

$$= \frac{2s-1}{2s}\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma E'_\varsigma}\frac{1}{(2s-2)!}\overbrace{\delta^{(F'_\varsigma}_{F_\varsigma}\delta^{G'_\varsigma}_{G_\varsigma}\cdots)}^{2s-2}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{E'_\varsigma F'_\varsigma G'_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})$$

$$= \frac{2s-1}{2s}\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma E'_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{E'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})$$

$$= \frac{2s-1}{2s}\delta^{[A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{E'_\varsigma]}_{E_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{E'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})$$

$$= \frac{2s-1}{2s}\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2}) - \frac{2s-1}{2s}\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})$$

$= \frac{1}{2s}[(2s-1)\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma} - (2s-1)N^{m_\varsigma}_{A_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2})N^{A'_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})]$ □

推论4.5.1. $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s)N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s) + X^{n_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s)X^{B_\varsigma m_\varsigma}_{n_\varsigma}(s) = \delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}$
$[\Leftrightarrow]\bar{N}_{A_\varsigma}(s)N^{B_\varsigma}(s) + \bar{X}_{A_\varsigma}(s)X^{B_\varsigma}(s) = \delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}I_{2s}[\Leftrightarrow]N(s)\bar{N}(s) + X(s)\bar{X}(s) = I_{4s}$

推论4.5.2. $\begin{bmatrix}\bar{N}(s)\\ \bar{X}(s)\end{bmatrix}[N(s), X(s)] = [N(s), X(s)]\begin{bmatrix}\bar{N}(s)\\ \bar{X}(s)\end{bmatrix} = I_{4s}[\Leftrightarrow]\begin{cases} N(s)\bar{N}(s) + X(s)\bar{X}(s) = I_{4s} \\ \bar{N}(s)N(s) = I_{2s+1}, \bar{X}(s)X(s) = I_{2s-1} \\ \bar{N}(s)X(s) = 0, \bar{X}(s)N(s) = 0 \end{cases}$

4.6 常数不变张量$X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w), X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$的自旋变换

推论4.6.1. $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X^{n_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w) = -\frac{1}{2s-1+w}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)$
$[\Leftrightarrow]X^{A_\varsigma}(s;w)\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{X}_{B_\varsigma}(s;w) = -\frac{1}{2s-1+w}\sigma(s-1;w)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;w)\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}X(s;w) = -\frac{1}{2s-1+w}\sigma(s-1;w)$

证明： $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X^{n_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$
$= \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon_{B_\varsigma D_\varsigma}N^{D_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$= -\frac{2s-1}{2s-1+w}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{D_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{D_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$= -\frac{1}{2s-1+w}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)$ □

推论4.6.2. $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X^{m_\varsigma}_{B_\varsigma k_\varsigma}(s;w) = -\frac{1}{2s-1+w}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X_{B_\varsigma}(s;w) = -\frac{1}{2s-1+w}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

证明： $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X^{m_\varsigma}_{B_\varsigma k_\varsigma}(s;w)$
$= \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon_{B_\varsigma D_\varsigma}N^{D_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$= -\frac{2s-1}{2s-1+w}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{D_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{D_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$= -\frac{1}{2s-1+w}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$ □

推论4.6.3. $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X^{n_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w) = -\frac{1}{2s-1+w}S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)$
$[\Leftrightarrow]X^{A_\varsigma}(s;w)S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-2}_{2s-2+w}}\bar{X}_{A_\varsigma}(s;w) = -\frac{1}{2s-1+w}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;w)S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}X(s;w) = -\frac{1}{2s-1+w}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)$

证明： $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X^{n_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$
$= \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon_{B_\varsigma D_\varsigma}N^{D_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$= -\frac{2s-1}{2s-1+w}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)S_{abD_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{D_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$= -\frac{1}{2s-1+w}S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)$ □

推论4.6.4. $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X^{m_\varsigma}_{B_\varsigma k_\varsigma}(s;w) = -\frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}^{A_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X_{B_\varsigma}(s;w) = -\frac{1}{2s-1+w}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)$

证明： $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X^{m_\varsigma}_{B_\varsigma k_\varsigma}(s;w)$
$= \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon_{B_\varsigma D_\varsigma}N^{D_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$= -\frac{2s-1}{2s-1+w}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)S_{abD_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{D_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$= -\frac{1}{2s-1+w}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$ □

4.7 常数不变张量$X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)$, $X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$的置换性质

定理4.7.1.
$$\begin{cases} X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)] = \sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)X^{B_\varsigma k_\varsigma}_{n_\varsigma}(s;w) \\ [\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]X^{n_\varsigma}_{B_\varsigma k_\varsigma}(s;w) = X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w) \end{cases}$$
$$\begin{cases} X^{A_\varsigma}(s;w)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma(s-\frac{1}{2};w)] = \sigma(s-1;w)X^{B_\varsigma}(s;w) \\ [\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma(s-\frac{1}{2};w)]\bar{X}_{B_\varsigma}(s;w) = \bar{X}_{A_\varsigma}(s;w)\sigma(s-1;w) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \bar{X}(s;w)[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)] = \sigma(s-1;w)\bar{X}(s;w) \\ [\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]X(s;w) = X(s;w)\sigma(s-1;w) \end{cases}$$

证明： $X^{A_\varsigma k_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)] = \sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)X^{B_\varsigma l_\varsigma}_{n_\varsigma}(s;w)$
$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]$
$= \sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{D_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$\Leftrightarrow \varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)] = \sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{D_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$\Leftrightarrow \varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s;w)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)] = \sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{D_\varsigma n_\varsigma}(s;w)$
$\Leftrightarrow \varepsilon_{E_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s;w)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)] = \varepsilon_{E_\varsigma B_\varsigma}\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{D_\varsigma n_\varsigma}(s;w)$
$\Leftrightarrow N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s;w)[\sigma(\frac{1}{2};w)_{E_\varsigma}{}^{C_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}-\delta_{E_\varsigma}{}^{C_\varsigma}\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)] = -\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{E_\varsigma n_\varsigma}(s;w)$
$\Leftrightarrow [\sigma(\frac{1}{2};w)_{E_\varsigma}{}^{C_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s;w)+\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{E_\varsigma n_\varsigma}(s;w) = N^{k_\varsigma}_{E_\varsigma m_\varsigma}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$
$\Leftrightarrow \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)+\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma m_\varsigma}(s;w) = N^{j_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;w)$ □

定理4.7.2.

$$\begin{cases}X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]=S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)X_{n_\varsigma}^{B_\varsigma\otimes k_\varsigma}(s;w)\\ [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]X_{B_\varsigma k_\varsigma}^{n_\varsigma}(s;w)=X_{A_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;w)S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}X^{A_\varsigma}(s;w)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]=S_{ab}(s-1,\varsigma;w)X^{B_\varsigma}(s;w)\\ [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\bar{X}_{B_\varsigma}(s;w)=\bar{X}_{A_\varsigma}(s;w)S_{ab}(s-1,\varsigma;w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{X}(s;w)[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]=S_{ab}(s-1,\varsigma;w)\bar{X}(s;w)\\ [S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]X(s;w)=X(s;w)S_{ab}(s-1,\varsigma;w)\end{cases}$$

证明: $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma k_\varsigma}(s;w)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]=S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)X_{n_\varsigma}^{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N_{C_\varsigma m_\varsigma}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]$

$=S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+w}}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N_{D_\varsigma n_\varsigma}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

$\Leftrightarrow\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N_{C_\varsigma m_\varsigma}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]=S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N_{D_\varsigma n_\varsigma}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

$\Leftrightarrow\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N_{C_\varsigma m_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;w)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)]=S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N_{D_\varsigma n_\varsigma}^{l_\varsigma}(s;w)$

$\Leftrightarrow\varepsilon_{E_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N_{C_\varsigma m_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;w)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)]=\varepsilon_{E_\varsigma B_\varsigma}S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N_{D_\varsigma n_\varsigma}^{l_\varsigma}(s;w)$

$\Leftrightarrow N_{C_\varsigma m_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;w)[S_{abE_\varsigma}{}^{C_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}-\delta_{E_\varsigma}{}^{C_\varsigma}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)]=-S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N_{E_\varsigma n_\varsigma}^{l_\varsigma}(s;w)$

$\Leftrightarrow[S_{abE_\varsigma}{}^{C_\varsigma}N_{C_\varsigma m_\varsigma}^{l_\varsigma}(s;w)+S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N_{E_\varsigma n_\varsigma}^{l_\varsigma}(s;w)=N_{E_\varsigma m_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$

$\Leftrightarrow S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}N_{B_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;w)+S_{abl_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N_{A_\varsigma m_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;w)=N_{A_\varsigma l_\varsigma}^{j_\varsigma}(s;w)S_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;w)$ □

推论4.7.1.

$$\begin{cases}N_{C_\varsigma m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]=\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)N_{D_\varsigma n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{D_\varsigma B_\varsigma}\\ [\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}N_{k_\varsigma}^{C_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)=\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}N_{l_\varsigma}^{D_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}N_{C_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma(s-\frac{1}{2};w)]=\sigma(s-1;w)N_{D_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{D_\varsigma B_\varsigma}\\ [\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma(s-\frac{1}{2};w)]\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}N^{C_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)=\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}N^{D_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma(s-1;w)\end{cases}$$

推论4.7.2.

$$\begin{cases}N_{C_\varsigma m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]=S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)N_{D_\varsigma n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{D_\varsigma B_\varsigma}\\ [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}N_{k_\varsigma}^{C_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)=\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}N_{l_\varsigma}^{D_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}N_{C_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]=S_{ab}(s-1,\varsigma;w)N_{D_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{D_\varsigma B_\varsigma}\\ [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}N^{C_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)=\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}N^{D_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)S_{ab}(s-1,\varsigma;w)\end{cases}$$

4.8 推论：关于常数矩阵$X(s;w),\bar{X}(s;w)$的重要性质

推论4.8.1. $[X(s;w)]=(w+1)C_{2s-1+w}^{2s-1}\times C_{2s-2+w}^{2s-2},[\bar{X}(s;w)]=C_{2s-2+w}^{2s-2}\times(w+1)C_{2s-1+w}^{2s-1}$

推论4.8.2.

$$\begin{cases}\bar{X}(s;w)[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]X(s;w)=\sigma(s-1;w)\\ X(s;w)\sigma(s-1;w)\bar{X}(s;w)=[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]X(s;w)\bar{X}(s;w)\\ [X(s;w)\bar{X}(s;w),\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]=0\end{cases}$$

推论4.8.3.

$$\begin{cases}\bar{X}(s;w)[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]X(s;w)=S_{ab}(s-1,\varsigma;w)\\ X(s;w)S_{ab}(s,\varsigma-1,\varsigma;w)\bar{X}(s;w)=[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]X(s;w)\bar{X}(s;w)\\ [X(s;w)\bar{X}(s;w),S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]=0\end{cases}$$

推论4.8.4. $X^{A_\varsigma}(s;w)\sigma(s-\frac{1}{2};w)\bar{X}_{A_\varsigma}(s;w)=\frac{2s+w}{2s-1+w}\sigma(s-1;w)$

$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;w)I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)X(s;w)=\frac{2s+w}{2s-1+w}\sigma(s-1;w)$

推论4.8.5. $X^{A_\varsigma}(s;w)I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)\bar{X}_{A_\varsigma}(s;w)=\frac{2s+w}{2s-1+w}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;w)I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)X(s;w)=\frac{2s+w}{2s-1+w}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)$

4.9 矩阵$X(s;w),\bar{X}(s;w)$的常数不变张量性质

定理4.9.1. $X(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}X(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)}$

证明: $[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]X(s;w)=X(s;w)S_{ab}(s-1,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow 0=[\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]X(s;w)-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}X(s;w)S_{ab}(s-1,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow X(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}X(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)}$ □

定理4.9.2. $\bar{X}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)}\bar{X}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}$

证明: $\bar{X}(s;w)[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]=S_{ab}(s-1,\varsigma;w)\bar{X}(s;w)$
$\Leftrightarrow 0=\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)\bar{X}(s;w)-\bar{X}(s;w)[\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]$
$\Leftrightarrow \bar{X}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)}\bar{X}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}$ □

4.10 矩阵$X(s),\bar{X}(s)$的常数不变张量性质

定理4.10.1. $X(s)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}X(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1)}$

证明: $[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2})]X(s)=X(s)\sigma(s-1)$
$\Leftrightarrow 0=[(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2})]X(s)-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot X(s)\sigma(s-1)$
$\Leftrightarrow X(s)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}X(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1)}$ □

定理4.10.2. $\bar{X}(s)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1)}\bar{X}(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}$

证明: $\bar{X}(s)[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2})]=\sigma(s-1)\bar{X}(s)$
$\Leftrightarrow 0=(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1)\bar{X}(s)-\bar{X}(s)[(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2})]$
$\Leftrightarrow \bar{X}(s)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1)}\bar{X}(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}$ □

推论4.10.1. $[N(s),X(s)]=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}[N(s),X(s)][e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}\oplus e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1)}]$

推论4.10.2. $\begin{bmatrix}\bar{N}(s)\\\bar{X}(s)\end{bmatrix}=[e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}\oplus e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1)}]\begin{bmatrix}\bar{N}(s)\\\bar{X}(s)\end{bmatrix}e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}$

4.11 常数矩阵$\Omega(s;w),\sigma(s-1;w)$的置换性质

推论4.11.1.
$$\begin{cases}\Omega(s;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]X(s;w)=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]X(s;w)\sigma(s-1;w)\\\bar{X}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega(s;w)=\sigma(s-1;w)\bar{X}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\end{cases}$$

推论4.11.2.
$$\begin{cases}\sigma(s;w)=\bar{N}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega(s;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w)\\\sigma(s-1;w)=\bar{X}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega(s;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]X(s;w)\end{cases}$$

推论4.11.3.
$$\begin{cases}[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s;w)]^n=\bar{N}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)][\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)]^n[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w)\\[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-1;w)]^n=\bar{X}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)][\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)]^n[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]X(s;w)\end{cases}$$

推论4.11.4.
$$\begin{cases}e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s;w)}=\bar{N}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w)\\e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-1;w)}=\bar{X}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]X(s;w)\end{cases}$$

4.12 常数矩阵$\Omega(s-l;w),[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-l;w)]^n,e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-l;w)}$的同构性表示

推论4.12.1. $\Omega(s;w)=\Omega(s-1;w)\otimes I_{(w+1)^2}+I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\Omega(1;w)$

推论4.12.2.
$$\begin{cases}\Omega(s;w)I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{w+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};w)]X(1;w)\}=I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{w+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};w)]X(1;w)\}\Omega(s-1;w)\\ I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};w)]\}\Omega(s;w)=\Omega(s-1;w)I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};w)]\}\end{cases}$$

推论4.12.3.
$$\begin{cases}\Omega(s-1;w)=I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};w)]\}\Omega(s;w)I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{w+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};w)]X(1;w)\}\\ [\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-1;w)]^n=I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};w)]\}[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)]^nI_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{w+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};w)]X(1;w)\}\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-1;w)}=I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};w)]\}e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)}I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{w+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};w)]X(1;w)\}\end{cases}$$

定义4.12.1.
$$\begin{cases}T(s;w):=I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{w+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};w)]X(1;w)\}\\ \bar{T}(s;w):=I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};w)]\}=T^+(s;w)\end{cases}$$

推论4.12.4.
$$\begin{cases}\Omega(s-l;w)=\bar{T}(s-l+1;w)\cdot\cdot\bar{T}(s-1;w)\bar{T}(s;w)\Omega(s;w)T(s;w)T(s-1;w)\cdot\cdot T(s-l+1;w)\\ [\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-l;w)]^n=\bar{T}(s-l+1;w)\cdot\cdot\bar{T}(s-1;w)\bar{T}(s;w)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)]^nT(s;w)T(s-1;w)\cdot\cdot T(s-l+1;w)\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-l;w)}=\bar{T}(s-l+1;w)\cdot\cdot\bar{T}(s-1;w)\bar{T}(s;w)e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)}T(s;w)T(s-1;w)\cdot\cdot T(s-l+1;w)\end{cases}$$

推论4.12.5.
$$\begin{cases}\sigma(s-l;w)=\bar{\Gamma}(s-l;w)\bar{T}(s-l+1;w)\cdot\cdot\bar{T}(s;w)\Omega(s;w)T(s;w)\cdot\cdot T(s-l+1;w)\Gamma(s-l;w)\\ [\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-l;w)]^n=\bar{\Gamma}(s-l;w)\bar{T}(s-l+1;w)\cdot\cdot\bar{T}(s;w)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)]^nT(s;w)\cdot\cdot T(s-l+1;w)\Gamma(s-l;w)\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-l;w)}=\bar{\Gamma}(s-l;w)\bar{T}(s-l+1;w)\cdot\cdot\bar{T}(s;w)e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)}T(s;w)\cdot\cdot T(s-l+1;w)\Gamma(s-l;w)\end{cases}$$

5 完美常数不变张量$O^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s;w)$(存在$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}$为前提)

只有满足$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}=-\varepsilon_{B_\varsigma A_\varsigma}$反对称条件时，本章节内容才全部成立，否则只有部分成立。

5.1 完美常数不变张量$O^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s;w)$的引入

定义5.1.1. $O^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s;w):=2sX^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})N^{n_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\succ O(s;w),\bar{O}(s;w):=O^+(s;w)$

推论5.1.1. $[N(s;w)]=(w+1)C^{2s-1}_{2s-1+w}\times C^{2s}_{2s+w},[\bar{N}(s;w)]=C^{2s}_{2s+w}\times(w+1)C^{2s-1}_{2s-1+w}$

推论5.1.2. $[X(s;w)]=(w+1)C^{2s-1}_{2s-1+w}\times C^{2s-2}_{2s-2+w},[\bar{X}(s;w)]=C^{2s-2}_{2s-2+w}\times(w+1)C^{2s-1}_{2s-1+w}$

推论5.1.3. $[O(s;w)]=C^{2s-2}_{2s-2+w}\times C^{2s}_{2s+w},[\bar{O}(s;w)]=C^{2s}_{2s+w}\times C^{2s-2}_{2s-2+w}$

推论5.1.4.
$$\begin{cases}X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})N^{n_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w):=\frac{1}{2s}O^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s;w)\Leftrightarrow X^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{2s}O(s;w)\\ \bar{X}(s;w)\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}N(s;w)=\frac{1}{2s}O(s;w)\Leftrightarrow\bar{N}(s;w)\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}X(s;w)=\frac{1}{2s}O^+(s;w)\end{cases}$$

5.2 完美常数不变张量$O(s;w),\bar{O}(s;w)$的性质

定理5.2.1. $O(s;w)\cdot\sigma(s;w)=\sigma(s-1;w)\cdot O(s;w)[\Leftrightarrow]\sigma(s;w)\cdot O^+(s;w)=O^+(s;w)\cdot\sigma(s-1;w)$

证明：$O(s;w)\cdot\sigma(s;w)$
$=2s\bar{X}(s;w)\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}N(s;w)\cdot\sigma(s;w)$
$=2s\bar{X}(s;w)[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}]\cdot[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w)$
$=\bar{X}(s;w)[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}+I_{w+1}\otimes\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]\cdot[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}]N(s;w)$
$=2s\sigma(s-1;w)\bar{X}(s;w)\cdot[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}]N(s;w)$
$=\sigma(s-1;w)\cdot O(s;w)$ □

证明: $O(s;w)\cdot O^{+}(s;w)=\bar{X}(s;w)\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}N(s;w)\cdot\bar{N}(s;w)\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}X(s;w)$ □

证明: $O^{+}(s;w)\cdot O(s;w)=\bar{N}(s;w)\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}X(s;w)\cdot\bar{X}(s;w)\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{2s-1+w}^{2s-1}}N(s;w)$ □

5.3 矩阵$O(s;w),\bar{O}(s;w)$的常数不变张量性质

推论5.3.1. $$\begin{cases}O^{\alpha_\varsigma}(s;w)=[e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(1,\varsigma;w)}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)}O^{\beta_\varsigma}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\\O^{+\alpha'_\varsigma}(s;w)=[e^{\frac{i}{2}\vartheta^{*ab}S_{ab}(1,\varsigma;w)}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}e^{\frac{i}{2}\vartheta^{*ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}O^{\beta_\varsigma}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{*ab}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)}\end{cases}$$

5.4 矩阵$O(s),\bar{O}(s)$的常数不变张量性质

推论5.4.1. $$\begin{cases}O^{\alpha_\varsigma}(s)=[e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1)}O^{\beta_\varsigma}(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}\\O^{+\alpha'_\varsigma}(s)=[e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha'_\varsigma}{}^{\beta'_\varsigma}e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}O^{+\beta'_\varsigma}(s)e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1)}\end{cases}$$

第三章　范德蒙矩阵的数学分析

自我评述：我运用范德蒙行列式的相关知识，一举解决了多个三年来未彻底求解的代数问题。正所谓一点突破，则全面突破，并以点带面，一系列问题得到了彻底地解决。前面多个章节的相关问题都得到了完美圆满的解决，极大推进了数学和物理的研究进度和深度，获得了大量有用的成果。具体包括三大问题的完美解决：一是三个二元通项公式的完美解决(第四章)；二是无质量任意自旋粒子对易或反对易函数的完美解决(第四章)；三是两个自旋展开式的完美解决(第十六章)。在此基础上并对照之前用其它多种方法解得的结论，一一对比获得了一系列新的组合恒等式，这些恒等式对后续的数学物理研究十分有价值，是一个个新的数学利器。本章隐含了很多新的数学结构，需要深入发掘，也许需要几个星期，也许需要几个月，甚至需要几年。所以慢慢来、不要急，一步一个脚印，稳步往前走。可以先放一放，先解决其它更重要的问题后，再来解决此问题，总之一切随缘。

1 一般范德蒙矩阵的数学分析 [4]

1.1 基础-$D^0_{n+1}(x_0,\cdot\cdot,x_n)$型范德蒙矩阵及其性质

定理1.1.1. $D^0_{n+1}(x_0,\cdot\cdot,x_n)=\begin{vmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \cdot\cdot & x_0^j & \cdot\cdot & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & \cdot\cdot & x_1^j & \cdot\cdot & x_1^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_i^0 & x_i^1 & \cdot\cdot & x_i^j & \cdot\cdot & x_i^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_n^0 & x_n^1 & \cdot\cdot & x_n^j & \cdot\cdot & x_n^n \end{vmatrix}=\prod_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)=\prod_{i=0}^{n}\prod_{j=i+1}^{n}(x_j-x_i)$

定理1.1.2. $(-1)^{i+j}A_{ij}(x_0,\cdot\cdot,\overline{x_i},\cdot\cdot,x_n)=\frac{\prod_{i'=0}^{n}\prod_{j'=i'+1}^{n}(x_{j'}-x_{i'})}{\prod_{k(\neq i)=0}^{n}(x_i-x_k)}\{[\prod_{k(\neq i)=0}^{n}(x_i-x_k)]_{x_i^j\text{的系数}}\}=\frac{(-1)^{n-j}C^{n-j}_{\{x_0\cdot\cdot\overline{x_i}\cdot\cdot x_n\}}D^0_{n+1}(x_0,\cdot\cdot,x_n)}{\prod_{k(\neq i)=0}^{n}(x_i-x_k)}$

定理1.1.3. $\begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \cdot\cdot & x_0^j & \cdot\cdot & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & \cdot\cdot & x_1^j & \cdot\cdot & x_1^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_i^0 & x_i^1 & \cdot\cdot & x_i^j & \cdot\cdot & x_i^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_n^0 & x_n^1 & \cdot\cdot & x_n^j & \cdot\cdot & x_n^n \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}A_{ji}(x_0,\cdot\cdot,\overline{x_i},\cdot\cdot,x_n)}{D^0_{n+1}(x_0,\cdot\cdot,x_n)}=\frac{(-1)^{n-i}C^{n-i}_{\{x_0\cdot\cdot\overline{x_j}\cdot\cdot x_n\}}}{\prod_{k(\neq j)=0}^{n}(x_j-x_k)};i,j=0,1,\cdot\cdot,n$

定理1.1.4. $\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-l}x_i^lC^{n-l}_{\{x_0\cdot\cdot\overline{x_j}\cdot\cdot x_n\}}}{\prod_{k(\neq j)=0}^{n}(x_j-x_k)}=\delta_{ij},\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}x_l^jC^{n-i}_{\{x_0\cdot\cdot\overline{x_l}\cdot\cdot x_n\}}}{\prod_{k(\neq l)=0}^{n}(x_l-x_k)}=\delta_{ij}$

小结如下：

推论1.1.1. $\begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \cdot\cdot & x_0^j & \cdot\cdot & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & \cdot\cdot & x_1^j & \cdot\cdot & x_1^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_i^0 & x_i^1 & \cdot\cdot & x_i^j & \cdot\cdot & x_i^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_n^0 & x_n^1 & \cdot\cdot & x_n^j & \cdot\cdot & x_n^n \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{n-i}C^{n-i}_{\{x_0\cdot\cdot\overline{x_j}\cdot\cdot x_n\}}}{\prod_{k(\neq j)=0}^{n}(x_j-x_k)},\begin{bmatrix} x_n^0 & x_n^1 & \cdot\cdot & x_n^j & \cdot\cdot & x_n^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_i^0 & x_i^1 & \cdot\cdot & x_i^j & \cdot\cdot & x_i^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_1^0 & x_1^1 & \cdot\cdot & x_1^j & \cdot\cdot & x_1^n \\ x_0^0 & x_0^1 & \cdot\cdot & x_0^j & \cdot\cdot & x_0^n \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{n-i}C^{n-i}_{\{x_0\cdot\cdot\overline{x_{n-j}}\cdot\cdot x_n\}}}{\prod_{k(\neq n-j)=0}^{n}(x_{n-j}-x_k)}$

推论1.1.2. $\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdot\cdot & x_0^{n-j} & \cdot\cdot & x_0^0 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdot\cdot & x_1^{n-j} & \cdot\cdot & x_1^0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_i^n & x_i^{n-1} & \cdot\cdot & x_i^{n-j} & \cdot\cdot & x_i^0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdot\cdot & x_n^{n-j} & \cdot\cdot & x_n^0 \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{i}C^{i}_{\{x_0\cdot\cdot\overline{x_j}\cdot\cdot x_n\}}}{\prod_{k(\neq j)=0}^{n}(x_j-x_k)},\begin{bmatrix} x_n^n & x_n^{n-1} & \cdot\cdot & x_n^{n-j} & \cdot\cdot & x_n^0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_i^n & x_i^{n-1} & \cdot\cdot & x_i^{n-j} & \cdot\cdot & x_i^0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdot\cdot & x_1^{n-j} & \cdot\cdot & x_1^0 \\ x_0^n & x_0^{n-1} & \cdot\cdot & x_0^{n-j} & \cdot\cdot & x_0^0 \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{i}C^{i}_{\{x_0\cdot\cdot\overline{x_{n-j}}\cdot\cdot x_n\}}}{\prod_{k(\neq n-j)=0}^{n}(x_{n-j}-x_k)}$

1.2 推论-$D^r_{n+1}(x_0,\cdot\cdot,x_n)$型范德蒙矩阵及其性质

推论1.2.1.

$$D^r_{n+1}(x_0,\cdot\cdot,x_n)=\begin{vmatrix} x_0^{0+r} & x_0^{1+r} & \cdot\cdot & x_0^{j+r} & \cdot\cdot & x_0^{n+r} \\ x_1^{0+r} & x_1^{1+r} & \cdot\cdot & x_1^{j+r} & \cdot\cdot & x_1^{n+r} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_i^{0+r} & x_i^{1+r} & \cdot\cdot & x_i^{j+r} & \cdot\cdot & x_i^{n+r} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_n^{0+r} & x_n^{1+r} & \cdot\cdot & x_n^{j+r} & \cdot\cdot & x_n^{n+r} \end{vmatrix}=(\prod_{k=0}^{n}x_k^r)\begin{vmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \cdot\cdot & x_0^j & \cdot\cdot & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & \cdot\cdot & x_1^j & \cdot\cdot & x_1^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_i^0 & x_i^1 & \cdot\cdot & x_i^j & \cdot\cdot & x_i^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_n^0 & x_n^1 & \cdot\cdot & x_n^j & \cdot\cdot & x_n^n \end{vmatrix}=(\prod_{k=0}^{n}x_k^r)[\prod_{i=0}^{n}\prod_{j=i+1}^{n}(x_j-x_i)]$$

推论1.2.2.

$$\begin{bmatrix} x_0^{0+r} & x_0^{1+r} & \cdot\cdot & x_0^{j+r} & \cdot\cdot & x_0^{n+r} \\ x_1^{0+r} & x_1^{1+r} & \cdot\cdot & x_1^{j+r} & \cdot\cdot & x_1^{n+r} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_i^{0+r} & x_i^{1+r} & \cdot\cdot & x_i^{j+r} & \cdot\cdot & x_i^{n+r} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_n^{0+r} & x_n^{1+r} & \cdot\cdot & x_n^{j+r} & \cdot\cdot & x_n^{n+r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=(\begin{bmatrix} x_0^r & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & x_1^r & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & x_i^r & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & x_n^r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \cdot\cdot & x_0^j & \cdot\cdot & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & \cdot\cdot & x_1^j & \cdot\cdot & x_1^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_i^0 & x_i^1 & \cdot\cdot & x_i^j & \cdot\cdot & x_i^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_n^0 & x_n^1 & \cdot\cdot & x_n^j & \cdot\cdot & x_n^n \end{bmatrix})^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{n-i}C^{n-i}_{\{x_0\cdot\cdot\overline{x_j}\cdot\cdot x_n\}}}{x_j^r\prod_{k(\neq j)=0}^{n}(x_j-x_k)};i,j=0,1,\cdot\cdot,n$$

推论1.2.3. $\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-l}x_i^{l+r}C^{n-l}_{\{x_0\cdot\cdot\overline{x_j}\cdot\cdot x_n\}}}{x_j^r\prod\limits_{k(\neq j)=0}^{n}(x_j-x_k)}=\delta_{ij},\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}x_l^{j+r}C^{n-i}_{\{x_0\cdot\cdot\overline{x_l}\cdot\cdot x_n\}}}{x_l^r\prod\limits_{k(\neq l)=0}^{n}(x_l-x_k)}=\delta_{ij}$

小结如下：

推论1.2.4.

$$\begin{bmatrix} x_0^{0+r} & x_0^{1+r} & \cdot\cdot & x_0^{j+r} & \cdot\cdot & x_0^{n+r}\\ x_1^{0+r} & x_1^{1+r} & \cdot\cdot & x_1^{j+r} & \cdot\cdot & x_1^{n+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_i^{0+r} & x_i^{1+r} & \cdot\cdot & x_i^{j+r} & \cdot\cdot & x_i^{n+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_n^{0+r} & x_n^{1+r} & \cdot\cdot & x_n^{j+r} & \cdot\cdot & x_n^{n+r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{n-i}C^{n-i}_{\{x_0\cdot\cdot\overline{x_j}\cdot\cdot x_n\}}}{x_j^r\prod\limits_{k(\neq j)=0}^{n}(x_j-x_k)},\begin{bmatrix} x_n^{0+r} & x_n^{1+r} & \cdot\cdot & x_n^{j+r} & \cdot\cdot & x_n^{n+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_i^{0+r} & x_i^{1+r} & \cdot\cdot & x_i^{j+r} & \cdot\cdot & x_i^{n+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_1^{0+r} & x_1^{1+r} & \cdot\cdot & x_1^{j+r} & \cdot\cdot & x_1^{n+r}\\ x_0^{0+r} & x_0^{1+r} & \cdot\cdot & x_0^{j+r} & \cdot\cdot & x_0^{n+r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{n-i}C^{n-i}_{\{x_0\cdot\cdot\overline{x_{n-j}}\cdot\cdot x_n\}}}{x_{n-j}^r\prod\limits_{k(\neq n-j)=0}^{n}(x_{n-j}-x_k)}$$

$$\begin{bmatrix} x_0^{n+r} & x_0^{n-1+r} & \cdot\cdot & x_0^{n-j+r} & \cdot\cdot & x_0^{0+r}\\ x_1^{n+r} & x_1^{n-1+r} & \cdot\cdot & x_1^{n-j+r} & \cdot\cdot & x_1^{0+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_i^{n+r} & x_i^{n-1+r} & \cdot\cdot & x_i^{n-j+r} & \cdot\cdot & x_i^{0+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_n^{n+r} & x_n^{n-1+r} & \cdot\cdot & x_n^{n-j+r} & \cdot\cdot & x_n^{0+r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{i}C^{i}_{\{x_0\cdot\cdot\overline{x_j}\cdot\cdot x_n\}}}{x_j^r\prod\limits_{k(\neq j)=0}^{n}(x_j-x_k)},\begin{bmatrix} x_n^{n+r} & x_n^{n-1+r} & \cdot\cdot & x_n^{n-j+r} & \cdot\cdot & x_n^{0+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_i^{n+r} & x_i^{n-1+r} & \cdot\cdot & x_i^{n-j+r} & \cdot\cdot & x_i^{0+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_1^{n+r} & x_1^{n-1+r} & \cdot\cdot & x_1^{n-j+r} & \cdot\cdot & x_1^{0+r}\\ x_0^{n+r} & x_0^{n-1+r} & \cdot\cdot & x_0^{n-j+r} & \cdot\cdot & x_0^{0+r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{i}C^{i}_{\{x_0\cdot\cdot\overline{x_{n-j}}\cdot\cdot x_n\}}}{x_{n-j}^r\prod\limits_{k(\neq n-j)=0}^{n}(x_{n-j}-x_k)}$$

1.3 推论-$D^r_{n+1}(x_0^2,\cdot\cdot,x_n^2)$型范德蒙矩阵及其性质

推论1.3.1.

$$D^r_{n+1}(x_0^2,\cdot\cdot,x_n^2)=\begin{vmatrix} x_0^{0+r} & x_0^{2+r} & \cdot\cdot & x_0^{2j+r} & \cdot\cdot & x_0^{2n+r}\\ x_1^{0+r} & x_1^{2+r} & \cdot\cdot & x_1^{2j+r} & \cdot\cdot & x_1^{2n+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_i^{0+r} & x_i^{2+r} & \cdot\cdot & x_i^{2j+r} & \cdot\cdot & x_i^{2n+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_n^{0+r} & x_n^{2+r} & \cdot\cdot & x_n^{2j+r} & \cdot\cdot & x_n^{2n+r} \end{vmatrix}=(\prod_{k=0}^{n}x_k^r)\begin{vmatrix} x_0^{0} & x_0^{2} & \cdot\cdot & x_0^{2j} & \cdot\cdot & x_0^{2n}\\ x_1^{0} & x_1^{2} & \cdot\cdot & x_1^{2j} & \cdot\cdot & x_1^{2n}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_i^{0} & x_i^{2} & \cdot\cdot & x_i^{2j} & \cdot\cdot & x_i^{2n}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_n^{0} & x_n^{2} & \cdot\cdot & x_n^{2j} & \cdot\cdot & x_n^{2n} \end{vmatrix}=(\prod_{k=0}^{n}x_k^r)[\prod_{i=0}^{n}\prod_{j=i+1}^{n}(x_j^2-x_i^2)]$$

推论1.3.2.

$$\begin{bmatrix} x_0^{0+r} & x_0^{2+r} & \cdot\cdot & x_0^{2j+r} & \cdot\cdot & x_0^{2n+r}\\ x_1^{0+r} & x_1^{2+r} & \cdot\cdot & x_1^{2j+r} & \cdot\cdot & x_1^{2n+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_i^{0+r} & x_i^{2+r} & \cdot\cdot & x_i^{2j+r} & \cdot\cdot & x_i^{2n+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_n^{0+r} & x_n^{2+r} & \cdot\cdot & x_n^{2j+r} & \cdot\cdot & x_n^{2n+r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=(\begin{bmatrix} x_0^r & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 0\\ 0 & x_1^r & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 0\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ 0 & 0 & \cdot\cdot & x_i^r & \cdot\cdot & 0\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & x_n^r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0^{0} & x_0^{2} & \cdot\cdot & x_0^{2j} & \cdot\cdot & x_0^{2n}\\ x_1^{0} & x_1^{2} & \cdot\cdot & x_1^{2j} & \cdot\cdot & x_1^{2n}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_i^{0} & x_i^{2} & \cdot\cdot & x_i^{2j} & \cdot\cdot & x_i^{2n}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_n^{0} & x_n^{2} & \cdot\cdot & x_n^{2j} & \cdot\cdot & x_n^{2n} \end{bmatrix})^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{n-i}C^{n-i}_{\{x_0^2\cdot\cdot\overline{x_j^2}\cdot\cdot x_n^2\}}}{x_j^r\prod\limits_{k(\neq j)=0}^{n}(x_j^2-x_k^2)};i,j=0,1,\cdot\cdot,n$$

推论1.3.3. $\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-l}x_i^{2l+r}C^{n-l}_{\{x_0^2\cdot\cdot\overline{x_j^2}\cdot\cdot x_n^2\}}}{x_j^r\prod\limits_{k(\neq j)=0}^{n}(x_j^2-x_k^2)}=\delta_{ij},\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}x_l^{2j+r}C^{n-i}_{\{x_0^2\cdot\cdot\overline{x_l^2}\cdot\cdot x_n^2\}}}{x_l^r\prod\limits_{k(\neq l)=0}^{n}(x_l^2-x_k^2)}=\delta_{ij}$

小结如下：

推论1.3.4.

$$\begin{bmatrix} x_0^{0+r} & x_0^{2+r} & \cdot\cdot & x_0^{2j+r} & \cdot\cdot & x_0^{2n+r}\\ x_1^{0+r} & x_1^{2+r} & \cdot\cdot & x_1^{2j+r} & \cdot\cdot & x_1^{2n+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_i^{0+r} & x_i^{2+r} & \cdot\cdot & x_i^{2j+r} & \cdot\cdot & x_i^{2n+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_n^{0+r} & x_n^{2+r} & \cdot\cdot & x_n^{2j+r} & \cdot\cdot & x_n^{2n+r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{n-i}C^{n-i}_{\{x_0^2\cdot\cdot\overline{x_j^2}\cdot\cdot x_n^2\}}}{x_j^r\prod\limits_{k(\neq j)=0}^{n}(x_j^2-x_k^2)},\begin{bmatrix} x_n^{0+r} & x_n^{2+r} & \cdot\cdot & x_n^{2j+r} & \cdot\cdot & x_n^{2n+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_i^{0+r} & x_i^{2+r} & \cdot\cdot & x_i^{2j+r} & \cdot\cdot & x_i^{2n+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_1^{0+r} & x_1^{2+r} & \cdot\cdot & x_1^{2j+r} & \cdot\cdot & x_1^{2n+r}\\ x_0^{0+r} & x_0^{2+r} & \cdot\cdot & x_0^{2j+r} & \cdot\cdot & x_0^{2n+r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{n-i}C^{n-i}_{\{x_0^2\cdot\cdot\overline{x_{n-j}^2}\cdot\cdot x_n^2\}}}{x_{n-j}^r\prod\limits_{k(\neq n-j)=0}^{n}(x_{n-j}^2-x_k^2)}$$

$$\begin{bmatrix} x_0^{2n+r} & x_0^{2n-2+r} & \cdot\cdot & x_0^{2n-2j+r} & \cdot\cdot & x_0^{0+r}\\ x_1^{2n+r} & x_1^{2n-2+r} & \cdot\cdot & x_1^{2n-2j+r} & \cdot\cdot & x_1^{0+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_i^{2n+r} & x_i^{2n-2+r} & \cdot\cdot & x_i^{2n-2j+r} & \cdot\cdot & x_i^{0+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_n^{2n+r} & x_n^{2n-2+r} & \cdot\cdot & x_n^{2n-2j+r} & \cdot\cdot & x_n^{0+r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{i}C^{i}_{\{x_0^2\cdot\cdot\overline{x_j^2}\cdot\cdot x_n^2\}}}{x_j^r\prod\limits_{k(\neq j)=0}^{n}(x_j^2-x_k^2)},\begin{bmatrix} x_n^{2n+r} & x_n^{2n-2+r} & \cdot\cdot & x_n^{2n-2j+r} & \cdot\cdot & x_n^{0+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_i^{2n+r} & x_i^{2n-2+r} & \cdot\cdot & x_i^{2n-2j+r} & \cdot\cdot & x_i^{0+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_1^{2n+r} & x_1^{2n-2+r} & \cdot\cdot & x_1^{2n-2j+r} & \cdot\cdot & x_1^{0+r}\\ x_0^{2n+r} & x_0^{2n-2+r} & \cdot\cdot & x_0^{2n-2j+r} & \cdot\cdot & x_0^{0+r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{i}C^{i}_{\{x_0^2\cdot\cdot\overline{x_{n-j}^2}\cdot\cdot x_n^2\}}}{x_{n-j}^r\prod\limits_{k(\neq n-j)=0}^{n}(x_{n-j}^2-x_k^2)}$$

1.4 推论-$D^r_{n+1}(x_0^m,\cdot\cdot,x_n^m)$型范德蒙矩阵及其性质

推论1.4.1.

$$D^r_{n+1}(x_0^m,\cdot\cdot,x_n^m)=\begin{vmatrix} x_0^{0+r} & x_0^{m+r} & \cdot\cdot & x_0^{mj+r} & \cdot\cdot & x_0^{mn+r}\\ x_1^{0+r} & x_1^{m+r} & \cdot\cdot & x_1^{mj+r} & \cdot\cdot & x_1^{mn+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_i^{0+r} & x_i^{m+r} & \cdot\cdot & x_i^{mj+r} & \cdot\cdot & x_i^{mn+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_n^{0+r} & x_n^{m+r} & \cdot\cdot & x_n^{mj+r} & \cdot\cdot & x_n^{mn+r} \end{vmatrix}=(\prod_{k=0}^{n}x_k^r)\begin{vmatrix} x_0^{0} & x_0^{m} & \cdot\cdot & x_0^{mj} & \cdot\cdot & x_0^{mn}\\ x_1^{0} & x_1^{m} & \cdot\cdot & x_1^{mj} & \cdot\cdot & x_1^{mn}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_i^{0} & x_i^{m} & \cdot\cdot & x_i^{mj} & \cdot\cdot & x_i^{mn}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_n^{0} & x_n^{m} & \cdot\cdot & x_n^{mj} & \cdot\cdot & x_n^{mn} \end{vmatrix}=(\prod_{k=0}^{n}x_k^r)[\prod_{i=0}^{n}\prod_{j=i+1}^{n}(x_j^m-x_i^m)]$$

推论1.4.2.

$$\begin{bmatrix} x_0^{0+r} & x_0^{m+r} & \cdot\cdot & x_0^{mj+r} & \cdot\cdot & x_0^{mn+r}\\ x_1^{0+r} & x_1^{m+r} & \cdot\cdot & x_1^{mj+r} & \cdot\cdot & x_1^{mn+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_i^{0+r} & x_i^{m+r} & \cdot\cdot & x_i^{mj+r} & \cdot\cdot & x_i^{mn+r}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_n^{0+r} & x_n^{m+r} & \cdot\cdot & x_n^{mj+r} & \cdot\cdot & x_n^{mn+r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=(\begin{bmatrix} x_0^r & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 0\\ 0 & x_1^r & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 0\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ 0 & 0 & \cdot\cdot & x_i^r & \cdot\cdot & 0\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & x_n^r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0^{0} & x_0^{m} & \cdot\cdot & x_0^{mj} & \cdot\cdot & x_0^{mn}\\ x_1^{0} & x_1^{m} & \cdot\cdot & x_1^{mj} & \cdot\cdot & x_1^{mn}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_i^{0} & x_i^{m} & \cdot\cdot & x_i^{mj} & \cdot\cdot & x_i^{mn}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ x_n^{0} & x_n^{m} & \cdot\cdot & x_n^{mj} & \cdot\cdot & x_n^{mn} \end{bmatrix})^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{n-i}C^{n-i}_{\{x_0^m\cdot\cdot\overline{x_j^m}\cdot\cdot x_n^m\}}}{x_j^r\prod\limits_{k(\neq j)=0}^{n}(x_j^m-x_k^m)};i,j=0,1,\cdot\cdot,n$$

推论1.4.3. $\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-l}x_i^{ml+r}C^{n-l}_{\{x_0^m\cdot\cdot\overline{x_j^m}\cdot\cdot x_n^m\}}}{x_j^r\prod\limits_{k(\neq j)=0}^{n}(x_j^m-x_k^m)}=\delta_{ij},\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}x_l^{mj+r}C^{n-i}_{\{x_0^m\cdot\cdot\overline{x_l^m}\cdot\cdot x_n^m\}}}{x_l^r\prod\limits_{k(\neq l)=0}^{n}(x_l^m-x_k^m)}=\delta_{ij}$

小结如下：

推论1.4.4.

$$\begin{bmatrix} x_0^{0+r} & x_0^{m+r} & \cdot\cdot & x_0^{mj+r} & \cdot\cdot & x_0^{mn+r} \\ x_1^{0+r} & x_1^{m+r} & \cdot\cdot & x_1^{mj+r} & \cdot\cdot & x_1^{mn+r} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_i^{0+r} & x_i^{m+r} & \cdot\cdot & x_i^{mj+r} & \cdot\cdot & x_i^{mn+r} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_n^{0+r} & x_n^{m+r} & \cdot\cdot & x_n^{mj+r} & \cdot\cdot & x_n^{mn+r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{n-i}C^{n-i}_{\{x_0^m\cdot\cdot\overline{x_j^m}\cdot\cdot x_n^m\}}}{x_j^r\prod\limits_{k(\neq j)=0}^{n}(x_j^m-x_k^m)},\begin{bmatrix} x_n^{0+r} & x_n^{m+r} & \cdot\cdot & x_n^{mj+r} & \cdot\cdot & x_n^{mn+r} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_i^{0+r} & x_i^{m+r} & \cdot\cdot & x_i^{mj+r} & \cdot\cdot & x_i^{mn+r} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_1^{0+r} & x_1^{m+r} & \cdot\cdot & x_1^{mj+r} & \cdot\cdot & x_1^{mn+r} \\ x_0^{0+r} & x_0^{m+r} & \cdot\cdot & x_0^{mj+r} & \cdot\cdot & x_0^{mn+r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{n-i}C^{n-i}_{\{x_0^m\cdot\cdot\overline{x_{n-j}^m}\cdot\cdot x_n^m\}}}{x_{n-j}^r\prod\limits_{k(\neq n-j)=0}^{n}(x_{n-j}^m-x_k^m)}$$

$$\begin{bmatrix} x_0^{mn+r} & x_0^{mn-m+r} & \cdot\cdot & x_0^{mn-mj+r} & \cdot\cdot & x_0^{0+r} \\ x_1^{mn+r} & x_1^{mn-m+r} & \cdot\cdot & x_1^{mn-mj+r} & \cdot\cdot & x_1^{0+r} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_i^{mn+r} & x_i^{mn-m+r} & \cdot\cdot & x_i^{mn-mj+r} & \cdot\cdot & x_i^{0+r} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_n^{mn+r} & x_n^{mn-m+r} & \cdot\cdot & x_n^{mn-mj+r} & \cdot\cdot & x_n^{0+r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{i}C^{i}_{\{x_0^m\cdot\cdot\overline{x_j^m}\cdot\cdot x_n^m\}}}{x_j^r\prod\limits_{k(\neq j)=0}^{n}(x_j^m-x_k^m)},\begin{bmatrix} x_n^{mn+r} & x_n^{mn-m+r} & \cdot\cdot & x_n^{mn-mj+r} & \cdot\cdot & x_n^{0+r} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_i^{mn+r} & x_i^{mn-m+r} & \cdot\cdot & x_i^{mn-mj+r} & \cdot\cdot & x_i^{0+r} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_1^{mn+r} & x_1^{mn-m+r} & \cdot\cdot & x_1^{mn-mj+r} & \cdot\cdot & x_1^{0+r} \\ x_0^{mn+r} & x_0^{mn-m+r} & \cdot\cdot & x_0^{mn-mj+r} & \cdot\cdot & x_0^{0+r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{i}C^{i}_{\{x_0^m\cdot\cdot\overline{x_{n-j}^m}\cdot\cdot x_n^m\}}}{x_{n-j}^r\prod\limits_{k(\neq n-j)=0}^{n}(x_{n-j}^m-x_k^m)}$$

2 各种范德蒙自旋矩阵的数学分析

2.1 推论-$D^r_{n-r+1}(s)$型范德蒙自旋矩阵及其性质

引理2.1.1. $[\prod\limits_{i=0}^{n-r}\prod\limits_{j=i+1}^{n-r}(i-j)]=(-1)^{(n-r)(n-r+1)/2}(\prod\limits_{i=0}^{n-r}i!)$

证明: $[\prod\limits_{i=0}^{n-r}\prod\limits_{j=i+1}^{n-r}(i-j)]=(-1)^{(n-r)(n-r+1)/2}[\prod\limits_{i=0}^{n-r}\prod\limits_{j=i+1}^{n-r}(j-i)]$

$=(-1)^{(n-r)(n-r+1)/2}[\prod\limits_{i=0}^{n-r}(n-r-i)!]=(-1)^{(n-r)(n-r+1)/2}(\prod\limits_{i=0}^{n-r}i!)$ □

引理2.1.2. $\prod\limits_{k(\neq j-r)=0}^{n-r}(k-j+r)=(-1)^{j-r}(n-j)!(j-r)!$

证明: $\prod\limits_{k(\neq j-r)=0}^{n-r}(k-j+r)=\{\prod\limits_{k=0}^{j-r-1}[k-(j-r)]\}\{\prod\limits_{k=j-r+1}^{n-r}[k-(j-r)]\}$

$=(-1)^{j-r}[\prod\limits_{k=0}^{j-r-1}(j-r-k)](\prod\limits_{k=1}^{n-j}k)=(-1)^{j-r}(\prod\limits_{k=1}^{j-r}k)(\prod\limits_{k=1}^{n-j}k)=(-1)^{j-r}(n-j)!(j-r)!$ □

引理2.1.3. $\prod\limits_{k(\neq l)=0}^{n-r}(k-l)=(-1)^{l}(n-r-l)!l!$

证明: $\prod\limits_{k(\neq l)=0}^{n-r}(k-l)=\{\prod\limits_{k=0}^{l-1}[k-l]\}\{\prod\limits_{k=l+1}^{n-r}[k-l]\}$

$=(-1)^{l}[\prod\limits_{k=0}^{l-1}(l-k)](\prod\limits_{k=1}^{n-r-l}k)=(-1)^{l}(\prod\limits_{k=1}^{l}k)(\prod\limits_{k=1}^{n-r-l}k)=(-1)^{l}(n-r-l)!l!$ □

推论2.1.1.

$$D^r_{n-r+1}(s)=\begin{vmatrix} s^r & \cdot\cdot & s^{j+r} & \cdot\cdot & s^{n-1} & s^n \\ (s-1)^r & \cdot\cdot & (s-1)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-1)^{n-1} & (s-1)^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i)^r & \cdot\cdot & (s-i)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-i)^{n-1} & (s-i)^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-n+r)^r & \cdot\cdot & (s-n+r)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^{n-1} & (s-n+r)^n \end{vmatrix}=(-1)^{(n-r)(n-r+1)/2}[\prod_{k=0}^{n-r}(s-k)^r](\prod_{i=0}^{n-r}i!)$$

证明:

$$D^r_{n-r+1}(s)=\begin{vmatrix} s^r & \cdot\cdot & s^{j-1+r} & s^{j+r} & s^{j+1+r} & \cdot\cdot & s^{n-1} & s^n \\ (s-1)^r & \cdot\cdot & (s-1)^{j-1+r} & (s-1)^{j+r} & (s-1)^{j+1+r} & \cdot\cdot & (s-1)^{n-1} & (s-1)^n \\ (s-2)^r & \cdot\cdot & (s-2)^{j-1+r} & (s-2)^{j+r} & (s-2)^{j+1+r} & \cdot\cdot & (s-2)^{n-1} & (s-2)^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i)^r & \cdot\cdot & (s-i)^{j-1+r} & (s-i)^{j+r} & (s-i)^{j+1+r} & \cdot\cdot & (s-i)^{n-1} & (s-i)^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-n+r)^r & \cdot\cdot & (s-n+r)^{j-1+r} & (s-n+r)^{j+r} & (s-n+r)^{j+1+r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^{n-1} & (s-n+r)^n \end{vmatrix}$$

$=[\prod\limits_{k=0}^{n-r}(s-k)^r]\{\prod\limits_{i=0}^{n-r}\prod\limits_{j=i+1}^{n-r}[(s-j)-(s-i)]\}$

$=[\prod\limits_{k=0}^{n-r}(s-k)^r][\prod\limits_{i=0}^{n-r}\prod\limits_{j=i+1}^{n-r}(i-j)]=(-1)^{(n-r)(n-r+1)/2}[\prod\limits_{k=0}^{n-r}(s-k)^r](\prod\limits_{i=0}^{n-r}i!)$ □

推论2.1.2.

$$\begin{bmatrix} s^r & \cdot\cdot & s^{j+r} & \cdot\cdot & s^n \\ (s-1)^r & \cdot\cdot & (s-1)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-1)^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i)^r & \cdot\cdot & (s-i)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-i)^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-n+r)^r & \cdot\cdot & (s-n+r)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^n \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = \frac{C^{n-r-i}_{\{s\cdot\cdot\overline{(s-j)}\cdot\cdot(s-n+r)\}}C^j_{n-r}}{(-1)^{n-r-i-j}(s-j)^r(n-r)!}; i,j=0,1,\cdot\cdot,n-r$$

证明:

$$\begin{bmatrix} s^r & \cdot\cdot & s^{j+r} & \cdot\cdot & s^n \\ (s-1)^r & \cdot\cdot & (s-1)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-1)^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i)^r & \cdot\cdot & (s-i)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-i)^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-n+r)^r & \cdot\cdot & (s-n+r)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^n \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = \frac{(-1)^{n-r-i}C^{n-r-i}_{\{s\cdot\cdot\overline{(s-j)}\cdot\cdot(s-n+r)\}}}{(s-j)^r\prod\limits_{k(\neq j)=0}^{n-r}[(s-j)-(s-k)]} = \frac{(-1)^{n-r-i}C^{n-r-i}_{\{s\cdot\cdot\overline{(s-j)}\cdot\cdot(s-n+r)\}}}{(s-j)^r(-1)^j(n-j)!(j)!}$$

$$= \frac{(-1)^{n-r-i-j}C^{n-r-i}_{\{s\cdot\cdot\overline{(s-j)}\cdot\cdot(s-n+r)\}}C^j_{n-r}}{(s-j)^r(n-r)!}$$ □

推论2.1.3. $\sum\limits_{l=0}^{n-r}\frac{(-1)^{n-r-j-l}(s-i)^{r+l}C^{n-r-l}_{\{s\cdot\cdot\overline{(s-j)}\cdot\cdot(s-n+r)\}}C^j_{n-r}}{(s-j)^r(n-r)!} = \delta_{ij}, \sum\limits_{l=0}^{n-r}\frac{(-1)^{n-r-i-l}(s-l)^{j+r}C^{n-r-i}_{\{s\cdot\cdot\overline{(s-l)}\cdot\cdot(s-n+r)\}}C^l_{n-r}}{(s-l)^r(n-r)!} = \delta_{ij}$

小结如下：

推论2.1.4.

$$\begin{bmatrix} s^r & \cdot\cdot & s^{j+r} & \cdot\cdot & s^n \\ (s-1)^r & \cdot\cdot & (s-1)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-1)^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i)^r & \cdot\cdot & (s-i)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-i)^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-n+r)^r & \cdot\cdot & (s-n+r)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^n \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = \frac{C^{n-r-i}_{\{s\cdot\cdot\overline{(s-j)}\cdot\cdot(s-n+r)\}}C^j_{n-r}}{(-1)^{n-r-i-j}(s-j)^r(n-r)!}$$

$$\begin{bmatrix} (s-n+r)^r & \cdot\cdot & (s-n+r)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i)^r & \cdot\cdot & (s-i)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-i)^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-1)^r & \cdot\cdot & (s-1)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-1)^n \\ s^r & \cdot\cdot & s^{j+r} & \cdot\cdot & s^n \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = \frac{C^{n-r-i}_{\{s\cdot\cdot\overline{(s-n+r+j)}\cdot\cdot(s-n+r)\}}C^j_{n-r}}{(-1)^{i+j}(s-n+r+j)^r(n-r)!}$$

推论2.1.5.

$$\begin{bmatrix} s^n & \cdot\cdot & s^{j+r} & \cdot\cdot & s^r \\ (s-1)^n & \cdot\cdot & (s-1)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-1)^r \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i)^n & \cdot\cdot & (s-i)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-i)^r \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-n+r)^n & \cdot\cdot & (s-n+r)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^r \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = \frac{C^{i}_{\{s\cdot\cdot\overline{(s-j)}\cdot\cdot(s-n+r)\}}C^j_{n-r}}{(-1)^{i+j}(s-j)^r(n-r)!}$$

$$\begin{bmatrix} (s-n+r)^n & \cdot\cdot & (s-n+r)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^r \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i)^n & \cdot\cdot & (s-i)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-i)^r \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-1)^n & \cdot\cdot & (s-1)^{j+r} & \cdot\cdot & (s-1)^r \\ s^n & \cdot\cdot & s^{j+r} & \cdot\cdot & s^r \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = \frac{C^{i}_{\{s\cdot\cdot\overline{(s-n+r+j)}\cdot\cdot(s-n+r)\}}C^j_{n-r}}{(-1)^{n-r+i+j}(s-n+r+j)^r(n-r)!}$$

2.2 推论-$D^r_{n-r+1}(s;2)$型范德蒙自旋平方矩阵及其性质

推论2.2.1.

$$D^r_{n-r+1}(s;2) = \begin{vmatrix} s^{2r} & \cdot\cdot & s^{2j-2+2r} & s^{2j+2r} & s^{2j+2+2r} & \cdot\cdot & s^{2n-2} & s^{2n} \\ (s-1)^{2r} & \cdot\cdot & (s-1)^{2j-2+2r} & (s-1)^{2j+2r} & (s-1)^{2j+2+2r} & \cdot\cdot & (s-1)^{2n-2} & (s-1)^{2n} \\ (s-2)^{2r} & \cdot\cdot & (s-2)^{2j-2+2r} & (s-2)^{2j+2r} & (s-2)^{2j+2+2r} & \cdot\cdot & (s-2)^{2n-2} & (s-2)^{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i)^{2r} & \cdot\cdot & (s-i)^{2j-2+2r} & (s-i)^{2j+2r} & (s-i)^{2j+2+2r} & \cdot\cdot & (s-i)^{2n-2} & (s-i)^{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-n+r)^{2r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^{2j-2+2r} & (s-n+r)^{2j+2r} & (s-n+r)^{2j+2+2r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^{2n-2} & (s-n+r)^{2n} \end{vmatrix}$$

$$= [\prod_{k=0}^{n-r}(s-k)^{2r}]\{\prod_{i=0}^{n-r}\prod_{j=i+1}^{n-r}[(s-j)^2-(s-i)^2)]\}$$

$$= [\prod_{k=0}^{n-r}(s-k)^{2r}]\{\prod_{i=0}^{n-r}\prod_{j=i+1}^{n-r}[(i-j)(2s-i-j)]\} = [\prod_{k=0}^{n-r}(s-k)^{2r}][\prod_{i=0}^{n-r}\prod_{j=i+1}^{n-r}(2s-i-j)][\prod_{i=0}^{n-r}\prod_{j=i+1}^{n-r}(i-j)]$$

推论2.2.2. $(-1)^{i+j}A_{ij}(s;2) = \frac{(-1)^{n-r-j}C^{n-r-j}_{\{s^2\cdot\cdot\overline{(s-i)^2}\cdot\cdot(s-n+r)^2\}}D^r_{n-r+1}(s;2)}{(s-i)^{2r}\prod\limits_{k(\neq i)=0}^{n-r}[(s-i)^2-(s-k)^2)]}$

推论2.2.3.

$$\begin{bmatrix} s^{2r} & \cdot\cdot & s^{2j+2r} & \cdot\cdot & s^{2n} \\ (s-1)^{2r} & \cdot\cdot & (s-1)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-1)^{2n} \\ (s-2)^{2r} & \cdot\cdot & (s-2)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-2)^{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i)^{2r} & \cdot\cdot & (s-i)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-i)^{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-n+r)^{2r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^{2n} \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}A_{ji}(s;2)}{D^r_{n-r+1}(s;2)} = \frac{(-1)^{n-r-i}C^{n-r-i}_{\{s^2\cdot\cdot\overline{(s-j)^2}\cdot\cdot(s-n+r)^2\}}}{(s-j)^{2r}\prod\limits_{k(\neq j)=0}^{n-r}[(s-j)^2-(s-k)^2]}; i,j=0,1,\cdot\cdot,n-r$$

推论2.2.4. $\sum\limits_{l=0}^{n-r}\frac{(-1)^{n-r-l}(s-i)^{2r+2l}C^{n-r-l}_{\{s^2\cdot\cdot\overline{(s-j)^2}\cdot\cdot(s-n+r)^2\}}}{(s-j)^{2r}\prod\limits_{k(\neq j)=0}^{n-r}[(s-j)^2-(s-k)^2]}=\delta_{ij},\ \sum\limits_{l=0}^{n-r}\frac{(-1)^{n-r-i}(s-l)^{2j+2r}C^{n-r-i}_{\{s^2\cdot\cdot\overline{(s-l)^2}\cdot\cdot(s-n+r)^2\}}}{(s-l)^{2r}\prod\limits_{k(\neq l)=0}^{n-r}[(s-l)^2-(s-k)^2]}=\delta_{ij}$

小结如下：

推论2.2.5.

$$\begin{bmatrix} s^{2r} & \cdot\cdot & s^{2j+2r} & \cdot\cdot & s^{2n} \\ (s-1)^{2r} & \cdot\cdot & (s-1)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-1)^{2n} \\ (s-2)^{2r} & \cdot\cdot & (s-2)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-2)^{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i)^{2r} & \cdot\cdot & (s-i)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-i)^{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-n+r)^{2r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^{2n} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{n-r-i}C^{n-r-i}_{\{s^2\cdot\cdot\overline{(s-j)^2}\cdot\cdot(s-n+r)^2\}}}{(s-j)^{2r}\prod\limits_{k(\neq j)=0}^{n-r}[(s-j)^2-(s-k)^2]}$$

$$\begin{bmatrix} (s-n+r)^{2r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i)^{2r} & \cdot\cdot & (s-i)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-i)^{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-2)^{2r} & \cdot\cdot & (s-2)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-2)^{2n} \\ (s-1)^{2r} & \cdot\cdot & (s-1)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-1)^{2n} \\ s^{2r} & \cdot\cdot & s^{2j+2r} & \cdot\cdot & s^{2n} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{n-r-i}C^{n-r-i}_{\{s^2\cdot\cdot\overline{(s-n+r+j)^2}\cdot\cdot(s-n+r)^2\}}}{(s-n+r+j)^{2r}\prod\limits_{k(\neq n-r-j)=0}^{n-r}[(s-n+r+j)^2-(s-k)^2]}$$

推论2.2.6.

$$\begin{bmatrix} s^{2n} & \cdot\cdot & s^{2j+2r} & \cdot\cdot & s^{2r} \\ (s-1)^{2n} & \cdot\cdot & (s-1)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-1)^{2r} \\ (s-2)^{2n} & \cdot\cdot & (s-2)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-2)^{2r} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i)^{2n} & \cdot\cdot & (s-i)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-i)^{2r} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-n+r)^{2n} & \cdot\cdot & (s-n+r)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^{2r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{i}C^{i}_{\{s^2\cdot\cdot\overline{(s-j)^2}\cdot\cdot(s-n+r)^2\}}}{(s-j)^{2r}\prod\limits_{k(\neq j)=0}^{n-r}[(s-j)^2-(s-k)^2]}$$

$$\begin{bmatrix} (s-n+r)^{2n} & \cdot\cdot & (s-n+r)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-n+r)^{2r} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i)^{2n} & \cdot\cdot & (s-i)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-i)^{2r} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-2)^{2n} & \cdot\cdot & (s-2)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-2)^{2r} \\ (s-1)^{2n} & \cdot\cdot & (s-1)^{2j+2r} & \cdot\cdot & (s-1)^{2r} \\ s^{2n} & \cdot\cdot & s^{2j+2r} & \cdot\cdot & s^{2r} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{i}C^{i}_{\{s^2\cdot\cdot\overline{(s-n+r+j)^2}\cdot\cdot(s-n+r)^2\}}}{(s-n+r+j)^{2r}\prod\limits_{k(\neq n-r-j)=0}^{n-r}[(s-n+r+j)^2-(s-k)^2]}$$

2.3 独立解法-$D^0_{2s+1}(s)$型范德蒙自旋矩阵及其性质

推论2.3.1.

$$D^0_{2s+1}(s)=\begin{vmatrix} s^0 & s^1 & \cdot\cdot & s^{2s-1} & s^{2s} \\ (s-1)^0 & (s-1)^1 & \cdot\cdot & (s-1)^{2s-1} & (s-1)^{2s} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (1-s)^0 & (1-s)^1 & \cdot\cdot & (1-s)^{2s-1} & (1-s)^{2s} \\ (-s)^0 & (-s)^1 & \cdot\cdot & (-s)^{2s-1} & (-s)^{2s} \end{vmatrix}=(-1)^{s(2s+1)}1!2!\cdot\cdot(2s-1)!(2s)!$$

引理2.3.1.

$$A_{ij}(s)=\begin{vmatrix} s^0 & s^1 & \cdot\cdot & s^{j-1} & s^{j+1} & \cdot\cdot & s^{2s-1} & s^{2s} \\ (s-1)^0 & (s-1)^1 & \cdot\cdot & (s-1)^{j-1} & (s-1)^{j+1} & \cdot\cdot & (s-1)^{2s-1} & (s-1)^{2s} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i+1)^0 & (s-i+1)^1 & \cdot\cdot & (s-i+1)^{j-1} & (s-i+1)^{j+1} & \cdot\cdot & (s-i+1)^{2s-1} & (s-i+1)^{2s} \\ (s-i-1)^0 & (s-i-1)^1 & \cdot\cdot & (s-i-1)^{j-1} & (s-i-1)^{j+1} & \cdot\cdot & (s-i-1)^{2s-1} & (s-i-1)^{2s} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (1-s)^0 & (1-s)^1 & \cdot\cdot & (1-s)^{j-1} & (1-s)^{j+1} & \cdot\cdot & (1-s)^{2s-1} & (1-s)^{2s} \\ (-s)^0 & (-s)^1 & \cdot\cdot & (-s)^{j-1} & (-s)^{j+1} & \cdot\cdot & (-s)^{2s-1} & (-s)^{2s} \end{vmatrix},\begin{cases} i=0,1,\cdot\cdot,2s-1,2s \\ j=0,1,\cdot\cdot,2s-1,2s \end{cases}$$

引理2.3.2.

$$K_{ij}(s)=\begin{vmatrix} s^0 & s^1 & \cdot\cdot & s^{j-1} & s^{j} & s^{j+1} & \cdot\cdot & s^{2s-1} & s^{2s} \\ (s-1)^0 & (s-1)^1 & \cdot\cdot & (s-1)^{j-1} & (s-1)^{j} & (s-1)^{j+1} & \cdot\cdot & (s-1)^{2s-1} & (s-1)^{2s} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i+1)^0 & (s-i+1)^1 & \cdot\cdot & (s-i+1)^{j-1} & (s-i+1)^{j} & (s-i+1)^{j+1} & \cdot\cdot & (s-i+1)^{2s-1} & (s-i+1)^{2s} \\ (s-i-1)^0 & (s-i-1)^1 & \cdot\cdot & (s-i-1)^{j-1} & (s-i-1)^{j} & (s-i-1)^{j+1} & \cdot\cdot & (s-i-1)^{2s-1} & (s-i-1)^{2s} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (1-s)^0 & (1-s)^1 & \cdot\cdot & (1-s)^{j-1} & (1-s)^{j} & (1-s)^{j+1} & \cdot\cdot & (1-s)^{2s-1} & (1-s)^{2s} \\ (-s)^0 & (-s)^1 & \cdot\cdot & (-s)^{j-1} & (-s)^{j} & (-s)^{j+1} & \cdot\cdot & (-s)^{2s-1} & (-s)^{2s} \\ x^0 & x^1 & \cdot\cdot & x^{j-1} & x^{j} & x^{j+1} & \cdot\cdot & x^{2s-1} & x^{2s} \end{vmatrix}_{x^j\text{系数}}$$

$$=\frac{(-1)^{s(2s-1)}1!2!\cdot\cdot(2s-1)!(2s)!(x-s)\cdot\cdot(x+i-1-s)(x+i+1-s)\cdot\cdot(x+s)}{i!(2s-i)!}|_{x^j\text{系数}}=(-1)^{2s+j}A_{ij}(s)$$

$$\Rightarrow A_{ij}(s)=\frac{(-1)^{2s}C^i_{2s}C^{2s-j}_{\{s,\cdot\cdot,\overline{s-i},\cdot\cdot,-s\}}D_{2s+1}}{(2s)!},\{s,\cdot\cdot,\overline{s-j},\cdot\cdot,-s\}:=\{s,\cdot\cdot,s-j+1,s-j-1,\cdot\cdot,-s\}$$

推论2.3.2.

$$\begin{bmatrix} s^0 & s^1 & \cdot\cdot & s^{2s-1} & s^{2s} \\ (s-1)^0 & (s-1)^1 & \cdot\cdot & (s-1)^{2s-1} & (s-1)^{2s} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (1-s)^0 & (1-s)^1 & \cdot\cdot & (1-s)^{2s-1} & (1-s)^{2s} \\ (-s)^0 & (-s)^1 & \cdot\cdot & (-s)^{2s-1} & (-s)^{2s} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{C^{2s-i}_{\{s,\cdot\cdot,\overline{s-j},\cdot\cdot,-s\}}C^j_{2s}}{(-1)^{2s+i+j}(2s)!};i,j=0,1,\cdot\cdot,2s$$

$$=\frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}$$

$$\begin{bmatrix} (-1)^0C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}}C^0_{2s} & (-1)^1C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-1}\cdot\cdot\}}C^1_{2s} & \cdot\cdot & (-1)^jC^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2s} & \cdot\cdot & (-1)^{2s-1}C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{1-s}\cdot\cdot\}}C^{2s-1}_{2s} & (-1)^{2s}C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}}C^{2s}_{2s} \\ (-1)^1C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}}C^0_{2s} & (-1)^2C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-1}\cdot\cdot\}}C^1_{2s} & \cdot\cdot & (-1)^{1+j}C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2s} & \cdot\cdot & (-1)^{2s}C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{1-s}\cdot\cdot\}}C^{2s-1}_{2s} & (-1)^{1+2s}C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}}C^{2s}_{2s} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (-1)^iC^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}}C^0_{2s} & (-1)^{i+1}C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-1}\cdot\cdot\}}C^1_{2s} & \cdot\cdot & (-1)^{i+j}C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2s} & \cdot\cdot & (-1)^{i+2s-1}C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{1-s}\cdot\cdot\}}C^{2s-1}_{2s} & (-1)^{i+2s}C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}}C^{2s}_{2s} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (-1)^{2s-1}C^1_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}}C^0_{2s} & (-1)^{2s}C^1_{\{\cdot\cdot\overline{s-1}\cdot\cdot\}}C^1_{2s} & \cdot\cdot & (-1)^{2s-1+j}C^1_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2s} & \cdot\cdot & (-1)^{4s-2}C^1_{\{\cdot\cdot\overline{1-s}\cdot\cdot\}}C^{2s-1}_{2s} & (-1)^{4s-1}C^1_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}}C^{2s}_{2s} \\ (-1)^{2s}C^0_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}}C^0_{2s} & (-1)^{2s+1}C^0_{\{\cdot\cdot\overline{s-1}\cdot\cdot\}}C^1_{2s} & \cdot\cdot & (-1)^{2s+j}C^0_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2s} & \cdot\cdot & (-1)^{4s-1}C^0_{\{\cdot\cdot\overline{1-s}\cdot\cdot\}}C^{2s-1}_{2s} & (-1)^{4s}C^0_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}}C^{2s}_{2s} \end{bmatrix}$$

推论2.3.3.

$$\begin{bmatrix} n^0 & n^1 & \cdot\cdot & n^{2n-1} & n^{2n} \\ (n-1)^0 & (n-1)^1 & \cdot\cdot & (n-1)^{2n-1} & (n-1)^{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (1-n)^0 & (1-n)^1 & \cdot\cdot & (1-n)^{2n-1} & (1-n)^{2n} \\ (-n)^0 & (-n)^1 & \cdot\cdot & (-n)^{2n-1} & (-n)^{2n} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{C^{2n-i}_{\{n,\cdot\cdot,\overline{n-j},\cdot\cdot,-n\}}C^j_{2n}}{(-1)^{i+j}(2n)!}; i,j=0,1,\cdot\cdot,2n$$

$$= \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\begin{bmatrix} C^{2n}_{\{\cdot\cdot\overline{n-0}\cdot\cdot\}}C^0_{2n} & -C^{2n}_{\{\cdot\cdot\overline{n-1}\cdot\cdot\}}C^1_{2n} & \cdot\cdot & (-1)^jC^{2n}_{\{\cdot\cdot\overline{n-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2n} & \cdot\cdot & -C^{2n}_{\{\cdot\cdot\overline{1-n}\cdot\cdot\}}C^{2n-1}_{2n} & C^{2n}_{\{\cdot\cdot\overline{0-n}\cdot\cdot\}}C^{2n}_{2n} \\ -C^{2n-1}_{\{\cdot\cdot\overline{n-0}\cdot\cdot\}}C^0_{2n} & C^{2n-1}_{\{\cdot\cdot\overline{n-1}\cdot\cdot\}}C^1_{2n} & \cdot\cdot & -(-1)^jC^{2n-1}_{\{\cdot\cdot\overline{n-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2n} & \cdot\cdot & C^{2n-1}_{\{\cdot\cdot\overline{1-n}\cdot\cdot\}}C^{2n-1}_{2n} & -C^{2n-1}_{\{\cdot\cdot\overline{0-n}\cdot\cdot\}}C^{2n}_{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (-1)^iC^{2n-i}_{\{\cdot\cdot\overline{n-0}\cdot\cdot\}}C^0_{2n} & -(-1)^iC^{2n-i}_{\{\cdot\cdot\overline{n-1}\cdot\cdot\}}C^1_{2n} & \cdot\cdot & (-1)^{i+j}C^{2n-i}_{\{\cdot\cdot\overline{n-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2n} & \cdot\cdot & -(-1)^iC^{2n-i}_{\{\cdot\cdot\overline{1-n}\cdot\cdot\}}C^{2n-1}_{2n} & (-1)^iC^{2n-i}_{\{\cdot\cdot\overline{0-n}\cdot\cdot\}}C^{2n}_{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ -C^1_{\{\cdot\cdot\overline{n-0}\cdot\cdot\}}C^0_{2n} & C^1_{\{\cdot\cdot\overline{n-1}\cdot\cdot\}}C^1_{2n} & \cdot\cdot & -(-1)^jC^1_{\{\cdot\cdot\overline{n-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2n} & \cdot\cdot & C^1_{\{\cdot\cdot\overline{1-n}\cdot\cdot\}}C^{2n-1}_{2n} & -C^1_{\{\cdot\cdot\overline{0-n}\cdot\cdot\}}C^{2n}_{2n} \\ C^0_{\{\cdot\cdot\overline{n-0}\cdot\cdot\}}C^0_{2n} & -C^0_{\{\cdot\cdot\overline{n-1}\cdot\cdot\}}C^1_{2n} & \cdot\cdot & (-1)^jC^0_{\{\cdot\cdot\overline{n-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2n} & \cdot\cdot & -C^0_{\{\cdot\cdot\overline{1-n}\cdot\cdot\}}C^{2n-1}_{2n} & C^0_{\{\cdot\cdot\overline{0-n}\cdot\cdot\}}C^{2n}_{2n} \end{bmatrix}$$

推论2.3.4.

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{2s}(-1)^{l+j}(s-i)^lC^j_{2s}C^{2s-l}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}} = (-1)^{2s}(2s)!\delta_{ij} \\ \sum\limits_{l=0}^{2s}(-1)^{l+i}(s-l)^jC^l_{2s}C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-l}\cdot\cdot\}} = (-1)^{2s}(2s)!\delta_{ij} \end{cases} \quad \begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{2n}(-1)^{l+j}(n-i)^lC^j_{2n}C^{2n-l}_{\{\cdot\cdot\overline{n-j}\cdot\cdot\}} = (2n)!\delta_{ij} \\ \sum\limits_{l=0}^{2n}(-1)^{l+i}(n-l)^jC^l_{2n}C^{2n-i}_{\{\cdot\cdot\overline{n-l}\cdot\cdot\}} = (2n)!\delta_{ij} \end{cases}$$

推论2.3.5.

$$\begin{cases} \sum\limits_{h=n}^{-n}(-1)^{n-h+k}(n-k)^{n-h}C^k_{2n}C^{2n-n+h}_{\{\cdot\cdot\overline{n-k}\cdot\cdot\}} = (2n)! \\ \sum\limits_{h=n}^{-n}(-1)^{n-h+k}h^kC^{n-h}_{2n}C^{2n-k}_{\{\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot\}} = (2n)! \end{cases}$$

小结如下：

推论2.3.6.

$$\begin{bmatrix} s^0 & s^1 & \cdot\cdot & s^{2s-1} & s^{2s} \\ (s-1)^0 & (s-1)^1 & \cdot\cdot & (s-1)^{2s-1} & (s-1)^{2s} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (1-s)^0 & (1-s)^1 & \cdot\cdot & (1-s)^{2s-1} & (1-s)^{2s} \\ (-s)^0 & (-s)^1 & \cdot\cdot & (-s)^{2s-1} & (-s)^{2s} \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = \frac{C^{2s-i}_{\{s,\cdot\cdot,\overline{s-j},\cdot\cdot,-s\}}C^j_{2s}}{(-1)^{2s+i+j}(2s)!}, \begin{bmatrix} s^{2s} & s^{2s-1} & \cdot\cdot & s^1 & s^0 \\ (s-1)^{2s} & (s-1)^{2s-1} & \cdot\cdot & (s-1)^1 & (s-1)^0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (1-s)^{2s} & (1-s)^{2s-1} & \cdot\cdot & (1-s)^1 & (1-s)^0 \\ (-s)^{2s} & (-s)^{2s-1} & \cdot\cdot & (-s)^1 & (-s)^0 \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = \frac{C^i_{\{s,\cdot\cdot,\overline{s-j},\cdot\cdot,-s\}}C^j_{2s}}{(-1)^{i+j}(2s)!}$$

$$\begin{bmatrix} (-s)^0 & (-s)^1 & \cdot\cdot & (-s)^{2s-1} & (-s)^{2s} \\ (1-s)^0 & (1-s)^1 & \cdot\cdot & (1-s)^{2s-1} & (1-s)^{2s} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-1)^0 & (s-1)^1 & \cdot\cdot & (s-1)^{2s-1} & (s-1)^{2s} \\ s^0 & s^1 & \cdot\cdot & s^{2s-1} & s^{2s} \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = \frac{C^{2s-i}_{\{s,\cdot\cdot,\overline{j-s},\cdot\cdot,-s\}}C^j_{2s}}{(-1)^{i+j}(2s)!}, \begin{bmatrix} (-s)^{2s} & (-s)^{2s-1} & \cdot\cdot & (-s)^1 & (-s)^0 \\ (1-s)^{2s} & (1-s)^{2s-1} & \cdot\cdot & (1-s)^1 & (1-s)^0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-1)^{2s} & (s-1)^{2s-1} & \cdot\cdot & (s-1)^1 & (s-1)^0 \\ s^{2s} & s^{2s-1} & \cdot\cdot & s^1 & s^0 \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = \frac{C^i_{\{s,\cdot\cdot,\overline{j-s},\cdot\cdot,-s\}}C^j_{2s}}{(-1)^{2s+i+j}(2s)!}$$

小结如下：

推论2.3.7.

$$\begin{bmatrix} n^0 & n^1 & \cdot\cdot & n^{2n-1} & n^{2n} \\ (n-1)^0 & (n-1)^1 & \cdot\cdot & (n-1)^{2n-1} & (n-1)^{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (1-n)^0 & (1-n)^1 & \cdot\cdot & (1-n)^{2n-1} & (1-n)^{2n} \\ (-n)^0 & (-n)^1 & \cdot\cdot & (-n)^{2n-1} & (-n)^{2n} \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = \frac{C^{2n-i}_{\{n,\cdot\cdot,\overline{n-j},\cdot\cdot,-n\}}C^j_{2n}}{(-1)^{i+j}(2n)!}, \begin{bmatrix} n^{2n} & n^{2n-1} & \cdot\cdot & n^1 & n^0 \\ (n-1)^{2n} & (n-1)^{2n-1} & \cdot\cdot & (n-1)^1 & (n-1)^0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (1-n)^{2n} & (1-n)^{2n-1} & \cdot\cdot & (1-n)^1 & (1-n)^0 \\ (-n)^{2n} & (-n)^{2n-1} & \cdot\cdot & (-n)^1 & (-n)^0 \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = \frac{C^i_{\{n,\cdot\cdot,\overline{n-j},\cdot\cdot,-n\}}C^j_{2n}}{(-1)^{i+j}(2n)!}$$

$$\begin{bmatrix} (-n)^0 & (-n)^1 & \cdot\cdot & (-n)^{2n-1} & (-n)^{2n} \\ (1-n)^0 & (1-n)^1 & \cdot\cdot & (1-n)^{2n-1} & (1-n)^{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (n-1)^0 & (n-1)^1 & \cdot\cdot & (n-1)^{2n-1} & (n-1)^{2n} \\ n^0 & n^1 & \cdot\cdot & n^{2n-1} & n^{2n} \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = \frac{C^{2n-i}_{\{n,\cdot\cdot,\overline{j-n},\cdot\cdot,-n\}}C^j_{2n}}{(-1)^{i+j}(2n)!}, \begin{bmatrix} (-n)^{2n} & (-n)^{2n-1} & \cdot\cdot & (-n)^1 & (-n)^0 \\ (1-n)^{2n} & (1-n)^{2n-1} & \cdot\cdot & (1-n)^1 & (1-n)^0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (n-1)^{2n} & (n-1)^{2n-1} & \cdot\cdot & (n-1)^1 & (n-1)^0 \\ n^{2n} & n^{2n-1} & \cdot\cdot & n^1 & n^0 \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = \frac{C^i_{\{n,\cdot\cdot,\overline{j-n},\cdot\cdot,-n\}}C^j_{2n}}{(-1)^{i+j}(2n)!}$$

2.4 独立解法-$D^0_n(n;2)$型范德蒙整数自旋平方矩阵及其性质

推论2.4.1.

$$D^0_n(n;2) = \begin{vmatrix} n^0 & n^2 & \cdot\cdot & n^{2n-2} \\ (n-1)^0 & (n-1)^2 & \cdot\cdot & (n-1)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 2^0 & 2^2 & \cdot\cdot & 2^{2n-2} \\ 1^0 & 1^2 & \cdot\cdot & 1^{2n-2} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(2n-1)!(2n-3)!\cdot\cdot3!}{n!}$$

推论2.4.2.

$$A_{ij}(n;2)=\begin{vmatrix} n^0 & n^2 & \cdot\cdot & n^{2j-2} & n^{2j+2} & \cdot\cdot & n^{2n-4} & n^{2n-2} \\ (n-1)^0 & (n-1)^2 & \cdot\cdot & (n-1)^{2j-2} & (n-1)^{2j+2} & \cdot\cdot & (n-1)^{2n-4} & (n-1)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (n-i+1)^0 & (n-i+1)^2 & \cdot\cdot & (n-i+1)^{2j-2} & (n-i+1)^{2j+2} & \cdot\cdot & (n-i+1)^{2n-4} & (n-i+1)^{2n-2} \\ (n-i-1)^0 & (n-i-1)^2 & \cdot\cdot & (n-i-1)^{2j-2} & (n-i-1)^{2j+2} & \cdot\cdot & (n-i-1)^{2n-4} & (n-i-1)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 2^0 & 2^2 & \cdot\cdot & 2^{2j-2} & 2^{2j+2} & \cdot\cdot & 2^{2n-4} & 2^{2n-2} \\ 1^0 & 1^2 & \cdot\cdot & 1^{2j-2} & 1^{2j+2} & \cdot\cdot & 1^{2n-4} & 1^{2n-2} \end{vmatrix},\begin{cases} i=0,1,\cdot\cdot,n-1 \\ j=0,1,\cdot\cdot,n-1 \end{cases}$$

推论2.4.3.

$$K_{ij}(n;2)=\begin{vmatrix} n^0 & n^2 & \cdot\cdot & n^{2j-2} & n^{2j} & n^{2j+2} & \cdot\cdot & n^{2n-4} & n^{2n-2} \\ (n-1)^0 & (n-1)^2 & \cdot\cdot & (n-1)^{2j-2} & (n-1)^{2j} & (n-1)^{2j+2} & \cdot\cdot & (n-1)^{2n-4} & (n-1)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (n-i+1)^0 & (n-i+1)^2 & \cdot\cdot & (n-i+1)^{2j-2} & (n-i+1)^{2j} & (n-i+1)^{2j+2} & \cdot\cdot & (n-i+1)^{2n-4} & (n-i+1)^{2n-2} \\ (n-i-1)^0 & (n-i-1)^2 & \cdot\cdot & (n-i-1)^{2j-2} & (n-i-1)^{2j} & (n-i-1)^{2j+2} & \cdot\cdot & (n-i-1)^{2n-4} & (n-i-1)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 2^0 & 2^2 & \cdot\cdot & 2^{2j-2} & 2^{2j} & 2^{2j+2} & \cdot\cdot & 2^{2n-4} & 2^{2n-2} \\ 1^0 & 1^2 & \cdot\cdot & 1^{2j-2} & 1^{2j} & 1^{2j+2} & \cdot\cdot & 1^{2n-4} & 1^{2n-2} \\ x^0 & x^2 & \cdot\cdot & x^{2j-2} & x^{2j} & x^{2j+2} & \cdot\cdot & x^{2n-4} & x^{2n-2} \end{vmatrix}_{x^j\text{系数}}$$

$$=\frac{(-1)^{(n-1)(n-2)/2}(2n-1)!(2n-3)!\cdot\cdot 3!(x^2-n^2)\cdot\cdot[x^2-(n-i+1)^2][x^2-(n-i-1)^2]\cdot\cdot(x^2-2^2)(x^2-1^2)2(n-i)^2}{n!i!(2n-i)!}\Big|_{x^j\text{系数}}=(-1)^{n+j+1}A_{ij}(n;2)$$

$$\Rightarrow A_{ij}(n;2)=\frac{(-1)^{n-1}2(n-i)^2C_{2n}^{i}C^{n-1-j}_{\{1^2,\cdot\cdot,\overline{(n-i)^2},\cdot\cdot,n^2\}}}{(2n)!}D_n^0(n;2)$$

推论2.4.4.

$$\begin{bmatrix} n^0 & n^2 & \cdot\cdot & n^{2n-2} \\ (n-1)^0 & (n-1)^2 & \cdot\cdot & (n-1)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 2^0 & 2^2 & \cdot\cdot & 2^{2n-2} \\ 1^0 & 1^2 & \cdot\cdot & 1^{2n-2} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}A_{ji}(n;2)}{D_n^0(n;2)}=\frac{2(n-j)^2C_{2n}^{j}C^{n-1-i}_{\{1^2,\cdot\cdot,\overline{(n-j)^2},\cdot\cdot,n^2\}}}{(-1)^{n-1+i+j}(2n)!};i,j=0,1,\cdot\cdot,n-1$$

推论2.4.5.

$$\begin{bmatrix} n^0 & n^2 & \cdot\cdot & n^{2n-2} \\ (n-1)^0 & (n-1)^2 & \cdot\cdot & (n-1)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 2^0 & 2^2 & \cdot\cdot & 2^{2n-2} \\ 1^0 & 1^2 & \cdot\cdot & 1^{2n-2} \end{bmatrix}^{-1}=\frac{2(-1)^{n-1}}{(2n)!}\begin{bmatrix} n^2C_{2n}^0C^{n-1}_{\{\cdot\cdot\overline{n^2}\cdot\cdot\}} & -(n-1)^2C_{2n}^1C^{n-1}_{\{\cdot\cdot\overline{(n-1)^2}\cdot\cdot\}} & \cdot\cdot & -(-1)^n1^2C_{2n}^{n-1}C^{n-1}_{\{\cdot\cdot\overline{1^2}\cdot\cdot\}} \\ -n^2C_{2n}^0C^{n-2}_{\{\cdot\cdot\overline{n^2}\cdot\cdot\}} & (n-1)^2C_{2n}^1C^{n-2}_{\{\cdot\cdot\overline{(n-1)^2}\cdot\cdot\}} & \cdot\cdot & (-1)^n1^2C_{2n}^{n-1}C^{n-2}_{\{\cdot\cdot\overline{1^2}\cdot\cdot\}} \\ n^2C_{2n}^0C^{n-3}_{\{\cdot\cdot\overline{n^2}\cdot\cdot\}} & -(n-1)^2C_{2n}^1C^{n-3}_{\{\cdot\cdot\overline{(n-1)^2}\cdot\cdot\}} & \cdot\cdot & -(-1)^n1^2C_{2n}^{n-1}C^{n-3}_{\{\cdot\cdot\overline{1^2}\cdot\cdot\}} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ -(-1)^nn^2C_{2n}^0C^0_{\{\cdot\cdot\overline{n^2}\cdot\cdot\}} & (-1)^n(n-1)^2C_{2n}^1C^0_{\{\cdot\cdot\overline{(n-1)^2}\cdot\cdot\}} & \cdot\cdot & 1^2C_{2n}^{n-1}C^0_{\{\cdot\cdot\overline{1^2}\cdot\cdot\}} \end{bmatrix}$$

推论2.4.6.

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{n-1}(-1)^{l+j}(n-i)^{2l}(n-j)^2C_{2n}^{j}C^{n-1-l}_{\{\cdot\cdot\overline{(n-j)^2}\cdot\cdot\}}=\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2}\delta_{ij} \\ \sum\limits_{l=0}^{n-1}(-1)^{l+i}(n-l)^2(n-l)^{2j}C_{2n}^{l}C^{n-1-i}_{\{\cdot\cdot\overline{(n-l)^2}\cdot\cdot\}}=\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2}\delta_{ij} \end{cases}$$

小结如下：

推论2.4.7.

$$\begin{bmatrix} n^0 & n^2 & \cdot\cdot & n^{2n-2} \\ (n-1)^0 & (n-1)^2 & \cdot\cdot & (n-1)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 2^0 & 2^2 & \cdot\cdot & 2^{2n-2} \\ 1^0 & 1^2 & \cdot\cdot & 1^{2n-2} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{2(n-j)^2C_{2n}^{j}C^{n-1-i}_{\{1^2,\cdot\cdot,\overline{(n-j)^2},\cdot\cdot,n^2\}}}{(-1)^{n-1+i+j}(2n)!},\begin{bmatrix} 1^0 & 1^2 & \cdot\cdot & 1^{2n-2} \\ 2^0 & 2^2 & \cdot\cdot & 2^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (n-1)^0 & (n-1)^2 & \cdot\cdot & (n-1)^{2n-2} \\ n^0 & n^2 & \cdot\cdot & n^{2n-2} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{2(j+1)^2C_{2n}^{n-1-j}C^{n-1-i}_{\{1^2,\cdot\cdot,\overline{(j+1)^2},\cdot\cdot,n^2\}}}{(-1)^{i+j}(2n)!}$$

$$\begin{bmatrix} n^{2n-2} & \cdot\cdot & n^2 & n^0 \\ (n-1)^{2n-2} & \cdot\cdot & (n-1)^2 & (n-1)^0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 2^{2n-2} & \cdot\cdot & 2^2 & 2^0 \\ 1^{2n-2} & \cdot\cdot & 1^2 & 1^0 \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{2(n-j)^2C_{2n}^{j}C^{i}_{\{1^2,\cdot\cdot,\overline{(n-j)^2},\cdot\cdot,n^2\}}}{(-1)^{i+j}(2n)!},\begin{bmatrix} 1^{2n-2} & \cdot\cdot & 1^2 & 1^0 \\ 2^{2n-2} & \cdot\cdot & 2^2 & 2^0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (n-1)^{2n-2} & \cdot\cdot & (n-1)^2 & (n-1)^0 \\ n^{2n-2} & \cdot\cdot & n^2 & n^0 \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{2(j+1)^2C_{2n}^{n-1-j}C^{i}_{\{1^2,\cdot\cdot,\overline{(j+1)^2},\cdot\cdot,n^2\}}}{(-1)^{n-1+i+j}(2n)!}$$

2.5 独立解法-$D_n^0(n-\frac{1}{2};2)$型范德蒙半整数自旋平方矩阵及其性质

推论2.5.1.

$$D_n^0(n-\tfrac{1}{2};2)=\begin{vmatrix} (n-1/2)^0 & (n-1/2)^2 & \cdot\cdot & (n-1/2)^{2n-2} \\ (n-3/2)^0 & (n-3/2)^2 & \cdot\cdot & (n-3/2)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (3/2)^0 & (3/2)^2 & \cdot\cdot & (3/2)^{2n-2} \\ (1/2)^0 & (1/2)^2 & \cdot\cdot & (1/2)^{2n-2} \end{vmatrix}=(-1)^{n(n-1)/2}(2n-2)!(2n-4)!\cdot\cdot 2!$$

推论2.5.2. $i,j=0,1,\cdot\cdot,n-1$

$$A_{ij}(n-\tfrac{1}{2};2)=\begin{vmatrix} (n-1/2)^0 & (n-1/2)^2 & \cdot\cdot & n^{2j-2} & (n-1/2)^{2j+2} & \cdot\cdot & (n-1/2)^{2n-4} & (n-1/2)^{2n-2} \\ (n-3/2)^0 & (n-3/2)^2 & \cdot\cdot & (n-3/2)^{2j-2} & (n-3/2)^{2j+2} & \cdot\cdot & (n-3/2)^{2n-4} & (n-3/2)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (n-i+1/2)^0 & (n-i+1/2)^2 & \cdot\cdot & (n-i+1/2)^{2j-2} & (n-i+1/2)^{2j+2} & \cdot\cdot & (n-i+1/2)^{2n-4} & (n-i+1/2)^{2n-2} \\ (n-i-3/2)^0 & (n-i-3/2)^2 & \cdot\cdot & (n-i-3/2)^{2j-2} & (n-i-3/2)^{2j+2} & \cdot\cdot & (n-i-3/2)^{2n-4} & (n-i-3/2)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (3/2)^0 & (3/2)^2 & \cdot\cdot & (3/2)^{2j-2} & (3/2)^{2j+2} & \cdot\cdot & (3/2)^{2n-4} & (3/2)^{2n-2} \\ (1/2)^0 & (1/2)^2 & \cdot\cdot & (1/2)^{2j-2} & (1/2)^{2j+2} & \cdot\cdot & (1/2)^{2n-4} & (1/2)^{2n-2} \end{vmatrix}$$

推论2.5.3.

$$K_{ij}(n-\tfrac{1}{2};2)=\begin{vmatrix} (n-1/2)^0 & (n-1/2)^2 & \cdot\cdot & (n-1/2)^{2j-2} & (n-1/2)^{2j} & (n-1/2)^{2j+2} & \cdot\cdot & (n-1/2)^{2n-4} & (n-1/2)^{2n-2} \\ (n-3/2)^0 & (n-3/2)^2 & \cdot\cdot & (n-3/2)^{2j-2} & (n-3/2)^{2j} & (n-3/2)^{2j+2} & \cdot\cdot & (n-3/2)^{2n-4} & (n-3/2)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (n-i+1/2)^0 & (n-i+1/2)^2 & \cdot\cdot & (n-i+1/2)^{2j-2} & (n-i+1/2)^{2j} & (n-i+1/2)^{2j+2} & \cdot\cdot & (n-i+1/2)^{2n-4} & (n-i+1/2)^{2n-2} \\ (n-i-3/2)^0 & (n-i-3/2)^2 & \cdot\cdot & (n-i-3/2)^{2j-2} & (n-i-3/2)^{2j} & (n-i-3/2)^{2j+2} & \cdot\cdot & (n-i-3/2)^{2n-4} & (n-i-3/2)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (3/2)^0 & (3/2)^2 & \cdot\cdot & (3/2)^{2j-2} & (3/2)^{2j} & (3/2)^{2j+2} & \cdot\cdot & (3/2)^{2n-4} & (3/2)^{2n-2} \\ (1/2)^0 & (1/2)^2 & \cdot\cdot & (1/2)^{2j-2} & (1/2)^{2j} & (1/2)^{2j+2} & \cdot\cdot & (1/2)^{2n-4} & (1/2)^{2n-2} \\ x^0 & x^2 & \cdot\cdot & x^{2j-2} & x^{2j} & x^{2j+2} & \cdot\cdot & x^{2n-4} & x^{2n-2} \end{vmatrix}_{x^j\text{系数}}$$

$$=\frac{(-1)^{(n-1)(n-2)/2}(2n-2)!(2n-4)!\cdot\cdot 2![x^2-(n-1/2)^2]\cdot\cdot[x^2-(n-i+1/2)^2][x^2-(n-i-3/2)^2]\cdot\cdot[x^2-(1/2)^2]2(n-1/2-i)}{i!(2n-1-i)!}\Big|_{x^j\text{系数}}$$

$$=(-1)^{n+j+1}A_{ij}(n-\tfrac{1}{2};2)$$

$$\Rightarrow A_{ij}(n-\tfrac{1}{2};2)=\frac{(-1)^{n-1}2(n-i)^2C_{2n-1}^{i}C^{n-1-j}_{\{(1/2)^2,\cdot\cdot,\overline{(n-1/2-i)^2},\cdot\cdot,(n-1/2)^2\}}}{(2n-1)!}D_n^0(n-\tfrac{1}{2};2)$$

推论2.5.4.

$$\begin{bmatrix} (n-1/2)^0 & (n-1/2)^2 & \cdot\cdot & (n-1/2)^{2n-2} \\ (n-3/2)^0 & (n-3/2)^2 & \cdot\cdot & (n-3/2)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (3/2)^0 & (3/2)^2 & \cdot\cdot & (3/2)^{2n-2} \\ (1/2)^0 & (1/2)^2 & \cdot\cdot & (1/2)^{2n-2} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}A_{ji}(n-\frac{1}{2};2)}{D_n^0(n-\frac{1}{2};2)}=\frac{2(n-\frac{1}{2}-j)C_{2n-1}^{j}C^{n-1-i}_{\{(1/2)^2,\cdot\cdot,\overline{(n-1/2-j)^2},\cdot\cdot,(n-1/2)^2\}}}{(-1)^{n-1+i+j}(2n-1)!};i,j=0,1,\cdot\cdot,n-1$$

推论2.5.5.

$$\begin{bmatrix} (n-1/2)^0 & (n-1/2)^2 & \cdot\cdot & (n-1/2)^{2n-2} \\ (n-3/2)^0 & (n-3/2)^2 & \cdot\cdot & (n-3/2)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (3/2)^0 & (3/2)^2 & \cdot\cdot & (3/2)^{2n-2} \\ (1/2)^0 & (1/2)^2 & \cdot\cdot & (1/2)^{2n-2} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{2(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\begin{bmatrix} (n-1/2)C_{2n}^{0}C^{n-1}_{\{\cdot\cdot\overline{(n-1/2)^2}\cdot\cdot\}} & -(n-3/2)C_{2n-1}^{1}C^{n-1}_{\{\cdot\cdot\overline{(n-3/2)^2}\cdot\cdot\}} & \cdot\cdot & -(-1)^n(1/2)C_{2n-1}^{n-1}C^{n-1}_{\{\cdot\cdot\overline{(1/2)^2}\cdot\cdot\}} \\ -(n-1/2)C_{2n-1}^{0}C^{n-2}_{\{\cdot\cdot\overline{(n-1/2)^2}\cdot\cdot\}} & (n-3/2)C_{2n-1}^{1}C^{n-2}_{\{\cdot\cdot\overline{(n-3/2)^2}\cdot\cdot\}} & \cdot\cdot & (-1)^n(1/2)C_{2n-1}^{n-1}C^{n-2}_{\{\cdot\cdot\overline{(1/2)^2}\cdot\cdot\}} \\ (n-1/2)C_{2n-1}^{0}C^{n-3}_{\{\cdot\cdot\overline{(n-1/2)^2}\cdot\cdot\}} & -(n-3/2)C_{2n-1}^{1}C^{n-3}_{\{\cdot\cdot\overline{(n-3/2)^2}\cdot\cdot\}} & \cdot\cdot & -(-1)^n(1/2)C_{2n-1}^{n-1}C^{n-3}_{\{\cdot\cdot\overline{(1/2)^2}\cdot\cdot\}} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ -(-1)^n(n-1/2)C_{2n-1}^{0}C^{0}_{\{\cdot\cdot\overline{(n-1/2)^2}\cdot\cdot\}} & (-1)^n(n-3/2)C_{2n-1}^{1}C^{0}_{\{\cdot\cdot\overline{(n-3/2)^2}\cdot\cdot\}} & \cdot\cdot & (1/2)C_{2n-1}^{n-1}C^{0}_{\{\cdot\cdot\overline{(1/2)^2}\cdot\cdot\}} \end{bmatrix}$$

小结如下：

推论2.5.6.

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{n-1}(-1)^{l+j}(n-\frac{1}{2}-i)^{2l}(n-\frac{1}{2}-j)C_{2n-1}^{j}C^{n-1-l}_{\{\cdot\cdot\overline{(n-1/2-j)^2}\cdot\cdot\}}=\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2}\delta_{ij} \\ \sum\limits_{l=0}^{n-1}(-1)^{l+i}(n-\frac{1}{2}-l)(n-\frac{1}{2}-l)^{2j}C_{2n-1}^{l}C^{n-1-i}_{\{\cdot\cdot\overline{(n-1/2-l)^2}\cdot\cdot\}}=\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2}\delta_{ij} \end{cases}$$

推论2.5.7.

$$\begin{bmatrix} (n-1/2)^0 & (n-1/2)^2 & \cdot\cdot & (n-1/2)^{2n-2} \\ (n-3/2)^0 & (n-3/2)^2 & \cdot\cdot & (n-3/2)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (3/2)^0 & (3/2)^2 & \cdot\cdot & (3/2)^{2n-2} \\ (1/2)^0 & (1/2)^2 & \cdot\cdot & (1/2)^{2n-2} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{2(n-\frac{1}{2}-j)C_{2n-1}^{j}C^{n-1-i}_{\{1^2,\cdot\cdot,\overline{(n-1/2-j)^2},\cdot\cdot,n^2\}}}{(-1)^{n-1+i+j}(2n-1)!}$$

$$\begin{bmatrix} (1/2)^0 & (1/2)^2 & \cdot\cdot & (1/2)^{2n-2} \\ (3/2)^0 & (3/2)^2 & \cdot\cdot & (3/2)^{2n-2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (n-3/2)^0 & (n-3/2)^2 & \cdot\cdot & (n-3/2)^{2n-2} \\ (n-1/2)^0 & (n-1/2)^2 & \cdot\cdot & (n-1/2)^{2n-2} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{2(j+1/2)C_{2n-1}^{n-1-j}C^{n-1-i}_{\{(1/2)^2,\cdot\cdot,\overline{(j+1/2)^2},\cdot\cdot,(n-1/2)^2\}}}{(-1)^{i+j}(2n-1)!}$$

推论2.5.8.

$$\begin{bmatrix} (n-1/2)^{2n-2} & \cdot\cdot & (n-1/2)^2 & (n-1/2)^0 \\ (n-3/2)^{2n-2} & \cdot\cdot & (n-3/2)^2 & (n-3/2)^0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (3/2)^{2n-2} & \cdot\cdot & (3/2)^2 & (3/2)^0 \\ (1/2)^{2n-2} & \cdot\cdot & (1/2)^2 & (1/2)^0 \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{2(n-\frac{1}{2}-j)C_{2n-1}^{j}C^{i}_{\{(1/2)^2,\cdot\cdot,\overline{(n-1/2-j)^2},\cdot\cdot,(n-1/2)^2\}}}{(-1)^{i+j}(2n-1)!}$$

$$\begin{bmatrix} (1/2)^{2n-2} & \cdot\cdot & (1/2)^2 & (1/2)^0 \\ (3/2)^{2n-2} & \cdot\cdot & (3/2)^2 & (3/2)^0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (n-3/2)^{2n-2} & \cdot\cdot & (n-3/2)^2 & (n-3/2)^0 \\ (n-1/2)^{2n-2} & \cdot\cdot & (n-1/2)^2 & (n-1/2)^0 \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{2(j+1/2)C_{2n-1}^{n-1-j}C^{i}_{\{(1/2)^2,\cdot\cdot,\overline{(j+1/2)^2},\cdot\cdot,(n-1/2)^2\}}}{(-1)^{n-1+i+j}(2n-1)!}$$

2.6 独立解法-$D_{k+1}^0(s;2)$型范德蒙自旋平方矩阵及其性质

推论2.6.1.

$$D_{k+1}^0(s;2)=\begin{vmatrix} s^0 & \cdot\cdot & s^{2k-4} & s^{2k-2} & s^{2k} \\ (s-1)^0 & \cdot\cdot & (s-1)^{2k-4} & (s-1)^{2k-2} & (s-1)^{2k} \\ (s-2)^0 & \cdot\cdot & (s-2)^{2k-4} & (s-2)^{2k-2} & (s-2)^{2k} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-k)^0 & \cdot\cdot & (s-k)^{2k-4} & (s-k)^{2k-2} & (s-k)^{2k} \end{vmatrix}=\frac{(-1)^{k(k+1)/2}(k!\cdot\cdot 2!1!)[(2s-1)!(2s-3)!\cdot\cdot(2s-2k+3)!(2s-2k+1)!]}{[(2s-k-1)!(2s-k-2)!\cdot\cdot(2s-2k+1)!(2s-2k)!]}$$

推论2.6.2.

$$A_{ij}(s;2)=\begin{vmatrix} s^0 & \cdot\cdot & s^{2k-2j-2} & s^{2k-2j+2} & \cdot\cdot & s^{2k} \\ (s-1)^0 & \cdot\cdot & (s-1)^{2k-2j-2} & (s-1)^{2k-2j+2} & \cdot\cdot & (s-1)^{2k} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i+1)^0 & \cdot\cdot & (s-i+1)^{2k-2j-2} & (s-i+1)^{2k-2j+2} & \cdot\cdot & (s-i+1)^{2k} \\ (s-i-1)^0 & \cdot\cdot & (s-i-1)^{2k-2j-2} & (s-i-1)^{2k-2j+2} & \cdot\cdot & (s-i-1)^{2k} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-k)^0 & \cdot\cdot & (s-k)^{2k-2j-2} & (s-k)^{2k-2j+2} & \cdot\cdot & (s-k)^{2k} \end{vmatrix}$$

推论2.6.3.

$$K_{ij}(s;2)=\begin{vmatrix} s^0 & \cdot\cdot & s^{2k-2j-2} & s^{2k-2j} & s^{2k-2j+2} & \cdot\cdot & s^{2k} \\ (s-1)^0 & \cdot\cdot & (s-1)^{2k-2j-2} & (s-1)^{2k-2j} & (s-1)^{2k-2j+2} & \cdot\cdot & (s-1)^{2k} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-i+1)^0 & \cdot\cdot & (s-i+1)^{2k-2j-2} & (s-i+1)^{2k-2j} & (s-i+1)^{2k-2j+2} & \cdot\cdot & (s-i+1)^{2k} \\ (s-i-1)^0 & \cdot\cdot & (s-i-1)^{2k-2j-2} & (s-i-1)^{2k-2j} & (s-i-1)^{2k-2j+2} & \cdot\cdot & (s-i-1)^{2k} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-k)^0 & \cdot\cdot & (s-k)^{2k-2j-2} & (s-k)^{2k-2j} & (s-k)^{2k-2j+2} & \cdot\cdot & (s-k)^{2k} \\ x^0 & \cdot\cdot & x^{2k-2j-2} & x^{2k-2j} & x^{2k-2j+2} & \cdot\cdot & x^{2k} \end{vmatrix}_{x^{2j}\text{系数}}$$

$$=\frac{(-1)^{k(k-1)/2}(k!\cdot\cdot 2!1!)[(2s-1)!(2s-3)!\cdot\cdot(2s-2k+3)!(2s-2k+1)!]}{[(2s-k-1)!(2s-k-2)!\cdot\cdot(2s-2k+1)!(2s-2k)!]}\frac{(x^2-s^2)\cdot\cdot\overline{[x^2-(s-i)^2]}\cdot\cdot[x^2-(s-k)^2](2s-i-k-1)!(2s-2i)}{i!(2s-i)!(k-i)!}\Big|_{x^{2j}\text{系数}}=(-1)^{k+j}A_{ij}(s;2)$$

$$\Rightarrow A_{ij}(s;2)=(-1)^kC_{2s}^iC^{k-j}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-i)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}\frac{(2s-i-k-1)!(2s-2i)D^0_{k+1}(s;2)}{(2s)!(k-i)!}$$

推论2.6.4. $i,j=0,1,\cdot\cdot,k$

$$\begin{bmatrix} s^0 & \cdot\cdot & s^{2k-4} & s^{2k-2} & s^{2k} \\ (s-1)^0 & \cdot\cdot & (s-1)^{2k-4} & (s-1)^{2k-2} & (s-1)^{2k} \\ (s-2)^0 & \cdot\cdot & (s-2)^{2k-4} & (s-2)^{2k-2} & (s-2)^{2k} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-k)^0 & \cdot\cdot & (s-k)^{2k-4} & (s-k)^{2k-2} & (s-k)^{2k} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}A_{ji}(s;2)}{D^0_{k+1}(s;2)}=(-1)^{k+i+j}C_{2s}^jC^{k-i}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-j)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}\frac{(2s-k-1-j)!(2s-2j)}{(2s)!(k-j)!}$$

小结如下：

推论2.6.5.

$$\begin{bmatrix} s^0 & \cdot\cdot & s^{2k-4} & s^{2k-2} & s^{2k} \\ (s-1)^0 & \cdot\cdot & (s-1)^{2k-4} & (s-1)^{2k-2} & (s-1)^{2k} \\ (s-2)^0 & \cdot\cdot & (s-2)^{2k-4} & (s-2)^{2k-2} & (s-2)^{2k} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-k)^0 & \cdot\cdot & (s-k)^{2k-4} & (s-k)^{2k-2} & (s-k)^{2k} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=(-1)^{k+i+j}C_{2s}^jC^{k-i}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-j)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}\frac{(2s-k-1-j)!(2s-2j)}{(2s)!(k-j)!}$$

$$\begin{bmatrix} (s-k)^0 & \cdot\cdot & (s-k)^{2k-4} & (s-k)^{2k-2} & (s-k)^{2k} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-2)^0 & \cdot\cdot & (s-2)^{2k-4} & (s-2)^{2k-2} & (s-2)^{2k} \\ (s-1)^0 & \cdot\cdot & (s-1)^{2k-4} & (s-1)^{2k-2} & (s-1)^{2k} \\ s^0 & \cdot\cdot & s^{2k-4} & s^{2k-2} & s^{2k} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=(-1)^{i+j}C_{2s}^{k-j}C^{k-i}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-k+j)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}\frac{(2s-1+j)!(2s-2k+2j)}{(2s)!j!}$$

推论2.6.6.

$$\begin{bmatrix} s^{2k} & \cdot\cdot & s^4 & s^2 & s^0 \\ (s-1)^{2k} & \cdot\cdot & (s-1)^4 & (s-1)^2 & (s-1)^0 \\ (s-2)^{2k} & \cdot\cdot & (s-2)^4 & (s-2)^2 & (s-2)^0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-k)^{2k} & \cdot\cdot & (s-k)^4 & (s-k)^2 & (s-k)^0 \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=(-1)^{i+j}C_{2s}^jC^{i}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-j)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}\frac{(2s-k-1-j)!(2s-2j)}{(2s)!(k-j)!}$$

$$\begin{bmatrix} (s-k)^{2k} & \cdot\cdot & (s-k)^4 & (s-k)^2 & (s-k)^0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-2)^{2k} & \cdot\cdot & (s-2)^4 & (s-2)^2 & (s-2)^0 \\ (s-1)^{2k} & \cdot\cdot & (s-1)^4 & (s-1)^2 & (s-1)^0 \\ s^{2k} & \cdot\cdot & s^4 & s^2 & s^0 \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=(-1)^{k+i+j}C_{2s}^{k-j}C^{i}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-k+j)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}\frac{(2s-1+j)!(2s-2k+2j)}{(2s)!j!}$$

2.7 推论-$D^1_{k+1}(s;2)$型范德蒙自旋平方矩阵及其性质

推论2.7.1.

$$D^0_{k+1}(s;2)=\begin{vmatrix} s^1 & \cdot\cdot & s^{2k-3} & s^{2k-1} & s^{2k+1} \\ (s-1)^1 & \cdot\cdot & (s-1)^{2k-3} & (s-1)^{2k-1} & (s-1)^{2k+1} \\ (s-2)^1 & \cdot\cdot & (s-2)^{2k-3} & (s-2)^{2k-1} & (s-2)^{2k+1} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-k)^1 & \cdot\cdot & (s-k)^{2k-3} & (s-k)^{2k-1} & (s-k)^{2k+1} \end{vmatrix}=s(s-1)\cdot\cdot(s-k)\begin{vmatrix} s^0 & \cdot\cdot & s^{2k-4} & s^{2k-2} & s^{2k} \\ (s-1)^0 & \cdot\cdot & (s-1)^{2k-4} & (s-1)^{2k-2} & (s-1)^{2k} \\ (s-2)^0 & \cdot\cdot & (s-2)^{2k-4} & (s-2)^{2k-2} & (s-2)^{2k} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-k)^0 & \cdot\cdot & (s-k)^{2k-4} & (s-k)^{2k-2} & (s-k)^{2k} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{(-1)^{k(k+1)/2}(k!\cdot\cdot 2!1!)[(2s-1)!(2s-3)!\cdot\cdot(2s-2k+3)!(2s-2k+1)!]s!}{[(2s-k-1)!(2s-k-2)!\cdot\cdot(2s-2k+1)!(2s-2k)!](s-k-1)!}$$

推论2.7.2.

$$\begin{bmatrix} s^1 & \cdot\cdot & s^{2k-3} & s^{2k-1} & s^{2k+1} \\ (s-1)^1 & \cdot\cdot & (s-1)^{2k-3} & (s-1)^{2k-1} & (s-1)^{2k+1} \\ (s-2)^1 & \cdot\cdot & (s-2)^{2k-3} & (s-2)^{2k-1} & (s-2)^{2k+1} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-k)^1 & \cdot\cdot & (s-k)^{2k-3} & (s-k)^{2k-1} & (s-k)^{2k+1} \end{bmatrix}^{-1}_{ij}=\left(\begin{bmatrix} s & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & s-1 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & s-i & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & s-k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^0 & \cdot\cdot & s^{2k-4} & s^{2k-2} & s^{2k} \\ (s-1)^0 & \cdot\cdot & (s-1)^{2k-4} & (s-1)^{2k-2} & (s-1)^{2k} \\ (s-2)^0 & \cdot\cdot & (s-2)^{2k-4} & (s-2)^{2k-2} & (s-2)^{2k} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-k)^0 & \cdot\cdot & (s-k)^{2k-4} & (s-k)^{2k-2} & (s-k)^{2k} \end{bmatrix}\right)^{-1}_{ij}$$

$$=2(-1)^{k+i+j}C_{2s}^jC^{k-i}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-j)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}\frac{(2s-k-1-j)!}{(2s)!(k-j)!};i,j=0,1,\cdot\cdot,k$$

小结如下：

推论2.7.3.

$$\begin{bmatrix} s^1 & \cdot\cdot & s^{2k-3} & s^{2k-1} & s^{2k+1} \\ (s-1)^1 & \cdot\cdot & (s-1)^{2k-3} & (s-1)^{2k-1} & (s-1)^{2k+1} \\ (s-2)^1 & \cdot\cdot & (s-2)^{2k-3} & (s-2)^{2k-1} & (s-2)^{2k+1} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-k)^1 & \cdot\cdot & (s-k)^{2k-3} & (s-k)^{2k-1} & (s-k)^{2k+1} \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = 2(-1)^{k+i+j}C_{2s}^{j}C^{k-i}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-j)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}\frac{(2s-k-1-j)!}{(2s)!(k-j)!}$$

$$\begin{bmatrix} (s-k)^1 & \cdot\cdot & (s-k)^{2k-3} & (s-k)^{2k-1} & (s-k)^{2k+1} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-2)^1 & \cdot\cdot & (s-2)^{2k-3} & (s-2)^{2k-1} & (s-2)^{2k+1} \\ (s-1)^1 & \cdot\cdot & (s-1)^{2k-3} & (s-1)^{2k-1} & (s-1)^{2k+1} \\ s^1 & \cdot\cdot & s^{2k-3} & s^{2k-1} & s^{2k+1} \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = 2(-1)^{i+j}C_{2s}^{k-j}C^{k-i}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-k+j)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}\frac{(2s-1+j)!}{(2s)!j!}$$

推论2.7.4.

$$\begin{bmatrix} s^{2k+1} & \cdot\cdot & s^5 & s^3 & s^1 \\ (s-1)^{2k+1} & \cdot\cdot & (s-1)^5 & (s-1)^3 & (s-1)^1 \\ (s-2)^{2k+1} & \cdot\cdot & (s-2)^5 & (s-2)^3 & (s-2)^1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-k)^{2k+1} & \cdot\cdot & (s-k)^5 & (s-k)^3 & (s-k)^1 \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = 2(-1)^{i+j}C_{2s}^{j}C^{i}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-j)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}\frac{(2s-k-1-j)!}{(2s)!(k-j)!}$$

$$\begin{bmatrix} (s-k)^{2k+1} & \cdot\cdot & (s-k)^5 & (s-k)^3 & (s-k)^1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-2)^{2k+1} & \cdot\cdot & (s-2)^5 & (s-2)^3 & (s-2)^1 \\ (s-1)^{2k+1} & \cdot\cdot & (s-1)^5 & (s-1)^3 & (s-1)^1 \\ s^{2k+1} & \cdot\cdot & s^5 & s^3 & s^1 \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = 2(-1)^{k+i+j}C_{2s}^{k-j}C^{i}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-k+j)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}\frac{(2s-1+j)!}{(2s)!j!}$$

第四章　重要的复合常数不变张量

了自我评述：本章对多个重要的复合常数不变张量进行了深入分析，对复合常数不变张量进行了分解，部分解决求得了其中二元数列的通项公式，并结合线性代数方法得到一些十分有用的结论，是后续研究高自旋粒子的一个有力数学工具。

1 本章需满足的代数同构前提条件

定义1.0.1. $s\geq\frac{1}{2}$

$$\begin{cases}N^{A_\varsigma}(s;w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)=1,N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\\ N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+N^{B_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)=\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)N^{B_\varsigma}(s;w)\\ \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)+\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)=\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\\ \{\sigma^{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2};w),\sigma^{\beta_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\}=\frac{1}{2}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma},\sigma^{\alpha_\varsigma}(0;w):=0\end{cases}$$

2 复合常数不变张量$X^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{l\varsigma}}(s,n,l;w)$

2.1 复合常数不变张量$X^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{l\varsigma}}(s,n,l;w)$的定义

定义2.1.1.

$$\begin{cases}X^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma};\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{l\varsigma}}(s,n,l;w):=N^{A_\varsigma}(s;w)[\sigma^{\alpha_{1\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{n\varsigma}}(\frac{1}{2};w)]_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}[\sigma^{\beta_{1\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\beta_{l\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)\\ X(s,0,0;w):=1,X^{\alpha_{1\varsigma}}(s,1,0;w)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_{1\varsigma}}(s;w),X^{\beta_{1\varsigma}}(s,0,1;w)=(1-\frac{1}{2s})\sigma^{\beta_{1\varsigma}}(s;w);s\geq\frac{1}{2},n\geq0,l\geq0\end{cases}$$

推论2.1.1.

$$\begin{cases}X^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{l\varsigma}\}}(s,n,l;w):=N^{A_\varsigma}(s;w)[\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{n\varsigma}}(\frac{1}{2};w)]_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}[\sigma^{\beta_{1\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\beta_{l\varsigma}\}}(s-\frac{1}{2};w)]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)\\ X^{\{\}}(s,0,0;w):=1,X^{\{\alpha_{1\varsigma}\}}(s,1,0;w)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_{1\varsigma}}(s;w),X^{\{\beta_{1\varsigma}\}}(s,0,1;w)=(1-\frac{1}{2s})\sigma^{\beta_{1\varsigma}}(s;w);s\geq\frac{1}{2},n\geq0,l\geq0\end{cases}$$

2.2 复合常数不变张量$X^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{l\varsigma}\}}(s,n,l;w)$ 的递推关系

定理2.2.1. $X^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{l\varsigma}\}}(s,n,l;w)=\frac{1}{4}\frac{1}{(n+l-2)!}X^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{l\varsigma}\}}(s,n-2,l;w)\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}};s\geq\frac{1}{2},n\geq2,l\geq0$

证明: $X^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{l\varsigma}\}}(s,n,l;w)=N^{A_\varsigma}(s;w)[\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{n\varsigma}}(\frac{1}{2};w)]_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}[\sigma^{\beta_{1\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\beta_{l\varsigma}\}}(s-\frac{1}{2};w)]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)$

$=N^{A_\varsigma}(s;w)[\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}}(\frac{1}{2};w)]_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}[\sigma^{\beta_{1\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\beta_{l\varsigma}\}}(s-\frac{1}{2};w)]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)$

$=N^{A_\varsigma}(s;w)\{\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}}(\frac{1}{2};w)[\frac{1}{4}\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}}]\}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}[\sigma^{\beta_{1\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\beta_{l\varsigma}\}}(s-\frac{1}{2};w)]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)$

$=\frac{1}{4}\frac{1}{(n+l-2)!}X^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{l\varsigma}\}}(s,n-2,l;w)\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}}$ □

推论2.2.1. $s\geq\frac{1}{2},l\geq0$

$$X^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{l\varsigma}\}}(s,n,l;w)=\begin{cases}\frac{1}{2^n}\frac{1}{l!}\delta^{\{\alpha_{1\varsigma}\alpha_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}}X^{\{\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{l\varsigma}\}\}}(s,0,l;w),n=2k\geq0\\ \frac{1}{2^{(n-1)}}\frac{1}{(l+1)!}\delta^{\{\alpha_{1\varsigma}\alpha_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{\alpha_{(n-2)\varsigma}\alpha_{(n-1)\varsigma}}X^{\{\alpha_{n\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{l\varsigma}\}\}}(s,1,l;w),n=2k+1\geq0\end{cases}$$

定理2.2.2. $X^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{l\varsigma}\}}(s,n,l;w);s\geq\frac{1}{2},n\geq1,l\geq1$

$=\frac{1}{(n+l-1)!}X^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{(l-1)\varsigma}\}}(s,n,l-1;w)\sigma^{\beta_{l\varsigma}\}}(s;w)-\frac{1}{4}\frac{1}{(n+l-2)!}X^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{(l-1)\varsigma}\}}(s,n-1,l-1;w)\delta^{\alpha_{n\varsigma}\beta_{l\varsigma}\}}$

证明: $X^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{l\varsigma}\}}(s,n,l;w)=N^{A_\varsigma}(s;w)[\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{n\varsigma}}(\frac{1}{2};w)]_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}[\sigma^{\beta_{1\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\beta_{l\varsigma}\}}(s-\frac{1}{2};w)]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)$

$=N^{A_\varsigma}(s;w)[\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{n\varsigma}}(\frac{1}{2};w)]_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}[\sigma^{\beta_{1\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\beta_{(l-1)\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)][\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_{l\varsigma}\}}(s;w)-\sigma^{\beta_{l\varsigma}\}}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{C_\varsigma}(s;w)]$

$=N^{A_\varsigma}(s;w)[\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{n\varsigma}}(\frac{1}{2};w)]_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}[\sigma^{\beta_{1\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\beta_{(l-1)\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_{l\varsigma}\}}(s;w)$

$-N^{A_\varsigma}(s;w)[\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{n\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_{l\varsigma}}(\frac{1}{2};w)]_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}[\sigma^{\beta_{1\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\beta_{(l-1)\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)$

$=\frac{1}{(n+l-1)!}X^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{(l-1)\varsigma}\}}(s,n,l-1;w)\sigma^{\beta_{l\varsigma}\}}(s;w)-X^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{l\varsigma}\}}(s,n+1,l-1;w)$

$=\frac{1}{(n+l-1)!}X^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{(l-1)\varsigma}\}}(s,n,l-1;w)\sigma^{\beta_{l\varsigma}\}}(s;w)-\frac{1}{4}\frac{1}{(n+l-2)!}X^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\beta_{1\varsigma}\cdot\cdot\beta_{(l-1)\varsigma}\}}(s,n-1,l-1;w)\delta^{\alpha_{n\varsigma}\beta_{l\varsigma}\}}$

□

3 复合常数不变张量$M^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)$和$N^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)$

3.1 复合常数不变张量$M^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)$和$N^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)$的引入

定义3.1.1.

$$\begin{cases}M^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w):=N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_{1\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{n\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)=X^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,0,n;w)\\ M(s,0;w)=1,M^{\alpha_{1\varsigma}}(s,1;w)=(1-\frac{1}{2s})\sigma^{\alpha_{1\varsigma}}(s;w);s\geq\frac{1}{2},n\geq 0\end{cases}$$

推论3.1.1.

$$\begin{cases}M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w):=N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)=X^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,0,n;w)\\ M^{\{\}}(s,0;w)=1,M^{\{\alpha_{1\varsigma}\}}(s,1;w)=(1-\frac{1}{2s})\sigma^{\alpha_{1\varsigma}}(s;w);s\geq\frac{1}{2},n\geq 0\end{cases}$$

定义3.1.2.

$$\begin{cases}N^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w):=N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_{1\varsigma}}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_{2\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{n\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)=X^{\alpha_{1\varsigma};\alpha_{2\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,1,n-1;w)\\ N(s,0;w)=1,N^{\alpha_{1\varsigma}}(s,1;w)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_{1\varsigma}}(s;w);s\geq\frac{1}{2},n\geq 0\end{cases}$$

推论3.1.2.

$$\begin{cases}N^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w):=N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_{2\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)=X^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,1,n-1;w)\\ N^{\{\}}(s,0;w)=1,N^{\{\alpha_{1\varsigma}\}}(s,1;w)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_{1\varsigma}}(s;w);s\geq\frac{1}{2},n\geq 0\end{cases}$$

3.2 复合常数不变张量$M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)$和$N^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)$的递推关系

定理3.2.1. $s\geq\frac{1}{2},n\geq 2$

$$N^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)=\frac{1}{(n-1)!}N^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s,n-1;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)-\frac{1}{4}\frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}}$$

证明： $N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_{2\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)$

$=N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_{2\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)[\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)-\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{C_\varsigma}(s;w)]$

$=N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_{2\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$

$-N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_{2\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{C_\varsigma}(s;w)$

$=\frac{1}{(n-1)!}N^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s,n-1;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)-\frac{1}{4}\frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}}$ □

定理3.2.2. $N^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)=\frac{1}{(n-1)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s,n-1;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)-M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w);s\geq\frac{1}{2},n\geq 1$

证明： $M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)$

$=N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)$

$=N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)[\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)-\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)]$

$=N^{A_\varsigma}(s;w)\frac{1}{(n-1)!}\sigma^{\{\{\alpha_{1\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$

$-N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)$

$=\frac{1}{(n-1)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s,n-1;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)-N^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)$ □

推论3.2.1.

$M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)$

$=\frac{2}{(n-1)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s,n-1;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)-\frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$

$+\frac{1}{4}\frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}};s\geq\frac{1}{2},n\geq 2$

证明： $N^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)$

$=\frac{1}{(n-1)!}N^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s,n-1;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)-\frac{1}{4}\frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{(n-1)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s,n-1;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)-M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)$

$=\frac{1}{(n-1)!}[\frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s;w)-M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s,n-1;w)]\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$

$-\frac{1}{4}\frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{(n-1)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s,n-1;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)-M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)$

$= \frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w) - \frac{1}{(n-1)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s,n-1;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$
$- \frac{1}{4}\frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}}$
$\Leftrightarrow M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)$
$= \frac{2}{(n-1)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s,n-1;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w) - \frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$
$+ \frac{1}{4}\frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}}; s \geq \frac{1}{2}, n \geq 2$ □

推论3.2.2. $M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w) = \frac{2}{(n-1)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s,n-1;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$
$+ \frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)[\frac{1}{4}\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}} - \sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)]; s \geq \frac{1}{2}, n \geq 2$

3.3 复合常数不变张量$M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)$递推关系的深入

推论3.3.1.
$M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s,n-1;w)$
$= \frac{2}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s;w) - \frac{1}{(n-3)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s;w)$
$+ \frac{1}{4}\frac{1}{(n-3)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)\delta^{\alpha_{(n-2)\varsigma}\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}; s \geq \frac{1}{2}, n \geq 3$

推论3.3.2. $M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w); s \geq \frac{1}{2}, n \geq 3$
$= \frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)[\frac{1}{4}\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}} + 3\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)]$
$+ \frac{1}{(n-3)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)[\frac{1}{2}\delta^{\alpha_{(n-2)\varsigma}\alpha_{(n-1)\varsigma}} - 2\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)]\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$

证明: $M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)$
$= \frac{2}{(n-1)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s,n-1;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w) - \frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$
$+ \frac{1}{4}\frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}}, n \geq 2$
$= \frac{2}{(n-1)!}[\frac{2}{(n-2)!}M^{\{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s;w)$
$- \frac{1}{(n-3)!}M^{\{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s;w)$
$+ \frac{1}{4}\frac{1}{(n-3)!}M^{\{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)\delta^{\alpha_{(n-2)\varsigma}\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}]\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$
$- \frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$
$+ \frac{1}{4}\frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}}, n \geq 2$
$= 2[\frac{2}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$
$- \frac{1}{(n-3)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$
$+ \frac{1}{4}\frac{1}{(n-3)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)\delta^{\alpha_{(n-2)\varsigma}\alpha_{(n-1)\varsigma}}\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)]$
$- \frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$
$+ \frac{1}{4}\frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}}, n \geq 2$
$= \frac{3}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$
$+ \frac{1}{4}\frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}}$
$- \frac{2}{(n-3)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$
$+ \frac{1}{4}\frac{2}{(n-3)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)\delta^{\alpha_{(n-2)\varsigma}\alpha_{(n-1)\varsigma}}\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$
$= \frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)[\frac{1}{4}\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}} + 3\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)]$
$+ \frac{1}{(n-3)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)[\frac{1}{2}\delta^{\alpha_{(n-2)\varsigma}\alpha_{(n-1)\varsigma}} - 2\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)]\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$ □

推论3.3.3. $M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n-2\varsigma}\}}(s,n;w) = \frac{2}{(n-3)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s;w)$
$+ \frac{1}{(n-4)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-4)\varsigma}\}}(s,n-4;w)[\frac{1}{4}\delta^{\alpha_{(n-3)\varsigma}\alpha_{(n-2)\varsigma}\}} - \sigma^{\alpha_{(n-3)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s;w)]; s \geq \frac{1}{2}, n \geq 4$

推论3.3.4. $M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)$
$= \frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2;w)[\frac{1}{4}\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}} + 3\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)]$
$+ \frac{1}{(n-3)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)[\frac{1}{2}\delta^{\alpha_{(n-2)\varsigma}\alpha_{(n-1)\varsigma}} - 2\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)]\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$
$= \frac{1}{(n-2)!}\{\frac{2}{(n-3)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s;w)$
$+\frac{1}{(n-4)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-4)\varsigma}\}}(s,n-4;w)[\frac{1}{4}\delta^{\alpha_{(n-3)\varsigma}\alpha_{(n-2)\varsigma}\}} - \sigma^{\alpha_{(n-3)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s;w)]\}[\frac{1}{4}\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}} + 3\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)]$
$+ \frac{1}{(n-3)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)[\frac{1}{2}\delta^{\alpha_{(n-2)\varsigma}\alpha_{(n-1)\varsigma}} - 2\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)]\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$

$= \frac{2}{(n-3)!}M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}}(s;w)[\frac{1}{4}\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}} + 3\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)]$

$+\frac{1}{(n-4)!}M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-4)\varsigma}\}}(s,n-4;w)[\frac{1}{4}\delta^{\alpha_{(n-3)\varsigma}\alpha_{(n-2)\varsigma}} - \sigma^{\alpha_{(n-3)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}}(s;w)][\frac{1}{4}\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}} + 3\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)]$

$+ \frac{1}{(n-3)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)[\frac{1}{2}\delta^{\alpha_{(n-2)\varsigma}\alpha_{(n-1)\varsigma}} - 2\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)]\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$

$= \frac{1}{(n-3)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-3)\varsigma}\}}(s,n-3;w)[\delta^{\alpha_{(n-2)\varsigma}\alpha_{(n-1)\varsigma}} + 4\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)]\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$

$+\frac{1}{(n-4)!}M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-4)\varsigma}\}}(s,n-4;w)[\frac{1}{4}\delta^{\alpha_{(n-3)\varsigma}\alpha_{(n-2)\varsigma}} - \sigma^{\alpha_{(n-3)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{(n-2)\varsigma}}(s;w)][\frac{1}{4}\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}} + 3\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)]$

3.4 复合常数不变张量$N^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w), s \geq \frac{1}{2}$前几项的直接计算

性质3.4.1. $N^{\{\alpha_\varsigma\}}(s,1) = N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w) = \frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)$

性质3.4.2. $N^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\}}(s,2) = N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)$
$= \frac{1}{2s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s;w) - \frac{s}{2}\delta^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\}}]$

证明: $N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)$

$= N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)[\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s;w) - \sigma^{\beta_\varsigma\}}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{C_\varsigma}(s;w)]$

$= N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s;w) - N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{C_\varsigma}(s;w)$

$= \frac{1}{2s}\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s;w) - N^{A_\varsigma}(s;w)\frac{1}{2}\delta_{A_\varsigma}{}^{C_\varsigma}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\bar{N}_{C_\varsigma}(s;w)$

$= \frac{1}{2s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s;w) - \frac{s}{2}\delta^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\}}]$ □

性质3.4.3. $N^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\}}(s,3) = N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)$
$= \frac{1}{2s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s;w) + \frac{1-4s}{4}\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\}}]$

证明: $N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)$

$= N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)[\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s;w) - \sigma^{\gamma_\varsigma\}}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{C_\varsigma}(s;w)]$

$= N^{A_\varsigma}(s;w)\frac{1}{2!}\sigma^{\{\{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s;w)$

$- N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\gamma_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{C_\varsigma}(s;w)$

$= \frac{1}{2s}\frac{1}{2!}[\sigma^{\{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s;w) - \frac{s}{2}\delta^{\{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\}}]\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s;w)$

$- N^{A_\varsigma}(s;w)\frac{1}{2!}\sigma^{\{\{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{C_\varsigma}(s;w)$

$= \frac{1}{2s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w) - \frac{s}{2}\delta^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}]\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s;w) - N^{A_\varsigma}(s;w)\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\delta_{A_\varsigma}{}^{C_\varsigma}\delta^{\{\alpha_\varsigma\gamma_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{C_\varsigma}(s;w)$

$= \frac{1}{2s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w) - \frac{s}{2}\delta^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}]\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s;w) - \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\delta^{\{\alpha_\varsigma\gamma_\varsigma}N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)$

$= \frac{1}{2s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s;w) + \frac{1-4s}{4}\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\}}]$ □

性质3.4.4. $N^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\eta_\varsigma\}}(s,4;w) = N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)$
$= \frac{1}{2s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s;w)\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s;w) + \frac{3}{4}(1-2s)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma\}} - \frac{s}{8}\delta^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma\}}]$

推论3.4.1.

$$\begin{cases} N^{\{\alpha_\varsigma\}}(s,1;w) = \frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w) \\ N^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\}}(s,2;w) = \frac{1}{2s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s;w) - \frac{s}{2}\delta^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\}}] \\ N^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\}}(s,3;w) = \frac{1}{2s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s;w) - \frac{1+2s}{4}\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\}}] \\ N^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\eta_\varsigma\}}(s,4;w) = \frac{1}{2s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s;w)\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s;w) + \frac{3}{4}(1-2s)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma\}} - \frac{s}{8}\delta^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma\}}] \end{cases}$$

3.5 复合常数不变张量$N^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n), s \geq \frac{1}{2}$前几项的直接计算

性质3.5.1. $N^{\alpha_\varsigma}(s,1) = N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\bar{N}_{B_\varsigma}(s) = \frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)$

性质3.5.2. $N^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}(s,2) = N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{B_\varsigma}(s) = \frac{1}{4s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s) - s\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}]$

证明: $N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{B_\varsigma}(s)$

$= N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})[-\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2})\bar{N}_{C_\varsigma}(s) + \bar{N}_{B_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma}(s)]$

$= -\frac{1}{4s}[s\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} + \sigma^{[\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma]}(s)] + \frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma}(s)$

$= \frac{1}{4s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s) - s\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}]$ □

性质3.5.3. $N^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}(s,3)=N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{B_\varsigma}(s)$
$=\frac{1}{8s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}-\delta^{\alpha_\varsigma[\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)]-\frac{1}{4}\delta^{\alpha_\varsigma\{\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s)+\frac{1}{4s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{[\beta_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)+\sigma^{\{\beta_\varsigma}(s)[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)]\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s)]$

证明: $N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{B_\varsigma}(s)$
$=N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})[-\sigma^{\gamma_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2})\bar{N}_{C_\varsigma}(s)+\bar{N}_{B_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)]$
$=-N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{C_\varsigma}(s)+\frac{1}{4s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s)-s\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}]\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)$
$=-N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2})[-\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{D_\varsigma}(\frac{1}{2})\bar{N}_{D_\varsigma}(s)+\bar{N}_{C_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma}(s)]+\frac{1}{4s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s)-s\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}]\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)$
$=\frac{1}{8s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma}-\delta^{\alpha_\varsigma[\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)]-\frac{1}{4s}[s\delta^{\alpha_\varsigma\gamma_\varsigma}+\sigma^{[\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)]\sigma^{\beta_\varsigma}(s)+\frac{1}{4s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s)-s\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}]\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)$
$=\frac{1}{8s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma}-\delta^{\alpha_\varsigma[\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)]-\frac{1}{4}\delta^{\alpha_\varsigma\{\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s)+\frac{1}{4s}\{\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)-\sigma^{[\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)\sigma^{\beta_\varsigma}(s)\}$
$=\frac{1}{8s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}-\delta^{\alpha_\varsigma[\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)]-\frac{1}{4}\delta^{\alpha_\varsigma\{\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s)+\frac{1}{4s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{[\beta_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)+\sigma^{\{\beta_\varsigma}(s)[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)]\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s)]$ □

推论3.5.1.
$N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{B_\varsigma}(s)=\frac{1}{4s}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}-\frac{1}{2}\delta^{\alpha_\varsigma\{\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s)+\frac{1}{2s}\sigma^{\{\beta_\varsigma}(s)[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)]\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s)$

性质3.5.4. $N^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\eta_\varsigma}(s,4)=N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\sigma^{\eta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{B_\varsigma}(s)$
$=-\frac{1}{16}(\delta^{\alpha_\varsigma\eta_\varsigma}\delta^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma}+\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma}-\delta^{\alpha_\varsigma\gamma_\varsigma}\delta^{\beta_\varsigma\eta_\varsigma})+\frac{i}{16s}[\varepsilon^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{\eta_\varsigma}(s)-\varepsilon^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma\eta_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)]$
$-\frac{1}{16s}[\delta^{\alpha_\varsigma\eta_\varsigma}\sigma^{[\gamma_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma]}(s)+\sigma^{[\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma]}(s)\delta^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma}]$
$+\frac{1}{8s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\eta_\varsigma\gamma_\varsigma}+\delta^{\alpha_\varsigma[\eta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)]\sigma^{\beta_\varsigma}(s)+\frac{1}{8s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\eta_\varsigma\beta_\varsigma}+\delta^{\alpha_\varsigma[\eta_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma]}(s)]\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)+\frac{1}{8s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}-\delta^{\alpha_\varsigma[\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)]\sigma^{\eta_\varsigma}(s)$
$-\frac{1}{4}[\delta^{\alpha_\varsigma\eta_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)+\delta^{\alpha_\varsigma\{\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s)\sigma^{\eta_\varsigma}(s)]$
$+\frac{1}{4s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{[\beta_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)\sigma^{\eta_\varsigma}(s)+\sigma^{\{\beta_\varsigma}(s)[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)]\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s)\sigma^{\eta_\varsigma}(s)-\sigma^{[\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma]}(s)\sigma^{\beta_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)]$

证明: $N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\sigma^{\eta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{B_\varsigma}(s)$
$=N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}(s-\frac{1}{2})[-\sigma^{\eta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2})\bar{N}_{C_\varsigma}(s)+\bar{N}_{B_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma}(s)]$
$=-N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\eta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{C_\varsigma}(s)$
$+N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{B_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma}(s)$
$=-N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\eta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})[-\sigma^{\gamma_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{D_\varsigma}(\frac{1}{2})\bar{N}_{D_\varsigma}(s)+\bar{N}_{C_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)]$
$+N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{B_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma}(s)$
$=N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\eta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{D_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{D_\varsigma}(s)$
$-N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\eta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{C_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)$
$+N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{B_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma}(s)$
$=N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\eta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{D_\varsigma}(\frac{1}{2})[-\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{D_\varsigma}{}^{E_\varsigma}(\frac{1}{2})\bar{N}_{E_\varsigma}(s)+\bar{N}_{D_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma}(s)]$
$-N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\eta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{C_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)$
$+N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{B_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma}(s)$
$=-N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\eta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{D_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{D_\varsigma}{}^{E_\varsigma}(\frac{1}{2})\bar{N}_{E_\varsigma}(s)$
$+N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\eta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{D_\varsigma}(\frac{1}{2})\bar{N}_{D_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma}(s)$
$-N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\eta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{C_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)$
$+N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\sigma^{\gamma_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{B_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma}(s)$
$=-\frac{1}{16}(\delta^{\alpha_\varsigma\eta_\varsigma}\delta^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma}+\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma}-\delta^{\alpha_\varsigma\gamma_\varsigma}\delta^{\beta_\varsigma\eta_\varsigma})$
$-\frac{1}{16s}[\delta^{\alpha_\varsigma\eta_\varsigma}\sigma^{[\gamma_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma]}(s)+\sigma^{[\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma]}(s)\delta^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma}]+\frac{i}{16s}[\varepsilon^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{\eta_\varsigma}(s)-\varepsilon^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma\eta_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)]$
$+\frac{1}{8s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\eta_\varsigma\gamma_\varsigma}+\delta^{\alpha_\varsigma[\eta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)]\sigma^{\beta_\varsigma}(s)$
$+\frac{1}{8s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\eta_\varsigma\beta_\varsigma}+\delta^{\alpha_\varsigma[\eta_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma]}(s)]\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)-\frac{1}{4s}[s\delta^{\alpha_\varsigma\eta_\varsigma}+\sigma^{[\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma]}(s)]\sigma^{\beta_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)$
$+\frac{1}{8s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}-\delta^{\alpha_\varsigma[\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)]\sigma^{\eta_\varsigma}(s)-\frac{1}{4}\delta^{\alpha_\varsigma\{\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s)\sigma^{\eta_\varsigma}(s)$
$+\frac{1}{4s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{[\beta_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)+\sigma^{\{\beta_\varsigma}(s)[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)]\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s)]\sigma^{\eta_\varsigma}(s)$
$=-\frac{1}{16}(\delta^{\alpha_\varsigma\eta_\varsigma}\delta^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma}+\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma}-\delta^{\alpha_\varsigma\gamma_\varsigma}\delta^{\beta_\varsigma\eta_\varsigma})+\frac{i}{16s}[\varepsilon^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{\eta_\varsigma}(s)-\varepsilon^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma\eta_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)]$
$-\frac{1}{16s}[\delta^{\alpha_\varsigma\eta_\varsigma}\sigma^{[\gamma_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma]}(s)+\sigma^{[\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma]}(s)\delta^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma}]$
$+\frac{1}{8s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\eta_\varsigma\gamma_\varsigma}+\delta^{\alpha_\varsigma[\eta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)]\sigma^{\beta_\varsigma}(s)+\frac{1}{8s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\eta_\varsigma\beta_\varsigma}+\delta^{\alpha_\varsigma[\eta_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma]}(s)]\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)+\frac{1}{8s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}-\delta^{\alpha_\varsigma[\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)]\sigma^{\eta_\varsigma}(s)$

$-\frac{1}{4}[\delta^{\alpha_\varsigma\eta_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)+\delta^{\alpha_\varsigma\{\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s)\sigma^{\eta_\varsigma}(s)]$
$+\frac{1}{4s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{[\beta_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)\sigma^{\eta_\varsigma}(s)+\sigma^{\{\beta_\varsigma}(s)[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)]\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s)\sigma^{\eta_\varsigma}(s)-\sigma^{[\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma]}(s)\sigma^{\beta_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)]$ □

推论3.5.2. $N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma^{\{\gamma_\varsigma}(s-\frac{1}{2})[\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})]\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{B_\varsigma}(s)$
$=\frac{1}{8}(-\delta^{\alpha_\varsigma\eta_\varsigma}\delta^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma}+\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma}-\delta^{\alpha_\varsigma\gamma_\varsigma}\delta^{\beta_\varsigma\eta_\varsigma})-\frac{i}{16s}[\varepsilon^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{\eta_\varsigma}(s)+\varepsilon^{\eta_\varsigma\beta_\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)]$
$\frac{1}{16s}[\delta^{\alpha_\varsigma\eta_\varsigma}\sigma^{[\gamma_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma]}(s)+\delta^{\alpha_\varsigma\gamma_\varsigma}\sigma^{[\eta_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma]}(s)-\sigma^{[\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma]}(s)\delta^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma}-\sigma^{[\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s)\delta^{\eta_\varsigma\beta_\varsigma}]$
$+\frac{1}{4s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\eta_\varsigma\gamma_\varsigma}]\sigma^{\beta_\varsigma}(s)+\frac{1}{4s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\eta_\varsigma\beta_\varsigma}]\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)+\frac{1}{4s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}]\sigma^{\eta_\varsigma}(s)-\frac{1}{4}[\delta^{\alpha_\varsigma\{\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s)]$
$+\frac{1}{4s}[\sigma^{\{\beta_\varsigma}(s)[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)]\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s)-\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\{\beta_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s)+2\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\{\gamma_\varsigma}(s)[\sigma^{\beta_\varsigma}(s)]\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s)]$

推论3.5.3. $N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})[(s-\frac{3}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma}+(s-\frac{1}{2})\delta^{\beta_\varsigma\{\gamma_\varsigma}\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2})]\bar{N}_{B_\varsigma}(s)$
$=(s-\frac{3}{2})\frac{1}{4s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s)-s\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}]\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma}+(s-\frac{1}{2})\frac{1}{4s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s)\delta^{\eta_\varsigma\beta_\varsigma}+\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s)\delta^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma}-s\delta^{\alpha_\varsigma\{\gamma_\varsigma}\delta^{\eta_\varsigma\}\beta_\varsigma}]\}$

性质3.5.5. $\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}+\sigma^{\{\beta_\varsigma}(s)[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)]\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s)=\frac{1}{3!}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\}}+2\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma}(s)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s)]$

4 复合常数不变张量$\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$

4.1 复合常数不变张量$\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,n;w)$的定义

定义4.1.1.

$$\begin{cases}\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,n;w):=\Gamma^{A_{1\varsigma}\cdot\cdot A_{n\varsigma}A_{(n+1)\varsigma}\cdot\cdot A_{(2s)\varsigma}}_{k_\varsigma}(s;w)\prod_{i=1}^{n}\sigma^{\alpha_{i\varsigma}}{}_{A_{i\varsigma}}{}^{B_{i\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{B_{1\varsigma}\cdot\cdot B_{n\varsigma}A_{(n+1)\varsigma}\cdot\cdot A_{(2s)\varsigma}}(s;w);n\geq0,s\geq\frac{n}{2}|\frac{1}{2}\\ \Gamma_{\alpha'_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha'_{n\varsigma}}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,n;w):=\Gamma^{k'_\varsigma}_{A'_{1\varsigma}\cdot\cdot A'_{n\varsigma}A'_{(n+1)\varsigma}\cdot\cdot A'_{(2s)\varsigma}}(s;w)\prod_{i=1}^{n}\sigma_{\alpha'_{i\varsigma}}{}^{A'_{i\varsigma}}{}_{B'_{i\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{B'_{1\varsigma}\cdot\cdot B'_{n\varsigma}A'_{(n+1)\varsigma}\cdot\cdot A'_{(2s)\varsigma}}_{l'_\varsigma}(s;w);n\geq0,s\geq\frac{n}{2}|\frac{1}{2}\end{cases}$$

定义4.1.2. $\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w):\prec\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,n;w),\Gamma_{\alpha'_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha'_{n\varsigma}}(s,n;w):\prec\Gamma_{\alpha'_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha'_{n\varsigma}}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,n;w);n\geq0,s\geq\frac{n}{2}|\frac{1}{2}$

推论4.1.1. $\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,n;w)\simeq\Gamma_{\alpha'_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha'_{n\varsigma}}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s,n;w),\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)\simeq\Gamma_{\alpha'_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha'_{n\varsigma}}(s,n;w);n\geq0,s\geq\frac{n}{2}|\frac{1}{2}$

4.2 复合常数不变张量$\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,n;w)$的递推公式

定理4.2.1. $\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)=N^{A_{1\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{1\varsigma}}{}_{A_{1\varsigma}}{}^{B_{1\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{\alpha_{2\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n-1;w)\bar{N}_{B_{1\varsigma}}(s;w);n\geq1,s\geq\frac{n}{2}|\frac{1}{2}$

证明: $\Gamma^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)$
$=\Gamma^{A_{1\varsigma}\cdot\cdot A_{n\varsigma}A_{(n+1)\varsigma}\cdot\cdot A_{(2s)\varsigma}}_{k_{1\varsigma}}(s;w)\prod_{i=1}^{n}\sigma^{\alpha_{i\varsigma}}{}_{A_{i\varsigma}}{}^{B_{i\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_{1\varsigma}}_{B_{1\varsigma}\cdot\cdot B_{n\varsigma}A_{(n+1)\varsigma}\cdot\cdot A_{(2s)\varsigma}}(s;w)$
$=N^{A_{1\varsigma}k_{2\varsigma}}_{k_{1\varsigma}}(s;w)\Gamma^{A_{2\varsigma}\cdot\cdot A_{n\varsigma}A_{(n+1)\varsigma}\cdot\cdot A_{(2s)\varsigma}}_{k_{2\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\prod_{i=1}^{n}\sigma^{\alpha_{i\varsigma}}{}_{A_{i\varsigma}}{}^{B_{i\varsigma}}(\frac{1}{2};w)N^{l_{1\varsigma}}_{B_{2\varsigma}l_{2\varsigma}}\Gamma^{l_{2\varsigma}}_{B_{2\varsigma}\cdot\cdot B_{n\varsigma}A_{(n+1)\varsigma}\cdot\cdot A_{(2s)\varsigma}}(s;w)$
$=N^{A_{1\varsigma}k_{2\varsigma}}_{k_{1\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{1\varsigma}}{}_{A_{1\varsigma}}{}^{B_{1\varsigma}}(\frac{1}{2};w)$
$[\Gamma^{A_{2\varsigma}\cdot\cdot A_{n\varsigma}A_{(n+1)\varsigma}\cdot\cdot A_{(2s)\varsigma}}_{k_{2\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\prod_{i=2}^{n}\sigma^{\alpha_{i\varsigma}}{}_{A_{i\varsigma}}{}^{B_{i\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_{2\varsigma}}_{B_{2\varsigma}\cdot\cdot B_{n\varsigma}A_{(n+1)\varsigma}\cdot\cdot A_{(2s)\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)]N^{l_{1\varsigma}}_{B_{1\varsigma}l_{1\varsigma}}(s;w)$
$=N^{A_{1\varsigma}k_{2\varsigma}}_{k_{1\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{1\varsigma}}{}_{A_{1\varsigma}}{}^{B_{1\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{\alpha_{2\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}{}_{k_{2\varsigma}}{}^{l_{2\varsigma}}(s,n-1;w)N^{l_{1\varsigma}}_{B_{1\varsigma}l_{1\varsigma}}(s;w)$
$=N^{A_{1\varsigma}}(s;w)\sigma^{\alpha_{1\varsigma}}{}_{A_{1\varsigma}}{}^{B_{1\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{\alpha_{2\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n-1;w)\bar{N}_{B_{1\varsigma}}(s;w)$ □

推论4.2.1. $\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w);n\geq1,s\geq\frac{n}{2}|\frac{1}{2}$
$=N^{A_{1\varsigma}}(s;w)\cdot\cdot N^{A_{n\varsigma}}(s-\frac{n-1}{2};w)\sigma^{\alpha_{1\varsigma}}{}_{A_{1\varsigma}}{}^{B_{1\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{n\varsigma}}{}_{A_{n\varsigma}}{}^{B_{n\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_{n\varsigma}}(s-\frac{n-1}{2};w)\cdot\cdot\bar{N}_{B_{1\varsigma}}(s;w)$

推论4.2.2. $\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)=N^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}}(s,n;w)\sigma^{\alpha_{1\varsigma}}{}_{A_{1\varsigma}}{}^{B_{1\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{n\varsigma}}{}_{A_{n\varsigma}}{}^{B_{n\varsigma}}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_{\varsigma1}\cdot\cdot B_{\varsigma n}}(s,n;w)$

4.3 复合常数不变张量$\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,n;w),s\geq\frac{1}{2}$前几项的直接计算

性质4.3.1. $N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{C_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2s})\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\}}$

性质4.3.2. $\Gamma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,1)=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{I_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{I_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{(1!)^2}C_{2s}^{-1}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$

性质4.3.3. $\Gamma^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,2)=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{I_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{J_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{I_\varsigma J_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)$
$=\frac{1}{(2!)^2}C_{2s}^{-2}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s;w)-\frac{s}{2}\delta^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\}}]_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}$

证明: $\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{I_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{J_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{I_\varsigma J_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)$

$$= \frac{1}{2!}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{I_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}{}_{B_\varsigma}{}^{J_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{I_\varsigma J_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)$$
$$= \frac{1}{2!}[N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\frac{1}{2s-1}\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)]_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}$$
$$= \frac{1}{2s-1}\frac{1}{4s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s;w)-s\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}]_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}$$
$$= \frac{1}{(2!)^2}C_{2s}^{-2}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s;w)-\frac{s}{2}\delta^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\}}]_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}$$ □

性质4.3.4. $\Gamma^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,3)=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{I_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{J_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\gamma_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{K_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{I_\varsigma J_\varsigma K_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)$

$$= \frac{1}{(3!)^2}C_{2s}^{-3}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s;w)+\frac{1-3s}{2}\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\}}]$$

证明: $\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{I_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{J_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\gamma_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{K_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{I_\varsigma J_\varsigma K_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)$

$$= N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\frac{1}{2s-2}[\frac{1}{4s-2}\sigma^{\{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2};w)-\frac{1}{4}\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)$$
$$= \frac{1}{4(s-1)(2s-1)}N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)-\frac{1}{16s(s-1)}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}$$
$$= \frac{1}{4(s-1)(2s-1)}\{\frac{1}{2s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}+\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s;w)+\sigma^{\gamma_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)]-\frac{1}{4}\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\}}\}$$
$$= \frac{1}{4(s-1)(2s-1)}\{\frac{1}{2s}\frac{1}{3!}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\}}+2\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s;w)]-\frac{1}{4}\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\}}\}$$
$$= \frac{1}{48s(s-1)(2s-1)}[2\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s;w)+(1-3s)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\}}]$$
$$= \frac{1}{16s(s-\frac{1}{2};w)(s-1)}\{\sigma^{\{\beta_\varsigma}(s;w)[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)]\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s;w)-[(s-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}+s\delta^{\alpha_\varsigma\{\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s;w)]\}$$
$$= \frac{1}{(3!)^2}C_{2s}^{-3}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s;w)+\frac{1-3s}{2}\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\}}]$$ □

性质4.3.5. $\Gamma^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\eta_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,4)$

$$= \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{I_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{J_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\gamma_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{K_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\eta_\varsigma}{}_{D_\varsigma}{}^{L_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{I_\varsigma J_\varsigma K_\varsigma L_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)$$
$$= \frac{1}{(4!)^2}C_{2s}^{-4}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s;w)\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s;w)+(2-3s)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma\}}+\frac{3}{4}s(s-1)\delta^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma\}}]$$

证明: $\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{I_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{J_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\gamma_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{K_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\eta_\varsigma}{}_{D_\varsigma}{}^{L_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{I_\varsigma J_\varsigma K_\varsigma L_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)$

$$= \frac{1}{16(s-\frac{1}{2};w)(s-1)(s-\frac{3}{2})}N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)$$
$$\{\sigma^{\{\gamma_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)[\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2};w)-[(s-\frac{3}{2})\sigma^{\beta_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma}+(s-\frac{1}{2})\delta^{\beta_\varsigma\{\gamma_\varsigma}\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s-\frac{1}{2};w)]\}\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)$$
$$= \frac{1}{16(s-\frac{1}{2};w)(s-1)(s-\frac{3}{2})}$$
$$\{\frac{1}{8}(-\delta^{\alpha_\varsigma\eta_\varsigma}\delta^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma}+\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma}-\delta^{\alpha_\varsigma\gamma_\varsigma}\delta^{\beta_\varsigma\eta_\varsigma})-\frac{i}{16s}[\varepsilon^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{\eta_\varsigma}(s;w)+\varepsilon^{\eta_\varsigma\beta_\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma}(s;w)]$$
$$\frac{1}{16s}[\delta^{\alpha_\varsigma\eta_\varsigma}\sigma^{[\gamma_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma]}(s;w)+\delta^{\alpha_\varsigma\gamma_\varsigma}\sigma^{[\eta_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma]}(s;w)-\sigma^{[\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\eta_\varsigma]}(s;w)\delta^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma}-\sigma^{[\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma]}(s;w)\delta^{\eta_\varsigma\beta_\varsigma}]$$
$$+\frac{1}{4s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\delta^{\eta_\varsigma\gamma_\varsigma}]\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)+\frac{1}{4s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\delta^{\eta_\varsigma\beta_\varsigma}]\sigma^{\gamma_\varsigma}(s;w)+\frac{1}{4s}[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\delta^{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}]\sigma^{\eta_\varsigma}(s;w)-\frac{1}{4}[\delta^{\alpha_\varsigma\{\beta_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma}(s;w)\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s;w)]$$
$$+\frac{1}{4s}[\sigma^{\{\beta_\varsigma}(s;w)[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)]\sigma^{\gamma_\varsigma}(s;w)\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s;w)-\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\beta_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s;w)\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s;w)$$
$$+2\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\gamma_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s;w)]-(s-\frac{3}{2})\frac{1}{4s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma\}}(s;w)-s\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}]\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma}$$
$$-(s-\frac{1}{2};w)\frac{1}{4s}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma\}}(s;w)\delta^{\eta_\varsigma\beta_\varsigma}+\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s;w)\delta^{\gamma_\varsigma\beta_\varsigma}-s\delta^{\alpha_\varsigma\{\gamma_\varsigma}\delta^{\eta_\varsigma\}\beta_\varsigma}]\}$$
$$= \frac{1}{(4!)^2}C_{2s}^{-4}[\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\sigma^{\gamma_\varsigma}(s;w)\sigma^{\eta_\varsigma\}}(s;w)+(2-3s)\sigma^{\{\alpha_\varsigma}(s;w)\sigma^{\beta_\varsigma}(s;w)\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma\}}+\frac{3}{4}s(s-1)\delta^{\{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta^{\gamma_\varsigma\eta_\varsigma\}}]$$ □

5 $M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w),N^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w),\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)$的展开式

5.1 $M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)$的展开式及其递推关系

定义5.1.1. $\Omega^i(s,n;w):=\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}(s;w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{i\varsigma}}(s;w)\delta^{\alpha_{(i+1)\varsigma}\alpha_{(i+1)\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{[\alpha_{(n-1)\varsigma}]\alpha_{n\varsigma}\}}$

定义5.1.2. $\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n,n-2k):=\delta^{\{\alpha_{1\varsigma}\alpha_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{\alpha_{(2k-1)\varsigma}\alpha_{(2k)\varsigma}}\sigma^{\alpha_{(2k+1)\varsigma}}(s;w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w),0\leq k\leq[n/2]$

定理5.1.1. $M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)=\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}m(s,n;n-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n,n-2k);s\geq\frac{1}{2},n\geq 0$

$$\begin{cases}m(s,n;n-2k)=2m(s,n-1;n-1-2k)-m(s,n-2;n-2-2k)+\frac{1}{4}m(s,n-2;n-2k)\\ m(s,0;0)=1,m(s,1;1)=1-\frac{1}{2s},m(s,l\geq 0;i<0|i>l):=0;s\geq\frac{1}{2},n\geq 2,0\leq k\leq[n/2]\end{cases}$$

证明: 下面采用数学归纳法证明它

第一步：$i=0,1$时成立，即

$M(s,0)=1=\sum\limits_{k=0}^{[0/2]}m(s,0;0-2k)\Omega(s,0,0-2k),m(s,0;0)=1$

$M^{\alpha_{1\varsigma}}(s,1)=(1-\frac{1}{2s})\sigma^{\alpha_{1\varsigma}}(s;w)=\sum\limits_{k=0}^{[1/2]}m(s,1;1-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}}(s,1,1-2k),m(s,1;1)=1-\frac{1}{2s}$

第二步：假设$i\leq n-1$时成立，即

$M^{\alpha_1\cdots\alpha_i}(s,i)=\sum\limits_{k=0}^{[i/2]}m(s,i;i-2k)\Omega^{\alpha_1\cdots\alpha_i}(s,i,i-2k),0\leq i\leq n-1$

第三步：$i=n(\geq 2)$时

$M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)=\frac{2}{(n-1)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s,n-1)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$

$-\frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2)\sigma^{\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)+\frac{1}{4}\frac{1}{(n-2)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{(n-2)\varsigma}\}}(s,n-2)\delta^{\alpha_{n-1}\alpha_n\}}$

$=\frac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{[(n-2)/2]}m(s,n-2;n-2-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n,n-2-2k)$

$+2\sum\limits_{k=0}^{[(n-1)/2]}m(s,n-1;n-1-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n,n-2k)-\sum\limits_{k=0}^{[(n-2)/2]}m(s,n-2;n-2-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n,n-2k)$

$=\frac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}m(s,n-2;n-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n,n-2k)$

$+2\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}m(s,n-1;n-1-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n,n-2k)-\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}m(s,n-2;n-2-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n,n-2k)$

$=\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}m(s,n;n-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n,n-2k)$

$m(s,n;n-2k)=2m(s,n-1;n-1-2k)-m(s,n-2;n-2-2k)+\frac{1}{4}m(s,n-2;n-2k),0\leq k\leq[n/2]$

此步证明了$i=n$时成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

5.2 $N^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)$的展开式及其递推关系

定理5.2.1. $N^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)=\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}n(s,n;n-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w);s\geq\frac{1}{2},n\geq 0$

$$\begin{cases}n(s,n;n-2k)=m(s,n-1;n-1-2k)-m(s,n;n-2k),n(s,l\geq 0;i<0|i>l):=0\\ n(s,0;0)=1;s\geq\frac{1}{2},n\geq 1,0\leq k\leq[n/2]\end{cases}$$

证明: $n=0$情形：$N(s,0)=\sum\limits_{k=0}^{[0/2]}n(s,0;0-2k)\Omega(s,0,0-2k),n(s,0;0)=1$ □

证明: $n=1$情形：$N^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)=\frac{1}{(n-1)!}M^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s,n-1;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)-M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)$

$=\sum\limits_{k=0}^{[(n-1)/2]}m(s,n-1;n-1-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)-\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}m(s,n;n-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)$

$=\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}m(s,n-1;n-1-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)-\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}m(s,n;n-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)$

$=\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}[m(s,n-1;n-1-2k)-m(s,n;n-2k)]\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)$

$=\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}n(s,n;n-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w),n(s,n;n-2k)=m(s,n-1;n-1-2k)-m(s,n;n-2k)$ □

5.3 $\Gamma^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s;w)$的展开式及其递推关系

定理5.3.1. $\Gamma^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)=\sum_{k=0}^{[n/2]}c(s,n;n-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w);s\geq\frac{n}{2}|\frac{1}{2},0\leq n\leq 2s$

$$\begin{cases}c(s,n;n-2k)=\sum_{l=0}^{[(n-1)/2]}c(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2l)n(s,n-2l;n-2k),c(s,l\geq 0;i<0|i>l):=0\\ c(s,0;0)=1,c(s,1;1)=\frac{1}{2s};s\geq\frac{1}{2}|\frac{n}{2},1\leq n\leq 2s,0\leq k\leq[n/2]\end{cases}$$

证明: 下面采用数学归纳法证明它

第一步：$i=0,s\geq\frac{1}{2}$时成立，即

$\Gamma(s,0)=\sum_{k=0}^{[0/2]}c(s,0;0-2k)\Omega(s,0,0-2k),c(s,0;0)=1$

第二步：假设$i\leq n-1(\geq 0),s\geq\frac{1}{2}$时成立，即

$\Gamma^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s-\frac{1}{2},n-1;w)=\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}c(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}}(s-\frac{1}{2},n-1;w)$

第三步：$i=n(\geq 1),s\geq\frac{1}{2}$时

$\Gamma^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w)=\frac{1}{(n-1)!}N^{A_\varsigma}(s;w)\Gamma^{\{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-1)\varsigma}\}}(s-\frac{1}{2},n-1;w)\sigma^{\alpha_{n\varsigma}\}}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)$

$=N^{A_\varsigma}(s;w)\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}c(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2k)$

$\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_{2\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{(n-2k)\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\delta^{\alpha_{(n-2k+1)\varsigma}\alpha_{(n-2k+2)\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}}\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)$

$=\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}c(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2k)$

$N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\{\alpha_{1\varsigma}}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_{2\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot\sigma^{\alpha_{(n-2k)\varsigma}}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)\delta^{\alpha_{(n-2k+1)\varsigma}\alpha_{(n-2k+2)\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}}$

$=\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}c(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2k)N^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{(n-2k)\varsigma}\}}(s-\frac{1}{2},n-2k;w)\delta^{\alpha_{(n-2k+1)\varsigma}\alpha_{(n-2k+2)\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}}$

$=\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}c(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2k)$

$\sum_{l=0}^{[n/2-k]}n(s,n-2k;n-2k-2l)\Omega^{n-2k-2l}(s,n-2k;w)\delta^{\alpha_{(n-2k+1)\varsigma}\alpha_{(n-2k+2)\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{\alpha_{(n-1)\varsigma}\alpha_{n\varsigma}\}}$

$=\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}c(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2k)\sum_{l=0}^{[n/2-k]}n(s,n-2k;n-2k-2l)\Omega^{n-2k-2l}(s,n;w)$

$=\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\sum_{l=0}^{[n/2-k]}c(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2k)n(s,n-2k;n-2k-2l)\Omega^{n-2k-2l}(s,n;w)$

$=\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\sum_{l=k}^{[n/2]}c(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2k)n(s,n-2k;n-2l)\Omega^{n-2l}(s,n;w)$

$=\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\sum_{l=0}^{[n/2]}c(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2k)n(s,n-2k;n-2l)\Omega^{n-2l}(s,n;w)$

$=\sum_{k=0}^{[n/2]}\sum_{l=0}^{[(n-1)/2]}c(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2l)n(s,n-2l;n-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)$

$=\sum_{k=0}^{[n/2]}\sum_{l=k}^{[(n-1)/2]}c(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2l)n(s,n-2l;n-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)$

$=\sum_{k=0}^{[n/2]}c(s,n;n-2k)\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w),c(s,n;n-2k)=\sum_{l=k}^{[(n-1)/2]}c(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2l)n(s,n-2l;n-2k)$

此步证明了$i=n$时成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

5.4 递推关系的等价扩展

推论5.4.1.

$$\begin{cases}m(s,n;i)=2m(s,n-1;i-1)-m(s,n-2;i-2)+\frac{1}{4}m(s,n-2;i),m(s,l\geq 0;j<0|j>l):=0\\ m(s,0;0)=1,m(s,1;0)=0,m(s,1;1)=1-\frac{1}{2s};s\geq\frac{1}{2},n\geq 2,0\leq i\leq n\end{cases}$$

推论5.4.2.

$$\begin{cases} n(s,n;i) = m(s,n-1;i-1) - m(s,n;i), n(s,l\geq 0; j<0|j>l) := 0 \\ n(s,0;0) = 1, n(s,1;0) = 0; s\geq \frac{1}{2}, n\geq 1, 0\leq i\leq n \end{cases}$$

推论5.4.3.

$$\begin{cases} c(s,n;i) = \sum\limits_{k=i}^{n} c(s-\frac{1}{2}, n-1; k-1) n(s,k;i), c(s,l\geq 0; j<0|j>l) := 0 \\ c(s,0;0) = 1, c(s,1;0) = 0, c(s,1;1) = \frac{1}{2s}; s\geq \frac{1}{2}|\frac{n}{2}, 1\leq n\leq 2s, 0\leq i\leq n \end{cases}$$

6 s解析延拓后数列的递推关系和初始条件

6.1 关于s的解析延拓的等价递推关系

推论6.1.1.

$$\begin{cases} m(s,n;i) = 2m(s,n-1;i-1) - m(s,n-2;i-2) + \frac{1}{4}m(s,n-2;i), m(s,l\geq 0; j<0|j>l) := 0 \\ m(s,0;0) = 1, m(s,1;0) = 0, m(s,1;1) = 1-\frac{1}{2s}; s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 2, 0\leq i\leq n \end{cases}$$

推论6.1.2.

$$\begin{cases} n(s,n;i) = m(s,n-1;i-1) - m(s,n;i), n(s,l\geq 0; j<0|j>l) := 0 \\ n(s,0;0) = 1, n(s,1;0) = 0; s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 1, 0\leq i\leq n \end{cases}$$

推论6.1.3.

$$\begin{cases} c(s,n;i) = \sum\limits_{k=i}^{n} c(s-\frac{1}{2}, n-1; k-1) n(s,k;i), c(s,l\geq 0; j<0|j>l) := 0 \\ c(s,0;0) = 1, c(s,1;0) = 0, c(s,1;1) = \frac{1}{2s}; s\in\mathbb{C}, n\geq 1, 0\leq i\leq n \end{cases}$$

6.2 更广义的等价递推关系

推论6.2.1.

$$\begin{cases} m(s,n;i) = 2m(s,n-1;i-1) - m(s,n-2;i-2) + \frac{1}{4}m(s,n-2;i), m(s,l\geq 0; j<0|j>l) := 0 \\ m(s,0;0) = 1, m(s,1;0) = 0, m(s,1;1) = 1-\frac{1}{2s}; s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 2 \end{cases}$$

推论6.2.2.

$$\begin{cases} n(s,n;i) = m(s,n-1;i-1) - m(s,n;i), n(s,l\geq 0; j<0|j>l) := 0 \\ n(s,0;0) = 1, n(s,1;0) = 0; s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 1 \end{cases}$$

推论6.2.3.

$$\begin{cases} c(s,n;i) = \sum\limits_{k=i}^{n} c(s-\frac{1}{2}, n-1; k-1) n(s,k;i), c(s,l\geq 0; j<0|j>l) := 0 \\ c(s,0;0) = 1, c(s,1;0) = 0, c(s,1;1) = \frac{1}{2s}; s\in\mathbb{C}, n\geq 1 \end{cases}$$

6.3 应用迭代法对前几项展开系数进行具体计算

推论6.3.1. $s\neq 0\in\mathbb{C}$

$$\begin{cases} m(s,0;0) = 1, m(s,1;0) = 0, m(s,1;1) = 1-\frac{1}{2s} \\ m(s,2;0) = \frac{1}{4}, m(s,2;1) = 0, m(s,2;2) = 1-\frac{2}{2s} \\ m(s,3;0) = 0, m(s,3;1) = \frac{3}{4}-\frac{1}{8s}, m(s,3;2) = 0, m(s,3;3) = 1-\frac{3}{2s} \\ m(s,4;0) = \frac{1}{16}, m(s,4;1) = 0, m(s,4;2) = \frac{3}{2}-\frac{1}{2s}, m(s,4;3) = 0, m(s,4;4) = 1-\frac{4}{2s} \end{cases}$$

推论6.3.2. $s\neq 0\in\mathbb{C}$

$$\begin{cases} n(s,0;0) = \frac{1}{2s}, n(s,1;0) = 0, n(s,1;1) = \frac{1}{2s} \\ n(s,2;0) = -\frac{1}{4}, n(s,2;1) = 0, n(s,2;2) = \frac{1}{2s} \\ n(s,3;0) = 0, n(s,3;1) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{8s}, n(s,3;2) = 0, n(s,3;3) = \frac{1}{2s} \\ n(s,4;0) = -\frac{1}{16}, n(s,4;1) = 0, n(s,4;2) = -\frac{3}{4}+\frac{3}{8s}, n(s,4;3) = 0, n(s,4;4) = \frac{1}{2s} \end{cases}$$

推论6.3.3. $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} c(s,0;0)=1, c(s,1;0)=0, c(s,1;1)=\frac{(2s-1)!}{(2s)!} \\ c(s,2;0)=\frac{(2s-2)!}{(2s)!}\frac{-s}{2}, c(s,2;1)=0, c(s,2;2)=\frac{(2s-2)!}{(2s)!} \\ c(s,3;0)=0, c(s,3;1)=\frac{(2s-3)!}{(2s)!}\frac{1-3s}{2}, c(s,3;2)=0, c(s,3;3)=\frac{(2s-3)!}{(2s)!} \\ c(s,4;0)=\frac{(2s-4)!}{(2s)!}\frac{3s(s-1)}{4}, c(s,4;1)=0, c(s,4;2)=\frac{(2s-4)!}{(2s)!}(2-3s), c(s,4;3)=0, c(s,4;4)=\frac{(2s-4)!}{(2s)!} \end{cases}$$

以上计算结果可以与前几节的直接计算方法相互验证，结果完全相同，说明此解析方法是正确有效的。

6.4 解析延拓后等价的归一化定义

定义6.4.1. $\bar{m}(s,n;i) := \frac{2^n 2s}{2^i} m(s,n;i), \bar{n}(s,n;i) := \frac{2^n 2s}{2^i} n(s,n;i); s \in \mathbb{C}, n \geq 0, 0 \leq i \leq n$

定义6.4.2. $\bar{c}(s,n;i) := \frac{(2s)!2^{n-i}}{(2s-n)!} c(s,n;i); s \in \mathbb{C}, n \geq 0, 0 \leq i \leq n$

推论6.4.1.

$$\begin{cases} [\bar{m}(s,n;i) = 2\bar{m}(s,n-1;i-1) - \bar{m}(s,n-2;i-2) + \frac{1}{4}\bar{m}(s,n-2;i), \bar{m}(s,l \geq 0; j<0|j>l) := 0 \\ \bar{m}(s,0;0)=2s, \bar{m}(s,1;0)=0, \bar{m}(s,1;1)=2s-1; s \neq 0 \in \mathbb{C}, n \geq 2, 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

推论6.4.2.

$$\begin{cases} \bar{n}(s,n;i) := \bar{m}(s,n-1;i-1) - \bar{m}(s,n;i), \bar{n}(s,l \geq 0; j<l|j>l) := 0 \\ \bar{n}(s,0;0) := 1, \bar{n}(s,1;0) := 0; s \neq 0 \in \mathbb{C}, n \geq 1, 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

推论6.4.3.

$$\begin{cases} \bar{c}(s,n;i) = \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{c}(s-\frac{1}{2}, n-1; j-1)\bar{n}(s,j;i), \bar{c}(s,l \geq 0; j<l|j>l) := 0 \\ \bar{c}(s,0;0)=1, \bar{c}(s,1;0)=0; s \in \mathbb{C}, n \geq 1, 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

7 解析延拓后$m(s,n;i), n(s,n;i)$通项公式的成功求解

7.1 $m(s,n;i)$的等价递推关系

定理7.1.1.

$$\begin{cases} m(s,n;i) = (1-\frac{n}{2s})\delta_{ni} + \frac{1}{4}\sum\limits_{j=1}^{n-1} j m(s,n-j-1;i-j+1), m(s,k \geq 0; l<0|l>k) := 0 \\ m(s,0;0)=1, m(s,1;0)=0, m(s,1;1)=1-\frac{1}{2s}; s \neq 0 \in \mathbb{C}, n \geq 2, 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

证明:

$$\begin{cases} [m(s,n;i)-m(s,n-1;i-1)] - [m(s,n-1;i-1)-m(s,n-2;i-2)] = \frac{1}{4}m(s,n-2;i) \\ m(s,0;0)=1, m(s,1;0)=0, m(s,1;1)=1-\frac{1}{2s}, m(s,k \geq 0; l<0|l>k) := 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [m(s,n;i)-m(s,n-1;i-1)] - [m(s,1;i-n+1)-m(s,0;i-n)] = \frac{1}{4}\sum\limits_{j=2}^{n} m(s,j-2;j-n+i) \\ m(s,0;0)=1, m(s,1;0)=0, m(s,1;1)=1-\frac{1}{2s}, m(s,k \geq 0; l<0|l>k) := 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [m(s,n;i)-m(s,n-1;i-1)] = [m(s,1;i-n+1)-m(s,0;i-n)] + \frac{1}{4}\sum\limits_{j=2}^{n} m(s,j-2;j-n+i) \\ m(s,0;0)=1, m(s,1;0)=0, m(s,1;1)=1-\frac{1}{2s}, m(s,k \geq 0; l<0|l>k) := 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(s,n;i) = m(s,1;i-n+1) + \sum\limits_{r=2}^{n}\{[m(s,1;i-n+1)-m(s,0;i-n)] + \frac{1}{4}\sum\limits_{j=2}^{r} m(s,j-2;j-n+i)\} \\ m(s,0;0)=1, m(s,1;0)=0, m(s,1;1)=1-\frac{1}{2s}, m(s,k \geq 0; l<0|l>k) := 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(s,n;i) = n m(s,1;i-n+1) - (n-1)m(s,0;i-n) + \frac{1}{4}\sum\limits_{r=2}^{n}\sum\limits_{j=2}^{r} m(s,j-2;j-n+i) \\ m(s,0;0)=1, m(s,1;0)=0, m(s,1;1)=1-\frac{1}{2s}, m(s,k \geq 0; l<0|l>k) := 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} m(s,n;i) = nm(s,1;1)\delta_{ni} - (n-1)m(s,0;0)\delta_{ni} + \frac{1}{4}\sum\limits_{j=2}^{n}(n-j+1)m(s,j-2;j-n+i) \\ m(s,0;0)=1, m(s,1;0)=0, m(s,1;1)=1-\frac{1}{2s}, m(s,k\geq 0;l<0|l>k):=0 \end{cases}$$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} m(s,n;i) = (1-\frac{n}{2s})\delta_{ni} + \frac{1}{4}\sum\limits_{j=1}^{n-1}(n-j)m(s,j-1;j+1-n+i) \\ m(s,0;0)=1, m(s,1;0)=0, m(s,1;1)=1-\frac{1}{2s}, m(s,k\geq 0;l<0|l>k):=0 \end{cases}$$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} m(s,n;i) = (1-\frac{n}{2s})\delta_{ni} + \frac{1}{4}\sum\limits_{j=1}^{n-1}jm(s,n-j-1;i-j+1), m(s,k\geq 0;l<0|l>k):=0 \\ m(s,0;0)=1, m(s,1;0)=0, m(s,1;1)=1-\frac{1}{2s}; s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 2, 0\leq i\leq n \end{cases}$$
□

推论7.1.1. $m(s,n;n) = 1-\frac{n}{2s}; s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 0$

推论7.1.2. $m(s,n;n-2l-1) = 0; s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 0$

7.2 $m(s,n;n-2l)$的通项公式的完全求解

7.2.1 $i=n-2l$情形下通项公式的试探和猜想

推论7.2.1.
$m(s,n;n-0) = \frac{1}{2^1 1! s}(2s\cdot 1+0-n); s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 0$
$m(s,n;n-2) = \frac{1}{2^3 3! s}n(n-1)(2s\cdot 3+2-n); s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 0$
$m(s,n;n-4) = \frac{1}{2^5 5! s}n(n-1)(n-2)(n-3)(2s\cdot 5+4-n); s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 0$
$m(s,n;n-6) = \frac{1}{2^7 7! s}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(2s\cdot 7+6-n); s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 0$

推论7.2.2.
$m(s,n;n-0) = \frac{1}{2^1 1s}C_n^0[1(2s+1)-(n+1)]; s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 0$
$m(s,n;n-2) = \frac{1}{2^3 3s}C_n^2[3(2s+1)-(n+1)]; s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 0$
$m(s,n;n-4) = \frac{1}{2^5 5s}C_n^4[5(2s+1)-(n+1)]; s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 0$
$m(s,n;n-6) = \frac{1}{2^7 7s}C_n^6[7(2s+1)-(n+1)]; s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 0$

猜想7.2.1. $m(s,n;n-2l) = \frac{C_n^{2l}}{2^{2l+1}(2l+1)s}[(2l+1)(2s+1)-(n+1)] = \frac{1}{2^{2l+1}s}[(2s+1)C_n^{2l} - C_{n+1}^{2l+1}]; s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 0$

7.2.2 $i=n-2l$情形下通项公式猜想的证明

引理7.2.1. $\sum\limits_{a+b=k} C_a^c C_b^d = C_{k+1}^{c+d+1} [\Rightarrow] \sum\limits_{j=1}^{n-1} C_{n-j}^1 C_{j-1}^{2l} = C_n^{2l+2}, \sum\limits_{j=1}^{n-1} C_{n-j}^1 C_j^{2l+1} = C_{n+1}^{2l+3}$

以上引理肯定是正确的，我在书上看见过这个公式，在后面章节我会给出两个易懂的证明方法。

定理7.2.1. $m(s,n;n-2l) = \frac{1}{2^{2l+1}s}[(2s+1)C_n^{2l} - C_{n+1}^{2l+1}]; s\neq 0\in\mathbb{C}, n\geq 0, 0\leq l\leq [n/2]$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。
第一步：$l=0$时成立：
$m(s,n;n-0) = \frac{1}{2^1 s}[(2s+1)C_n^0 - C_{n+1}^1]$
第二步：假设$l'=l$时成立：
$m(s,n;n-2l) = \frac{1}{2^{2l+1}s}[(2s+1)C_n^{2l} - C_{n+1}^{2l+1}]$
第三步：$l'=l+1\geq 1$时：
$\Rightarrow m(s,n;n-2l-2) = \frac{1}{4}\sum\limits_{j=1}^{n-1}(n-j)m(s,j-1;j-1-2l)$
$= \frac{1}{4}\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{n-j}{2^{2l+1}s}[(2s+1)C_{j-1}^{2l} - C_j^{2l+1}]$
$= \frac{1}{2^{2l+3}s}\sum\limits_{j=1}^{n-1}[(2s+1)C_{n-j}^1 C_{j-1}^{2l} - C_{n-j}^1 C_j^{2l+1}]$

$= \frac{1}{2^{2l+3}s}[(2s+1)C_n^{2l+2} - C_{n+1}^{2l+3}]$

此步证明了$l' = l+1$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

推论7.2.3. $m(s,n;n-2l) = \frac{1}{2^{2l+1}s}[(2s+1)C_n^{2l} - C_{n+1}^{2l+1}] = \frac{1}{2^{2l+1}s}(2sC_n^{2l} - C_n^{2l+1}) = \frac{C_n^{2l}}{2^{2l}} - \frac{1}{s}\frac{C_n^{2l+1}}{2^{2l+1}}; s \neq 0 \in \mathbb{C}, n \geq 0$

推论7.2.4. $m(s,n;n-2l) = \frac{2^{n-2l}}{2^n}\frac{1}{2s}(2sC_n^{n-2l} - C_n^{n-2l-1}); s \neq 0 \in \mathbb{C}, n \geq 0$

定理7.2.2. $M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w) = \sum_{l=0}^{[n/2]}(\frac{C_n^{2l}}{2^{2l}} - \frac{1}{s}\frac{C_n^{2l+1}}{2^{2l+1}})\Omega^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n,n-2l); s \geq \frac{1}{2}, n \geq 0$

7.3 $n(s,n;n-2l)$的通项公式的完全求解

定理7.3.1. $n(s,n;n-2l-1) = m(s,n-1;n-1-2l-1) - m(s,n;n-2l-1) = 0; s \neq 0 \in \mathbb{C}, n \geq 1, 0 \leq l \leq [n/2]$

引理7.3.1. $n(s,n;n-2l) = m(s,n-1;n-1-2l) - m(s,n;n-2l); s \neq 0 \in \mathbb{C}, n \geq 1, 0 \leq l \leq [n/2]$

定理7.3.2. $n(s,n;n-2l) = -\frac{1}{2^{2l+1}s}[(2s+1)C_{n-1}^{2l-1} - C_n^{2l}]; s \neq 0 \in \mathbb{C}, n \geq 1, 0 \leq l \leq [n/2]$

证明: $n(s,n;n-2l) = m(s,n-1;n-1-2l) - m(s,n;n-2l)$
$= \frac{1}{2^{2l+1}s}[(2s+1)C_{n-1}^{2l} - C_n^{2l+1}] - \frac{1}{2^{2l+1}s}[(2s+1)C_n^{2l} - C_{n+1}^{2l+1}]$
$= -\frac{1}{2^{2l+1}s}[(2s+1)C_{n-1}^{2l-1} - C_n^{2l}]$ □

推论7.3.1. $n(s,n;n-2l) = -\frac{1}{2^{2l+1}s}[(2s+1)C_{n-1}^{2l-1} - C_n^{2l}]; s \neq 0 \in \mathbb{C}, n \geq 1, 0 \leq l \leq [n/2]$

推论7.3.2. $n(s,n;n-2l) = -\frac{1}{2^{2l+1}s}(2sC_{n-1}^{2l-1} - C_{n-1}^{2l}) = -\frac{C_{n-1}^{2l-1}}{2^{2l}} + \frac{1}{s}\frac{C_{n-1}^{2l}}{2^{2l+1}}; s \neq 0 \in \mathbb{C}, n \geq 1, 0 \leq l \leq [n/2]$

推论7.3.3. $n(s,n;n-2l) = \frac{2^{n-2l}}{2^n}\frac{1}{2s}(C_{n-1}^{n-2l-1} - 2sC_{n-1}^{n-2l}); s \neq 1 \in \mathbb{C}, n \geq 1, 0 \leq l \leq [n/2]$

推论7.3.4.

$$\begin{cases} n(s,0;0) = \frac{1}{2s}; n(s,1;1) = \frac{1}{2s}; n(s,2;0) = -\frac{1}{2^2}, n(s,2;2) = \frac{1}{2s}; n(s,3;1) = \frac{1-4s}{8s}, n(s,3;3) = \frac{1}{2s} \\ n(s,4;0) = -\frac{1}{2^4}, n(s,4;2) = \frac{3-6s}{8s}, n(s,4;4) = \frac{1}{2s}; n(s,5;1) = \frac{1-8s}{32s}, n(s,5;3) = \frac{6-8s}{8s}, n(s,5;5) = \frac{1}{2s} \\ n(s,6;0) = -\frac{1}{2^6}, n(s,6;2) = \frac{5-20s}{32s}, n(s,6;4) = \frac{10-10s}{8s}, n(s,6;6) = \frac{1}{2s} \\ n(s,7;1) = -\frac{1-12s}{2^6 2s}, n(s,7;3) = \frac{15-40s}{32s}, n(s,7;5) = \frac{15-12s}{8s}, n(s,7;7) = \frac{1}{2s} \end{cases}$$

定理7.3.3. $N^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w) = -\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{[n/2]}(\frac{C_{n-1}^{2l-1}}{2^{2l-1}} - \frac{1}{s}\frac{C_{n-1}^{2l}}{2^{2l}})\Omega^{n-2l}(s,n;w); s \geq \frac{1}{2}, n \geq 1$

对于求解$m(s,n;i), n(s,n;i)$的通项公式，我已思考了近三年，一直没得到彻底解决。终于在**2023**年**8**月**15**日那天灵感突发，一下子就猜测得到了$m(s,n;i)$的通项公式，然后采用数学归纳法严格证明了它。就这样长久坚持了三年，问题终于彻底解决了。但是同样的技巧对求解$c(s,n;n-2l)$ 的通项公式却毫无帮助、无能为力，仍需努力!

8 $c(s,n;n-2l), s \in \mathbb{C}$通项公式的寻找(未获成功)

8.1 $c(s,n;n-2l)$的递推公式

推论8.1.1.

$$\begin{cases} c(s,n;i) = \sum_{k=i}^{n} c(s-\frac{1}{2},n-1;k-1)n(s,k;i), c(s,l \geq 0; j < 0 | j > l) := 0 \\ c(s,0;0) = 1, c(s,1;0) = 0, c(s,1;1) = \frac{1}{2s}; s \in \mathbb{C}, n \geq 1, 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

推论8.1.2. $c(s,n;n-2l-1) = 0; s \neq 0 \in \mathbb{C}, n \geq 0$

8.2 $c(s,n;n-2l)$按$s \in \mathbb{C}$解析延拓后的递推公式

定理8.2.1.

$$\begin{cases} c(s,n;n-2k) = \sum_{l=0}^{[(n-1)/2]} c(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2l)n(s,n-2l;n-2k), c(s,l \geq 0; i < 0 | i > l) := 0 \\ c(s,0;0) = 1, c(s,1;1) = \frac{1}{2s}; s \in \mathbb{C}, n \geq 1, 0 \leq k \leq [n/2] \end{cases}$$

8.3 $c(s,n;n-2l)$前几项公式

推论8.3.1.

$$\begin{cases} c(s,0;0)=\frac{(2s-0)!}{(2s)!} \\ c(s,1;1)=\frac{(2s-1)!}{(2s)!} \\ c(s,2;0)=\frac{(2s-2)!}{(2s)!}\frac{-s}{2}, c(s,2;2)=\frac{(2s-2)!}{(2s)!} \\ c(s,3;1)=\frac{(2s-3)!}{(2s)!}\frac{1-3s}{2}, c(s,3;3)=\frac{(2s-3)!}{(2s)!} \\ c(s,4;0)=\frac{(2s-4)!}{(2s)!}\frac{3s(s-1)}{4}, c(s,4;2)=\frac{(2s-4)!}{(2s)!}(2-3s), c(s,4;4)=\frac{(2s-4)!}{(2s)!} \end{cases}$$

推论8.3.2.

$$\begin{cases} c(s,0;0)=1 \\ c(s,1;1)=\frac{1}{1!C_{2s}^1} \\ c(s,2;0)=\frac{1}{2!C_{2s}^2}\frac{C_2^{-1}-sC_2^0}{2}, c(s,2;2)=\frac{1}{2!C_{2s}^2} \\ c(s,3;1)=\frac{1}{3!C_{2s}^3}\frac{C_3^0-sC_3^1}{2}, c(s,3;3)=\frac{1}{3!C_{2s}^3} \\ c(s,4;0)=\frac{1}{4!C_{2s}^4}\frac{3s^2-3s}{4}, c(s,4;2)=\frac{1}{4!C_{2s}^4}\frac{C_4^1-sC_4^2}{2}, c(s,4;4)=\frac{1}{4!C_{2s}^4} \\ c(s,5;1)=\frac{1}{5!C_{2s}^5}\frac{(15s^2-25s+6)}{4}, c(s,5;3)=\frac{1}{5!C_{2s}^5}\frac{C_5^2-sC_5^3}{2}, c(s,5;5)=\frac{1}{5!C_{2s}^5} \end{cases}$$

推论8.3.3.

$$\begin{cases} c(s,0;0)=1 \\ c(s,1;1)=\frac{1}{1!C_{2s}^1} \\ c(s,2;0)=\frac{1}{2!C_{2s}^2}\frac{-(2s)}{4}, c(s,2;2)=\frac{1}{2!C_{2s}^2} \\ c(s,3;1)=\frac{1}{3!C_{2s}^3}\frac{2-3(2s)}{4}, c(s,3;3)=\frac{1}{3!C_{2s}^3} \\ c(s,4;0)=\frac{1}{4!C_{2s}^4}\frac{0-6(2s)+3(2s)^2}{16}, c(s,4;2)=\frac{1}{4!C_{2s}^4}\frac{8-6(2s)}{4}, c(s,4;4)=\frac{1}{4!C_{2s}^4} \\ c(s,5;1)=\frac{1}{5!C_{2s}^5}\frac{24-50(2s)+15(2s)^2}{16}, c(s,5;3)=\frac{1}{5!C_{2s}^5}\frac{20-10(2s)}{4}, c(s,5;5)=\frac{1}{5!C_{2s}^5} \\ c(s,6;2)=\frac{1}{6!C_{2s}^6}\frac{184-210(2s)+45(2s)^2}{16}, c(s,6;4)=\frac{1}{6!C_{2s}^6}\frac{40-15(2s)}{4}, c(s,6;6)=\frac{1}{6!C_{2s}^6} \end{cases}$$

8.4 $c(s,n;n-2l)$的迭代展开

定理8.4.1. $c(s,n;n-2k_0)=\frac{(2s-i)!}{(2s)!}\sum_{k_1=0}^{k_0}\sum_{k_2=0}^{k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdot\cdot\sum_{k_i=0}^{k_{i-1}}2^{2k_i-2k_0}c(s-\frac{i}{2},n-i;n-i-2k_i)\bar{n}(s,n-2k_1;n-2k_0)$
$\bar{n}(s-\frac{1}{2},n-1-2k_2;n-1-2k_1)\bar{n}(s-1,n-2-2k_3;n-2-2k_2)\cdot\cdot\bar{n}(s-\frac{i}{2},n-i-2k_i;n-i-2k_{i-1});n\geq 1$

推论8.4.1. $c(s,n;n-2k_0)=\frac{(2s-n)!}{(2s)!2^{2k_0}}\sum_{k_1=0}^{k_0}\sum_{k_2=0}^{k_1}\cdot\cdot\sum_{k_{n-3}=0}^{k_{n-4}}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-3}}\bar{n}(s,n-2k_1;n-2k_0)\bar{n}(s-\frac{1}{2},n-1-2k_2;n-1-2k_1)$
$\cdot\cdot\bar{n}(s-\frac{n-3}{2},2-2k_{n-2};3-2k_{n-3})\bar{n}(s-\frac{n-2}{2},2;2-2k_{n-2});n\geq 2$

证明: $c(s,n;n-2k_0)$

$=\frac{(2s-n)!}{(2s)!}\sum_{k_1=0}^{k_0}\sum_{k_2=0}^{k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdot\cdot\sum_{k_{n-1}=0}^{k_{n-2}}\sum_{k_n=0}^{k_{n-1}}2^{2k_n-2k_0}c(s-\frac{n}{2},0;0-2k_n)\bar{n}(s,n-2k_1;n-2k_0)\bar{n}(s-\frac{1}{2},n-1-2k_2;n-1-2k_1)$
$\bar{n}(s-1,n-2-2k_3;n-2-2k_2)\cdot\cdot\bar{n}(s-\frac{n-2}{2},2-2k_{n-1};2-2k_{n-2})\bar{n}(s-\frac{n-1}{2},1-2k_n;1-2k_{n-1})$

$=\frac{(2s-n)!}{(2s)!2^{2k_0}}\sum_{k_1=0}^{k_0}\sum_{k_2=0}^{k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdot\cdot\sum_{k_{n-1}=0}^{k_{n-2}}\bar{n}(s,n-2k_1;n-2k_0)\bar{n}(s-\frac{1}{2},n-1-2k_2;n-1-2k_1)$
$\bar{n}(s-1,n-2-2k_3;n-2-2k_2)\cdot\cdot\bar{n}(s-\frac{n-2}{2},2-2k_{n-1};2-2k_{n-2})\bar{n}(s-\frac{n-1}{2},1;1-2k_{n-1})$

$=\frac{(2s-n)!}{(2s)!2^{2k_0}}\sum_{k_1=0}^{k_0}\sum_{k_2=0}^{k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdot\cdot\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-3}}\bar{n}(s,n-2k_1;n-2k_0)\bar{n}(s-\frac{1}{2},n-1-2k_2;n-1-2k_1)$
$\bar{n}(s-1,n-2-2k_3;n-2-2k_2)\cdot\cdot\bar{n}(s-\frac{n-2}{2},2;2-2k_{n-2});n\geq 2$ □

推论8.4.2. $\bar{c}(s,n;n-2k_0)=\sum_{k_1=0}^{k_0}\sum_{k_2=0}^{k_1}\cdot\cdot\sum_{k_{n-3}=0}^{k_{n-4}}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-3}}\bar{n}(s,n-2k_1;n-2k_0)\bar{n}(s-\frac{1}{2},n-1-2k_2;n-1-2k_1)$
$\cdot\cdot\bar{n}(s-\frac{n-3}{2},2-2k_{n-2};3-2k_{n-3})\bar{n}(s-\frac{n-2}{2},2;2-2k_{n-2});n\geq 2$

推论8.4.3. $c(s,n;n-2k_0)$
$=\frac{(2s-n)!}{(2s)!2^{2k_0}}\sum\limits_{k_1=0}^{k_0}\sum\limits_{k_2=0}^{k_1}\cdot\cdot\sum\limits_{k_{n-3}=0}^{k_{n-4}}\sum\limits_{k_{n-2}=0}^{k_{n-3}}(C_{n-1-2k_1}^{n-1-2k_0}-2sC_{n-1-2k_1}^{n-2k_0})[C_{n-2-2k_2}^{n-2-2k_1}-(2s-1)C_{n-2-2k_2}^{n-1-2k_1}]$
$\cdot\cdot[C_{2-2k_{n-2}}^{2-2k_{n-3}}-(2s-n+1)C_{2-2k_{n-2}}^{3-2k_{n-3}}][C_1^{1-2k_{n-2}}-(2s-n+2)C_1^{2-2k_{n-2}}];n\geq 2$

8.5 $c(s,n;n),\bar{c}(s,n;n)$的通项公式

定理8.5.1. $c(s,n;n)=\frac{(2s-n)!}{(2s)!},\bar{c}(s,n;n)=1;n\geq 1$

证明: $n\geq 1$
$c(s,n;n)=\frac{(2s-n)!}{(2s)!}\sum\limits_{k_1=0}^{0}\sum\limits_{k_2=0}^{0}\sum\limits_{k_3=0}^{0}\cdot\cdot\sum\limits_{k_{n-2}=0}^{0}(C_{n-1-2k_1}^{n-1-2k_0}-2sC_{n-1-2k_1}^{n-2k_0})[C_{n-2-2k_2}^{n-2-2k_1}-(2s-1)C_{n-2-2k_2}^{n-1-2k_1}]$
$[C_{n-3-2k_3}^{n-3-2k_2}-(2s-2)C_{n-3-2k_3}^{n-2-2k_2}]\cdot\cdot[C_1^{1-2k_{n-2}}-(2s-n+2)C_1^{2-2k_{n-2}}]$
$=\frac{(2s-n)!}{(2s)!}(C_{n-1}^{n-1}-2sC_{n-1}^{n})[C_{n-2}^{n-2-2k_1}-(2s-1)C_{n-2}^{n-1}][C_{n-3}^{n-3}-(2s-2)C_{n-3}^{n-2}]\cdot\cdot[C_1^1-(2s-n+2)C_1^2]$
$=\frac{(2s-n)!}{(2s)!}$ □

推论8.5.1. $c(s,n;n)=\frac{(2s-n)!}{(2s)!},\bar{c}(s,n;n)=1;n\geq 0$

8.6 $c(s,n;n-2),c(s,n;n-4)$的通项公式(具体计算过程参见上个版本)

引理8.6.1.
$$\begin{cases}C_{n-1}^{p+1}+C_{n-1}^{p}=C_n^{p+1},C_{n-1}^{p}+C_{n-2}^{p}+\cdot\cdot+C_p^p=C_n^{p+1}\\ pC_{n-2}^{p}+(p+1)C_{n-3}^{p}+\cdot\cdot+(n-2)C_p^p=C_n^{p+2}+(p-1)C_{n-1}^{p+1}=C_{n-1}^{p+2}+pC_{n-1}^{p+1}\end{cases}$$

推论8.6.1. $c(s,n;n)=\frac{(2s-n)!}{(2s)!},\bar{c}(s,n;n)=C_n^0;n\geq 0$

推论8.6.2. $c(s,n;n-2)=\frac{(2s-n)!}{(2s)!2}(C_n^3-sC_n^2),\bar{c}(s,n;n-2)=2C_n^3-2sC_n^2;n\geq 0$

推论8.6.3. $\bar{c}(s,n;n-4)=12s(s-1)C_n^4+4(-10s+6)C_n^5+40C_n^6,n\geq 0$

定理8.6.1. $\bar{c}(s,n;n-4)=(2s)^2c_3^2C_n^4-(2s)^1 2(c_3^2C_n^4+c_5^2C_n^5)+4(c_4^2C_n^5+c_5^2C_n^6),n\geq 1$

定理8.6.2. $\bar{c}(s,n;n-4)=(2s)^2 3C_n^4-(2s)^1(6C_n^4+20C_n^5)+(24C_n^5+40C_n^6),n\geq 1$

定理8.6.3. $\bar{c}(s,n;n-6)=?C_n^6+?C_n^7+?C_n^8+?C_n^9,n\geq 1$

8.7 $\bar{c}(s,n;n-2l)$的递推通项公式

推论8.7.1. $c(s,n;n-2l)=\sum\limits_{j=1}^{n}c(s-\frac{1}{2},n-1;j-1)n(s,j;n-2l),n\geq 1;c(s,0;0)=1$
$\Leftrightarrow\bar{c}(s,n;n-2l)=\sum\limits_{j=1}^{n}\bar{c}(s-\frac{1}{2},n-1;j-1)\bar{n}(s,j;n-2l),n\geq 1;\bar{c}(s,0;0)=1,\bar{n}(s,0;0)=1$

定理8.7.1. $\bar{c}(s,n;n-2l)=\bar{c}(s-\frac{n-2l}{2},2l;0)+\sum\limits_{i=2l+1}^{n}\sum\limits_{k=0}^{l-1}\bar{c}(s-\frac{n-i+1}{2},i-1;i-1-2k)\bar{n}(s-\frac{n-i}{2},i-2k;i-2l)$
$\bar{c}(s,0;0)=1,\bar{n}(s,0;0)=1;n\geq 1,l\geq 0$

证明: $n\geq 1,l\geq 0;\bar{c}(s,0;0)=1,\bar{n}(s,0;0)=1$
$\bar{c}(s,n;n-2l)=\sum\limits_{j=n-2l}^{n}\bar{c}(s-\frac{1}{2},n-1;j-1)\bar{n}(s,j;n-2l)$
$=\sum\limits_{n-2k=n-2l}^{n}\bar{c}(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2k)\bar{n}(s,n-2k;n-2l)$
$=\sum\limits_{k=0}^{l}\bar{c}(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2k)\bar{n}(s,n-2k;n-2l)$
$\Leftrightarrow\bar{c}(s,n;n-2l)-\bar{c}(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2l)=\sum\limits_{k=0}^{l-1}\bar{c}(s-\frac{1}{2},n-1;n-1-2k)\bar{n}(s,n-2k;n-2l)$
$\Leftrightarrow\sum\limits_{i=2l+1}^{n}[\bar{c}(s-\frac{n-i}{2},i;i-2l)-\bar{c}(s-\frac{n-i+1}{2},i-1;i-1-2l)]=\sum\limits_{i=2l+1}^{n}\sum\limits_{k=0}^{l-1}\bar{c}(s-\frac{n-i+1}{2},i-1;i-1-2k)\bar{n}(s-\frac{n-i}{2},i-2k;i-2l)$
$\Leftrightarrow\bar{c}(s,n;n-2l)=\bar{c}(s-\frac{n-2l}{2},2l;0)+\sum\limits_{i=2l+1}^{n}\sum\limits_{k=0}^{l-1}\bar{c}(s-\frac{n-i+1}{2},i-1;i-1-2k)\bar{n}(s-\frac{n-i}{2},i-2k;i-2l)$ □

推论8.7.2. $\bar{c}(s,n;n-2l)=\sum_{i=2l}^{n}\sum_{k=0}^{l-1}\bar{c}(s-\frac{n-i+1}{2},i-1;i-1-2k)\bar{n}(s-\frac{n-i}{2},i-2k;i-2l)$
$\bar{c}(s,0;0)=1,\bar{n}(s,0;0)=1;n\geq 1,l\geq 1$

定理8.7.2. $\bar{c}(s-\frac{n-2l}{2},2l;0)=\sum_{j=1}^{2l}\bar{c}(s-\frac{n-2l+1}{2},2l-1;j-1)\bar{n}(s-\frac{n-2l}{2},j;0),2l\geq 1$

证明: $2l\geq 1$

$$\bar{c}(s-\frac{n-2l}{2},2l;0)=\sum_{j=1}^{2l}\bar{c}(s-\frac{n-2l+1}{2},2l-1;j-1)\bar{n}(s-\frac{n-2l}{2},j;0)=-\sum_{j=1}^{2l}(2s-n+2l)\bar{c}(s-\frac{n-2l+1}{2},2l-1;j-1)$$

$$=-(2s-n+2l)\sum_{j=1}^{2l}\bar{c}(s-\frac{n-2l+1}{2},2l-1;j-1)=-(2s-n+2l)\sum_{k=1}^{l}\bar{c}(s-\frac{n-2l+1}{2},2l-1;2k-1)$$ □

推论8.7.3. $\bar{c}(s,2l;0)=\sum_{j=1}^{2l}\bar{c}(s-\frac{1}{2},2l-1;j-1)\bar{n}(s,j;0)=-2s\sum_{k=1}^{l}\bar{c}(s-\frac{1}{2},2l-1;2k-1),l\geq 1$

推论8.7.4. $\bar{c}(s,4;0)=-2s\sum_{k=1}^{2}\bar{c}(s-\frac{1}{2},3;2k-1)=-2s[\bar{c}(s-\frac{1}{2},3;3)+\bar{c}(s-\frac{1}{2},3;1)]=-2s[1+2C_3^3-(2s-1)C_3^2]$

9 展开系数的线性代数解法(s只能取一定范围内的整数或半整数)

本节线性代数解法体现了数学的全息原理，只需通过求解一个投影方向，便可以得到整个空间的解，即一个投影方向就包含了整个空间的信息，体现了全息原理。

9.1 $M^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w),s\geq\frac{1}{2}[\frac{n}{2}]|\frac{1}{2}$展开系数的线性代数解法

由于$m(s,n;i)$某些情况下与w独立无关，对某些w代数同构，具有同样的展开系数。也只需求任何一个w的展开系数即可，哪个方便用哪个，这里取$w=1$。且这节的s只能取一定范围内的整数或半整数，超出范围则不适用，故而没有上面章节的结论普遍。

定理9.1.1. $$2s\begin{bmatrix} s^n & s^{n-2} & s^{n-4} & \cdot\cdot & s^{n-2[n/2]} \\ (s-1)^n & (s-1)^{n-2} & (s-1)^{n-4} & \cdot\cdot & (s-1)^{n-2[n/2]} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (1-s)^n & (1-s)^{n-2} & (1-s)^{n-4} & \cdot\cdot & (1-s)^{n-2[n/2]} \\ (-s)^n & (-s)^{n-2} & (-s)^{n-4} & \cdot\cdot & (-s)^{n-2[n/2]} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m(s,n;n) \\ m(s,n;n-2) \\ m(s,n;n-4) \\ \cdot\cdot \\ m(s,n;n-2[n/2]) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2s(s-1/2)^n \\ (2s-1)(s-3/2)^n+1(s-1/2)^n \\ (2s-2)(s-5/2)^n+2(s-3/2)^n \\ \cdot\cdot \\ 2s(1/2-s)^n \end{bmatrix}$$

证明: $\frac{1}{n!}M^{\{z_{1\varsigma}\cdot\cdot z_{n\varsigma}\}}(s,n;w)=N^{A_\varsigma}(s)\sigma_{z_\varsigma}^{n}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{A_\varsigma}(s)=\sum_{k=0}^{[n/2]}m(s,n;n-2k)\sigma_{z_\varsigma}^{n-2k}(s)$

$$\Leftrightarrow N^{A_\varsigma}(s)\begin{bmatrix} (s-1/2)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s-3/2)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (3/2-s)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2-s)^n \end{bmatrix}\bar{N}_{A_\varsigma}(s)=\sum_{k=0}^{[n/2]}m(s,n;n-2k)\begin{bmatrix} s^{n-2k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s-1)^{n-2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-s)^{n-2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-s)^{n-2k} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2s}\begin{bmatrix} \sqrt{2s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2s-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s-1/2)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s-3/2)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (3/2-s)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2-s)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2s-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{2s}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2s-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s-1/2)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s-3/2)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (3/2-s)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2-s)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2s-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2s} \end{bmatrix}$$

$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}m(s,n;n-2k)\begin{bmatrix} s^{n-2k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s-1)^{n-2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-s)^{n-2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-s)^{n-2k} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2s}\begin{bmatrix} 2s(s-1/2)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2s-1)(s-3/2)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(3/2-s)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1(1/2-s)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\frac{1}{2s}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1(s-1/2)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(s-3/2)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (2s-1)(3/2-s)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2s(1/2-s)^n \end{bmatrix}$$

$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}m(s,n;n-2k)\begin{bmatrix} s^{n-2k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s-1)^{n-2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-s)^{n-2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-s)^{n-2k} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2s\sum_{k=0}^{[n/2]}m(s,n;n-2k)s^{n-2k}=2s(s-1/2)^n\\ 2s\sum_{k=0}^{[n/2]}m(s,n;n-2k)(s-1)^{n-2k}=(2s-1)(s-3/2)^n+1(s-1/2)^n\\ \cdots\cdots\\ 2s\sum_{k=0}^{[n/2]}m(s,n;n-2k)(1-s)^{n-2k}=1(1/2-s)^n+(2s-1)(3/2-s)^n\\ 2s\sum_{k=0}^{[n/2]}m(s,n;n-2k)(-s)^{n-2k}=2s(1/2-s)^n\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2s\begin{bmatrix}s^n & s^{n-2} & s^{n-4} & \cdot\cdot & s^{n-2[n/2]}\\ (s-1)^n & (s-1)^{n-2} & (s-1)^{n-4} & \cdot\cdot & (s-1)^{n-2[n/2]}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ (1-s)^n & (1-s)^{n-2} & (1-s)^{n-4} & \cdot\cdot & (1-s)^{n-2[n/2]}\\ (-s)^n & (-s)^{n-2} & (-s)^{n-4} & \cdot\cdot & (-s)^{n-2[n/2]}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m(s,n;n)\\ m(s,n;n-2)\\ m(s,n;n-4)\\ \cdot\cdot\\ m(s,n;n-2[n/2])\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2s(s-1/2)^n\\ (2s-1)(s-3/2)^n+1(s-1/2)^n\\ (2s-2)(s-5/2)^n+2(s-3/2)^n\\ \cdot\cdot\\ 2s(1/2-s)^n\end{bmatrix}$$ □

推论9.1.1. $\begin{bmatrix}m(s,n;n)\\ m(s,n;n-2)\\ m(s,n;n-4)\\ \cdot\cdot\\ m(s,n;n-2[n/2])\end{bmatrix}$

$$=\frac{1}{2s}\begin{bmatrix}s^n & s^{n-2} & s^{n-4} & \cdot\cdot & s^{n-2[n/2]}\\ (s-1)^n & (s-1)^{n-2} & (s-1)^{n-4} & \cdot\cdot & (s-1)^{n-2[n/2]}\\ (s-2)^n & (s-2)^{n-2} & (s-2)^{n-4} & \cdot\cdot & (s-2)^{n-2[n/2]}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ (s-[n/2])^n & (s-[n/2])^{n-2} & (s-[n/2])^{n-4} & \cdot\cdot & (s-[n/2])^{n-2[n/2]}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2s(s-1/2)^n\\ (2s-1)(s-3/2)^n+1(s-1/2)^n\\ (2s-2)(s-5/2)^n+2(s-3/2)^n\\ \cdot\cdot\\ (2s-[n/2])(s-1/2-[n/2])^n+[n/2](s+1/2-[n/2])^n\end{bmatrix}$$

推论9.1.2. $2s\sum_{k=0}^{[n/2]}m(s,n;n-2k)(s-h)^{n-2k}=(2s-h)(s-h-\frac{1}{2})^n+h(s-h+\frac{1}{2})^n,0\le h\le 2s,n\ge 0,s\ge 1$

推论9.1.3. $2s\sum_{k=0}^{[n/2]}(\frac{C_n^{2k}}{2^{2k}}-\frac{1}{s}\frac{C_n^{2k+1}}{2^{2k+1}})(s-h)^{n-2k}=(2s-h)(s-h-\frac{1}{2})^n+h(s-h+\frac{1}{2})^n,0\le h\le 2s,n\ge 0,s\ge 1$

推论9.1.4. $2s\sum_{k=0}^{[n/2]}m(s,n;n-2k)h^{n-2k}=(s+h)(h-\frac{1}{2})^n+(s-h)(h+\frac{1}{2})^n,-s\le h\le s,n\ge 0,s\ge 1$

推论9.1.5. $2s\sum_{k=0}^{[n/2]}(\frac{C_n^{2k}}{2^{2k}}-\frac{1}{s}\frac{C_n^{2k+1}}{2^{2k+1}})h^{n-2k}=(s+h)(h-\frac{1}{2})^n+(s-h)(h+\frac{1}{2})^n,-s\le h\le s,n\ge 0,s\ge 1$

9.2 $N^{\{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}\}}(s,n;w),s\ge\frac{1}{2}[\frac{n}{2}]|\frac{1}{2}$展开系数的线性代数解法

由于$n(s,n;i)$某些情况下与w独立无关，对某些w代数同构，具有同样的展开系数。也只需求任何一个w的展开系数即可，哪个方便用哪个，这里取$w=1$。且这节的s只能取一定范围内的整数或半整数，超出范围则不适用，故而没有上面章节的结论普遍。

定理9.2.1. $4s\begin{bmatrix}s^n & s^{n-2} & s^{n-4} & \cdot\cdot & s^{n-2[n/2]}\\ (s-1)^n & (s-1)^{n-2} & (s-1)^{n-4} & \cdot\cdot & (s-1)^{n-2[n/2]}\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\ (1-s)^n & (1-s)^{n-2} & (1-s)^{n-4} & \cdot\cdot & (1-s)^{n-2[n/2]}\\ (-s)^n & (-s)^{n-2} & (-s)^{n-4} & \cdot\cdot & (-s)^{n-2[n/2]}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n(s,n;n)\\ n(s,n;n-2)\\ n(s,n;n-4)\\ \cdot\cdot\\ n(s,n;n-2[n/2])\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2s(s-1/2)^{n-1}\\ (2s-1)(s-3/2)^{n-1}-1(s-1/2)^{n-1}\\ (2s-2)(s-5/2)^{n-1}-2(s-3/2)^{n-1}\\ \cdot\cdot\\ -2s(1/2-s)^{n-1}\end{bmatrix}$

证明: $\frac{1}{n!}N^{\{z_{1\varsigma}\cdot\cdot z_{n\varsigma}\}}(s,n;w)=N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{z_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma_{z_\varsigma}^{n-1}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{A_\varsigma}(s)=\sum_{k=0}^{[n/2]}n(s,n;n-2k)\sigma_{z_\varsigma}^{n-2k}(s),n\ge 1$

$$\Leftrightarrow N^{A_\varsigma}(s)\sigma^{z_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\begin{bmatrix}(s-1/2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (s-3/2)^{n-1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (3/2-s)^{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2-s)^{n-1}\end{bmatrix}\bar{N}_{A_\varsigma}(s)$$

$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}n(s,n;n-2k)\begin{bmatrix}s^{n-2k} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (s-1)^{n-2k} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (1-s)^{n-2k} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-s)^{n-2k}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4s}\begin{bmatrix}\sqrt{2s} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2s-1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(s-1/2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (s-3/2)^{n-1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (3/2-s)^{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2-s)^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2s-1} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1} & 0\end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{4s}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2s-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(s-1/2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (s-3/2)^{n-1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (3/2-s)^{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2-s)^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2s-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2s}\end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/2]} n(s,n;n-2k) \begin{bmatrix} s^{n-2k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s-1)^{n-2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-s)^{n-2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-s)^{n-2k} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4s} \begin{bmatrix} 2s(s-1/2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2s-1)(s-3/2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(3/2-s)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1(1/2-s)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$- \frac{1}{4s} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1(s-1/2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(s-3/2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (2s-1)(3/2-s)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2s(1/2-s)^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/2]} n(s,n;n-2k) \begin{bmatrix} s^{n-2k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s-1)^{n-2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-s)^{n-2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-s)^{n-2k} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4s \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} n(s,n;n-2k) s^{n-2k} = 2s(s-1/2)^{n-1} \\ 4s \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} n(s,n;n-2k)(s-1)^{n-2k} = (2s-1)(s-3/2)^{n-1} - 1(s-1/2)^{n-1} \\ \cdots\cdots \\ 4s \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} n(s,n;n-2k)(1-s)^{n-2k} = 1(1/2-s)^{n-1} - (2s-1)(3/2-s)^{n-1} \\ 4s \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} n(s,n;n-2k)(-s)^{n-2k} = -2s(1/2-s)^{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4s \begin{bmatrix} s^n & s^{n-2} & s^{n-4} & \cdots & s^{n-2[n/2]} \\ (s-1)^n & (s-1)^{n-2} & (s-1)^{n-4} & \cdots & (s-1)^{n-2[n/2]} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-s)^n & (1-s)^{n-2} & (1-s)^{n-4} & \cdots & (1-s)^{n-2[n/2]} \\ (-s)^n & (-s)^{n-2} & (-s)^{n-4} & \cdots & (-s)^{n-2[n/2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n(s,n;n) \\ n(s,n;n-2) \\ n(s,n;n-4) \\ \cdots \\ n(s,n;n-2[n/2]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s(s-1/2)^{n-1} \\ (2s-1)(s-3/2)^{n-1} - 1(s-1/2)^{n-1} \\ (2s-2)(s-5/2)^{n-1} - 2(s-3/2)^{n-1} \\ \cdots \\ -2s(1/2-s)^{n-1} \end{bmatrix} \qquad \square$$

推论9.2.1. $\begin{bmatrix} n(s,n;n) \\ n(s,n;n-2) \\ n(s,n;n-4) \\ \cdots \\ n(s,n;n-2[n/2]) \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{4s} \begin{bmatrix} s^n & s^{n-2} & s^{n-4} & \cdots & s^{n-2[n/2]} \\ (s-1)^n & (s-1)^{n-2} & (s-1)^{n-4} & \cdots & (s-1)^{n-2[n/2]} \\ (s-2)^n & (s-2)^{n-2} & (s-2)^{n-4} & \cdots & (s-2)^{n-2[n/2]} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (s-[n/2])^n & (s-[n/2])^{n-2} & (s-[n/2])^{n-4} & \cdots & (s-[n/2])^{n-2[n/2]} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2s(s-1/2)^{n-1} \\ (2s-1)(s-3/2)^{n-1} - 1(s-1/2)^{n-1} \\ (2s-2)(s-5/2)^{n-1} - 2(s-3/2)^{n-1} \\ \cdots \\ (2s-[n/2])(s-1/2-[n/2])^n - [n/2](s+1/2-[n/2])^n \end{bmatrix}$$

推论9.2.2. $2s\sum\limits_{k=0}^{[n/2]} n(s,n;n-2k)(s-h)^{n-2k} = (2s-h)(s-h-\frac{1}{2})^{n-1} - h(s-h+\frac{1}{2})^{n-1}, 0 \le h \le 2s, n \ge 1, s \ge 1$

推论9.2.3. $-2s\sum\limits_{k=0}^{[n/2]} (\frac{C_{n-1}^{2k-1}}{2^{2k-1}} - \frac{1}{s}\frac{C_{n-1}^{2k}}{2^{2k}})(s-h)^{n-2k} = (2s-h)(s-h-\frac{1}{2})^{n-1} - h(s-h+\frac{1}{2})^{n-1}, 0 \le h \le 2s, n \ge 1, s \ge 1$

推论9.2.4. $2s\sum\limits_{k=0}^{[n/2]} n(s,n;n-2k)h^{n-2k} = (s+h)(h-\frac{1}{2})^{n-1} - (s-h)(h+\frac{1}{2})^{n-1}, -s \le h \le s, n \ge 1, s \ge 1$

推论9.2.5. $-2s\sum\limits_{k=0}^{[n/2]} (\frac{C_{n-1}^{2k-1}}{2^{2k-1}} - \frac{1}{s}\frac{C_{n-1}^{2k}}{2^{2k}})h^{n-2k} = (s+h)(h-\frac{1}{2})^{n-1} - (s-h)(h+\frac{1}{2})^{n-1}, -s \le h \le s, n \ge 1, s \ge 1$

9.3 两个线性代数方程解的性质与验证

推论9.3.1. $2s\sum\limits_{k=0}^{[n/2]} (\frac{C_n^{2k}}{2^{2k}} - \frac{1}{s}\frac{C_n^{2k+1}}{2^{2k+1}})s^{n-2k} = 2s(s-\frac{1}{2})^n \Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i(-\frac{1}{2s})^i = (1-\frac{1}{2s})^n, h = s, n \ge 0$

推论9.3.2. $-2s\sum\limits_{k=0}^{[(n+1)/2]} (\frac{C_n^{2k-1}}{2^{2k-1}} - \frac{1}{s}\frac{C_n^{2k}}{2^{2k}})s^{n+1-2k} = 2s(s-\frac{1}{2})^n \Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i(-\frac{1}{2s})^i = (1-\frac{1}{2s})^n, h = s, n \ge 0$

推论9.3.3. $2s\sum\limits_{k=0}^{[n/2]} (\frac{C_n^{2k}}{2^{2k}} - \frac{1}{s}\frac{C_n^{2k+1}}{2^{2k+1}})h^{n-2k} = (s+h)(h-\frac{1}{2})^n + (s-h)(h+\frac{1}{2})^n, -s \le h \le s, n \ge 0, s \ge 1$

推论9.3.4. $-2s\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}(\frac{C_n^{2k-1}}{2^{2k-1}}-\frac{1}{s}\frac{C_n^{2k}}{2^{2k}})h^{n+1-2k}=(s+h)(h-\frac{1}{2})^n-(s-h)(h+\frac{1}{2})^n, -s\leq h\leq s, n\geq 0, s\geq 1$

定理9.3.1.

$$\begin{cases}2s\sum_{k=0}^{[n/2]}(\frac{C_n^{2k}}{2^{2k}}-\frac{1}{s}\frac{C_n^{2k+1}}{2^{2k+1}})h^{n-2k}=(s+h)(h-\frac{1}{2})^n+(s-h)(h+\frac{1}{2})^n, n\geq 0\\ -2s\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}(\frac{C_n^{2k-1}}{2^{2k-1}}-\frac{1}{s}\frac{C_n^{2k}}{2^{2k}})h^{n+1-2k}=(s+h)(h-\frac{1}{2})^n-(s-h)(h+\frac{1}{2})^n, n\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2s\sum_{i=0}^{n}C_n^i(-\frac{1}{2})^ih^{n-i}+2h\sum_{i=0}^{n}C_n^i(-\frac{1}{2})^ih^{n-i}=2(s+h)(h-\frac{1}{2})^n, n\geq 0$$

证明：$2s\sum_{k=0}^{[n/2]}(\frac{C_n^{2k}}{2^{2k}}-\frac{1}{s}\frac{C_n^{2k+1}}{2^{2k+1}})h^{n-2k}-2s\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}(\frac{C_n^{2k-1}}{2^{2k-1}}-\frac{1}{s}\frac{C_n^{2k}}{2^{2k}})h^{n+1-2k}=2(s+h)(h-\frac{1}{2})^n, n\geq 0$

$$\Leftrightarrow 2s(\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{C_n^{2k}}{2^{2k}}h^{n-2k}-\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}\frac{C_n^{2k-1}}{2^{2k-1}}h^{n+1-2k})-2(\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{C_n^{2k+1}}{2^{2k+1}}h^{n-2k}-\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}\frac{C_n^{2k}}{2^{2k}}h^{n+1-2k})=2(s+h)(h-\frac{1}{2})^n, n\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2s\sum_{i=0}^{n}C_n^i(-\frac{1}{2})^ih^{n-i}+2h\sum_{i=0}^{n}C_n^i(-\frac{1}{2})^ih^{n-i}=2(s+h)(h-\frac{1}{2})^n, n\geq 0$$ □

以上定理表明，将$m(s,n;n-2k),n(s,n;n-2k)$代入方程后的结果，就是变形的二项式展开恒等式，因而也不会提供新的额外信息与技巧。对于$\forall h,\forall s,m(s,n;n-2k),n(s,n;n-2k)$分别是下节定义域解析延拓后的解，形式上与原来一样，但含义不同。

9.4 两个线性代数方程的解析延拓

推论9.4.1. $2s\sum_{k=0}^{[n/2]}m(s,n;n-2k)h^{n-2k}=(s+h)(h-\frac{1}{2})^n+(s-h)(h+\frac{1}{2})^n,\forall h\in\mathbb{C},\forall s\in\mathbb{C}\neq 0,n\in\mathbb{N}\geq 0$

$\Leftarrow m(s,n;n-2k)=\frac{C_n^{2k}}{2^{2k}}-\frac{1}{s}\frac{C_n^{2k+1}}{2^{2k+1}},\forall h\in\mathbb{C},\forall s\in\mathbb{C}\neq 0,n\in\mathbb{N}\geq 0$

推论9.4.2. $-2s\sum_{k=0}^{[n/2]}n(s,n;n-2k)h^{n-2k}=(s+h)(h-\frac{1}{2})^{n-1}-(s-h)(h+\frac{1}{2})^{n-1},\forall h\in\mathbb{C},\forall s\in\mathbb{C}\neq 0,n\in\mathbb{N}\geq 1$

$\Leftarrow n(s,n;n-2k)=-\frac{1}{2}(\frac{C_{n-1}^{2k-1}}{2^{2k-1}}-\frac{1}{s}\frac{C_{n-1}^{2k}}{2^{2k}}),\forall h\in\mathbb{C},\forall s\in\mathbb{C}\neq 0,n\in\mathbb{N}\geq 1$

9.5 $\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w),s\geq\frac{n}{2}|\frac{1}{2}$展开系数的线性代数解法

9.5.1 $\Gamma^{z_{1\varsigma}\cdots z_{n\varsigma}}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,n;w)$的性质

推论9.5.1. $\Gamma^{z_{1\varsigma}\cdots z_{n\varsigma}}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,n;w):=\frac{1}{2^n}\Gamma^{A_{1\varsigma}\cdots A_{n\varsigma}A_{(n+1)\varsigma}\cdots A_{(2s)\varsigma}}_{k_\varsigma}(s)\prod_{i=1}^{n}\sigma^{z}{}_{A_{i\varsigma}}{}^{B_{i\varsigma}}\Gamma^{l_\varsigma}_{B_{1\varsigma}\cdots B_{n\varsigma}A_{(n+1)\varsigma}\cdots A_{(2s)\varsigma}}(s)$

引理9.5.1.

$$\Gamma^{z_{1\varsigma}\cdots z_{n\varsigma}}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,n;w)=\frac{1}{2^n}\begin{bmatrix}(C_{2s}^0)^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{0-i} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & (C_{2s}^1)^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{1-i} & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots\ C_{2s}^{1-2s}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{2s-1-i} & & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (C_{2s}^{2s})^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{2s-i}\end{bmatrix}$$

9.5.2 $\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)$展开系数的线性代数解法

定理9.5.1. $\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdots\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)=\frac{1}{n!}\sum_{k}^{[n/2]}c(s,n;n-2k)\Omega^{n-2k}(s;w),c(s,n;n-2k-1)=0$

由于$c(s,n;i)$某些情况下与w独立无关，对某些w代数同构，具有同样的展开系数。也只需求任何一个w的展开系数即可，哪个方便用哪个，这里取$w=1$。怎么推出来还需严格仔细写出来，久了自己都不记得了。且这节的s只能取一定范围内的整数或半整数，超出范围则不适用，故而没有上面章节的结论普遍。

推论9.5.2. $\Gamma^{z_{1\varsigma}\cdots z_{n\varsigma}}(s,n;w=1)=\sum_{k}^{[n/2]}c(s,n;n-2k)\sigma_z^{n-2k}(s;w=1)=\frac{1}{2^n}$

$$\begin{bmatrix}(C_{2s}^0)^{-1}(-1)^0C_n^0C_{2s-n}^0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & (C_{2s}^1)^{-1}[(-1)^0C_n^0C_{2s-n}^1+(-1)^1C_n^1C_{2s-n}^0] & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots\ (C_{2s}^{2s-1})^{-1}[(-1)^{n-1}C_n^{n-1}C_{2s-n}^{2s-n}+(-1)^nC_n^nC_{2s-n}^{2s-n-1}] & & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (C_{2s}^{2s})^{-1}(-1)^nC_n^nC_{2s-n}^{2s-n}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n}(C_{2s}^{s-h})^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{s-h-i}=\sum_{k}^{[n/2]}c(s,n;n-2k)h^{n-2k}, h=s,s-1,\cdot\cdot,-(s-1),-s$$

推论9.5.3.

$$2^n\begin{bmatrix} s^n & s^{n-2} & s^{n-4} & \cdot\cdot & s^{n-2[n/2]} \\ (s-1)^n & (s-1)^{n-2} & (s-1)^{n-4} & \cdot\cdot & (s-1)^{n-2[n/2]} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (1-s)^n & (1-s)^{n-2} & (1-s)^{n-4} & \cdot\cdot & (1-s)^{n-2[n/2]} \\ (-s)^n & (-s)^{n-2} & (-s)^{n-4} & \cdot\cdot & (-s)^{n-2[n/2]} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c(s,n;n) \\ c(s,n;n-2) \\ c(s,n;n-4) \\ \cdot\cdot \\ c(s,n;n-2[n/2]) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (C_{2s}^0)^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{0-i} \\ (C_{2s}^1)^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{1-i} \\ \cdot\cdot \\ (C_{2s}^{2s-1})^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{2s-1-i} \\ (C_{2s}^{2s})^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{2s-i} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1-\frac{n}{s} \\ 1-\frac{n(2s-n)}{s(s-1/2)} \\ 1-\frac{n(6s^2-6ns-3s+2n^2+1)}{2s(s-1/2)(s-1)} \\ \cdot\cdot \end{bmatrix}$$

推论9.5.4.

$$2^n\begin{bmatrix} s^{n-2[n/2]} & \cdot\cdot & s^{n-4} & s^{n-2} & s^n \\ (s-1)^{n-2[n/2]} & \cdot\cdot & (s-1)^{n-4} & (s-1)^{n-2} & (s-1)^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (1-s)^{n-2[n/2]} & \cdot\cdot & (1-s)^{n-4} & (1-s)^{n-2} & (1-s)^n \\ (-s)^{n-2[n/2]} & \cdot\cdot & (-s)^{n-4} & (-s)^{n-2} & (-s)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c(s,n;n-2[n/2]) \\ \cdot\cdot \\ c(s,n;n-4) \\ c(s,n;n-2) \\ c(s,n;n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (C_{2s}^0)^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{0-i} \\ (C_{2s}^1)^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{1-i} \\ \cdot\cdot \\ (C_{2s}^{2s-1})^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{2s-1-i} \\ (C_{2s}^{2s})^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{2s-i} \end{bmatrix}$$

推论9.5.5. $n\geq 0, s\geq \frac{n}{2}|\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} c(s,n;n) \\ c(s,n;n-2) \\ c(s,n;n-4) \\ \cdot\cdot \\ c(s,n;n-2[n/2]) \end{bmatrix}=\frac{1}{2^n}\begin{bmatrix} s^n & s^{n-2} & s^{n-4} & \cdot\cdot & s^{n-2[n/2]} \\ (s-1)^n & (s-1)^{n-2} & (s-1)^{n-4} & \cdot\cdot & (s-1)^{n-2[n/2]} \\ (s-2)^n & (s-2)^{n-2} & (s-2)^{n-4} & \cdot\cdot & (s-2)^{n-2[n/2]} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-[n/2])^n & (s-[n/2])^{n-2} & (s-[n/2])^{n-4} & \cdot\cdot & (s-[n/2])^{n-2[n/2]} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} (C_{2s}^0)^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{0-i} \\ (C_{2s}^1)^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{1-i} \\ (C_{2s}^2)^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{2-i} \\ \cdot\cdot \\ (C_{2s}^{[n/2]})^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{[n/2]-i} \end{bmatrix}$$

推论9.5.6. $n\geq 0, s\geq \frac{n}{2}|\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} c(s,n;n-2[n/2]) \\ \cdot\cdot \\ c(s,n;n-4) \\ c(s,n;n-2) \\ c(s,n;n) \end{bmatrix}=\frac{1}{2^n}\begin{bmatrix} s^{n-2[n/2]} & \cdot\cdot & s^{n-4} & s^{n-2} & s^n \\ (s-1)^{n-2[n/2]} & \cdot\cdot & (s-1)^{n-4} & (s-1)^{n-2} & (s-1)^n \\ (s-2)^{n-2[n/2]} & \cdot\cdot & (s-2)^{n-4} & (s-2)^{n-2} & (s-2)^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-[n/2])^{n-2[n/2]} & \cdot\cdot & (s-[n/2])^{n-4} & (s-[n/2])^{n-2} & (s-[n/2])^n \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} (C_{2s}^0)^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{0-i} \\ (C_{2s}^1)^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{1-i} \\ \cdot\cdot \\ (C_{2s}^{2s-1})^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{2s-1-i} \\ (C_{2s}^{2s})^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iC_{2s-n}^{2s-i} \end{bmatrix}$$

9.5.3 $\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s,n;w)$前几项的线性代数解法验证

推论9.5.7.

$$\begin{bmatrix} s^0 \\ (s-1)^0 \\ \cdot\cdot \\ (1-s)^0 \\ (-s)^0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c(s,0;0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (C_{2s}^0)^{-1}(-1)^0C_0^0C_{2s-0}^{0-0} \\ (C_{2s}^1)^{-1}(-1)^0C_0^0C_{2s-0}^{1-0} \\ \cdot\cdot \\ (C_{2s}^{2s-1})^{-1}(-1)^0C_0^0C_{2s-0}^{2s-1-0} \\ (C_{2s}^{2s})^{-1}(-1)^0C_0^0C_{2s-n}^{2s-0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot\cdot \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\Leftrightarrow c(s,0;0)=1$$

$s^0c(s,0;0)=1\Leftrightarrow c(s,0;0)=1, s\geq\frac{1}{2}$

推论9.5.8.

$$\begin{bmatrix} s^1 \\ (s-1)^1 \\ \cdot\cdot \\ (1-s)^1 \\ (-s)^1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c(s,1;1) \end{bmatrix}=\frac{1}{2^1}\begin{bmatrix} (C_{2s}^0)^{-1}[(-1)^0C_1^0C_{2s-1}^{0-0}+(-1)^1C_1^1C_{2s-1}^{0-1}] \\ (C_{2s}^1)^{-1}[(-1)^0C_1^0C_{2s-1}^{1-0}+(-1)^1C_1^1C_{2s-1}^{1-1}] \\ \cdot\cdot \\ (C_{2s}^{2s-1})^{-1}[(-1)^0C_1^0C_{2s-1}^{2s-1-0}+(-1)^1C_1^1C_{2s-1}^{2s-1-1}] \\ (C_{2s}^{2s})^{-1}[(-1)^0C_1^0C_{2s-1}^{2s-0}+(-1)^1C_1^1C_{2s-1}^{2s-1}] \end{bmatrix}\Leftrightarrow c(s,1;1)=\frac{1}{2s}$$

$s^1c(s,1;1)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow c(s,1;1)=\frac{1}{2s}, s\geq\frac{1}{2}$

推论9.5.9.

$$\begin{bmatrix} s^2 & s^0 \\ (s-1)^2 & (s-1)^0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c(s,2;2) \\ c(s,2;0) \end{bmatrix}=\frac{1}{2^2}\begin{bmatrix} (C_{2s}^0)^{-1}\sum_{i=0}^{2}(-1)^iC_2^iC_{2s-2}^{0-i} \\ (C_{2s}^1)^{-1}\sum_{i=0}^{2}(-1)^iC_2^iC_{2s-2}^{1-i} \end{bmatrix}=\frac{1}{2^2}\begin{bmatrix} (C_{2s}^0)^{-1}(-1)^0C_2^0C_{2s-2}^{0-0} \\ (C_{2s}^1)^{-1}[(-1)^0C_2^0C_{2s-2}^{1-0}+(-1)^1C_2^1C_{2s-2}^{1-1}] \end{bmatrix}=\frac{1}{2^2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1-\frac{2}{s} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix} c(s,2;2) \\ c(s,2;0) \end{bmatrix}=\frac{1}{2^2}\begin{bmatrix} \frac{1}{s(s-1/2)} \\ 1-\frac{s^2}{s(s-1/2)} \end{bmatrix}=\frac{(2s-2)!}{(2s)!}\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}s \end{bmatrix}=\frac{(2s-2)!}{(2s)!}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(C_2^3-C_{2s}^2) \end{bmatrix}, s\geq 1$$

推论9.5.10.

$$\begin{bmatrix} s^3 & s^1 \\ (s-1)^3 & (s-1)^1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c(s,3;3) \\ c(s,3;1) \end{bmatrix}=\frac{1}{2^3}\begin{bmatrix} (C_{2s}^0)^{-1}\sum_{i=0}^{3}(-1)^iC_3^iC_{2s-3}^{0-i} \\ (C_{2s}^1)^{-1}\sum_{i=0}^{3}(-1)^iC_3^iC_{2s-3}^{1-i} \end{bmatrix}=\frac{1}{2^3}\begin{bmatrix} (C_{2s}^0)^{-1}(-1)^0C_3^0C_{2s-3}^{0-0} \\ (C_{2s}^1)^{-1}[(-1)^0C_3^0C_{2s-3}^{1-0}+(-1)^1C_3^1C_{2s-3}^{1-1}] \end{bmatrix}=\frac{1}{2^3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1-\frac{3}{s} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} c(s,3;3) \\ c(s,3;1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2^3} \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s-1/2)(s-1)} \\ \frac{1}{s} - \frac{s^2}{s(s-1/2)(s-1)} \end{bmatrix} = \frac{(2s-3)!}{(2s)!} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1-3s) \end{bmatrix} = \frac{(2s-3)!}{(2s)!} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(C_3^3 - C_3^2 s) \end{bmatrix}, s \geq \frac{3}{2}$$

推论9.5.11.

$$\begin{bmatrix} s^4 & s^2 & s^0 \\ (s-1)^4 & (s-1)^2 & (s-1)^0 \\ (s-2)^4 & (s-2)^2 & (s-2)^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(s,4;4) \\ c(s,4;2) \\ c(s,4;0) \end{bmatrix} = \frac{1}{2^4} \begin{bmatrix} (C_{2s}^0)^{-1} \sum_{i=0}^{4} (-1)^i C_4^i C_{2s-4}^{0-i} \\ (C_{2s}^1)^{-1} \sum_{i=0}^{4} (-1)^i C_4^i C_{2s-4}^{1-i} \\ (C_{2s}^2)^{-1} \sum_{i=0}^{4} (-1)^i C_4^i C_{2s-4}^{2-i} \end{bmatrix} = \frac{1}{2^4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\frac{4}{s} \\ 1-\frac{4(2s-4)}{s(s-1/2)} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} c(s,4;4) \\ c(s,4;2) \\ c(s,4;0) \end{bmatrix} = \frac{1}{2^4} \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s-1/2)(s-1)(s-3/2)} \\ \frac{2}{s(s-1/2)} - \frac{s^2+(s-1)^2}{s(s-1/2)(s-1)(s-3/2)} \\ 1-\frac{2s^2}{s(s-1/2)}+\frac{s^2(s-1)^2}{s(s-1/2)(s-1)(s-3/2)} \end{bmatrix} = \frac{(2s-4)!}{(2s)!} \begin{bmatrix} 1 \\ 2-3s \\ \frac{3}{4}s(s-1) \end{bmatrix} = \frac{(2s-4)!}{(2s)!} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(C_4^3 - C_4^2 s) \\ \frac{3}{4}s(s-1) \end{bmatrix}, s \geq 2$$

推论9.5.12.

$$\begin{bmatrix} s^5 & s^3 & s^1 \\ (s-1)^5 & (s-1)^3 & (s-1)^1 \\ (s-2)^5 & (s-2)^3 & (s-2)^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(s,5;5) \\ c(s,5;3) \\ c(s,5;1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2^5} \begin{bmatrix} (C_{2s}^0)^{-1} \sum_{i=0}^{5} (-1)^i C_5^i C_{2s-5}^{0-i} \\ (C_{2s}^1)^{-1} \sum_{i=0}^{5} (-1)^i C_5^i C_{2s-5}^{1-i} \\ (C_{2s}^2)^{-1} \sum_{i=0}^{5} (-1)^i C_5^i C_{2s-5}^{2-i} \end{bmatrix} = \frac{1}{2^5} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\frac{5}{s} \\ 1-\frac{5(2s-5)}{s(s-1/2)} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} c(s,5;5) \\ c(s,5;3) \\ c(s,5;1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2^5} \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s-1/2)(s-1)(s-3/2)(s-2)} \\ \frac{2}{s(s-1/2)(s-1)} - \frac{s^2+(s-1)^2}{s(s-1/2)(s-1)(s-3/2)(s-2)} \\ \frac{1}{s}-\frac{2s^2}{s(s-1/2)(s-1)}+\frac{s^2(s-1)^2}{s(s-1/2)(s-1)(s-3/2)(s-2)} \end{bmatrix} = \frac{(2s-5)!}{(2s)!} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(C_5^3 - C_5^2 s) \\ \frac{1}{4}(15s^2-25s+6) \end{bmatrix}, s \geq \frac{5}{2}$$

推论9.5.13.

$$\begin{bmatrix} s^6 & s^4 & s^2 & s^0 \\ (s-1)^6 & (s-1)^4 & (s-1)^2 & (s-1)^0 \\ (s-2)^6 & (s-2)^4 & (s-2)^2 & (s-2)^0 \\ (s-3)^6 & (s-3)^4 & (s-2)^3 & (s-3)^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(s,6;6) \\ c(s,6;4) \\ c(s,6;2) \\ c(s,6;0) \end{bmatrix} = \frac{1}{2^6} \begin{bmatrix} (C_{2s}^0)^{-1} \sum_{i=0}^{6} (-1)^i C_6^i C_{2s-6}^{0-i} \\ (C_{2s}^1)^{-1} \sum_{i=0}^{6} (-1)^i C_6^i C_{2s-6}^{1-i} \\ (C_{2s}^2)^{-1} \sum_{i=0}^{6} (-1)^i C_6^i C_{2s-6}^{2-i} \\ (C_{2s}^3)^{-1} \sum_{i=0}^{6} (-1)^i C_6^i C_{2s-6}^{3-i} \end{bmatrix} = \frac{1}{2^6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\frac{6}{s} \\ 1-\frac{6(2s-6)}{s(s-1/2)} \\ 1-\frac{3(6s^2-39s+73)}{s(s-1/2)(s-1)} \end{bmatrix}, s \geq 3$$

推论9.5.14.

$$\begin{bmatrix} s^7 & s^5 & s^3 & s^1 \\ (s-1)^7 & (s-1)^5 & (s-1)^3 & (s-1)^1 \\ (s-2)^7 & (s-2)^5 & (s-2)^3 & (s-2)^1 \\ (s-3)^7 & (s-3)^5 & (s-2)^3 & (s-3)^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(s,7;7) \\ c(s,7;5) \\ c(s,7;3) \\ c(s,7;1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2^7} \begin{bmatrix} (C_{2s}^0)^{-1} \sum_{i=0}^{7} (-1)^i C_7^i C_{2s-7}^{0-i} \\ (C_{2s}^1)^{-1} \sum_{i=0}^{7} (-1)^i C_7^i C_{2s-7}^{1-i} \\ (C_{2s}^2)^{-1} \sum_{i=0}^{7} (-1)^i C_7^i C_{2s-7}^{2-i} \\ (C_{2s}^3)^{-1} \sum_{i=0}^{7} (-1)^i C_7^i C_{2s-7}^{3-i} \end{bmatrix} = \frac{1}{2^7} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\frac{7}{s} \\ 1-\frac{7(2s-7)}{s(s-1/2)} \\ 1-\frac{7(6s^2-45s+99)}{2s(s-1/2)(s-1)} \end{bmatrix}, s \geq \frac{7}{2}$$

9.6 复合常数不变张量$\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)\hat{p}_{\alpha_{1\varsigma}}\cdot\cdot\hat{p}_{\alpha_{n\varsigma}}$的展开式

推论9.6.1. $\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)\hat{p}_{\alpha_{1\varsigma}}\cdot\cdot\hat{p}_{\alpha_{n\varsigma}} = \sum_{k}^{[n/2]} c(s,n;n-2k)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k}$

推论9.6.2. $\Gamma^{\alpha_{1\varsigma}\cdot\cdot\alpha_{n\varsigma}}(s,n;w)\hat{\partial}_{\alpha_{1\varsigma}}\cdot\cdot\hat{\partial}_{\alpha_{n\varsigma}} = \sum_{k}^{[n/2]} c(s,n;n-2k)[\sigma(s;w)\cdot\hat{\nabla}]^{n-2k}$

10 利用范德蒙矩阵统一求解通项公式

10.1 $m(s,n;n-2l), 2s \geq [n/2]|1$通项公式的求解

推论10.1.1.

$$2s \begin{bmatrix} s^{n-2[n/2]} & \cdot\cdot & s^{n-4} & s^{n-2} & s^n \\ (s-1)^{n-2[n/2]} & \cdot\cdot & (s-1)^{n-4} & (s-1)^{n-2} & (s-1)^n \\ (s-2)^{n-2[n/2]} & \cdot\cdot & (s-2)^{n-4} & (s-2)^{n-2} & (s-2)^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-[n/2])^{n-2[n/2]} & \cdot\cdot & (s-[n/2])^{n-4} & (s-[n/2])^{n-2} & (s-[n/2])^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m(s,n;n-2[n/2]) \\ \cdot\cdot \\ m(s,n;n-4) \\ m(s,n;n-2) \\ m(s,n;n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s(s-1/2)^n \\ (2s-1)(s-3/2)^n+1(s-1/2)^n \\ (2s-2)(s-5/2)^n+2(s-3/2)^n \\ \cdot\cdot \\ 2s(1/2-s)^n \end{bmatrix}$$

推论10.1.2.

$$\begin{bmatrix} m(s,n;n-2[n/2]) \\ \cdot\cdot \\ m(s,n;n-4) \\ m(s,n;n-2) \\ m(s,n;n) \end{bmatrix} = \frac{1}{2s} \begin{bmatrix} s^{n-2[n/2]} & \cdot\cdot & s^{n-4} & s^{n-2} & s^n \\ (s-1)^{n-2[n/2]} & \cdot\cdot & (s-1)^{n-4} & (s-1)^{n-2} & (s-1)^n \\ (s-2)^{n-2[n/2]} & \cdot\cdot & (s-2)^{n-4} & (s-2)^{n-2} & (s-2)^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (s-[n/2])^{n-2[n/2]} & \cdot\cdot & (s-[n/2])^{n-4} & (s-[n/2])^{n-2} & (s-[n/2])^n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2s(s-1/2)^n \\ (2s-1)(s-3/2)^n+1(s-1/2)^n \\ (2s-2)(s-5/2)^n+2(s-3/2)^n \\ \cdot\cdot \\ (2s-[n/2])(s-1/2-[n/2])^n+[n/2](s+1/2-[n/2])^n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow m(s,n;n-2[n/2]+2i)=\frac{2^{n-2[n/2]+2i}}{2^n}\frac{1}{2s}(2sC_n^{n-2[n/2]+2i}-C_n^{n-2[n/2]+2i-1})$$
$$\equiv\frac{1}{2s}\sum_{j=0}^{[n/2]}(-1)^{k+i+j}C_{2s}^{j}C^{k-i}_{\{s^2,\cdots,\overline{(s-j)^2},\cdots,(s-k)^2\}}\frac{(2s-k-1-j)!(2s-2j)}{(2s)!(k-j)!(s-j)^{n-2[n/2]}}[(2s-j)(s-j-1/2)^n-j(s-j+1/2)^n]$$

10.2 $n(s,n;n-2l),2s\geq[n/2]|1$通项公式的求解

推论10.2.1.

$$4s\begin{bmatrix}s^{n-2[n/2]}&\cdots&s^{n-4}&s^{n-2}&s^n\\(s-1)^{n-2[n/2]}&\cdots&(s-1)^{n-4}&(s-1)^{n-2}&(s-1)^n\\(s-2)^{n-2[n/2]}&\cdots&(s-2)^{n-4}&(s-2)^{n-2}&(s-2)^n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(s-[n/2])^{n-2[n/2]}&\cdots&(s-[n/2])^{n-4}&(s-[n/2])^{n-2}&(s-[n/2])^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n(s,n;n-2[n/2])\\\cdots\\n(s,n;n-4)\\n(s,n;n-2)\\n(s,n;n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2s(s-1/2)^{n-1}\\(2s-1)(s-3/2)^{n-1}-1(s-1/2)^{n-1}\\(2s-2)(s-5/2)^{n-1}-2(s-3/2)^{n-1}\\\cdots\\-2s(1/2-s)^{n-1}\end{bmatrix}$$

推论10.2.2.

$$\begin{bmatrix}n(s,n;n-2[n/2])\\\cdots\\n(s,n;n-4)\\n(s,n;n-2)\\n(s,n;n)\end{bmatrix}=\frac{1}{4s}\begin{bmatrix}s^{n-2[n/2]}&\cdots&s^{n-4}&s^{n-2}&s^n\\(s-1)^{n-2[n/2]}&\cdots&(s-1)^{n-4}&(s-1)^{n-2}&(s-1)^n\\(s-2)^{n-2[n/2]}&\cdots&(s-2)^{n-4}&(s-2)^{n-2}&(s-2)^n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(s-[n/2])^{n-2[n/2]}&\cdots&(s-[n/2])^{n-4}&(s-[n/2])^{n-2}&(s-[n/2])^n\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2s(s-1/2)^{n-1}\\(2s-1)(s-3/2)^{n-1}-1(s-1/2)^{n-1}\\(2s-2)(s-5/2)^{n-1}-2(s-3/2)^{n-1}\\\cdots\\(2s-[n/2])(s-1/2-[n/2])^{n-1}-[n/2](s+1/2-[n/2])^{n-1}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow n(s,n;n-2[n/2]+2i)=\frac{2^{n-2[n/2]+2i}}{2^n}\frac{1}{2s}(C_{n-1}^{n-2[n/2]+2i-1}-2sC_{n-1}^{n-2[n/2]+2i})$$
$$\equiv\frac{1}{4s}\sum_{j=0}^{[n/2]}(-1)^{k+i+j}C_{2s}^{j}C^{k-i}_{\{s^2,\cdots,\overline{(s-j)^2},\cdots,(s-k)^2\}}\frac{(2s-k-1-j)!(2s-2j)}{(2s)!(k-j)!(s-j)^{n-2[n/2]}}[(2s-j)(s-j-1/2)^{n-1}-j(s-j+1/2)^{n-1}]$$

10.3 $c(s,n;n-2l)$通项公式的彻底解决

引理10.3.1.

$$\begin{bmatrix}s^{n-2[n/2]}&\cdots&s^{n-2}&s^n\\(s-1)^{n-2[n/2]}&\cdots&(s-1)^{n-2}&(s-1)^n\\(s-2)^{n-2[n/2]}&\cdots&(s-2)^{n-2}&(s-2)^n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(s-[n/2])^{n-2[n/2]}&\cdots&(s-[n/2])^{n-2}&(s-[n/2])^n\end{bmatrix}^{-1}_{ij}=(-1)^{[n/2]+i+j}C_{2s}^{j}C^{[n/2]-i}_{\{s^2,\cdots,\overline{(s-j)^2},\cdots,(s-[n/2])^2\}}\frac{(2s-[n/2]-1-j)!(2s-2j)}{(2s)!([n/2]-j)!(s-j)^{n-2[n/2]}}$$

推论10.3.1.

$$\begin{bmatrix}s^0&\cdots&s^{2k-4}&s^{2k-2}&s^{2k}\\(s-1)^0&\cdots&(s-1)^{2k-4}&(s-1)^{2k-2}&(s-1)^{2k}\\(s-2)^0&\cdots&(s-2)^{2k-4}&(s-2)^{2k-2}&(s-2)^{2k}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(s-k)^0&\cdots&(s-k)^{2k-4}&(s-k)^{2k-2}&(s-k)^{2k}\end{bmatrix}^{-1}_{ij}=(-1)^{k+i+j}C_{2s}^{j}C^{k-i}_{\{s^2,\cdots,\overline{(s-j)^2},\cdots,(s-k)^2\}}\frac{(2s-k-1-j)!(2s-2j)}{(2s)!(k-j)!}$$

推论10.3.2.

$$\begin{bmatrix}s^1&\cdots&s^{2k-3}&s^{2k-1}&s^{2k+1}\\(s-1)^1&\cdots&(s-1)^{2k-3}&(s-1)^{2k-1}&(s-1)^{2k+1}\\(s-2)^1&\cdots&(s-2)^{2k-3}&(s-2)^{2k-1}&(s-2)^{2k+1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(s-k)^1&\cdots&(s-k)^{2k-3}&(s-k)^{2k-1}&(s-k)^{2k+1}\end{bmatrix}^{-1}_{ij}=2(-1)^{k+i+j}C_{2s}^{j}C^{k-i}_{\{s^2,\cdots,\overline{(s-j)^2},\cdots,(s-k)^2\}}\frac{(2s-k-1-j)!}{(2s)!(k-j)!}$$

推论10.3.3.

$$\begin{bmatrix}c(s,2k;0)\\\cdots\\c(s,2k;2k-4)\\c(s,2k;2k-2)\\c(s,2k;2k)\end{bmatrix}=2^{-2k}\begin{bmatrix}s^0&\cdots&s^{2k-4}&s^{2k-2}&s^{2k}\\(s-1)^0&\cdots&(s-1)^{2k-4}&(s-1)^{2k-2}&(s-1)^{2k}\\(s-2)^0&\cdots&(s-2)^{2k-4}&(s-2)^{2k-2}&(s-2)^{2k}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(s-k)^0&\cdots&(s-k)^{2k-4}&(s-k)^{2k-2}&(s-k)^{2k}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}(C_{2s}^0)^{-1}\sum_{i=0}^{2k}(-1)^iC_{2k}^iC_{2s-2k}^{0-i}\\(C_{2s}^1)^{-1}\sum_{i=0}^{2k}(-1)^iC_{2k}^iC_{2s-2k}^{1-i}\\\cdots\\(C_{2s}^k)^{-1}\sum_{i=0}^{2k}(-1)^iC_{2k}^iC_{2s-2k}^{k-i}\end{bmatrix}$$

推论10.3.4.

$$\begin{bmatrix}c(s,2k+1;1)\\\cdots\\c(s,2k+1;2k-3)\\c(s,2k+1;2k-1)\\c(s,2k+1;2k+1)\end{bmatrix}=2^{-2k-1}\begin{bmatrix}s^1&\cdots&s^{2k-3}&s^{2k-1}&s^{2k+1}\\(s-1)^1&\cdots&(s-1)^{2k-3}&(s-1)^{2k-1}&(s-1)^{2k+1}\\(s-1)^2&\cdots&(s-2)^{2k-3}&(s-2)^{2k-1}&(s-2)^{2k+1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(s-k)^1&\cdots&(s-k)^{2k-3}&(s-k)^{2k-1}&(s-k)^{2k+1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}(C_{2s}^0)^{-1}\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^iC_{2k+1}^iC_{2s-2k-1}^{0-i}\\(C_{2s}^1)^{-1}\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^iC_{2k+1}^iC_{2s-2k-1}^{1-i}\\\cdots\\(C_{2s}^k)^{-1}\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^iC_{2k+1}^iC_{2s-2k-1}^{k-i}\end{bmatrix}$$

推论10.3.5.

$$\begin{cases}c(s,2k;2i)=(-1)^{i+k}\sum_{l=0}^{k}\frac{2(s-l)C^{k-i}_{\{s^2,\cdots,\overline{(s-l)^2},\cdots,(s-k)^2\}}(2s-1-k-l)!}{2^{2k}(2s)!(k-l)!}\sum_{h=0}^{2k}(-1)^{l+h}C_{2k}^hC_{2s-2k}^{l-h},2s\geq2k|1\\c(s,2k+1;2i+1)=(-1)^{i+k}\sum_{l=0}^{k}\frac{2C^{k-i}_{\{s^2,\cdots,\overline{(s-l)^2},\cdots,(s-k)^2\}}(2s-1-k-l)!}{2^{2k+1}(2s)!(k-l)!}\sum_{h=0}^{2k+1}(-1)^{l+h}C_{2k+1}^hC_{2s-2k-1}^{l-h},2s\geq2k+1|1\end{cases}$$

证明：$c(s,2k;2i)$

$$=\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^{k+i+l}C_{2s}^lC^{k-i}_{\{s^2,\cdots,\overline{(s-l)^2},\cdots,(s-k)^2\}}(2s-k-1-l)!2(s-l)}{2^{2k}(2s)!(k-l)!}(C_{2s}^l)^{-1}\sum_{h=0}^{2k}(-1)^hC_{2k}^hC_{2s-2k}^{l-h}$$
$$=(-1)^{i+k}\sum_{l=0}^{k}\frac{2(s-l)C^{k-i}_{\{s^2,\cdots,\overline{(s-l)^2},\cdots,(s-k)^2\}}(2s-1-k-l)!}{2^{2k}(2s)!(k-l)!}\sum_{h=0}^{2k}(-1)^{l+h}C_{2k}^hC_{2s-2k}^{l-h}$$ □

证明： $c(s,2k+1;2i+1)$
$= \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^{k+i+l} C_{2s}^{l} C^{k-i}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-l)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}{}^{(2s-k-1-l)!2(s-l)}}{2^{2k+1}(2s)!(k-l)!(s-l)} (C_{2s}^{l})^{-1} \sum_{h=0}^{2k+1} (-1)^h C_{2k+1}^{h} C_{2s-2k-1}^{l-h}$
$= (-1)^{i+k} \sum_{l=0}^{k} \frac{2C^{k-i}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-l)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}{}^{(2s-1-k-l)!}}{2^{2k+1}(2s)!(k-l)!} \sum_{h=0}^{2k+1} (-1)^{l+h} C_{2k+1}^{h} C_{2s-2k-1}^{l-h}$ □

11 常数不变张量$Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w), Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w)$

11.1 常数不变张量$Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w), Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w)$的引入

定义11.1.1. $Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w) := \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\langle w\rangle, -i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma} N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w), Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w) := \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\langle w\rangle, i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma} N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$

性质11.1.1. $\begin{cases} Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w) = \delta^{ab}\varepsilon_{k_\varsigma m_\varsigma}(s;w)\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma} Z_{bn_\varsigma}^{B'_\varsigma m_\varsigma}(s,\varsigma;w) \\ Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w) = \delta_{ab}\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s;w)\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma} Z^{bn_\varsigma}_{B'_\varsigma m_\varsigma}(s,\varsigma;w) \end{cases}$

性质11.1.2. $\begin{cases} Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w) = (-1)^{2s+1}\delta^{ab}[(-\varsigma)^{2s}\varepsilon_{k_\varsigma m_\varsigma}(s;w)][\varsigma^{2s-1}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)][-\varsigma\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}] Z_{bn_\varsigma}^{B'_\varsigma m_\varsigma}(s,\varsigma;w) \\ Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w) = (-1)^{2s+1}\delta_{ab}[(\varsigma)^{2s}\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s;w)][(-\varsigma)^{2s-1}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)][\varsigma\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}] Z^{bn_\varsigma}_{B'_\varsigma m_\varsigma}(s,\varsigma;w) \end{cases}$

11.2 常数矩阵$Z_a^{A'_\varsigma}(s,\varsigma;w), Z^a_{A'_\varsigma}(s,\varsigma;w)$ 的引入

定义11.2.1. $\begin{cases} Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w) \succ Z_a^{A'_\varsigma}(s,\varsigma;w) := \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\langle w\rangle, -i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w) \\ Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w) \succ Z^a_{A'_\varsigma}(s,\varsigma;w) := \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\langle w\rangle, i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\bar{N}^{A_\varsigma}(s;w) \end{cases}$

定义11.2.2. $\begin{cases} \bar{Z}_a^{A'_\varsigma}(s,\varsigma;w) := Z_a^{TA'_\varsigma}(s,\varsigma;w) = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\langle w\rangle, -i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma} N_{A_\varsigma}(s;w) \\ \bar{Z}^a_{A'_\varsigma}(s,\varsigma;w) := Z^{Ta}_{A'_\varsigma}(s,\varsigma;w) = \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\langle w\rangle, i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma} N^{A_\varsigma}(s;w) \end{cases}$

11.3 常数不变张量矩阵$Z_a(s,\varsigma;w), \bar{Z}_a(s,\varsigma;w)$的引入

定义11.3.1. $\begin{cases} Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w)|^{A'_\varsigma}{}_{\otimes l_\varsigma}{}^{k_\varsigma} \succ Z_a(s,\varsigma;w) := \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}, -i\varsigma)_a N(s;w) \\ Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w)|_{k_\varsigma A'_\varsigma}{}^{\otimes l_\varsigma} \succ \bar{Z}_a(s,\varsigma;w) := \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\bar{N}(s;w)(\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}, i\varsigma)_a \simeq Z_a^+(s,\varsigma;w) \end{cases}$

11.4 矩阵$Z_a(s,\varsigma;w), \bar{Z}_a(s,\varsigma;w)$的常数不变张量性质

性质11.4.1. $Z_a(s,\varsigma;w) = [e^{\vartheta}]_a{}^b[e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},-\varsigma;w)} \otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}]Z_b(s,\varsigma;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(s,\varsigma;w)}$

性质11.4.2. $\bar{Z}_a(s,\varsigma;w) = [e^{\vartheta}]_a{}^b e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(s,\varsigma;w)}\bar{Z}_b(s,\varsigma;w)[e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(\frac{1}{2},-\varsigma;w)} \otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}S_{cd}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}]$

11.5 常数不变张量$Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w), Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w)$的性质

1、缩减两对指标$A'_\varsigma, l_\varsigma$：

性质11.5.1. $Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w)Z_{bl_\varsigma}^{A'_\varsigma m_\varsigma}(s,\varsigma;w) = \frac{1}{2s}[s\delta^a{}_b\delta_{k_\varsigma}{}^{m_\varsigma} + iS^a{}_{bk_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s,\varsigma;w)]$
$[\Leftrightarrow]\bar{Z}^a_{A'_\varsigma}(s,\varsigma;w)Z_b^{A'_\varsigma}(s,\varsigma;w) = \frac{1}{2s}[s\delta^a{}_b + iS^a{}_b(s,\varsigma;w)][\Leftrightarrow]\bar{Z}_a(s,\varsigma;w)Z_b(s,\varsigma;w) = \frac{1}{2s}[s\delta_{ab} + iS_{ab}(s,\varsigma;w)]$

证明： $Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w)Z_{bl_\varsigma}^{A'_\varsigma m_\varsigma}(s,\varsigma;w)$
$= \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\langle w\rangle, i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma} N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\langle w\rangle, -i\varsigma)_b^{A'_\varsigma B_\varsigma} N^{m_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$
$= \frac{1}{2}N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)(\sigma\langle w\rangle, i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma\langle w\rangle, -i\varsigma)_b^{A'_\varsigma B_\varsigma} N^{m_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$
$= \frac{1}{2}N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)(\delta^a{}_b\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} + 2iS^a{}_{bA_\varsigma}{}^{B_\varsigma})N^{m_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$
$= \frac{1}{2s}[s\delta^a{}_b\delta_{k_\varsigma}{}^{m_\varsigma} + iS^a{}_{bk_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s,\varsigma;w)]$ □

推论11.5.1. $Z_a{}^{l_\varsigma}{}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w)Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma m_\varsigma}(s,\varsigma;w) = \frac{1}{2}\delta_{k_\varsigma}{}^{m_\varsigma}$
$[\Leftrightarrow]\bar{Z}_{aA'_\varsigma}(s,\varsigma;w)Z_a^{A'_\varsigma}(s,\varsigma;w) = \frac{1}{2}I_{C^{2s}_{2s+w}}[\Leftrightarrow]\bar{Z}_a(s,\varsigma;w)Z_a(s,\varsigma;w) = \frac{1}{2}I_{C^{2s}_{2s+w}}$

2、缩减两对指标$A'_\varsigma, k_\varsigma$：

性质11.5.2. $Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w)Z^{A'_\varsigma k_\varsigma}_{bm_\varsigma}(s,\varsigma;w)=\frac{1}{2s}[(s+\frac{w}{2})\delta^a{}_b\delta_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+iS^a{}_{bm_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]$
$[\Leftrightarrow]Z^{A'_\varsigma}_b(s,\varsigma;w)\bar{Z}^a_{A'_\varsigma}(s,\varsigma;w)=\frac{1}{2s}[(s+\frac{w}{2})\delta^a{}_b+iS^a{}_b(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]$

证明： $Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w)Z^{A'_\varsigma k_\varsigma}_{bm_\varsigma}(s,\varsigma;w)$
$=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\langle w\rangle,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\langle w\rangle,-i\varsigma)^{A'_\varsigma B_\varsigma}_b N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;w)$
$=\frac{1}{2}N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)(\sigma\langle w\rangle,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma\langle w\rangle,-i\varsigma)^{A'_\varsigma B_\varsigma}_b N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;w)$
$=\frac{1}{2}N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)(\delta^a{}_b\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}+2iS^a{}_{bA_\varsigma}{}^{B_\varsigma})N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;w)$
$=\frac{1}{2s}[(s+\frac{w}{2})\delta^a{}_b\delta_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+iS^a{}_{bm_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]$ □

推论11.5.2. $Z_a{}^{l_\varsigma}{}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w)Z^{A'_\varsigma k_\varsigma}_{am_\varsigma}(s,\varsigma;w)=\frac{1}{2}(1+\frac{w}{2s})\delta_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}[\Leftrightarrow]Z^{A'_\varsigma}_a(s,\varsigma;w)\bar{Z}_{aA'_\varsigma}(s,\varsigma;w)=\frac{1}{2}(1+\frac{w}{2s})$

3、缩减两对指标k_ς, l_ς：

性质11.5.3. $Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w)Z^{B'_\varsigma k_\varsigma}_{bl_\varsigma}(s,\varsigma;w)=\frac{1}{w+1}C^{2s}_{2s+w}(\frac{1}{2}\delta_b{}^a\delta^{B'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}+iS_b{}^{aB'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma})$
$[\Leftrightarrow]tr[\bar{Z}^a_{A'_\varsigma}(s,\varsigma;w)Z^{B'_\varsigma}_b(s,\varsigma;w)]=\frac{1}{w+1}C^{2s}_{2s+w}(\frac{1}{2}\delta_b{}^a\delta^{B'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}+iS_b{}^{aB'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma})$

证明： $Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w)Z^{B'_\varsigma k_\varsigma}_{bl_\varsigma}(s,\varsigma;w)$
$=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\langle w\rangle,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\langle w\rangle,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_b N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$
$=\frac{1}{2}\frac{1}{w+1}C^{2s}_{2s+w}(\sigma\langle w\rangle,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma\langle w\rangle,-i\varsigma)^{B'_\varsigma A_\varsigma}_b$
$=\frac{1}{w+1}C^{2s}_{2s+w}(\frac{1}{2}\delta_b{}^a\delta^{B'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}+iS_b{}^{aB'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma})$ □

推论11.5.3. $Z_a{}^{l_\varsigma}{}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w)Z^{B'_\varsigma k_\varsigma}_{al_\varsigma}(s,\varsigma;w)=\frac{1}{2(w+1)}C^{2s}_{2s+w}\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}[\Leftrightarrow]tr[\bar{Z}^a_{A'_\varsigma}(s,\varsigma;w)Z^{B'_\varsigma}_b(s,\varsigma;w)]=\frac{1}{2(w+1)}C^{2s}_{2s+w}\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}$

11.6 猜想(不具一般性)

猜想11.6.1. $\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\langle w\rangle,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_a\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\langle w\rangle,i\varsigma)^a_{B_\varsigma B'_\varsigma}=\delta^{A_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}$

4、缩减两对指标a, l_ς：

性质11.6.1. $Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w)Z^{B'_\varsigma m_\varsigma}_{al_\varsigma}(s,\varsigma;w)=\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}\delta^{m_\varsigma}_{k_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar{Z}^a_{A'_\varsigma}(s,\varsigma;w)Z^{B'_\varsigma}_a(s,\varsigma;w)=\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}I_{C^{2s}_{2s+w}}$

5、缩减两对指标a, k_ς：

性质11.6.2. $Z^{A'_\varsigma k_\varsigma}_{al_\varsigma}(s,\varsigma;w)Z^{am_\varsigma}_{B'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma;w)=(1+\frac{w}{2s})\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}$
$[\Leftrightarrow]Z^{A'_\varsigma}_a(s,\varsigma;w)\bar{Z}^a_{B'_\varsigma}(s,\varsigma;w)=(1+\frac{w}{2s})\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}[\Leftrightarrow]Z_a(s,\varsigma;w)\bar{Z}^a(s,\varsigma;w)=(1+\frac{w}{2s})I_{(w+1)C^{2s-1}_{2s-1+w}}$

11.7 常数不变张量矩阵$Z_a(s,\varsigma;w), \bar{Z}_a(s,\varsigma;w)$的性质(不具一般性)

性质11.7.1. $\begin{cases}\bar{Z}_a(s,\varsigma;w)Z_b(s,\varsigma;w)=\frac{1}{2s}[s\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma;w)]\\ Z^a(s,\varsigma;w)\bar{Z}_a(s,\varsigma;w)=(1+\frac{w}{2s})I_{(w+1)C^{2s-1}_{2s-1+w}}\end{cases}$

性质11.7.2. $\begin{cases}(s+w)Z_b(s,\varsigma;w)=Z^a(s,\varsigma;w)iS_{ab}(s,\varsigma;w),(s+w)\bar{Z}_a(s,\varsigma;w)=iS_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{Z}^b(s,\varsigma;w)\\ Z^a(s,\varsigma;w)iS_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{Z}^b(s,\varsigma;w)=(s+w)(1+\frac{w}{2s}),Z_a(s,\varsigma;w)\bar{Z}_a(s,\varsigma;w)\neq kI_{(w+1)C^{2s-1}_{2s-1+w}}\end{cases}$

性质11.7.3. $\begin{cases}-S_{ac}(s,\varsigma;w)S^c{}_b(s,\varsigma;w)=s(s+w)\delta_{ab}+iwS_{ab}(s,\varsigma;w)\\ \bar{Z}_a(s,\varsigma;w)Z_b(s,\varsigma;w)=-\frac{1}{2sw}[s^2\delta_{ab}+S_{ac}(s,\varsigma;w)S^c{}_b(s,\varsigma;w)]\end{cases}$

性质11.7.4. $[\sigma(s;w),i\varsigma(s+w)]^a\bar{Z}_a(s,\varsigma;w)=0,Z_a(s,\varsigma;w)[\sigma(s;w),-i\varsigma(s+w)]^a=0$

证明：$[\sigma(s;w),i\varsigma(s+w)]^a\bar{Z}_a(s,\varsigma;w)$
$=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}[\sigma(s;w),i\varsigma(s+w)]^a\bar{N}(s;w)(\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},i\varsigma)_a$
$=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\bar{N}(s;w)[s\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},i\varsigma(s+w)]^aN(s;w)\bar{N}(s;w)(\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},i\varsigma)_a$
$=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}[\bar{N}(s;w)(\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)^aN(s;w)s\bar{N}(s;w)(\sigma\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},i\varsigma)_a-(2s+w)\bar{N}(s;w)]$
$=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}[\bar{N}(s;w)Z^a(s,\varsigma;w)2s\bar{Z}_a(s,\varsigma;w)-(2s+w)\bar{N}(s;w)]$
$=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}[\bar{N}(s;w)(2s+w)-(2s+w)\bar{N}(s;w)]$
$=0$ □

12 常数不变张量$Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma),Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)$

12.1 常数不变张量$Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma),Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)$的引入

定义12.1.1. $Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma):=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s),Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma):=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)$

性质12.1.1. $\begin{cases}Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)=\delta^{ab}\varepsilon_{k_\varsigma m_\varsigma}(s)\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}Z_{bn_\varsigma}^{B'_\varsigma m_\varsigma}(s,\varsigma)\\Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)=\delta_{ab}\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s)\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}Z^{bn_\varsigma}_{B'_\varsigma m_\varsigma}(s,\varsigma)\end{cases}$

性质12.1.2. $\begin{cases}Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)=(-1)^{2s+1}\delta^{ab}[(-\varsigma)^{2s}\varepsilon_{k_\varsigma m_\varsigma}(s)][\varsigma^{2s-1}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2})][-\varsigma\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}]Z_{bn_\varsigma}^{B'_\varsigma m_\varsigma}(s,\varsigma)\\Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)=(-1)^{2s+1}\delta_{ab}[(\varsigma)^{2s}\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s)][(-\varsigma)^{2s-1}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2})][\varsigma\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}]Z^{bn_\varsigma}_{B'_\varsigma m_\varsigma}(s,\varsigma)\end{cases}$

12.2 常数矩阵$Z_a^{A'_\varsigma}(s,\varsigma),Z^a_{A'_\varsigma}(s,\varsigma)$ 的引入

定义12.2.1. $\begin{cases}Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)\succ Z_a^{A'_\varsigma}(s,\varsigma):=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\bar{N}_{A_\varsigma}(s)\\Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)\succ Z^a_{A'_\varsigma}(s,\varsigma):=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\bar{N}^{A_\varsigma}(s)\end{cases}$

定义12.2.2. $\begin{cases}\bar{Z}_a^{A'_\varsigma}(s,\varsigma):=Z_a^{TA'_\varsigma}(s,\varsigma)=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}N_{A_\varsigma}(s)\\\bar{Z}^a_{A'_\varsigma}(s,\varsigma):=Z^{Ta}_{A'_\varsigma}(s,\varsigma)=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}N^{A_\varsigma}(s)\end{cases}$

12.3 常数不变张量矩阵$Z_a(s,\varsigma),\bar{Z}_a(s,\varsigma)$的引入

定义12.3.1. $\begin{cases}Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)|^{A'_\varsigma}{}_{\otimes l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\succ Z_a(s,\varsigma):=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_aN(s)\\Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)|_{k_\varsigma A'_\varsigma}{}^{\otimes l_\varsigma}\succ\bar{Z}_a(s,\varsigma):=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\bar{N}(s)(\sigma\otimes I_{2s},i\varsigma)_a\simeq Z_a^+(s,\varsigma)\end{cases}$

12.4 矩阵$Z_a(s,\varsigma),\bar{Z}_a(s,\varsigma)$的常数不变张量性质

性质12.4.1. $Z_a(s,\varsigma)=[e^{(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)}]_a{}^be^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}Z_b(s,\varsigma)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}$

性质12.4.2. $\bar{Z}_a(s,\varsigma)=[e^{(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)}]_a{}^be^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}\bar{Z}_b(s,\varsigma)e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2})}$

12.5 常数不变张量$Z_{al_\varsigma}^{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma),Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)$的性质I

1、缩减两对指标A'_ς,l_ς：

性质12.5.1. $Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)Z_{bl_\varsigma}^{A'_\varsigma m_\varsigma}(s,\varsigma)=\frac{1}{2s}[s\delta^a{}_b\delta_{k_\varsigma}{}^{m_\varsigma}+iS^a{}_{bk_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s,\varsigma)]$
$[\Leftrightarrow]\bar{Z}^a_{A'_\varsigma}(s,\varsigma)Z_b^{A'_\varsigma}(s,\varsigma)=\frac{1}{2s}[s\delta^a{}_b+iS^a{}_b(s,\varsigma)][\Leftrightarrow]\bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_b(s,\varsigma)=\frac{1}{2s}[s\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)]$

证明：$Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)Z_{bl_\varsigma}^{A'_\varsigma m_\varsigma}(s,\varsigma)$
$=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b^{A'_\varsigma B_\varsigma}N^{m_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s)$
$=\frac{1}{2}N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{A'_\varsigma B_\varsigma}N^{m_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s)$
$=\frac{1}{2}N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)(\delta^a{}_b\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}+2iS^a{}_{bA_\varsigma}{}^{B_\varsigma})N^{m_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s)$
$=\frac{1}{2s}[s\delta^a{}_b\delta_{k_\varsigma}{}^{m_\varsigma}+iS^a{}_{bk_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s,\varsigma)]$ □

推论12.5.1. $Z_{a}{}^{l_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)Z^{A'_\varsigma m_\varsigma}_{al_\varsigma}(s,\varsigma)=\frac{1}{2}\delta_{k_\varsigma}{}^{m_\varsigma}$
$[\Leftrightarrow]\bar{Z}_{aA'_\varsigma}(s,\varsigma)Z_a^{A'_\varsigma}(s,\varsigma)=\frac{1}{2}I_{2s+1}[\Leftrightarrow]\bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_a(s,\varsigma)=\frac{1}{2}I_{2s+1}$

2、缩减两对指标A'_ς,k_ς：

性质12.5.2. $Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)Z^{A'_\varsigma k_\varsigma}_{bm_\varsigma}(s,\varsigma)=\frac{1}{2s}[(s+\frac{1}{2})\delta^a{}_b\delta_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+iS^a{}_{bm_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2},\varsigma)]$
$[\Leftrightarrow]Z_b^{A'_\varsigma}(s,\varsigma)\bar{Z}^a_{A'_\varsigma}(s,\varsigma)=\frac{1}{2s}[(s+\frac{1}{2})\delta^a{}_b+iS^a{}_b(s-\frac{1}{2},\varsigma)]$

证明：$Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)Z^{A'_\varsigma k_\varsigma}_{bm_\varsigma}(s,\varsigma)$
$=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma B_\varsigma}_b N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s)$
$=\frac{1}{2}N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma B_\varsigma}_b N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s)$
$=\frac{1}{2}N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)(\delta^a{}_b\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}+2iS^a{}_{bA_\varsigma}{}^{B_\varsigma})N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s)$
$=\frac{1}{2s}[(s+\frac{1}{2})\delta^a{}_b\delta_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+iS^a{}_{bm_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2},\varsigma)]$ □

推论12.5.2. $Z_{a}{}^{l_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)Z^{A'_\varsigma k_\varsigma}_{am_\varsigma}(s,\varsigma)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2s})\delta_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}[\Leftrightarrow]Z_a^{A'_\varsigma}(s,\varsigma)\bar{Z}_{aA'_\varsigma}(s,\varsigma)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2s})I_{2s}$

3、缩减两对指标k_ς,l_ς：

性质12.5.3. $Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)Z^{B'_\varsigma k_\varsigma}_{bl_\varsigma}(s,\varsigma)=(s+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}\delta_b{}^a\delta^{B'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}+iS_b{}^{aB'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma})$
$[\Leftrightarrow]tr[\bar{Z}^a_{A'_\varsigma}(s,\varsigma)Z_b^{B'_\varsigma}(s,\varsigma)]=(s+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}\delta_b{}^a\delta^{B'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}+iS_b{}^{aB'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma})$

证明：$Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)Z^{B'_\varsigma k_\varsigma}_{bl_\varsigma}(s,\varsigma)$
$=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_b N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s)$
$=\frac{1}{2}(s+\frac{1}{2})(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma A_\varsigma}_b$
$=(s+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}\delta_b{}^a\delta^{B'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}+iS_b{}^{aB'_\varsigma}{}_{A'_\varsigma})$ □

推论12.5.3. $Z_{a}{}^{l_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)Z^{B'_\varsigma k_\varsigma}_{al_\varsigma}(s,\varsigma)=\frac{1}{2}(s+\frac{1}{2})\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}[\Leftrightarrow]tr[\bar{Z}^a_{A'_\varsigma}(s,\varsigma)Z_b^{B'_\varsigma}(s,\varsigma)]=\frac{1}{2}(s+\frac{1}{2})\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}$

12.6 常数不变张量$Z^{A'_\varsigma k_\varsigma}_{al_\varsigma}(s,\varsigma),Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)$的性质II

性质12.6.1. $\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_a\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a_{B_\varsigma B'_\varsigma}=\delta^{A_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}$

4、缩减两对指标a,l_ς：

性质12.6.2. $Z^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)Z^{B'_\varsigma m_\varsigma}_{al_\varsigma}(s,\varsigma)=\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}\delta^{m_\varsigma}_{k_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar{Z}^a_{A'_\varsigma}(s,\varsigma)Z_a^{B'_\varsigma}(s,\varsigma)=\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}I_{2s+1}$

5、缩减两对指标a,k_ς：

性质12.6.3. $Z^{A'_\varsigma k_\varsigma}_{al_\varsigma}(s,\varsigma)Z^{am_\varsigma}_{B'_\varsigma k_\varsigma}(s,\varsigma)=(1+\frac{1}{2s})\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}$
$[\Leftrightarrow]Z_a^{A'_\varsigma}(s,\varsigma)\bar{Z}^a_{B'_\varsigma}(s,\varsigma)=(1+\frac{1}{2s})\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}I_{2s}[\Leftrightarrow]Z_a(s,\varsigma)\bar{Z}^a(s,\varsigma)=(1+\frac{1}{2s})I_{4s}$

12.7 常数不变张量矩阵$Z_a(s,\varsigma),\bar{Z}_a(s,\varsigma)$的性质

性质12.7.1. $\begin{cases}\bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_b(s,\varsigma)=\frac{1}{2s}[s\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)]\\ Z^a(s,\varsigma)\bar{Z}_a(s,\varsigma)=(1+\frac{1}{2s})I_{4s}\end{cases}$

性质12.7.2. $\begin{cases}(s+1)Z_b(s,\varsigma)=Z^a(s,\varsigma)iS_{ab}(s,\varsigma),(s+1)\bar{Z}_a(s,\varsigma)=iS_{ab}(s,\varsigma)\bar{Z}^b(s,\varsigma)\\ Z^a(s,\varsigma)iS_{ab}(s,\varsigma)\bar{Z}^b(s,\varsigma)=(s+1)(1+\frac{1}{2s}),Z_a(s,\varsigma)\bar{Z}_a(s,\varsigma)\neq kI_{4s}\end{cases}$

性质12.7.3. $\begin{cases}-S_{ac}(s,\varsigma)S^c{}_b(s,\varsigma)=s(s+1)\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)\\ \bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_b(s,\varsigma)=-\frac{1}{2s}[s^2\delta_{ab}+S_{ac}(s,\varsigma)S^c{}_b(s,\varsigma)]\end{cases}$

性质12.7.4. $[\sigma(s),i\varsigma(s+1)]^a\bar{Z}_a(s,\varsigma)=0,Z_a(s,\varsigma)[\sigma(s),-i\varsigma(s+1)]^a=0$

证明： $[\sigma(s), i\varsigma(s+1)]^a \bar{Z}_a(s,\varsigma)$
$= \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}[\sigma(s), i\varsigma(s+1)]^a \bar{N}(s)(\sigma \otimes I_{2s}, i\varsigma)_a$
$= \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\bar{N}(s)[s\sigma \otimes I_{2s}, i\varsigma(s+1)]^a N(s)\bar{N}(s)(\sigma \otimes I_{2s}, i\varsigma)_a$
$= \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}[\bar{N}(s)(\sigma \otimes I_{2s}, -i\varsigma)^a N(s)s\bar{N}(s)(\sigma \otimes I_{2s}, i\varsigma)_a - (2s+1)\bar{N}(s)]$
$= \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}[\bar{N}(s)Z^a(s,\varsigma)2s\bar{Z}_a(s,\varsigma) - (2s+1)\bar{N}(s)]$
$= \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}[\bar{N}(s)(2s+1) - (2s+1)\bar{N}(s)]$
$= 0$ □

13 几个重要的复合常数不变张量

13.1 复合常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}(n), \Gamma^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(n)$

定义13.1.1.

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n) := (\tfrac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n \underbrace{\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n), \Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n) := (\tfrac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n \overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)$$

等价性：

推论13.1.1.

$$\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n) = (\tfrac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n \overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n) \Leftrightarrow \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n) = (\tfrac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n \underbrace{\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n)$$

推论13.1.2.

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n) = (\tfrac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n \underbrace{\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n) \Leftrightarrow \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n) = (\tfrac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n \overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)$$

相等性：

推论13.1.3. $\Gamma^{\overbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k'_\varsigma}(n) = [\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n)]^* \simeq \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n), \Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n) = [\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)]^* \simeq \Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n)$

全对称性：

推论13.1.4. $\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n) = \frac{1}{n!}\Gamma^{\overbrace{(\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot)}^{n}}_{k_\varsigma}(n), \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n) = \frac{1}{n!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{(\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot)}_{n}}(n)$

无迹性：

推论13.1.5. $\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n) = 0, \delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n) = 0$

类Penrose对应：

$$\Gamma^{\overbrace{\alpha\beta\cdot\cdot}^{n}}_{k}(n) \stackrel{P}{=} \Gamma^{\overbrace{ABCD\cdot\cdot}^{2n}}_{k}(n) \qquad \Gamma^{\overbrace{\alpha'\beta'\cdot\cdot}^{n}}_{k'}(n) \stackrel{P}{=} \Gamma^{\overbrace{A'B'C'D'\cdot\cdot}^{2n}}_{k'}(n) \tag{4.1}$$

$$\Gamma^{k}_{\underbrace{\alpha\beta\cdot\cdot}_{n}}(n) \stackrel{P}{=} \Gamma^{k}_{\underbrace{ABCD\cdot\cdot}_{2n}}(n) \qquad \Gamma^{k'}_{\underbrace{\alpha'\beta'\cdot\cdot}_{n}}(n) \stackrel{P}{=} \Gamma^{k'}_{\underbrace{A'B'C'D'\cdot\cdot}_{2n}}(n) \tag{4.2}$$

正交性：

推论13.1.6. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{l_\varsigma}(n) = \delta^{k_\varsigma}{}_{l_\varsigma}$

推论13.1.7. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\Gamma^{\alpha_\varsigma}_{l_\varsigma}(1) = \delta^{k_\varsigma}_{l_\varsigma}, \Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\Gamma^{\beta_\varsigma}_{k_\varsigma}(1) = \delta^{\beta_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}$

推论13.1.8. $\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Leftrightarrow\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}=\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)$

推论13.1.9. $\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\Leftrightarrow\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}=\Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)$

推论13.1.10. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_{1\varsigma}\alpha_{2\varsigma}}(2)\Gamma^{\beta_{1\varsigma}\beta_{2\varsigma}}_{k_\varsigma}(2)=\frac{1}{2!}\delta^{(\beta_{1\varsigma}}_{\alpha_{1\varsigma}}\delta^{\beta_{2\varsigma})}_{\alpha_{2\varsigma}}-\frac{1}{3!}\delta^{(\beta_{1\varsigma}\beta_{2\varsigma})}\delta_{\alpha_{1\varsigma}\alpha_{2\varsigma}}$

证明: $\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_{1\varsigma}\alpha_{2\varsigma}}(2)\Gamma^{\beta_{1\varsigma}\beta_{2\varsigma}}_{k_\varsigma}(2)$
$=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^2\sigma^{A_{1\varsigma}A_{2\varsigma}}_{\alpha_{1\varsigma}}\sigma^{A_{3\varsigma}A_{4\varsigma}}_{\alpha_{2\varsigma}}(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^2\sigma^{\beta_{1\varsigma}}_{B_{1\varsigma}B_{2\varsigma}}\sigma^{\beta_{2\varsigma}}_{B_{3\varsigma}B_{4\varsigma}}\Gamma^{k_\varsigma}_{A_{1\varsigma}A_{2\varsigma}\cdot\cdot A_{2s\varsigma}}(s)\Gamma^{B_{1\varsigma}B_{2\varsigma}\cdot\cdot B_{2s\varsigma}}_{k_\varsigma}(s)$
$=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^2\sigma^{A_{1\varsigma}A_{2\varsigma}}_{\alpha_{1\varsigma}}\sigma^{A_{3\varsigma}A_{4\varsigma}}_{\alpha_{2\varsigma}}(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^2\sigma^{\beta_{1\varsigma}}_{B_{1\varsigma}B_{2\varsigma}}\sigma^{\beta_{2\varsigma}}_{B_{3\varsigma}B_{4\varsigma}}\frac{1}{4!}\delta^{B_{1\varsigma}}_{(A_{1\varsigma}}\delta^{B_{2\varsigma}}_{A_{2\varsigma}}\delta^{B_{3\varsigma}}_{A_{3\varsigma}}\delta^{B_{4\varsigma}}_{A_{4\varsigma})}$
$=\frac{1}{4!}[12\delta^{(\beta_{1\varsigma}}_{\alpha_{1\varsigma}}\delta^{\beta_{2\varsigma})}_{\alpha_{2\varsigma}}-8\delta^{\beta_{1\varsigma}\beta_{2\varsigma}}\delta_{\alpha_{1\varsigma}\alpha_{2\varsigma}}]$
$=\frac{1}{2!}\delta^{(\beta_{1\varsigma}}_{\alpha_{1\varsigma}}\delta^{\beta_{2\varsigma})}_{\alpha_{2\varsigma}}-\frac{1}{3!}\delta^{(\beta_{1\varsigma}\beta_{2\varsigma})}\delta_{\alpha_{1\varsigma}\alpha_{2\varsigma}}$ □

13.2 复合常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{abcd\cdot\cdot}(n),\Gamma^{abcd\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(n)$

定义13.2.1. $\Gamma^{\overbrace{abcd\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n):=(\frac{i}{2})^n\underbrace{\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{cd}_{\varsigma\beta_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n),\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{abcd\cdot\cdot}_{2n}}(n):=(\frac{i}{2})^n\overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma cd}\cdot\cdot}^{n}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)$

推论13.2.1.

$$\Gamma^{\overbrace{abcd\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)=(\frac{i}{2})^n\underbrace{\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{cd}_{\varsigma\beta_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n)\Rightarrow\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n)=(\frac{i}{2})^n\overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma cd}\cdot\cdot}^{n}\Gamma^{\overbrace{abcd\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)$$

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{abcd\cdot\cdot}_{2n}}(n)=(\frac{i}{2})^n\overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma cd}\cdot\cdot}^{n}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)\Rightarrow\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)=(\frac{i}{2})^n\underbrace{\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{cd}_{\varsigma\beta_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{abcd\cdot\cdot}_{2n}}(n)$$

推论13.2.2. 以下两个等式可以互推，相互等价。

$$\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abcd\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2n}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^d_{D_\varsigma D'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2n}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma D'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\\ \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma D'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2n}\overbrace{(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_a(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_b(\sigma,-i\varsigma)^{C'_\varsigma C_\varsigma}_c(\sigma,-i\varsigma)^{D'_\varsigma D_\varsigma}_d\cdot\cdot}^{2n}\Gamma^{\overbrace{abcd\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)\end{cases}$$

推论13.2.3. 以下两个等式可以互推，相互等价。

$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{abcd\cdot\cdot}_{2n}}(n)=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2n}\overbrace{(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_a(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_b(\sigma,-i\varsigma)^{C'_\varsigma C_\varsigma}_c(\sigma,-i\varsigma)^{D'_\varsigma D_\varsigma}_d\cdot\cdot}^{2n}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n)\overbrace{\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon_{C'_\varsigma D'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\\ \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n)\overbrace{\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon_{C'_\varsigma D'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2n}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^d_{D_\varsigma D'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2n}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{abcd\cdot\cdot}_{2n}}(n)\end{cases}$$

对称性:

推论13.2.4. $\Gamma^{\overbrace{abcd\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)=\frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}\Gamma^{\overbrace{([ab][cd]\cdot\cdot)}^{2n}}_{k_\varsigma}(n),\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{abcd\cdot\cdot}_{2n}}(n)=\frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{([ab][cd]\cdot\cdot)}_{2n}}(n)$

对偶性:

推论13.2.5. $\Gamma^{\overbrace{abcd\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)=[-\varsigma]^n\Gamma^{\overbrace{*ab*cd\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n),\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{abcd\cdot\cdot}_{2n}}(n)=[-\varsigma]^n\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{*ab*cd\cdot\cdot}_{2n}}(n)$

无迹性:

推论13.2.6. $\delta_{ab}\Gamma^{\overbrace{abcd\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)=0,\delta_{ac}\Gamma^{\overbrace{abcd\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)=0,\delta^{ab}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{abcd\cdot\cdot}_{2n}}(n)=0,\delta^{ac}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{abcd\cdot\cdot}_{2n}}(n)=0$

Penrose对应：

$$\begin{cases}\Gamma_{k}^{\overbrace{abcd\cdots}^{2n}}(n)\overset{P}{=}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n\Gamma_{k}^{\overbrace{ABCD\cdots}^{2n}}(n)\overbrace{\varepsilon^{A'B'}\varepsilon^{C'D'}\cdots}^{n},\Gamma_{k'}^{\overbrace{abcd\cdots}^{2n}}(n)\overset{P}{=}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n\Gamma_{k'}^{\overbrace{A'B'C'D'\cdots}^{2n}}(n)\overbrace{\varepsilon^{AB}\varepsilon^{CD}\cdots}^{n}\\ \Gamma^{k}_{\underbrace{abcd\cdots}_{2n}}(n)\overset{P}{=}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n\Gamma^{k}_{\underbrace{ABCD\cdots}_{2n}}(n)\overbrace{\varepsilon_{A'B'}\varepsilon_{C'D'}\cdots}^{n},\Gamma^{k'}_{\underbrace{abcd\cdots}_{2n}}(n)\overset{P}{=}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n\Gamma^{k'}_{\underbrace{A'B'C'D'\cdots}_{2n}}(n)\overbrace{\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\cdots}^{n}\end{cases}\tag{4.3}$$

类Penrose对应：

$$\begin{cases}\Gamma_{k}^{\overbrace{abcd\cdots}^{2n}}(n)\overset{P}{=}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n\Gamma_{k}^{\overbrace{\alpha\beta\cdots}^{n}}(n)\overbrace{\varepsilon^{A'B'}\varepsilon^{C'D'}\cdots}^{n},\Gamma_{k'}^{\overbrace{abcd\cdots}^{2n}}(n)\overset{P}{=}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n\Gamma_{k'}^{\overbrace{\alpha'\beta'\cdots}^{n}}(n)\overbrace{\varepsilon^{AB}\varepsilon^{CD}\cdots}^{n}\\ \Gamma^{k}_{\underbrace{abcd\cdots}_{2n}}(n)\overset{P}{=}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n\Gamma^{k}_{\underbrace{\alpha\beta\cdots}_{n}}(n)\overbrace{\varepsilon_{A'B'}\varepsilon_{C'D'}\cdots}^{n},\Gamma^{k'}_{\underbrace{abcd\cdots}_{2n}}(n)\overset{P}{=}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n\Gamma^{k'}_{\underbrace{\alpha'\beta'\cdots}_{n}}(n)\overbrace{\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\cdots}^{n}\end{cases}\tag{4.4}$$

一一对应关系：

$$\begin{cases}\Gamma_{k}^{\overbrace{abcd\cdots}^{2n}}(n)\leftrightarrow\Gamma_{k}^{\overbrace{\alpha\beta\cdots}^{n}}(n)\leftrightarrow\Gamma_{k}^{\overbrace{ABCD\cdots}^{2n}}(n),\Gamma_{k'}^{\overbrace{abcd\cdots}^{2n}}(n)\leftrightarrow\Gamma_{k'}^{\overbrace{\alpha'\beta'\cdots}^{n}}(n)\leftrightarrow\Gamma_{k'}^{\overbrace{A'B'C'D'\cdots}^{2n}}(n)\\ \Gamma^{k}_{\underbrace{abcd\cdots}_{2n}}(n)\leftrightarrow\Gamma^{k}_{\underbrace{\alpha\beta\cdots}_{n}}(n)\leftrightarrow\Gamma^{k}_{\underbrace{ABCD\cdots}_{2n}}(n),\Gamma^{k'}_{\underbrace{abcd\cdots}_{2n}}(n)\leftrightarrow\Gamma^{k'}_{\underbrace{\alpha'\beta'\cdots}_{n}}(n)\leftrightarrow\Gamma^{k'}_{\underbrace{A'B'C'D'\cdots}_{2n}}(n)\end{cases}\tag{4.5}$$

正交性：

推论13.2.7. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{abcd\cdots}_{2n}}(n)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{abcd\cdots}^{2n}}(n)=2^n\delta^{k_\varsigma}{}_{l_\varsigma}$

13.3 复合常数不变张量$N^{k_\varsigma k'_\varsigma}_{l_\varsigma l'_\varsigma a}(s),N^{l'_\varsigma l_\varsigma a}_{k'_\varsigma k_\varsigma}(s)$的引入

定义13.3.1. $N^{k_\varsigma k'_\varsigma}_{l_\varsigma l'_\varsigma a}(s):=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s)N^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma l'_\varsigma}(s)(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma},N^{l'_\varsigma l_\varsigma a}_{k'_\varsigma k_\varsigma}(s):=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}N^{A'_\varsigma l'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s)N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}$

推论13.3.1. $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s)N^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma l'_\varsigma}(s)=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}N^{k_\varsigma k'_\varsigma}_{l_\varsigma l'_\varsigma a}(s)(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma},N^{A'_\varsigma l'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s)N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}N^{l'_\varsigma l_\varsigma a}_{k'_\varsigma k_\varsigma}(s)(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}$

Penrose记法：

$$N^{kk'}_{ll'a}(s)\overset{P}{=}N^{k}_{Al}(s)N^{k'}_{A'l'}(s)\qquad N^{l'la}_{k'k}(s)\overset{P}{=}N^{A'l'}_{k'}(s)N^{Al}_{k}(s)\tag{4.6}$$

13.4 复合常数不变张量$\Gamma^{a_1b_1c_1d_1\cdots a_2b_2c_2d_2\cdots}_{abcd\cdots}(n)$的引入

定义13.4.1. $\Gamma^{\overbrace{a_1b_1c_1d_1\cdots}^{2n}\overbrace{a_2b_2c_2d_2\cdots}^{2n}}_{\underbrace{abcd\cdots}_{2n}}(n):=\Gamma^{k_\varsigma k'_\varsigma}_{\underbrace{abcd\cdots}_{2n}}(n)\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{a_1b_1c_1d_1\cdots}^{2n}}(n)\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{a_2b_2c_2d_2\cdots}^{2n}}(n)$

13.5 复合常数不变张量$\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}(n),\Gamma^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}(n)$的引入

定义13.5.1.

$$\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}^{2n}}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{2n}}(n):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{2n}}(n)\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}^{2n}}(n)=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\frac{1}{(2n)!}\underbrace{\sigma^{(A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\cdots)}_{n}$$

$$\Gamma_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}_{2n}}^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}^{2n}}(n):=\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}_{2n}}(n)=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\frac{1}{(2n)!}\overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{(A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\cdots)}^{n}$$

14 复合常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma k'_\varsigma}_{abc\cdots}(s),\Gamma^{abc\cdots}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)$

14.1 复合常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma k'_\varsigma}_{abc\cdots}(s),\Gamma^{abc\cdots}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)$的引入

定义14.1.1.

$$\begin{cases}\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{abc\cdots}_{2s}}(s):=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_c^{C'_\varsigma C_\varsigma}\cdots}^{2s}\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s)\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s):=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdots}^{2s}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

推论14.1.1.

$$\begin{cases}\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s)=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdots}^{2s}\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{abc\cdots}_{2s}}(s)\\ \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_c^{C'_\varsigma C_\varsigma}\cdots}^{2s}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\end{cases}$$

非协变关系：

推论14.1.2.

$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma k'_\varsigma}_{\underbrace{abc\cdots}_{2s}}(s)\overbrace{\partial^a\partial^b\partial^c\cdots}^{2s}\simeq(-1)^{2s}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial^+_a\partial^+_b\partial^+_c\cdots}^{2s}\\ \Gamma_{k'_\varsigma k_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\simeq(-1)^{2s}\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{abc\cdots}_{2s}}(s)\overbrace{\partial^{+a}\partial^{+b}\partial^{+c}\cdots}^{2s}\end{cases}$$

全对称性：

推论14.1.3. $\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{abc\cdots}_{2s}}(s)=\frac{1}{(2s)!}\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{(abc\cdots)}_{2s}}(s),\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)=\frac{1}{(2s)!}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{(abc\cdots)}^{2s}}(s)$

无迹性：

推论14.1.4. $\delta^{ab}\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{abc\cdots}_{2s}}(s)=0,\delta_{ab}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)=0$

Penrose记法：

$$\Gamma^{k'k}_{\underbrace{abc\cdots}_{2s}}(s)\overset{P}{=}\Gamma^{k'}_{\underbrace{A'B'C'\cdots}_{2s}}(s)\Gamma^{k}_{\underbrace{ABC\cdots}_{2s}}(s)\qquad\Gamma_{kk'}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overset{P}{=}\Gamma_k^{\overbrace{ABC\cdots}^{2s}}(s)\Gamma_{k'}^{\overbrace{A'B'C'\cdots}^{2s}}(s)\tag{4.7}$$

正交性：

推论14.1.5. $\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{abc\cdots}_{2s}}(s)\Gamma_{l_\varsigma l'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)=\delta^{k_\varsigma}{}_{l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}$

14.2 复合常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma k'_\varsigma}_{abc\cdots}(s,w),\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{abc\cdots}(s,w)$的引入

定义14.2.1.

$$\begin{cases}\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{abc\cdots}_{2s}}(s,w):=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_c^{C'_\varsigma C_\varsigma}\cdots}^{2s,w}\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s,w)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s,w)\\ \Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s,w):=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdots}^{2s,w}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s,w)\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s,w)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

定义14.2.2.

$$\begin{cases}\Gamma_{\underbrace{abc\cdots}_{2s}}(s,-\varsigma;w):=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{(\sigma,-i\varsigma)_a\otimes(\sigma,-i\varsigma)_b\otimes(\sigma,-i\varsigma)_c\otimes\cdots}^{2s}\Gamma(s)\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s,\varsigma;w):=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a\otimes(\sigma,i\varsigma)^b\otimes(\sigma,i\varsigma)^c\otimes\cdots}^{2s}\Gamma(s)\end{cases}$$

推论14.2.1. $\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s,\varsigma;w)=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\bar{N}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a\otimes(\sigma,i\varsigma)^b\otimes(\sigma,i\varsigma)^c\otimes\cdots}^{2s}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w)$

推论14.2.2. $\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s,\varsigma;w)=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})\bar{N}(s;w)[(\sigma,i\varsigma)^a\otimes\Gamma^{\overbrace{bc\cdots}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]N(s;w)$

14.3 复合常数不变张量$\Gamma^{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma\beta_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}_{abcd\cdot\cdot}(n),\Gamma^{abcd\cdot\cdot}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma\beta_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}(n)$的引入

定义14.3.1.

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n):=(\tfrac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\underbrace{\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n),\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n):=(\tfrac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)$$

定义14.3.2.

$$\begin{cases}\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{2s}}(s):=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_a(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_b(\sigma,-i\varsigma)^{C'_\varsigma C_\varsigma}_c\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s):=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)\end{cases}$$

性质14.3.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{A_{1\varsigma}A_{2\varsigma}\cdot\cdot A_{2s\varsigma}}(s)\Gamma^{B_{1\varsigma}B_{2\varsigma}\cdot\cdot B_{2s\varsigma}}_{k_\varsigma}(s)=\frac{1}{(2s)!}\delta^{(B_{1\varsigma}}_{A_{1\varsigma}}\delta^{B_{2\varsigma}}_{A_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{B_{2s\varsigma})}_{A_{2s\varsigma}}=\frac{1}{(2s)!}\delta^{B_{1\varsigma}}_{(A_{1\varsigma}}\delta^{B_{2\varsigma}}_{A_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{B_{2s\varsigma}}_{A_{2s\varsigma})}$

定义14.3.3.

$$\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma\beta'_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{2s}}(n):=\Gamma^{\overbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k'_\varsigma}(n)\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n)\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{2n}}(n)\\ =(-\frac{1}{4})^n\overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{C'_\varsigma D'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_a(\sigma,-i\varsigma)^{B'_\varsigma B_\varsigma}_b(\sigma,-i\varsigma)^{C'_\varsigma C_\varsigma}_c\cdot\cdot}^{2n}\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2n}}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma\beta_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n)\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n)\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(n)\\ =(-\frac{1}{4})^n\underbrace{\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\sigma^{C'_\varsigma D'_\varsigma}_{\beta'_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2n}\end{cases}$$

$\Rightarrow$

推论14.3.1.

$$\begin{cases}\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{2n}}(n):=\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n)\Gamma^{\overbrace{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma\beta'_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{2s}}(n)\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(n):=\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n)\Gamma^{\overbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k'_\varsigma}(n)\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2n}}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma\beta_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n)\end{cases}$$

推论14.3.2.

$$\begin{cases}\Gamma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{ab}(1):=\Gamma^{\alpha'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)\Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{ab}(1)\\ \Gamma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(1):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\Gamma^{k'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}(1)\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1)\end{cases}[\Leftrightarrow]\begin{cases}\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{ab}(1):=\Gamma^{k'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}(1)\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\Gamma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{ab}(1)\\ \Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1):=\Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Gamma^{\alpha'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)\Gamma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(1)\end{cases}\begin{cases}\Gamma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{ab}(1)=\sigma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{ab}\\ \Gamma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(1)=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\end{cases}$$

14.4 复合常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma k'_\varsigma}_{abc\cdot\cdot}(s),\Gamma^{abc\cdot\cdot}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)$前几项的具体展开

证明：$\Gamma^{\overbrace{\pi\pi\pi\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)$

$$=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(i\varsigma)_{A_\varsigma A'_\varsigma}(i\varsigma)_{B_\varsigma B'_\varsigma}(i\varsigma)_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)$$
$$=(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2s}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\overbrace{\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta_{B_\varsigma B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)$$
$$=(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2s}\delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}$$
□

证明：$\Gamma^{\overbrace{i\pi\pi\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)$

$$=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma)^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}(i\varsigma)_{B_\varsigma B'_\varsigma}(i\varsigma)_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)$$

$= -i\varsigma(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2s}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\,\overbrace{(\sigma)^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta_{B_\varsigma B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\,\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)$
$= -i\varsigma(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2s}\frac{1}{s}\sigma^i(s)_{k_\varsigma k'_\varsigma}$ □

证明：$\Gamma^{\overbrace{ij\pi\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)$
$= (\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma)^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma)^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}(i\varsigma)_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\,\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)$
$= -(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2s}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\,\overbrace{(\sigma)^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma)^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\,\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)$
$= -(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2s}\frac{1}{2s(s-\frac{1}{2})}[\{\sigma^i(s),\sigma^j(s)\}-s\delta^{ij}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}$ □

证明：$\Gamma^{\overbrace{ijk\pi\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)$
$= (\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma)^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma)^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma)^k_{C_\varsigma C'_\varsigma}(i\varsigma)_{D_\varsigma D'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\,\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma D'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)$
$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2s}\frac{i\varsigma}{2s(s-\frac{1}{2})(s-1)}\{\sigma^{\{j}(s)[\sigma^i(s)]\sigma^{k\}}(s)-[(s-1)\sigma^i(s)\delta^{jk}+s\delta^{i\{j}\sigma^{k\}}(s)]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}$ □

证明：$\Gamma^{\overbrace{ijkl\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\partial_i\partial_j\partial_k\partial_l$
$= (\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma)^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma)^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma)^k_{C_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma)^l_{D_\varsigma D'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\,\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma D'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)$
$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2s}\frac{1}{s(s-\frac{1}{2})(s-1)(s-\frac{3}{2})}[\sigma^i(s)\sigma^j(s)\sigma^k(s)\sigma^l(s)+(2-3s)\sigma^i(s)\sigma^j(s)\delta^{kl}+\frac{3s(s-1)}{4}\delta^{ij}\delta^{kl}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_i\partial_j\partial_k\partial_l$ □

14.5 $\Gamma^{abc\cdot\cdot}_{+}(s)$和$\Gamma^{abc\cdot\cdot}_{-}(s)$的定义

定义14.5.1. $odd := -, even := +$

定义14.5.2.
$$\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s) = 1\cdot\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l}}(s), 1\cdot\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l+1}}(s), l=0,\cdot\cdot,2s\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{+}(s) := 1\cdot\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l}}(s), 0\cdot\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l+1}}(s), l=0,\cdot\cdot,2s\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{-}(s) := 0\cdot\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l}}(s), 1\cdot\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l+1}}(s), l=0,\cdot\cdot,2s\end{cases}$$

推论14.5.1. $\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s) = \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{+}(s)+\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{-}(s)$

14.6 算符$\Gamma^{abc\cdot\cdot}_{\pm}(s)p_ap_bp_c\cdot\cdot$和$\Gamma^{abc\cdot\cdot}_{\pm}(s)\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot$的基本性质

性质14.6.1.
$$\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{p_ap_bp_c\cdot\cdot}^{2s} = \sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-n}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{n}}(s)\overbrace{p_ip_j\cdot\cdot}^{2s-n}p^n_\pi\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s} = \sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-n}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{n}}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{2s-n}\partial^n_\pi\end{cases}$$

性质14.6.2.
$$\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{+}(s)\overbrace{p_ap_bp_c\cdot\cdot}^{2s} := \sum_{l=0}^{[s]}C^{2l}_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l}}(s)\overbrace{p_ip_j\cdot\cdot}^{2s-2l}p^{2l}_\pi\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{+}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s} := \sum_{l=0}^{[s]}C^{2l}_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l}}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{2s-2l}\partial^{2l}_\pi\end{cases}$$

性质14.6.3.
$$\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{-}(s)\overbrace{p_ap_bp_c\cdot\cdot}^{2s} := \sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C^{2l+1}_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l+1}}(s)\overbrace{p_ip_j\cdot\cdot}^{2s-2l-1}p^{2l+1}_\pi\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{-}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s} := \sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C^{2l+1}_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l+1}}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\partial^{2l+1}_\pi\end{cases}$$

性质14.6.4. $\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{p_ap_bp_c\cdots}^{2s}=\Gamma_+^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{p_ap_bp_c\cdots}^{2s}+\Gamma_-^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{p_ap_bp_c\cdots}^{2s}\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}=\Gamma_+^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}+\Gamma_-^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\end{cases}$

14.7 算符$\hat{p}_a$和$\hat{\partial}_a$的定义

定义14.7.1. $\hat{p}_a:=\frac{p_a}{|\vec{p}|}=(\hat{p},i);\hat{p}=\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|},\hat{p}_\pi=\frac{p_\pi}{|\vec{p}|}=i;\hat{p}^2=1,\hat{p}_\pi^2=i^2$

定义14.7.2. $\hat{\partial}_a:=\frac{\partial_a}{i\sqrt{-\nabla^2}}=\frac{-i\partial_a}{\sqrt{-\nabla^2}}=\frac{(-i\nabla,-\partial_t)}{\sqrt{-\nabla^2}};\hat{\nabla}=\frac{\nabla}{i\sqrt{-\nabla^2}}=\frac{-i\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}};\hat{\nabla}^2=1,\hat{\nabla}_\pi^2=i^2$

推论14.7.1. $p_a\simeq-i\partial_a,|\vec{p}|\simeq\sqrt{-\nabla^2},\hat{p}_a\simeq\hat{\partial}_a,p_a=|\vec{p}|\hat{p}_a,\partial_a=(i\sqrt{-\nabla^2})\hat{\partial}_a$

14.8 算符$\Gamma^{abc\cdots}(s)\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots$和$\Gamma^{abc\cdots}(s)\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots$的基本性质

推论14.8.1. $\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{p_ap_bp_c\cdots}^{2s}=|\vec{p}|^{2s}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s}\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}=(i\sqrt{-\nabla^2})^{2s}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s}\end{cases}$

性质14.8.1. $\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s}=\sum\limits_{n=0}^{2s}i^nC_{2s}^n\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-n}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{n}}(s)\overbrace{\hat{p}_i\hat{p}_j\cdots}^{2s-n}=\sum\limits_{n=0}^{2s}i^{2s-n}C_{2s}^n\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2s-n}}(s)\overbrace{\hat{p}_i\hat{p}_j\cdots}^{n}\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s,\hat{\partial}_\pi\to i}=\sum\limits_{n=0}^{2s}i^nC_{2s}^n\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-n}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{n}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j\cdots}^{2s-n}=\sum\limits_{n=0}^{2s}i^{2s-n}C_{2s}^n\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2s-n}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j\cdots}^{n}\end{cases}$

性质14.8.2. $\begin{cases}\Gamma_+^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s}=\sum\limits_{l=0}^{[s]}(-1)^lC_{2s}^{2l}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2l}}(s)\overbrace{\hat{p}_i\hat{p}_j\cdots}^{2s-2l}\\ \Gamma_+^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s,\hat{\partial}_\pi\to i}=\sum\limits_{l=0}^{[s]}(-1)^lC_{2s}^{2l}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2l}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j\cdots}^{2s-2l}\end{cases}$

性质14.8.3. $\begin{cases}\Gamma_-^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s}=i\sum\limits_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}(-1)^lC_{2s}^{2l+1}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-2l-1}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2l+1}}(s)\overbrace{\hat{p}_i\hat{p}_j\cdots}^{2s-2l-1}\\ \Gamma_-^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s,\hat{\partial}_\pi\to i}=i\sum\limits_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}(-1)^lC_{2s}^{2l+1}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-2l-1}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2l+1}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j\cdots}^{2s-2l-1}\end{cases}$

14.9 算符$\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{ij\cdots\pi\cdots\pi}(s)\hat{p}_i\hat{p}_j\cdots$和$\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{ij\cdots\pi\cdots\pi}(s)\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j\cdots$的展开式

推论14.9.1. $\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2s-n}}(s)=(-i\varsigma)^n2^{n-s}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}}(s,n;w)=\frac{(-i\varsigma)^n}{2^{s-n}}\frac{1}{n!}\sum\limits_{k}^{[n/2]}c(s,n;n-2k)\Omega^{n-2k}(s)$

证明： $\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2s-n}}(s)$

$=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma)_{A_\varsigma A'_\varsigma}^i(\sigma)_{B_\varsigma B'_\varsigma}^j\cdots}^{n}\overbrace{(i\varsigma)_{P_\varsigma P'_\varsigma}(i\varsigma)_{Q_\varsigma Q'_\varsigma}\cdots}^{2s-n}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots P_\varsigma Q_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots P'_\varsigma Q'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)$

$=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}2^n(i\varsigma)^{2s-n}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots P_\varsigma Q_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\sigma(\tfrac{1}{2})_{A_\varsigma A'_\varsigma}^i\sigma(\tfrac{1}{2})_{B_\varsigma B'_\varsigma}^j\cdots}^{n}\overbrace{\delta_{P_\varsigma P'_\varsigma}\delta_{Q_\varsigma Q'_\varsigma}\cdots}^{2s-n}\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots P'_\varsigma Q'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)$

$=(-i\varsigma)^n2^{n-s}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}}(s,n;w)=\frac{(-i\varsigma)^n}{2^{s-n}}\frac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}c(s,n;n-2k)\Omega^{n-2k}(s)$ □

推论14.9.2. $\begin{cases}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2s-n}}(s)\overbrace{\hat{p}_i\hat{p}_j\cdots}^{n}=\frac{(-i\varsigma)^n}{2^{s-n}}\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}c(s,n;n-2k)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{n-2k}\\ \Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2s-n}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j\cdots}^{n}=\frac{(-i\varsigma)^n}{2^{s-n}}\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}c(s,n;n-2k)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{n-2k}\end{cases}$

推论14.9.3.
$$\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-n}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\hat{p}_i\hat{p}_j\cdots}^{2s-n}=\frac{(-i\varsigma)^{2s-n}}{2^{n-s}}\sum_{k=0}^{[(2s-n)/2]}c(s,2s-n;2s-n-2k)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s-n-2k}\\ \Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2s-n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j\cdots}^{n}=\frac{(-i\varsigma)^{2s-n}}{2^{n-s}}\sum_{k=0}^{[(2s-n)/2]}c(s,2s-n;2s-n-2k)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{2s-n-2k}\end{cases}$$

14.10 算符$\Gamma^{abc\cdots}(s)\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots$和$\Gamma^{abc\cdots}(s)\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots$的展开式

性质14.10.1.
$$\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s}=\frac{i^{2s}}{2^s}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{k=0}^{[n/2]}C_{2s}^n(-2\varsigma)^nc(s,n;n-2k)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{n-2k}\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s,\hat{\partial}_\pi\to i}=\frac{i^{2s}}{2^s}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{k=0}^{[n/2]}C_{2s}^n(-2\varsigma)^nc(s,n;n-2k)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{n-2k}\end{cases}$$

性质14.10.2.
$$\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s}=\frac{i^{2s}}{2^s}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{k=0}^{[(2s-n)/2]}C_{2s}^n(-2\varsigma)^{2s-n}c(s,2s-n;2s-n-2k)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s-n-2k}\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s,\hat{\partial}_\pi\to i}=\frac{i^{2s}}{2^s}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{k=0}^{[(2s-n)/2]}C_{2s}^n(-2\varsigma)^{2s-n}c(s,2s-n;2s-n-2k)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{2s-n-2k}\end{cases}$$

性质14.10.3.
$$\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{+}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s}=\frac{(-i\varsigma)^{2s}}{2^{-s}}\sum_{l=0}^{[s]}\sum_{k=0}^{[s-l]}C_{2s}^{2l}2^{-2l}c(s,2s-2l;2s-2l-2k)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s-2l-2k}\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{+}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s,\hat{\partial}_\pi\to i}=\frac{(-i\varsigma)^{2s}}{2^{-s}}\sum_{l=0}^{[s]}\sum_{k=0}^{[s-l]}C_{2s}^{2l}2^{-2l}c(s,2s-2l;2s-2l-2k)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{2s-2l-2k}\end{cases}$$

性质14.10.4.
$$\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{-}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s}=i\frac{(-i\varsigma)^{2s-1}}{2^{1-s}}\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}\sum_{k=0}^{[s-\frac{1}{2}-l]}2^{-2l}C_{2s}^{2l+1}c(s,2s-2l-1;2s-2l-1-2k)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s-2l-1-2k}\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{-}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s,\hat{\partial}_\pi\to i}=i\frac{(-i\varsigma)^{2s-1}}{2^{1-s}}\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}\sum_{k=0}^{[s-\frac{1}{2}-l]}2^{-2l}C_{2s}^{2l+1}c(s,2s-2l-1;2s-2l-1-2k)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{2s-2l-1-2k}\end{cases}$$

14.11 利用范德蒙矩阵求解$\Gamma^{abc\cdots}(s)\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots$和$\Gamma^{abc\cdots}(s)\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots$的展开系数

性质14.11.1. $\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s}=\sum_{n=0}^{2s}C_n[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n,\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s,\hat{\partial}_\pi\to i}=\sum_{n=0}^{2s}C_n[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n$

推论14.11.1. $C_n(\varsigma)=\frac{(-i\sqrt{2})^{2s}\varsigma^n}{(2s)!}C^{2s-n}_{\{\bar{s},s-1,\cdots,1-s,-s\}},n=0,1,\cdots,2s$

证明： $\lambda^+(\hat{p},h;s)\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s}\lambda(\hat{p},h;s)=\lambda^+(\hat{p},h;s)\sum_{n=0}^{2s}C_n(\varsigma)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n(s)\lambda(\hat{p},h;s)$

$\Leftrightarrow\lambda^+(\hat{p},h;s)(i\sqrt{2})^{2s}\lambda(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)\lambda(\hat{p},h;s)=\sum_{n=0}^{2s}C_n(\varsigma)\lambda^+(\hat{p},h;s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n(s)\lambda(\hat{p},h;s)$

$\Leftrightarrow(i\sqrt{2})^{2s}\delta(-s\varsigma,h)=\sum_{n=0}^{2s}C_n(\varsigma)h^n,h=-s\varsigma,\cdots,s\varsigma$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix}s^0&s^1&\cdots&s^{2s-1}&s^{2s}\\(s-1)^0&(s-1)^1&\cdots&(s-1)^{2s-1}&(s-1)^{2s}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(1-s)^0&(1-s)^1&\cdots&(1-s)^{2s-1}&(1-s)^{2s}\\(-s)^0&(-s)^1&\cdots&(-s)^{2s-1}&(-s)^{2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_0(-1)\\C_1(-1)\\\cdots\\C_{2s-1}(-1)\\C_{2s}(-1)\end{bmatrix}=(i\sqrt{2})^{2s}\begin{bmatrix}1\\0\\\cdots\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}s^0&s^1&\cdots&s^{2s-1}&s^{2s}\\(s-1)^0&(s-1)^1&\cdots&(s-1)^{2s-1}&(s-1)^{2s}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(1-s)^0&(1-s)^1&\cdots&(1-s)^{2s-1}&(1-s)^{2s}\\(-s)^0&(-s)^1&\cdots&(-s)^{2s-1}&(-s)^{2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_0(1)\\C_1(1)\\\cdots\\C_{2s-1}(1)\\C_{2s}(1)\end{bmatrix}=(i\sqrt{2})^{2s}\begin{bmatrix}0\\0\\\cdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix}C_0(-1)\\C_1(-1)\\\cdots\\C_{2s-1}(-1)\\C_{2s}(-1)\end{bmatrix}=(i\sqrt{2})^{2s}\begin{bmatrix}s^0&s^1&\cdots&s^{2s-1}&s^{2s}\\(s-1)^0&(s-1)^1&\cdots&(s-1)^{2s-1}&(s-1)^{2s}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(1-s)^0&(1-s)^1&\cdots&(1-s)^{2s-1}&(1-s)^{2s}\\(-s)^0&(-s)^1&\cdots&(-s)^{2s-1}&(-s)^{2s}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\\cdots\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_0(1) \\ C_1(1) \\ \cdots \\ C_{2s-1}(1) \\ C_{2s}(1) \end{bmatrix} = (i\sqrt{2})^{2s} \begin{bmatrix} s^0 & s^1 & \cdots & s^{2s-1} & s^{2s} \\ (s-1)^0 & (s-1)^1 & \cdots & (s-1)^{2s-1} & (s-1)^{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-s)^0 & (1-s)^1 & \cdots & (1-s)^{2s-1} & (1-s)^{2s} \\ (-s)^0 & (-s)^1 & \cdots & (-s)^{2s-1} & (-s)^{2s} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} C_0(-1) \\ C_1(-1) \\ \cdots \\ C_{2s-1}(-1) \\ C_{2s}(-1) \end{bmatrix} = \frac{(-i\sqrt{2})^{2s}}{(2s)!} \begin{bmatrix} (-1)^0 C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} C^0_{2s} & \cdots & (-1)^j C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}} C^j_{2s} & \cdots & (-1)^{2s} C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} C^{2s}_{2s} \\ (-1)^1 C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} C^0_{2s} & \cdots & (-1)^{1+j} C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}} C^j_{2s} & \cdots & (-1)^{1+2s} C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} C^{2s}_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^i C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} C^0_{2s} & \cdots & (-1)^{i+j} C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}} C^j_{2s} & \cdots & (-1)^{i+2s} C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} C^{2s}_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{2s-1} C^1_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} C^0_{2s} & \cdots & (-1)^{2s-1+j} C^1_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}} C^j_{2s} & \cdots & (-1)^{4s-1} C^1_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} C^{2s}_{2s} \\ (-1)^{2s} C^0_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} C^0_{2s} & \cdots & (-1)^{2s+j} C^0_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}} C^j_{2s} & \cdots & (-1)^{4s} C^0_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} C^{2s}_{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_0(1) \\ C_1(1) \\ \cdots \\ C_{2s-1}(1) \\ C_{2s}(1) \end{bmatrix} = \frac{(-i\sqrt{2})^{2s}}{(2s)!} \begin{bmatrix} (-1)^0 C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} C^0_{2s} & \cdots & (-1)^j C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}} C^j_{2s} & \cdots & (-1)^{2s} C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} C^{2s}_{2s} \\ (-1)^1 C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} C^0_{2s} & \cdots & (-1)^{1+j} C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}} C^j_{2s} & \cdots & (-1)^{1+2s} C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} C^{2s}_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^i C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} C^0_{2s} & \cdots & (-1)^{i+j} C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}} C^j_{2s} & \cdots & (-1)^{i+2s} C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} C^{2s}_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{2s-1} C^1_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} C^0_{2s} & \cdots & (-1)^{2s-1+j} C^1_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}} C^j_{2s} & \cdots & (-1)^{4s-1} C^1_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} C^{2s}_{2s} \\ (-1)^{2s} C^0_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} C^0_{2s} & \cdots & (-1)^{2s+j} C^0_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}} C^j_{2s} & \cdots & (-1)^{4s} C^0_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} C^{2s}_{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} C_0(-1) \\ C_1(-1) \\ \cdots \\ C_i(-1) \\ \cdots \\ C_{2s-1}(-1) \\ C_{2s}(-1) \end{bmatrix} = \frac{(-i\sqrt{2})^{2s}}{(2s)!} \begin{bmatrix} (-1)^0 C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} C^0_{2s} \\ (-1)^1 C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} C^0_{2s} \\ \cdots \\ (-1)^i C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} C^0_{2s} \\ \cdots \\ (-1)^{2s-1} C^1_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} C^0_{2s} \\ (-1)^{2s} C^0_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} C^0_{2s} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_0(1) \\ C_1(1) \\ \cdots \\ C_i(1) \\ \cdots \\ C_{2s-1}(1) \\ C_{2s}(1) \end{bmatrix} = \frac{(-i\sqrt{2})^{2s}}{(2s)!} \begin{bmatrix} (-1)^{2s} C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} C^{2s}_{2s} \\ (-1)^{1+2s} C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} C^{2s}_{2s} \\ \cdots \\ (-1)^{i+2s} C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} C^{2s}_{2s} \\ \cdots \\ (-1)^{4s-1} C^1_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} C^{2s}_{2s} \\ (-1)^{4s} C^0_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} C^{2s}_{2s} \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} C_0(-1) \\ C_1(-1) \\ \cdots \\ C_i(-1) \\ \cdots \\ C_{2s-1}(-1) \\ C_{2s}(-1) \end{bmatrix} = \frac{(-i\sqrt{2})^{2s}}{(2s)!} \begin{bmatrix} (-1)^0 C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \\ (-1)^1 C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \\ \cdots \\ (-1)^i C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \\ \cdots \\ (-1)^{2s-1} C^1_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \\ (-1)^{2s} C^0_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_0(1) \\ C_1(1) \\ \cdots \\ C_i(1) \\ \cdots \\ C_{2s-1}(1) \\ C_{2s}(1) \end{bmatrix} = \frac{(-i\sqrt{2})^{2s}}{(2s)!} \begin{bmatrix} (-1)^{2s} C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} \\ (-1)^{1+2s} C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} \\ \cdots \\ (-1)^{i+2s} C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} \\ \cdots \\ (-1)^{4s-1} C^1_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} \\ (-1)^{4s} C^0_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}} \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} C_0(-1) \\ C_1(-1) \\ \cdots \\ C_i(-1) \\ \cdots \\ C_{2s-1}(-1) \\ C_{2s}(-1) \end{bmatrix} = \frac{(-i\sqrt{2})^{2s}}{(2s)!} \begin{bmatrix} (-1)^0 C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \\ (-1)^1 C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \\ \cdots \\ (-1)^i C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \\ \cdots \\ (-1)^{2s-1} C^1_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \\ (-1)^{2s} C^0_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_0(1) \\ C_1(1) \\ \cdots \\ C_i(1) \\ \cdots \\ C_{2s-1}(1) \\ C_{2s}(1) \end{bmatrix} = \frac{(-i\sqrt{2})^{2s}}{(2s)!} \begin{bmatrix} C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \\ C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \\ \cdots \\ C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \\ \cdots \\ C^1_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \\ C^0_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} C_0(\varsigma) \\ C_1(\varsigma) \\ \cdots \\ C_i(\varsigma) \\ \cdots \\ C_{2s-1}(\varsigma) \\ C_{2s}(\varsigma) \end{bmatrix} = \frac{(-i\sqrt{2})^{2s}}{(2s)!} \begin{bmatrix} \varsigma^0 C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \\ \varsigma^1 C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \\ \cdots \\ \varsigma^i C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \\ \cdots \\ \varsigma^{2s-1} C^1_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \\ \varsigma^{2s} C^0_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}} \end{bmatrix} \Leftrightarrow C_n(\varsigma) = \frac{(-i\sqrt{2})^{2s}\varsigma^n}{(2s)!} C^{2s-n}_{\{\overline{s},s-1,\cdot\cdot,1-s,-s\}} \qquad \square$$

推论14.11.2.
$$\begin{cases} \Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\,\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s} = \dfrac{(-i\sqrt{2})^{2s}}{(2s)!}\displaystyle\sum_{n=0}^{2s}\varsigma^n C^{2s-n}_{\{\overline{s},s-1,\cdot\cdot,1-s,-s\}}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n \\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\,\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s,\hat{\partial}_\pi\to i} = \dfrac{(-i\sqrt{2})^{2s}}{(2s)!}\displaystyle\sum_{n=0}^{2s}\varsigma^n C^{2s-n}_{\{\overline{s},s-1,\cdot\cdot,1-s,-s\}}[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n \end{cases}$$

性质14.11.2.
$$\begin{cases} \Gamma_+^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\,\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s} = \displaystyle\sum_{l=0}^{[s]} C_{2s-2l}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s-2l} = \dfrac{(-i\varsigma\sqrt{2})^{2s}}{(2s)!}\displaystyle\sum_{l=0}^{[s]} C^{2l}_{\{\overline{s},s-1,\cdot\cdot,1-s,-s\}}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s-2l} \\ \Gamma_+^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\,\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s,\hat{\partial}_\pi\to i} = \displaystyle\sum_{l=0}^{[s]} C_{2s-2l}[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{2s-2l} = \dfrac{(-i\varsigma\sqrt{2})^{2s}}{(2s)!}\displaystyle\sum_{l=0}^{[s]} C^{2l}_{\{\overline{s},s-1,\cdot\cdot,1-s,-s\}}[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{2s-2l} \end{cases}$$

性质14.11.3.
$$\begin{cases} \Gamma_-^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\,\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s} = \displaystyle\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]} C_{2s-2l-1}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s-2l-1} = \dfrac{\varsigma(-i\varsigma\sqrt{2})^{2s}}{(2s)!}\displaystyle\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]} C^{2l}_{\{\overline{s},s-1,\cdot\cdot,1-s,-s\}}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s-2l-1} \\ \Gamma_-^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\,\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s,\hat{\partial}_\pi\to i} = \displaystyle\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]} C_{2s-2l-1}[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{2s-2l-1} = \dfrac{\varsigma(-i\varsigma\sqrt{2})^{2s}}{(2s)!}\displaystyle\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]} C^{2l+1}_{\{\overline{s},s-1,\cdot\cdot,1-s,-s\}}[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{2s-2l-1} \end{cases}$$

定理14.11.1. $\sum_{n=0}^{2s} k_n[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n = 0 \Leftrightarrow k_n = 0$

证明： $\sum_{n=0}^{2s} k_n[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n = 0 (\Rightarrow \sum_{n=0}^{2s} k_n[\sigma_z(s)]^n = 0)$

$\Rightarrow \lambda^+(\hat{p},h;s)\sum_{n=0}^{2s} k_n[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n \lambda(\hat{p},h;s) = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{2s} k_n h^n = 0, h = -s, \cdot\cdot, s$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} s^0 & s^1 & \cdots & s^{2s-1} & s^{2s} \\ (s-1)^0 & (s-1)^1 & \cdots & (s-1)^{2s-1} & (s-1)^{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-s)^0 & (1-s)^1 & \cdots & (1-s)^{2s-1} & (1-s)^{2s} \\ (-s)^0 & (-s)^1 & \cdots & (-s)^{2s-1} & (-s)^{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \cdots \\ k_{2s-1} \\ k_{2s} \end{bmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow k_n = 0$ □

推论14.11.3. $C_n(\varsigma) = \sum_{l=0}^{[(2s-n)/2]} C_{2s}^{n+2l}(-2\varsigma)^{n+2l} c(s,n+2l;n)$

证明： $\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdot\cdot}^{2s}$

$= \frac{i^{2s}}{2^s}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{k=0}^{[n/2]} C_{2s}^n(-2\varsigma)^n c(s,n;n-2k)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{n-2k}$

$= \frac{i^{2s}}{2^s}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{k=n}^{n-2[n/2]} C_{2s}^n(-2\varsigma)^n c(s,n;k)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k$

$= \frac{i^{2s}}{2^s}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{k=0}^{2s} C_{2s}^n(-2\varsigma)^n c(s,n;k)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k$

$= \frac{i^{2s}}{2^s}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{k=0}^{2s} C_{2s}^k(-2\varsigma)^k c(s,k;n)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n$

$= \frac{i^{2s}}{2^s}\sum_{n=0}^{2s} C_n(\varsigma)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n$

$\Rightarrow C_n(\varsigma) = \frac{i^{2s}}{2^s}\sum_{k=0}^{2s} C_{2s}^k(-2\varsigma)^k c(s,k;n) = \frac{i^{2s}}{2^s}\sum_{l=0}^{[(2s-n)/2]} C_{2s}^{n+2l}(-2\varsigma)^{n+2l} c(s,n+2l;n)$ □

推论14.11.4. $\frac{(-i\sqrt{2})^{2s}\varsigma^n}{(2s)!} C_{\{\overline{s},s-1,\cdot\cdot,1-s,-s\}}^{2s-n} \equiv \frac{i^{2s}}{2^s}\sum_{l=0}^{[(2s-n)/2]} C_{2s}^{n+2l}(-2\varsigma)^{n+2l} c(s,n+2l;n)$

推论14.11.5. $C_{\{\overline{s},s-1,\cdot\cdot,1-s,-s\}}^{2s-n} \equiv \frac{(2s)!}{(-2)^{2s-n}}\sum_{l=0}^{[(2s-n)/2]} C_{2s}^{n+2l} 2^{2l} c(s,n+2l;n)$

推论14.11.6. $C_{\{\overline{s},s-1,\cdot\cdot,1-s,-s\}}^{n} \equiv \frac{(2s)!}{(-2)^n}\sum_{l=0}^{[n/2]} C_{2s}^{n-2l} 2^{2l} c(s,2s-n+2l;2s-n)$

14.12 特殊复合常数不变张量之间的关系

推论14.12.1. $\begin{cases} \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{a\tilde{a}c\tilde{c}\cdot\cdot}^{2n}}(n)\overbrace{\delta_{\tilde{a}\tilde{b}}\delta_{\tilde{c}\tilde{d}}\cdot\cdot}^{n}\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{b\tilde{b}d\tilde{d}\cdot\cdot}^{2n}}(n) = (\frac{1}{2})^n\overbrace{\sigma_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}^{ab}\sigma_{\beta_\varsigma\beta'_\varsigma}^{cd}\cdot\cdot}^{n}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}(n)\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}(n) \\ \Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{a\tilde{a}c\tilde{c}\cdot\cdot}_{2n}}(n)\overbrace{\delta^{\tilde{a}\tilde{b}}\delta^{\tilde{c}\tilde{d}}\cdot\cdot}^{n}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{b\tilde{b}d\tilde{d}\cdot\cdot}_{2n}}(n) = (\frac{1}{2})^n\overbrace{\sigma_{ab}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma_{cd}^{\beta'_\varsigma\beta_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n) \end{cases}$

证明： $\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{a\tilde{a}c\tilde{c}\cdot\cdot}^{2n}}(n)\overbrace{\delta_{\tilde{a}\tilde{b}}\delta_{\tilde{c}\tilde{d}}\cdot\cdot}^{n}\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{b\tilde{b}d\tilde{d}\cdot\cdot}^{2n}}(n)$

$= (\frac{i}{2})^n\underbrace{\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{a\tilde{a}}\sigma_{\varsigma\beta_\varsigma}^{c\tilde{c}}\cdot\cdot}_{n}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}(n)\overbrace{\delta_{\tilde{a}\tilde{b}}\delta_{\tilde{c}\tilde{d}}\cdot\cdot}^{n}(\frac{i}{2})^n\underbrace{\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}^{b\tilde{b}}\sigma_{-\varsigma\beta'_\varsigma}^{d\tilde{d}}\cdot\cdot}_{n}\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}(n)$

$= (\frac{1}{2})^n\underbrace{\sigma_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}^{ab}\sigma_{\beta_\varsigma\beta'_\varsigma}^{cd}\cdot\cdot}_{n}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}(n)\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}(n)$ □

推论14.12.2.
$$\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(n)=\underbrace{\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\sigma^{cd}_{\beta_\varsigma\beta'_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n)\Gamma^{\overbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k'_\varsigma}(n)=2^n\Gamma^{\overbrace{a\tilde{a}c\tilde{c}\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)\overbrace{\delta_{\tilde{a}\tilde{b}}\delta_{\tilde{c}\tilde{d}}\cdot\cdot}^{n}\Gamma^{\overbrace{b\tilde{b}d\tilde{d}\cdot\cdot}^{2n}}_{k'_\varsigma}(n)\\ \Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{2n}}(n)=\overbrace{\sigma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{ab}\sigma^{\beta'_\varsigma\beta_\varsigma}_{cd}\cdot\cdot}^{n}\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)=2^n\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{a\tilde{a}c\tilde{c}\cdot\cdot}_{2n}}(n)\overbrace{\delta^{\tilde{a}\tilde{b}}\delta^{\tilde{c}\tilde{d}}\cdot\cdot}^{n}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{b\tilde{b}d\tilde{d}\cdot\cdot}_{2n}}(n)\end{cases}$$

证明： $\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(n)=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2n}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^d_{D_\varsigma D'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2n}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)$

$=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2n}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2n}(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\underbrace{\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n)(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\underbrace{\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\sigma^{C'_\varsigma D'_\varsigma}_{\beta'_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}\Gamma^{\overbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k'_\varsigma}(n)$

$=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^c{}_{C_\varsigma C'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^d{}_{D_\varsigma D'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{C'_\varsigma D'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\cdot\cdot$
$\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n)\Gamma^{\overbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k'_\varsigma}(n)$

$=\underbrace{\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\sigma^{cd}_{\beta_\varsigma\beta'_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n)\Gamma^{\overbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k'_\varsigma}(n)$

$=2^n\Gamma^{\overbrace{a\tilde{a}c\tilde{c}\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)\overbrace{\delta_{\tilde{a}\tilde{b}}\delta_{\tilde{c}\tilde{d}}\cdot\cdot}^{n}\Gamma^{\overbrace{b\tilde{b}d\tilde{d}\cdot\cdot}^{2n}}_{k'_\varsigma}(n)$ □

15 最基本的常数不变张量

最基本的常数不变张量：

$$\varepsilon_{AB},\varepsilon^{AB};\delta_{ab},\delta^{ab};\delta_{\alpha\beta},\delta^{\alpha\beta};\varepsilon_{\alpha\beta\gamma};(\sigma,-i)^{A'A}_a;\sigma^\alpha{}_A{}^B;N^k_{Al}(s),N^{Al}_k(s)\tag{4.8}$$

以上是最基本的常数不变张量，本章与上一章其它所有的常数不变张量均可以由它们导出，所以只要以上几个常数不变张量的协变性得到证明，由它们导出的常数不变张量的协变性自然成立。

第五章　高维常数不变张量初步

自我评述：本章是在前面章节基础上，将常数不变张量全面系统地往高阶、甚至无穷阶和高低维时空两个方向发展，得到了高低维时空中的各种常数不变张量，从而为研究高低维时空粒子物理提供了一个有力的数学工具。

1 N+1维时空的洛伦兹群表示

1.1 N+1维时空Dirac矩阵的递推表象

定义1.1.1. $\begin{cases}\gamma_a(1)=(1)\\ \gamma_1(1)=1\end{cases}$

定义1.1.2. $\begin{cases}\gamma_a(2):=(\gamma_a(1)\otimes\sigma_x,1\otimes\sigma_y)=(\sigma_x,\sigma_y)\\ \Gamma^a(2):=[\gamma_a(1),i\varsigma]=(1,i\varsigma)\\ \gamma_1(2)\gamma_2(2)=i\sigma_z\end{cases}$ $\begin{cases}C_1(2):=\gamma_1(2)=\sigma_x,C_2(2):=\gamma_2(2)=\sigma_y\\ C_1^+(2)\gamma_a(2)C_1(2)=\gamma_a^T(2),C_1^T(2)=C_1(2)\\ C_2^+(2)\gamma_a(2)C_2(2)=-\gamma_a^T(2),C_2^T(2)=-C_2(2)\end{cases}$

定义1.1.3. $\begin{cases}\gamma_a(3)=[\gamma_a(2),1\otimes\sigma_z]=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)\\ \gamma_1(3)\cdots\gamma_3(3)=i\end{cases}$ $\begin{cases}C(3):=\gamma_2(3)=\sigma_y,C(3)=C_2(2)\\ C^+(3)\gamma_a(3)C(3)=-\gamma_a^T(3),C^T(3)=-C(3)\end{cases}$

定义1.1.4. $\begin{cases}\gamma_a(4)=[\gamma_a(3)\otimes\sigma_x,I\otimes\sigma_y]=(\sigma\otimes\sigma_x,I\otimes\sigma_y)\\ \Gamma^a(4)=[\gamma_a(3),i\varsigma]\\ \gamma_1(4)\cdots\gamma_4(4)=-I\otimes\sigma_z\end{cases}$ $\begin{cases}C_1(4):=\gamma_1(4)\gamma_3(4)=-i\sigma_y\otimes I\\ C_2(4):=\gamma_2(4)\gamma_4(4)=i\sigma_y\otimes\sigma_z\\ C_1^+(4)\gamma_a(4)C_1(4)=-\gamma_a^T(4),C_1^T(4)=-C_1(4)\\ C_2^+(4)\gamma_a(4)C_2(4)=\gamma_a^T(4),C_2^T(4)=-C_2(4)\end{cases}$

定义1.1.5. $\begin{cases}\gamma_a(5)=[\gamma_a(4),I\otimes\sigma_z]\\ \gamma_1(5)\cdots\gamma_5(5)=-1\end{cases}$ $\begin{cases}C(5):=\gamma_2(4)\gamma_4(4)=i\sigma_y\otimes\sigma_z,C(5)=C_2(4)\\ C^+(5)\gamma_a(5)C(5)=\gamma_a^T(5),C^T(5)=-C(5)\end{cases}$

定义1.1.6. $\begin{cases}\gamma_a(6)=[\gamma_a(5)\otimes\sigma_x,I_4\otimes\sigma_y]\\ \Gamma^a(6)=[\gamma_a(5),i\varsigma]\\ \gamma_1(6)\cdots\gamma_6(6)=-iI_4\otimes\sigma_z\end{cases}$ $\begin{cases}C_1(6):=\gamma_1(6)\gamma_3(6)\gamma_5(6)=-i\sigma_y\otimes\sigma_z\otimes\sigma_x\\ C_2(6):=\gamma_2(6)\gamma_4(6)\gamma_6(6)=i\sigma_y\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y\\ C_1^+(6)\gamma_a(6)C_1(6)=\gamma_a^T(6),C_1^T(6)=-C_1(6)\\ C_2^+(6)\gamma_a(6)C_2(6)=-\gamma_a^T(6),C_2^T(6)=C_2(6)\end{cases}$

定义1.1.7. $\begin{cases}\gamma_a(7)=[\gamma_a(6),I_4\otimes\sigma_z]\\ \gamma_1(7)\cdots\gamma_7(7)=-i\end{cases}$ $\begin{cases}C(7):=\gamma_2(7)\gamma_4(7)\gamma_6(7)=i\sigma_y\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y,C(7)=C_2(6)\\ C^+(7)\gamma_a(7)C(7)=-\gamma_a^T(7),C^T(7)=C(7)\end{cases}$

定义1.1.8. $\begin{cases}\gamma_a(8)=[\gamma_a(7)\otimes\sigma_x,I_8\otimes\sigma_y]\\ \Gamma^a(8)=[\gamma_a(7),i\varsigma]\\ \gamma_1(8)\cdots\gamma_8(8)=I_8\otimes\sigma_z\end{cases}$ $\begin{cases}C_1(8):=\gamma_1(8)\gamma_3(8)\gamma_5(8)\gamma_7(8)=-\sigma_y\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y\otimes I\\ C_2(8):=\gamma_2(8)\gamma_4(8)\gamma_6(8)\gamma_8(8)=-\sigma_y\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y\otimes\sigma_z\\ C_1^+(8)\gamma_a(8)C_1(8)=-\gamma_a^T(8),C_1^T(8)=C_1(8)\\ C_2^+(8)\gamma_a(8)C_2(8)=\gamma_a^T(8),C_2^T(8)=C_2(8)\end{cases}$

定义1.1.9. $\begin{cases}\gamma_a(9)=[\gamma_a(8),I_8\otimes\sigma_z]\\ \gamma_1(9)\cdots\gamma_9(9)=1\end{cases}$ $\begin{cases}C(9):=\gamma_2(8)\gamma_4(8)\gamma_6(8)\gamma_8(8)=-\sigma_y\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y\otimes\sigma_z,C(9)=C_2(8)\\ C^+(9)\gamma_a(9)C(9)=\gamma_a^T(9),C^T(9)=C(9)\end{cases}$

定义1.1.10. $\begin{cases}\gamma_a(10)=[\gamma_a(9)\otimes\sigma_x,I_{16}\otimes\sigma_y]\\ \Gamma^a(10)=[\gamma_a(9),i\varsigma]\\ \gamma_1(10)\cdots\gamma_{10}(10)=iI_{16}\otimes\sigma_z\end{cases}$ $\begin{cases}C_1(10):=\gamma_1(10)\gamma_3(10)\gamma_5(10)\gamma_7(10)\gamma_9(10)\\ =-\sigma_y\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y\otimes\sigma_z\otimes\sigma_x\\ C_2(10):=\gamma_2(10)\gamma_4(10)\gamma_6(10)\gamma_8(10)\gamma_{10}(10)\\ =-\sigma_y\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y\\ C_2^+(10)\gamma_a(10)C_2(10)=-\gamma_a^T(10),C_2^T(10)=-C_2(10)\\ C_1^+(10)\gamma_a(10)C_1(10)=\gamma_a^T(10),C_1^T(10)=C_1(10)\end{cases}$

定义1.1.11. $\begin{cases}\gamma_a(11)=[\gamma_a(10),I_{16}\otimes\sigma_z]\\ \gamma_1(11)\cdots\gamma_{11}(11)=i\end{cases}$ $\begin{cases}C(11):=\gamma_2(11)\gamma_4(11)\gamma_6(11)\gamma_8(11)\gamma_{10}(11)\\ =-\sigma_y\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y,C(11)=C_2(10)\\ C^+(11)\gamma_a(10)C(11)=-\gamma_a^T(11),C^T(11)=-C(11)\end{cases}$

1.2 N+1维时空Dirac矩阵、最小旋量和实表象形式

定义1.2.1. $\begin{cases}\gamma_a(2)=(\sigma_x,\sigma_y),2^1\times2^1\\ \Gamma^a(2)=(1,i\varsigma),2^0\times2^0\\ \gamma_1(2)\gamma_2(2)=i\sigma_z\end{cases}$

定义1.2.2. $\begin{cases}\gamma_a(3)=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)\to(\sigma_z,\sigma_x,\sigma_y),2^1\times2^1\\ \gamma_1(3)\cdots\gamma_3(3)=i\end{cases}$

定义1.2.3. $\begin{cases}\gamma_a(4)=(\sigma\otimes\sigma_x,I\otimes\sigma_y)\to(\sigma_+\sigma_{-x},\sigma_{-y}),2^2\times2^2\\ \Gamma^a(4)=[\gamma_a(3),i\varsigma]\to Null,2^1\times2^1\\ \gamma_1(4)\cdots\gamma_4(4)=-I\otimes\sigma_z\end{cases}$

定义1.2.4. $\begin{cases}\gamma_a(5)=[\sigma\otimes\sigma_x,I\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_z]\to Null,2^2\times2^2\\ \gamma_1(5)\cdots\gamma_5(5)=-1\end{cases}$

定义1.2.5. $\begin{cases}\gamma_a(6)=[(\sigma\otimes\sigma_x,I\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_z)\otimes\sigma_x,I_4\otimes\sigma_y],2^3\times2^3\\ \Gamma^a(6)=[(\sigma\otimes\sigma_x,I\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_z),i\varsigma],2^2\times2^2\\ \gamma_1(6)\cdots\gamma_6(6)=-iI_4\otimes\sigma_z\end{cases}$

定义1.2.6. $\begin{cases}\gamma_a(7)=[(\sigma\otimes\sigma_x,I\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_z)\otimes\sigma_x,I_4\otimes\sigma_y,I_4\otimes\sigma_z],2^3\times2^3\\ \gamma_1(7)\cdots\gamma_7(7)=-i\end{cases}$

定义1.2.7. $\begin{cases}\gamma_a(8)=[[(\sigma\otimes\sigma_x,I\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_z)\otimes\sigma_x,I_4\otimes\sigma_y,I_4\otimes\sigma_z]\otimes\sigma_x,I_8\otimes\sigma_y],2^4\times2^4\\ \Gamma^a(8)=[[(\sigma\otimes\sigma_x,I\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_z)\otimes\sigma_x,I_4\otimes\sigma_y,I_4\otimes\sigma_z],i\varsigma]\to Null,2^3\times2^3\\ \gamma_1(8)\cdots\gamma_8(8)=I_8\otimes\sigma_z\end{cases}$

定义1.2.8. $\begin{cases}\gamma_a(9)=[[(\sigma\otimes\sigma_x,I\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_z)\otimes\sigma_x,I_4\otimes\sigma_y,I_4\otimes\sigma_z]\otimes\sigma_x,I_8\otimes\sigma_y,I_8\otimes\sigma_z]\to Null,2^4\times2^4\\ \gamma_1(9)\cdots\gamma_9(9)=1\\ \gamma_s^a(9)=S\gamma^a(9)S^+,S=[\sigma_z\otimes\sigma_y\otimes I\otimes\sigma_y][S_{ex}S_{em}(-1)\otimes I_4][I\otimes S_{em}(-1)\otimes S_c(\frac{1}{2})]\\ =-\{[(\sigma_x\otimes I,\sigma_y\otimes\sigma_y,\sigma_z\otimes I)\otimes\sigma_y,\sigma_y\otimes\sigma_x\otimes I,I\otimes\sigma_y\otimes\sigma_z,I\otimes\sigma_y\otimes\sigma_x,\sigma_y\otimes\sigma_z\otimes I]\otimes\sigma_y\\ ,I\otimes I\otimes I\otimes\sigma_z,I\otimes I\otimes I\otimes\sigma_x\}\in R\end{cases}$

定义1.2.9.
$$\begin{cases}\gamma_a(10)=[[[(\sigma\otimes\sigma_x,I\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_z)\otimes\sigma_x,I_4\otimes\sigma_y,I_4\otimes\sigma_z]\otimes\sigma_x,I_8\otimes\sigma_y,I_8\otimes\sigma_z]\otimes\sigma_x,I_{16}\otimes\sigma_y],2^5\times2^5\\ \Gamma^a(10)=[[[(\sigma\otimes\sigma_x,I\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_z)\otimes\sigma_x,I_4\otimes\sigma_y,I_4\otimes\sigma_z]\otimes\sigma_x,I_8\otimes\sigma_y,I_8\otimes\sigma_z],i\varsigma],2^4\times2^4\\ \gamma_1(10)\cdots\gamma_{10}(10)=iI_{16}\otimes\sigma_z\\ \Gamma^a_s(10)=[\gamma_s(9),i\varsigma],\gamma^a_s(10)=[\gamma_s(9)\otimes\sigma_x,I_{16}\otimes\sigma_y]\end{cases}$$

定义1.2.10.
$$\begin{cases}\gamma_a(11)=[[[(\sigma\otimes\sigma_x,I\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_z)\otimes\sigma_x,I_4\otimes\sigma_y,I_4\otimes\sigma_z]\otimes\sigma_x,I_8\otimes\sigma_y,I_8\otimes\sigma_z]\otimes\sigma_x,I_{16}\otimes\sigma_y,I_{16}\otimes\sigma_z]\\ \gamma_1(11)\cdots\gamma_{11}(11)=i\\ \gamma^a_s(11)=[\Gamma^i_s(10)\otimes\sigma_x,I_{16}\otimes\sigma_z,I_{16}\otimes\sigma_y]\end{cases}$$

1.3 N+1维时空Dirac矩阵简洁构造

定义1.3.1.
$$\begin{cases}\gamma_{n+1}(n):=i^{-[n/2]}\gamma_1(n)\cdots\gamma_n(n)\\ \gamma_a(4)=[\gamma_a(2)\otimes I,\gamma_3(2)\otimes\gamma_a(2)]\\ \gamma_a(5)=[\gamma_a(2)\otimes I,\gamma_3(2)\otimes\gamma_a(3)]=[\gamma_a(2)\otimes I,\gamma_3(2)\otimes\gamma_a(2),\gamma_3(2)\otimes\gamma_3(2)]\\ \gamma_a(6)=[\gamma_a(2)\otimes I_4,\gamma_3(2)\otimes\gamma_a(4)]\\ \gamma_a(7)=[\gamma_a(2)\otimes I_4,\gamma_3(2)\otimes\gamma_a(5)]=[\gamma_a(2)\otimes I_4,\gamma_3(2)\otimes\gamma_a(4),\gamma_3(2)\otimes\gamma_5(4)]\\ \gamma_a(8)=[\gamma_a(4)\otimes I_4,\gamma_5(4)\otimes\gamma_a(4)]\\ \gamma_a(9)=[\gamma_a(4)\otimes I_4,\gamma_5(4)\otimes\gamma_a(5)]=[\gamma_a(4)\otimes I_4,\gamma_5(4)\otimes\gamma_a(4),\gamma_5(4)\otimes\gamma_5(4)]\\ \gamma_a(10)=[\gamma_a(4)\otimes I_8,\gamma_5(4)\otimes\gamma_a(6)]\\ \gamma_a(11)=[\gamma_a(4)\otimes I_8,\gamma_5(4)\otimes\gamma_a(6),\gamma_5(4)\otimes\gamma_7(6)]\end{cases}$$

定义1.3.2.
$$\begin{cases}\gamma^a_s(10)=[\gamma^a_s(9)\otimes\sigma_x,I_{16}\otimes\sigma_y]\\ \gamma^a_s(11)=[\gamma^a_s(9)\otimes\sigma_x,I_{16}\otimes\sigma_z,I_{16}\otimes\sigma_y]\end{cases}$$

1.4 N+1=2n维时空通过Dirac矩阵构造费米算子 [38]

定义1.4.1.
$$\begin{cases}a_1(2n)=\frac{1}{2}[\gamma_1(2n)+i\gamma_2(2n)]\\ a_2(2n)=\frac{1}{2}[\gamma_3(2n)+i\gamma_4(2n)]\\ \cdots\cdots\\ a_n(2n)=\frac{1}{2}[\gamma_{2n-1}(2n)+i\gamma_{2n}(2n)]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\{a_j(2n),a^+_k(2n)\}=\delta_{jk}\\ \{a_j(2n),a_k(2n)\}=0\\ \{a^+_j(2n),a^+_k(2n)\}=0\end{cases}$$

1.5 N+1维时空Dirac矩阵的递推关系

定义1.5.1.
$$\begin{cases}\gamma_a(2n)=[\gamma_a(2n-1)\otimes\sigma_x,I_{2^n}\otimes\sigma_y]\\ \Gamma^a(2n)=[\gamma_a(2n-1),i\varsigma]\\ \gamma_1(2n)\cdots\gamma_{2n}(2n)=i^nI_{2^n}\otimes\sigma_z=i^n\gamma_{2n+1}(2n+1)\end{cases}\begin{cases}C_1(2n):=\gamma_1(2n)\gamma_3(2n)\cdots\gamma_{2n-1}(2n)\\ C_2(2n):=\gamma_2(2n)\gamma_4(2n)\cdots\gamma_{2n}(2n)\\ C^+_r(2n)\gamma_a(2n)C_r(2n)=(-1)^{n+r}\gamma^*_a(2n)\end{cases}$$

定义1.5.2.
$$\begin{cases}\gamma_a(2n+1)=[\gamma_a(2n),I_{2^n}\otimes\sigma_z]\\ \gamma_1(2n+1)\cdots\gamma_{2n+1}(2n+1)=i^n\end{cases}\begin{cases}C(2n+1)=C_2(2n)\\ C^+(2n+1)\gamma_a(2n+1)C(2n+1)=(-1)^n\gamma^*_a(2n+1)\end{cases}$$

1.6 N+1维时空的自旋张量

定义1.6.1.
$$\begin{cases}S_{ab}(\nu;2n):=\begin{bmatrix}S_{ij}(e;2n-1)&-\frac{1}{2}\vec\gamma(2n-1)\\ \frac{1}{2}\vec\gamma(2n-1)&0\end{bmatrix}=-\frac{i}{4}[\gamma(2n-1),i]_{[a}[\gamma(2n-1),-i]_{b]}\\ S_{ab}(\bar\nu;2n):=\begin{bmatrix}S_{ij}(e;2n-1)&\frac{1}{2}\vec\gamma(2n-1)\\ -\frac{1}{2}\vec\gamma(2n-1)&0\end{bmatrix}=-\frac{i}{4}[\gamma(2n-1),-i]_{[a}[\gamma(2n-1),i]_{b]}\end{cases}$$

推论1.6.1. $S_{ab}(e;2n)=S_{ab}(\nu;2n)\oplus S_{ab}(\bar{\nu};2n)=-\frac{i}{4}[\gamma_a(2n),\gamma_b(2n)]$

推论1.6.2. $S_{ab}(\varsigma;2n)=-\frac{i}{4}[\gamma(2n-1),i\varsigma]_{[a}[\gamma(2n-1),-i\varsigma]_{b]}\Leftrightarrow S_{ab}(\varsigma;2n):=\begin{bmatrix} S_{ij}(e;2n-1) & -\frac{\varsigma}{2}\vec{\gamma}(2n-1) \\ \frac{\varsigma}{2}\vec{\gamma}(2n-1) & 0 \end{bmatrix}$

推论1.6.3. $S_{ab}(e;2n+1)=-\frac{i}{4}[\gamma_a(2n+1),\gamma_b(2n+1)]=-\frac{i}{4}[i\varsigma\gamma(2n)\gamma_0(2n),-i\varsigma]_{[a}[i\varsigma\gamma(2n)\gamma_0(2n),i\varsigma]_{b]}$

推论1.6.4. $\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(e;2n+1)=\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[\gamma_a(2n+1),\gamma_b(2n+1)]$

推论1.6.5. $\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(e;2n)=\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\nu;2n)\oplus\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\bar{\nu};2n)$

证明： $\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(e;2n)=\frac{1}{8}\vartheta^{ab}[\gamma_a(2n),\gamma_b(2n)]=\frac{1}{4}\vartheta^{i<j}[\gamma_i(2n),\gamma_j(2n)]+\frac{1}{4}\vartheta^{i\pi}[\gamma_i(2n),\gamma_\pi(2n)]$

$=\frac{1}{4}\vartheta^{i<j}[\gamma_i(2n-1),\gamma_j(2n-1)]\otimes I-\frac{i}{2}\vartheta^{i\pi}\gamma_i(2n-1)\otimes\sigma_z$

$=i\vartheta^{i<j}S_{ij}(e;2n-1)\otimes I-\frac{i}{2}\vartheta^{i\pi}\gamma_i(2n-1)\otimes\sigma_z$

$=[i\vartheta^{i<j}S_{ij}(e;2n-1)-\frac{i}{2}\vartheta^{i\pi}\gamma_i(2n-1)]\oplus[i\vartheta^{i<j}S_{ij}(e;2n-1)+\frac{i}{2}\vartheta^{i\pi}\gamma_i(2n-1)]$

$=[i\vartheta^{i<j}S_{ij}(e;2n-1)+\epsilon\cdot\frac{1}{2}\gamma(2n-1)]\oplus[i\vartheta^{i<j}S_{ij}(e;2n-1)-\epsilon\cdot\frac{1}{2}\gamma(2n-1)]$

$=\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\nu;2n)\oplus\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\bar{\nu};2n)$ □

1.7 N+1维时空的洛伦兹群表示

推论1.7.1. $\{\gamma_a,\gamma_b\}=2g_{ab}\Rightarrow i[S_{ab},S_{cd}]=g_{ad}S_{bc}-g_{ac}S_{bd}+g_{bc}S_{ad}-g_{bd}S_{ac};S_{ab}:=-\frac{i}{4}[\gamma_a,\gamma_b]$

证明： $i[S_{ab},S_{cd}]$

$=-\frac{i}{16}[[\gamma_a,\gamma_b],[\gamma_c,\gamma_d]]$

$=-\frac{i}{16}\{[[\gamma_a,\gamma_b],\gamma_c\gamma_d]-[[\gamma_a,\gamma_b],\gamma_d\gamma_c]\}$

$=-\frac{i}{16}\{[[\gamma_a,\gamma_b],\gamma_c]\gamma_d+\gamma_c[[\gamma_a,\gamma_b],\gamma_d]-[[\gamma_a,\gamma_b],\gamma_d]\gamma_c-\gamma_d[[\gamma_a,\gamma_b],\gamma_c]\}$

$=-\frac{i}{16}\{-\{\{\gamma_c,\gamma_a\},\gamma_b\}\gamma_d+\{\gamma_a,\{\gamma_c,\gamma_b\}\}\gamma_d-\gamma_c\{\{\gamma_d,\gamma_a\},\gamma_b\}+\gamma_c\{\gamma_a,\{\gamma_d,\gamma_b\}\}$

$\quad+\{\{\gamma_d,\gamma_a\},\gamma_b\}\gamma_c-\{\gamma_a,\{\gamma_d,\gamma_b\}\}\gamma_c+\gamma_d\{\{\gamma_c,\gamma_a\},\gamma_b\}-\gamma_d\{\gamma_a,\{\gamma_c,\gamma_b\}\}\}$

$=-\frac{i}{16}\{-4\delta_{ca}\gamma_b\gamma_d+4\delta_{cb}\gamma_a\gamma_d-4\delta_{da}\gamma_c\gamma_b+4\delta_{db}\gamma_c\gamma_a+4\delta_{da}\gamma_b\gamma_c-4\delta_{db}\gamma_a\gamma_c+4\delta_{ca}\gamma_d\gamma_b-4\delta_{cb}\gamma_d\gamma_a\}$

$=-\frac{i}{4}\{\delta_{da}[\gamma_b,\gamma_c]-\delta_{db}[\gamma_a,\gamma_c]-\delta_{ca}[\gamma_b,\gamma_d]+\delta_{cb}[\gamma_a,\gamma_d]\}$

$=g_{ad}S_{bc}-g_{ac}S_{bd}+g_{bc}S_{ad}-g_{bd}S_{ac}$ □

推论1.7.2. $\begin{cases} i[S_{ab}(\nu;2n),S_{cd}(\nu;2n)]=g_{ad}S_{bc}(\nu;2n)-g_{ac}S_{bd}(\nu;2n)+g_{bc}S_{ad}(\nu;2n)-g_{bd}S_{ac}(\nu;2n) \\ i[S_{ab}(\bar{\nu};2n),S_{cd}(\bar{\nu};2n)]=g_{ad}S_{bc}(\bar{\nu};2n)-g_{ac}S_{bd}(\bar{\nu};2n)+g_{bc}S_{ad}(\bar{\nu};2n)-g_{bd}S_{ac}(\bar{\nu};2n) \\ i[S_{ab}(\varsigma;2n),S_{cd}(\varsigma;2n)]=g_{ad}S_{bc}(\varsigma;2n)-g_{ac}S_{bd}(\varsigma;2n)+g_{bc}S_{ad}(\varsigma;2n)-g_{bd}S_{ac}(\varsigma;2n) \end{cases}$

推论1.7.3. $\vec{S}_{ab}:=-iS_{ab|cd}=-i(\delta_{ac}\delta_{bd}-\delta_{ad}\delta_{bc})\Rightarrow i[\vec{S}_{ab},\vec{S}_{cd}]=g_{ad}\vec{S}_{bc}-g_{ac}\vec{S}_{bd}+g_{bc}\vec{S}_{ad}-g_{bd}\vec{S}_{ac}$

推论1.7.4. $e^{\frac{i}{2}\theta^{ab}\vec{S}_{ab}}=e^{\theta}$

1.8 N+1维时空的度规张量和电荷共轭矩阵

定义1.8.1. $C^+\gamma_a(\varsigma)C=-\gamma_a^T(\varsigma),C^T=-C,C^+C=CC^+=I$

推论1.8.1.

$$\begin{cases} C(n)S_{ab}(e;n)=[C(n)S_{ab}(e;n)]^T,C(2n-1)S_{ab}(\varsigma;2n)=[C(2n-1)S_{ab}(\varsigma;2n)]^T \\ C(n)\gamma_a(e;n)=[C(n)\gamma_a(e;n)]^T,C(2n-1)\gamma_a(2n-1)=[C(2n-1)\gamma_a(2n-1)]^T \end{cases}$$

推论1.8.2.

$$\begin{cases} \varepsilon(2n)S_{ab}(e;2n)=-S_{ab}^T(e;2n)\varepsilon(2n),\varepsilon(2n-1)S_{ab}(\varsigma;2n)=-S_{ab}^T(\varsigma;2n)\varepsilon(2n-1) \\ \varepsilon(2n-1)S_{ab}(e;2n-1)=-S_{ab}^T(e;2n-1)\varepsilon(2n-1),\varepsilon(2n-1)\gamma_a(2n-1)=-\gamma_a^T(2n-1)\varepsilon(2n-1) \end{cases}$$

1.9 N+1维时空中的常数不变张量(终于成功推广了)

在任意n=N+1维时空中存在如下定理：

定理1.9.1. $[\Gamma(N),i\varsigma]^a=[e^{\vartheta}]^a{}_b e^{\frac{1}{8}\vartheta^{ij}[\Gamma_i(N),\Gamma_j(N)]+\varsigma\epsilon\cdot\frac{1}{2}\Gamma(N)}[\Gamma(N),i\varsigma]^b e^{-\frac{1}{8}\vartheta^{ij}[\Gamma_i(N),\Gamma_j(N)]+\varsigma\epsilon\cdot\frac{1}{2}\Gamma(N)}$

自我评述：所以$[\Gamma(N),i\varsigma]^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}$和$[\Gamma(N),-i\varsigma]_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}$是常数不变张量，是Penrose旋量在高低维时空的推广。

在任意n=N+1维时空中存在如下定理：

定理1.9.2. $\Gamma_{ab}=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\Gamma_{ef}}\Gamma_{cd}e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\Gamma_{ef}}\Leftrightarrow i[\Gamma_{ab},\Gamma_{cd}]=\delta_{ad}\Gamma_{bc}-\delta_{ac}\Gamma_{bd}+\delta_{bc}\Gamma_{ad}-\delta_{bd}\Gamma_{ac}$

所以$S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(e,\varsigma;n),S_{ab}{}^{\lambda'_\varsigma}{}_{\mu'_\varsigma}(e,-\varsigma;n)$，$S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2},\varsigma;2n),S_{ab}{}^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}(\frac{1}{2},-\varsigma;2n)$ 是常数不变张量。

定理1.9.3. $\Gamma_a=[e^{\vartheta}]_a{}^b e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\Gamma_{cd}}\Gamma_b e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\Gamma_{cd}}\Leftrightarrow i[\Gamma_a,\Gamma_{cd}]=\delta_{a[c}\Gamma_{d]}$

定理1.9.4. $\begin{cases}\Gamma_0=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}}\Gamma_0e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}},S_{ab}=-\frac{i}{4}[\Gamma_a,\Gamma_b],\Gamma_0=\Gamma_1\cdots\Gamma_{N+1}\\ \Gamma_0=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{*ab}S_{ab}}\Gamma_0e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{*ab}S_{ab}},S_{ab}=-\frac{i}{4}[\Gamma_a,\Gamma_b],\Gamma_0=\Gamma_1\cdots\Gamma_{N+1}\end{cases}$

所以$\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(n),\gamma_{a'}{}^{\lambda'_\varsigma}{}_{\mu'_\varsigma}(n)\ \gamma^0{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(n),\gamma_0{}^{\lambda'_\varsigma}{}_{\mu'_\varsigma}(n)$ 是常数不变张量。

定理1.9.5. $\begin{cases}\Gamma_{N+1}=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{*ab}S_{ab}}\Gamma_{N+1}e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}},S_{ab}=-\frac{i}{4}[\Gamma_a,\Gamma_b]\\ \Gamma_{N+1}=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}}\Gamma_{N+1}e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{*ab}S_{ab}},S_{ab}=-\frac{i}{4}[\Gamma_a,\Gamma_b]\end{cases}$

所以$\gamma_n^{\lambda'_\varsigma\lambda_\varsigma}(n),\gamma^n_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(n)$，$(\gamma_n\gamma_a)^{\lambda'_\varsigma\lambda_\varsigma}(n),(\gamma^a\gamma^n)_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(n)$，$(\gamma^n\gamma^{a'})_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(n),(\gamma_{a'}\gamma_n)^{\lambda'_\varsigma\lambda_\varsigma}(n)$ 是常数不变张量。

1.10 n=N+1维时空中的常数不变张量性质

定理1.10.1. $\begin{cases}S_{ab}(e;n)=-\frac{i}{4}[\gamma_a(n),\gamma_b(n)]=-\frac{i}{4}[i\varsigma\gamma(N)\gamma_0(N),-i\varsigma]_{[a}[i\varsigma\gamma(N)\gamma_0(N),i\varsigma]_{b]}\\ 2\delta_{ab}=\{\gamma_a(n),\gamma_b(n)\}=[i\varsigma\gamma(N)\gamma_0(N),-i\varsigma]_{\{a}[i\varsigma\gamma(N)\gamma_0(N),i\varsigma]_{b\}}\\ \gamma_a(n)\gamma_b(n)=[i\varsigma\gamma(N)\gamma_0(N),-i\varsigma]_a[i\varsigma\gamma(N)\gamma_0(N),i\varsigma]_b=\delta_{ab}+2iS_{ab}(e,\varsigma;n)\end{cases}$

定理1.10.2. $\begin{cases}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;n)=-\frac{i}{4}[\Gamma(N),i\varsigma]_{[a}[\Gamma(N),-i\varsigma]_{b]}\\ 2\delta_{ab}=[\Gamma(N),i\varsigma]_{\{a}[\Gamma(N),-i\varsigma]_{b\}}\\ [\Gamma(N),i\varsigma]_a[\Gamma(N),-i\varsigma]_b=\delta_{ab}+2iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;n)\end{cases}$

1.11 n=N+1维时空中的Penrose变换

定理1.11.1. $x^{A'_\varsigma A_\varsigma}(n):=[\Gamma(N),-i\varsigma]_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}x^a\Rightarrow x^a=\frac{1}{2^{[N/2]}}[\Gamma(N),i\varsigma]^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}x^{A'_\varsigma A_\varsigma}(n)$

定理1.11.2. $x_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(n):=\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(n)x_a\Rightarrow x^a=\frac{1}{2^{[n/2]}}\gamma^a{}_{\mu_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}(n)x_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(n),n\geq 2$

2 外部时空对称变换 [27,28]

2.1 彭加莱变换

推论2.1.1. $x'=e^{\varepsilon}x+\theta\Leftrightarrow x'=e^{-\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}L_{ab}+i\theta^ap_a}x,L_{ab}=-i(x_a\partial_b-x_b\partial_a),p_a=-i\partial_a$

证明: $x'=e^{\varepsilon}x+\theta$

$\Leftrightarrow x'_a=x_a+\varepsilon_{ab}x^b+\theta_a$

$\Leftrightarrow x'_a=[1-\frac{1}{2}\varepsilon^{bc}(x_b\partial_c-x_c\partial_b)+\theta^b\partial_b]x_a$

$\Leftrightarrow x'=[1-\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}(x_a\partial_b-x_b\partial_a)+\theta^a\partial_a]x$

$\Leftrightarrow x'=[1-\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}(x_ap_b-x_bp_a)+i\theta^ap_a]x,p_a=-i\partial_a$

$\Leftrightarrow x'=(1-\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}L_{ab}+i\theta^ap_a)x,L_{ab}:=-i(x_a\partial_b-x_b\partial_a)$

$\Leftrightarrow x'=e^{-\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}L_{ab}+i\theta^ap_a}x$ □

推论2.1.2. $e^{-\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}L_{ab}+i\theta^a p_a}x = e^{\varepsilon}x+\theta$

彭加莱变换包含两种含义，一种是常规直观的含义；另一种是包含彭加莱部分生成元的含义，实际上就是把变换看作算子，是不容易想到的。

2.2 洛仑兹变换

推论2.2.1. $x' = e^{\varepsilon}x \Leftrightarrow x' = e^{-\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}L_{ab}}x, L_{ab} = -i(x_a\partial_b - x_b\partial_a)$

推论2.2.2. $\varphi'(x) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}}\varphi(e^{-\varepsilon}x) \Leftrightarrow \varphi'(x) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}M_{ab}}\varphi(x), M_{ab} = L_{ab} - iS_{ab}$

证明：$\varphi'(x) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}}\varphi(e^{-\varepsilon}x)$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) = (1+\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab})\varphi((1-\varepsilon)x)$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) = (1+\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab})[\varphi(x)+\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}(x_a\partial_b - x_b\partial_a)\varphi(x)]$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) = \varphi(x)+\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}[-i(x_a\partial_b - x_b\partial_a)+S_{ab}]\varphi(x)$

$\Leftrightarrow \delta\varphi(x) = \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}[-i(x_a\partial_b - x_b\partial_a)+S_{ab}]\varphi(x)$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}[-i(x_a\partial_b - x_b\partial_a)+S_{ab}]}\varphi(x)$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}M_{ab}}\varphi(x), M_{ab} = L_{ab}+S_{ab}$ □

推论2.2.3. $e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}M_{ab}}\varphi(x) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}}\varphi(e^{-\varepsilon}x)$

推论2.2.4. $x = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}}(e^{-\varepsilon}x) \Leftrightarrow x = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}M_{ab}}x$

在态变换和坐标恒等式变换中隐含了洛伦兹群生成元：M_{ab}，生成元的含义是自变量不变，函数发生改变，它是一个算子。

2.3 平移变换

推论2.3.1. $\varphi'(x) = \varphi(x+\theta) \Leftrightarrow \varphi'(x) = e^{\theta^a\partial_a}\varphi(x) \Leftrightarrow \varphi'(x) = e^{i\theta^a p_a}\varphi(x)$

推论2.3.2. $e^{i\theta^a p_a}\varphi(x) = \varphi(x+\theta)$

简单的平移变换中隐含了平移生成元：p_a及其算子变换。

2.4 彭加莱群生成元对易关系

彭加莱群生成元M_{ab}, p_a对易关系：

$$M_{ab} = L_{ab}+S_{ab}, L_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, g_{ab} = \delta_{ab} \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} i[M_{ab}, M_{cd}] = g_{ad}M_{bc} - g_{ac}M_{bd} + g_{bc}M_{ad} - g_{bd}M_{ac} \\ i[M_{ab}, p_c] = g_{bc}p_a - g_{ac}p_b, [p_a, p_b] = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

彭加莱群生成元L_{ab}, S_{ab}, p_a对易关系：

$$\begin{cases} L_{ab}, L_{cd}] = g_{ad}L_{bc} - g_{ac}L_{bd} + g_{bc}L_{ad} - g_{bd}L_{ac} \\ i[L_{ab}, p_c] = g_{bc}p_a - g_{ac}p_b, [p_a, p_b] = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

$$i[S_{ab}, S_{cd}] = g_{ad}S_{bc} - g_{ac}S_{bd} + g_{bc}S_{ad} - g_{bd}S_{ac} \tag{5.4}$$

$$[S_{ab}, L_{cd}] = 0, [S_{ab}, p_c] = 0 \tag{5.5}$$

2.5 生成元的意义

生成元可以生成相应的对称变换，生成元一般也是系统的守恒量，反过来，守恒量也是系统的生成元，并且生成元也形成一定的封闭代数。

3 无穷维常数不变张量

3.1 量子力学意义上的无穷维不变张量 [27, 28]

定义3.1.1. $\hat{M}_{ab} := \hat{L}_{ab} + S_{ab}, \hat{L}_{ab} := x_a\hat{p}_b - x_b\hat{p}_a, \hat{p}_a := -i\partial_a, g_{ab} = \delta_{ab}$

推论3.1.1. $\begin{cases} i[\hat{M}_{ab},\hat{M}_{cd}]=g_{ad}\hat{M}_{bc}-g_{ac}\hat{M}_{bd}+g_{bc}\hat{M}_{ad}-g_{bd}\hat{M}_{ac}\Leftrightarrow \hat{M}_{ab}=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\hat{M}_{ef}}\hat{M}_{cd}e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\hat{M}_{ef}} \\ i[\hat{L}_{ab},\hat{L}_{cd}]=g_{ad}\hat{L}_{bc}-g_{ac}\hat{L}_{bd}+g_{bc}\hat{L}_{ad}-g_{bd}\hat{L}_{ac}\Leftrightarrow \hat{L}_{ab}=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\hat{L}_{ef}}\hat{L}_{cd}e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\hat{L}_{ef}} \\ i[S_{ab},S_{cd}]=g_{ad}S_{bc}-g_{ac}S_{bd}+g_{bc}S_{ad}-g_{bd}S_{ac}\Leftrightarrow S_{ab}=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ef}S_{ef}}S_{cd}e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}S_{ef}} \end{cases}$

推论3.1.2. $\begin{cases} i[\hat{p}_a,\hat{M}_{cd}]=\delta_{a[c}\hat{p}_{d]}\Leftrightarrow \hat{p}_a=[e^{\vartheta}]_a{}^b e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\hat{M}_{cd}}\hat{p}_b e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\hat{M}_{cd}} \\ i[\hat{p}_a,\hat{L}_{cd}]=\delta_{a[c}\hat{p}_{d]}\Leftrightarrow \hat{p}_a=[e^{\vartheta}]_a{}^b e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\hat{L}_{cd}}\hat{p}_b e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\hat{L}_{cd}} \end{cases}$

从上可知$\hat{M}_{ab},\hat{p}_a$是不变张量，但显然不是常数张量。换一种等价写法，可以将相对论中的洛伦兹变换和量子力学中的幺正变换联系起来。

推论3.1.3. $\begin{cases} i[\hat{M}_{ab},\hat{M}_{cd}]=g_{ad}\hat{M}_{bc}-g_{ac}\hat{M}_{bd}+g_{bc}\hat{M}_{ad}-g_{bd}\hat{M}_{ac}\Leftrightarrow e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\hat{M}_{ef}}\hat{M}_{ab}e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\hat{M}_{ef}}=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d\hat{M}_{cd} \\ i[\hat{L}_{ab},\hat{L}_{cd}]=g_{ad}\hat{L}_{bc}-g_{ac}\hat{L}_{bd}+g_{bc}\hat{L}_{ad}-g_{bd}\hat{L}_{ac}\Leftrightarrow e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\hat{L}_{ef}}\hat{L}_{ab}e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\hat{L}_{ef}}=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d\hat{L}_{cd} \\ i[S_{ab},S_{cd}]=g_{ad}S_{bc}-g_{ac}S_{bd}+g_{bc}S_{ad}-g_{bd}S_{ac}\Leftrightarrow e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}S_{ef}}S_{ab}e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ef}S_{ef}}=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^dS_{cd} \end{cases}$

推论3.1.4. $\begin{cases} i[\hat{p}_a,\hat{M}_{cd}]=\delta_{a[c}\hat{p}_{d]}\Leftrightarrow e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\hat{M}_{cd}}\hat{p}_a e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\hat{M}_{cd}}=[e^{\vartheta}]_a{}^b\hat{p}_b \\ i[\hat{p}_a,\hat{L}_{cd}]=\delta_{a[c}\hat{p}_{d]}\Leftrightarrow e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\hat{L}_{cd}}\hat{p}_a e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\hat{L}_{cd}}=[e^{\vartheta}]_a{}^b\hat{p}_b \end{cases}$

推论3.1.5. $e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}M_{ab}}\varphi(x)=e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}}\varphi(e^{-\varepsilon}x),e^{i\theta^a p_a}\varphi(x)=\varphi(x+\theta)$

推论3.1.6. $\langle'|\hat{P}_a|'\rangle=[e^{\vartheta}]_a{}^b\langle|\hat{P}_b|\rangle,\langle'|\hat{J}_{ab}|'\rangle=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d\langle|\hat{J}_{cd}|\rangle,\langle'|S_{ab}|'\rangle=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d\langle|S_{cd}|\rangle$

推论3.1.7. $\langle'|\hat{P}_a|'\rangle=[e^{\vartheta}]_a{}^b\langle|\hat{P}_b|\rangle,\langle'|\hat{J}_{\alpha_\varsigma}|'\rangle=[e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}\langle|\hat{J}_{\beta_\varsigma}|\rangle$

从上可知右边是洛伦兹变换，左边可以看作幺正变换，即洛伦兹变换等价于幺正变换。

推论3.1.8. $[\hat{p}_a,\hat{p}_b]=0\Leftrightarrow \hat{p}_a=e^{-i\vartheta^b\hat{p}_b}\hat{p}_a e^{i\vartheta^b\hat{p}_b}$

3.2 量子场论意义上的无穷维不变张量 [27, 28]

推论3.2.1. $\begin{cases} i[\hat{J}_{ab},\hat{J}_{cd}]=g_{ad}\hat{J}_{bc}-g_{ac}\hat{J}_{bd}+g_{bc}\hat{J}_{ad}-g_{bd}\hat{J}_{ac}\Leftrightarrow \hat{J}_{ab}=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\hat{J}_{ef}}\hat{J}_{cd}e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\hat{J}_{ef}} \\ i[\hat{J}_{ab},\hat{J}_{cd}]=g_{ad}\hat{J}_{bc}-g_{ac}\hat{J}_{bd}+g_{bc}\hat{J}_{ad}-g_{bd}\hat{J}_{ac}\Leftrightarrow e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\hat{J}_{ef}}\hat{J}_{ab}e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ef}\hat{J}_{ef}}=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d\hat{J}_{cd} \end{cases}$

推论3.2.2. $\begin{cases} i[\hat{P}_a,\hat{J}_{cd}]=\delta_{a[c}\hat{P}_{d]}\Leftrightarrow \hat{P}_a=[e^{\vartheta}]_a{}^b e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\hat{J}_{cd}}\hat{P}_b e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\hat{J}_{cd}} \\ i[\hat{P}_a,\hat{J}_{cd}]=\delta_{a[c}\hat{P}_{d]}\Leftrightarrow e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\hat{J}_{cd}}\hat{P}_a e^{\frac{i}{2}\vartheta^{cd}\hat{J}_{cd}}=[e^{\vartheta}]_a{}^b\hat{P}_b \end{cases}$

推论3.2.3. $[\hat{P}_a,\hat{P}_b]=0\Leftrightarrow \hat{P}_a=e^{-i\vartheta^b\hat{P}_b}\hat{P}_a e^{i\vartheta^b\hat{P}_b}$

推论3.2.4. $\langle'|\hat{P}_a|'\rangle=[e^{\vartheta}]_a{}^b\langle|\hat{P}_b|\rangle,\langle'|\hat{J}_{ab}|'\rangle=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d\langle|\hat{J}_{cd}|\rangle,\langle'|S_{ab}|'\rangle=[e^{\vartheta}]_a{}^c[e^{\vartheta}]_b{}^d\langle|S_{cd}|\rangle$

推论3.2.5. $\langle'|\hat{P}_a|'\rangle=[e^{\vartheta}]_a{}^b\langle|\hat{P}_b|\rangle,\langle'|\hat{J}_{\alpha_\varsigma}|'\rangle=[e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}\langle|\hat{J}_{\beta_\varsigma}|\rangle$

猜测的协变方程：

推论3.2.6. $[(s+\phi)\hat{P}_a+i\hat{J}_{ab}\hat{P}^b]\psi(s,\varsigma)=0$

推论3.2.7. $[(s+\phi)\hat{\partial}_a+i\hat{J}_{ab}\hat{\partial}^b]\Psi(x,F[\varphi(y)])=0$

推论3.2.8. $(\hat{P}^a\partial_a+m)\Psi(x,F[\varphi(y)])=0$

推论3.2.9. $\partial_a\Psi(x,F[\varphi(y)])=\hat{P}_a\Psi(x,F[\varphi(y)])$

3.3 量子场论意义上的一般不变张量 [27,28]

推论3.3.1. $\begin{cases} i[\hat{J}_{ab},\hat{J}_{cd}] = g_{ad}\hat{J}_{bc} - g_{ac}\hat{J}_{bd} + g_{bc}\hat{J}_{ad} - g_{bd}\hat{J}_{ac} \Leftrightarrow \psi_\lambda = \Lambda_\lambda{}^\mu U^+\psi_\mu U \\ i[\hat{J}_{ab},\hat{J}_{cd}] = g_{ad}\hat{J}_{bc} - g_{ac}\hat{J}_{bd} + g_{bc}\hat{J}_{ad} - g_{bd}\hat{J}_{ac} \Leftrightarrow U\psi_\lambda U^+ = \Lambda_\lambda{}^\mu \psi_\mu \end{cases}$

推论3.3.2. $U\psi_\lambda U^+ = \Lambda_\lambda{}^\mu\psi_\mu, U = e^{iX}$

3.4 量子场论算子代数

推论3.4.1. $[x,\hat{p}_x] = i \Leftrightarrow \hat{p}_x \equiv -i\frac{\partial}{\partial x}, \Psi = \psi(x)$

$$\downarrow$$

推论3.4.2. $[x_i,\hat{p}_j] = i\delta_{ij} \Leftrightarrow \hat{p}_i \equiv -i\frac{\partial}{\partial x_i}, \Psi = \psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$\downarrow$$

推论3.4.3. $[\psi(x_i),\pi(x_j)] = i\delta_{ij} \Leftrightarrow \pi(x_i) \equiv -i\frac{\partial}{\partial\psi(x_i)}, \Psi = F[\psi(x_1),\psi(x_2),\cdots,\psi(x_n),\cdots,\psi(x_\infty)]$

$$\downarrow$$

推论3.4.4. $[\psi(x),\pi(x')] = i\delta(x-x') \Leftrightarrow \pi(x) \equiv -i\frac{\delta}{\delta\psi(x)}$
$\Psi = \int dxF[\psi(x)] = \sum\limits_i \Delta x_i F[\psi(x_i)] = \varepsilon F[\psi(x_1),\psi(x_2),\cdots,\psi(x_n),\cdots,\psi(x_\infty)]$

第六章　常数不变张量与表象变换

自我评述：本章理清了常数不变张量与表象变换之间的对应关系，指出了表象变换矩阵就是一个常数不变张量。

1 一般s-自旋场各种旋量的定义

1.1 Penrose抽象符号规则 [1,2]

推论1.1.1. $g^{\mathscr{A}_\varsigma\mathscr{B}_\varsigma}\psi_{\mathscr{B}_\varsigma}=\psi^{\mathscr{A}_\varsigma}=[\psi_{\mathscr{A}_{-\varsigma}}]^*,g_{\mathscr{A}_\varsigma\mathscr{B}_\varsigma}\psi^{\mathscr{B}_\varsigma}=\psi_{\mathscr{A}_\varsigma}=[\psi^{\mathscr{A}_{-\varsigma}}]^*$

以上说明$\psi_{\mathscr{A}_\varsigma},\psi^{\mathscr{A}_\varsigma}$是完全相关的，真正独立的只是其中一个，不妨选定$\psi_{\mathscr{A}_\varsigma}$作为基本量。

1.2 场旋量$\psi(s,\varsigma;w),\tilde{\psi}(s,\varsigma;w),\hat{\psi}(s,\varsigma;w)$的引入

定义1.2.1. $\psi(s,\varsigma;w)\prec\psi_{k_\varsigma}(s;w)\Leftrightarrow\psi^*(s,-\varsigma;w)\prec\psi^{k_\varsigma}(s;w)$

定义1.2.2. $\tilde{\psi}(s,\varsigma;w):=\psi_{A_\varsigma\otimes l_\varsigma}(s;w)\Leftrightarrow\tilde{\psi}^*(s,-\varsigma;w):=\psi^{A_\varsigma\otimes l_\varsigma}(s;w)$

定义1.2.3. $\hat{\psi}(s,\varsigma;w):=\psi_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma\otimes\cdots}_{2s}}(s;w)\Leftrightarrow\hat{\psi}^*(s,-\varsigma;w):=\psi^{\overbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma\otimes\cdots}^{2s}}(s;w)$

1.3 源旋量$\tilde{J}(s,\varsigma;w),\hat{J}(s,\varsigma;w)$的引入

定义1.3.1. $\tilde{J}(s,\varsigma;w):=J^{A'_\varsigma\otimes}{}_{l_\varsigma}(s;w)\Leftrightarrow\tilde{J}^*(s,-\varsigma;w):=J_{A'_\varsigma\otimes}{}^{l_\varsigma}(s;w)$

定义1.3.2. $\hat{J}(s,\varsigma;w):=J^{A'_\varsigma\otimes}{}_{\underbrace{B_\varsigma\otimes C_\varsigma\otimes\cdots}_{2s-1}}(s;w)\Leftrightarrow\hat{J}^*(s,-\varsigma;w):=J_{A'_\varsigma\otimes}{}^{\overbrace{B_\varsigma\otimes C_\varsigma\otimes\cdots}^{2s-1}}(s;w)$

1.4 旋量$\psi_{k_\varsigma}(s;w),\psi^{k_\varsigma}(s;w)$和$\psi_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w),\psi^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$的引入

1.4.1 $\psi(s,\varsigma;w),\hat{\psi}(s,\varsigma;w)$之间的关系

定义1.4.1.

$$\begin{cases}\psi_{k_\varsigma}(s;w):=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Leftrightarrow\psi(s,\varsigma;w)=\bar{\Gamma}(s;w)\hat{\psi}(s,\varsigma;w)\\ \qquad\Updownarrow\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Updownarrow\\ \psi^{k_\varsigma}(s;w)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Leftrightarrow\psi^*(s,-\varsigma;w)=\bar{\Gamma}(s;w)\hat{\psi}^*(s,-\varsigma;w)\end{cases}$$

推论1.4.1. $\psi_{k_\varsigma}(s;w)=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Leftrightarrow\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma\cdots)}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\psi_{k_\varsigma}(s;w)$

推论1.4.2.

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma\cdots)}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\psi_{k_\varsigma}(s;w)\Leftrightarrow\hat{\psi}(s,\varsigma;w)=\Gamma(s;w)\psi(s,\varsigma;w)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\Updownarrow\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Updownarrow\\ \psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)=\frac{1}{(2s)!}\psi^{\overbrace{(A_\varsigma B_\varsigma\cdots)}^{2s}}(s;w)=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\psi^{k_\varsigma}(s;w)\Leftrightarrow\hat{\psi}^*(s,-\varsigma;w)=\Gamma(s;w)\psi^*(s,-\varsigma;w)\end{cases}$$

1.4.2 $\tilde{\psi}(s,\varsigma;w),\hat{\psi}(s,\varsigma;w)$之间的关系

定义1.4.2.

$$\begin{cases}\psi_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w):=\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Leftrightarrow\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)=[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\hat{\psi}(s,\varsigma;w)\\ \qquad\Updownarrow\qquad\qquad\qquad\Updownarrow\\ \psi^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)=\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)\psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Leftrightarrow\tilde{\psi}^*(s,-\varsigma;w)=[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\hat{\psi}^*(s,-\varsigma;w)\end{cases}$$

推论1.4.3.

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\frac{1}{(2s-1)!}\psi_{\underbrace{A_\varsigma(B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)\psi_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)[\Leftrightarrow]\hat{\psi}(s,\varsigma;w)=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)\\ \qquad[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]\\ \psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)=\frac{1}{(2s-1)!}\psi^{\overbrace{A_\varsigma(B_\varsigma\cdots)}^{2s}}(s;w)=\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\psi^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)[\Leftrightarrow]\hat{\psi}^*(s,-\varsigma;w)=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]\tilde{\psi}^*(s,-\varsigma;w)\end{cases}$$

1.4.3 $\psi(s,\varsigma;w),\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)$之间的关系

推论1.4.4.

$$\begin{cases}\psi_{k_\varsigma}(s;w)=N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\psi_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)[\Leftrightarrow]\psi(s,\varsigma;w)=\bar{N}(s;w)\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)\\ \qquad[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]\\ \psi^{k_\varsigma}(s;w)=N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\psi^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)[\Leftrightarrow]\psi^*(s,-\varsigma;w)=\bar{N}(s;w)\tilde{\psi}^*(s,-\varsigma;w)\end{cases}$$

推论1.4.5.

$$\begin{cases}\psi_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)=N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\psi_{k_\varsigma}(s;w),\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\frac{1}{(2s!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma\cdots)}_{2s}}(s;w)[\Leftrightarrow]\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)=N(s;w)\psi(s,\varsigma;w)\\ \qquad[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]\\ \psi^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)=N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\psi^{k_\varsigma}(s;w),\psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)=\frac{1}{(2s)!}\psi^{\overbrace{(A_\varsigma B_\varsigma\cdots)}^{2s}}(s;w)[\Leftrightarrow]\tilde{\psi}^*(s,-\varsigma;w)=N(s;w)\psi^*(s,-\varsigma;w)\end{cases}$$

1.5 旋量$J^{A'_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s;w),J_{A'_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$的引入及其$\tilde{J}(s,\varsigma;w),\hat{J}(s,\varsigma;w)$之间的关系

定义1.5.1.

$$\begin{cases}J^{A'_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s;w):=\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Leftrightarrow\tilde{J}(s,\varsigma;w)=[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\hat{J}(s,\varsigma;w)\\ \qquad\Updownarrow\qquad\qquad\qquad\Updownarrow\\ J_{A'_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)=\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)J_{A'_\varsigma}{}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Leftrightarrow\tilde{J}^*(s,-\varsigma;w)=[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\hat{J}^*(s,-\varsigma;w)\end{cases}$$

推论1.5.1.

$$\begin{cases}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\frac{1}{(2s-1)!}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{(B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)J^{A'_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s;w)[\Leftrightarrow]\hat{J}(s,\varsigma;w)=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]\tilde{J}(s,\varsigma;w)\\ \qquad[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]\\ J_{A'_\varsigma}{}^{\overbrace{B_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)=\frac{1}{(2s-1)!}J_{A'_\varsigma}{}^{\overbrace{(B_\varsigma\cdots)}^{2s}}(s;w)=\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)J_{A'_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)[\Leftrightarrow]\hat{J}^*(s,-\varsigma;w)=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]\tilde{J}^*(s,-\varsigma;w)\end{cases}$$

1.6 旋量$J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}$的引入及其$\hat{\mathcal{J}}(n),\hat{J}(n,\varsigma)$之间的关系

推论1.6.1.

$$\begin{cases} J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n-1}} := (\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\varsigma(\sigma\varepsilon,-i\varsigma\varepsilon)^{aA'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}\overbrace{\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\cdot\cdot}^{n-1}J_{\underbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}[\Leftrightarrow]\hat{J}(n,\varsigma)=\overbrace{S^+_{em}(\varsigma)\otimes S^+_{em}(\pm\varsigma)\cdot\cdot}^{n}\hat{\mathcal{J}}(n) \\ \qquad[\Updownarrow]\qquad\qquad\qquad[\Updownarrow] \\ J_{\underbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}} = (\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\varsigma(\varepsilon\sigma,-i\varsigma\varepsilon)_{aA'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\overbrace{\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\cdot\cdot}^{n-1}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n-1}}[\Leftrightarrow]\hat{\mathcal{J}}(n)=\overbrace{S_{em}(\varsigma)\otimes S_{em}(\pm\varsigma)\cdot\cdot}^{n}\hat{J}(n,\varsigma) \end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

推论1.6.2.

$$\begin{cases} J_{A'_\varsigma}{}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n-1}} := (\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\varsigma(\varepsilon\sigma,-i\varsigma\varepsilon)_{aA'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\overbrace{\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\cdot\cdot}^{n-1}J^{\overbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}[\Leftrightarrow]\hat{J}^*(n,-\varsigma)=\overbrace{S^T_{em}(\varsigma)\otimes S^T_{em}(\pm\varsigma)\cdot\cdot}^{n}\hat{\mathcal{J}}(n) \\ \qquad[\Updownarrow]\qquad\qquad\qquad[\Updownarrow] \\ J^{\overbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}} = (\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\varsigma(\sigma\varepsilon,-i\varsigma\varepsilon)^{aA'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}\overbrace{\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\cdot\cdot}^{n-1}J_{A'_\varsigma}{}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n-1}}[\Leftrightarrow]\hat{\mathcal{J}}(n)=\overbrace{S^*_{em}(\varsigma)\otimes S^*_{em}(\pm\varsigma)\cdot\cdot}^{n}\hat{J}^*(n,-\varsigma) \end{cases}$$

1.7 $\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}(n),\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}(n),\Psi(n,\varsigma),\hat{\Psi}(n,\varsigma)$的定义

定义1.7.1. $\hat{\Psi}(n,\varsigma)\prec\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\otimes\beta_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{n}}(n)\Leftrightarrow\hat{\Psi}^*(n,-\varsigma)\prec\psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\otimes\beta_\varsigma\otimes\cdot\cdot}^{n}}(n)$

定义1.7.2.

$$\begin{cases} \psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)\psi_{k_\varsigma}(n)\Rightarrow\psi_{k_\varsigma}(n)=\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n)\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n) \\ \qquad\Updownarrow\qquad\qquad\qquad\Updownarrow \\ \psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}(n):=\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(n)\psi^{k_\varsigma}(n)\Rightarrow\psi^{k_\varsigma}(n)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)\psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}(n) \end{cases}$$

推论1.7.1.

$$\begin{cases} \psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n)[\Leftrightarrow]\frac{1}{(2n)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot)}_{2n}}(n)=\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n)\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n) \\ \qquad[\Updownarrow]\qquad\qquad\qquad[\Updownarrow] \\ \psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}(n)=\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n)\psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}(n)[\Leftrightarrow]\frac{1}{(2n)!}\psi^{\overbrace{(A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot)}^{2n}}(n)=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)\psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}(n) \end{cases}$$

推论1.7.2.

$$\begin{cases} \psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n)[\Leftrightarrow]\hat{\Psi}(n,\varsigma)=[\overbrace{S_{em}(\pm\varsigma)\otimes S_{em}(\pm\varsigma)\cdot\cdot}^{n}]\hat{\psi}(n,\varsigma) \\ \qquad[\Updownarrow]\qquad\qquad\qquad[\Updownarrow] \\ \psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}(n)=\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n)\psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}(n)[\Leftrightarrow]\hat{\Psi}^*(n,-\varsigma)=[\overbrace{S^*_{em}(\mp\varsigma)\otimes S^*_{em}(\mp\varsigma)\cdot\cdot}^{n}]\hat{\psi}^*(n,-\varsigma) \end{cases}$$

推论1.7.3.

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n)=\frac{1}{(2n)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot)}_{2n}}(n)=\Gamma^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n)\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)[\Leftrightarrow]\hat{\psi}(n,\varsigma)=[\overbrace{S^+_{em}(\pm\varsigma)\otimes S^+_{em}(\pm\varsigma)\cdot\cdot}^{n}]\hat{\Psi}(n,\varsigma)\\ \qquad[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]\\ \psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}(n)=\frac{1}{(2n)!}\psi^{\overbrace{(A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot)}^{2n}}(n)=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n)\psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}(n)[\Leftrightarrow]\hat{\psi}^*(n,-\varsigma)=[\overbrace{S^T_{em}(\mp\varsigma)\otimes S^T_{em}(\mp\varsigma)\cdot\cdot}^{n}]\hat{\Psi}^*(n,-\varsigma)\end{cases}$$

推论1.7.4. $\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(n)=\frac{1}{(2n)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot)}_{2n}}(n)[\Leftrightarrow]\psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}(n)=\frac{1}{n!}\psi^{\overbrace{(\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot)}^{n}}(n),\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}(n)=0$

1.8 旋量$J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}$的引入及其$\hat{\mathcal{J}}(n),\hat{J}(n,\varsigma)$之间的关系

推论1.8.1.

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}:=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}[\Leftrightarrow]\hat{\psi}(n,\varsigma)=\overbrace{S^+_{em}(\pm\varsigma)\otimes S^+_{em}(\pm\varsigma)\cdot\cdot}^{n}\hat{\Psi}(n)\\ \qquad[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]\\ \psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\overbrace{\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}[\Leftrightarrow]\hat{\Psi}(n)=\overbrace{S_{em}(\pm\varsigma)\otimes S_{em}(\pm\varsigma)\cdot\cdot}^{n}\hat{\psi}(n,\varsigma)\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

推论1.8.2.

$$\begin{cases}\psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}:=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\overbrace{\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}[\Leftrightarrow]\hat{\psi}^*(n,-\varsigma)=\overbrace{S^T_{em}(\mp\varsigma)\otimes S^T_{em}(\mp\varsigma)\cdot\cdot}^{n}\hat{\Psi}(n)\\ \qquad[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]\\ \psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}}=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}[\Leftrightarrow]\hat{\Psi}(n)=\overbrace{S^*_{em}(\mp\varsigma)\otimes S^*_{em}(\mp\varsigma)\cdot\cdot}^{n}\hat{\psi}^*(n,-\varsigma)\end{cases}$$

2 全对称性条件分析

2.1 场量全对称性条件分析

定义2.1.1.

$$\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}Z_\varsigma}:=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n(\overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\cdot\cdot}^{n})\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma}\Leftrightarrow\psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}Z_\varsigma}=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n(\overbrace{\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\cdot\cdot}^{n})\psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}Z_\varsigma}$$

$$[\Downarrow]\qquad\qquad[\Downarrow]$$

推论2.1.1.

$$\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma}=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n(\overbrace{\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\cdot\cdot}^{n})\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}Z_\varsigma}[\Leftrightarrow]\psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}Z_\varsigma}=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n(\overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\cdot\cdot}^{n})\psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}Z_\varsigma}$$

推论2.1.2. $\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}Z_\varsigma}$关于$(A_\varsigma B_\varsigma),(C_\varsigma D_\varsigma),\cdot\cdot$ *()*内全对称,*()*间全对称 $\Leftrightarrow\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma}=\frac{1}{n!}\psi_{\underbrace{(\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot)}_{n}Z_\varsigma}$

推论2.1.3. $\psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}Z_\varsigma}$关于$(A_\varsigma B_\varsigma),(C_\varsigma D_\varsigma),\cdot\cdot$ *()*内全对称,*()*间全对称 $\Leftrightarrow\psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}Z_\varsigma}=\frac{1}{n!}\psi^{\overbrace{(\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot)}^{n}Z_\varsigma}$

推论2.1.4. $\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}Z_\varsigma}=\psi_{\underbrace{A_\varsigma C_\varsigma B_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}Z_\varsigma}\Leftrightarrow\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma}=0$

$$[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]$$

推论2.1.5. $\psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}Z_\varsigma}=\psi^{\overbrace{A_\varsigma C_\varsigma B_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}Z_\varsigma}\Leftrightarrow\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}Z_\varsigma}=0$

证明: $\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot}_{2n} Z_\varsigma} = \psi_{\underbrace{A_\varsigma C_\varsigma B_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot}_{2n} Z_\varsigma}$

$\Leftrightarrow \varepsilon^{B_\varsigma C_\varsigma}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot}_{2n} Z_\varsigma} = 0$

$\Leftrightarrow \varepsilon^{B_\varsigma C_\varsigma}(\overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma} \cdot\cdot}^{n})\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n} Z_\varsigma} = 0$

$\Leftrightarrow \varepsilon^{B_\varsigma C_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n} Z_\varsigma} = 0$

$\Leftrightarrow \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{C_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{D_\varsigma}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n} Z_\varsigma} = 0$

$\Leftrightarrow \sigma^{\alpha_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n} Z_\varsigma} = 0$

$\Leftrightarrow \delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n} Z_\varsigma} = 0$ □

推论2.1.6. $\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot}_{2n} Z_\varsigma} = \psi_{\underbrace{A_\varsigma Z_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot}_{2n} B_\varsigma} \Leftrightarrow \sigma^{\alpha_\varsigma}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n}[Z_\varsigma]} = 0$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

推论2.1.7. $\psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot}^{2n} Z_\varsigma} = \psi^{\overbrace{A_\varsigma Z_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot}^{2n} B_\varsigma} \Leftrightarrow \sigma^*_{\alpha_\varsigma}\psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}^{n}[Z_\varsigma]} = 0$

证明: $\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot}_{2n} Z_\varsigma} = \psi_{\underbrace{A_\varsigma Z_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot}_{2n} B_\varsigma}$

$\Leftrightarrow \varepsilon^{B_\varsigma Z_\varsigma}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot}_{2n} Z_\varsigma} = 0$

$\Leftrightarrow \varepsilon^{B_\varsigma Z_\varsigma}(\overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma} \cdot\cdot}^{n})\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n} Z_\varsigma} = 0$

$\Leftrightarrow \varepsilon^{B_\varsigma Z_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n} Z_\varsigma} = 0$

$\Leftrightarrow \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{Z_\varsigma}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n} Z_\varsigma} = 0$

$\Leftrightarrow \sigma^{\alpha_\varsigma}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n}[Z_\varsigma]} = 0$ □

推论2.1.8. $\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot}_{2n} Z_\varsigma} = \frac{1}{(2n)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot)}_{2n} Z_\varsigma} \Leftrightarrow \psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n} Z_\varsigma} = \frac{1}{n!}\psi_{\underbrace{(\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot)}_{n} Z_\varsigma}, \delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n} Z_\varsigma} = 0$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

推论2.1.9. $\psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot}^{2n} Z_\varsigma} = \frac{1}{(2n)!}\psi^{\overbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot)}^{2n} Z_\varsigma} \Leftrightarrow \psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}^{n} Z_\varsigma} = \frac{1}{n!}\psi^{\overbrace{(\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot)}^{n} Z_\varsigma}, \delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}^{n} Z_\varsigma} = 0$

推论2.1.10. $\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot Z_\varsigma}_{2n+1}} = \frac{1}{(2n+1)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot Z_\varsigma)}_{2n+1}} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n} Z_\varsigma} = \frac{1}{n!}\psi_{\underbrace{(\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot)}_{n} Z_\varsigma} \\ \delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n} Z_\varsigma} = 0, \sigma^{\alpha_\varsigma}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n}[Z_\varsigma]} = 0 \end{cases}$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

推论2.1.11. $\psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot Z_\varsigma}^{2n+1}} = \frac{1}{(2n+1)!}\psi^{\overbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot Z_\varsigma)}^{2n+1}} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}^{n} Z_\varsigma} = \frac{1}{n!}\psi^{\overbrace{(\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot)}^{n} Z_\varsigma} \\ \delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}^{n} Z_\varsigma} = 0, \sigma_{\alpha_\varsigma}\psi^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma \cdot\cdot}^{n}[Z_\varsigma]} = 0 \end{cases}$

2.2 源对称性条件分析

定义2.2.1. $J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot}_{2n} Z_\varsigma} := (\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\varsigma[\overbrace{(\sigma\varepsilon, -i\varsigma\varepsilon)^{aA'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma} \cdot\cdot}^{n}]J_{\underbrace{a\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n} Z_\varsigma}$

推论2.2.1. $J_{\underbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma}=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\varsigma[\overbrace{(\varepsilon\sigma,-i\varsigma\varepsilon)_{aA'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}]J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}Z_\varsigma}$

推论2.2.2. $J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}Z_\varsigma}$关于$(C_\varsigma D_\varsigma),(E_\varsigma F_\varsigma),\cdot\cdot()$内全对称,()间全对称 $\Leftrightarrow J_{\underbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma}=\frac{1}{(n-1)!}J_{\underbrace{a(\beta_\varsigma\cdot\cdot)}_{n}Z_\varsigma}$

推论2.2.3. $J_{A'_\varsigma}{}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}Z_\varsigma}$关于$(C_\varsigma D_\varsigma),(E_\varsigma F_\varsigma),\cdot\cdot()$内全对称,()间全对称 $\Leftrightarrow J^{\overbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}Z_\varsigma}=\frac{1}{(n-1)!}J^{\overbrace{a(\beta_\varsigma\cdot\cdot)}^{n}Z_\varsigma}$

推论2.2.4. $J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}Z_\varsigma}=J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{C_\varsigma B_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}Z_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^a\sigma^{\beta_\varsigma}J_{\underbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma}=0$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

推论2.2.5. $J_{A'_\varsigma}{}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}Z_\varsigma}=J_{A'_\varsigma}{}^{\overbrace{C_\varsigma B_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}Z_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)_a\sigma_{\beta_\varsigma}J^{\overbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}Z_\varsigma}=0$

证明: $J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}Z_\varsigma}=J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{C_\varsigma B_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}Z_\varsigma}$

$\Leftrightarrow\varepsilon^{B_\varsigma C_\varsigma}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}Z_\varsigma}=0$

$\Leftrightarrow\varepsilon^{B_\varsigma C_\varsigma}[\overbrace{(\sigma\varepsilon,-i\varsigma\varepsilon)^{aA'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}]J_{\underbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma}=0$

$\Leftrightarrow\varepsilon^{B_\varsigma C_\varsigma}(\sigma\varepsilon,-i\varsigma\varepsilon)^{aA'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}J_{\underbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma}=0$

$\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^{aA'_\varsigma C_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}{}_{C_\varsigma}{}^{D_\varsigma}J_{\underbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma}=0$

$\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^a\sigma^{\beta_\varsigma}J_{\underbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma}=0$ □

推论2.2.6. $J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}Z_\varsigma}=J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{Z_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}B_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^aJ_{\underbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}[Z_\varsigma]}=0$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

推论2.2.7. $J_{A'_\varsigma}{}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}Z_\varsigma}=J_{A'_\varsigma}{}^{\overbrace{Z_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}B_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma^*,i\varsigma)_aJ^{\overbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}^{n}[Z_\varsigma]}=0$

证明: $J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}Z_\varsigma}=J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{Z_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}B_\varsigma}$

$\Leftrightarrow\varepsilon^{B_\varsigma Z_\varsigma}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}Z_\varsigma}=0$

$\Leftrightarrow\varepsilon^{B_\varsigma Z_\varsigma}[\overbrace{(\sigma\varepsilon,-i\varsigma\varepsilon)^{aA'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}]J_{\underbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma}=0$

$\Leftrightarrow\varepsilon^{B_\varsigma Z_\varsigma}(\sigma\varepsilon,-i\varsigma\varepsilon)^{aA'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}J_{\underbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma}=0$

$\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^{aA'_\varsigma Z_\varsigma}J_{\underbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma}=0$

$\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^aJ_{\underbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}[Z_\varsigma]}=0$ □

推论2.2.8. $J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2n-1}Z_\varsigma}=\frac{1}{(2n-1)!}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{(B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot)}_{2n-1}Z_\varsigma}\Leftrightarrow\begin{cases}J_{\underbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma}=\frac{1}{(n-1)!}J_{\underbrace{a(\beta_\varsigma\cdot\cdot)}_{n}Z_\varsigma}\\(\sigma,-i\varsigma)^a\sigma^{\beta_\varsigma}J_{\underbrace{a\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma}=0\end{cases}$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

推论2.2.9. $J_{A'_\varsigma}{}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot}^{2n-1}Z_\varsigma} = \frac{1}{(2n-1)!}J_{A'_\varsigma}{}^{\overbrace{(B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot)}^{2n-1}Z_\varsigma} \Leftrightarrow \begin{cases} J^{\overbrace{a\beta_\varsigma \cdot\cdot}^{n}Z_\varsigma} = \frac{1}{(n-1)!}J^{\overbrace{a(\beta_\varsigma \cdot\cdot)}^{n}Z_\varsigma} \\ (\sigma, -i\varsigma)_a\sigma_{\beta_\varsigma}J^{\overbrace{a\beta_\varsigma \cdot\cdot}^{n}Z_\varsigma} = 0 \end{cases}$

推论2.2.10. $J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot Z_\varsigma}_{2n}} = \frac{1}{(2n)!}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{(B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot Z_\varsigma)}_{2n}} \Leftrightarrow \begin{cases} J_{\underbrace{a\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma} = \frac{1}{(n-1)!}J_{\underbrace{a(\beta_\varsigma \cdot\cdot)}_{n}Z_\varsigma} \\ (\sigma, -i\varsigma)^a\sigma^{\beta_\varsigma}J_{\underbrace{a\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n}Z_\varsigma} = 0, (\sigma, -i\varsigma)^a J_{\underbrace{a\beta_\varsigma \cdot\cdot}_{n}[Z_\varsigma]} = 0 \end{cases}$

$[\Updownarrow] \qquad\qquad [\Updownarrow]$

推论2.2.11. $J_{A'_\varsigma}{}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot Z_\varsigma}^{2n}} = \frac{1}{(2n)!}J_{A'_\varsigma}{}^{\overbrace{(B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma \cdot\cdot Z_\varsigma)}^{2n}} \Leftrightarrow \begin{cases} J^{\overbrace{a\beta_\varsigma \cdot\cdot}^{n}Z_\varsigma} = \frac{1}{(n-1)!}J^{\overbrace{a(\beta_\varsigma \cdot\cdot)}^{n}Z_\varsigma} \\ (\sigma, -i\varsigma)_a\sigma_{\beta_\varsigma}J^{\overbrace{a\beta_\varsigma \cdot\cdot}^{n}Z_\varsigma} = 0, (\sigma^*, i\varsigma)_a J^{\overbrace{a\beta_\varsigma \cdot\cdot}^{n}[Z_\varsigma]} = 0 \end{cases}$

3 电磁场的全对称旋量与表象变换

3.1 电磁场的全对称旋量$\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}$

定义3.1.1. $\psi_{A_\varsigma B_\varsigma} = \psi_{B_\varsigma A_\varsigma} \Leftrightarrow \hat{\psi}(1,\varsigma) = S_{ex}\hat{\psi}(1,\varsigma)$

定义3.1.2. $\hat{\Psi}(1,\varsigma) = \tilde{\Psi}(1,\varsigma) := [\psi_{x_\varsigma}, \psi_{y_\varsigma}, \psi_{z_\varsigma}, 0]^T, \hat{\psi}(1,\varsigma) = \tilde{\psi}(1,\varsigma) := [\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma}, \psi_{1_\varsigma 2_\varsigma}, \psi_{1_\varsigma 2_\varsigma}, \psi_{2_\varsigma 2_\varsigma}]^T$

定义3.1.3. $\psi_{\alpha_\varsigma} \succ \Psi(1,\varsigma) := [\psi_{x_\varsigma}, \psi_{y_\varsigma}, \psi_{z_\varsigma}]^T, \psi(1,\varsigma) := [\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma}, \sqrt{C_2^1}\psi_{1_\varsigma 2_\varsigma}, \psi_{2_\varsigma 2_\varsigma}]^T$

3.2 $\psi(1,\varsigma), \hat{\psi}(1,\varsigma)$之间的关系

推论3.2.1. $\begin{cases} \psi_{k_\varsigma}(1) = \Gamma_{k_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}[\Leftrightarrow]\psi(1,\varsigma) = \bar{\Gamma}(\frac{3}{2})\hat{\psi}(1,\varsigma) \\ [\Updownarrow] \qquad\qquad [\Updownarrow] \\ \psi^{k_\varsigma}(1) = \Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi^{A_\varsigma B_\varsigma}[\Leftrightarrow]\psi^*(1,-\varsigma) = \bar{\Gamma}(\frac{3}{2})\hat{\psi}^*(1,-\varsigma) \end{cases}$

$[\Updownarrow]$

推论3.2.2. $\begin{cases} \psi_{A_\varsigma B_\varsigma} = \Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi_{k_\varsigma}(1)[\Leftrightarrow]\hat{\psi}(1,\varsigma) = \Gamma(\frac{3}{2})\psi(1,\varsigma) \\ [\Updownarrow] \qquad\qquad [\Updownarrow] \\ \psi^{A_\varsigma B_\varsigma} = \Gamma_{k_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi^{k_\varsigma}(1)[\Leftrightarrow]\hat{\psi}^*(1,-\varsigma) = \Gamma(\frac{3}{2})\psi^*(1,-\varsigma) \end{cases}$

3.3 $\tilde{\psi}(1,\varsigma), \hat{\psi}(1,\varsigma)$之间的关系

推论3.3.1. $\tilde{\psi}(1,\varsigma) = \hat{\psi}(1,\varsigma)$

3.4 $\psi(1,\varsigma), \tilde{\psi}(1,\varsigma)$之间的关系

推论3.4.1. $\begin{cases} \psi_{k_\varsigma}(1) = N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}[\Leftrightarrow]\psi(1,\varsigma) = \bar{N}(1)\tilde{\psi}(1,\varsigma) \\ [\Updownarrow] \qquad\qquad [\Updownarrow] \\ \psi^{k_\varsigma}(1) = N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi^{A_\varsigma B_\varsigma}[\Leftrightarrow]\psi^*(1,-\varsigma) = \bar{N}(1)\tilde{\psi}^*(1,-\varsigma) \end{cases}$

$[\Updownarrow]$

推论3.4.2. $\begin{cases} \psi_{A_\varsigma B_\varsigma} = N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi_{k_\varsigma}(1)[\Leftrightarrow]\tilde{\psi}(1,\varsigma) = N(1)\psi(1,\varsigma) \\ [\Updownarrow] \qquad\qquad [\Updownarrow] \\ \psi^{A_\varsigma B_\varsigma} = N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi^{k_\varsigma}(1)[\Leftrightarrow]\tilde{\psi}^*(1,-\varsigma) = N(1)\psi^*(1,-\varsigma) \end{cases}$

3.5 表象变换矩阵是常数不变张量

定义3.5.1. $J_{A'_\varsigma A_\varsigma} := \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma, i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma} J_a \Leftrightarrow J_a = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma, -i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma} J_{A'_\varsigma A_\varsigma}$

推论3.5.1. $J_a = \frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon\sigma, -i\varsigma\varepsilon)_{aA'_\varsigma}{}^{B_\varsigma} J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}$

证明: $J_a = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma, -i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma} J_{A'_\varsigma A_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma, -i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}(-\varsigma\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}) J^{B'_\varsigma}{}_{A_\varsigma} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon\sigma, -i\varsigma\varepsilon)_{aA'_\varsigma}{}^{B_\varsigma} J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}$ □

推论3.5.2.
$$\begin{cases} \frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon\sigma, -i\varsigma\varepsilon)_{aA'_\varsigma\otimes}{}^{B_\varsigma} \succ S_{em}(\varsigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 0 & 0 & -i \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -i & -i & 0 \\ 0 & -\varsigma & \varsigma & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma\varepsilon, -i\varsigma\varepsilon)^{aA'_\varsigma\otimes}{}_{B_\varsigma} \succ S^*_{em}(\varsigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & 0 & 0 & i \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & i & 0 \\ 0 & -\varsigma & \varsigma & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

推论3.5.3.
$$\begin{cases} \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma} = \frac{i}{\sqrt{2}}[\varepsilon\sigma]^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma} \to \frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon\sigma, -i\varsigma\varepsilon)^{A_\varsigma\otimes B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma} \succ S_{em}(\varsigma) \\ \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma} = \frac{i}{\sqrt{2}}[\sigma\varepsilon]^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma} \to \frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma\varepsilon, -i\varsigma\varepsilon)^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma} \succ S^*_{em}(\varsigma) \end{cases}$$

推论3.5.4.
$$\begin{cases} \Gamma_{\alpha_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(1) \succ S_m(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 0 & -i \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -i\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \\ \Gamma_{k_\varsigma}{}^{\alpha_\varsigma}(1) \succ S^+_m(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \\ i & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}(1) \succ S^*_m(1) \\ \Gamma^{k_\varsigma}{}_{\alpha_\varsigma}(1) \succ S^T_m(1) \end{cases}$$

推论3.5.5. $S_{em}(\varsigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 0 & 0 & -i \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -i & -i & 0 \\ 0 & -\varsigma & \varsigma & 0 \end{bmatrix}, S^+_{em}(\varsigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -\varsigma \\ 0 & 0 & i & \varsigma \\ i & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S_{em}(\varsigma)S^+_{em}(\varsigma) = S^+_{em}(\varsigma)S_{em}(\varsigma) = I_4$

推论3.5.6. $S_m(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 0 & -i \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -i\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, S^+_m(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \\ i & -1 & 0 \end{bmatrix}, S_m(1)S^+_m(1) = S^+_m(1)S_m(1) = I_3$

3.6 电磁场量的旋量关系与表象变换

推论3.6.1.
$$\begin{cases} \psi_{\alpha_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}[\Leftrightarrow]\hat{\Psi}(1,\varsigma) = S_{em}(\pm\varsigma)\hat{\psi}(1,\varsigma) \\ \quad [\Updownarrow] \qquad\qquad\qquad\qquad [\Updownarrow] \\ \psi_{A_\varsigma B_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma}[\Leftrightarrow]\hat{\psi}(1,\varsigma) = S^+_{em}(\pm\varsigma)\hat{\Psi}(1,\varsigma) \end{cases} [\Leftrightarrow] \begin{cases} \psi^{\alpha_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi^{A_\varsigma B_\varsigma}[\Leftrightarrow]\hat{\Psi}^*(1,-\varsigma) = S^*_{em}(\mp\varsigma)\hat{\psi}^*(1,-\varsigma) \\ \quad [\Updownarrow] \qquad\qquad\qquad\qquad [\Updownarrow] \\ \psi^{A_\varsigma B_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi^{\alpha_\varsigma}[\Leftrightarrow]\hat{\psi}^*(1,-\varsigma) = S^T_{em}(\mp\varsigma)\hat{\Psi}^*(1,-\varsigma) \end{cases}$$
$$[\Updownarrow]$$

推论3.6.2.
$$\begin{cases} \psi_{\alpha_\varsigma} = \Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\psi_{k_\varsigma}[\Leftrightarrow]\Psi(1,\varsigma) = S_m(1)\psi(1,\varsigma) \\ \quad [\Updownarrow] \qquad\qquad\qquad\qquad [\Updownarrow] \\ \psi_{k_\varsigma} = \Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi_{\alpha_\varsigma}[\Leftrightarrow]\psi(1,\varsigma) = S^+_m(1)\Psi(1,\varsigma) \end{cases} [\Leftrightarrow] \begin{cases} \psi^{\alpha_\varsigma} = \Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi^{k_\varsigma}[\Leftrightarrow]\Psi^*(1,-\varsigma) = S^*_m(1)\psi^*(1,-\varsigma) \\ \quad [\Updownarrow] \qquad\qquad\qquad\qquad [\Updownarrow] \\ \psi^{k_\varsigma} = \Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\psi^{\alpha_\varsigma}[\Leftrightarrow]\psi^*(1,-\varsigma) = S^T_m(1)\Psi^*(1,-\varsigma) \end{cases}$$

3.7 电磁场源的旋量关系与表象变换

推论3.7.1. $\tilde{J}(1,\varsigma) = \hat{J}(1,\varsigma) = (J^{1'_\varsigma}{}_{1_\varsigma}, J^{2'_\varsigma}{}_{1_\varsigma}, J^{1'_\varsigma}{}_{2_\varsigma}, J^{2'_\varsigma}{}_{2_\varsigma})$

推论3.7.2.
$$\begin{cases} J_a = \frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon\sigma, -i\varsigma\varepsilon)_{aA'_\varsigma}{}^{B_\varsigma} J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}[\Leftrightarrow]\tilde{\mathcal{J}}(1) = S_{em}(\varsigma)\hat{J}(1,\varsigma) \\ \qquad [\Updownarrow] \qquad\qquad\qquad\qquad [\Updownarrow] \\ J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma\varepsilon, -i\varsigma\varepsilon)^{aA'_\varsigma}{}_{B_\varsigma} J_a[\Leftrightarrow]\hat{J}(1,\varsigma) = S^+_{em}(\varsigma)\hat{\mathcal{J}}(1) \end{cases}$$
$$[\Updownarrow]$$

推论3.7.3.
$$\begin{cases} J^a = \frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma\varepsilon, -i\varsigma\varepsilon)^{aA'_\varsigma}{}_{B_\varsigma} J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}[\Leftrightarrow]\hat{\mathcal{J}}(1) = S^*_{em}(\varsigma)\hat{J}^*(1,-\varsigma) \\ \qquad [\Updownarrow] \qquad\qquad\qquad\qquad [\Updownarrow] \\ J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon\sigma, -i\varsigma\varepsilon)_{aA'_\varsigma}{}^{B_\varsigma} J_a[\Leftrightarrow]\hat{J}^*(1,-\varsigma) = S^T_{em}(\varsigma)\hat{\mathcal{J}}(1) \end{cases}$$

推论3.7.4.

$\Psi(1,\varsigma) \sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma} \Leftrightarrow \tilde{\Psi}(1,\varsigma) \sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot R} \Leftrightarrow \tilde{\psi}(1,\varsigma) \sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma} \otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma} \Leftrightarrow \psi(1,\varsigma) \sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(1)}$

4 引力场的全对称旋量与表象变换

4.1 引力场的全对称条件

推论4.1.1. $\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}=\frac{1}{4!}\psi_{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma)}\Leftrightarrow\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}=\frac{1}{2!}\psi_{(\alpha_\varsigma\beta_\varsigma)},\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}=0$

推论4.1.2. $J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}=\frac{1}{3!}J^{A'_\varsigma}{}_{(B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma)}\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^a\sigma^{\beta_\varsigma}J_{a\beta_\varsigma}=0$

4.2 引力场的全对称旋量

定义4.2.1. $\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}=C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma},\psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}=C^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}$

定义4.2.2. $\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}=\psi_{B_\varsigma A_\varsigma}\Leftrightarrow\hat{\psi}(2,\varsigma)=S_{ex}\hat{\psi}(2,\varsigma)$

定义4.2.3. $\hat{\Psi}(2,\varsigma)\equiv[\psi_{x_\varsigma x_\varsigma},\psi_{y_\varsigma x_\varsigma},\psi_{z_\varsigma x_\varsigma},0,|\psi_{x_\varsigma y_\varsigma},\psi_{y_\varsigma y_\varsigma},\psi_{z_\varsigma y_\varsigma},0,|\psi_{x_\varsigma z_\varsigma},\psi_{y_\varsigma z_\varsigma},\psi_{z_\varsigma z_\varsigma},0,|0,0,0,0]^T$

定义4.2.4. $\hat{\psi}(2,\varsigma)\equiv[\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},|\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},|$
$\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},|\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma}]^T$

定义4.2.5. $\Psi(2,\varsigma)\equiv[\psi_{x_\varsigma x_\varsigma},\psi_{y_\varsigma x_\varsigma},\psi_{z_\varsigma x_\varsigma},\psi_{y_\varsigma y_\varsigma},\psi_{z_\varsigma y_\varsigma}]^T$

定义4.2.6. $\psi(2,\varsigma):=[\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma},\sqrt{C_4^1}\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma},\sqrt{C_4^2}\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},\sqrt{C_4^3}\psi_{1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma}]^T$

定义4.2.7. $\bar{\bar{\psi}}(2,\varsigma):=[\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma}]^T$

定义4.2.8. $\tilde{\Psi}(2,\varsigma)\equiv[\psi_{x_\varsigma x_\varsigma},\psi_{y_\varsigma x_\varsigma},\psi_{z_\varsigma x_\varsigma},0,|\psi_{x_\varsigma y_\varsigma},\psi_{y_\varsigma y_\varsigma},\psi_{z_\varsigma y_\varsigma},0]^T$

定义4.2.9. $\tilde{C}(2,\varsigma)\equiv[C_{x_\varsigma x_\varsigma},C_{y_\varsigma x_\varsigma},C_{z_\varsigma x_\varsigma},0,|C_{x_\varsigma y_\varsigma},C_{y_\varsigma y_\varsigma},C_{z_\varsigma y_\varsigma},0]^T$

定义4.2.10.
$\tilde{\psi}(2,\varsigma):=[(\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma}),\sqrt{C_3^1}(\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma}),\sqrt{C_3^2}(\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma}),(\psi_{1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma})]^T$

定义4.2.11.
$\bar{\psi}(2,\varsigma):=[(\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma}),(\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma}),(\psi_{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma}),(\psi_{1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma},\psi_{2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma})]^T$

4.3 $\psi(2,\varsigma),\hat{\psi}(2,\varsigma)$之间的关系

推论4.3.1.
$$\begin{cases}\psi_{k_\varsigma}(2)=\Gamma_{k_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}(2)\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}[\Leftrightarrow]\psi(2,\varsigma)=\bar{\Gamma}(\frac{5}{2})\hat{\psi}(2,\varsigma)\\ \qquad[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]\\ \psi^{k_\varsigma}(2)=\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}(2)\psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}[\Leftrightarrow]\psi^*(2,-\varsigma)=\bar{\Gamma}(\frac{5}{2})\hat{\psi}^*(2,-\varsigma)\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

推论4.3.2.
$$\begin{cases}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}=\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}(2)\psi_{k_\varsigma}(2)[\Leftrightarrow]\hat{\psi}(2,\varsigma)=\Gamma(\frac{5}{2})\psi(2,\varsigma)\\ \qquad[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]\\ \psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}=\Gamma_{k_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}(2)\psi^{k_\varsigma}(2)[\Leftrightarrow]\hat{\psi}^*(2,-\varsigma)=\Gamma(\frac{5}{2})\psi^*(2,-\varsigma)\end{cases}$$

4.4 $\tilde{\psi}(2,\varsigma),\hat{\psi}(2,\varsigma)$之间的关系

定义4.4.1.
$$\begin{cases}\psi_{A_\varsigma l_\varsigma}(2):=\Gamma_{l_\varsigma}^{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}(\frac{3}{2})\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}\Leftrightarrow\tilde{\psi}(2,\varsigma)=[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(2)]\hat{\psi}(2,\varsigma)\\ \qquad\Updownarrow\qquad\qquad\Updownarrow\\ \psi^{A_\varsigma l_\varsigma}(2)=\Gamma^{l_\varsigma}_{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}(\frac{3}{2})\psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}\Leftrightarrow\tilde{\psi}^*(2,-\varsigma)=[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(2)]\hat{\psi}^*(2,-\varsigma)\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

推论4.4.1.
$$\begin{cases}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}=\Gamma^{l_\varsigma}_{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}(\frac{3}{2})\psi_{A_\varsigma l_\varsigma}(2)[\Leftrightarrow]\hat{\psi}(2,\varsigma)=[I_{w+1}\otimes\Gamma(2)]\tilde{\psi}(2,\varsigma)\\ \qquad[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]\\ \psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}=\Gamma_{l_\varsigma}^{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}(\frac{3}{2})\psi^{A_\varsigma l_\varsigma}(2)[\Leftrightarrow]\hat{\psi}^*(2,-\varsigma)=[I_{w+1}\otimes\Gamma(2)]\tilde{\psi}^*(2,-\varsigma)\end{cases}$$

4.5 $\psi(2,\varsigma),\tilde{\psi}(2,\varsigma)$之间的关系

推论4.5.1.
$$\begin{cases}\psi_{k_\varsigma}(2)=N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(2)\psi_{A_\varsigma l_\varsigma}(2)[\Leftrightarrow]\psi(2,\varsigma)=\bar{N}(2)\tilde{\psi}(2,\varsigma)\\ \quad[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]\\ \psi^{k_\varsigma}(2)=N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(2)\psi^{A_\varsigma l_\varsigma}(2)[\Leftrightarrow]\psi^*(2,-\varsigma)=\bar{N}(2)\tilde{\psi}^*(2,-\varsigma)\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

推论4.5.2.
$$\begin{cases}\psi_{A_\varsigma l_\varsigma}(2)=N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(2)\psi_{k_\varsigma}(2)[\Leftrightarrow]\tilde{\psi}(2,\varsigma)=N(2)\psi(2,\varsigma)\\ \quad[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]\\ \psi^{A_\varsigma l_\varsigma}(2)=N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(2)\psi^{k_\varsigma}(2)[\Leftrightarrow]\tilde{\psi}^*(2,-\varsigma)=N(2)\psi^*(2,-\varsigma)\end{cases}$$

4.6 引力场量的旋量关系与表象变换

推论4.6.1.
$$\begin{cases}\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^2\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}[\Leftrightarrow]\hat{\Psi}(2,\varsigma)=S_{em}(\pm\varsigma)\otimes S_{em}(\pm\varsigma)\hat{\psi}(2,\varsigma)\\ \quad[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]\\ \psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^2\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}[\Leftrightarrow]\hat{\psi}(2,\varsigma)=S^+_{em}(\pm\varsigma)\otimes S^+_{em}(\pm\varsigma)\hat{\Psi}(2,\varsigma)\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

推论4.6.2.
$$\begin{cases}\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^2\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}[\Leftrightarrow]\hat{\Psi}^*(2,-\varsigma)=S^*_{em}(\mp\varsigma)\otimes S^*_{em}(\mp\varsigma)\hat{\psi}^*(2,-\varsigma)\\ \quad[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]\\ \psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^2\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}[\Leftrightarrow]\hat{\psi}^*(2,-\varsigma)=S^T_{em}(\mp\varsigma)\otimes S^T_{em}(\mp\varsigma)\hat{\Psi}^*(2,-\varsigma)\end{cases}$$

4.7 引力场源的旋量关系与表象变换

定义4.7.1. $\hat{\mathcal{J}}(2,\varsigma)\equiv[J_{xx_\varsigma},J_{yx_\varsigma},J_{zx_\varsigma},J_{\pi x_\varsigma},|J_{xy_\varsigma},J_{yy_\varsigma},J_{zy_\varsigma},J_{\pi y_\varsigma},|J_{xz_\varsigma},J_{yz_\varsigma},J_{zz_\varsigma},J_{\pi z_\varsigma},|0,0,0,0]^T$

定义4.7.2. $\hat{J}(2,\varsigma)\equiv[J^{1'_\varsigma}{}_{1_\varsigma1_\varsigma1_\varsigma},J^{2'_\varsigma}{}_{1_\varsigma1_\varsigma1_\varsigma},J^{1'_\varsigma}{}_{2_\varsigma1_\varsigma1_\varsigma},J^{2'_\varsigma}{}_{2_\varsigma1_\varsigma1_\varsigma},|J^{1'_\varsigma}{}_{1_\varsigma2_\varsigma1_\varsigma},J^{2'_\varsigma}{}_{1_\varsigma2_\varsigma1_\varsigma},J^{1'_\varsigma}{}_{2_\varsigma2_\varsigma1_\varsigma},J^{2'_\varsigma}{}_{2_\varsigma2_\varsigma1_\varsigma},|$
$J^{1'_\varsigma}{}_{1_\varsigma1_\varsigma2_\varsigma},J^{2'_\varsigma}{}_{1_\varsigma1_\varsigma2_\varsigma},J^{1'_\varsigma}{}_{2_\varsigma1_\varsigma2_\varsigma},J^{2'_\varsigma}{}_{2_\varsigma1_\varsigma2_\varsigma},|J^{1'_\varsigma}{}_{1_\varsigma2_\varsigma2_\varsigma},J^{2'_\varsigma}{}_{1_\varsigma2_\varsigma2_\varsigma},J^{1'_\varsigma}{}_{2_\varsigma2_\varsigma2_\varsigma},J^{2'_\varsigma}{}_{2_\varsigma2_\varsigma2_\varsigma},]^T$

定义4.7.3. $\tilde{\mathcal{J}}(2,\varsigma)\equiv[J_{xx_\varsigma},J_{yx_\varsigma},J_{zx_\varsigma},J_{\pi x_\varsigma},|J_{xy_\varsigma},J_{yy_\varsigma},J_{zy_\varsigma},J_{\pi y_\varsigma}]^T$

定义4.7.4.
$\tilde{J}(2,\varsigma):=[(J^{1'_\varsigma}{}_{1_\varsigma1_\varsigma1_\varsigma},J^{2'_\varsigma}{}_{1_\varsigma1_\varsigma1_\varsigma}),\sqrt{C_3^1}(J^{1'_\varsigma}{}_{1_\varsigma1_\varsigma2_\varsigma},J^{2'_\varsigma}{}_{1_\varsigma1_\varsigma2_\varsigma}),\sqrt{C_3^2}(J^{1'_\varsigma}{}_{1_\varsigma2_\varsigma2_\varsigma},J^{2'_\varsigma}{}_{1_\varsigma2_\varsigma2_\varsigma}),(J^{1'_\varsigma}{}_{2_\varsigma2_\varsigma2_\varsigma},J^{2'_\varsigma}{}_{2_\varsigma2_\varsigma2_\varsigma})]^T$

定义4.7.5.
$\bar{J}(2,\varsigma):=[(J^{1'_\varsigma}{}_{1_\varsigma1_\varsigma1_\varsigma},J^{2'_\varsigma}{}_{1_\varsigma1_\varsigma1_\varsigma}),(J^{1'_\varsigma}{}_{1_\varsigma1_\varsigma2_\varsigma},J^{2'_\varsigma}{}_{1_\varsigma1_\varsigma2_\varsigma}),(J^{1'_\varsigma}{}_{1_\varsigma2_\varsigma2_\varsigma},J^{2'_\varsigma}{}_{1_\varsigma2_\varsigma2_\varsigma}),(J^{1'_\varsigma}{}_{2_\varsigma2_\varsigma2_\varsigma},J^{2'_\varsigma}{}_{2_\varsigma2_\varsigma2_\varsigma})]^T$

推论4.7.1.
$$\begin{cases}J_{a\beta_\varsigma}=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^2\varsigma(\varepsilon\sigma,-i\varsigma\varepsilon)_{aA'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}[\Leftrightarrow]\hat{\mathcal{J}}(2)=S_{em}(\varsigma)\otimes S_{em}(\pm\varsigma)\hat{J}(2,\varsigma)\\ \quad[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]\\ J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^2\varsigma(\sigma\varepsilon,-i\varsigma\varepsilon)^{aA'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}J_{a\beta_\varsigma}[\Leftrightarrow]\hat{J}(2,\varsigma)=S^+_{em}(\varsigma)\otimes S^+_{em}(\pm\varsigma)\hat{\mathcal{J}}(2)\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

推论4.7.2.
$$\begin{cases}J^{a\beta_\varsigma}=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^2\varsigma(\sigma\varepsilon,-i\varsigma\varepsilon)^{aA'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}[\Leftrightarrow]\hat{\mathcal{J}}(2)=S^*_{em}(\varsigma)\otimes S^*_{em}(\pm\varsigma)\hat{J}^*(2,-\varsigma)\\ \quad[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]\\ J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^2\varsigma(\varepsilon\sigma,-i\varsigma\varepsilon)_{aA'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}J^{a\beta_\varsigma}[\Leftrightarrow]\hat{J}^*(2,-\varsigma)=S^T_{em}(\varsigma)\otimes S^T_{em}(\pm\varsigma)\hat{\mathcal{J}}(2)\end{cases}$$

4.8 表象变换间关系

推论4.8.1. $\hat{\Psi}(2,\varsigma)=S_{em}(\pm\varsigma)\otimes S_{em}(\pm\varsigma)\hat{\psi}(2,\varsigma)[\Leftrightarrow]\tilde{\Psi}(2,\varsigma)=S_{em}(\pm\varsigma)\otimes S_{em}(\frac{1}{2})\bar{\psi}(2,\varsigma)[\Leftrightarrow]\Psi(2,\varsigma)=S_m(2)\overline{\psi}(2,\varsigma)$

推论4.8.2. $\hat{\mathcal{J}}(2)=S_{em}(\varsigma)\otimes S_{em}(\pm\varsigma)\hat{J}(2,\varsigma)[\Leftrightarrow]\tilde{\mathcal{J}}(2)=S_{em}(\varsigma)\otimes S_{em}(\frac{1}{2})\bar{J}(2,\varsigma)$

推论4.8.3. $S_{em}(\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i & i\\ 1 & 1\end{bmatrix},S^{+}_{em}(\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i & 1\\ -i & 1\end{bmatrix}$

4.9 纯虚相似变换

定义4.9.1. $\Psi(2,\varsigma)\equiv[\psi_{x_\varsigma x_\varsigma},\psi_{y_\varsigma x_\varsigma},\psi_{z_\varsigma x_\varsigma},\psi_{y_\varsigma y_\varsigma},\psi_{z_\varsigma y_\varsigma}]^T$

推论4.9.1. $\Psi(2,\varsigma)=S_m(2)\overline{\psi}(2,\varsigma)$

$$S_m(2)=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2 & 0 & -1\\ -i & 0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 2i & 0 & 2i & 0\end{bmatrix},S^{-}_m(2)=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 2i & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -i\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -i\\ -1 & -2i & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{6.1a}$$

$$G_m=S_m(2)\tau(2)S^{-}_m(2) \qquad S_m(2)S^{-}_m(2)=S^{-}_m(2)S_m(2)=I \tag{6.1b}$$

$$G_m=\{\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2i\\ i & 0 & 0 & 2i & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0 & 2i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\\ -2i & 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -i & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -2i & 0 & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\\ 0 & 2i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & 0 & 0\end{bmatrix}\} \tag{6.1c}$$

推论4.9.2. $\begin{cases}[G_m,-2i\varsigma]^a\partial_a\Psi=0\\ \partial_x\Psi_1+\partial_y\Psi_2+\partial_z\Psi_3=0\\ \partial_x\Psi_2+\partial_y\Psi_4+\partial_z\Psi_5=0\\ \partial_x\Psi_3+\partial_y\Psi_5-\partial_z(\Psi_1+\Psi_4)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}[G_m,-2i\varsigma]^a\partial_a\Psi=0\\ \nabla\cdot\vec{\psi}^{\beta_\varsigma}=0\end{cases}$

4.10 纯虚表象变换

推论4.10.1. $\Psi_{im}(2,\varsigma)\equiv-\sqrt{2}[\psi^{y_\varsigma x_\varsigma},-\frac{1}{2}(\psi^{x_\varsigma x_\varsigma}-\psi^{y_\varsigma y_\varsigma}),\psi^{z_\varsigma y_\varsigma},\varsigma\psi^{z_\varsigma x_\varsigma},\frac{\sqrt{3}}{2}(\psi^{x_\varsigma x_\varsigma}+\psi^{y_\varsigma y_\varsigma})]^T$

推论4.10.2. $\Psi_{im}(2,\varsigma)=S_{im}(2,\varsigma)\psi(2,\varsigma)$

$$S_{im}(2,\varsigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i & 0 & 0 & 0 & -i\\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -i & 0 & -i & 0\\ 0 & -\varsigma & 0 & \varsigma & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0\end{bmatrix},S^{+}_{im}(2,\varsigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & -\varsigma & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\\ 0 & 0 & i & \varsigma & 0\\ i & -1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{6.2}$$

$$G_{im}(\varsigma)=S_{im}(2,\varsigma)\sigma(2)S^{+}_{im}(2,\varsigma) \qquad S_{im}(2,\varsigma)S^{+}_{im}(2,\varsigma)=S^{+}_{im}(2,\varsigma)S_{im}(2,\varsigma)=I \tag{6.3}$$

$$G_{im}(\varsigma)=\{\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -i\varsigma & 0\\ 0 & 0 & -i & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 0 & i\sqrt{3}\\ i\varsigma & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0 & i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -i\varsigma & 0\\ -i & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & i\varsigma & 0 & 0 & -i\varsigma\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 0 & i\varsigma\sqrt{3} & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -2i & 0 & 0 & 0\\ 2i & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\varsigma & 0\\ 0 & 0 & -i\varsigma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\} \tag{6.4}$$

$$G_{im}(+)=\{\begin{bmatrix}0&0&0&-i&0\\0&0&-i&0&0\\0&i&0&0&i\sqrt{3}\\i&0&0&0&0\\0&0&-i\sqrt{3}&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&i&0&0\\0&0&0&-i&0\\-i&0&0&0&0\\0&i&0&0&-i\sqrt{3}\\0&0&0&i\sqrt{3}&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-2i&0&0&0\\2i&0&0&0&0\\0&0&0&i&0\\0&0&-i&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\} \tag{6.5}$$

推论4.10.3.

$$\begin{cases}\varsigma\partial_\pi\Psi_1=\frac{1}{2}\partial_y\Psi_3-\partial_z\Psi_2-\frac{1}{2}\partial_x\Psi_4\\ \varsigma\partial_\pi\Psi_2=\partial_z\Psi_1-\frac{1}{2}\partial_x\Psi_3-\frac{1}{2}\partial_y\Psi_4\\ \varsigma\partial_\pi\Psi_3=-\frac{1}{2}\partial_y\Psi_1+\frac{1}{2}\partial_z\Psi_4+\partial_x(\frac{1}{2}\Psi_2+\frac{\sqrt{3}}{2}\Psi_5)\\ \varsigma\partial_\pi\Psi_4=\frac{1}{2}\partial_x\Psi_1-\frac{1}{2}\partial_z\Psi_3+\partial_y(\frac{1}{2}\Psi_2-\frac{\sqrt{3}}{2}\Psi_5)\\ \varsigma\partial_\pi\Psi_5=-\frac{\sqrt{3}}{2}\partial_x\Psi_3+\frac{\sqrt{3}}{2}\partial_y\Psi_4\end{cases}\Leftrightarrow[G_{im}(+),-2i\varsigma]^a\partial_a\Psi=0$$

$$\begin{cases}\partial_x(-\Psi_3+\frac{1}{\sqrt{3}}\Psi_5)+\partial_y\Psi_1+\partial_z\Psi_4=0\\ \partial_x\Psi_1+\partial_y(\Psi_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\Psi_5)+\partial_z\Psi_3=0\\ \partial_x\Psi_4+\partial_y\Psi_3-\frac{2}{\sqrt{3}}\partial_z\Psi_5=0\end{cases}\Leftrightarrow\nabla\cdot\vec{\psi}^{\beta_\varsigma}=0$$

5 s-自旋粒子各种场量的关系

5.1 场旋量$\hat{\psi}(s,\varsigma;w),\tilde{\psi}(s,\varsigma;w),\psi(s,\varsigma;w)$之间的恒等表象变换关系

推论5.1.1.

$$\begin{cases}\hat{\psi}(s,\varsigma;w)\equiv\Gamma(s;w)\psi(s,\varsigma;w)\\ \psi(s,\varsigma;w)\equiv\bar{\Gamma}(s;w)\hat{\psi}(s,\varsigma;w)\end{cases}\quad\begin{cases}\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)\equiv N(s;w)\psi(s,\varsigma;w)\\ \psi(s,\varsigma;w)\equiv\bar{N}(s;w)\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)\end{cases}$$

推论5.1.2.

$$\begin{cases}\hat{\psi}(s,\varsigma;w)\equiv\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\hat{\psi}(s,\varsigma;w)\\ \psi(s,\varsigma;w)\equiv\bar{\Gamma}(s;w)\Gamma(s;w)\psi(s,\varsigma;w)\end{cases}\quad\begin{cases}\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)\equiv N(s;w)\bar{N}(s;w)\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)\\ \psi(s,\varsigma;w)\equiv\bar{N}(s;w)N(s;w)\psi(s,\varsigma;w)\end{cases}$$

推论5.1.3.

$$\begin{cases}\hat{\psi}(s,\varsigma;w)\equiv[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)\\ \tilde{\psi}(s,\varsigma;w)\equiv[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\hat{\psi}(s,\varsigma;w)\end{cases}$$

推论5.1.4.

$$\begin{cases}\hat{\psi}(s,\varsigma;w)\equiv[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\hat{\psi}(s,\varsigma;w)\\ \tilde{\psi}(s,\varsigma;w)\equiv[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)\end{cases}$$

5.2 源旋量$\hat{J}(s,\varsigma;w),\tilde{J}(s,\varsigma;w)$之间的恒等表象变换关系

推论5.2.1.

$$\begin{cases}\hat{J}(s,\varsigma;w)\equiv[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]\tilde{J}(s,\varsigma;w)\\ \tilde{J}(s,\varsigma;w)\equiv[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\hat{J}(s,\varsigma;w)\end{cases}\begin{cases}\hat{J}(s,\varsigma;w)\equiv[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\hat{J}(s,\varsigma;w)\\ \tilde{J}(s,\varsigma;w)\equiv[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]\tilde{J}(s,\varsigma;w)\end{cases}$$

5.3 s-自旋粒子各种场量之间的变换关系

定理5.3.1. $\psi(s,\varsigma)\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}\Leftrightarrow\hat{\psi}(s,\varsigma)\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\bar{\Omega}(s)}\Leftrightarrow\tilde{\psi}(s,\varsigma)\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2})]}$

证明: $\psi'(s,\varsigma;w)$
$=\bar{\Gamma}(s;w)\hat{\psi}'(s,\varsigma;w)$
$=\bar{\Gamma}(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;w)}\hat{\psi}(s,\varsigma;w)$

$= \bar{\Gamma}(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;w)}\Gamma(s;w)\psi(s,\varsigma;w)$
$= e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s;w)}\psi(s,\varsigma;w)$
$= e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\psi(s,\varsigma;w)$ □

证明： $\tilde{\psi}'(s,\varsigma;w)$
$= [I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\hat{\psi}'(s,\varsigma;w)$
$= [I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;w)}\hat{\psi}(s,\varsigma;w)$
$= [I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;w)}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)$
$= e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega_{ab}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]}\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)$
$= e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}\otimes I_{4^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(\varsigma;s-\frac{1}{2})]}\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)$ □

证明： $\psi'(s,\varsigma;w) = \bar{N}(s;w)\tilde{\psi}'(s,\varsigma;w)$
$= \bar{N}(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}\otimes I_{4^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(\varsigma;s-\frac{1}{2})]}\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)$ □

证明： $\bar{N}(s;w)[S_{ab}\otimes I_{4^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(\varsigma;s-\frac{1}{2})]N(s;w) = S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\bar{N}(s;w)[S_{ab}\otimes I_{4^{2s-1}}]N(s;w) = \frac{1}{2s}S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\bar{N}(s;w)[I_{w+1}\otimes S_{ab}(e,\varsigma;s-\frac{1}{2})]N(s;w) = (1-\frac{1}{2s})S_{ab}(s,\varsigma;w)$ □

5.4 同步表象变换

推论5.4.1. $\sigma' = S\sigma S^{+} = c^k\sigma_k$
$\Leftrightarrow \sigma'(s;w) = [\bar{\Gamma}(s;w)(S\otimes S\otimes\cdot\cdot\otimes S)\Gamma(s;w)]\sigma(s;w)[\bar{\Gamma}(s;w)(S\otimes S\otimes\cdot\cdot\otimes S)\Gamma(s;w)]^{+} = c^k\sigma_k(s;w)$

证明： $\sigma' = S\sigma S^{+} \Leftrightarrow \sigma'(s;w) = c^k\sigma_k(s;w) = c^k\sigma_k$
$\Leftrightarrow (S\otimes S\otimes\cdot\cdot\otimes S)\Omega(s;w)(S^{+}\otimes S^{+}\otimes\cdot\cdot\otimes S^{+})\Gamma(s;w) = \Gamma(s;w)\sigma'(s;w)$
$\Leftrightarrow (S\otimes S\otimes\cdot\cdot\otimes S)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)(S^{+}\otimes S^{+}\otimes\cdot\cdot\otimes S^{+})\Gamma(s;w) = \Gamma(s;w)\sigma'(s;w)$
$\Leftrightarrow \sigma'(s;w) = \bar{\Gamma}(s;w)(S\otimes S\otimes\cdot\cdot\otimes S)\Gamma(s;w)\sigma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)(S^{+}\otimes S^{+}\otimes\cdot\cdot\otimes S^{+})\Gamma(s;w)$
$\Leftrightarrow \sigma'(s;w) = [\bar{\Gamma}(s;w)(S\otimes S\otimes\cdot\cdot\otimes S)\Gamma(s;w)]\sigma(s;w)[\bar{\Gamma}(s;w)(S\otimes S\otimes\cdot\cdot\otimes S)\Gamma(s;w)]^{+}$
$\Leftrightarrow \sigma' = S\sigma S^{+} = c^k\sigma_k \Leftrightarrow \sigma'(s;w) = S'\sigma(s;w)S'^{+} = c^k\sigma_k(s;w), S' = [\bar{\Gamma}(s;w)(S\otimes S\otimes\cdot\cdot\otimes S)\Gamma(s;w)]$ □

6 常用矩阵汇总

6.1 自旋矩阵的一个非厄密表象

从全对称二分量魏尔 [6]自旋张量的洛伦兹变换性质出发，可以得到一个特殊表象的自旋矩阵。

$$\tau(s)=(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&2s&0&0&0\\1&0&2s-1&0&0\\0&2&0&\cdot\cdot&0\\0&0&\cdot\cdot&0&1\\0&0&0&2s&0\end{bmatrix},\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0&-2s&0&0&0\\1&0&-(2s-1)&0&0\\0&2&0&\cdot\cdot&0\\0&0&\cdot\cdot&0&-1\\0&0&0&2s&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}s&0&0&0&0\\0&s-1&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&-(s-1)&0\\0&0&0&0&-s\end{bmatrix}) \tag{6.6a}$$

$$\sigma(s) = \mathbb{S}(s)\tau(s)\mathbb{S}^{-1}(s), [\tau_{\alpha_\varsigma}(s),\tau_{\beta_\varsigma}(s)] = i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\tau_{\gamma_\varsigma}(s), s=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\cdot\cdot \tag{6.6b}$$

$$\tau^2(s) = s(s+1) \tag{6.6c}$$

$$\tau_{\alpha_\varsigma}(s) \prec \tau_{\alpha_\varsigma}{}^{A_\varsigma}{}_{B_\varsigma}(s), \alpha_\varsigma \sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}, {}^{A_\varsigma} \sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\tau(s)}, {}_{B_\varsigma} \sim e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\tau^T(s)} \tag{6.6d}$$

与此自旋矩阵相对应的度规张量：$\epsilon(s)\bar{\epsilon}(s)=\bar{\epsilon}(s)\epsilon(s)=I$

$$\epsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}(s)\succ\epsilon(s)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&(-1)^0C_n^0\\0&0&0&(-1)^1C_n^1&0\\0&0&(-1)^2C_n^2&0&0\\0&\cdot\cdot&0&0&0\\(-1)^nC_n^n&0&0&0&0\end{bmatrix},C_n^{-k}\equiv(C_n^k)^{-1}\tag{6.7a}$$

$$\bar{\epsilon}^{A_\varsigma B_\varsigma}(s)\succ\bar{\epsilon}(s)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&(-1)^nC_n^{-0}\\0&0&0&(-1)^{n-1}C_n^{-1}&0\\0&0&(-1)^{n-2}C_n^{-2}&0&0\\0&\cdot\cdot&0&0&0\\(-1)^0C_n^{-n}&0&0&0&0\end{bmatrix}\tag{6.7b}$$

$$\epsilon(s)=\mathbb{S}^T(s)\varepsilon(s)\mathbb{S}(s),\bar{\epsilon}(s)=\mathbb{S}^{-T}(s)\bar{\varepsilon}(s)\mathbb{S}^{-1}(s),\bar{\epsilon}(s)=(-1)^{2s}\mathbb{S}^{2T}(s)\epsilon(s)\mathbb{S}^2(s)\tag{6.7c}$$

$$\mathbb{S}(s)=\begin{bmatrix}\sqrt{C_{2s}^0}&0&0&0&0\\0&\sqrt{C_{2s}^1}&0&0&0\\0&0&\sqrt{C_{2s}^2}&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0\\0&0&0&0&\sqrt{C_{2s}^{2s}}\end{bmatrix},\mathbb{S}^{-1}(s)=\begin{bmatrix}\sqrt{C_{2s}^{-0}}&0&0&0&0\\0&\sqrt{C_{2s}^{-1}}&0&0&0\\0&0&\sqrt{C_{2s}^{-2}}&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0\\0&0&0&0&\sqrt{C_{2s}^{-2s}}\end{bmatrix}\tag{6.7d}$$

6.2 σ轮换表象变换矩阵

推论6.2.1.
$S_c(\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i&1\\i&-1\end{bmatrix},S_c^+(\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i&-i\\1&-1\end{bmatrix},S_c(\frac{1}{2})S_c^+(\frac{1}{2})=S_c^+(\frac{1}{2})S_c(\frac{1}{2})=I,S_c(\frac{1}{2})=ke^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y(\frac{1}{2})}e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_z(\frac{1}{2})}$

推论6.2.2. $S_c(\frac{1}{2})=e^{i\varphi}e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_y(\frac{1}{2})}e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_z(\frac{1}{2})},S_c(\frac{1}{2})=e^{-i\varphi}e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_z(\frac{1}{2})}e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_y(\frac{1}{2})}$

推论6.2.3. $S_c(\frac{1}{2})(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)S_c^+(\frac{1}{2})=(\sigma_y,\sigma_z,\sigma_x),S_c^+(\frac{1}{2})(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)S_c(\frac{1}{2})=(\sigma_z,\sigma_x,\sigma_y)$

推论6.2.4. $S_{em}(\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i&i\\1&1\end{bmatrix},S_{em}^+(\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i&1\\-i&1\end{bmatrix},S_{em}(\frac{1}{2})S_{em}^+(\frac{1}{2})=S_{em}^+(\frac{1}{2})S_{em}(\frac{1}{2})=I$

推论6.2.5. $S_{em}(\frac{1}{2})(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)S_{em}^+(\frac{1}{2})=(-\sigma_z,-\sigma_x,\sigma_y)$

推论6.2.6. $S_{xy}(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)S_{xy}^+=(-\sigma_y,\sigma_x,\sigma_z),S_{xy}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-i\end{bmatrix},S_{xy}^+=\begin{bmatrix}1&0\\0&i\end{bmatrix}$

6.3 $\sigma(s)$轮换表象变换矩阵

推论6.3.1. $\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)=[e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma}e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}\sigma^{\beta_\varsigma}(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}$,即$\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)$是常数不变张量。

[⇓]

推论6.3.2. $S_c(s)=e^{i\varphi}e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_y(s)}e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_z(s)},S_c^+(s)=e^{-i\varphi}e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_z(s)}e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_y(s)}$

推论6.3.3. $S_c^+(s)[\sigma_x(s),\sigma_y(s),\sigma_z(s)]S_c(s)=[\sigma_z(s),\sigma_x(s),\sigma_y(s)]$

推论6.3.4. $S_c(s)[\sigma_z(s),\sigma_x(s),\sigma_y(s)]S_c^+(s)=[\sigma_x(s),\sigma_y(s),\sigma_z(s)]$

推论6.3.5. $[\sigma_x(s),\sigma_y(s),\sigma_z(s)]\simeq[\hat{e}_x,\hat{e}_y,\hat{e}_z]$

6.4 电磁纯虚表象变换矩阵和交换矩阵

推论6.4.1. $S_{em}(\varsigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i&0&0&-i\\-1&0&0&-1\\0&-i&-i&0\\0&-\varsigma&\varsigma&0\end{bmatrix},S_{em}^+(\varsigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i&-1&0&0\\0&0&i&-\varsigma\\0&0&i&\varsigma\\i&-1&0&0\end{bmatrix},S_{em}(\varsigma)S_{em}^+(\varsigma)=S_{em}^+(\varsigma)S_{em}(\varsigma)=I_4$

推论6.4.2. $S_{em}(\varsigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i&0&0&-i\\-1&0&0&-1\\0&-i&-i&0\\0&-\varsigma&\varsigma&0\end{bmatrix},S_{em}^T(\varsigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i&-1&0&0\\0&0&-i&-\varsigma\\0&0&-i&\varsigma\\-i&-1&0&0\end{bmatrix},S_{em}^T(\varsigma)S_{em}(\varsigma)=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=-\sigma_y\otimes\sigma_y$

推论6.4.3. $S_m(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i&0&-i\\-1&0&-1\\0&-i\sqrt{2}&0\end{bmatrix},S_m^+(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i&-1&0\\0&0&i\sqrt{2}\\i&-1&0\end{bmatrix},S_m(1)S_m^+(1)=S_m^+(1)S_m(1)=I_3$

推论6.4.4. $S_{ex}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},S_{ex}^2=I,S_{em}(\varsigma)S_{ex}=S_{em}(-\varsigma),S_{ex}S_{em}^+(\varsigma)=S_{em}^+(-\varsigma)$

推论6.4.5. $(\sigma\otimes I)=S_{ex}(I\otimes\sigma)S_{ex},(I\otimes\sigma)=S_{ex}(\sigma\otimes I)S_{ex}$

推论6.4.6. $\sigma_{-\varsigma}=S_{em}(\varsigma)(\sigma\otimes I)S_{em}^+(\varsigma),\sigma_{+\varsigma}=S_{em}(\varsigma)(I\otimes\sigma)S_{em}^+(\varsigma),\gamma=S_m(1)\sigma(1)S_m^-(1)$

6.5 引力纯虚表象变换

定义6.5.1. $\Psi_{im}(2,\varsigma) := S_{im}(2,\varsigma)\psi(2,\varsigma)$

推论6.5.1. $\Psi_{im}(2,\varsigma) = -\sqrt{2}[\psi^{y_\varsigma x_\varsigma}, -\frac{1}{2}(\psi^{x_\varsigma x_\varsigma} - \psi^{y_\varsigma y_\varsigma}), \psi^{z_\varsigma y_\varsigma}, \varsigma\psi^{z_\varsigma x_\varsigma}, \frac{\sqrt{3}}{2}(\psi^{x_\varsigma x_\varsigma} + \psi^{y_\varsigma y_\varsigma})]^T$

$$S_{im}(2,\varsigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 & -i \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -i & 0 & -i & 0 \\ 0 & -\varsigma & 0 & \varsigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, S_{im}^{+}(2,\varsigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -\varsigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & i & \varsigma & 0 \\ i & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

$$G_{im}(\varsigma) = S_{im}(2,\varsigma)\sigma(2)S_{im}^{+}(2,\varsigma) \qquad S_{im}(2,\varsigma)S_{im}^{+}(2,\varsigma) = S_{im}^{+}(2,\varsigma)S_{im}(2,\varsigma) = I \tag{6.9}$$

$$G_{im}(\varsigma) = \{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\varsigma & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & i\sqrt{3} \\ i\varsigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\varsigma & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\varsigma & 0 & 0 & -i\varsigma\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & i\varsigma\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2i & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\varsigma & 0 \\ 0 & 0 & -i\varsigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\} \tag{6.10}$$

6.6 引力纯虚相似变换矩阵

定义6.6.1. $\Psi(2,\varsigma) \equiv [\psi_{x_\varsigma x_\varsigma}, \psi_{y_\varsigma x_\varsigma}, \psi_{z_\varsigma x_\varsigma}, \psi_{y_\varsigma y_\varsigma}, \psi_{z_\varsigma y_\varsigma}]^T$

推论6.6.1. $\Psi(2,\varsigma) = S_m(2)\overline{\psi}(2,\varsigma)$

$$S_m(2) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & 0 & 2i & 0 \end{bmatrix}, S_m^{-}(2) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -i \\ -1 & -2i & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.11a}$$

$$G_m = S_m(2)\tau(2)S_m^{-}(2) \qquad S_m(2)S_m^{-}(2) = S_m^{-}(2)S_m(2) = I \tag{6.11b}$$

$$G_m = \{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2i \\ i & 0 & 0 & 2i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ -2i & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}\} \tag{6.11c}$$

6.7 全对称旋量条件矩阵

$$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 2s-1\text{个}\tau, \tau = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \tau^n = \tau, T^n(s) = T(s) \tag{6.12a}$$

全对称旋量条件 : $\tilde{\psi} = T(s)\tilde{\psi}$(类似于马约拉纳条件 [5]和魏尔条件 [6]) (6.12b)

第七章　电磁场方程的重新表述

自我评述：本章提出了电磁场方程的多种等价表述形式，并严格证明了它们之间的等价性。

1 应用常数张量定义电磁场 [8]的各种旋量

1.1 电磁场强的经典描述

$$\text{电磁张量:}F_{ab}=\begin{bmatrix}0 & B_z & -B_y & -iE_x\\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y\\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z\\ iE_x & iE_y & iE_z & 0\end{bmatrix},\text{对偶张量:}*F_{ab}=\begin{bmatrix}0 & -iE_z & iE_y & B_x\\ iE_z & 0 & -iE_x & B_y\\ -iE_y & iE_x & 0 & B_z\\ -B_x & -B_y & -B_z & 0\end{bmatrix} \tag{7.1}$$

1.2 电磁场强的复矢量描述

第一种定义，本章采用第一种定义。

定义1.2.1. 电磁场复矢量第一种定义$\psi_{\alpha_\varsigma}:=\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}=i\varsigma(E-i\varsigma B)_{\alpha_\varsigma}=(i\varsigma E+B)_{\alpha_\varsigma}$

第二种定义，后面电磁场单独量子化的章节采用第二种定义。

定义1.2.2. 电磁场复矢量第二种定义$\Psi_{\alpha_\varsigma}:=\frac{\varsigma}{2\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}(E-i\varsigma B)_{\alpha_\varsigma}$

第三种定义，后面**B-G**量子化的章节采用第三种定义。

定义1.2.3. 电磁场复矢量第三种定义$\psi_{\alpha_\varsigma}:=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}=-\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}(E-i\varsigma B)_{\alpha_\varsigma}$

以后有时间全部统一成第二种定义，后面量子化通用**Penrose**和**B-G**对易规则是采用第三种定义的。

1.3 电磁场强的基本性质

推论1.3.1. $\frac{1}{2}(F_{ab}-\varsigma*F_{ab})=\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma}$

证明: $F_{ab}=-F_{ba}$

$\Leftrightarrow F_{ab}=\frac{1}{2}S_{abcd}F^{cd},*F_{ab}:=\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}F^{cd}$

$\Leftrightarrow F_{ab}-\varsigma*F_{ab}=\frac{1}{2}(S_{abcd}-\varsigma\varepsilon_{abcd})F^{cd}$

$\Leftrightarrow F_{ab}-\varsigma*F_{ab}=-\frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}F^{cd}$

$\Leftrightarrow F_{ab}-\varsigma*F_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(F_{ab}-\varsigma*F_{ab})=\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma}$ □

推论1.3.2. $\psi_{\alpha_\varsigma}=\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\frac{1}{2}(F_{ab}-\varsigma*F_{ab})$

推论1.3.3. $\psi_{\alpha_\varsigma}=-\frac{i}{2}\varsigma\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}*F_{ab}$

推论1.3.4. $\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}(F_{ab}+\varsigma*F_{ab})=0$

推论1.3.5. $F_{ab}-\varsigma*F_{ab}=-\frac{1}{4}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}(F_{cd}-\varsigma*F_{cd})$

推论1.3.6. $F_{ab}=\frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi_{\alpha'}+\sigma^{\alpha}_{+ab}\psi_\alpha),*F_{ab}=\frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi_{\alpha'}-\sigma^{\alpha}_{+ab}\psi_\alpha)$

证明: $F_{ab}-\varsigma*F_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma}$

$\Leftrightarrow F_{ab}-*F_{ab}=i\sigma^{\alpha}_{+ab}\psi_\alpha,F_{ab}+*F_{ab}=i\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi_{\alpha'}$

$\Leftrightarrow F_{ab}=\frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi_{\alpha'}+\sigma^{\alpha}_{+ab}\psi_\alpha),*F_{ab}=\frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi_{\alpha'}-\sigma^{\alpha}_{+ab}\psi_\alpha)$

$\Leftrightarrow F_{ab}=\frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi_{\alpha'}+\sigma^{\alpha}_{+ab}\psi_\alpha)$

$\Leftrightarrow *F_{ab}=\frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi_{\alpha'}-\sigma^{\alpha}_{+ab}\psi_\alpha)$ □

推论1.3.7. $F_{ab}=-F_{ba}\Leftrightarrow F_{ab}=\frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi_{\alpha'}+\sigma^{\alpha}_{+ab}\psi_\alpha)$

1.4 电磁场强的$\frac{1}{2}$-旋量描述 [1,2]

定义1.4.1. 电磁场$\frac{1}{2}$-旋量张量: $\psi_{A_\varsigma B_\varsigma} := \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}F_{ab}$

推论1.4.1. $\psi_{A_\varsigma B_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma} \Leftrightarrow \psi_{\alpha_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}$

推论1.4.2. $\psi_{A_\varsigma B_\varsigma} = \psi_{B_\varsigma A_\varsigma}$

推论1.4.3. $\psi_{A_\varsigma B_\varsigma} = \frac{-i}{\sqrt{2}}S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma} * F_{ab}$

推论1.4.4. $\frac{1}{2}(F_{ab} - \varsigma * F_{ab}) = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma} \Leftrightarrow \psi_{A_\varsigma B_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{1}{2}(F_{ab} - \varsigma * F_{ab})$

推论1.4.5. $F_{ab} - \varsigma * F_{ab} = -\frac{1}{2}S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}S^{cd}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}(F_{cd} - \varsigma * F_{cd})$

推论1.4.6. $F_{ab} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(S_{ab}{}^{A'B'}\psi_{A'B'} + S_{ab}{}^{AB}\psi_{AB}), *F_{ab} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(S_{ab}{}^{A'B'}\psi_{A'B'} - S_{ab}{}^{AB}\psi_{AB})$

推论1.4.7. $F_{ab} = -F_{ba} \Leftrightarrow F_{ab} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(S_{ab}{}^{A'B'}\psi_{A'B'} + S_{ab}{}^{AB}\psi_{AB})$

结合推论1.3.6和(1.259), (1.260) 式可得**Penrose**对应记法：

推论1.4.8. $F_{ab} \overset{P}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{A'B'}\varepsilon_{AB} + \psi_{AB}\varepsilon_{A'B'}), *F_{ab} \overset{P}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{A'B'}\varepsilon_{AB} - \psi_{AB}\varepsilon_{A'B'})$

1.5 电磁场强的1-旋量描述

定义1.5.1. 电磁场1-旋量$\psi_{k_\varsigma}(1) := \Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi_{A_\varsigma B_\varsigma} = \Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi_{\alpha_\varsigma}, \psi^{k_\varsigma}(1) := \Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi^{A_\varsigma B_\varsigma} = \Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\psi^{\alpha_\varsigma}$

推论1.5.1. $\psi_{A_\varsigma B_\varsigma} = \Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi_{k_\varsigma}(1), \psi_{\alpha_\varsigma} = \Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\psi_{k_\varsigma}(1)$

推论1.5.2. $\psi^{A_\varsigma B_\varsigma} = \Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi^{k_\varsigma}(1), \psi^{\alpha_\varsigma} = \Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi^{k_\varsigma}(1)$

从推论1.231可得：$[\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)]^* \simeq \Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)$

推论1.5.3. $\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1) \simeq \Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1) \succ \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\} = \{\frac{1}{2}(\sigma_z + I), \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x, \frac{1}{2}(-\sigma_z + I)\}$

结合上式与(1.231)式可得：

推论1.5.4. $\Gamma^{k_\varsigma}{}_{\alpha_\varsigma}(1) \succ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2} \\ -i & -1 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}(1) \succ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & 0 & i \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

1.6 电磁场源的$\frac{1}{2}$-旋量描述 [1,2]

定义1.6.1. 电磁场源$\frac{1}{2}$-旋量张量$J_{A_\varsigma A'_\varsigma} := \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma, i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}J_a, J^{A'_\varsigma A_\varsigma} := \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma, -i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}J^a$

Penrose记法：$J_a \overset{P}{=} J_{AA'}, J^a \overset{P}{=} J^{A'A}$

2 电磁场方程的多种等价表述形式

2.1 电磁场规范理论的标准描述

$$F_{uv} = \partial_u A_v - \partial_v A_u \tag{7.2}$$

规范变换：

$$\begin{cases} \psi \to U(\theta)\psi, U(\theta) = e^{ig\theta}, \psi\text{带电荷g} \\ A_u \to U(\theta)A_u U^{-1}(\theta) + \frac{i}{g}[\partial_u U(\theta)]U^{-1}(\theta) = A_u - \partial_u\theta \end{cases} \tag{7.3}$$

推论2.1.1. $D_u\psi \to UD_u\psi, D_u = \partial_u + igA_u$

证明：$D_u\psi = (\partial_u + igA_u)\psi \to [\partial_u + UigA_uU^{-1} - (\partial_u U)U^{-1}](U\psi)$
$\Leftrightarrow D_u\psi \to [\partial_u(U\psi) + UigA_u\psi - (\partial_u U)\psi]$
$\Leftrightarrow D_u\psi \to U(\partial_u + igA_u)\psi$
$\Leftrightarrow D_u\psi \to UD_u\psi, D_u = \partial_u + igA_u$ □

推论2.1.2. $F_{uv} \to UF_{uv}U^{-1} = F_{uv}$

推论2.1.3. $D_wF_{uv} \to UD_wF_{uv}U^{-1} = D_wF_{uv}, D_w = \partial_w + ig[A_w, \quad] = \partial_w$

2.2 电磁场方程的经典形式

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=\rho,\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0,\nabla\times\vec{B}=\vec{J}+\partial_t\vec{E}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^a F_{ab}=-J_b,\partial^a*F_{ab}\equiv 0\\ F_{ab}=\partial_a A_b-\partial_b A_a\end{cases}\quad(7.4)$$

2.3 电磁场方程的复矢量表述形式

复矢量张量形式：

定理2.3.1. $\partial^a F_{ab}=-J_b\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}\partial_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma}=iJ_b;F_{ab}=\partial_a A_b-\partial_b A_a,\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma}=\begin{bmatrix}\psi^{\alpha_\varsigma}=\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}F^{ab}\\0\end{bmatrix}$

证明：$\partial^a F_{ab}=-J_b$

$\Leftrightarrow\partial^a F_{ab}=-J_b,\partial^a*F_{ab}\equiv 0$

$\Leftrightarrow\partial^a(F_{ab}-\varsigma*F_{ab})=-J_b$

$\Leftrightarrow\partial^a(i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma})=-J^b,\alpha_\varsigma=1,2,3$

$\Leftrightarrow\partial^a[(\sigma_\varsigma,-i\varsigma)^{\alpha_\varsigma}|_{ab}\tilde{\Psi}_{\alpha_\varsigma}]=iJ_b,\alpha_\varsigma=1,2,3,4$

$\Leftrightarrow\partial^a[(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a|_b{}^{\alpha_\varsigma}\tilde{\Psi}_{\alpha_\varsigma}]=iJ_b,\alpha_\varsigma=1,2,3,4$

$\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a|_b{}^{\alpha_\varsigma}\partial^a\tilde{\Psi}_{\alpha_\varsigma}=iJ_b,\alpha_\varsigma=1,2,3,4$

$\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}\partial_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma}=iJ_b,\alpha_\varsigma=1,2,3,4$ □

复矢量矩阵形式：

推论2.3.1. $(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}\partial_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma}=iJ_b\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\Psi}(1,\varsigma)=iJ$

表象变换：

推论2.3.2. $(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\Psi}(1,\varsigma)=iJ\Leftrightarrow(\sigma\otimes I,-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\psi}(1,\varsigma)=i\tilde{J}(1,\varsigma)$

2.4 电磁场方程的$\frac{1}{2}$-旋量表述形式

$\frac{1}{2}$-旋量Penrose抽象指标形式 [1,2]：

定理2.4.1. $(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}\partial_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma}=iJ_b\Leftrightarrow\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma},\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a$

证明：$(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}\partial_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma}=iJ_b$

$\Leftrightarrow\partial^a(i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma})=-J_b$

$\Leftrightarrow\partial^a(i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\cdot\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma})=-J_b$

$\Leftrightarrow iS_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\partial^a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J_b$

$\Leftrightarrow(\frac{\varsigma}{2}\delta_{ab}\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}+iS_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma})\partial^a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J_b$

$\Leftrightarrow\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma}\partial^a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-1}{\sqrt{2}}J_b$

$\Leftrightarrow\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial^a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-1}{\sqrt{2}}J_b\cdot\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b_{B'_\varsigma B_\varsigma}$

$\Leftrightarrow\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}\varsigma\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}J_{B'_\varsigma B_\varsigma}$

$\Leftrightarrow\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma},\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a$ □

$\frac{1}{2}$-旋量张量形式：

推论2.4.1. $\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}$

$\frac{1}{2}$-旋量矩阵形式：

推论2.4.2. $(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^a\tilde{\psi}(1,\varsigma)=i\tilde{J}(1,\varsigma)$

$\frac{1}{2}$-旋量方矩阵形式：

推论2.4.3. $(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a[\psi]=i[J]$

$\frac{1}{2}$-自旋张量表述形式:(证明留待以后)

推论2.4.4. $(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}\Leftrightarrow[\partial_a+iS_{ab}(1,\varsigma)\partial^b]_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}\psi_{l_\varsigma}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_{ak_\varsigma}(1,\varsigma)$

推论2.4.5. $\begin{cases}\partial^a F_{ab}=-J_b\\ \partial^a*F_{ab}\equiv 0\end{cases}\Leftrightarrow[\partial_a+iS_{ab}(1,\varsigma)\partial^b]_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}\psi_{l_\varsigma}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_{ak_\varsigma}(1,\varsigma)$

2.5 猜测

定理2.5.1. $\partial^a*F_{ab}=0\Leftrightarrow F_{ab}=\partial_aA_b-\partial_bA_a\Leftrightarrow\partial^a*F_{ab}\equiv 0$

定理2.5.2. $\partial^aF_{ab}=-J_b,\partial^a*F_{ab}=0\Leftrightarrow\partial^aF_{ab}=-J_b,F_{ab}=\partial_aA_b-\partial_bA_a$

2.6 电磁场方程 [8]的自旋张量表述形式

电磁场的自旋张量矩阵：$S_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}\succ\begin{bmatrix}0&\gamma_z&-\gamma_y&-\varsigma\gamma_x\\-\gamma_z&0&\gamma_x&-\varsigma\gamma_y\\\gamma_y&-\gamma_x&0&-\varsigma\gamma_z\\\varsigma\gamma_x&\varsigma\gamma_y&\varsigma\gamma_z&0\end{bmatrix}$ (7.5)

定理2.6.1. $(\partial_a+iS_{ab}\partial^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma}(1,\varsigma)=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^b,S_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\Psi}(1,\varsigma)=iJ$

一种直观证法如下：

证明: $(\partial_a+iS_{ab}\partial^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma}=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^b,S_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(\partial_x+i\gamma_z\partial_y-i\gamma_y\partial_z-i\varsigma\gamma_x\partial_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma}=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma xb}J^b\\(\partial_y+i\gamma_x\partial_z-i\gamma_z\partial_x-i\varsigma\gamma_y\partial_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma}=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma yb}J^b\\(\partial_z+i\gamma_y\partial_x-i\gamma_x\partial_y-i\varsigma\gamma_z\partial_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma}=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma zb}J^b\\(\partial_\pi+i\varsigma\gamma_x\partial_x+i\varsigma\gamma_y\partial_y+i\varsigma\gamma_z\partial_z)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma}=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma\pi b}J^b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix}\partial_x&\partial_y&\partial_z\\-\partial_y&\partial_x&-\varsigma\partial_\pi\\-\partial_z&\varsigma\partial_\pi&\partial_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^{x_\varsigma}\\\psi^{y_\varsigma}\\\psi^{z_\varsigma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varsigma J^\pi\\J^z\\-J^y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\partial_y&-\partial_x&\varsigma\partial_\pi\\\partial_x&\partial_y&\partial_z\\-\varsigma\partial_\pi&-\partial_z&\partial_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^{x_\varsigma}\\\psi^{y_\varsigma}\\\psi^{z_\varsigma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-J^z\\\varsigma J^\pi\\J^x\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}\partial_z&-\varsigma\partial_\pi&-\partial_x\\\varsigma\partial_\pi&\partial_z&-\partial_y\\\partial_x&\partial_y&\partial_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^{x_\varsigma}\\\psi^{y_\varsigma}\\\psi^{z_\varsigma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J^y\\-J^x\\\varsigma J^\pi\end{bmatrix},i\partial_\pi\Psi(1,\varsigma)=\varsigma\gamma\cdot\nabla\Psi(1,\varsigma)-i\varsigma\vec{J}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}i\partial_\pi\Psi(1,\varsigma)=i\varsigma\nabla\times\Psi(1,\varsigma)-i\varsigma\vec{J}\\\nabla\cdot\Psi(1,\varsigma)=\varsigma J^\pi\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}i\partial_\pi\Psi(1,\varsigma)=\varsigma\gamma\cdot\nabla\Psi(1,\varsigma)-i\varsigma\vec{J}\\\nabla\cdot\Psi(1,\varsigma)=\varsigma J^\pi\end{cases}$$

$\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\Psi}(1,\varsigma)=iJ$ □

推论2.6.1. $(\partial_a+iS_{ab}\partial^b)\psi(1,\varsigma)=i(\sigma_{-\varsigma},i\varsigma)_aJ,S_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

另一种更解析更抽象的证法如下：

证明: $(\partial_a+iS_{ab}\partial^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma}=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^b,S_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$\Leftrightarrow\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma a}{}^c\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma cb}\partial^b\psi^{\gamma_\varsigma}=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^b$

$\Leftrightarrow\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ac}\sigma^{cb}_{\varsigma\gamma_\varsigma}\partial_b\psi^{\gamma_\varsigma}=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^b$

$\Leftrightarrow\sigma^{\varsigma ad}_{\beta_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ac}\sigma^{cb}_{\varsigma\gamma_\varsigma}\partial_b\psi^{\gamma_\varsigma}=-i\sigma^{\varsigma ad}_{\beta_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^b$

$\Leftrightarrow\sigma^{db}_{\varsigma\gamma_\varsigma}\partial_b\psi^{\gamma_\varsigma}=-iJ^d$

$\Leftrightarrow\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\partial_a\psi^{\alpha_\varsigma}=iJ^b,\alpha_\varsigma=1,2,3$

$\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}\partial_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma}=iJ_b,\alpha_\varsigma=1,2,3,4$ □

此方程(3.3.2)完全等价于电磁场方程，它就是电磁场方程的自旋张量表述形式。

引理2.6.1. $\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma}=-i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^b \Leftrightarrow \begin{cases}\mathbb{J}_y^{z_\varsigma}=-\mathbb{J}_z^{y_\varsigma}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{x_\varsigma}=J^x\\ \mathbb{J}_z^{x_\varsigma}=-\mathbb{J}_x^{z_\varsigma}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{y_\varsigma}=J^y\\ \mathbb{J}_x^{y_\varsigma}=-\mathbb{J}_y^{x_\varsigma}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{z_\varsigma}=J^z\\ \mathbb{J}_x^{x_\varsigma}=\mathbb{J}_y^{y_\varsigma}=\mathbb{J}_z{}^{z_\varsigma}=\varsigma J^\pi\end{cases}$

展开即可证明。以上自旋方程是关于特殊的源项，那么对于一般的源项又会怎样呢？请看下面的定理。

定理2.6.2. $(\partial_a+iS_{ab}\partial^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma}=\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma},S_{ab}=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\Psi}(1,\varsigma)=iJ,\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma}=-i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^b$

证明: $(\partial_a+iS_{ab}\partial^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma}=\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma},S_{ab}=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(\partial_x+i\gamma_z\partial_y-i\gamma_y\partial_z-i\varsigma\gamma_x\partial_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma}=\mathbb{J}_x{}^{\beta_\varsigma}\\ (\partial_y+i\gamma_x\partial_z-i\gamma_z\partial_x-i\varsigma\gamma_y\partial_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma}=\mathbb{J}_y^{\beta_\varsigma}\\ (\partial_z+i\gamma_y\partial_x-i\gamma_x\partial_y-i\varsigma\gamma_z\partial_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma}=\mathbb{J}_z{}^{\beta_\varsigma}\\ (\partial_\pi+i\varsigma\gamma_x\partial_x+i\varsigma\gamma_y\partial_y+i\varsigma\gamma_z\partial_z)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma}=\mathbb{J}_\pi^{\beta_\varsigma}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix}\partial_x&\partial_y&\partial_z\\-\partial_y&\partial_x&-\varsigma\partial_\pi\\-\partial_z&\varsigma\partial_\pi&\partial_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^{x_\varsigma}\\\psi^{y_\varsigma}\\\psi^{z_\varsigma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{J}_x^{x_\varsigma}\\\mathbb{J}_x^{y_\varsigma}\\\mathbb{J}_x^{z_\varsigma}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla\cdot\Psi(1,\varsigma)=\mathbb{J}_x^{x_\varsigma}\\ [\nabla\times\Psi(1,\varsigma)]^{z_\varsigma}-\varsigma\partial_\pi\psi^{z_\varsigma}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_x^{y_\varsigma}\\ -[\nabla\times\Psi(1,\varsigma)]^{y_\varsigma}+\varsigma\partial_\pi\psi^{y_\varsigma}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_x^{z_\varsigma}\end{cases}\\ \begin{bmatrix}\partial_y&-\partial_x&\varsigma\partial_\pi\\\partial_x&\partial_y&\partial_z\\-\varsigma\partial_\pi&-\partial_z&\partial_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^{x_\varsigma}\\\psi^{y_\varsigma}\\\psi^{z_\varsigma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{J}_y^{x_\varsigma}\\\mathbb{J}_y^{y_\varsigma}\\\mathbb{J}_y^{z_\varsigma}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-[\nabla\times\Psi(1,\varsigma)]^{z_\varsigma}+\varsigma\partial_\pi\psi^{z_\varsigma}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_y^{x_\varsigma}\\ \nabla\cdot\Psi(1,\varsigma)=\mathbb{J}_y^{y_\varsigma}\\ [\nabla\times\Psi(1,\varsigma)]^{x_\varsigma}-\varsigma\partial_\pi\psi^{x_\varsigma}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_y^{z_\varsigma}\end{cases}\\ \begin{bmatrix}\partial_z&-\varsigma\partial_\pi&-\partial_x\\\varsigma\partial_\pi&\partial_z&-\partial_y\\\partial_x&\partial_y&\partial_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^{x_\varsigma}\\\psi^{y_\varsigma}\\\psi^{z_\varsigma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{J}_z^{x_\varsigma}\\\mathbb{J}_z^{y_\varsigma}\\\mathbb{J}_z^{z_\varsigma}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}[\nabla\times\Psi(1,\varsigma)]^{y_\varsigma}-\varsigma\partial_\pi\psi^{y_\varsigma}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_z^{x_\varsigma}\\ -[\nabla\times\Psi(1,\varsigma)]^{x_\varsigma}+\varsigma\partial_\pi\psi^{x_\varsigma}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_z^{y_\varsigma}\\ \nabla\cdot\Psi(1,\varsigma)=\mathbb{J}_z^{z_\varsigma}\end{cases}\\ \partial_\pi\Psi(1,\varsigma)+i\varsigma\gamma\cdot\nabla\psi=\mathbb{J}_\pi\Leftrightarrow\partial_\pi\Psi(1,\varsigma)-\varsigma\nabla\times\Psi(1,\varsigma)=\mathbb{J}_\pi\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbb{J}_y^{z_\varsigma}=-\mathbb{J}_z^{y_\varsigma}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{x_\varsigma}:=J^x\\ \mathbb{J}_z^{x_\varsigma}=-\mathbb{J}_x^{z_\varsigma}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{y_\varsigma}:=J^y\\ \mathbb{J}_x^{y_\varsigma}=-\mathbb{J}_y^{x_\varsigma}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{z_\varsigma}:=J^z\\ \mathbb{J}_x^{x_\varsigma}=\mathbb{J}_y^{y_\varsigma}=\mathbb{J}_z{}^{z_\varsigma}:=\varsigma J^\pi\\ \partial_\pi\Psi(1,\varsigma)-\varsigma\nabla\times\Psi(1,\varsigma)=i\vec{J}\\ \nabla\cdot\Psi(1,\varsigma)=\varsigma J^\pi\end{cases}$$

$\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\Psi}(1,\varsigma)=iJ,\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma}=-i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^b$ □

另一种更解析更抽象的证法如下：

定理2.6.3. $(\partial_a+iS_{ab}\partial^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma}=\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma},S_{ab}=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}\Leftrightarrow\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma}=\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma}^{bc}\partial_c\psi^{\gamma_\varsigma}$

证明: $(\partial_a+iS_{ab}\partial^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma}=\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma},S_{ab}=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$\Leftrightarrow\sigma_{\varsigma a}^{\beta_\varsigma}{}^c\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma cb}\partial^b\psi^{\gamma_\varsigma}=\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma}$

$\Leftrightarrow\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma}=\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{bc}\partial_c\psi^{\alpha_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{J}_y^{z_\varsigma} = -\mathbb{J}_z^{y_\varsigma} = -\varsigma \mathbb{J}_\pi^{x_\varsigma} = i\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{xb}\partial_b\psi^{\alpha_\varsigma} \\ \mathbb{J}_z^{x_\varsigma} = -\mathbb{J}_x^{z_\varsigma} = -\varsigma \mathbb{J}_\pi^{y_\varsigma} = i\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{yb}\partial_b\psi^{\alpha_\varsigma} \\ \mathbb{J}_x^{y_\varsigma} = -\mathbb{J}_y^{x_\varsigma} = -\varsigma \mathbb{J}_\pi^{z_\varsigma} = i\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{zb}\partial_b\psi^{\alpha_\varsigma} \\ \mathbb{J}_x^{x_\varsigma} = \mathbb{J}_y^{y_\varsigma} = \mathbb{J}_z^{z_\varsigma} = i\varsigma\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{\pi b}\partial_b\psi^{\alpha_\varsigma} \end{cases} \qquad \square$$

这个定理表明此自旋方程源项受到一定限制，不是随意的，只有前一定理描述的源项情形才有解，其他情形全无解。

推论2.6.2. $(\partial_a + iS_{ab}\partial^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma} = \mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma}, S_{ab} = i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$ 有解 $\Leftrightarrow \mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma} = -i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^b, \exists J^b$

2.7 电磁场方程的经典分离形式

推论2.7.1. $(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\Psi}(1,\varsigma) = iJ \Leftrightarrow (\gamma, -i\varsigma)^a\partial_a\Psi(1,\varsigma) = i\vec{J}, i\varsigma\nabla\cdot\Psi(1,\varsigma) = iJ_\pi$

推论2.7.2. $S := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\varsigma\sqrt{1} & \varsigma\sqrt{1} & 0 \end{bmatrix}$

推论2.7.3. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\varsigma\sqrt{1} & \varsigma\sqrt{1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 & -\varsigma\sqrt{1} \\ 0 & \sqrt{1} & 0 & \varsigma\sqrt{1} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0&1&0&-\varsigma\\1&0&1&0\\0&1&0&\varsigma\\-\varsigma&0&\varsigma&0 \end{bmatrix}$

推论2.7.4. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\varsigma\sqrt{1} & \varsigma\sqrt{1} & 0 \end{bmatrix} i\begin{bmatrix} 0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 & -\varsigma\sqrt{1} \\ 0 & \sqrt{1} & 0 & \varsigma\sqrt{1} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0&-1&0&\varsigma\\1&0&-1&0\\0&1&0&\varsigma\\-\varsigma&0&-\varsigma&0 \end{bmatrix}$

推论2.7.5. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\varsigma\sqrt{1} & \varsigma\sqrt{1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 & -\varsigma\sqrt{1} \\ 0 & \sqrt{1} & 0 & \varsigma\sqrt{1} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&\varsigma\\0&0&-1&0\\0&\varsigma&0&0 \end{bmatrix}$

推论2.7.6.

$$(\sigma\otimes I, -i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\psi}(1,\varsigma) = i\tilde{J}(1,\varsigma) \overset{S}{\Leftrightarrow} \begin{cases} [\sigma(1), -i\varsigma]^a\partial_a\psi(1,\varsigma) = i\bar{N}(1)\tilde{J}(1,\varsigma) \\ i\varsigma\nabla\cdot S_m(1)\psi(1,\varsigma) = iJ_\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \bar{N}(1)\tilde{J}(1,\varsigma) \\ J_\pi \end{bmatrix} = S\tilde{J}(1,\varsigma) \\ \begin{bmatrix} \psi(1,\varsigma) \\ 0 \end{bmatrix} = S\tilde{\psi}(1,\varsigma) \end{cases}$$

推论2.7.7. $S_m(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 0 & -i \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -i\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, S_m^+(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \\ i & -1 & 0 \end{bmatrix}, S_m(1)S_m^+(1) = S_m^+(1)S_m(1) = I_3$

推论2.7.8. $\begin{cases} [\sigma(1), -i\varsigma]^a\partial_a\psi(1,\varsigma) = i\bar{N}(1)\tilde{J}(1,\varsigma) \\ i\varsigma\nabla\cdot S_m(1)\psi(1,\varsigma) = iJ_\pi \end{cases} \overset{S_m(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (\gamma, -i\varsigma)^a\partial_a\Psi(1,\varsigma) = i\vec{J}, \vec{J} = S_m(1)\bar{N}(1)\tilde{J}(1,\varsigma) \\ i\varsigma\nabla\cdot\Psi(1,\varsigma) = iJ_\pi, \Psi(1,\varsigma) = S_m(1)\bar{N}(1)\tilde{\psi}(1,\varsigma) \end{cases}$

第八章 Yang-Mills场方程的重新表述

1 应用常数张量定义Yang-Mills场 [8]的各种旋量

自我评述：本章提出了Yang-Mills场方程的多种等价表述形式，并严格证明了它们之间的等价性。

1.1 Yang-Mills场强的经典描述

$$\text{电磁张量:}F^\sigma_{ab}=\begin{bmatrix}0 & B^\sigma_z & -B^\sigma_y & -iE^\sigma_x\\ -B^\sigma_z & 0 & B^\sigma_x & -iE^\sigma_y\\ B^\sigma_y & -B^\sigma_x & 0 & -iE^\sigma_z\\ iE^\sigma_x & iE^\sigma_y & iE^\sigma_z & 0\end{bmatrix},\text{对偶张量:}*F^\sigma_{ab}=\begin{bmatrix}0 & -iE^\sigma_z & iE^\sigma_y & B^\sigma_x\\ iE^\sigma_z & 0 & -iE^\sigma_x & B^\sigma_y\\ -iE^\sigma_y & iE^\sigma_x & 0 & B^\sigma_z\\ -B^\sigma_x & -B^\sigma_y & -B^\sigma_z & 0\end{bmatrix} \tag{8.1}$$

1.2 Yang-Mills场强的复矢量描述

定义1.2.1. *Yang-Mills场复矢量* $\psi^\sigma_{\alpha_\varsigma}:=\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F^\sigma_{ab}=i\varsigma(E-i\varsigma B)^\sigma_{\alpha_\varsigma}=(i\varsigma E+B)^\sigma_{\alpha_\varsigma}$

推论1.2.1. $\frac{1}{2}(F^\sigma_{ab}-\varsigma*F^\sigma_{ab})=\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi^\sigma_{\alpha_\varsigma}$

证明: $F^\sigma_{ab}=-F^\sigma_{ba}$
$\Leftrightarrow F^\sigma_{ab}=\frac{1}{2}S_{abcd}F^{cd},*F^\sigma_{ab}:=\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}F^{cd}$
$\Leftrightarrow F^\sigma_{ab}-\varsigma*F^\sigma_{ab}=\frac{1}{2}(S_{abcd}-\varsigma\varepsilon_{abcd})F^{cd}$
$\Leftrightarrow F^\sigma_{ab}-\varsigma*F^\sigma_{ab}=-\frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}F^{cd}$
$\Leftrightarrow F^\sigma_{ab}-\varsigma*F^\sigma_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi^\sigma_{\alpha_\varsigma}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(F^\sigma_{ab}-\varsigma*F^\sigma_{ab})=\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi^\sigma_{\alpha_\varsigma}$ □

推论1.2.2. $\psi^\sigma_{\alpha_\varsigma}=\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\frac{1}{2}(F^\sigma_{ab}-\varsigma*F^\sigma_{ab})$

推论1.2.3. $\psi^\sigma_{\alpha_\varsigma}=-\frac{i}{2}\varsigma\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}*F^\sigma_{ab}$

推论1.2.4. $\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}(F^\sigma_{ab}+\varsigma*F^\sigma_{ab})=0$

推论1.2.5. $F^\sigma_{ab}-\varsigma*F^\sigma_{ab}=-\frac{1}{4}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}(F^\sigma_{cd}-\varsigma*F^\sigma_{cd})$

推论1.2.6. $F^\sigma_{ab}=\frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi^\sigma_{\alpha'}+\sigma^\alpha_{+ab}\psi^\sigma_\alpha),*F^\sigma_{ab}=\frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi^\sigma_{\alpha'}-\sigma^\alpha_{+ab}\psi^\sigma_\alpha)$

证明: $F^\sigma_{ab}-\varsigma*F^\sigma_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi^\sigma_{\alpha_\varsigma}$
$\Leftrightarrow F^\sigma_{ab}-*F^\sigma_{ab}=i\sigma^\alpha_{+ab}\psi^\sigma_\alpha,F^\sigma_{ab}+*F^\sigma_{ab}=i\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi^\sigma_{\alpha'}$
$\Leftrightarrow F^\sigma_{ab}=\frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi^\sigma_{\alpha'}+\sigma^\alpha_{+ab}\psi^\sigma_\alpha),*F^\sigma_{ab}=\frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi^\sigma_{\alpha'}-\sigma^\alpha_{+ab}\psi^\sigma_\alpha)$
$\Leftrightarrow F^\sigma_{ab}=\frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi^\sigma_{\alpha'}+\sigma^\alpha_{+ab}\psi^\sigma_\alpha)$
$\Leftrightarrow *F^\sigma_{ab}=\frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi^\sigma_{\alpha'}-\sigma^\alpha_{+ab}\psi^\sigma_\alpha)$ □

推论1.2.7. $F^\sigma_{ab}=-F^\sigma_{ba}\Leftrightarrow F^\sigma_{ab}=\frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi^\sigma_{\alpha'}+\sigma^\alpha_{+ab}\psi^\sigma_\alpha)$

1.3 Yang-Mills场强的$\frac{1}{2}$-旋量描述 [1,2]

定义1.3.1. *Yang-Mills场$\frac{1}{2}$-旋量张量:* $\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}:=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi^\sigma_{\alpha_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}F^\sigma_{ab}$

推论1.3.1. $\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi^\sigma_{\alpha_\varsigma}\Leftrightarrow\psi^\sigma_{\alpha_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}$

推论1.3.2. $\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=\psi^\sigma_{B_\varsigma A_\varsigma}$

推论1.3.3. $\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-i}{\sqrt{2}}S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}*F^\sigma_{ab}$

推论1.3.4. $\frac{1}{2}(F^\sigma_{ab}-\varsigma*F^\sigma_{ab})=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}\Leftrightarrow\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{1}{2}(F^\sigma_{ab}-\varsigma*F^\sigma_{ab})$

推论1.3.5. $F^\sigma_{ab}-\varsigma * F^\sigma_{ab}=-\frac{1}{2}S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}S^{cd}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}(F^\sigma_{cd}-\varsigma * F^\sigma_{cd})$

推论1.3.6. $F^\sigma_{ab}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(S_{ab}{}^{A'B'}\psi^\sigma_{A'B'}+S_{ab}{}^{AB}\psi^\sigma_{AB}), *F^\sigma_{ab}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(S_{ab}{}^{A'B'}\psi^\sigma_{A'B'}-S_{ab}{}^{AB}\psi^\sigma_{AB})$

推论1.3.7. $F^\sigma_{ab}=-F^\sigma_{ba}\Leftrightarrow F^\sigma_{ab}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(S_{ab}{}^{A'B'}\psi^\sigma_{A'B'}+S_{ab}{}^{AB}\psi^\sigma_{AB})$

结合推论1.3.6和(1.259), (1.260) 式可得**Penrose**对应记法 [1,2]：

推论1.3.8. $F^\sigma_{ab}\overset{P}{=}\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^\sigma_{A'B'}\varepsilon_{AB}+\psi^\sigma_{AB}\varepsilon_{A'B'}), *F^\sigma_{ab}\overset{P}{=}\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^\sigma_{A'B'}\varepsilon_{AB}-\psi^\sigma_{AB}\varepsilon_{A'B'})$

1.4 Yang-Mills场强的1-旋量描述

定义1.4.1. *Yang-Mills场1-旋量*$\psi^\sigma_{k_\varsigma}(1):=\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=\Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi^\sigma_{\alpha_\varsigma}$

推论1.4.1. $\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi^\sigma_{k_\varsigma}(1), \psi^\sigma_{\alpha_\varsigma}=\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\psi^\sigma_{k_\varsigma}(1)$

1.5 Yang-Mills场源的$\frac{1}{2}$-旋量描述 [1,2]

定义1.5.1. *Yang-Mills场源*$\frac{1}{2}$*-旋量张量*$J^{A'_\varsigma A_\varsigma\sigma}:=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}J^{a\sigma}, J^\sigma_{A_\varsigma A'_\varsigma}:=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}J^\sigma_a$

Penrose记法：$J^{a\sigma}\overset{P}{=}J^{A'A\sigma}, J_a\overset{P}{=}J^\sigma_{AA'}$

2 Yang-Mills场方程的多种等价表述形式

2.1 Yang-Mills理论的标准描述

$$\begin{cases}F^\sigma_{uv}T_\sigma=\partial_u A^\sigma_v T_\sigma-\partial_v A^\sigma_u T_\sigma+ig[A^\tau_u T_\tau, A^\rho_v T_\rho]\\ [T_\tau,T_\rho]=if^\sigma_{\tau\rho}T_\sigma, c^\sigma T_\sigma=0\Leftrightarrow c^\sigma=0\end{cases}\tag{8.2}$$

规范变换：

$$\begin{cases}\psi\to U(\theta)\psi, U(\theta)=e^{ig\theta^\sigma T_\sigma}, \psi\text{带}\mathbf{YM}\text{荷}\mathbf{g}\\ A^\sigma_u T_\sigma\to U(\theta)A^\sigma_u T_\sigma U^{-1}(\theta)+\frac{i}{g}[\partial_u U(\theta)]U^{-1}(\theta)\end{cases}\tag{8.3}$$

推论2.1.1. $D_u\psi\to UD_u\psi, D_u=\partial_u+igA^\sigma_u T_\sigma$

证明： $D_u\psi=(\partial_u+igA^\sigma_u T_\sigma)\psi\to[\partial_u+UigA^\sigma_u T_\sigma U^{-1}-(\partial_u U)U^{-1}](U\psi)$
$\Leftrightarrow D_u\psi\to[\partial_u(U\psi)+UigA^\sigma_u T_\sigma\psi-(\partial_u U)\psi]$
$\Leftrightarrow D_u\psi\to U(\partial_u+igA^\sigma_u T_\sigma)\psi$
$\Leftrightarrow D_u\psi\to UD_u\psi, D_u=\partial_u+igA^\sigma_u T_\sigma$ □

引理2.1.1. $\partial_u(U^{-1})=-U^{-1}\partial_u(U)U^{-1}$

证明： $\partial_u(UU^{-1})=\partial_u(I)$
$\Leftrightarrow\partial_u(U)U^{-1}+U\partial_u(U^{-1})=0$
$\Leftrightarrow U\partial_u(U^{-1})=-\partial_u(U)U^{-1}$
$\Leftrightarrow\partial_u(U^{-1})=-U^{-1}\partial_u(U)U^{-1}$ □

推论2.1.2. $F^\sigma_{uv}T_\sigma\to UF^\sigma_{uv}T_\sigma U^{-1}$

证明： $F^\sigma_{uv}T_\sigma=\partial_u A^\sigma_v T_\sigma-\partial_v A^\sigma_u T_\sigma+ig[A^\rho_u T_\rho, A^\tau_v T_\tau]$
$\to\partial_u[UA^\sigma_v T_\sigma U^{-1}+\frac{i}{g}(\partial_v U)U^{-1}]-\partial_v[UA^\sigma_u T_\sigma U^{-1}+\frac{i}{g}(\partial_u U)U^{-1}]$
$\quad+ig[UA^\rho_u T_\rho U^{-1}+\frac{i}{g}(\partial_u U)U^{-1}, UA^\tau_v T_\tau U^{-1}+\frac{i}{g}(\partial_v U)U^{-1}]$
$\Leftrightarrow F^\sigma_{uv}T_\sigma\to U(\partial_u A^\sigma_v T_\sigma-\partial_v A^\sigma_u T_\sigma+ig[A^\rho_u T_\rho, A^\tau_v T_\tau])U^{-1}$
$\Leftrightarrow F^\sigma_{uv}T_\sigma\to UF^\sigma_{uv}T_\sigma U^{-1}$ □

推论2.1.3. $D_w F^\sigma_{uv}T_\sigma\to UD_w F^\sigma_{uv}T_\sigma U^{-1}, D_w=\nabla_w+ig[A^\sigma_w T_\sigma,\quad]$

证明: $D_w F^\sigma_{uv} T_\sigma = \partial_w F^\sigma_{uv} T_\sigma + ig[A^\rho_w T_\rho, F^\tau_{uv} T_\tau]$
$\to \partial_w(UF^\sigma_{uv} T_\sigma U^{-1}) + ig[UA^\rho_w T_\rho U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_w U)U^{-1}, UF^\tau_{uv} T_\tau U^{-1}]$
$\Leftrightarrow D_w F^\sigma_{uv} T_\sigma \to U(\partial_w F^\sigma_{uv} T_\sigma + ig[A^\rho_w T_\rho, F^\tau_{uv} T_\tau])U^{-1}$
$\Leftrightarrow D_w F^\sigma_{uv} T_\sigma \to UD_w F^\sigma_{uv} T_\sigma U^{-1}$ □

推论2.1.4. $D_w F^\sigma_{uv} = \nabla_w F^\sigma_{uv} - gf^\sigma_{\rho\tau} A^\rho_w F^\tau_{uv}$

推论2.1.5. $D_w F^\sigma_{uv} = \nabla_w F^\sigma_{uv} + igA^\rho_w(-if_\rho{}^\sigma{}_\tau)F^\tau_{uv}$

推论2.1.6. $D_w F_{uv} = [\nabla_w + igA^\rho_w(-if_\rho)]F_{uv}, D_w = \nabla_w + igA^\rho_w(-if_\rho)$

2.2 Yang-Mills理论的分量描述

推论2.2.1. $F^\sigma_{uv} T_\sigma = \partial_u A^\sigma_v T_\sigma - \partial_v A^\sigma_u T_\sigma + ig[A^\rho_u T_\rho, A^\tau_v T_\tau] \Leftrightarrow F^\sigma_{uv} = \partial_u A^\sigma_v - \partial_v A^\sigma_u - gf^\sigma_{\rho\tau} A^\rho_u A^\tau_v$

推论2.2.2.
$F^\sigma_{uv} T_\sigma = (\partial_u + igA^\rho_u T_\rho)A^\sigma_v T_\sigma - (\partial_v + igA^\rho_v T_\rho)A^\sigma_u T_\sigma \Leftrightarrow F_{uv} = [\partial_u + \frac{1}{2} igA^\rho_u(-if_\rho)]A_v - [\partial_v + \frac{1}{2} igA^\rho_v(-if_\rho)]A_u$

推论2.2.3. 规范变换:$\delta\psi = ig\theta^\sigma T_\sigma \psi, \delta A_u = ig\theta^\rho(-if_\rho)A_u - \partial_u \theta$

推论2.2.4. $\delta F_{uv} = ig\theta^\rho(-if_\rho)F_{uv}$

2.3 Yang-Mills方程的标架描述

定义2.3.1. $F^\sigma_{ab} := e^u_a e^v_b F^\sigma_{uv}, A^\sigma_a := e^u_a A^\sigma_u$

Yang-Mills方程的标架描述

$$D^a F^\sigma_{ab} = -J^\sigma_b, D^a * F^\sigma_{ab} \equiv 0 \tag{8.4}$$

2.4 Yang-Mills场方程的经典形式

$$\begin{cases} \nabla_d \cdot \vec{E}^\sigma = \rho^\sigma, \nabla_d \times \vec{E}^\sigma = -D_t \vec{B}^\sigma \\ \nabla_d \cdot \vec{B}^\sigma = 0, \nabla_d \times \vec{B}^\sigma = \vec{J}^\sigma + D_t \vec{E}^\sigma \end{cases} \Leftrightarrow D^a F^\sigma_{ab} = -J^\sigma_b, D^a * F^\sigma_{ab} \equiv 0 \tag{8.5}$$

2.5 Yang-Mills场方程的复矢量表述形式

复矢量张量形式：

定理2.5.1. $D^a F^\sigma_{ab} = -J^\sigma_b \Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma} D_a \tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\sigma} = iJ^\sigma_b; F^\sigma_{ab} = D_a A_b - D_b A_a, \tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\sigma} = \begin{bmatrix} \psi^{\alpha_\varsigma\sigma} = \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab} F^{ab\sigma} \\ 0 \end{bmatrix}$

证明: $D^a F^\sigma_{ab} = -J^\sigma_b$
$\Leftrightarrow D^a F^\sigma_{ab} = -J^\sigma_b, D^a * F^\sigma_{ab} \equiv 0$
$\Leftrightarrow D^a(F^\sigma_{ab} - \varsigma * F^\sigma_{ab}) = -J^\sigma_b$
$\Leftrightarrow D^a(i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi^\sigma_{\alpha_\varsigma}) = -J^{b\sigma}, \alpha_\varsigma = 1, 2, 3$
$\Leftrightarrow D^a[(\sigma_\varsigma, -i\varsigma)^{\alpha_\varsigma}|_{ab}\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\sigma}] = iJ^\sigma_b, \alpha_\varsigma = 1, 2, 3, 4$
$\Leftrightarrow D^a[(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)_a|_b{}^{\alpha_\varsigma}\tilde{\Psi}^\sigma_{\alpha_\varsigma}] = iJ^\sigma_b, \alpha_\varsigma = 1, 2, 3, 4$
$\Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma} D_a \tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\sigma} = iJ^\sigma_b, \alpha_\varsigma = 1, 2, 3, 4$ □

复矢量矩阵形式：

推论2.5.1. $(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma} D_a \tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\sigma} = iJ^\sigma_b \Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a D_a \tilde{\Psi}^\sigma(1, \varsigma) = iJ^\sigma$

表象变换：

推论2.5.2. $(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a D_a \tilde{\Psi}^\sigma(1, \varsigma) = iJ^\sigma \Leftrightarrow (\sigma \otimes I, -i\varsigma)^a D_a \tilde{\Psi}^\sigma(1, \varsigma) = i\tilde{J}^\sigma(1, \varsigma)$

2.6 Yang-Mills场方程的$\frac{1}{2}$-旋量表述形式

$\frac{1}{2}$-旋量Penrose抽象指标形式 [1,2]：

定理2.6.1. $(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\sigma}=iJ_b^\sigma\Leftrightarrow\nabla_d^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^\sigma,\nabla_d^{A'_\varsigma A_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a$

证明：$(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\sigma}=iJ_b^\sigma$

$\Leftrightarrow D^a(i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi^\sigma_{\alpha_\varsigma})=-J_b^\sigma$

$\Leftrightarrow D^a(i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\cdot\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma})=-J_b^\sigma$

$\Leftrightarrow iS_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}D^a\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J_b^\sigma$

$\Leftrightarrow(\frac{\varsigma}{2}\delta_{ab}\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}+iS_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma})D^a\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J_b^\sigma$

$\Leftrightarrow\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma}D^a\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-1}{\sqrt{2}}J_b^\sigma$

$\Leftrightarrow\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}D^a\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-1}{\sqrt{2}}J_b^\sigma\cdot\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b_{B'_\varsigma B_\varsigma}$

$\Leftrightarrow\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}\varsigma\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}J_{B'_\varsigma B_\varsigma}$

$\Leftrightarrow\nabla_d^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^\sigma,\nabla_d^{A'_\varsigma A_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a$ □

$\frac{1}{2}$-旋量张量形式：

推论2.6.1. $\nabla_d^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^\sigma\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D_a\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^\sigma$

$\frac{1}{2}$-旋量矩阵形式：

推论2.6.2. $(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D_a\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^\sigma\Leftrightarrow(\sigma\otimes I,-i\varsigma)^aD_a\tilde{\Psi}^\sigma(1,\varsigma)=i\tilde{J}^\sigma(1,\varsigma)$

$\frac{1}{2}$-旋量方矩阵形式：

推论2.6.3. $(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D_a\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^\sigma\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^aD_a[\psi]^\sigma=i[J]^\sigma$

$\frac{1}{2}$-自旋张量表述形式:(证明留待以后)

推论2.6.4. $(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi^\sigma_{A_\varsigma B_\varsigma}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^\sigma\Leftrightarrow[\partial_a+iS_{ab}(1,\varsigma)\partial^b]_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}\psi^\sigma_{l_\varsigma}(1,\varsigma)=\mathbb{J}^\sigma_{ak_\varsigma}(1,\varsigma)$

推论2.6.5. $\begin{cases}\partial^aF^\sigma_{ab}=-J^\sigma_b\\ \partial^a*F^\sigma_{ab}\equiv 0\end{cases}\Leftrightarrow[\partial_a+iS_{ab}(1,\varsigma)\partial^b]_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}\psi^\sigma_{l_\varsigma}(1,\varsigma)=\mathbb{J}^\sigma_{ak_\varsigma}(1,\varsigma)$

2.7 猜测

定理2.7.1. $D^a*F^\sigma_{ab}=0\Leftrightarrow F^\sigma_{ab}=D_aA_b-D_bA_a\Leftrightarrow D^a*F^\sigma_{ab}\equiv 0$

定理2.7.2. $D^aF^\sigma_{ab}=-J^\sigma_b,D^a*F^\sigma_{ab}=0\Leftrightarrow D^aF^\sigma_{ab}=-J^\sigma_b,F^\sigma_{ab}=D_aA_b-D_bA_a$

2.8 Yang-Mills场方程 [8]的自旋张量表述形式

Yang-Mills场的自旋张量矩阵：$S_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}\succ\begin{bmatrix}0&\gamma_z&-\gamma_y&-\varsigma\gamma_x\\-\gamma_z&0&\gamma_x&-\varsigma\gamma_y\\\gamma_y&-\gamma_x&0&-\varsigma\gamma_z\\\varsigma\gamma_x&\varsigma\gamma_y&\varsigma\gamma_z&0\end{bmatrix}$ (8.6)

定理2.8.1. $(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma}(1,\varsigma)=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^{b\sigma},S_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^aD_a\tilde{\Psi}^\sigma(1,\varsigma)=iJ^\sigma$

一种直观证法如下：

证明：$(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma}=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^{b\sigma},S_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(D_x+i\gamma_zD_y-i\gamma_yD_z-i\varsigma\gamma_xD_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma}=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma xb}J^{b\sigma}\\(D_y+i\gamma_xD_z-i\gamma_zD_x-i\varsigma\gamma_yD_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma}=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma yb}J^{b\sigma}\\(D_z+i\gamma_yD_x-i\gamma_xD_y-i\varsigma\gamma_zD_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma}=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma zb}J^{b\sigma}\\(D_\pi+i\varsigma\gamma_xD_x+i\varsigma\gamma_yD_y+i\varsigma\gamma_zD_z)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma}=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma\pi b}J^{b\sigma}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} D_x & D_y & D_z \\ -D_y & D_x & -\varsigma D_\pi \\ -D_z & \varsigma D_\pi & D_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^{x_\varsigma\sigma} \\ \psi^{y_\varsigma\sigma} \\ \psi^{z_\varsigma\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varsigma J^{\pi\sigma} \\ J^{z\sigma} \\ -J^{y\sigma} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_y & -D_x & \varsigma D_\pi \\ D_x & D_y & D_z \\ -\varsigma D_\pi & -D_z & D_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^{x_\varsigma\sigma} \\ \psi^{y_\varsigma\sigma} \\ \psi^{z_\varsigma\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J^{z\sigma} \\ \varsigma J^{\pi\sigma} \\ J^{x\sigma} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D_z & -\varsigma D_\pi & -D_x \\ \varsigma D_\pi & D_z & -D_y \\ D_x & D_y & D_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^{x_\varsigma\sigma} \\ \psi^{y_\varsigma\sigma} \\ \psi^{z_\varsigma\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{y\sigma} \\ -J^{x\sigma} \\ \varsigma J^{\pi\sigma} \end{bmatrix}, iD_\pi\Psi^\sigma(1,\varsigma) = \varsigma\gamma\cdot\nabla_d\Psi^\sigma(1,\varsigma) - i\varsigma\vec{J}^\sigma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} iD_\pi\Psi^\sigma(1,\varsigma) = i\varsigma\nabla_d\times\Psi^\sigma(1,\varsigma) - i\varsigma\vec{J}^\sigma \\ \nabla_d\cdot\Psi^\sigma(1,\varsigma) = \varsigma J^{\pi\sigma} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} iD_\pi\Psi^\sigma(1,\varsigma) = \varsigma\gamma\cdot\nabla_d\Psi^\sigma(1,\varsigma) - i\varsigma\vec{J}^\sigma \\ \nabla_d\cdot\Psi^\sigma(1,\varsigma) = \varsigma J^{\pi\sigma} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a D_a\tilde{\Psi}^\sigma(1,\varsigma) = iJ$$ □

推论2.8.1. $(\partial_a + iS_{ab}\partial^b)\psi^\sigma(1,\varsigma) = i(\sigma_{-\varsigma}, i\varsigma)_a J^\sigma, S_{ab} = i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

另一种更解析更抽象的证法如下：

证明: $(D_a + iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma} = -i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^{b\sigma}, S_{ab} = i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$\Leftrightarrow \sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma a}{}^c\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma cb}D^b\psi^{\gamma_\varsigma\sigma} = -i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^{b\sigma}$

$\Leftrightarrow \sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ac}\sigma^{cb}_{\varsigma\gamma_\varsigma}D_b\psi^{\gamma_\varsigma\sigma} = -i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^{b\sigma}$

$\Leftrightarrow \sigma^{\varsigma ad}_{\beta_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ac}\sigma^{cb}_{\varsigma\gamma_\varsigma}D_b\psi^{\gamma_\varsigma\sigma} = -i\sigma^{\varsigma ad}_{\beta_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^{b\sigma}$

$\Leftrightarrow \sigma^{db}_{\varsigma\gamma_\varsigma}D_b\psi^{\gamma_\varsigma\sigma} = -iJ^{d\sigma}$

$\Leftrightarrow \sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}D_a\psi^{\alpha_\varsigma\sigma} = iJ^{b\sigma}, \alpha_\varsigma = 1,2,3$

$\Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\sigma} = iJ^\sigma_b, \alpha_\varsigma = 1,2,3,4$ □

此方程(3.3.2)完全等价于**Yang-Mills**场方程，它就是**Yang-Mills**场方程的自旋张量表述形式。

引理2.8.1. $$\mathbb{J}^{\beta_\varsigma\sigma}_a = -i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^{b\sigma} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{J}^{z_\varsigma\sigma}_y = -\mathbb{J}^{y_\varsigma\sigma}_z = -\varsigma\mathbb{J}^{x_\varsigma\sigma}_\pi = J^{x\sigma} \\ \mathbb{J}^{x_\varsigma\sigma}_z = -\mathbb{J}^{z_\varsigma\sigma}_x = -\varsigma\mathbb{J}^{y_\varsigma\sigma}_\pi = J^{y\sigma} \\ \mathbb{J}^{y_\varsigma\sigma}_x = -\mathbb{J}^{x_\varsigma\sigma}_y = -\varsigma\mathbb{J}^{z_\varsigma\sigma}_\pi = J^{z\sigma} \\ \mathbb{J}^{x_\varsigma\sigma}_x = \mathbb{J}^{y_\varsigma\sigma}_y = \mathbb{J}^{z_\varsigma\sigma}_z = \varsigma J^{\pi\sigma} \end{cases}$$

展开即可证明。以上自旋方程是关于特殊的源项，那么对于一般的源项又会怎样呢？请看下面的定理。

定理2.8.2. $(D_a + iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma} = \mathbb{J}^{\beta_\varsigma\sigma}_a, S_{ab} = i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma} \Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a D_a\tilde{\Psi}^\sigma(1,\varsigma) = iJ^\sigma, \mathbb{J}^{\beta_\varsigma\sigma}_a = -i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^{b\sigma}$

证明: $(D_a + iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma} = \mathbb{J}^{\beta_\varsigma\sigma}_a, S_{ab} = i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (D_x + i\gamma_z D_y - i\gamma_y D_z - i\varsigma\gamma_x D_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma} = \mathbb{J}^{\beta_\varsigma\sigma}_x \\ (D_y + i\gamma_x D_z - i\gamma_z D_x - i\varsigma\gamma_y D_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma} = \mathbb{J}^{\beta_\varsigma\sigma}_y \\ (D_z + i\gamma_y D_x - i\gamma_x D_y - i\varsigma\gamma_z D_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma} = \mathbb{J}^{\beta_\varsigma\sigma}_z \\ (D_\pi + i\varsigma\gamma_x D_x + i\varsigma\gamma_y D_y + i\varsigma\gamma_z D_z)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma} = \mathbb{J}^{\beta_\varsigma\sigma}_\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix}D_x & D_y & D_z\\ -D_y & D_x & -\varsigma D_\pi\\ -D_z & \varsigma D_\pi & D_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^{x_\varsigma\sigma}\\ \psi^{y_\varsigma\sigma}\\ \psi^{z_\varsigma\sigma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{J}_x^{x_\varsigma\sigma}\\ \mathbb{J}_x^{y_\varsigma\sigma}\\ \mathbb{J}_x^{z_\varsigma\sigma}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla_d\cdot\Psi^\sigma(1,\varsigma)=\mathbb{J}_x^{x_\varsigma\sigma}\\ [\nabla_d\times\Psi^\sigma(1,\varsigma)]^{z_\varsigma\sigma}-\varsigma D_\pi\psi^{z_\varsigma\sigma}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_x^{y_\varsigma\sigma}\\ -[\nabla_d\times\Psi^\sigma(1,\varsigma)]^{y_\varsigma\sigma}+\varsigma D_\pi\psi^{y_\varsigma\sigma}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_x^{z_\varsigma\sigma}\end{cases}\\ \begin{bmatrix}D_y & -D_x & \varsigma D_\pi\\ D_x & D_y & D_z\\ -\varsigma D_\pi & -D_z & D_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^{x_\varsigma\sigma}\\ \psi^{y_\varsigma\sigma}\\ \psi^{z_\varsigma\sigma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{J}_y^{x_\varsigma\sigma}\\ \mathbb{J}_y^{y_\varsigma\sigma}\\ \mathbb{J}_y^{z_\varsigma\sigma}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-[\nabla_d\times\Psi^\sigma(1,\varsigma)]^{z_\varsigma\sigma}+\varsigma D_\pi\psi^{z_\varsigma\sigma}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_y^{x_\varsigma\sigma}\\ \nabla_d\cdot\Psi^\sigma(1,\varsigma)=\mathbb{J}_y^{y_\varsigma\sigma}\\ [\nabla_d\times\Psi^\sigma(1,\varsigma)]^{x_\varsigma\sigma}-\varsigma D_\pi\psi^{x_\varsigma\sigma}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_y^{z_\varsigma\sigma}\end{cases}\\ \begin{bmatrix}D_z & -\varsigma D_\pi & -D_x\\ \varsigma D_\pi & D_z & -D_y\\ D_x & D_y & D_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^{x_\varsigma\sigma}\\ \psi^{y_\varsigma\sigma}\\ \psi^{z_\varsigma\sigma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{J}_z^{x_\varsigma\sigma}\\ \mathbb{J}_z^{y_\varsigma\sigma}\\ \mathbb{J}_z^{z_\varsigma\sigma}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}[\nabla_d\times\Psi^\sigma(1,\varsigma)]^{y_\varsigma\sigma}-\varsigma D_\pi\psi^{y_\varsigma\sigma}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_z^{x_\varsigma\sigma}\\ -[\nabla_d\times\Psi^\sigma(1,\varsigma)]^{x_\varsigma\sigma}+\varsigma D_\pi\psi^{x_\varsigma\sigma}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_z^{y_\varsigma\sigma}\\ \nabla_d\cdot\Psi^\sigma(1,\varsigma)=\mathbb{J}_z^{z_\varsigma\sigma}\end{cases}\\ D_\pi\Psi^\sigma(1,\varsigma)+i\varsigma\gamma\cdot\nabla_d\psi^\sigma=\mathbb{J}_\pi^\sigma\Leftrightarrow D_\pi\Psi^\sigma(1,\varsigma)-\varsigma\nabla_d\times\Psi^\sigma(1,\varsigma)=\mathbb{J}_\pi^\sigma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbb{J}_y^{z_\varsigma\sigma}=-\mathbb{J}_z^{y_\varsigma\sigma}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{x_\varsigma\sigma}:=J^{x\sigma}\\ \mathbb{J}_z^{x_\varsigma\sigma}=-\mathbb{J}_x^{z_\varsigma\sigma}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{y_\varsigma\sigma}:=J^{y\sigma}\\ \mathbb{J}_x^{y_\varsigma\sigma}=-\mathbb{J}_y^{x_\varsigma\sigma}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{z_\varsigma\sigma}:=J^{z\sigma}\\ \mathbb{J}_x^{x_\varsigma\sigma}=\mathbb{J}_y^{y_\varsigma\sigma}=\mathbb{J}_z^{z_\varsigma\sigma}:=\varsigma J^{\pi\sigma}\\ D_\pi\Psi^\sigma(1,\varsigma)-\varsigma\nabla_d\times\Psi^\sigma(1,\varsigma)=i\vec{J}^\sigma\\ \nabla_d\cdot\Psi^\sigma(1,\varsigma)=-iJ^{\pi\sigma}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^aD_a\tilde{\Psi}^\sigma(1,\varsigma)=iJ^\sigma,\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\sigma}=-i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{b\sigma}\qquad\Box$$

另一种更解析更抽象的证法如下：

定理2.8.3. $(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma}=\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\sigma},S_{ab}=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}\Leftrightarrow\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\sigma}=\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma}^{bc}D_c\psi^{\gamma_\varsigma\sigma}$

证明: $(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma}=\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\sigma},S_{ab}=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$\Leftrightarrow\sigma_{\varsigma a}^{\beta_\varsigma c}\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma cb}D^b\psi^{\gamma_\varsigma\sigma}=\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\sigma}$

$\Leftrightarrow\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\sigma}=\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{bc}D_c\psi^{\alpha_\varsigma\sigma}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbb{J}_y^{z_\varsigma\sigma}=-\mathbb{J}_z^{y_\varsigma\sigma}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{x_\varsigma\sigma}=i\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{xb}D_b\psi^{\alpha_\varsigma\sigma}\\ \mathbb{J}_z^{x_\varsigma\sigma}=-\mathbb{J}_x^{z_\varsigma\sigma}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{y_\varsigma\sigma}=i\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{yb}D_b\psi^{\alpha_\varsigma\sigma}\\ \mathbb{J}_x^{y_\varsigma\sigma}=-\mathbb{J}_y^{x_\varsigma\sigma}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{z_\varsigma\sigma}=i\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{zb}D_b\psi^{\alpha_\varsigma\sigma}\\ \mathbb{J}_x^{x_\varsigma\sigma}=\mathbb{J}_y^{y_\varsigma\sigma}=\mathbb{J}_z^{z_\varsigma\sigma}=i\varsigma\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{\pi b}D_b\psi^{\alpha_\varsigma\sigma}\end{cases}\qquad\Box$$

这个定理表明此自旋方程源项受到一定限制，不是随意的，只有前一定理描述的源项情形才有解，其他情形全无解。

推论2.8.2. $(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma}=\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\sigma},S_{ab}=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$有解$\Leftrightarrow\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\sigma}=-i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{b\sigma},\exists J^{b\sigma}$

2.9 Yang-Mills场方程的经典分离形式

推论2.9.1. $(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^aD_a\tilde{\Psi}^\sigma(1,\varsigma)=iJ^\sigma\Leftrightarrow(\gamma,-i\varsigma)^aD_a\Psi^\sigma(1,\varsigma)=i\vec{J}^\sigma,\nabla_d\cdot\Psi^\sigma(1,\varsigma)=\varsigma J_{\pi_\varsigma}^\sigma$

第九章　引力场方程的重新表述

自我评述：本章提出了引力场方程的多种等价表述形式，并严格证明了它们之间的等价性。

1 引力场 [12–15]物理量的各种描述

1.1 引力场 [12–15]物理量的经典描述

1.1.1 引力场的曲率张量

曲率张量的对称性质：

$$\text{反对称性：}R^{abcd}=-R^{bacd},R^{abcd}=-R^{abdc} \tag{9.1}$$

$$\text{对称性：}R^{abcd}=R^{cdab} \tag{9.2}$$

$$\text{轮换对称性：}R^{abcd}+R^{adbc}+R^{acdb}=0 \tag{9.3}$$

1.1.2 引力场的里奇张量和标量曲率

定义1.1.1. 里奇张量$R^{ab}:=g_{cd}R^{cadb},R^{a*b}:=g_{cd}R^{ca(*db)}\equiv 0,$标量曲率$R:=g_{ab}R^{ab}={R_{ab}}^{ab}$

推论1.1.1. $R^{abcd}+R^{adbc}+R^{acdb}=0\Rightarrow R^{a*b}=0$

证明: $R^{abcd}+R^{adbc}+R^{acdb}=0$
$\Rightarrow \varepsilon_{ebcd}(R^{abcd}+R^{adbc}+R^{acdb})=0$
$\Rightarrow \varepsilon_{ebcd}R^{abcd}+\varepsilon_{edbc}R^{adbc}+\varepsilon_{ecdb}R^{acdb}=0$
$\Rightarrow 3\varepsilon_{ebcd}R^{abcd}=0$
$\Rightarrow g_{cd}R^{ca(*db)}=0$
$\Rightarrow R^{a*b}=0$ □

1.1.3 引力场的外尔张量

定义1.1.2. $C^{abcd}:=R^{abcd}+\frac{1}{2}g^{a[d}R^{c]b}+\frac{1}{2}g^{b[c}R^{d]a}+\frac{1}{6}g^{a[c}g^{d]b}R$

外尔张量的对称性质：

$$\text{反对称性：}C^{abcd}=-C^{bacd},C^{abcd}=-C^{abdc} \tag{9.4}$$

$$\text{对称性：}C^{abcd}=C^{cdab} \tag{9.5}$$

$$\text{轮换对称性：}C^{abcd}+C^{adbc}+C^{acdb}=0 \tag{9.6}$$

推论1.1.2. $R^{abcd}=C^{abcd}-\frac{1}{2}g^{a[d}R^{c]b}-\frac{1}{2}g^{b[c}R^{d]a}-\frac{1}{6}g^{a[c}g^{d]b}R$

推论1.1.3. $C^{ab}=g_{cd}C^{cadb}=0,C^{a*b}=g_{cd}C^{ca(*db)}=0$

1.2 引力场物理量的Yang-Mills描述 [7]

1.2.1 引力场曲率张量的Yang-Mills描述

定义1.2.1. 引力场的YM曲率张量：$F^{ab\alpha_\varsigma}:=\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}R^{abcd}$

仿照电磁场情形的推理，有以下完全类似的结论。

推论1.2.1. $\frac{1}{2}[R^{abcd}-\varsigma R^{ab(*cd)}]=\frac{i}{2}\sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F^{ab\alpha_\varsigma}$

推论1.2.2. $F^{ab\alpha_\varsigma}=-\frac{i\varsigma}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}R^{ab(*cd)}$

推论1.2.3. $\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}[R^{abcd}+\varsigma R^{ab(*cd)}]=0$

推论1.2.4. $F^{ab\alpha_\varsigma}=\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}\frac{1}{2}[R^{abcd}-\varsigma R^{ab(*cd)}]$

推论1.2.5. $R^{abcd}-\varsigma R^{ab(*cd)}=-\frac{1}{4}\sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ef}(R^{abef}-\varsigma R^{ab(*ef)})$

推论1.2.6. $R^{abcd}=\frac{i}{2}(\sigma^{cd}_{-\alpha'}F^{ab\alpha'}+\sigma^{cd}_{+\alpha}F^{ab\alpha}),R^{ab(*cd)}=\frac{i}{2}(\sigma^{cd}_{-\alpha'}F^{ab\alpha'}-\sigma^{cd}_{+\alpha}F^{ab\alpha})$

不同于电磁场情形，引力场还有以下不同的结论。

推论1.2.7. $R^{ab}=-\frac{i}{2}(F^{\alpha'}\sigma_{-\alpha'}+F^{\alpha}\sigma_{+\alpha})^{ab},0=R^{a*b}=-\frac{i}{2}(F^{\alpha'}\sigma_{-\alpha'}-F^{\alpha}\sigma_{+\alpha})^{ab}$

推论1.2.8. $R^{ab}=-i(F^{\alpha'}\sigma_{-\alpha'})^{ab}=-i(F^{\alpha}\sigma_{+\alpha})^{ab},F^{\alpha'}\sigma_{-\alpha'}=F^{\alpha}\sigma_{+\alpha}$

推论1.2.9. $R^{ab}=-i(F^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma})^{ab},F^{\alpha'_\varsigma}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}=F^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}$

推论1.2.10. $R=i\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}{}^{\alpha_\varsigma}$

1.2.2 引力场外尔张量的Yang-Mills描述

定义1.2.2. 引力场的YM外尔张量：$C^{ab\alpha_\varsigma}:=\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}C^{abcd}$

仿照曲率张量情形的推理，有以下完全类似的结论。

推论1.2.11. $\frac{1}{2}[C^{abcd}-\varsigma C^{ab(*cd)}]=\frac{i}{2}\sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}C^{ab\alpha_\varsigma}$

推论1.2.12. $C^{ab\alpha_\varsigma}=-\frac{i\varsigma}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}C^{ab(*cd)}$

推论1.2.13. $\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}[C^{abcd}+\varsigma C^{ab(*cd)}]=0$

推论1.2.14. $C^{ab\alpha_\varsigma}=\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}\frac{1}{2}[C^{abcd}-\varsigma C^{ab(*cd)}]$

推论1.2.15. $C^{abcd}-\varsigma C^{ab(*cd)}=-\frac{1}{4}\sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ef}(C^{abef}-\varsigma C^{ab(*ef)})$

推论1.2.16. $C^{abcd}=\frac{i}{2}(\sigma^{cd}_{-\alpha'}C^{ab\alpha'}+\sigma^{cd}_{+\alpha}C^{ab\alpha}),C^{ab(*cd)}=\frac{i}{2}(\sigma^{cd}_{-\alpha'}C^{ab\alpha'}-\sigma^{cd}_{+\alpha}C^{ab\alpha})$

不同于曲率张量情形，外尔张量还有以下不同的结论。

推论1.2.17. $0=C^{ab}=-\frac{i}{2}(F^{\alpha'}\sigma_{-\alpha'}+F^{\alpha}\sigma_{+\alpha})^{ab},0=C^{a*b}=-\frac{i}{2}(F^{\alpha'}\sigma_{-\alpha'}-F^{\alpha}\sigma_{+\alpha})^{ab}$

推论1.2.18. $C^{\alpha'}\sigma_{-\alpha'}=C^{\alpha}\sigma_{+\alpha}=0,C^{\alpha'_\varsigma}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}=C^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}=0$

推论1.2.19. $C=i\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}C^{\alpha_\varsigma}_{ab}=0$

曲率张量和外尔张量之间的联系：

推论1.2.20.
$R^{abcd}=C^{abcd}-\frac{1}{2}g^{a[d}R^{c]b}-\frac{1}{2}g^{b[c}R^{d]a}-\frac{1}{6}g^{a[c}g^{d]b}R\Rightarrow F^{ab\alpha_\varsigma}=C^{ab\alpha_\varsigma}+\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma a}_{\varsigma}{}_{c}R^{cb}-\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma b}_{\varsigma}{}_{c}R^{ca}-\frac{i}{6}\sigma^{\alpha_\varsigma ab}_{\varsigma}R$

推论1.2.21. $C^{ab\alpha_\varsigma}=F^{ab\alpha_\varsigma}-\frac{1}{2}(\sigma^{\alpha_\varsigma c[a}_{\varsigma}\sigma^{b]d}_{\varsigma\beta_\varsigma}+\frac{1}{3}\sigma^{\alpha_\varsigma ab}_{\varsigma}\sigma^{cd}_{\varsigma\beta_\varsigma})F^{\beta_\varsigma}_{cd}$

1.3 引力场曲率张量的Ashtekar规范表述 [39]

1.3.1 准备

X,Y是正交标架下的实四维矢量或张量。

引理1.3.1. $X^*_{a'_\varsigma}=\eta^{a_\varsigma}_{a'_\varsigma}X_{a_\varsigma},X^*_{a'_\varsigma b'_\varsigma}=\eta^{a_\varsigma}_{a'_\varsigma}\eta^{b_\varsigma}_{b'_\varsigma}X_{a_\varsigma b_\varsigma},X^*_{a'_\varsigma b'_\varsigma c'_\varsigma}=\eta^{a_\varsigma}_{a'_\varsigma}\eta^{b_\varsigma}_{b'_\varsigma}\eta^{c_\varsigma}_{c'_\varsigma}X_{a_\varsigma b_\varsigma c_\varsigma}\cdots$

引理1.3.2. $X^*_{a'_\varsigma}Y^{*a'_\varsigma}=X_{a_\varsigma}Y^{a_\varsigma},X^*_{a'_\varsigma b'_\varsigma}Y^{*a'_\varsigma b'_\varsigma}=X_{a_\varsigma b_\varsigma}Y^{a_\varsigma b_\varsigma},X^*_{a'_\varsigma b'_\varsigma c'_\varsigma}Y^{*a'_\varsigma b'_\varsigma c'_\varsigma}=X_{a_\varsigma b_\varsigma c_\varsigma}Y^{a_\varsigma b_\varsigma c_\varsigma},\cdots$

1.3.2 引力场曲率张量的Ashtekar规范表述 [39]

引力场曲率张量$R_{uv}{}^{cd} = \partial_u\omega_v^{cd} - \partial_v\omega_u^{cd} + \omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d}$ (9.7)

定义1.3.1. 引入$Ashtekar$变量 [39] $A_u^{\alpha_\varsigma} := \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}\omega_u^{cd}$

推论1.3.1. $[A_u^{\alpha_\varsigma}]^* = A_{u'}^{*\alpha'_\varsigma} = \eta_{u'}^u A_u^{\alpha'_\varsigma}$

证明: $[A_u^{\alpha_\varsigma}]^* = \frac{i}{2}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma c'd'}\omega^{*}_{u'}{}^{c'd'} = \eta^u_{u'}\frac{i}{2}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma cd}\omega_u^{cd} = \eta^u_{u'}A_u^{\alpha'_\varsigma}$ □

推论1.3.2. $[F_{uv}^{\alpha_\varsigma}]^* = F_{u'v'}^{*\alpha'_\varsigma} = \eta^u_{u'}\eta^v_{v'}F_{uv}^{\alpha'_\varsigma}$

证明: $[F_{uv}^{\alpha_\varsigma}]^* = F_{u'v'}^{*\alpha'_\varsigma} = \frac{i}{2}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma c'd'}R^{*}_{u'v'}{}^{c'd'} = \frac{i}{2}\eta^u_{u'}\eta^v_{v'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma cd}R_{uv}{}^{cd} = \eta^u_{u'}\eta^v_{v'}F_{uv}^{\alpha'_\varsigma}$ □

推论1.3.3. $\omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d} = -\frac{i}{2}(\varepsilon^{\alpha'_\varsigma}{}_{\beta'_\varsigma\gamma'_\varsigma}\sigma^{cd}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}A_u^{\beta'_\varsigma}A_v^{\gamma'_\varsigma} + \varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}A_v^{\gamma_\varsigma})$

证明: $\omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d} = \omega_u^{ce}\omega_{ve}{}^{d} - \omega_v^{ce}\omega_{ue}{}^{d}$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d} = {} & \delta_{ef}\tfrac{i}{2}(\sigma^{ce}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}A_u^{\alpha'_\varsigma} + \sigma^{ce}_{\varsigma\alpha_\varsigma}A_u^{\alpha_\varsigma})\tfrac{i}{2}(\sigma^{fd}_{-\varsigma\beta'_\varsigma}A_v^{\beta'_\varsigma} + \sigma^{fd}_{\varsigma\beta_\varsigma}A_v^{\beta_\varsigma}) \\
& - \delta_{ef}\tfrac{i}{2}(\sigma^{ce}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}A_v^{\alpha'_\varsigma} + \sigma^{ce}_{\varsigma\alpha_\varsigma}A_v^{\alpha_\varsigma})\tfrac{i}{2}(\sigma^{fd}_{-\varsigma\beta'_\varsigma}A_u^{\beta'_\varsigma} + \sigma^{fd}_{\varsigma\beta_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}) \\
\Leftrightarrow \omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d} = {} & -\tfrac{1}{4}\delta_{ef}(\sigma^{ce}_{-\varsigma[\alpha'_\varsigma}\sigma^{fd}_{-\varsigma\beta'_\varsigma]}A_u^{\alpha'_\varsigma}A_v^{\beta'_\varsigma} + \sigma^{ce}_{\varsigma[\alpha_\varsigma}\sigma^{fd}_{-\varsigma\beta'_\varsigma]}A_u^{\alpha_\varsigma}A_v^{\beta'_\varsigma} \\
& + \sigma^{ce}_{-\varsigma[\alpha'_\varsigma}\sigma^{fd}_{\varsigma\beta_\varsigma]}A_u^{\alpha'_\varsigma}A_v^{\beta_\varsigma} + \sigma^{ce}_{\varsigma[\alpha_\varsigma}\sigma^{fd}_{\varsigma\beta_\varsigma]}A_u^{\alpha_\varsigma}A_v^{\beta_\varsigma}) \\
\Leftrightarrow \omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d} = {} & -\tfrac{1}{4}(2i\varepsilon_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}{}^{\gamma'_\varsigma}\sigma^{cd}_{-\varsigma\gamma'_\varsigma}A_u^{\alpha'_\varsigma}A_v^{\beta'_\varsigma} + 0 + 0 + 2i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\sigma^{cd}_{\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\alpha_\varsigma}A_v^{\beta_\varsigma}) \\
\Leftrightarrow \omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d} = {} & -\tfrac{i}{2}(\varepsilon_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}{}^{\gamma'_\varsigma}\sigma^{cd}_{-\varsigma\gamma'_\varsigma}A_u^{\alpha'_\varsigma}A_v^{\beta'_\varsigma} + \varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\sigma^{cd}_{\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\alpha_\varsigma}A_v^{\beta_\varsigma}) \\
\Leftrightarrow \omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d} = {} & -\tfrac{i}{2}(\varepsilon^{\alpha'_\varsigma}{}_{\beta'_\varsigma\gamma'_\varsigma}\sigma^{cd}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}A_u^{\beta'_\varsigma}A_v^{\gamma'_\varsigma} + \varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}A_v^{\gamma_\varsigma})
\end{aligned}$$ □

推论1.3.4. $R_{uv}{}^{cd} = \partial_u\omega_v^{cd} - \partial_v\omega_u^{cd} + \omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{uv}^{\alpha_\varsigma} = \partial_u A_v^{\alpha_\varsigma} - \partial_v A_u^{\alpha_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}A_v^{\gamma_\varsigma} \\ F_{uv}^{\alpha'_\varsigma} = \partial_u A_v^{\alpha'_\varsigma} - \partial_v A_u^{\alpha'_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha'_\varsigma}{}_{\beta'_\varsigma\gamma'_\varsigma}A_u^{\beta'_\varsigma}A_v^{\gamma'_\varsigma} \end{cases}$

证明: $R_{uv}{}^{cd} = \partial_u\omega_v^{cd} - \partial_v\omega_u^{cd} + \omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d}$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow R_{uv}{}^{cd} = {} & \tfrac{i}{2}(\sigma^{cd}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_u A_v^{\alpha'_\varsigma} + \sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\partial_u A_v^{\alpha_\varsigma}) - \tfrac{i}{2}(\sigma^{cd}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_v A_u^{\alpha'_\varsigma} + \sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\partial_v A_u^{\alpha_\varsigma}) \\
& - \tfrac{i}{2}(\varepsilon^{\alpha'_\varsigma}{}_{\beta'_\varsigma\gamma'_\varsigma}\sigma^{cd}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}A_u^{\beta'_\varsigma}A_v^{\gamma'_\varsigma} + \varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}A_v^{\gamma_\varsigma}) \\
\Leftrightarrow {} & \tfrac{i}{2}(\sigma^{cd}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}F_{uv}^{\alpha'_\varsigma} + \sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{uv}^{\alpha_\varsigma}) = \tfrac{i}{2}\sigma^{cd}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}(\partial_{[u}A_{v]}{}^{\alpha'_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha'_\varsigma}{}_{\beta'_\varsigma\gamma'_\varsigma}A_u^{\beta'_\varsigma}A_v^{\gamma'_\varsigma}) + \tfrac{i}{2}\sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}(\partial_{[u}A_{v]}{}^{\alpha_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}A_v^{\gamma_\varsigma}) \\
\Leftrightarrow {} & \begin{cases} F_{uv}^{\alpha_\varsigma} = \partial_u A_v^{\alpha_\varsigma} - \partial_v A_u^{\alpha_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}A_v^{\gamma_\varsigma} \\ F_{uv}^{\alpha'_\varsigma} = \partial_u A_v^{\alpha'_\varsigma} - \partial_v A_u^{\alpha'_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha'_\varsigma}{}_{\beta'_\varsigma\gamma'_\varsigma}A_u^{\beta'_\varsigma}A_v^{\gamma'_\varsigma} \end{cases}
\end{aligned}$$ □

推论1.3.5. $\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}\omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d} = -\varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}A_v^{\gamma_\varsigma}$

证明: $\omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d} = -\frac{i}{2}(\varepsilon^{\alpha'_\varsigma}{}_{\beta'_\varsigma\gamma'_\varsigma}\sigma^{cd}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}A_u^{\beta'_\varsigma}A_v^{\gamma'_\varsigma} + \varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}A_v^{\gamma_\varsigma})$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \tfrac{i}{2}\sigma^{\rho_\varsigma}_{\varsigma cd}\omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d} = \tfrac{1}{4}\sigma^{\rho_\varsigma}_{\varsigma cd}(\varepsilon_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}{}^{\gamma'_\varsigma}\sigma^{cd}_{-\varsigma\gamma'_\varsigma}A_u^{\alpha'_\varsigma}A_v^{\beta'_\varsigma} + \varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\sigma^{cd}_{\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\alpha_\varsigma}A_v^{\beta_\varsigma}) \\
& \Leftrightarrow \tfrac{i}{2}\sigma^{\rho_\varsigma}_{\varsigma cd}\omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d} = 0 - \varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\delta^{\rho_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}A_u^{\alpha_\varsigma}A_v^{\beta_\varsigma} \\
& \Leftrightarrow \tfrac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}\omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d} = -\varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}A_v^{\gamma_\varsigma}
\end{aligned}$$ □

推论1.3.6. $F_{uv}^{\alpha_\varsigma} = \partial_u A_v^{\alpha_\varsigma} - \partial_v A_u^{\alpha_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}A_v^{\gamma_\varsigma} \Leftrightarrow F_{uv}^{\alpha'_\varsigma} = \partial_u A_v^{\alpha'_\varsigma} - \partial_v A_u^{\alpha'_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha'_\varsigma}{}_{\beta'_\varsigma\gamma'_\varsigma}A_u^{\beta'_\varsigma}A_v^{\gamma'_\varsigma}$

证明: $F_{uv}^{\alpha_\varsigma} = \partial_u A_v^{\alpha_\varsigma} - \partial_v A_u^{\alpha_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}A_v^{\gamma_\varsigma}$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow [F_{uv}^{\alpha_\varsigma}]^* = F_{u'v'}^{*\alpha'_\varsigma} = \partial_{u'}A_{v'}^{*\alpha'_\varsigma} - \partial_{v'}A_{u'}^{*\alpha'_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha'_\varsigma}{}_{\beta'_\varsigma\gamma'_\varsigma}A_{u'}^{*\beta'_\varsigma}A_{v'}^{*\gamma'_\varsigma} \\
& \Leftrightarrow F_{u'v'}^{*\alpha'_\varsigma} = \eta^u_{u'}\eta^v_{v'}(\partial_u A_v^{\alpha'_\varsigma} - \partial_v A_u^{\alpha'_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha'_\varsigma}{}_{\beta'_\varsigma\gamma'_\varsigma}A_u^{\beta'_\varsigma}A_v^{\gamma'_\varsigma}) \\
& \Leftrightarrow \eta^u_{u'}\eta^v_{v'}F_{uv}^{\alpha'_\varsigma} = \eta^u_{u'}\eta^v_{v'}(\partial_u A_v^{\alpha'_\varsigma} - \partial_v A_u^{\alpha'_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha'_\varsigma}{}_{\beta'_\varsigma\gamma'_\varsigma}A_u^{\beta'_\varsigma}A_v^{\gamma'_\varsigma}) \\
& \Leftrightarrow F_{uv}^{\alpha'_\varsigma} = \partial_u A_v^{\alpha'_\varsigma} - \partial_v A_u^{\alpha'_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha'_\varsigma}{}_{\beta'_\varsigma\gamma'_\varsigma}A_u^{\beta'_\varsigma}A_v^{\gamma'_\varsigma}
\end{aligned}$$ □

推论1.3.7. $R_{uv}{}^{cd} = \partial_u\omega_v^{cd} - \partial_v\omega_u^{cd} + \omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d} \Leftrightarrow F_{uv}^{\alpha_\varsigma} = \partial_u A_v^{\alpha_\varsigma} - \partial_v A_u^{\alpha_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}A_v^{\gamma_\varsigma}$

推论1.3.8. $R_{uv}{}^{cd} = \partial_u\omega_v^{cd} - \partial_v\omega_u^{cd} + \omega_{[u}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d} \Leftrightarrow F_{uv}^{\alpha'_\varsigma} = \partial_u A_v^{\alpha'_\varsigma} - \partial_v A_u^{\alpha'_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha'_\varsigma}{}_{\beta'_\varsigma\gamma'_\varsigma}A_u^{\beta'_\varsigma}A_v^{\gamma'_\varsigma}$

1.4 引力场物理量的复张量描述

1.4.1 引力场的复张量

定义1.4.1. $\begin{cases}\text{曲率复张量}\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} := \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}F^{ab\beta_\kappa} = \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\frac{i}{2}\sigma^{\beta_\kappa}_{\kappa cd}R^{abcd} \\ \text{外尔复张量}C^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} := \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}C^{ab\beta_\kappa} = \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\frac{i}{2}\sigma^{\beta_\kappa}_{\kappa cd}C^{abcd}\end{cases}$

推论1.4.1. $\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = C^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} - \frac{1}{2}\varsigma\kappa\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ac}\sigma^{\beta_\kappa c}_{\kappa\ \ \ b}R^{ab} + \frac{1}{3}\varsigma\kappa\delta_{\varsigma\kappa}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa}R$

证明: $\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} := \frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}F^{ab\beta_\kappa}$

$\Rightarrow \psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}(C^{ab\beta_\kappa} + \frac{i}{2}\sigma^{\beta_\kappa a}_{\kappa\ \ \ c}R^{cb} - \frac{i}{2}\sigma^{\beta_\kappa b}_{\kappa\ \ \ c}R^{ca} - \frac{i}{6}\sigma^{\beta_\kappa ab}_{\kappa}R)$

$\Rightarrow \psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = C^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} + \frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\kappa b}_{\kappa\ \ \ c}R^{ca} - \frac{1}{3}\delta_{\varsigma\kappa}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa}R$

$\Rightarrow \psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = C^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} + \frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ac}\sigma^{\beta_\kappa c}_{\kappa\ \ \ b}R^{ab} - \frac{1}{3}\delta_{\varsigma\kappa}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa}R$ □

推论1.4.2. $\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} + \frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ac}\sigma^{\beta_\varsigma c}_{\varsigma\ \ \ b}R^{ab} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}R$

推论1.4.3. $\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} + \frac{1}{6}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}R$

证明: $\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} + \frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ac}\sigma^{\beta_\varsigma c}_{\varsigma\ \ \ b}R^{ab} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}R$

$\Leftrightarrow \psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} + \frac{1}{2}(\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta_{ab} + i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\sigma^{\gamma_\varsigma}_{\varsigma ab})R^{ab} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}R$

$\Leftrightarrow \psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} + \frac{1}{6}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}R$ □

推论1.4.4. $\frac{1}{2}(F^{ab\beta_\kappa} - \varsigma * F^{ab\beta_\kappa}) = \frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa}$

推论1.4.5. $\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\frac{1}{2}(F^{ab\beta_\kappa} - \varsigma * F^{ab\beta_\kappa})$

推论1.4.6. $\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = -\frac{i}{2}\varsigma\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab} * F^{ab\beta_\kappa}$

推论1.4.7. $\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}(F^{ab\beta_\kappa} + \varsigma * F^{ab\beta_\kappa}) = 0$

推论1.4.8. $F^{ab\beta_\kappa} - \varsigma * F^{ab\beta_\kappa} = -\frac{1}{4}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}(F^{cd\beta_\kappa} - \varsigma * F^{cd\beta_\kappa})$

推论1.4.9. $F^{ab\beta_\kappa} = \frac{i}{2}(\sigma^{ab}_{-\alpha'}\psi^{\alpha'\beta_\kappa} + \sigma^{ab}_{+\alpha}\psi^{\alpha\beta_\kappa}), *F^{ab\beta_\kappa} = \frac{i}{2}(\sigma^{ab}_{-\alpha'}\psi^{\alpha'\beta_\kappa} - \sigma^{ab}_{+\alpha}\psi^{\alpha\beta_\kappa})$

推论1.4.10. $\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = -\frac{1}{4}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\kappa}_{\kappa cd}R^{abcd} = \frac{1}{4}\kappa\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\kappa}_{\kappa cd}R^{ab(*cd)} = \frac{1}{4}\varsigma\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\kappa}_{\kappa cd}R^{(*ab)(*cd)} = -\frac{1}{4}\varsigma\kappa\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\kappa}_{\kappa cd}R^{(*ab)cd}$

1.4.2 引力场的复张量$\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa}$的性质

推论1.4.11. $\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = \psi^{\beta_\kappa\alpha_\varsigma}$

证明: $R^{abcd} = R^{cdab}$

$\Rightarrow -\frac{1}{4}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\kappa}_{\kappa cd}R^{abcd} = -\frac{1}{4}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\kappa}_{\kappa cd}R^{cdab}$

$\Rightarrow \psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = \psi^{\beta_\kappa\alpha_\varsigma}$ □

推论1.4.12. $\psi^{x_\varsigma x_\varsigma} + \psi^{y_\varsigma y_\varsigma} + \psi^{z_\varsigma z_\varsigma} = \frac{1}{2}R$

证明: $\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd} = -(S_{abcd} - \varsigma\varepsilon_{abcd})$

$\Rightarrow -\frac{1}{4}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}R^{abcd} = \frac{1}{4}(S_{abcd} - \varsigma\varepsilon_{abcd})R^{abcd}$

$\Rightarrow -\frac{1}{4}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}R^{abcd} = \frac{1}{2}({R_{ab}}^{ab} - \varsigma {R_{*ab}}^{ab})$

$\Rightarrow \psi^{x_\varsigma x_\varsigma} + \psi^{y_\varsigma y_\varsigma} + \psi^{z_\varsigma z_\varsigma} = \frac{1}{2}({R_{ab}}^{ab} - \varsigma {R_{*ab}}^{ab})$

$\Rightarrow \psi^{x_\varsigma x_\varsigma} + \psi^{y_\varsigma y_\varsigma} + \psi^{z_\varsigma z_\varsigma} = \frac{1}{2}R$ □

推论1.4.13. $C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = \psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{\psi^{\gamma_\varsigma}}_{\gamma_\varsigma}$

推论1.4.14. $\psi^{\alpha'_\varsigma\beta'_\kappa} = (\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa})^*$

证明: $\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = -\frac{1}{4}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\kappa}_{\kappa cd}R^{abcd}$

$\Leftrightarrow (\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa})^* = -\frac{1}{4}(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\kappa}_{\kappa cd}R^{abcd})^* = -\frac{1}{4}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma^{\beta'_\kappa}_{\kappa c'd'}\eta^{a'}_a\eta^{b'}_b\eta^{c'}_c\eta^{d'}_d R^{abcd}$

$\Leftrightarrow (\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa})^* = -\frac{1}{4}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\beta'_\kappa}_{-\kappa cd}R^{abcd}$

$\Leftrightarrow \psi^{\alpha'_\varsigma\beta'_\kappa} = (\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa})^*$ □

1.4.3 引力场曲率张量的展开

推论1.4.15. $R^{abcd}=-\frac{1}{4}(\sigma^{ab}_{-\alpha'}\sigma^{cd}_{-\beta'}\psi^{\alpha'\beta'}+\sigma^{ab}_{+\alpha}\sigma^{cd}_{-\beta'}\psi^{\alpha\beta'}+\sigma^{ab}_{-\alpha'}\sigma^{cd}_{+\beta}\psi^{\alpha'\beta}+\sigma^{ab}_{+\alpha}\sigma^{cd}_{+\beta}\psi^{\alpha\beta})$

证明: $R^{abcd}=\frac{i}{2}(\sigma^{cd}_{-\beta'}F^{ab\beta'}+\sigma^{cd}_{+\beta}F^{ab\beta})$
$\Leftrightarrow R^{abcd}=-\frac{1}{4}[\sigma^{cd}_{-\beta'}(\sigma^{ab}_{-\alpha'}\psi^{\alpha'\beta'}+\sigma^{ab}_{+\alpha}\psi^{\alpha\beta'})+\sigma^{cd}_{+\beta}(\sigma^{ab}_{-\alpha'}\psi^{\alpha'\beta}+\sigma^{ab}_{+\alpha}\psi^{\alpha\beta})]$
$\Leftrightarrow R^{abcd}=-\frac{1}{4}(\sigma^{ab}_{-\alpha'}\sigma^{cd}_{-\beta'}\psi^{\alpha'\beta'}+\sigma^{ab}_{+\alpha}\sigma^{cd}_{-\beta'}\psi^{\alpha\beta'}+\sigma^{ab}_{-\alpha'}\sigma^{cd}_{+\beta}\psi^{\alpha'\beta}+\sigma^{ab}_{+\alpha}\sigma^{cd}_{+\beta}\psi^{\alpha\beta})$ □

推论1.4.16. $R^{ab(*cd)}=-\frac{1}{4}(\sigma^{ab}_{-\alpha'}\sigma^{cd}_{-\beta'}\psi^{\alpha'\beta'}+\sigma^{ab}_{+\alpha}\sigma^{cd}_{-\beta'}\psi^{\alpha\beta'}-\sigma^{ab}_{-\alpha'}\sigma^{cd}_{+\beta}\psi^{\alpha'\beta}-\sigma^{ab}_{+\alpha}\sigma^{cd}_{+\beta}\psi^{\alpha\beta})$

推论1.4.17. $R^{(*ab)cd}=-\frac{1}{4}(\sigma^{ab}_{-\alpha'}\sigma^{cd}_{-\beta'}\psi^{\alpha'\beta'}-\sigma^{ab}_{+\alpha}\sigma^{cd}_{-\beta'}\psi^{\alpha\beta'}+\sigma^{ab}_{-\alpha'}\sigma^{cd}_{+\beta}\psi^{\alpha'\beta}-\sigma^{ab}_{+\alpha}\sigma^{cd}_{+\beta}\psi^{\alpha\beta})$

推论1.4.18. $R^{(*ab)(*cd)}=-\frac{1}{4}(\sigma^{ab}_{-\alpha'}\sigma^{cd}_{-\beta'}\psi^{\alpha'\beta'}-\sigma^{ab}_{+\alpha}\sigma^{cd}_{-\beta'}\psi^{\alpha\beta'}-\sigma^{ab}_{-\alpha'}\sigma^{cd}_{+\beta}\psi^{\alpha'\beta}+\sigma^{ab}_{+\alpha}\sigma^{cd}_{+\beta}\psi^{\alpha\beta})$

推论1.4.19. $R^{ab}=\frac{1}{4}\delta^{ab}R+\frac{1}{2}(\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'})^{ab}\psi^{\alpha\beta'}=\frac{1}{4}\delta^{ab}R-\delta_{cd}S^{ac}{}_{AB}S^{db}{}_{C'D'}\psi^{ABC'D'}$

证明: $R^{ab}=\frac{1}{4}(\sigma_{-\alpha'}\sigma_{-\beta'}\psi^{\alpha'\beta'}+\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'}\psi^{\alpha\beta'}+\sigma_{-\alpha'}\sigma_{+\beta}\psi^{\alpha'\beta}+\sigma_{+\alpha}\sigma_{+\beta}\psi^{\alpha\beta})^{ab}$
$\Leftrightarrow R^{ab}=\frac{1}{8}(\{\sigma_{-\alpha'},\sigma_{-\beta'}\}\psi^{\alpha'\beta'}+2\{\sigma_{+\alpha},\sigma_{-\beta'}\}\psi^{\alpha\beta'}+\{\sigma_{+\alpha},\sigma_{+\beta}\}\psi^{\alpha\beta})^{ab})$
$\Leftrightarrow R^{ab}=\frac{1}{8}(R+4\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'}\psi^{\alpha\beta'}+R)^{ab}$
$\Leftrightarrow R^{ab}=\frac{1}{4}\delta^{ab}R+\frac{1}{2}(\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'})^{ab}\psi^{\alpha\beta'}=\frac{1}{4}\delta^{ab}R-\delta_{cd}S^{ac}{}_{AB}S^{db}{}_{C'D'}\psi^{ABC'D'}$ □

推论1.4.20. $\frac{1}{4}(\sigma^{\alpha}_{+}\sigma^{\beta'}_{-})_{ab}(\sigma_{+\rho}\sigma_{-\sigma'})^{ab}=\delta^{\alpha}{}_{\rho}\delta^{\beta'}{}_{\sigma'}$

推论1.4.21. $\psi^{\alpha_\varsigma\beta'_\varsigma}=\frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ac}\sigma^{\beta'_\varsigma c}_{-\varsigma\ b}R^{ab}=\frac{1}{2}(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{-\varsigma})_{ab}R^{ab}$

更一般的证明，不依赖各种量的定义

推论1.4.22. $\psi^{\alpha\beta'}=\frac{1}{2}(\sigma^{\alpha}_{+}\sigma^{\beta'}_{-})_{ab}R^{ab}\Leftrightarrow R^{ab}=\frac{1}{4}\delta^{ab}R+\frac{1}{2}(\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'})^{ab}\psi^{\alpha\beta'}$

证明: $\psi^{\alpha\beta'}=\frac{1}{2}(\sigma^{\alpha}_{+}\sigma^{\beta'}_{-})_{ab}R^{ab}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'})^{ab}\psi^{\alpha\beta'}=\frac{1}{4}(\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'})^{ab}(\sigma^{\alpha}_{+}\sigma^{\beta'}_{-})_{cd}R^{cd}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'})^{ab}\psi^{\alpha\beta'}=\frac{1}{4}(\sigma^{ae}_{+\alpha}\sigma_{-\beta'e}{}^{b})(\sigma^{\alpha}_{+cf}\sigma^{\beta' f}_{-\ \ d})R^{cd}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'})^{a}{}_{b}\psi^{\alpha\beta'}=\frac{1}{4}(\sigma^{ae}_{+\alpha}\sigma^{\alpha cf}_{+})(\sigma_{-\beta' eb}\sigma^{\beta'}_{-\ fd})R_{c}{}^{d}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'})^{a}{}_{b}\psi^{\alpha\beta'}=\frac{1}{4}(S^{aecf}-\varepsilon^{aecf})(S_{ebfd}+\varepsilon_{ebfd})R_{c}{}^{d}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'})^{a}{}_{b}\psi^{\alpha\beta'}=\frac{1}{4}(2\delta^{ac}\delta_{bd}+2\delta^{a}{}_{d}\delta_{b}{}^{c}-\delta^{a}{}_{b}\delta^{c}{}_{d})R_{c}{}^{d}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'})^{a}{}_{b}\psi^{\alpha\beta'}=\frac{1}{4}(4R^{a}{}_{b}-\delta^{a}{}_{b}R)$
$\Leftrightarrow R^{ab}=\frac{1}{4}\delta^{ab}R+\frac{1}{2}(\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'})^{ab}\psi^{\alpha\beta'}$ □

定理1.4.1. $R^{ab}{}_{;b}\equiv\frac{1}{2}R^{;a}\Leftrightarrow(\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'})^{ab}D_b\psi^{\alpha\beta'}\equiv\frac{1}{2}R^{;a}$

证明: $R^{ab}{}_{;b}\equiv\frac{1}{2}R^{;a}$
$\Leftrightarrow[\frac{1}{4}\delta^{ab}R+\frac{1}{2}(\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'})^{ab}\psi^{\alpha\beta'}]_{;b}\equiv\frac{1}{2}R^{;a}$
$\Leftrightarrow(\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'})^{ab}D_b\psi^{\alpha\beta'}\equiv\frac{1}{2}R^{;a}$ □

1.4.4 引力场曲率张量的合成

推论1.4.23. $R^{abcd}+R^{ab(*cd)}+R^{(*ab)cd}+R^{(*ab)(*cd)}=i\sigma^{ab}_{-\alpha'}i\sigma^{cd}_{-\beta'}\psi^{\alpha'\beta'}$

推论1.4.24. $R^{abcd}+R^{ab(*cd)}-R^{(*ab)cd}-R^{(*ab)(*cd)}=i\sigma^{ab}_{+\alpha}i\sigma^{cd}_{-\beta'}\psi^{\alpha\beta'}$

推论1.4.25. $R^{abcd}-R^{ab(*cd)}+R^{(*ab)cd}-R^{(*ab)(*cd)}=i\sigma^{ab}_{-\alpha'}i\sigma^{cd}_{+\beta}\psi^{\alpha'\beta}$

推论1.4.26. $R^{abcd}-R^{ab(*cd)}-R^{(*ab)cd}+R^{(*ab)(*cd)}=i\sigma^{ab}_{+\alpha}i\sigma^{cd}_{+\beta}\psi^{\alpha\beta}$

统一描述:

推论1.4.27. $R^{abcd}-\kappa R^{ab(*cd)}-\varsigma R^{(*ab)cd}+\varsigma\kappa R^{(*ab)(*cd)}=i\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}i\sigma^{cd}_{\kappa\beta_\kappa}\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa}$

1.4.5 引力场外尔张量的展开

推论1.4.28. $0 = C^{ab} = \frac{1}{4}\delta^{ab}C + \frac{1}{2}(\sigma_{+\alpha}\sigma_{-\beta'})^{ab}C^{\alpha\beta'} \Rightarrow C^{\alpha\beta'} = 0, C^{\alpha'\beta} = 0$

推论1.4.29. $C^{abcd} = -\frac{1}{4}(\sigma^{ab}_{-\alpha'}\sigma^{cd}_{-\beta'}C^{\alpha'\beta'} + \sigma^{ab}_{+\alpha}\sigma^{cd}_{+\beta}C^{\alpha\beta}), C^{\alpha'\beta'} = (C^{\alpha\beta})^*$

推论1.4.30. $C^{(*ab)cd} = C^{ab(*cd)}, C^{abcd} = C^{(*ab)(*cd)}$

1.4.6 引力场源的复张量描述

定义1.4.2. 引力场源旋量$J_a^{\alpha_\varsigma} := \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}J_a{}^{cd}$

仿照电磁场情形的推理，有以下完全类似的结论。

推论1.4.31. $[J_a^{\alpha_\varsigma}]^* = J_{a'}^{*\alpha'_\varsigma} = \eta^a_{a'}J_a^{\alpha'_\varsigma}$

推论1.4.32. $\frac{1}{2}(J_a{}^{cd} - \varsigma * J_a{}^{cd}) = \frac{i}{2}\sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}J_a^{\alpha_\varsigma}$

推论1.4.33. $J_a^{\alpha_\varsigma} = -\frac{i}{2}\varsigma\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd} * J_a{}^{cd}$

推论1.4.34. $\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}(J_a{}^{cd} + \varsigma * J_a{}^{cd}) = 0$

推论1.4.35. $J_a^{\alpha_\varsigma} = \frac{i}{2}\varsigma\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}\frac{1}{2}(J_a{}^{cd} - \varsigma * J_a{}^{cd})$

推论1.4.36. $J_a{}^{cd} - \varsigma * J_a{}^{cd} = -\frac{1}{4}\sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ef}(J_a{}^{ef} - \varsigma * J_a{}^{ef})$

推论1.4.37. $J_a{}^{cd} = \frac{i}{2}(\sigma^{cd}_{-\alpha'}J_a^{\alpha'} + \sigma^{cd}_{+\alpha}J_a^{\alpha}), *J_a{}^{cd} = \frac{i}{2}(\sigma^{cd}_{-\alpha'}J_a^{\alpha'} - \sigma^{cd}_{+\alpha}J_a^{\alpha})$

推论1.4.38. $J_a{}^{cd} = -J_a{}^{dc} \Leftrightarrow J_a{}^{cd} = \frac{i}{2}(\sigma^{cd}_{-\alpha'}J_a^{\alpha'} + \sigma^{cd}_{+\alpha}J_a^{\alpha_\varsigma})$

1.5 引力场物理量的$\frac{1}{2}$-旋量描述 [1,2]

1.5.1 引力场的曲率旋量 [1,2]

定义1.5.1. 引力曲率旋量:
$\psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa} := \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\frac{i\kappa}{\sqrt{2}}\sigma^{C_\kappa D_\kappa}_{\beta_\kappa}\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{i\kappa}{\sqrt{2}}\sigma^{C_\kappa D_\kappa}_{\beta_\kappa}F^{ab\beta_\kappa} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{i\kappa}{\sqrt{2}}S_{cd}{}^{C_\kappa D_\kappa}R^{abcd}$

推论1.5.1. $\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{i\kappa}{\sqrt{2}}\sigma^{\beta_\kappa}_{C_\kappa D_\kappa}\psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa}$

推论1.5.2. $\psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} = C^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} + \frac{1}{12}(\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma} - \varepsilon^{A_\varsigma D_\varsigma}\varepsilon^{C_\varsigma B_\varsigma})R$

证明: $\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} + \frac{1}{6}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}R$
$\Leftrightarrow \psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} = C^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} - \frac{1}{12}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}R$
$\Leftrightarrow \psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} = C^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} - \frac{1}{12}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}R$
$\Leftrightarrow \psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} = C^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} + \frac{1}{12}(\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma} - \varepsilon^{A_\varsigma D_\varsigma}\varepsilon^{C_\varsigma B_\varsigma})R$ □

推论1.5.3. $\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = \psi^{\beta_\kappa\alpha_\varsigma} \Leftrightarrow \psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa} = \psi^{B_\varsigma A_\varsigma C_\kappa D_\kappa}, \psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa} = \psi^{A_\varsigma B_\varsigma D_\kappa C_\kappa}, \psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa} = \psi^{C_\kappa D_\kappa A_\varsigma B_\varsigma}$

推论1.5.4. $\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = \psi^{\beta_\varsigma\alpha_\varsigma} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi^{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma} \\ \psi^{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma} = \psi^{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma} = \psi^{1_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma} = \psi^{2_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma} \\ \psi^{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma} = \psi^{2_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma}, \psi^{1_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma} = \psi^{1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma} = \psi^{2_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma} = \psi^{2_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma} \\ \psi^{1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma} = \psi^{2_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma} = \psi^{2_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma} = \psi^{2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma} \\ \psi^{2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma} \end{cases}$

推论1.5.5. $\psi^{A_\varsigma B_\varsigma}{}_{A_\varsigma B_\varsigma} = (-\varsigma)\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}(-\varsigma)\varepsilon_{B_\varsigma D_\varsigma}\psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} = 2(\psi^{1_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma} - \psi^{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma})$

推论1.5.6. $\psi^{A_\varsigma B_\varsigma}{}_{A_\varsigma B_\varsigma} = \delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = \frac{1}{2}R$

证明: $\psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa}:=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{i\kappa}{\sqrt{2}}\sigma_{\beta_\kappa}^{C_\kappa D_\kappa}\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa}$
$\Rightarrow \psi^{A_\varsigma B_\varsigma}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}=-\frac{1}{2}\sigma_{\alpha_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma A_\varsigma B_\varsigma}\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}$
$\Rightarrow \psi^{A_\varsigma B_\varsigma}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}=\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}$ □

推论1.5.7. $C^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}=\psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}-\frac{1}{6}(\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}-\varepsilon^{A_\varsigma D_\varsigma}\varepsilon^{C_\varsigma B_\varsigma})\psi^{E_\varsigma F_\varsigma}{}_{E_\varsigma F_\varsigma}$

推论1.5.8. $\psi^{1_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma}-\psi^{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma}=\frac{1}{4}R$

推论1.5.9. $\psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}$为全对称旋量$\Leftrightarrow\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}$为无迹对称张量,即$\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}=\psi^{\beta_\varsigma\alpha_\varsigma},\psi^{x_\varsigma x_\varsigma}+\psi^{y_\varsigma y_\varsigma}+\psi^{z_\varsigma z_\varsigma}=0$

1.5.2 引力场的YM曲率张量$F_{ab}^{\alpha_\varsigma}$的约束条件

定理1.5.1.
$$\begin{cases}\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}=\psi^{\beta_\varsigma\alpha_\varsigma}\\ \psi^{x_\varsigma x_\varsigma}+\psi^{y_\varsigma y_\varsigma}+\psi^{z_\varsigma z_\varsigma}=\frac{1}{2}R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}F_{yz}^{y_\varsigma}-\varsigma F_{x\pi}^{y_\varsigma}=F_{zx}^{x_\varsigma}-\varsigma F_{y\pi}^{x_\varsigma}\\ F_{zx}^{z_\varsigma}-\varsigma F_{y\pi}^{z_\varsigma}=F_{xy}^{y_\varsigma}-\varsigma F_{z\pi}^{y_\varsigma}\\ F_{xy}^{x_\varsigma}-\varsigma F_{z\pi}^{x_\varsigma}=F_{yz}^{z_\varsigma}-\varsigma F_{x\pi}^{z_\varsigma}\\ F_{yz}^{x_\varsigma}-\varsigma F_{x\pi}^{x_\varsigma}+F_{zx}^{y_\varsigma}-\varsigma F_{y\pi}^{y_\varsigma}+F_{xy}^{z_\varsigma}-\varsigma F_{z\pi}^{z_\varsigma}=R\end{cases}$$

证明: $\psi^{x_\varsigma y_\varsigma}=\psi^{y_\varsigma x_\varsigma}$
$\Leftrightarrow\sigma_{\varsigma cd}^{x_\varsigma}F^{cdy_\varsigma}=\sigma_{\varsigma cd}^{y_\varsigma}F^{cdx_\varsigma}$
$\Leftrightarrow F_{yz}^{y_\varsigma}-\varsigma F_{x\pi}^{y_\varsigma}=F_{zx}^{x_\varsigma}-\varsigma F_{y\pi}^{x_\varsigma}$ □

证明: $\psi^{y_\varsigma z_\varsigma}=\psi^{z_\varsigma y_\varsigma}$
$\Leftrightarrow\sigma_{\varsigma cd}^{y_\varsigma}F^{cdz_\varsigma}=\sigma_{\varsigma cd}^{z_\varsigma}F^{cdy_\varsigma}$
$\Leftrightarrow F_{zx}^{z_\varsigma}-\varsigma F_{y\pi}^{z_\varsigma}=F_{xy}^{y_\varsigma}-\varsigma F_{z\pi}^{y_\varsigma}$ □

证明: $\psi^{z_\varsigma x_\varsigma}=\psi^{x_\varsigma z_\varsigma}$
$\Leftrightarrow\sigma_{\varsigma cd}^{z_\varsigma}F^{cdx_\varsigma}=\sigma_{\varsigma cd}^{x_\varsigma}F^{cdz_\varsigma}$
$\Leftrightarrow F_{xy}^{x_\varsigma}-\varsigma F_{z\pi}^{x_\varsigma}=F_{yz}^{z_\varsigma}-\varsigma F_{x\pi}^{z_\varsigma}$ □

证明: $\psi^{x_\varsigma x_\varsigma}+\psi^{y_\varsigma y_\varsigma}+\psi^{z_\varsigma z_\varsigma}=\frac{1}{2}R$
$\Leftrightarrow\frac{i}{2}[\sigma_{\varsigma cd}^{x_\varsigma}F^{cdx_\varsigma}+\sigma_{\varsigma cd}^{y_\varsigma}F^{cdy_\varsigma}+\sigma_{\varsigma cd}^{z_\varsigma}F^{cdz_\varsigma}]=\frac{1}{2}R$
$\Leftrightarrow F_{yz}^{x_\varsigma}-\varsigma F_{x\pi}^{x_\varsigma}+F_{zx}^{y_\varsigma}-\varsigma F_{y\pi}^{y_\varsigma}+F_{xy}^{z_\varsigma}-\varsigma F_{z\pi}^{z_\varsigma}=R$ □

1.5.3 引力场Ashtekar变量$A_u^{\alpha_\varsigma}$的约束条件

定理1.5.2.
$$\begin{cases}F_{yz}^{y_\varsigma}-\varsigma F_{x\pi}^{y_\varsigma}=F_{zx}^{x_\varsigma}-\varsigma F_{y\pi}^{x_\varsigma}\\ F_{zx}^{z_\varsigma}-\varsigma F_{y\pi}^{z_\varsigma}=F_{xy}^{y_\varsigma}-\varsigma F_{z\pi}^{y_\varsigma}\\ F_{xy}^{x_\varsigma}-\varsigma F_{z\pi}^{x_\varsigma}=F_{yz}^{z_\varsigma}-\varsigma F_{x\pi}^{z_\varsigma}\\ F_{yz}^{x_\varsigma}-\varsigma F_{x\pi}^{x_\varsigma}+F_{zx}^{y_\varsigma}-\varsigma F_{y\pi}^{y_\varsigma}\\ +F_{xy}^{z_\varsigma}-\varsigma F_{z\pi}^{z_\varsigma}=R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}F_{uv}^{\alpha_\varsigma}=\partial_uA_v^{\alpha_\varsigma}-\partial_vA_u^{\alpha_\varsigma}-\varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}A_v^{\gamma_\varsigma}\\ (\partial_yA_z^{y_\varsigma}-\partial_zA_y^{y_\varsigma}-A_y^{[z_\varsigma}A_z^{x_\varsigma]})-\varsigma(\partial_xA_\pi^{y_\varsigma}-\partial_\pi A_x^{y_\varsigma}-A_x^{[z_\varsigma}A_\pi^{x_\varsigma]})\\ =(\partial_zA_x^{x_\varsigma}-\partial_xA_z^{x_\varsigma}-A_z^{[y_\varsigma}A_x^{z_\varsigma]})-\varsigma(\partial_yA_\pi^{x_\varsigma}-\partial_\pi A_y^{x_\varsigma}-A_y^{[y_\varsigma}A_\pi^{z_\varsigma]})\\ (\partial_zA_x^{z_\varsigma}-\partial_xA_z^{z_\varsigma}-A_z^{[x_\varsigma}A_x^{y_\varsigma]})-\varsigma(\partial_yA_\pi^{z_\varsigma}-\partial_\pi A_y^{z_\varsigma}-A_y^{[x_\varsigma}A_\pi^{y_\varsigma]})\\ =(\partial_xA_y^{y_\varsigma}-\partial_yA_x^{y_\varsigma}-A_x^{[z_\varsigma}A_y^{x_\varsigma]})-\varsigma(\partial_zA_\pi^{y_\varsigma}-\partial_\pi A_z^{y_\varsigma}-A_z^{[z_\varsigma}A_\pi^{x_\varsigma]})\\ (\partial_xA_y^{x_\varsigma}-\partial_yA_x^{x_\varsigma}-A_x^{[y_\varsigma}A_y^{z_\varsigma]})-\varsigma(\partial_zA_\pi^{x_\varsigma}-\partial_\pi A_z^{x_\varsigma}-A_z^{[y_\varsigma}A_\pi^{z_\varsigma]})\\ =(\partial_yA_z^{z_\varsigma}-\partial_zA_y^{z_\varsigma}-A_y^{[x_\varsigma}A_z^{y_\varsigma]})-\varsigma(\partial_xA_\pi^{z_\varsigma}-\partial_\pi A_x^{z_\varsigma}-A_x^{[x_\varsigma}A_\pi^{y_\varsigma]})\\ (\partial_yA_z^{x_\varsigma}-\partial_zA_y^{x_\varsigma}-A_y^{[y_\varsigma}A_z^{z_\varsigma]})-\varsigma(\partial_xA_\pi^{x_\varsigma}-\partial_\pi A_x^{x_\varsigma}-A_x^{[y_\varsigma}A_\pi^{z_\varsigma]})\\ +(\partial_zA_x^{y_\varsigma}-\partial_xA_z^{y_\varsigma}-A_z^{[z_\varsigma}A_x^{x_\varsigma]})-\varsigma(\partial_yA_\pi^{y_\varsigma}-\partial_\pi A_y^{y_\varsigma}-A_y^{[z_\varsigma}A_\pi^{x_\varsigma]})\\ +(\partial_xA_y^{z_\varsigma}-\partial_yA_x^{z_\varsigma}-A_x^{[x_\varsigma}A_y^{y_\varsigma]})-\varsigma(\partial_zA_\pi^{z_\varsigma}-\partial_\pi A_z^{z_\varsigma}-A_z^{[x_\varsigma}A_\pi^{y_\varsigma]})=R\end{cases}$$

引力场Ashtekar变量$A_u^{\alpha_\varsigma}$的规范条件：$\partial^uA_u^{\alpha_\varsigma}=0,A_\pi^{\alpha_\varsigma}=0$

1.5.4 引力场的外尔旋量 [1,2]

定义1.5.2. 引力外尔旋量:
$C^{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa} := \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\frac{i\kappa}{\sqrt{2}}\sigma^{C_\kappa D_\kappa}_{\beta_\kappa}C^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{i\kappa}{\sqrt{2}}\sigma^{C_\kappa D_\kappa}_{\beta_\kappa}C^{ab\beta_\kappa} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{i\kappa}{\sqrt{2}}S_{cd}{}^{C_\kappa D_\kappa}C^{abcd}$

推论1.5.10. $C^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{i\kappa}{\sqrt{2}}\sigma^{\beta_\kappa}_{C_\kappa D_\kappa}C^{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa}$

推论1.5.11. $C = 0$

推论1.5.12. $C^{\alpha\beta'} = 0, C^{\alpha'\beta} = 0 \Leftrightarrow C^{ABC'D'} = 0, C^{A'B'CD} = 0$

推论1.5.13. $C^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = C^{\beta_\kappa\alpha_\varsigma} \Leftrightarrow C^{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa} = C^{B_\varsigma A_\varsigma C_\kappa D_\kappa}, C^{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa} = C^{A_\varsigma B_\varsigma D_\kappa C_\kappa}, C^{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa} = C^{C_\kappa D_\kappa A_\varsigma B_\varsigma}$

推论1.5.14. $C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = C^{\beta_\varsigma\alpha_\varsigma} \Leftrightarrow \begin{cases} C^{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma} \\ C^{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma} = C^{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma} = C^{1_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma} = C^{2_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma} \\ C^{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma} = C^{2_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma}, C^{1_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma} = C^{1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma} = C^{2_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma} = C^{2_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma} \\ C^{1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma} = C^{2_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma} = C^{2_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma} = C^{2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma} \\ C^{2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma} \end{cases}$

推论1.5.15. $C^{A_\varsigma B_\varsigma}{}_{A_\varsigma B_\varsigma} = (-\varsigma)\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}(-\varsigma)\varepsilon_{B_\varsigma D_\varsigma}C^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} = 2(C^{1_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma} - C^{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma})$

推论1.5.16. $C^{A_\varsigma B_\varsigma}{}_{A_\varsigma B_\varsigma} = \delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = 0$

推论1.5.17. $C^{1_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma} - C^{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma} = 0$

推论1.5.18. $\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{\alpha_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma}C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = 0 \Leftrightarrow (\sigma, -i\varsigma)_{\alpha_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma}\tilde{C}^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = 0$

推论1.5.19. $C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = C^{\beta_\varsigma\alpha_\varsigma}, C^{x_\varsigma x_\varsigma} + C^{y_\varsigma y_\varsigma} + C^{z_\varsigma z_\varsigma} = 0$

推论1.5.20. $C^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}$是全对称旋量

1.5.5 引力场的外尔2-旋量

定义1.5.3. $C^{k_\varsigma} := \Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}(2)C^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}, C_{k_\varsigma} := \Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}_{k_\varsigma}(2)C_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}$

推论1.5.21. $C^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} = \Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}_{k_\varsigma}(2)C^{k_\varsigma}, C_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} = \Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}(2)C_{k_\varsigma}$

推论1.5.22. $C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = \Gamma^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}_{k_\varsigma}(2)C^{k_\varsigma}, C^{k_\varsigma} = \Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}(2)C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}$

1.5.6 引力场源的矢量-旋量描述 [1,2]

定义1.5.4. 引力场源旋量$J^{A_\varsigma B_\varsigma}_a := \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}J^{\alpha_\varsigma}_a = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S_{cd}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}J_a{}^{cd}$

仿照电磁场情形的推理，有以下完全类似的结论。

推论1.5.23. $J^{A_\varsigma B_\varsigma}_a = J^{B_\varsigma A_\varsigma}_a$

推论1.5.24. $J^{A_\varsigma B_\varsigma}_a := \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}J^{\alpha_\varsigma}_a \Leftrightarrow J^{\alpha_\varsigma}_a = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}J^{A_\varsigma B_\varsigma}_a$

推论1.5.25. $\frac{1}{2}(J_a{}^{cd} - \varsigma * J_a{}^{cd}) = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S^{cd}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}J^{A_\varsigma B_\varsigma}_a \Leftrightarrow J^{A_\varsigma B_\varsigma}_a = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S_{cd}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{1}{2}(J_a{}^{cd} - \varsigma * J_a{}^{cd})$

推论1.5.26. $J^{A_\varsigma B_\varsigma}_a = \frac{-i}{\sqrt{2}}S_{cd}{}^{A_\varsigma B_\varsigma} * J_a{}^{cd}$

推论1.5.27. $J_a{}^{cd} - \varsigma * J_a{}^{cd} = -\frac{1}{2}S^{cd}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}S_{ef}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}(J_a{}^{ef} - \varsigma * J_a{}^{ef})$

推论1.5.28. $J_a{}^{cd} = \frac{i}{\sqrt{2}}(S^{cdA'B'}J_{aA'B'} + S^{cd}{}_{AB}J_a{}^{AB}), *J_a{}^{cd} = \frac{i}{\sqrt{2}}(S^{cdA'B'}J_{aA'B'} - S^{cd}{}_{AB}J_a{}^{AB})$

推论1.5.29. $J_a{}^{cd} = -J_a{}^{dc} \Leftrightarrow J_a{}^{cd} = \frac{i}{\sqrt{2}}(S^{cdA'B'}J_{aA'B'} + S^{cd}{}_{AB}J_a{}^{AB})$

1.5.7 引力场源的$\frac{1}{2}$-旋量描述 [1,2]

定义1.5.5. 引力场源旋量$J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma C_\kappa D_\kappa} := \varsigma\varepsilon^{B_\varsigma A_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}J_a^{C_\kappa D_\kappa}$

推论1.5.30. $J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma C_\kappa D_\kappa} = \varsigma\varepsilon^{B_\varsigma A_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\frac{i\kappa}{\sqrt{2}}\sigma^{C_\kappa D_\kappa}_{\alpha_\kappa}J_a^{\alpha_\varsigma} = \varsigma\varepsilon^{B_\varsigma A_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\frac{i\kappa}{\sqrt{2}}S_{cd}{}^{C_\kappa D_\kappa}J_a{}^{cd}$

推论1.5.31. $J_a{}^{C_\kappa D_\kappa} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}(-\varsigma)\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma C_\kappa D_\kappa}$

推论1.5.32. $J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma C_\kappa D_\kappa} = J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma D_\kappa C_\kappa}$

推论1.5.33. $J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} = \frac{\varsigma}{2}\varepsilon^{B_\varsigma A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}J_a^{\alpha_\varsigma} = \frac{\varsigma}{2}\varepsilon^{B_\varsigma A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}S_{cd}{}^{C_\varsigma D_\varsigma}J_a{}^{cd}$

推论1.5.34. $J_a^{\alpha_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}(-\varsigma)\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} = \frac{\varsigma}{2}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}$

推论1.5.35. $J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} = J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma D_\varsigma C_\varsigma} \Leftrightarrow \begin{cases} J_{1'_\varsigma}{}^{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma} \\ J_{1'_\varsigma}{}^{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma} = J_{1'_\varsigma}{}^{1_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma}, J_{1'_\varsigma}{}^{2_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma} = J_{1'_\varsigma}{}^{2_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma} \\ J_{2'_\varsigma}{}^{1_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma} = J_{2'_\varsigma}{}^{1_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma}, J_{2'_\varsigma}{}^{2_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma} = J_{2'_\varsigma}{}^{2_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma} \\ J_{2'_\varsigma}{}^{2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma} \end{cases}$

推论1.5.36. $J_{A'_\varsigma}{}^{1_\varsigma 2_\varsigma D_\varsigma} = J_{A'_\varsigma}{}^{2_\varsigma 1_\varsigma D_\varsigma} \Leftrightarrow \begin{cases} \varsigma J_\pi^{x_\varsigma} = J_y^{z_\varsigma} - J_z^{y_\varsigma}, \varsigma J_\pi^{y_\varsigma} = J_z^{x_\varsigma} - J_x^{z_\varsigma}, \varsigma J_\pi^{z_\varsigma} = J_x^{y_\varsigma} - J_y^{x_\varsigma} \\ J_x^{x_\varsigma} + J_y^{y_\varsigma} + J_z^{z_\varsigma} = 0 \end{cases}$

证明：$J_{A'_\varsigma}{}^{1_\varsigma 2_\varsigma D_\varsigma} = J_{A'_\varsigma}{}^{2_\varsigma 1_\varsigma D_\varsigma}$

$\Leftrightarrow \frac{\varsigma}{2}\varepsilon^{1_\varsigma A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^{2_\varsigma D_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}J_a^{\alpha_\varsigma} = \frac{\varsigma}{2}\varepsilon^{2_\varsigma A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^{1_\varsigma D_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}J_a^{\alpha_\varsigma}$

$\Leftrightarrow \varepsilon^{1_\varsigma 2_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{2_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^{2_\varsigma D_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}J_a^{\alpha_\varsigma} = \varepsilon^{2_\varsigma 1_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{1_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^{1_\varsigma D_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}J_a^{\alpha_\varsigma}$

$\Leftrightarrow (\sigma,i\varsigma)^a_{2_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^{D_\varsigma 2_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}J_a^{\alpha_\varsigma} = -(\sigma,i\varsigma)^a_{1_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^{D_\varsigma 1_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}J_a^{\alpha_\varsigma}$

$\Leftrightarrow [\sigma^{D_\varsigma 1_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{1_\varsigma A'_\varsigma} + \sigma^{D_\varsigma 2_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{2_\varsigma A'_\varsigma}]J_a^{\alpha_\varsigma} = 0$

$\Leftrightarrow \sigma^{D_\varsigma A_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}J_a^{\alpha_\varsigma} = 0$

$\Leftrightarrow \sigma_{\alpha_\varsigma D_\varsigma}{}^{A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}J_a^{\alpha_\varsigma} = 0$

$\Leftrightarrow \sigma_{\alpha_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a J_a^{\alpha_\varsigma} = 0$

$\Leftrightarrow (\sigma,i\varsigma)^{Ta}\sigma^T_{\alpha_\varsigma}J_a^{\alpha_\varsigma} = 0$

$\Leftrightarrow \sigma_y(\sigma,i\varsigma)^{Ta}\sigma_y\sigma_y\sigma^T_{\alpha_\varsigma}\sigma_y J_a^{\alpha_\varsigma} = 0$

$\Leftrightarrow (\sigma,-i\varsigma)^a\sigma_{\alpha_\varsigma}J_a^{\alpha_\varsigma} = 0$

$\Leftrightarrow (J_x^{x_\varsigma} + J_y^{y_\varsigma} + J_z^{z_\varsigma})I + i(-\varsigma J_\pi^{x_\varsigma} + J_y^{z_\varsigma} - J_z^{y_\varsigma})\sigma_x + i(-\varsigma J_\pi^{y_\varsigma} + J_z^{x_\varsigma} - J_x^{z_\varsigma})\sigma_y + i(-\varsigma J_\pi^{z_\varsigma} + J_x^{y_\varsigma} - J_y^{x_\varsigma})\sigma_z = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \varsigma J_\pi^{x_\varsigma} = J_y^{z_\varsigma} - J_z^{y_\varsigma}, \varsigma J_\pi^{y_\varsigma} = J_z^{x_\varsigma} - J_x^{z_\varsigma}, \varsigma J_\pi^{z_\varsigma} = J_x^{y_\varsigma} - J_y^{x_\varsigma} \\ J_x^{x_\varsigma} + J_y^{y_\varsigma} + J_z^{z_\varsigma} = 0 \end{cases}$ □

推论1.5.37. $[(\sigma,-i\varsigma)^a\sigma_{\alpha_\varsigma}]J_a^{\alpha_\varsigma} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \varsigma J_\pi^{x_\varsigma} = J_y^{z_\varsigma} - J_z^{y_\varsigma}, \varsigma J_\pi^{y_\varsigma} = J_z^{x_\varsigma} - J_x^{z_\varsigma}, \varsigma J_\pi^{z_\varsigma} = J_x^{y_\varsigma} - J_y^{x_\varsigma} \\ J_x^{x_\varsigma} + J_y^{y_\varsigma} + J_z^{z_\varsigma} = 0 \end{cases}$

推论1.5.38. $J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}$关于指标$B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma$全对称 $\Leftrightarrow [(\sigma,-i\varsigma)^a\sigma_{\alpha_\varsigma}]J_a^{\alpha_\varsigma} = 0$

推论1.5.39. $J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}$关于指标$B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma$全对称 $\Leftrightarrow [(\sigma,-i\varsigma)^a S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma)]J_a{}^{cd} = 0$

2 引力场毕安奇恒等式的各种表述形式

2.1 引力场方程的经典表述形式

2.1.1 无挠引力场的毕安奇恒等式 [12–15]

毕安奇恒等式：$R^{abcd;e} + R^{abde;c} + R^{abec;d} \equiv 0$ (9.8)

推论2.1.1. $R^{abcd;e}+R^{abde;c}+R^{abec;d}\equiv 0\Rightarrow R^{(*ab)cd}{}_{;a}\equiv 0$

证明: $R^{abcd;e}+R^{abde;c}+R^{abec;d}\equiv 0$
$\Rightarrow \varepsilon_{fcde}(R^{abcd;e}+R^{abde;c}+R^{abec;d})\equiv 0$
$\Rightarrow 3\varepsilon_{fcde}R^{abcd;e}\equiv 0$
$\Rightarrow R^{ab(*cd)}{}_{;d}\equiv 0$
$\Rightarrow R^{(*ab)cd}{}_{;a}\equiv 0$ □

推论2.1.2. $R^{abcd;e}+R^{abde;c}+R^{abec;d}\equiv 0\Rightarrow R^{abcd}{}_{;a}\equiv -R^{b[c;d]}$

证明: $R^{abcd;e}+R^{abde;c}+R^{abec;d}\equiv 0$
$\Rightarrow R^{abcd}{}_{;a}-R^{bd;c}+R^{bc;d}\equiv 0$
$\Rightarrow R^{abcd}{}_{;a}=R^{bd;c}-R^{bc;d}$
$\Rightarrow R^{cdba}{}_{;a}\equiv R^{b[c;d]}$
$\Rightarrow R^{abcd}{}_{;a}\equiv -R^{b[c;d]}$ □

推论2.1.3. $R^{abcd;e}+R^{abde;c}+R^{abec;d}\equiv 0\Rightarrow (R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R)_{;b}\equiv 0$

证明: $R^{abcd;e}+R^{abde;c}+R^{abec;d}\equiv 0$
$\Rightarrow R^{abcd}{}_{;a}\equiv -R^{b[c;d]}$
$\Rightarrow R^{ac}{}_{;a}\equiv R^{;c}-R^{ac}{}_{;a}$
$\Rightarrow R^{ac}{}_{;a}\equiv \frac{1}{2}R^{;c}$
$\Rightarrow (R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R)_{;b}\equiv 0$ □

2.1.2 引力场方程经典形式

$$\begin{cases}R^{abcd;e}+R^{abde;c}+R^{abec;d}\equiv 0\\ R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R+\Lambda g^{ab}=-8\pi GT^{ab}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}R^{abcd}{}_{;a}\equiv -R^{b[c;d]},R^{(*ab)cd}{}_{;a}\equiv 0,(R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R)_{;b}\equiv 0\\ R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R+\Lambda g^{ab}=-8\pi GT^{ab}\end{cases}\tag{9.9}$$

2.2 引力场毕安奇恒等式的Yang-Mills形式

2.2.1 引力的Yang-Mills规范理论解释 [50–53]

定义2.2.1. $\theta^{\alpha_\varsigma}(\varsigma):=\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\vartheta^{ab}=-i(i\omega+\varsigma\epsilon)^{\alpha_\varsigma}$

推论2.2.1. $\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma)=i\theta^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)=(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s),\frac{i}{2}\omega_u{}^{ab}S_{ab}(s,\varsigma)=iA_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)$

线性无关性：

引理2.2.1. $c^{cd}S_{cd}=0\Leftrightarrow c^{cd}=0$

引理2.2.2. $[\omega_u{}^{cd}(\frac{i}{2}S_{cd}),\omega_v{}^{ef}(\frac{i}{2}S_{ef})]=\omega_{[u}{}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d}(\frac{i}{2}S_{cd})$

证明: $[\omega_u{}^{cd}iS_{cd},\omega_v{}^{ef}iS_{ef}]=\omega_u{}^{cd}\omega_v{}^{ef}[iS_{cd},iS_{ef}]$
$\Leftrightarrow[\omega_u{}^{cd}iS_{cd},\omega_v{}^{ef}iS_{ef}]=\omega_u{}^{cd}\omega_v{}^{ef}[\delta_{cf}iS_{de}-\delta_{ce}iS_{df}+\delta_{de}iS_{cf}-\delta_{df}iS_{ce}]$
$\Leftrightarrow[\omega_u{}^{cd}iS_{cd},\omega_v{}^{ef}iS_{ef}]=4\omega_u{}^{ce}\omega_{ve}{}^{d}iS_{cd}$
$\Leftrightarrow[\omega_u{}^{cd}iS_{cd},\omega_v{}^{ef}iS_{ef}]=2\omega_{[u}{}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d}iS_{cd}$
$\Leftrightarrow[\omega_u{}^{cd}(\frac{i}{2}S_{cd}),\omega_v{}^{ef}(\frac{i}{2}S_{ef})]=\omega_{[u}{}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d}(\frac{i}{2}S_{cd})$ □

推论2.2.2. $R_{uv}{}^{cd}=\partial_u\omega_v{}^{cd}-\partial_v\omega_u{}^{cd}+\omega_{[u}{}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d}$
$\Leftrightarrow R_{uv}{}^{cd}(\frac{i}{2}S_{cd})=\partial_u\omega_v{}^{cd}(\frac{i}{2}S_{cd})-\partial_v\omega_u{}^{cd}(\frac{i}{2}S_{cd})+[\omega_u{}^{cd}(\frac{i}{2}S_{cd}),\omega_v{}^{ef}(\frac{i}{2}S_{ef})]$

推论2.2.3. $R_{uv}{}^{cd}=\partial_u\omega_v{}^{cd}-\partial_v\omega_u{}^{cd}+\omega_{[u}{}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d}$
$\Leftrightarrow R_{uv}{}^{<cd>}=\partial_u\omega_v{}^{<cd>}-\partial_v\omega_u{}^{<cd>}+[\omega_u{}^{<cd>},\omega_v{}^{<ef>}]$

推论2.2.4. $R_{uv}{}^{cd} = \partial_u \omega_v{}^{cd} - \partial_v \omega_u{}^{cd} + \omega_{[u}{}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d}$

$\Leftrightarrow R_{uv}{}^{cd}\frac{i}{2}S_{cd}(s,\varsigma) = \partial_u \omega_v{}^{cd}\frac{i}{2}S_{cd}(s,\varsigma) - \partial_v \omega_u{}^{cd}\frac{i}{2}S_{cd}(s,\varsigma) + [\omega_u{}^{cd}\frac{i}{2}S_{cd}(s,\varsigma), \omega_v{}^{ef}\frac{i}{2}S_{ef}(s,\varsigma)]$

推论2.2.5. $R_{uv}{}^{cd} = \partial_u \omega_v{}^{cd} - \partial_v \omega_u{}^{cd} + \omega_{[u}{}^{ce}\omega_{v]e}{}^{d}$

$\Leftrightarrow F_{uv}^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s) = \partial_u A_v^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s) - \partial_v A_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s) + i[A_u^{\beta_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma}(s), A_v^{\gamma_\varsigma}\sigma_{\gamma_\varsigma}(s)]$

推论2.2.6. $\frac{i}{2}\omega_u{}^{ab}S_{ab}(s,\varsigma) \to U(\theta)\frac{i}{2}\omega_u{}^{ab}S_{ab}(s,\varsigma)U^{-1}(\theta) + [\partial_u U(\theta)]U^{-1}(\theta)$

$\Leftrightarrow A_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s) \to U(\theta)A_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)U^{-1}(\theta) - i[\partial_u U(\theta)]U^{-1}(\theta)$

推论2.2.7. $i[S_{ab}(s,\varsigma), S_{cd}(s,\varsigma)] = \delta_{ad}S_{bc}(s,\varsigma) - \delta_{ac}S_{bd}(s,\varsigma) + \delta_{bc}S_{ad}(s,\varsigma) - \delta_{bd}S_{ac}(s,\varsigma)$

$\Leftrightarrow [\sigma_{\alpha_\varsigma}(s), \sigma_{\beta_\varsigma}(s)] = i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\sigma_{\gamma_\varsigma}(s)$

证明: $i[S_{ab}(s,\varsigma), S_{cd}(s,\varsigma)] = \delta_{ad}S_{bc}(s,\varsigma) - \delta_{ac}S_{bd}(s,\varsigma) + \delta_{bc}S_{ad}(s,\varsigma) - \delta_{bd}S_{ac}(s,\varsigma)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{16}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{ab}\sigma_{\varsigma\beta_\varsigma}^{cd}[iS_{ab}(s,\varsigma), iS_{cd}(s,\varsigma)] = \frac{1}{16}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{ab}\sigma_{\varsigma\beta_\varsigma}^{cd}[\delta_{ad}iS_{bc}(s,\varsigma) - \delta_{ac}iS_{bd}(s,\varsigma) + \delta_{bc}iS_{ad}(s,\varsigma) - \delta_{bd}iS_{ac}(s,\varsigma)]$

$\Leftrightarrow [\sigma_{\alpha_\varsigma}(s), \sigma_{\beta_\varsigma}(s)] = \frac{1}{16}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{ab}\sigma_{\varsigma\beta_\varsigma}^{cd}[\delta_{ad}iS_{bc}(s,\varsigma) - \delta_{ac}iS_{bd}(s,\varsigma) + \delta_{bc}iS_{ad}(s,\varsigma) - \delta_{bd}iS_{ac}(s,\varsigma)]$

$\Leftrightarrow [\sigma_{\alpha_\varsigma}(s), \sigma_{\beta_\varsigma}(s)] = \frac{1}{4}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{ab}\sigma_{\varsigma\beta_\varsigma}^{cd}\delta_{ad}iS_{bc}(s,\varsigma)$

$\Leftrightarrow [\sigma_{\alpha_\varsigma}(s), \sigma_{\beta_\varsigma}(s)] = \frac{1}{4}[\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta^{bc} + i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma}{}^{bc}(s)]iS_{bc}(s,\varsigma)$

$\Leftrightarrow [\sigma_{\alpha_\varsigma}(s), \sigma_{\beta_\varsigma}(s)] = i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\sigma_{\gamma_\varsigma}(s)$ □

2.2.2 引力场毕安奇恒等式的Yang-Mills分量形式

推论2.2.8. $R^{abcd;e} + R^{abde;c} + R^{abec;d} \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} R^{abcd}{}_{;a} \equiv -R^{b[c;d]} \\ R^{(*ab)cd}{}_{;a} \equiv 0 \end{cases}$

引理2.2.3. $D^a F_{ab}^{\alpha_\varsigma} = -J_b^{\alpha_\varsigma} \Leftrightarrow D^a F_{ab}^{\alpha'_\varsigma} = -J_b^{\alpha'_\varsigma}$

证明: $D^a F_{ab}^{\alpha_\varsigma} = -J_b^{\alpha_\varsigma}$

$\Leftrightarrow (D^a F_{ab}^{\alpha_\varsigma})^* = -(J_b^{\alpha_\varsigma})^*$

$\Leftrightarrow \eta_c^{a'}D^c(\eta_{a'}^a\eta_{b'}^b F_{ab}^{\alpha'_\varsigma}) = -\eta_{b'}^b J_b^{\alpha'_\varsigma}$

$\Leftrightarrow \eta_{b'}^b D^a(F_{ab}^{\alpha'_\varsigma}) = -\eta_{b'}^b J_b^{\alpha'_\varsigma}$

$\Leftrightarrow D^a(F_{ab}^{\alpha'_\varsigma}) = -J_b^{\alpha'_\varsigma}$ □

引理2.2.4. $D^a * F_{ab}^{\alpha_\varsigma} \equiv 0 \Leftrightarrow D^a * F_{ab}^{\alpha'_\varsigma} \equiv 0$

证明: $D^a * F_{ab}^{\alpha_\varsigma} \equiv 0$

$\Leftrightarrow (D^a * F_{ab}^{\alpha_\varsigma})^* \equiv 0$

$\Leftrightarrow \eta_c^{a'}D^c(\eta_{a'}^a\eta_{b'}^b * F_{ab}^{\alpha'_\varsigma}) \equiv 0$

$\Leftrightarrow \eta_{b'}^b D^a * F_{ab}^{\alpha'_\varsigma} \equiv 0$

$\Leftrightarrow D^a * F_{ab}^{\alpha'_\varsigma} \equiv 0$ □

定理2.2.1. $\begin{cases} R^{abcd}{}_{;a} \equiv -R^{b[c;d]} \\ R^{(*ab)cd}{}_{;a} \equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D^a F_{ab}^{\alpha_\varsigma} \equiv -J_b^{\alpha_\varsigma}, J^{b\alpha_\varsigma} := \frac{i}{2}\sigma_{\varsigma cd}^{\alpha_\varsigma}R^{b[c;d]} \\ D^a * F_{ab}^{\alpha_\varsigma} \equiv 0 \end{cases}$

证明: $\begin{cases} R^{abcd}{}_{;a} \equiv -R^{b[c;d]} \\ R^{(*ab)cd}{}_{;a} \equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_{ab}{}^{cd;a} \equiv -R_b{}^{[c;d]} \\ R_{*ab}{}^{cd;a} \equiv 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{i}{2}(\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}{}^{cd}F_{ab}^{\alpha'_\varsigma} + \sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{cd}F_{ab}^{\alpha_\varsigma})^{;a} \equiv -\frac{i}{2}(\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}{}^{cd}J_b^{\alpha'_\varsigma} + \sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{cd}J_b^{\alpha_\varsigma}) \\ \frac{i}{2}(\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}{}^{cd} * F_{ab}^{\alpha'_\varsigma} + \sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{cd} * F_{ab}^{\alpha_\varsigma})^{;a} \equiv 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D^a F_{ab}^{\alpha_\varsigma} \equiv -J_b^{\alpha_\varsigma}, D^a F_{ab}^{\alpha'_\varsigma} \equiv -J_b^{\alpha_\varsigma} \\ D^a * F_{ab}^{\alpha_\varsigma} \equiv 0, D^a * F_{ab}^{\alpha'_\varsigma} \equiv 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D^a F_{ab}^{\alpha_\varsigma} \equiv -J_b^{\alpha_\varsigma}, J^{b\alpha_\varsigma} = \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd} R^{b[c;d]} \\ D^a * F_{ab}^{\alpha_\varsigma} \equiv 0 \end{cases} \qquad \square$$

定理2.2.2. $\begin{cases} D^a F_{ab}^{\alpha_\varsigma} \equiv -J_b^{\alpha_\varsigma} \\ D^a * F_{ab}^{\alpha_\varsigma} \equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_u F^{uv\alpha_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma} A_u^{\beta_\varsigma} F^{uv\gamma_\varsigma} \equiv -J^{v\alpha_\varsigma} \\ \nabla_u F^{*uv\alpha_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma} A_u^{\beta_\varsigma} F^{*uv\gamma_\varsigma} \equiv 0 \end{cases}$

2.2.3 毕安奇恒等式Yang-Mills理论的矩阵描述

1、毕安奇恒等式Yang-Mills理论的一般矩阵描述

$$\begin{cases} R_{uv}{}^{cd} \frac{i}{2} S_{cd} = \partial_u \omega_v{}^{cd} \frac{i}{2} S_{cd} - \partial_v \omega_u{}^{cd} \frac{i}{2} S_{cd} + [\omega_u{}^{cd} \frac{i}{2} S_{cd}, \omega_v{}^{ef} \frac{i}{2} S_{ef}] \\ i[S_{ab}, S_{cd}] = \delta_{ad} S_{bc} - \delta_{ac} S_{bd} + \delta_{bc} S_{ad} - \delta_{bd} S_{ac} \\ c^{ab} S_{ab} = 0, c^{ab} = -c^{ba} \Leftrightarrow c^{ab} = 0 \end{cases} \tag{9.10}$$

规范变换:

$$\begin{cases} \psi \to U(\theta)\psi, U(\theta) = e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab} S_{ab}} \\ \frac{i}{2}\omega_u{}^{ab} S_{ab} \to U(\theta) \frac{i}{2}\omega_u{}^{ab} S_{ab} U^{-1}(\theta) - [\partial_u U(\theta)] U^{-1}(\theta) \end{cases} \tag{9.11}$$

推论2.2.9. $D_u\psi \to U(\theta) D_u \psi, D_u = \partial_u + \frac{i}{2}\omega_u{}^{cd} S_{cd}$

推论2.2.10. $R_{uv}{}^{cd} \frac{i}{2} S_{cd} \to U(\theta) R_{uv}{}^{cd} \frac{i}{2} S_{cd} U^{-1}(\theta)$

推论2.2.11. $D_w R_{uv}{}^{cd} \frac{i}{2} S_{cd} \to U(\theta) D_w R_{uv}{}^{cd} \frac{i}{2} S_{cd} U^{-1}(\theta), D_w = \nabla_w + [\frac{i}{2}\omega_w{}^{cd} S_{cd}, \quad]$

毕安奇恒等式的规范方程形式:

推论2.2.12. $\begin{cases} \nabla_u R^{uvcd} \frac{i}{2} S_{cd} + [\frac{i}{2}\omega_u{}^{cd} S_{cd}, R^{uvcd} \frac{i}{2} S_{cd}] = 0 \\ \nabla_u R^{(*uv)cd} \frac{i}{2} S_{cd} + [\frac{i}{2}\omega_u{}^{cd} S_{cd}, R^{(*uv)cd} \frac{i}{2} S_{cd}] \equiv 0 \end{cases}$

规范方程:

推论2.2.13. $\begin{cases} \nabla_u R^{uv<cd>} + [\omega_u{}^{<cd>}, R^{uv<cd>}] \equiv -R_u{}^{<c;d>} \\ \nabla_u R^{*uv<cd>} + [\omega_u{}^{<cd>}, R^{*uv<cd>}] \equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^{abcd}{}_{;a} \equiv -R^{b[c;d]} \\ R^{(*ab)cd}{}_{;a} \equiv 0 \end{cases}$

2、毕安奇恒等式Yang-Mills理论的特殊矩阵描述

$$\begin{cases} R_{uv}{}^{cd} \frac{i}{2} S_{cd}(s,\varsigma) = \partial_u \omega_v{}^{cd} \frac{i}{2} S_{cd}(s,\varsigma) - \partial_v \omega_u{}^{cd} \frac{i}{2} S_{cd}(s,\varsigma) + [\omega_u{}^{cd} \frac{i}{2} S_{cd}(s,\varsigma), \omega_v{}^{ef} \frac{i}{2} S_{ef}(s,\varsigma)] \\ i[S_{ab}(s,\varsigma), S_{cd}(s,\varsigma)] = \delta_{ad} S_{bc}(s,\varsigma) - \delta_{ac} S_{bd}(s,\varsigma) + \delta_{bc} S_{ad}(s,\varsigma) - \delta_{bd} S_{ac}(s,\varsigma) \\ c^{ab} i S_{ab}(s,\varsigma) = 0, c^{ab} = -c^{ba} \Leftrightarrow c^{ab} = 0 \end{cases} \tag{9.12}$$

规范变换:

$$\begin{cases} \psi(s,\varsigma) \to U(\theta)\psi(s,\varsigma), U(\theta) = e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab} S_{ab}(s,\varsigma)} \\ \frac{i}{2}\omega_u{}^{ab} S_{ab}(s,\varsigma) \to U(\theta) \frac{i}{2}\omega_u{}^{ab} S_{ab}(s,\varsigma) U^{-1}(\theta) - [\partial_u U(\theta)] U^{-1}(\theta) \end{cases} \tag{9.13}$$

推论2.2.14. $D_u\psi(s,\varsigma) \to U(\theta) D_u \psi(s,\varsigma), D_u = \partial_u + \frac{i}{2}\omega_u{}^{cd} S_{cd}(s,\varsigma)$

推论2.2.15. $R_{uv}{}^{cd} \frac{i}{2} S_{cd}(s,\varsigma) \to U(\theta) R_{uv}{}^{cd} \frac{i}{2} S_{cd}(s,\varsigma) U^{-1}(\theta)$

推论2.2.16. $D_w R_{uv}{}^{cd} \frac{i}{2} S_{cd}(s,\varsigma) \to U D_w R_{uv}{}^{cd} \frac{i}{2} S_{cd}(s,\varsigma) U^{-1}, D_w = \nabla_w + [\frac{i}{2}\omega_w{}^{cd} S_{cd}(s,\varsigma), \quad]$

毕安奇恒等式的规范方程形式:

推论2.2.17. $\begin{cases}\nabla_u R^{uvcd}\frac{i}{2}S_{cd}(s,\varsigma)+[\frac{i}{2}\omega_u{}^{cd}S_{cd}(s,\varsigma),R^{uvcd}\frac{i}{2}S_{cd}(s,\varsigma)]\equiv -R^{v[c;d]}\frac{i}{2}S_{cd}(s,\varsigma)\\ \nabla_u R^{(*uv)cd}\frac{i}{2}S_{cd}(s,\varsigma)+[\frac{i}{2}\omega_u{}^{cd}S_{cd}(s,\varsigma),R^{(*uv)cd}\frac{i}{2}S_{cd}(s,\varsigma)]\equiv 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\nabla_u F^{uv\alpha_\varsigma}-\varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}F^{uv\gamma_\varsigma}\equiv -J^{v\alpha_\varsigma}\\ \nabla_u F^{*uv\alpha_\varsigma}-\varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}F^{*uv\gamma_\varsigma}\equiv 0\end{cases}$

3、毕安奇恒等式Yang-Mills理论的标准矩阵描述

$$\begin{cases}F_{uv}^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)=\partial_u A_v^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)-\partial_v A_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)+i[A_u^{\beta_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma}(s),A_v^{\gamma_\varsigma}\sigma_{\gamma_\varsigma}(s)]\\ [\sigma_{\beta_\varsigma}(s),\sigma_{\gamma_\varsigma}(s)]=i\varepsilon_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}{}^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s),c^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)=0\Leftrightarrow c^{\alpha_\varsigma}=0\end{cases}\tag{9.14}$$

规范变换:

$$\begin{cases}\psi(s,\varsigma)\to U(\theta)\psi(s,\varsigma),U(\theta)=e^{i\theta^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)}=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma)}=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}\\ A_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\to U(\theta)A_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)U^{-1}(\theta)+i[\partial_u U(\theta)]U^{-1}(\theta)\end{cases}\tag{9.15}$$

以上就是$g=1$和$T=\sigma(s)$的标准Yang-Mills理论，所以有以下类似的结论。

推论2.2.18. $D_u\psi(s,\varsigma)\to U(\theta)D_u\psi(s,\varsigma),D_u=\partial_u+iA_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)=\partial_u+\frac{i}{2}\omega_u{}^{cd}S_{cd}(s,\varsigma)$

推论2.2.19. $F_{uv}^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\to U(\theta)F_{uv}^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)U^{-1}(\theta)$

推论2.2.20. $D_w F_{uv}^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\to UD_w F_{uv}^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)U^{-1},D_w=\nabla_w+[iA_w{}^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s),\quad]$

毕安奇恒等式的规范方程形式:

推论2.2.21.
$\begin{cases}\nabla_u F^{uv\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)+[iA_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s),F^{uv\beta_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma}(s)]\equiv -J^{v\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\\ \nabla_u F^{*uv\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)+[iA_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s),F^{*uv\beta_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma}(s)]\equiv 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla_u F^{uv\alpha_\varsigma}-\varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}F^{uv\gamma_\varsigma}\equiv -J^{v\alpha_\varsigma}\\ \nabla_u F^{*uv\alpha_\varsigma}-\varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}F^{*uv\gamma_\varsigma}\equiv 0\end{cases}$

毕安奇恒等式的规范方程矩阵形式:

推论2.2.22.
$\begin{cases}\nabla_u F^{uv}+i[A_u,F^{uv}]\equiv -J^v,A_u:=A_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\\ \nabla_u F^{*uv}+i[A_u,F^{*uv}]\equiv 0,F^{uv}:=F^{uv\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}D^aF_{ab}^{\alpha_\varsigma}\equiv -J_b^{\alpha_\varsigma}\\ D^a*F_{ab}^{\alpha_\varsigma}\equiv 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}R^{abcd}{}_{;a}\equiv -R^{b[c;d]}\\ R^{(*ab)cd}{}_{;a}\equiv 0\end{cases}$

2.2.4 引力场Yang-Mills理论的分量描述

定理2.2.3. $A_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\to U(\theta)A_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)U^{-1}(\theta)+i[\partial_u U(\theta)]U^{-1}(\theta)$
$\Leftrightarrow\delta A_u^{\alpha_\varsigma}=i\theta^{\beta_\varsigma}(-i\varepsilon_{\beta_\varsigma}{}^{\alpha_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma})A_u^{\gamma_\varsigma}-\partial_u\theta^{\alpha_\varsigma}$
$\Leftrightarrow\delta A_u=i\theta^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}A_u-\partial_u\theta$

证明: $A_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\to U(\theta)A_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)U^{-1}(\theta)+i[\partial_u U(\theta)]U^{-1}(\theta)$
$\Leftrightarrow$ □

定理2.2.4. $\delta A_u^{\alpha_\varsigma}=\varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\theta^{\beta_\varsigma}A_u^{\gamma_\varsigma}-\partial_u\theta^{\alpha_\varsigma}\Leftrightarrow\delta\omega_u{}^{ab}=\vartheta^{ac}\omega_u{}^{cb}-\omega_u{}^{ac}\vartheta^{cb}-\partial_u\vartheta^{ab}$

证明: $\delta A_u^{\alpha_\varsigma}=i\theta^{\beta_\varsigma}(-i\varepsilon_{\beta_\varsigma}{}^{\alpha_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma})A_u^{\gamma_\varsigma}-\partial_u\theta^{\alpha_\varsigma}$
$\Leftrightarrow A_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\to U(\theta)A_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)U^{-1}(\theta)+i[\partial_u U(\theta)]U^{-1}(\theta)$
$\Leftrightarrow[-\frac{1}{2}\omega_u{}^{ab}iS_{ab}(s,\varsigma)]\to U(\theta)[-\frac{1}{2}\omega_u{}^{ab}iS_{ab}(s,\varsigma)]U^{-1}(\theta)+[\partial_u U(\theta)]U^{-1}(\theta)$
$\Leftrightarrow[\frac{i}{2}\omega_u{}^{ab}S_{ab}(s,\varsigma)]\to U(\theta)[\frac{i}{2}\omega_u{}^{ab}S_{ab}(s,\varsigma)]U^{-1}(\theta)-[\partial_u U(\theta)]U^{-1}(\theta)$
$\Leftrightarrow[\frac{i}{2}\omega_u{}^{ab}S_{ab}(s,\varsigma)]\to\frac{1}{2}(\omega_u{}^{ab}-\partial_u\vartheta^{ab})iS_{ab}(s,\varsigma)+\frac{1}{4}\vartheta^{ab}\omega_u{}^{cd}[iS_{ab}(s,\varsigma),iS_{cd}(s,\varsigma)]$
$\Leftrightarrow[\frac{i}{2}\omega_u{}^{ab}S_{ab}(s,\varsigma)]\to\frac{1}{2}(\omega_u{}^{ab}-\partial_u\vartheta^{ab})iS_{ab}(s,\varsigma)+\frac{1}{2}(\vartheta^{ac}\omega_u{}^{cb}-\omega_u{}^{ac}\vartheta^{cb})iS_{ab}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow\omega_u{}^{ab}\to\omega_u{}^{ab}+\vartheta^{ac}\omega_u{}^{cb}-\omega_u{}^{ac}\vartheta^{cb}-\partial_u\vartheta^{ab}$
$\Leftrightarrow\delta\omega_u{}^{ab}=\vartheta^{ac}\omega_u{}^{cb}-\omega_u{}^{ac}\vartheta^{cb}-\partial_u\vartheta^{ab}$ □

推论2.2.23. 规范变换: $\begin{cases} \delta\psi(s,\varsigma) = i\theta^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\psi(s,\varsigma) \\ \delta A_u^{\alpha_\varsigma} = i\theta^{\beta_\varsigma}(-i\varepsilon_{\beta_\varsigma}{}^{\alpha_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma})A_u^{\gamma_\varsigma} - \partial_u\theta^{\alpha_\varsigma} \end{cases}$

推论2.2.24. $\delta F_{uv}^{\alpha_\varsigma} = i\theta^{\beta_\varsigma}(-i\varepsilon_{\beta_\varsigma}{}^{\alpha_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma})F_{uv}^{\gamma_\varsigma}, \delta F_{uv}^{[\alpha_\varsigma]} = i\theta^{\beta_\varsigma}\gamma_{\beta_\varsigma}F_{uv}^{[\alpha_\varsigma]} = (i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma F_{uv}^{[\alpha_\varsigma]}$

推论2.2.25. $\delta\omega_u^{ab} = \frac{i}{2}(\sigma^{ab}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}\delta A_u^{\alpha'_\varsigma} + \sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\delta A_u^{\alpha_\varsigma})$

2.2.5 毕安奇恒等式的类电磁场方程形式

$$\begin{cases} \nabla_d\cdot\vec{E}^{\beta_\kappa} \equiv \rho^{\beta_\kappa}, \nabla_d\times\vec{E}^{\beta_\kappa} \equiv -D_t\vec{B}^{\beta_\kappa} \\ \nabla_d\cdot\vec{B}^{\beta_\kappa} \equiv 0, \nabla_d\times\vec{B}^{\beta_\kappa} \equiv \vec{J}^{\beta_\kappa} + D_t\vec{E}^{\beta_\kappa} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D^uF_{uv}^{\beta_\kappa} \equiv -J_v^{\beta_\kappa} \\ D^u * F_{uv}^{\beta_\kappa} \equiv 0 \end{cases} \tag{9.16}$$

推论2.2.26. $F_{uv}^{\beta_\kappa} = \partial_uA_v^{\beta_\kappa} - \partial_vA_u^{\beta_\kappa} - \varepsilon^{\beta_\kappa}{}_{\gamma_\kappa\delta_\kappa}A_u^{\gamma_\kappa}A_v^{\delta_\kappa} \Leftrightarrow D^a * F_{ab}^{\beta_\kappa} \equiv 0; F_{ab}^{\beta_\kappa} = e_a^ue_b^vF_{uv}^{\beta_\kappa}$

2.3 毕安奇恒等式的复矢量表述形式

复矢量张量形式：

定理2.3.1. $D^aF_{ab}^{\beta_\kappa} \equiv -J_b^{\beta_\kappa} \Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} \equiv iJ_b^{\beta_\kappa}; F_{ab}^{\beta_\kappa} = e_a^ue_b^vF_{uv}^{\beta_\kappa}, \tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = \begin{bmatrix} \psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} = \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}F^{ab\beta_\kappa} \\ 0 \end{bmatrix}$

证明: $D^aF_{ab}^{\beta_\kappa} \equiv -J_b^{\beta_\kappa}$

$\Leftrightarrow D^aF_{ab}^{\beta_\kappa} \equiv -J_b^{\beta_\kappa}, D^a * F_{ab}^{\beta_\kappa} \equiv 0$

$\Leftrightarrow D^a(F_{ab}^{\beta_\kappa} - \varsigma * F_{ab}^{\beta_\kappa}) \equiv -J_b^{\beta_\kappa}$

$\Leftrightarrow D^a(i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi^{\beta_\kappa}_{\alpha_\varsigma}) \equiv -J^{b\beta_\kappa}, \alpha_\varsigma = 1,2,3$

$\Leftrightarrow D^a[(\sigma_\varsigma, -i\varsigma)^{\alpha_\varsigma}|_{ab}\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa}] \equiv iJ_b^{\beta_\kappa}, \alpha_\varsigma = 1,2,3,4$

$\Leftrightarrow D^a[(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)_a|_b{}^{\alpha_\varsigma}\tilde{\Psi}^{\beta_\kappa}_{\alpha_\varsigma}] \equiv iJ_b^{\beta_\kappa}, \alpha_\varsigma = 1,2,3,4$

$\Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} \equiv iJ_b^{\beta_\kappa}, \alpha_\varsigma = 1,2,3,4$ □

复矢量矩阵形式：

推论2.3.1. $(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} \equiv iJ_b^{\beta_\kappa} \Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^aD_a\tilde{\Psi}^{\beta_\kappa}(1,\varsigma) \equiv iJ^{\beta_\kappa}$

复矢量方矩阵形式：

推论2.3.2. $(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} \equiv iJ_b^{\beta_\kappa} \Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^aD_a[\tilde{\Psi}(1,\varsigma)] \equiv i[J]$

表象变换：

推论2.3.3. $(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^aD_a\tilde{\Psi}^{\beta_\kappa}(1,\varsigma) \equiv iJ^{\beta_\kappa} \Leftrightarrow (\sigma\otimes I, -i\varsigma)^aD_a\tilde{\psi}^{\beta_\kappa}(1,\varsigma) \equiv i\tilde{J}^{\beta_\kappa}(1,\varsigma)$

推论2.3.4. $(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^aD_a\tilde{\Psi}^{\beta_\kappa}(1,\varsigma) \equiv iJ^{\beta_\kappa} \Leftrightarrow (\sigma\otimes I, -i\varsigma)^aD_a[\tilde{\psi}(1,\varsigma)] \equiv i[\tilde{J}]$

2.4 毕安奇恒等式的$\frac{1}{2}$-旋量表述形式 [1,2]

$\frac{1}{2}$**-旋量Penrose抽象指标形式：**

定理2.4.1. $(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} \equiv iJ_b^{\beta_\kappa} \Leftrightarrow \nabla_d^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi^{\beta_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\kappa}, \nabla_d^{A'_\varsigma A_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma, -i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a$

证明: $(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa} \equiv iJ_b^{\beta_\kappa}$

$\Leftrightarrow D^a(i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi^{\beta_\kappa}_{\alpha_\varsigma}) \equiv -J_b^{\beta_\kappa}$

$\Leftrightarrow D^a(i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\cdot\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi^{\beta_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma}) \equiv -J_b^{\beta_\kappa}$

$\Leftrightarrow iS_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}D^a\psi^{\beta_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J_b^{\beta_\kappa}$

$\Leftrightarrow (\frac{\varsigma}{2}\delta_{ab}\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma} + iS_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma})D^a\psi^{\beta_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J_b^{\beta_\kappa}$

$\Leftrightarrow \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma, -i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma, -i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma}D^a\psi^{\beta_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma} \equiv \frac{-1}{\sqrt{2}}J_b^{\beta_\kappa}$

$\Leftrightarrow \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma, -i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}D^a\psi^{\beta_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma} \equiv \frac{-1}{\sqrt{2}}J_b^{\beta_\kappa}\cdot\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma, i\varsigma)^b_{B'_\varsigma B_\varsigma}$

$\Leftrightarrow \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma, -i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi^{\beta_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}\varsigma\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}J_{B'_\varsigma B_\varsigma}$

$\Leftrightarrow \nabla_d^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi^{\beta_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\kappa}, \nabla_d^{A'_\varsigma A_\varsigma} \equiv \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma, -i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a$ □

$\frac{1}{2}$-旋量张量形式：

推论2.4.1. $\nabla_d^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}^{\beta_\kappa} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\kappa} \Leftrightarrow (\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}^{\beta_\kappa} \equiv iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\kappa}$

$\frac{1}{2}$-旋量矩阵形式：

推论2.4.2. $(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}^{\beta_\kappa} \equiv iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\kappa} \Leftrightarrow (\sigma\otimes I,-i\varsigma)_aD^a\tilde{\psi}^{\beta_\kappa}(1,\varsigma) \equiv i\tilde{J}^{\beta_\kappa}(1,\varsigma)$

$\frac{1}{2}$-旋量方矩阵形式：

推论2.4.3. $(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}^{\beta_\kappa} \equiv iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\kappa} \Leftrightarrow (\sigma,-i\varsigma)_aD^a[\psi]^{\beta_\kappa} \equiv i[J]^{\beta_\kappa}$

2.5 毕安奇恒等式的全$\frac{1}{2}$-旋量表述形式

推论2.5.1. $\nabla_d^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}^{\beta_\kappa} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\kappa} \Leftrightarrow \nabla_d^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\kappa D_\kappa}$

推论2.5.2. $\nabla_d^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}^{\beta_\varsigma} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma} \Leftrightarrow \nabla_d^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}$

推论2.5.3. $\nabla_d^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}^{\beta_\kappa} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\kappa} \Leftrightarrow (\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa} \equiv iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\kappa D_\kappa}$

推论2.5.4. $\nabla_d^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}^{\beta_\varsigma} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma} \Leftrightarrow (\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} \equiv iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}$

以下三个推论的证明留待以后

推论2.5.5. $(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} \equiv iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}, R=0 \Leftrightarrow [2D_a+iS_{ab}(2,\varsigma)D^b]_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}\psi_{l_\varsigma}(2,\varsigma) = \mathbb{J}_{ak_\varsigma}(2,\varsigma)$

推论2.5.6. $\begin{cases} R^{abcd}{}_{;a} \equiv -R^{b[c;d]} \\ R^{(*ab)cd}{}_{;a} \equiv 0, R=0 \end{cases} \Leftrightarrow [2D_a+iS_{ab}(2,\varsigma)D^b]_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}\psi_{l_\varsigma}(2,\varsigma) = \mathbb{J}_{ak_\varsigma}(2,\varsigma)$

推论2.5.7. $\begin{cases} (\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \equiv iJ_b^{\beta_\varsigma} \\ \psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} = \psi_{\beta_\varsigma\alpha_\varsigma}, \psi_{\alpha_\varsigma}{}^{\alpha_\varsigma} = 0, (\sigma,-i\varsigma)^a\sigma_{\beta_\varsigma}J_a^{\beta_\varsigma} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\sigma\otimes I_4,-i\varsigma)^aD_a\tilde{\psi}(2,\varsigma) = i\tilde{J}(2,\varsigma)$

2.6 猜测

定理2.6.1. $D^a * F_{ab}^{\beta_\kappa} = 0 \Leftrightarrow F_{ab}^{\beta_\kappa} \Leftrightarrow D^a * F_{ab}^{\beta_\kappa} \equiv 0$

定理2.6.2. $D^aF_{ab}^{\beta_\kappa} = -J_b^{\beta_\kappa}, D^a * F_{ab}^{\beta_\kappa} = 0 \Leftrightarrow D^aF_{ab}^{\beta_\kappa} = -J_b^{\beta_\kappa}, F_{ab}^{\beta_\kappa}$

2.7 毕安奇恒等式 [8]的自旋张量表述形式

引力场的自旋张量矩阵：$S_{ab} = i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma} \succ \begin{bmatrix} 0 & \gamma_z & -\gamma_y & -\varsigma\gamma_x \\ -\gamma_z & 0 & \gamma_x & -\varsigma\gamma_y \\ \gamma_y & -\gamma_x & 0 & -\varsigma\gamma_z \\ \varsigma\gamma_x & \varsigma\gamma_y & \varsigma\gamma_z & 0 \end{bmatrix}$ (9.17)

定理2.7.1. $(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa}(1,\varsigma) \equiv -i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{b\delta_\kappa}, S_{ab} = i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma} \Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^aD_a\tilde{\Psi}^{\delta_\kappa}(1,\varsigma) \equiv iJ^{\delta_\kappa}$

一种直观证法如下：

证明：$(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa} \equiv -i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{b\delta_\kappa}, S_{ab} = i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (D_x+i\gamma_zD_y-i\gamma_yD_z-i\varsigma\gamma_xD_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa} \equiv -i\sigma_{\varsigma xb}^{\beta_\varsigma}J^{b\delta_\kappa} \\ (D_y+i\gamma_xD_z-i\gamma_zD_x-i\varsigma\gamma_yD_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa} \equiv -i\sigma_{\varsigma yb}^{\beta_\varsigma}J^{b\delta_\kappa} \\ (D_z+i\gamma_yD_x-i\gamma_xD_y-i\varsigma\gamma_zD_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa} \equiv -i\sigma_{\varsigma zb}^{\beta_\varsigma}J^{b\delta_\kappa} \\ (D_\pi+i\varsigma\gamma_xD_x+i\varsigma\gamma_yD_y+i\varsigma\gamma_zD_z)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa} \equiv -i\sigma_{\varsigma\pi b}^{\beta_\varsigma}J^{b\delta_\kappa} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix}D_x & D_y & D_z\\ -D_y & D_x & -\varsigma D_\pi\\ -D_z & \varsigma D_\pi & D_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^{x_\varsigma\delta_\kappa}\\ \psi^{y_\varsigma\delta_\kappa}\\ \psi^{z_\varsigma\delta_\kappa}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\varsigma J^{\pi\delta_\kappa}\\ J^{z\delta_\kappa}\\ -J^{y\delta_\kappa}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D_y & -D_x & \varsigma D_\pi\\ D_x & D_y & D_z\\ -\varsigma D_\pi & -D_z & D_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^{x_\varsigma\delta_\kappa}\\ \psi^{y_\varsigma\delta_\kappa}\\ \psi^{z_\varsigma\delta_\kappa}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}-J^{z\delta_\kappa}\\ \varsigma J^{\pi\delta_\kappa}\\ J^{x\delta_\kappa}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}D_z & -\varsigma D_\pi & -D_x\\ \varsigma D_\pi & D_z & -D_y\\ D_x & D_y & D_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^{x_\varsigma\delta_\kappa}\\ \psi^{y_\varsigma\delta_\kappa}\\ \psi^{z_\varsigma\delta_\kappa}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}J^{y\delta_\kappa}\\ -J^{x\delta_\kappa}\\ \varsigma J^{\pi\delta_\kappa}\end{bmatrix}, iD_\pi\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)\equiv\varsigma\gamma\cdot\nabla_d\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)-i\varsigma\vec{J}^{\delta_\kappa}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}iD_\pi\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)\equiv i\varsigma\nabla_d\times\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)-i\varsigma\vec{J}^{\delta_\kappa}\\ \nabla_d\cdot\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)\equiv\varsigma J^{\pi\delta_\kappa}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}iD_\pi\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)\equiv\varsigma\gamma\cdot\nabla_d\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)-i\varsigma\vec{J}^{\delta_\kappa}\\ \nabla_d\cdot\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)\equiv\varsigma J^{\pi\delta_\kappa}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a D_a\tilde{\Psi}^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)\equiv iJ$$ □

推论2.7.1. $(\partial_a+iS_{ab}\partial^b)\psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)=i(\sigma_{-\varsigma},i\varsigma)_a J^{\delta_\kappa},S_{ab}=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

另一种更解析更抽象的证法如下：

证明: $(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa}\equiv-i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{b\delta_\kappa},S_{ab}=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$\Leftrightarrow\sigma_{\varsigma a}^{\beta_\varsigma}{}^c\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma cb}D^b\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa}\equiv-i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{b\delta_\kappa}$

$\Leftrightarrow\sigma_{\varsigma ac}^{\beta_\varsigma}\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma}^{cb}D_b\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa}\equiv-i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{b\delta_\kappa}$

$\Leftrightarrow\sigma_{\beta_\varsigma}^{\varsigma ad}\sigma_{\varsigma ac}^{\beta_\varsigma}\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma}^{cb}D_b\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa}\equiv-i\sigma_{\beta_\varsigma}^{\varsigma ad}\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{b\delta_\kappa}$

$\Leftrightarrow\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma}^{db}D_b\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa}\equiv-iJ^{d\delta_\kappa}$

$\Leftrightarrow\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{ab}D_a\psi^{\alpha_\varsigma\delta_\kappa}\equiv iJ^{b\delta_\kappa},\alpha_\varsigma=1,2,3$

$\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\delta_\kappa}\equiv iJ_b^{\delta_\kappa},\alpha_\varsigma=1,2,3,4$ □

此方程(3.3.2)就是毕安奇恒等式的自旋张量表述形式。

引理2.7.1. $\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\delta_\kappa}=-i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{b\delta_\kappa}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbb{J}_y^{z_\varsigma\delta_\kappa}=-\mathbb{J}_z^{y_\varsigma\delta_\kappa}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{x_\varsigma\delta_\kappa}=J^{x\delta_\kappa}\\ \mathbb{J}_z^{x_\varsigma\delta_\kappa}=-\mathbb{J}_x^{z_\varsigma\delta_\kappa}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{y_\varsigma\delta_\kappa}=J^{y\delta_\kappa}\\ \mathbb{J}_x^{y_\varsigma\delta_\kappa}=-\mathbb{J}_y^{x_\varsigma\delta_\kappa}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{z_\varsigma\delta_\kappa}=J^{z\delta_\kappa}\\ \mathbb{J}_x^{x_\varsigma\delta_\kappa}=\mathbb{J}_y^{y_\varsigma\delta_\kappa}=\mathbb{J}_z^{z_\varsigma\delta_\kappa}=\varsigma J^{\pi\delta_\kappa}\end{cases}$

展开即可证明。以上自旋方程是关于特殊的源项，那么对于一般的源项又会怎样呢？请看下面的定理。

定理2.7.2.

$(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa}=\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\delta_\kappa},S_{ab}=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a D_a\tilde{\Psi}^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)=iJ^{\delta_\kappa},\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\delta_\kappa}=-i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{b\delta_\kappa}$

证明: $(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa}=\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\delta_\kappa},S_{ab}=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(D_x+i\gamma_zD_y-i\gamma_yD_z-i\varsigma\gamma_xD_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa}=\mathbb{J}_x^{\beta_\varsigma\delta_\kappa}\\ (D_y+i\gamma_xD_z-i\gamma_zD_x-i\varsigma\gamma_yD_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa}=\mathbb{J}_y^{\beta_\varsigma\delta_\kappa}\\ (D_z+i\gamma_yD_x-i\gamma_xD_y-i\varsigma\gamma_zD_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa}=\mathbb{J}_z^{\beta_\varsigma\delta_\kappa}\\ (D_\pi+i\varsigma\gamma_xD_x+i\varsigma\gamma_yD_y+i\varsigma\gamma_zD_z)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa}=\mathbb{J}_\pi^{\beta_\varsigma\delta_\kappa}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix}D_x & D_y & D_z\\ -D_y & D_x & -\varsigma D_\pi\\ -D_z & \varsigma D_\pi & D_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^{x_\varsigma\delta_\kappa}\\ \psi^{y_\varsigma\delta_\kappa}\\ \psi^{z_\varsigma\delta_\kappa}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{J}_x^{x_\varsigma\delta_\kappa}\\ \mathbb{J}_x^{y_\varsigma\delta_\kappa}\\ \mathbb{J}_x^{z_\varsigma\delta_\kappa}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla_d\cdot\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_x^{x_\varsigma\delta_\kappa}\\ [\nabla_d\times\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)]^{z_\varsigma\delta_\kappa}-\varsigma D_\pi\psi^{z_\varsigma\delta_\kappa}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_x^{y_\varsigma\delta_\kappa}\\ -[\nabla_d\times\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)]^{y_\varsigma\delta_\kappa}+\varsigma D_\pi\psi^{y_\varsigma\delta_\kappa}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_x^{z_\varsigma\delta_\kappa}\end{cases}\\ \begin{bmatrix}D_y & -D_x & \varsigma D_\pi\\ D_x & D_y & D_z\\ -\varsigma D_\pi & -D_z & D_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^{x_\varsigma\delta_\kappa}\\ \psi^{y_\varsigma\delta_\kappa}\\ \psi^{z_\varsigma\delta_\kappa}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{J}_y^{x_\varsigma\delta_\kappa}\\ \mathbb{J}_y^{y_\varsigma\delta_\kappa}\\ \mathbb{J}_y^{z_\varsigma\delta_\kappa}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-[\nabla_d\times\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)]^{z_\varsigma\delta_\kappa}+\varsigma D_\pi\psi^{z_\varsigma\delta_\kappa}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_y^{x_\varsigma\delta_\kappa}\\ \nabla_d\cdot\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_y^{y_\varsigma\delta_\kappa}\\ [\nabla_d\times\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)]^{x_\varsigma\delta_\kappa}-\varsigma D_\pi\psi^{x_\varsigma\delta_\kappa}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_y^{z_\varsigma\delta_\kappa}\end{cases}\\ \begin{bmatrix}D_z & -\varsigma D_\pi & -D_x\\ \varsigma D_\pi & D_z & -D_y\\ D_x & D_y & D_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^{x_\varsigma\delta_\kappa}\\ \psi^{y_\varsigma\delta_\kappa}\\ \psi^{z_\varsigma\delta_\kappa}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{J}_z^{x_\varsigma\delta_\kappa}\\ \mathbb{J}_z^{y_\varsigma\delta_\kappa}\\ \mathbb{J}_z^{z_\varsigma\delta_\kappa}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}[\nabla_d\times\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)]^{y_\varsigma\delta_\kappa}-\varsigma D_\pi\psi^{y_\varsigma\delta_\kappa}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_z^{x_\varsigma\delta_\kappa}\\ -[\nabla_d\times\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)]^{x_\varsigma\delta_\kappa}+\varsigma D_\pi\psi^{x_\varsigma\delta_\kappa}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_z^{y_\varsigma\delta_\kappa}\\ \nabla_d\cdot\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_z^{z_\varsigma\delta_\kappa}\end{cases}\\ D_\pi\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)+i\varsigma\gamma\cdot\nabla_d\psi^{\delta_\kappa}=\mathbb{J}_\pi^{\delta_\kappa}\Leftrightarrow D_\pi\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)-\varsigma\nabla_d\times\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)=\mathbb{J}_\pi^{\delta_\kappa}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbb{J}_y^{z_\varsigma\delta_\kappa}=-\mathbb{J}_z^{y_\varsigma\delta_\kappa}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{x_\varsigma\delta_\kappa}:=J^{x\delta_\kappa}\\ \mathbb{J}_z^{x_\varsigma\delta_\kappa}=-\mathbb{J}_x^{z_\varsigma\delta_\kappa}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{y_\varsigma\delta_\kappa}:=J^{y\delta_\kappa}\\ \mathbb{J}_x^{y_\varsigma\delta_\kappa}=-\mathbb{J}_y^{x_\varsigma\delta_\kappa}=-\varsigma\mathbb{J}_\pi^{z_\varsigma\delta_\kappa}:=J^{z\delta_\kappa}\\ \mathbb{J}_x^{x_\varsigma\delta_\kappa}=\mathbb{J}_y^{y_\varsigma\delta_\kappa}=\mathbb{J}_z^{z_\varsigma\delta_\kappa}:=\varsigma J^{\pi\delta_\kappa}\\ D_\pi\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)-\varsigma\nabla_d\times\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)=i\vec{J}^{\delta_\kappa}\\ \nabla_d\cdot\Psi^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)=-iJ^{\pi\delta_\kappa}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^aD_a\tilde{\Psi}^{\delta_\kappa}(1,\varsigma)=iJ^{\delta_\kappa},\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\delta_\kappa}=-i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{b\delta_\kappa}\qquad\square$$

另一种更解析更抽象的证法如下：

定理2.7.3. $(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa}=\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\delta_\kappa},S_{ab}=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}\Leftrightarrow\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\delta_\kappa}=\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}(\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma}^{bc}D_c\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa})$

证明: $(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa}=\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\delta_\kappa},S_{ab}=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$
$\Leftrightarrow\sigma_{\varsigma a}^{\beta_\varsigma c}\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma cb}D^b\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa}=\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\delta_\kappa}$
$\Leftrightarrow\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\delta_\kappa}=\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}(\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{bc}D_c\psi^{\alpha_\varsigma\delta_\kappa})$ □

这个定理表明此自旋方程源项受到一定限制，不是随意的，只有前一定理描述的源项情形才有解，其他情形全无解。

推论2.7.2. $(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\delta_\kappa}=\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\delta_\kappa},S_{ab}=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$有解$\Leftrightarrow\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma\delta_\kappa}=-i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{b\delta_\kappa},\exists J^{b\delta_\kappa}$

2.8 毕安奇恒等式的外尔表述形式

2.8.1 引力场外尔张量满足的经典毕安奇恒等式 [15]

定义2.8.1. $C^{abcd}\equiv R^{abcd}+\frac{1}{2}g^{a[d}R^{c]b}+\frac{1}{2}g^{b[c}R^{d]a}+\frac{1}{6}g^{a[c}g^{d]b}R$

推论2.8.1. $R^{abcd;e}+R^{abde;c}+R^{abec;d}\equiv0\Rightarrow C^{abcd}{}_{;a}\equiv-\frac{1}{2}R^{b[c;d]}+\frac{1}{12}g^{b[c}R^{;d]}$

证明: $R^{abcd;e}+R^{abde;c}+R^{abec;d}\equiv0$
$\Rightarrow R^{abcd}{}_{;a}\equiv-R^{b[c;d]},R^{ba}{}_{;a}\equiv\frac{1}{2}R^{;b}$
$\Rightarrow C^{abcd}{}_{;a}\equiv R^{abcd}{}_{;a}+\frac{1}{2}g^{a[d}R^{c]b}{}_{;a}+\frac{1}{2}g^{b[c}R^{d]a}{}_{;a}+\frac{1}{6}g^{a[c}g^{d]b}R_{;a}$
$\Rightarrow C^{abcd}{}_{;a}\equiv-R^{b[c;d]}+\frac{1}{2}R^{b[c;d]}+\frac{1}{4}g^{b[c}R^{;d]}-\frac{1}{6}g^{b[c}R^{;d]}$
$\Leftrightarrow C^{abcd}{}_{;a}\equiv-\frac{1}{2}R^{b[c;d]}+\frac{1}{12}g^{b[c}R^{;d]}$ □

推论2.8.2. $C^{(*ab)cd}\equiv R^{(*ab)cd}+\frac{1}{2}\varepsilon^{abe[c}R^{d]}{}_e+\frac{1}{6}\varepsilon^{abcd}R$

毕安奇恒等式的外尔张量形式:

推论2.8.3. $\begin{cases} R^{abcd}{}_{;a} \equiv -R^{b[c;d]} \\ R^{(*ab)cd}{}_{;a} \equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C^{abcd}{}_{;a} \equiv -R^{b[c;d]} + \frac{1}{2}g^{a[d}R^{c]b}_{;a} + \frac{1}{2}g^{b[c}R^{d]a}_{;a} + \frac{1}{6}g^{a[c}g^{d]b}R_{;a} \\ C^{(*ab)cd}{}_{;a} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{abe[c}R^{d]}{}_{e;a} + \frac{1}{6}\varepsilon^{abcd}R_{;a} \end{cases}$

推论2.8.4. $\begin{cases} C^{abcd}{}_{;a} \equiv -\frac{1}{2}R^{b[c;d]} + \frac{1}{12}g^{b[c}R^{;d]} \\ C^{(*ab)cd}{}_{;a} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{abe[c}R^{d]}{}_{e;a} + \frac{1}{6}\varepsilon^{abcd}R_{;a} \end{cases}$

2.8.2 毕安奇恒等式的Weyl复矢量表述形式

定义2.8.2. $\tilde{C}^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}(1,\varsigma) \equiv [C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}, 0^{\beta_\varsigma}]$

定理2.8.1. $D^aF^{\beta_\varsigma}_{ab} \equiv -J^{\beta_\varsigma}_b \Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{C}^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \equiv i\frac{i}{2}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma cd}(R^{[c;d]}_b - \frac{1}{6}\delta^{[c}_bR^{;d]})$

证明: $D^aF^{\beta_\varsigma}_{ab} \equiv -J^{\beta_\varsigma}_b$

$\Leftrightarrow D_a(i\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}) \equiv -J^{b\beta_\varsigma}, \alpha_\varsigma = 1,2,3$

$\Leftrightarrow D_a[\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}(C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} + \frac{1}{6}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}R)] \equiv iJ^{b\beta_\varsigma}, \alpha_\varsigma = 1,2,3$

$\Leftrightarrow D_a(\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}) \equiv -\frac{1}{2}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma cd}R^{b[c;d]} - \frac{1}{6}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}R_{;a}, \alpha_\varsigma = 1,2,3$

$\Leftrightarrow D_a(\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}C^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}) \equiv -\frac{1}{2}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma cd}R^{b[c;d]} + \frac{1}{6}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma cd}\delta^{b[c}R^{;d]}, \alpha_\varsigma = 1,2,3$

$\Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{C}^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \equiv i\frac{i}{2}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma cd}(R^{[c;d]}_b - \frac{1}{6}\delta^{[c}_bR^{;d]}), \alpha_\varsigma = 1,2,3,4$ □

定义2.8.3. $\bar{J}^{bcd} \equiv R^{b[c;d]} - \frac{1}{6}g^{b[c}R^{;d]}, \bar{J}^{b\beta_\varsigma} \equiv \frac{i}{2}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma cd}\bar{J}^{bcd}$

2.8.3 毕安奇恒等式的Weyl复矢量矩阵表述形式

复矢量矩阵形式：

推论2.8.5. $(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{C}^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \equiv i\bar{J}^{\beta_\varsigma}_b \Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^aD_a\tilde{\Psi}^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma) \equiv iJ^{\beta_\varsigma}$

复矢量方矩阵形式：

推论2.8.6. $(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{C}^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \equiv i\bar{J}^{\beta_\varsigma}_b \Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^aD_a[\tilde{C}(1,\varsigma)] \equiv i[\bar{J}]$

表象变换：

推论2.8.7. $(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^aD_a\tilde{C}^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma) \equiv i\bar{J}^{\beta_\varsigma} \Leftrightarrow (\sigma \otimes I, -i\varsigma)^aD_a\tilde{c}^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma) \equiv i\tilde{\bar{J}}^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma)$

推论2.8.8. $(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^aD_a\tilde{C}^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma) \equiv i\bar{J}^{\beta_\varsigma} \Leftrightarrow (\sigma \otimes I, -i\varsigma)^aD_a[\tilde{c}(1,\varsigma)] \equiv i[\tilde{\bar{J}}]$

2.8.4 毕安奇恒等式的$\frac{1}{2}$-外尔旋量表述形式 [1,2]

$\frac{1}{2}$-旋量Penrose抽象指标形式：

定理2.8.2. $(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{C}^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} \equiv i\bar{J}^{\beta_\varsigma}_b \Leftrightarrow \nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}_d C^{\beta_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}\bar{J}^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}$

$\frac{1}{2}$-旋量张量形式：

推论2.8.9. $\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}_d C^{\beta_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}\bar{J}^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma} \Leftrightarrow (\sigma, -i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_a D^aC^{\beta_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma} \equiv i\bar{J}^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}$

$\frac{1}{2}$-旋量矩阵形式：

推论2.8.10. $(\sigma, -i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_a D^aC^{\beta_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma} \equiv i\bar{J}^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma} \Leftrightarrow (\sigma \otimes I, -i\varsigma)_aD^a\tilde{C}^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma) \equiv i\tilde{\bar{J}}^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma)$

$\frac{1}{2}$-旋量方矩阵形式：

推论2.8.11. $(\sigma, -i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_a D^aC^{\beta_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma} \equiv i\bar{J}^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma} \Leftrightarrow (\sigma, -i\varsigma)_aD^a[C]^{\beta_\varsigma} \equiv i[\bar{J}]^{\beta_\varsigma}$

2.8.5 毕安奇恒等式的全$\frac{1}{2}$-外尔旋量表述形式

推论2.8.12. $\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}_d C^{\beta_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}\bar{J}^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma} \Leftrightarrow \nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}_d C_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}\bar{J}^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}$

推论2.8.13. $\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}_d C^{\beta_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma} \equiv \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}\bar{J}^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma} \Leftrightarrow (\sigma, -i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_a D^aC_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma} \equiv i\bar{J}^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}$

2.8.6 毕安奇恒等式 [8]的自旋张量外尔表述形式

定理2.8.3. $(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}C^{\gamma_\varsigma\delta_\varsigma}(1,\varsigma)\equiv -i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}\bar{J}^{b\delta_\varsigma}, S_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a D_a\tilde{C}^{\delta_\varsigma}(1,\varsigma)\equiv i\bar{J}^{\delta_\varsigma}$

此方程(2.8.3)就是毕安奇恒等式的自旋张量外尔表述形式。

定理2.8.4.
$(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}C^{\gamma_\varsigma\delta_\varsigma}=\mathbb{J}^{\beta_\varsigma\delta_\varsigma}_a, S_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a D_a\tilde{C}^{\delta_\varsigma}(1,\varsigma)=i\bar{J}^{\delta_\varsigma}, \mathbb{J}^{\beta_\varsigma\delta_\varsigma}_a=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}\bar{J}^{b\delta_\varsigma}$

这个定理表明此自旋方程源项受到一定限制，不是随意的，只有前一定理描述的源项情形才有解，其他情形全无解。

推论2.8.14. $(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}C^{\gamma_\varsigma\delta_\varsigma}=\mathbb{J}^{\beta_\varsigma\delta_\varsigma}_a, S_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}\Leftrightarrow\mathbb{J}^{\beta_\varsigma\delta_\varsigma}_a=\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}(\sigma^{bc}_{\varsigma\gamma_\varsigma}D_c C^{\gamma_\varsigma\delta_\varsigma})$

推论2.8.15. $(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}C^{\gamma_\varsigma\delta_\varsigma}=\mathbb{J}^{\beta_\varsigma\delta_\varsigma}_a, S_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}$有解 $\Leftrightarrow\mathbb{J}^{\beta_\varsigma\delta_\varsigma}_a=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}\bar{J}^{b\delta_\varsigma},\exists\bar{J}^{b\delta_\varsigma}$

2.8.7 毕安奇恒等式的全自旋张量外尔表述形式

推论2.8.16. $(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_a D^a C_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}\equiv i\bar{J}^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}\Leftrightarrow[2D_a+iS_{ab}(2,\varsigma)D^b]_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}c_{l_\varsigma}(2,\varsigma)\equiv\mathbb{J}_{ak_\varsigma}(2,\varsigma)$

推论2.8.17. $(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_a D^a C_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}\equiv i\bar{J}^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_4,-i\varsigma)^a D_a\tilde{c}(2,\varsigma)\equiv i\tilde{J}(2,\varsigma)$

以上两个命题的证明以后章节会补上，在此略去。

推论2.8.18. $(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a D_a\tilde{C}^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma)\equiv i\bar{J}^{\beta_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_4,-i\varsigma)^a D_a\tilde{c}(2,\varsigma)\equiv i\tilde{J}(2,\varsigma)$

2.9 毕安奇恒等式的经典分离形式

推论2.9.1. $(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a D_a\tilde{\Psi}^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma)=iJ^{\beta_\varsigma}\Leftrightarrow(\gamma,-i\varsigma)^a D_a\Psi^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma)=i\vec{J}^{\beta_\varsigma}, i\varsigma\nabla_d\cdot\Psi^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma)=iJ^{\beta_\varsigma}_{\pi_\varsigma}$

推论2.9.2. $\begin{cases}(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a D_a\tilde{\Psi}^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma)=iJ^{\beta_\varsigma}\\ \psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}=\psi_{\beta_\varsigma\alpha_\varsigma},\psi_{\alpha_\varsigma}{}^{\alpha_\varsigma}=0,(\sigma,-i\varsigma)^a\sigma_{\beta_\varsigma}J^{\beta_\varsigma}_a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\frac{1}{2}G_m,-i\varsigma)^a D_a\Psi(2,\varsigma)=i\vec{\mathcal{J}}(2,\varsigma)\\ i\varsigma\nabla_d\cdot\Psi^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma)=iJ^{\beta_\varsigma}_{\pi_\varsigma}\end{cases}$

推论2.9.3. $\begin{cases}(\frac{1}{2}G_m,-i\varsigma)^a D_a\Psi(2,\varsigma)=i\vec{\mathcal{J}}(2,\varsigma)\\ i\varsigma\nabla_d\cdot\Psi^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma)=iJ^{\beta_\varsigma}_{\pi_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\frac{1}{2}\sigma(2),-i\varsigma]^a D_a\psi(2,\varsigma)=i\vec{J}(2,\varsigma)\\ i\varsigma\nabla_d\cdot\Psi^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma)=iJ^{\beta_\varsigma}_{\pi_\varsigma}\end{cases}$

推论2.9.4. $\begin{cases}[\sigma(s),-is\varsigma]^a D_a\psi(s,\varsigma)=is\vec{J}(s,\varsigma)\\ i\varsigma\nabla_d\cdot\Psi^{l_\varsigma}(1,\varsigma)=iJ^{l_\varsigma}_{\pi_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\frac{1}{s}\sigma(s),-i\varsigma]^a D_a\psi(s,\varsigma)=i\vec{J}(s,\varsigma)\\ i\varsigma\nabla_d\cdot\Psi^{l_\varsigma}(1,\varsigma)=iJ^{l_\varsigma}_{\pi_\varsigma}\end{cases}$

推论2.9.5.

$$S=\frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix}\sqrt{4}&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{1}&\sqrt{3}&0&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{3}&\sqrt{1}&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{4}\\0&\sqrt{3/2i}&-\sqrt{1/2i}&0&0&-\sqrt{1/2i}&\sqrt{3/2i}&0\\0&-\sqrt{3/2}&\sqrt{1/2}&0&0&-\sqrt{1/2}&\sqrt{3/2}&0\\0&0&0&-\sqrt{2}i&\sqrt{2}i&0&0&0\end{bmatrix}, S^+=\frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix}\sqrt{4}&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{1}&0&0&0&-\sqrt{3/2i}&-\sqrt{3/2}&0\\0&\sqrt{3}&0&0&0&\sqrt{1/2i}&\sqrt{1/2}&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&\sqrt{2}i\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&-\sqrt{2}i\\0&0&0&\sqrt{3}&0&\sqrt{1/2i}&-\sqrt{1/2}&0\\0&0&0&\sqrt{1}&0&-\sqrt{3/2i}&\sqrt{3/2}&0\\0&0&0&0&\sqrt{4}&0&0&0\end{bmatrix}$$

推论2.9.6.

$$(\sigma\otimes I_4,-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\psi}(2,\varsigma)=i\tilde{J}(2,\varsigma)\overset{S}{\Leftrightarrow}\begin{cases}[\sigma(2),-i\varsigma]^a\partial_a\psi(2,\varsigma)=i\bar{N}(2)\tilde{J}(2,\varsigma)\\ i\varsigma\nabla\cdot S^{l_\varsigma}_m(2)S_{im}(2,+)\psi(2,\varsigma)=iJ^{l_\varsigma}_\pi, J^{l_\varsigma}_\pi\succ J_\pi\end{cases}\quad\begin{cases}\begin{bmatrix}\bar{N}(2)\tilde{J}(2,\varsigma)\\J_\pi\end{bmatrix}=S\tilde{J}(2,\varsigma)\\ \begin{bmatrix}\psi(2,\varsigma)\\0_3\end{bmatrix}=S\tilde{\psi}(2,\varsigma)\end{cases}$$

推论2.9.7. $S^{l_\varsigma}_{im}(2)=(\begin{bmatrix}0&0&-1&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&-\frac{2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix})$

推论2.9.8.

$$\begin{cases}[\sigma(2),-i\varsigma]^a\partial_a\psi(2,\varsigma)=i\bar{N}(2)\tilde{J}(2,\varsigma)\\ i\varsigma\nabla\cdot S^{l_\varsigma}_m(2)S_{im}(2,+)\psi(2,\varsigma)=iJ^{l_\varsigma}_\pi\end{cases}\overset{S_{im}(2,+)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}(\frac{1}{2}G_{im}(+),-i\varsigma)^a\partial_a\Psi(2,\varsigma)=i\vec{\mathcal{J}}(2),\vec{\mathcal{J}}(2)=S_{im}(2,+)\bar{N}(2)\tilde{J}(2,\varsigma)\\ i\varsigma\nabla\cdot S^{l_\varsigma}_m(2)\Psi(2,\varsigma)=iJ^{l_\varsigma}_\pi,\Psi(2,\varsigma)=S_{im}(2,+)\bar{N}(2)\tilde{\psi}(2,\varsigma)\end{cases}$$

推论2.9.9.
$(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\psi}(s,\varsigma)=i\tilde{J}(s,\varsigma)\overset{S}{\Leftrightarrow}\begin{cases}[\sigma(s),-i\varsigma]^a\partial_a\psi(s,\varsigma)=i\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ i\varsigma\nabla\cdot S^{l_\varsigma}(s)\psi(s,\varsigma)=iJ_\pi^{l_\varsigma},J_\pi^{l_\varsigma}\succ J_\pi\end{cases}\quad\begin{cases}\begin{bmatrix}\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\J_\pi\end{bmatrix}=S\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \begin{bmatrix}\psi(s,\varsigma)\\0\end{bmatrix}=S\tilde{\psi}(s,\varsigma)\end{cases}$

2.10 毕安奇恒等式的特殊类电磁场表述形式

2.10.1 毕安奇恒等式的双电磁场表述形式???

推论2.10.1. $(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D_aC_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}\equiv i\bar{J}^{A'_\varsigma}_{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D_aC_{A_\varsigma l_\varsigma}(\frac{3}{2})\equiv i\bar{J}^{A'_\varsigma}_{l_\varsigma}(\frac{3}{2})$

推论2.10.2. $(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D_aC_{A_\varsigma l_\varsigma}(\frac{3}{2})\equiv i\bar{J}^{A'_\varsigma}_{l_\varsigma}(\frac{3}{2})\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma}\otimes I,-i\varsigma)_aD^a\tilde{C}(2,\varsigma)\equiv i\tilde{\mathcal{J}}(2,\varsigma)$

以上后面那个方程形式上相当于两个同时有电荷和磁荷的电磁场方程，并且满足洛伦兹协变，表征无挠引力场，和**Einstein**方程成立与否无关。所以对电磁场的一些分析技术可以用在此，从而可以得到引力的一些性质。

定义2.10.1. $\Omega(\varsigma)=(\begin{bmatrix}0&0\\-\sigma_{\varsigma y}&\sigma_{\varsigma x}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sigma_{\varsigma y}&-\sigma_{\varsigma x}\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix})$

推论2.10.3. $\tilde{C}(2,\varsigma)\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot R\otimes I_4+(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(\varsigma)}$

证明： $\Lambda[\tilde{C}(2,\varsigma)]=S_{em}(\varsigma)\otimes S_{em}(\frac{1}{2})e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{3}{2})}S^+_{em}(\varsigma)\otimes S^+_{em}(\frac{1}{2})$
$=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot[R\otimes I_4+\Omega(\varsigma)]}=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot R\otimes I_4+(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(\varsigma)}$ □

推论2.10.4. $\tilde{\mathcal{J}}(2,\varsigma)\sim e^{(i\omega\cdot R-\varsigma\epsilon\cdot L)\otimes I_4+(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(\varsigma)}$

证明： $\Lambda[\tilde{\mathcal{J}}(2,\varsigma)]=S_{em}(\varsigma)\otimes S_{em}(\frac{1}{2})e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{3}{2})}S^+_{em}(\varsigma)\otimes S^+_{em}(\frac{1}{2})$
$=e^{(i\omega\cdot R-\varsigma\epsilon\cdot L)\otimes I_4+(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(\varsigma)}$ □

2.10.2 毕安奇恒等式的特殊类电磁场表述形式

推论2.10.5. $J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}$关于指标$B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma$全对称$\Leftrightarrow[(\sigma,-i\varsigma)^a\sigma_{\alpha_\varsigma}]J_a^{\alpha_\varsigma}=0$

推论2.10.6. $X_l^{\alpha_\varsigma}=0\Leftrightarrow X_a^{\alpha_\varsigma}=0;[(\sigma,-i\varsigma)^a\sigma_{\alpha_\varsigma}]X_a^{\alpha_\varsigma}=0,l=x,y,z$

推论2.10.7. $(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\tilde{C}^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\equiv i\bar{J}_b^{\beta_\varsigma}\Leftrightarrow(\gamma,-i\varsigma)^a{}_{l\alpha_\varsigma}D_aC^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\equiv i\bar{J}_l^{\beta_\varsigma}$

以上协变方程表明在某种特殊情况下$(\gamma,-i\varsigma)_a$表现出某种协变性。一般协变方程以**Pauli**矩阵为基础进行构造，此方程却用光子自旋矩阵构造了一个完整协变的方程，这是我第一次见到这样的情况。之所以会出现如此的情况，是场和源的全对称性的缘故。

3 引力场的物理Yang-Mills规范方程

3.1 Einstein方程 [12]和引力场Yang-Mills规范方程

Einstein方程： $R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R+\Lambda g^{ab}=-8\pi GT^{ab}$ (9.18)

推论3.1.1. $R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R+\Lambda g^{ab}=-8\pi GT^{ab}\Leftrightarrow T^{ab}{}_{;b}=0$

证明： $R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R+\Lambda g^{ab}=-8\pi GT^{ab}$
$\Rightarrow(R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R+\Lambda g^{ab});b=-8\pi GT^{ab};b$
$\Rightarrow 0=-8\pi GT^{ab};b$
$\Rightarrow T^{ab}{}_{;b}=0$ □

推论3.1.2. $R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R+\Lambda g^{ab}=-8\pi GT^{ab}\Leftrightarrow R^{ab}=-8\pi G(T^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}T)+\Lambda g^{ab}$

证明： $R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R+\Lambda g^{ab}=-8\pi GT^{ab}\to R=8\pi GT+4\Lambda$
$\Leftrightarrow R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}(8\pi GT+4\Lambda)+\Lambda g^{ab}=-8\pi GT^{ab}$
$\Leftrightarrow R^{ab}=-8\pi G(T^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}T)+\Lambda g^{ab}\to R=8\pi GT+4\Lambda$ □

推论3.1.3. $\begin{cases} R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R+\Lambda g^{ab}=-8\pi GT^{ab} \\ R^{abcd}{}_{;a}\equiv -R^{b[c;d]}, R^{(*ab)cd}{}_{;a}\equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R+\Lambda g^{ab}=-8\pi GT^{ab} \\ R^{abcd}{}_{;a}=8\pi G(T^{b[c;d]}-\frac{1}{2}g^{b[c}T^{;d]}), R^{(*ab)cd}{}_{;a}\equiv 0 \end{cases}$

推论3.1.4. $\begin{cases} R^{abcd}{}_{;a}=-J^{bcd} \\ R^{(*ab)cd}{}_{;a}\equiv 0 \\ J^{bcd}\equiv -8\pi G(T^{b[c;d]}-\frac{1}{2}g^{b[c}T^{;d]}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D^aF^{\alpha_\varsigma}_{ab}=-J^{b\alpha_\varsigma} \\ D^a*F^{\alpha_\varsigma}_{ab}\equiv 0 \\ J^{b\alpha_\varsigma}\equiv\frac{1}{2}\varsigma\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}J^{bcd}, J^{bcd}\equiv -8\pi G(T^{b[c;d]}-\frac{1}{2}g^{b[c}T^{;d]}) \end{cases}$

推论3.1.5. $\begin{cases} R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R+\Lambda g^{ab}=-8\pi GT^{ab} \\ R^{abcd;e}+R^{abde;c}+R^{abec;d}\equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R^{abcd}{}_{;a}=-J^{bcd} \\ R^{(*ab)cd}{}_{;a}\equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D^aF^{\alpha_\varsigma}_{ab}=-J^{b\alpha_\varsigma} \\ D^a*F^{\alpha_\varsigma}_{ab}\equiv 0 \end{cases}$

推论3.1.6. $\begin{cases} D^aF^{\alpha_\varsigma}_{ab}=-J^{b\alpha_\varsigma} \\ D^a*F^{\alpha_\varsigma}_{ab}\equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D^aF^{[\alpha_\varsigma]}_{ab}=-J^{b[\alpha_\varsigma]} \\ D^a*F^{[\alpha_\varsigma]}_{ab}\equiv 0 \end{cases}$

3.2 引力场Yang-Mills规范方程的旋量表述形式

只要将Einstein方程$R^{ab}=-8\pi G(T^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}T)+\Lambda g^{ab}$代入毕安奇恒等式的各种表述形式的源项，并将相应的恒等号换为等号，即可得到引力场物理Yang-Mills规范方程的各种表述形式，形式上与毕安奇恒等式的各种表述形式完全一致，不再重复写出。从本质上讲，引力场Yang-Mills规范方程只是引力场的恒等式，与Einstein方程成立与否无关，但真正描述物理的是Einstein方程，只有将Einstein方程应用于引力场规范恒等式的源项后，引力场Yang-Mills规范方程才真正带有物理的引力源项，此时的引力场Yang-Mills规范方程才成为一个真正的物理方程。所以这一点完全不同于电磁场和Yang-Mills场情形，电磁场和Yang-Mills场的规范方程不只是恒等式，直接描述真正的物理。

3.3 自我评述

事实上，电磁场和引力场都可以归结到Yang-Mills场情形，当σ为空时是电磁场；当$\sigma=\beta_\kappa$时是引力场；当σ为多个字母时，可以描述更一般情形。σ既可以为内部指标也可以为外部指标，甚至是两类指标的混合，所以Yang-Mills场数学形式上已是很一般的情形了。

4 广义相对论Einstein方程 [12–15]的等价矩阵形式

4.1 准备

推论4.1.1. $R^{ab}=\varsigma(F^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma})^{ab}, (F^{\alpha'_\varsigma}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma})^{ab}=-(F^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma})^{ab}, F^{\alpha_\varsigma}{}_{ab}=F_{ab}{}^{\alpha_\varsigma}, R=-\varsigma\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}{}^{ab}F_{ab}{}^{\alpha_\varsigma}$

推论4.1.2. $R^{ab}=-i(F^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma})^{ab}, F^{\alpha'_\varsigma}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}=F^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}$

推论4.1.3. $R=i\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}{}^{\alpha_\varsigma}$

推论4.1.4. $R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R+\Lambda g^{ab}=-8\pi GT^{ab}\Leftrightarrow R^{ab}=-8\pi G(T^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}T)+\Lambda g^{ab}$

定义4.1.1. $\bar{T}^{ab}:=8\pi G(T^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}T)-\Lambda g^{ab}, \bar{\mathcal{T}}^b\equiv[\bar{T}_x{}^b,\bar{T}_y{}^b,\bar{T}_z{}^b,\bar{T}_\pi{}^b]^T$

定义4.1.2. $\mathcal{F}_{ab}(2,\varsigma)\equiv[F^{x_\varsigma}_{ab},F^{y_\varsigma}_{ab},F^{z_\varsigma}_{ab},0_{ab}]^T, F_{ab}(2,\varsigma)\equiv F^{[\alpha_\varsigma]}_{ab}, \mathcal{R}=[R,0]$

定义4.1.3. $\mathcal{A}_u(\varsigma)\equiv[A^{x_\varsigma}_u,A^{y_\varsigma}_u,A^{z_\varsigma}_u,0_u]^T=A^{[\alpha_\varsigma]}_u(\varsigma), \mathcal{J}_a(\varsigma)\equiv[J^{x_\varsigma}_a,J^{y_\varsigma}_a,J^{z_\varsigma}_a,0_a]^T=J^{[\alpha_\varsigma]}_a$

推论4.1.5. $F^{\alpha_\varsigma}_{uv}=\partial_uA^{\alpha_\varsigma}_v-\partial_vA^{\alpha_\varsigma}_u-\varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}A^{\beta_\varsigma}_uA^{\gamma_\varsigma}_v$
$\Leftrightarrow\mathcal{F}_{uv}(\varsigma)=\partial_u\mathcal{A}_v(\varsigma)-\partial_v\mathcal{A}_u(\varsigma)+i\mathcal{A}^T_u(\varsigma)\mathcal{R}\mathcal{A}_v(\varsigma)=[\partial_u+\frac{i}{2}\mathcal{A}^T_u(\varsigma)\mathcal{R}]\mathcal{A}_v(\varsigma)-[\partial_v+\frac{i}{2}\mathcal{A}^T_v(\varsigma)\mathcal{R}]\mathcal{A}_u(\varsigma)$

4.2 Einstein方程的等价矩阵形式

推论4.2.1. $R^{ab}=-8\pi G(T^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}T)+\Lambda g^{ab}\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\mathcal{F}^{ab}(2,\varsigma)=i\bar{\mathcal{T}}^b$

证明： $R^{ab} = -8\pi G(T^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}T) + \Lambda g^{ab}$
$\Leftrightarrow (F^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma})^{ab} = -i\bar{T}^{ab}$
$\Leftrightarrow (\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}F^{\alpha_\varsigma})^{ab} = -i\bar{T}^{ab}$
$\Leftrightarrow [(\sigma_\varsigma, -i\varsigma)_{\alpha_\varsigma}F^{\alpha_\varsigma}]^{ab} = -i\bar{T}^{ab}$
$\Leftrightarrow (\sigma_\varsigma, -i\varsigma)^{\alpha_\varsigma}{}_{ac}F^{cb}_{\alpha_\varsigma} = -i\bar{T}_a{}^b$
$\Leftrightarrow (\sigma_\varsigma, -i\varsigma)^{\alpha_\varsigma}{}_{ca}F^{cb}_{\alpha_\varsigma} = i\bar{T}_a{}^b$
$\Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)_{ca}{}^{\alpha_\varsigma}F^{cb}_{\alpha_\varsigma} = i\bar{T}_a{}^b$
$\Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)_{ac}{}^{\alpha_\varsigma}F^{ab}_{\alpha_\varsigma} = i\bar{T}_c{}^b$
$\Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)_a\mathcal{F}^{ab}(2,\varsigma) = i\bar{\mathcal{T}}^b$ □

推论4.2.2. $R^{ab} = \frac{1}{4}\delta^{ab}R + \frac{1}{2}(\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma_{-\varsigma\beta'_\varsigma})^{ab}\psi^{\alpha_\varsigma\beta'_\varsigma}$

推论4.2.3. $R_{ab} = -\bar{T}_{ab} \Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)_a * \mathcal{F}^{ab}(2,\varsigma) = i\varsigma\bar{\mathcal{T}}^b - \frac{i\varsigma}{2}\delta^b\bar{T}$

证明： $R_{ab} = -\bar{T}_{ab}$
$\Leftrightarrow i\varsigma(R_a{}^b - \frac{1}{2}\delta_a^bR) = -i\varsigma(\bar{T}_a{}^b - \frac{1}{2}\delta_a^b\bar{T})$
$\Leftrightarrow \frac{i\varsigma}{2}(2R_a{}^b - \frac{1}{2}\delta_a^bR - \frac{1}{2}\delta_a^bR) = -i\varsigma(\bar{T}_a{}^b - \frac{1}{2}\delta_a^b\bar{T})$
$\Leftrightarrow \frac{i\varsigma}{2}(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ac}\sigma^{\beta'_\varsigma cb}_{-\varsigma}\psi_{\beta'_\varsigma\alpha_\varsigma} - \delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\delta_a^b\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}) = -i\varsigma(\bar{T}_a{}^b - \frac{1}{2}\delta_a^b\bar{T})$
$\Leftrightarrow \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ac}\frac{i\varsigma}{2}(\sigma^{\beta'_\varsigma cb}_{-\varsigma}\psi_{\beta'_\varsigma\alpha_\varsigma} - \sigma^{\beta_\varsigma cb}_{\varsigma}\psi_{\beta_\varsigma\alpha_\varsigma}) = -i\varsigma(\bar{T}_a{}^b - \frac{1}{2}\delta_a^b\bar{T})$
$\Leftrightarrow \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ac} * F^{cb}_{\alpha_\varsigma} = -i\varsigma(\bar{T}_a{}^b - \frac{1}{2}\delta_a^b\bar{T})$
$\Leftrightarrow (\sigma_\varsigma, -i\varsigma)^{\alpha_\varsigma}{}_{ac} * F^{cb}_{\alpha_\varsigma} = -i\varsigma(\bar{T}_a{}^b - \frac{1}{2}\delta_a^b\bar{T})$
$\Leftrightarrow (\sigma_\varsigma, -i\varsigma)^{\alpha_\varsigma}{}_{ca} * F^{cb}_{\alpha_\varsigma} = i\varsigma(\bar{T}_a{}^b - \frac{1}{2}\delta_a^b\bar{T})$
$\Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)_{ca}{}^{\alpha_\varsigma} * F^{cb}_{\alpha_\varsigma} = i\varsigma(\bar{T}_a{}^b - \frac{1}{2}\delta_a^b\bar{T})$
$\Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)_{ac}{}^{\alpha_\varsigma} * F^{ab}_{\alpha_\varsigma} = i\varsigma(\bar{T}_c{}^b - \frac{1}{2}\delta_c^b\bar{T})$
$\Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)_a * \mathcal{F}^{ab}(2,\varsigma) = i\varsigma\bar{\mathcal{T}}^b - \frac{i\varsigma}{2}\delta^b\bar{T}$ □

推论4.2.4. $(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)_a\mathcal{F}^{ab}(2,\varsigma) = i\bar{\mathcal{T}}^b \Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)_a * \mathcal{F}^{ab}(2,\varsigma) = i\varsigma\bar{\mathcal{T}}^b - \frac{i\varsigma}{2}\delta^b\bar{T}$

自我评述：这里得到了一对美妙而简洁的都与**Einstein**方程等价的旋量方程，十分有意思。

推论4.2.5. $\begin{cases} D^aF^{\alpha_\varsigma}_{ab} \equiv -J^{b\alpha_\varsigma} \\ D^a * F^{\alpha_\varsigma}_{ab} \equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_a\mathcal{F}^{ab}(2,\varsigma) \equiv -\bar{\mathcal{J}}^b(\varsigma) \\ D_a * \mathcal{F}^{ab}(2,\varsigma) \equiv 0 \end{cases}$

推论4.2.6. $\begin{cases} R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}R + \Lambda g^{ab} = -8\pi GT^{ab} \\ R^{abcd}{}_{;a} \equiv -R^{b[c;d]}, R^{(*ab)cd}{}_{;a} \equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Einstein\text{方程}: (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)_a\mathcal{F}^{ab}(2,\varsigma) = -i\bar{\mathcal{T}}^b \\ \text{毕安奇恒等式}: D_a\mathcal{F}^{ab}(2,\varsigma) \equiv -\bar{\mathcal{J}}^b(\varsigma), D_a * \mathcal{F}^{ab}(2,\varsigma) \equiv 0 \end{cases}$

推论4.2.7. $(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)_a\mathcal{F}^{ab}(2,\varsigma) = i\bar{\mathcal{T}}^b, (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a\mathcal{A}_a(\varsigma) = 0$(规范条件)
$\Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a e_a^u e_b^v[\partial_u + i\mathcal{A}_u^T(\varsigma)\mathcal{R}]\mathcal{A}_v(\varsigma) = i\bar{\mathcal{T}}_b, (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a\mathcal{A}_a(\varsigma) = 0$

4.3 Einstein方程等价的低一阶导数自旋张量新形式

推论4.3.1. $R^{ab} = -8\pi G(T^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}T) + \Lambda g^{ab} \Leftrightarrow [\delta_{ab} + iS_{ab}(\gamma,\varsigma)]F^{bc}(2,\varsigma) = -i\sigma^{[\beta_\varsigma]}_{\varsigma ab}\bar{T}^{bc} = i(\sigma_{-\varsigma}, i\varsigma)_a\bar{T}^c$

推论4.3.2. $R^{ab} = -8\pi G(T^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}T) + \Lambda g^{ab}$
$\Leftrightarrow [\delta_{ab} + iS_{ab}(\gamma,\varsigma)] * F^{bc}(2,\varsigma) = -i\varsigma\sigma^{[\beta_\varsigma]}_{\varsigma ab}(\bar{T}^{bc} - \frac{1}{2}\delta^{bc}\bar{T}) = i\varsigma(\sigma_{-\varsigma}, i\varsigma)_a(\bar{T}^c - \frac{1}{2}\delta^{[b]c}\bar{T})$

第十章　引力微子场方程的重新表述

1 应用常数张量定义引力微子场 [8]的各种旋量

自我评述：本章提出了引力微子场方程的多种等价表述形式，并严格证明了它们之间的等价性。

1.1 引力微子理论的场强描述

定义1.1.1. $F_{uv}(\frac{3}{2},\varsigma) := D_u\psi_v(\varsigma) - D_v\psi_u(\varsigma)$

推论1.1.1. $F_{uv}(\frac{3}{2},\varsigma) = (\partial_u + \frac{i}{2}\sigma_{\alpha_\varsigma}A_u^{\alpha_\varsigma})\psi_v(\varsigma) - (\partial_v + \frac{i}{2}\sigma_{\alpha_\varsigma}A_v^{\alpha_\varsigma})\psi_u(\varsigma)$

证明: $F_{uv}(\frac{3}{2},\varsigma) := D_u\psi_v(\varsigma) - D_v\psi_u(\varsigma)$
$= [\partial_u\psi_v(\varsigma) + \Gamma_{uv}^\lambda\psi_\lambda(\varsigma) + \frac{i}{2}A_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}\psi_v(\varsigma)] - [\partial_v\psi_u(\varsigma) + \Gamma_{vu}^\lambda\psi_\lambda(\varsigma) + \frac{i}{2}A_v^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}\psi_u(\varsigma)]$
$= \partial_u\psi_v(\varsigma) - \partial_v\psi_u(\varsigma) + \frac{i}{2}\sigma_{\alpha_\varsigma}[A_u^{\alpha_\varsigma}\psi_v(\varsigma) - A_v^{\alpha_\varsigma}\psi_u(\varsigma)]$
$= (\partial_u + \frac{i}{2}\sigma_{\alpha_\varsigma}A_u^{\alpha_\varsigma})\psi_v(\varsigma) - (\partial_v + \frac{i}{2}\sigma_{\alpha_\varsigma}A_v^{\alpha_\varsigma})\psi_u(\varsigma)$ □

推论1.1.2. $\delta\psi_u(\varsigma) = i\theta^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})\psi_u(\varsigma), \delta F_{uv}(\frac{3}{2},\varsigma) = i\theta^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})F_{uv}(\frac{3}{2},\varsigma)$

与引力场对比：

推论1.1.3. $F_{uv}(2,\varsigma) = (\partial_u + \frac{i}{2}\gamma_{\alpha_\varsigma}A_u^{\alpha_\varsigma})\psi_v(\varsigma) - (\partial_v + \frac{i}{2}\gamma_{\alpha_\varsigma}A_v^{\alpha_\varsigma})\psi_u(\varsigma)$

证明: $F_{uv}(2,\varsigma) := \tilde{D}_uA_v(\varsigma) - \tilde{D}_vA_u(\varsigma)$
$= [\partial_uA_v(\varsigma) + \Gamma_{uv}^\lambda A_\lambda(\varsigma) + \frac{i}{2}A_u^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}A_v(\varsigma)] - [\partial_vA_u(\varsigma) + \Gamma_{vu}^\lambda A_\lambda(\varsigma) + \frac{i}{2}A_v^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}A_u(\varsigma)]$
$= \partial_uA_v(\varsigma) - \partial_vA_u(\varsigma) + \frac{i}{2}\gamma_{\alpha_\varsigma}[A_u^{\alpha_\varsigma}A_v(\varsigma) - A_v^{\alpha_\varsigma}A_u(\varsigma)]$
$= (\partial_u + \frac{i}{2}\gamma_{\alpha_\varsigma}A_u^{\alpha_\varsigma})A_v(\varsigma) - (\partial_v + \frac{i}{2}\gamma_{\alpha_\varsigma}A_v^{\alpha_\varsigma})A_u(\varsigma)$ □

推论1.1.4. $F_{uv}(2,\varsigma) = (\partial_u + \frac{i}{2}\gamma_{\alpha_\varsigma}A_u^{\alpha_\varsigma})A_v(\varsigma) - (\partial_v + \frac{i}{2}\gamma_{\alpha_\varsigma}A_v^{\alpha_\varsigma})A_u(\varsigma) \Leftrightarrow F_{uv}^{\alpha_\varsigma} = \partial_uA_v^{\alpha_\varsigma} - \partial_vA_u^{\alpha_\varsigma} - \varepsilon^{\alpha_\varsigma}{}_{\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}A_u^{\beta_\varsigma}A_v^{\gamma_\varsigma}$

推论1.1.5. $\delta A_u(\varsigma) = i\theta^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}A_u - \partial_u\theta, \delta F_{uv}(2,\varsigma) = i\theta^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}F_{uv}(2,\varsigma)$

1.2 引力微子场强的经典描述

$$F_{ab}^{Z_\kappa} = \begin{bmatrix} 0 & B_z^{Z_\kappa} & -B_y^{Z_\kappa} & -iE_x^{Z_\kappa} \\ -B_z^{Z_\kappa} & 0 & B_x^{Z_\kappa} & -iE_y^{Z_\kappa} \\ B_y^{Z_\kappa} & -B_x^{Z_\kappa} & 0 & -iE_z^{Z_\kappa} \\ iE_x^{Z_\kappa} & iE_y^{Z_\kappa} & iE_z^{Z_\kappa} & 0 \end{bmatrix}, *F_{ab}^{Z_\kappa} = \begin{bmatrix} 0 & -iE_z^{Z_\kappa} & iE_y^{Z_\kappa} & B_x^{Z_\kappa} \\ iE_z^{Z_\kappa} & 0 & -iE_x^{Z_\kappa} & B_y^{Z_\kappa} \\ -iE_y^{Z_\kappa} & iE_x^{Z_\kappa} & 0 & B_z^{Z_\kappa} \\ -B_x^{Z_\kappa} & -B_y^{Z_\kappa} & -B_z^{Z_\kappa} & 0 \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

$$(\sigma,i\varsigma)_a(\sigma,-i\varsigma)_bF^{ab}(\tfrac{3}{2},\varsigma) = 0, (\sigma,i\varsigma)_a(\sigma,-i\varsigma)_b * F^{ab}(\tfrac{3}{2},\varsigma) = 0 \quad (10.2)$$

1.3 引力微子场强的复矢量描述

定义1.3.1. 引力微子场复矢量$\psi_{\alpha_\varsigma}^{Z_\kappa} := \frac{i}{2}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{ab}F_{ab}^{Z_\kappa} = i\varsigma(E - i\varsigma B)_{\alpha_\varsigma}^{Z_\kappa} = (i\varsigma E + B)_{\alpha_\varsigma}^{Z_\kappa}$

推论1.3.1. $\frac{1}{2}(F_{ab}^{Z_\kappa} - \varsigma * F_{ab}^{Z_\kappa}) = \frac{i}{2}\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma}^{Z_\kappa}$

证明: $F_{ab}^{Z_\kappa} = -F_{ba}^{Z_\kappa}$
$\Leftrightarrow F_{ab}^{Z_\kappa} = \frac{1}{2}S_{abcd}F^{cd}, *F_{ab}^{Z_\kappa} := \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}F^{cd}$
$\Leftrightarrow F_{ab}^{Z_\kappa} - \varsigma * F_{ab}^{Z_\kappa} = \frac{1}{2}(S_{abcd} - \varsigma\varepsilon_{abcd})F^{cd}$
$\Leftrightarrow F_{ab}^{Z_\kappa} - \varsigma * F_{ab}^{Z_\kappa} = -\frac{1}{2}\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}F^{cd}$
$\Leftrightarrow F_{ab}^{Z_\kappa} - \varsigma * F_{ab}^{Z_\kappa} = i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma}^{Z_\kappa}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(F_{ab}^{Z_\kappa} - \varsigma * F_{ab}^{Z_\kappa}) = \frac{i}{2}\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma}^{Z_\kappa}$ □

推论1.3.2. $\psi_{\alpha_\varsigma}^{Z_\kappa} = \frac{i}{2}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{ab}\frac{1}{2}(F_{ab}^{Z_\kappa} - \varsigma * F_{ab}^{Z_\kappa})$

推论1.3.3. $\psi^{Z_\kappa}_{\alpha_\varsigma} = -\frac{i}{2}\varsigma\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma} * F^{Z_\kappa}_{ab}$

推论1.3.4. $\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}(F^{Z_\kappa}_{ab} + \varsigma * F^{Z_\kappa}_{ab}) = 0$

推论1.3.5. $F^{Z_\kappa}_{ab} - \varsigma * F^{Z_\kappa}_{ab} = -\frac{1}{4}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{cd}_{\varsigma\alpha_\varsigma}(F^{Z_\kappa}_{cd} - \varsigma * F^{Z_\kappa}_{cd})$

推论1.3.6. $F^{Z_\kappa}_{ab} = \frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha'} + \sigma^{\alpha}_{+ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha}), *F^{Z_\kappa}_{ab} = \frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha'} - \sigma^{\alpha}_{+ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha})$

证明：$F^{Z_\kappa}_{ab} - \varsigma * F^{Z_\kappa}_{ab} = i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha_\varsigma}$
$\Leftrightarrow F^{Z_\kappa}_{ab} - *F^{Z_\kappa}_{ab} = i\sigma^{\alpha}_{+ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha}, F^{Z_\kappa}_{ab} + *F^{Z_\kappa}_{ab} = i\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha'}$
$\Leftrightarrow F^{Z_\kappa}_{ab} = \frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha'} + \sigma^{\alpha}_{+ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha}), *F^{Z_\kappa}_{ab} = \frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha'} - \sigma^{\alpha}_{+ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha})$
$\Leftrightarrow F^{Z_\kappa}_{ab} = \frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha'} + \sigma^{\alpha}_{+ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha})$
$\Leftrightarrow *F^{Z_\kappa}_{ab} = \frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha'} - \sigma^{\alpha}_{+ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha})$ □

推论1.3.7. $F^{Z_\kappa}_{ab} = -F^{Z_\kappa}_{ba} \Leftrightarrow F^{Z_\kappa}_{ab} = \frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha'} + \sigma^{\alpha}_{+ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha})$

推论1.3.8. $(\sigma, i\varsigma)_a(\sigma, -i\varsigma)_b F^{ab}(\varsigma) = 0 \Leftrightarrow \sigma_{\alpha_\varsigma}\psi^{\alpha_\varsigma[Z_\varsigma]} = 0$

1.4 引力微子场强的$\frac{1}{2}$-旋量描述 [1,2]

定义1.4.1. 引力微子场$\frac{1}{2}$-旋量张量*:* $\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma} := \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}F^{Z_\kappa}_{ab}$

推论1.4.1. $\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha_\varsigma} \Leftrightarrow \psi^{Z_\kappa}_{\alpha_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma}$

推论1.4.2. $\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma} = \psi^{Z_\kappa}_{B_\varsigma A_\varsigma}$

推论1.4.3. $\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma} = \frac{-i}{\sqrt{2}}S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma} * F^{Z_\kappa}_{ab}$

推论1.4.4. $\frac{1}{2}(F^{Z_\kappa}_{ab} - \varsigma * F^{Z_\kappa}_{ab}) = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma} \Leftrightarrow \psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{1}{2}(F^{Z_\kappa}_{ab} - \varsigma * F^{Z_\kappa}_{ab})$

推论1.4.5. $F^{Z_\kappa}_{ab} - \varsigma * F^{Z_\kappa}_{ab} = -\frac{1}{2}S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}S^{cd}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}(F^{Z_\kappa}_{cd} - \varsigma * F^{Z_\kappa}_{cd})$

推论1.4.6. $F^{Z_\kappa}_{ab} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(S_{ab}{}^{A'B'}\psi^{Z_\kappa}_{A'B'} + S_{ab}{}^{AB}\psi^{Z_\kappa}_{AB}), *F^{Z_\kappa}_{ab} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(S_{ab}{}^{A'B'}\psi^{Z_\kappa}_{A'B'} - S_{ab}{}^{AB}\psi^{Z_\kappa}_{AB})$

推论1.4.7. $F^{Z_\kappa}_{ab} = -F^{Z_\kappa}_{ba} \Leftrightarrow F^{Z_\kappa}_{ab} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(S_{ab}{}^{A'B'}\psi^{Z_\kappa}_{A'B'} + S_{ab}{}^{AB}\psi^{Z_\kappa}_{AB})$

结合推论1.3.6和(1.259), (1.260) 式可得**Penrose**对应记法 [1,2]：

推论1.4.8. $F^{Z_\kappa}_{ab} \overset{P}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{Z_\kappa}_{A'B'}\varepsilon_{AB} + \psi^{Z_\kappa}_{AB}\varepsilon_{A'B'}), *F^{Z_\kappa}_{ab} \overset{P}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{Z_\kappa}_{A'B'}\varepsilon_{AB} - \psi^{Z_\kappa}_{AB}\varepsilon_{A'B'})$

推论1.4.9. $(\sigma, i\varsigma)_a(\sigma, -i\varsigma)_b F^{ab}(\varsigma) = 0 \Leftrightarrow \sigma_{\alpha_\varsigma}\psi^{\alpha_\varsigma[Z_\varsigma]} = 0 \Leftrightarrow \psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma} = \frac{1}{3!}\psi_{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma)}$

1.5 引力微子场强的1-旋量描述

定义1.5.1. 引力微子场*1-*旋量$\psi^{Z_\kappa}_{k_\varsigma}(1) := \Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma} = \Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi^{Z_\kappa}_{\alpha_\varsigma}$

推论1.5.1. $\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma} = \Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi^{Z_\kappa}_{k_\varsigma}(1), \psi^{Z_\kappa}_{\alpha_\varsigma} = \Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\psi^{Z_\kappa}_{k_\varsigma}(1)$

1.6 引力微子场源的$\frac{1}{2}$-旋量描述 [1,2]

定义1.6.1. 引力微子场源$\frac{1}{2}$-旋量张量$J^{A'_\varsigma A_\varsigma Z_\kappa} := \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma, -i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_a J^{aZ_\kappa}, J^{Z_\kappa}_{A_\varsigma A'_\varsigma} := \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma, i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}J^{Z_\kappa}_a$

Penrose记法： $J^{aZ_\kappa} \overset{P}{=} J^{A'AZ_\kappa}, J^{Z_\kappa}_a \overset{P}{=} J^{Z_\kappa}_{AA'}$

1.7 引力微子场的对称性条件证明

推论1.7.1. $\psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma}=\psi^{A_\varsigma C_\varsigma B_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma,i\varsigma)_a(\sigma,-i\varsigma)_bF^{ab}(\varsigma)=0$

证明: $\psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma}=\psi^{A_\varsigma C_\varsigma B_\varsigma}$
$\Leftrightarrow\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}\psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma}=0$
$\Leftrightarrow-\frac{1}{\sqrt{2}}\varsigma\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}iS_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}F^{abC_\varsigma}=0$
$\Leftrightarrow\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}iS_{ab}{}^{A_\varsigma}{}_{D_\varsigma}\bar{\varepsilon}^{D_\varsigma B_\varsigma}F^{abC_\varsigma}=0$
$\Leftrightarrow iS_{ab}{}^{A_\varsigma}{}_{D_\varsigma}\delta^{D_\varsigma}{}_{C_\varsigma}F^{abC_\varsigma}=0$
$\Leftrightarrow iS_{ab}{}^{A_\varsigma}{}_{C_\varsigma}F^{abC_\varsigma}=0$
$\Leftrightarrow\frac{1}{4}(\sigma,i\varsigma)_{[a}(\sigma,-i\varsigma)_{b]}F^{ab[C_\varsigma]}=0$
$\Leftrightarrow(\sigma,i\varsigma)_a(\sigma,-i\varsigma)_bF^{ab[C_\varsigma]}=0$
$\Leftrightarrow(\sigma,i\varsigma)_a(\sigma,-i\varsigma)_bF^{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)=0$ □

推论1.7.2. $\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma}=\frac{1}{3!}\psi_{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma)}\Leftrightarrow(\sigma,i\varsigma)_a(\sigma,-i\varsigma)_bF^{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)=0\Leftrightarrow(\sigma,i\varsigma)_a(\sigma,-i\varsigma)_b*F^{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)=0$

推论1.7.3. $J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma C_\varsigma}=J_{A'_\varsigma}{}^{C_\varsigma B_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^aJ_a(\varsigma)=0$

证明: $J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma C_\varsigma}=J_{A'_\varsigma}{}^{C_\varsigma B_\varsigma}$
$\Leftrightarrow\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}J_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma C_\varsigma}=0$
$\Leftrightarrow\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)^a{}_{A'_\varsigma A_\varsigma}\bar{\varepsilon}^{A_\varsigma B_\varsigma}J_a{}^{C_\varsigma}=0$
$\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^a{}_{A'_\varsigma A_\varsigma}\delta^{A_\varsigma}{}_{C_\varsigma}J_a{}^{C_\varsigma}=0$
$\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^a{}_{A'_\varsigma C_\varsigma}J_a{}^{C_\varsigma}=0$
$\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^aJ_a{}^{[C_\varsigma]}=0$
$\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^aJ_a(\varsigma)=0$ □

2 平坦时空中Penrose型引力微子场方程的多种等价表述形式

2.1 引力微子方程的标架描述

定义2.1.1. $F^{Z_\kappa}_{ab}:=e^u_ae^v_bF^{Z_\kappa}_{uv},\psi^{Z_\kappa}_a:=e^u_a\psi^{Z_\kappa}_u$

引力微子方程的标架描述

$$\partial^aF^{Z_\kappa}_{ab}=-J^{Z_\kappa}_b,\partial^a*F^{Z_\kappa}_{ab}\equiv0\tag{10.3}$$

2.2 引力微子场方程的经典形式

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}^{Z_\kappa}=\rho^{Z_\kappa},\nabla\times\vec{E}^{Z_\kappa}=-\partial_t\vec{B}^{Z_\kappa}\\\nabla\cdot\vec{B}^{Z_\kappa}=0,\nabla\times\vec{B}^{Z_\kappa}=\vec{J}^{Z_\kappa}+\partial_t\vec{E}^{Z_\kappa}\end{cases}\Leftrightarrow\quad\partial^aF^{Z_\kappa}_{ab}=-J^{Z_\kappa}_b,\partial^a*F^{Z_\kappa}_{ab}\equiv0\tag{10.4}$$

2.3 引力微子场方程的复矢量表述形式

复矢量张量形式：

定理2.3.1. $\partial^aF^{Z_\kappa}_{ab}=-J^{Z_\kappa}_b\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}\partial_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\sigma}=iJ^{Z_\kappa}_b;F^{Z_\kappa}_{ab}=\partial_aA_b-\partial_bA_a,\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\sigma}=\begin{bmatrix}\psi^{\alpha_\varsigma\sigma}=\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}F^{ab\sigma}\\0\end{bmatrix}$

证明: $\partial^aF^{Z_\kappa}_{ab}=-J^{Z_\kappa}_b$
$\Leftrightarrow\partial^aF^{Z_\kappa}_{ab}=-J^{Z_\kappa}_b,\partial^a*F^{Z_\kappa}_{ab}\equiv0$
$\Leftrightarrow\partial^a(F^{Z_\kappa}_{ab}-\varsigma*F^{Z_\kappa}_{ab})=-J^{Z_\kappa}_b$
$\Leftrightarrow\partial^a(i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha_\varsigma})=-J^{b\sigma},\alpha_\varsigma=1,2,3$
$\Leftrightarrow\partial^a[(\sigma_\varsigma,-i\varsigma)^{\alpha_\varsigma}|_{ab}\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\sigma}]=iJ^{Z_\kappa}_b,\alpha_\varsigma=1,2,3,4$
$\Leftrightarrow\partial^a[(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a|_b{}^{\alpha_\varsigma}\tilde{\Psi}^{Z_\kappa}_{\alpha_\varsigma}]=iJ^{Z_\kappa}_b,\alpha_\varsigma=1,2,3,4$
$\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}\partial_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\sigma}=iJ^{Z_\kappa}_b,\alpha_\varsigma=1,2,3,4$ □

复矢量矩阵形式：

推论2.3.1. $(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}\partial_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\sigma}=iJ_b^{Z_\kappa}\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\Psi}^{Z_\kappa}(1,\varsigma)=iJ^{Z_\kappa}$

表象变换：

推论2.3.2. $(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\Psi}^{Z_\kappa}(1,\varsigma)=iJ^{Z_\kappa}\Leftrightarrow(\sigma\otimes I,-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\Psi}^{Z_\kappa}(1,\varsigma)=i\tilde{J}^{Z_\kappa}(1,\varsigma)$

2.4 引力微子场方程的$\frac{1}{2}$-旋量表述形式 [1,2]

$\frac{1}{2}$-旋量Penrose抽象指标形式：

定理2.4.1. $(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}\partial_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\sigma}=iJ_b^{Z_\kappa}\Leftrightarrow\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\sigma},\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a$

证明：$(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}\partial_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma\sigma}=iJ_b^{Z_\kappa}$

$\Leftrightarrow\partial^a(i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi^{Z_\kappa}_{\alpha_\varsigma})=-J_b^{Z_\kappa}$

$\Leftrightarrow\partial^a(i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\cdot\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma})=-J_b^{Z_\kappa}$

$\Leftrightarrow iS_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\partial^a\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J_b^{Z_\kappa}$

$\Leftrightarrow(\frac{\varsigma}{2}\delta_{ab}\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}+iS_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma})\partial^a\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J_b^{Z_\kappa}$

$\Leftrightarrow\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma}\partial^a\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-1}{\sqrt{2}}J_b^{Z_\kappa}$

$\Leftrightarrow\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial^a\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-1}{\sqrt{2}}J_b^{Z_\kappa}\cdot\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b_{B'_\varsigma B_\varsigma}$

$\Leftrightarrow\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}\varsigma\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}J_{B'_\varsigma B_\varsigma}$

$\Leftrightarrow\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{\sigma},\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a$ □

$\frac{1}{2}$-旋量张量形式：

推论2.4.1. $\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{Z_\kappa}\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial_a\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{Z_\kappa}$

$\frac{1}{2}$-旋量矩阵形式：

推论2.4.2. $(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial_a\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{Z_\kappa}\Leftrightarrow(\sigma\otimes I,-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\Psi}^{Z_\kappa}(1,\varsigma)=i\tilde{J}^{Z_\kappa}(1,\varsigma)$

$\frac{1}{2}$-旋量方矩阵形式：

推论2.4.3. $(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial_a\psi^{Z_\kappa}_{A_\varsigma B_\varsigma}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{Z_\kappa}\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a[\psi]^{Z_\kappa}=i[J]^{Z_\kappa}$

2.5 引力微子场方程的全$\frac{1}{2}$-旋量表述形式

推论2.5.1. $\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi^{Z_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{Z_\varsigma}\Leftrightarrow\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial_a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma}$

推论2.5.2. $\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi^{Z_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}{}^{Z_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial_a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma}$

2.6 全对称方程(广义协变推广)

推论2.6.1.

$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D_a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma}\\ \psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma}=\frac{1}{3!}\psi_{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma)},J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma}=\frac{1}{2!}J^{A'_\varsigma}{}_{(B_\varsigma C_\varsigma)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}D^aF_{ab}{}^{[C_\varsigma]}=-J_b{}^{[C_\varsigma]},D^a*F_{ab}{}^{[C_\varsigma]}\equiv0\\(\sigma,i\varsigma)_a(\sigma,-i\varsigma)_bF^{ab[C_\varsigma]}=0,(\sigma,-i\varsigma)_aJ^{a[C_\varsigma]}=0\end{cases}$$

以下两个推论的证明留待以后

推论2.6.2.

$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D_a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma}\\ \psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma}=\frac{1}{3!}\psi_{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma)},J^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma C_\varsigma}=\frac{1}{2!}J^{A'_\varsigma}{}_{(B_\varsigma C_\varsigma)}\end{cases}\Leftrightarrow[\tfrac{3}{2}D_a+iS_{ab}(\tfrac{3}{2},\varsigma)D^b]_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(\tfrac{3}{2},\varsigma)\psi_{l_\varsigma}=\mathbb{J}_{ak_\varsigma}(\tfrac{3}{2},\varsigma)$$

推论2.6.3.

$$\begin{cases}D^aF_{ab}{}^{[C_\varsigma]}=-J_b{}^{[C_\varsigma]},D^a*F_{ab}{}^{[C_\varsigma]}\equiv0\\(\sigma,i\varsigma)_a(\sigma,-i\varsigma)_bF^{ab[C_\varsigma]}=0,(\sigma,-i\varsigma)_aJ^{a[C_\varsigma]}=0\end{cases}\Leftrightarrow[\tfrac{3}{2}D_a+iS_{ab}(\tfrac{3}{2},\varsigma)D^b]_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(\tfrac{3}{2},\varsigma)\psi_{l_\varsigma}=\mathbb{J}_{ak_\varsigma}(\tfrac{3}{2},\varsigma)$$

2.7 猜测

定理2.7.1. $\partial^a * F_{ab}^{Z_\kappa} = 0 \Leftrightarrow F_{ab}^{Z_\kappa} = \partial_a A_b^{Z_\kappa} - \partial_b A_a^{Z_\kappa} \Leftrightarrow \partial^a * F_{ab}^{Z_\kappa} \equiv 0$

定理2.7.2. $\partial^a F_{ab}^{Z_\kappa} = -J_b^{Z_\kappa}, \partial^a * F_{ab}^{Z_\kappa} = 0 \Leftrightarrow \partial^a F_{ab}^{Z_\kappa} = -J_b^{Z_\kappa}, F_{ab}^{Z_\kappa} = \partial_a A_b^{Z_\kappa} - \partial_b A_a^{Z_\kappa}$

2.8 引力微子场方程 [8]的自旋张量表述形式

引力微子场的自旋张量矩阵：$S_{ab} = i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma} \succ \begin{bmatrix} 0 & \gamma_z & -\gamma_y & -\varsigma\gamma_x \\ -\gamma_z & 0 & \gamma_x & -\varsigma\gamma_y \\ \gamma_y & -\gamma_x & 0 & -\varsigma\gamma_z \\ \varsigma\gamma_x & \varsigma\gamma_y & \varsigma\gamma_z & 0 \end{bmatrix}$ (10.5)

定理2.8.1. $(\partial_a + iS_{ab}\partial^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa}(1,\varsigma) = -i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{bZ_\kappa}, S_{ab} = i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma} \Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\Psi}^{Z_\kappa}(1,\varsigma) = iJ^{Z_\kappa}$

一种直观证法如下：

证明: $(\partial_a + iS_{ab}\partial^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = -i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{bZ_\kappa}, S_{ab} = i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\partial_x + i\gamma_z\partial_y - i\gamma_y\partial_z - i\varsigma\gamma_x\partial_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = -i\sigma_{\varsigma xb}^{\beta_\varsigma}J^{bZ_\kappa} \\ (\partial_y + i\gamma_x\partial_z - i\gamma_z\partial_x - i\varsigma\gamma_y\partial_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = -i\sigma_{\varsigma yb}^{\beta_\varsigma}J^{bZ_\kappa} \\ (\partial_z + i\gamma_y\partial_x - i\gamma_x\partial_y - i\varsigma\gamma_z\partial_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = -i\sigma_{\varsigma zb}^{\beta_\varsigma}J^{bZ_\kappa} \\ (\partial_\pi + i\varsigma\gamma_x\partial_x + i\varsigma\gamma_y\partial_y + i\varsigma\gamma_z\partial_z)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = -i\sigma_{\varsigma\pi b}^{\beta_\varsigma}J^{bZ_\kappa} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\partial_y & \partial_x & -\varsigma\partial_\pi \\ -\partial_z & \varsigma\partial_\pi & \partial_x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi^{x_\varsigma Z_\kappa} \\ \psi^{y_\varsigma Z_\kappa} \\ \psi^{z_\varsigma Z_\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varsigma J^{\pi Z_\kappa} \\ J^{zZ_\kappa} \\ -J^{yZ_\kappa} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \partial_y & -\partial_x & \varsigma\partial_\pi \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\varsigma\partial_\pi & -\partial_z & \partial_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi^{x_\varsigma Z_\kappa} \\ \psi^{y_\varsigma Z_\kappa} \\ \psi^{z_\varsigma Z_\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J^{zZ_\kappa} \\ \varsigma J^{\pi Z_\kappa} \\ J^{xZ_\kappa} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \partial_z & -\varsigma\partial_\pi & -\partial_x \\ \varsigma\partial_\pi & \partial_z & -\partial_y \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi^{x_\varsigma Z_\kappa} \\ \psi^{y_\varsigma Z_\kappa} \\ \psi^{z_\varsigma Z_\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{yZ_\kappa} \\ -J^{xZ_\kappa} \\ \varsigma J^{\pi Z_\kappa} \end{bmatrix}, i\partial_\pi\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) = \varsigma\gamma\cdot\nabla\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) - i\varsigma\vec{J}^{Z_\kappa} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i\partial_\pi\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) = i\varsigma\nabla\times\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) - i\varsigma\vec{J}^{Z_\kappa} \\ \nabla\cdot\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) = \varsigma J^{\pi Z_\kappa} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i\partial_\pi\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) = \varsigma\gamma\cdot\nabla\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) - i\varsigma\vec{J}^{Z_\kappa} \\ \nabla\cdot\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) = \varsigma J^{\pi Z_\kappa} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\Psi}^{Z_\kappa}(1,\varsigma) = iJ^{Z_\kappa}$ □

推论2.8.1. $(\partial_a + iS_{ab}\partial^b)\psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) = i(\sigma_{-\varsigma}, i\varsigma)_a J^{Z_\kappa}, S_{ab} = i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

另一种更解析更抽象的证法如下：

证明: $(\partial_a + iS_{ab}\partial^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = -i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{bZ_\kappa}, S_{ab} = i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$\Leftrightarrow \sigma_{\varsigma a}^{\beta_\varsigma}{}^c\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma cb}\partial^b\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = -i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{bZ_\kappa}$

$\Leftrightarrow \sigma_{\varsigma ac}^{\beta_\varsigma}\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma}^{cb}\partial_b\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = -i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{bZ_\kappa}$

$\Leftrightarrow \sigma_{\beta_\varsigma}^{\varsigma ad}\sigma_{\varsigma ac}^{\beta_\varsigma}\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma}^{cb}\partial_b\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = -i\sigma_{\beta_\varsigma}^{\varsigma ad}\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{bZ_\kappa}$

$\Leftrightarrow \sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma}^{db}\partial_b\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = -iJ^{dZ_\kappa}$

$\Leftrightarrow \sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{ab}\partial_a\psi^{\alpha_\varsigma Z_\kappa} = iJ^{bZ_\kappa}, \alpha_\varsigma = 1,2,3$

$\Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}\partial_a\tilde{\Psi}^{\alpha_\varsigma Z_\kappa} = iJ_b^{Z_\kappa}, \alpha_\varsigma = 1,2,3,4$ □

此方程(3.3.2)完全等价于引力微子场方程，它就是引力微子场方程的自旋张量表述形式。

引理2.8.1. $\mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma Z_\kappa} = -i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma} J^{bZ_\kappa} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{J}_y^{z_\varsigma Z_\kappa} = -\mathbb{J}_z^{y_\varsigma Z_\kappa} = -\varsigma\mathbb{J}_\pi^{x_\varsigma Z_\kappa} = J^{xZ_\kappa} \\ \mathbb{J}_z^{x_\varsigma Z_\kappa} = -\mathbb{J}_x^{z_\varsigma Z_\kappa} = -\varsigma\mathbb{J}_\pi^{y_\varsigma Z_\kappa} = J^{yZ_\kappa} \\ \mathbb{J}_x^{y_\varsigma Z_\kappa} = -\mathbb{J}_y^{x_\varsigma Z_\kappa} = -\varsigma\mathbb{J}_\pi^{z_\varsigma Z_\kappa} = J^{zZ_\kappa} \\ \mathbb{J}_x^{x_\varsigma Z_\kappa} = \mathbb{J}_y^{y_\varsigma Z_\kappa} = \mathbb{J}_z^{z_\varsigma Z_\kappa} = \varsigma J^{\pi Z_\kappa} \end{cases}$

展开即可证明。以上自旋方程是关于特殊的源项，那么对于一般的源项又会怎样呢？请看下面的定理。

定理2.8.2. $(\partial_a + iS_{ab}\partial^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = \mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma Z_\kappa}, S_{ab} = i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma} \Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\Psi}^{Z_\kappa}(1,\varsigma) = iJ^{Z_\kappa}, \mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma Z_\kappa} = -i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{bZ_\kappa}$

证明: $(\partial_a + iS_{ab}\partial^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = \mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma Z_\kappa}, S_{ab} = i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\partial_x + i\gamma_z\partial_y - i\gamma_y\partial_z - i\varsigma\gamma_x\partial_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = \mathbb{J}_x^{\beta_\varsigma Z_\kappa} \\ (\partial_y + i\gamma_x\partial_z - i\gamma_z\partial_x - i\varsigma\gamma_y\partial_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = \mathbb{J}_y^{\beta_\varsigma Z_\kappa} \\ (\partial_z + i\gamma_y\partial_x - i\gamma_x\partial_y - i\varsigma\gamma_z\partial_\pi)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = \mathbb{J}_z^{\beta_\varsigma Z_\kappa} \\ (\partial_\pi + i\varsigma\gamma_x\partial_x + i\varsigma\gamma_y\partial_y + i\varsigma\gamma_z\partial_z)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = \mathbb{J}_\pi^{\beta_\varsigma Z_\kappa} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\partial_y & \partial_x & -\varsigma\partial_\pi \\ -\partial_z & \varsigma\partial_\pi & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^{x_\varsigma Z_\kappa} \\ \psi^{y_\varsigma Z_\kappa} \\ \psi^{z_\varsigma Z_\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_x^{x_\varsigma Z_\kappa} \\ \mathbb{J}_x^{y_\varsigma Z_\kappa} \\ \mathbb{J}_x^{z_\varsigma Z_\kappa} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) = \mathbb{J}_x^{x_\varsigma Z_\kappa} \\ [\nabla\times\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma)]^{z_\varsigma Z_\kappa} - \varsigma\partial_\pi\psi^{z_\varsigma Z_\kappa}(1,\varsigma) = \mathbb{J}_x^{y_\varsigma Z_\kappa} \\ -[\nabla\times\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma)]^{y_\varsigma Z_\kappa} + \varsigma\partial_\pi\psi^{y_\varsigma Z_\kappa}(1,\varsigma) = \mathbb{J}_x^{z_\varsigma Z_\kappa} \end{cases} \\ \begin{bmatrix} \partial_y & -\partial_x & \varsigma\partial_\pi \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\varsigma\partial_\pi & -\partial_z & \partial_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^{x_\varsigma Z_\kappa} \\ \psi^{y_\varsigma Z_\kappa} \\ \psi^{z_\varsigma Z_\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_y^{x_\varsigma Z_\kappa} \\ \mathbb{J}_y^{y_\varsigma Z_\kappa} \\ \mathbb{J}_y^{z_\varsigma Z_\kappa} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -[\nabla\times\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma)]^{z_\varsigma Z_\kappa} + \varsigma\partial_\pi\psi^{z_\varsigma Z_\kappa}(1,\varsigma) = \mathbb{J}_y^{x_\varsigma Z_\kappa} \\ \nabla\cdot\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) = \mathbb{J}_y^{y_\varsigma Z_\kappa} \\ [\nabla\times\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma)]^{x_\varsigma Z_\kappa} - \varsigma\partial_\pi\psi^{x_\varsigma Z_\kappa}(1,\varsigma) = \mathbb{J}_y^{z_\varsigma Z_\kappa} \end{cases} \\ \begin{bmatrix} \partial_z & -\varsigma\partial_\pi & -\partial_x \\ \varsigma\partial_\pi & \partial_z & -\partial_y \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^{x_\varsigma Z_\kappa} \\ \psi^{y_\varsigma Z_\kappa} \\ \psi^{z_\varsigma Z_\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_z^{x_\varsigma Z_\kappa} \\ \mathbb{J}_z^{y_\varsigma Z_\kappa} \\ \mathbb{J}_z^{z_\varsigma Z_\kappa} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} [\nabla\times\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma)]^{y_\varsigma Z_\kappa} - \varsigma\partial_\pi\psi^{y_\varsigma Z_\kappa}(1,\varsigma) = \mathbb{J}_z^{x_\varsigma Z_\kappa} \\ -[\nabla\times\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma)]^{x_\varsigma Z_\kappa} + \varsigma\partial_\pi\psi^{x_\varsigma Z_\kappa}(1,\varsigma) = \mathbb{J}_z^{y_\varsigma Z_\kappa} \\ \nabla\cdot\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) = \mathbb{J}_z^{z_\varsigma Z_\kappa} \end{cases} \\ \partial_\pi\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) + i\varsigma\gamma\cdot\nabla\psi^{Z_\kappa} = \mathbb{J}_\pi^{Z_\kappa} \Leftrightarrow \partial_\pi\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) - \varsigma\nabla\times\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) = \mathbb{J}_\pi^{Z_\kappa} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{J}_y^{z_\varsigma Z_\kappa} = -\mathbb{J}_z^{y_\varsigma Z_\kappa} = -\varsigma\mathbb{J}_\pi^{x_\varsigma Z_\kappa} := J^{xZ_\kappa} \\ \mathbb{J}_z^{x_\varsigma Z_\kappa} = -\mathbb{J}_x^{z_\varsigma Z_\kappa} = -\varsigma\mathbb{J}_\pi^{y_\varsigma Z_\kappa} := J^{yZ_\kappa} \\ \mathbb{J}_x^{y_\varsigma Z_\kappa} = -\mathbb{J}_y^{x_\varsigma Z_\kappa} = -\varsigma\mathbb{J}_\pi^{z_\varsigma Z_\kappa} := J^{zZ_\kappa} \\ \mathbb{J}_x^{x_\varsigma Z_\kappa} = \mathbb{J}_y^{y_\varsigma Z_\kappa} = \mathbb{J}_z^{z_\varsigma Z_\kappa} := \varsigma J^{\pi Z_\kappa} \\ \partial_\pi\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) - \varsigma\nabla\times\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) = i\vec{J}^{Z_\kappa} \\ \nabla\cdot\Psi^{Z_\kappa}(1,\varsigma) = -iJ^{\pi Z_\kappa} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\Psi}^{Z_\kappa}(1,\varsigma) = iJ^{Z_\kappa}, \mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma Z_\kappa} = -i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{bZ_\kappa}$ □

另一种更解析更抽象的证法如下：

定理2.8.3. $(\partial_a + iS_{ab}\partial^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = \mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma Z_\kappa}, S_{ab} = i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma} \Leftrightarrow \mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma Z_\kappa} = \sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma}^{bc}\partial_c\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa}$

证明: $(\partial_a + iS_{ab}\partial^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = \mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma Z_\kappa}, S_{ab} = i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$\Leftrightarrow \sigma_{\varsigma a}^{\beta_\varsigma c}\sigma_{\varsigma\gamma_\varsigma cb}\partial^b\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = \mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma Z_\kappa}$

$\Leftrightarrow \mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma Z_\kappa} = \sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{bc}\partial_c\psi^{\alpha_\varsigma Z_\kappa}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{J}_y^{z_\varsigma Z_\kappa} = -\mathbb{J}_z^{y_\varsigma Z_\kappa} = -\varsigma\mathbb{J}_\pi^{x_\varsigma Z_\kappa} = i\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{xb}\partial_b\psi^{\alpha_\varsigma Z_\kappa} \\ \mathbb{J}_z^{x_\varsigma Z_\kappa} = -\mathbb{J}_x^{z_\varsigma Z_\kappa} = -\varsigma\mathbb{J}_\pi^{y_\varsigma Z_\kappa} = i\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{yb}\partial_b\psi^{\alpha_\varsigma Z_\kappa} \\ \mathbb{J}_x^{y_\varsigma Z_\kappa} = -\mathbb{J}_y^{x_\varsigma Z_\kappa} = -\varsigma\mathbb{J}_\pi^{z_\varsigma Z_\kappa} = i\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{zb}\partial_b\psi^{\alpha_\varsigma Z_\kappa} \\ \mathbb{J}_x^{x_\varsigma Z_\kappa} = \mathbb{J}_y^{y_\varsigma Z_\kappa} = \mathbb{J}_z^{z_\varsigma Z_\kappa} = i\varsigma\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma}^{\pi b}\partial_b\psi^{\alpha_\varsigma Z_\kappa} \end{cases}$$ □

这个定理表明此自旋方程源项受到一定限制，不是随意的，只有前一定理描述的源项情形才有解，其他情形全无解。

推论2.8.2. $(\partial_a + iS_{ab}\partial^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma Z_\kappa} = \mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma Z_\kappa}, S_{ab} = i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\gamma_{\alpha_\varsigma}$ 有解 $\Leftrightarrow \mathbb{J}_a^{\beta_\varsigma Z_\kappa} = -i\sigma_{\varsigma ab}^{\beta_\varsigma}J^{bZ_\kappa}, \exists J^{bZ_\kappa}$

3 Rarita-Schwinger方程的分析 [21]

3.1 准备

Rarita-Schwinger拉氏量： $\mathcal{L}_{RS} = -\bar{\psi}^a\varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^d(\varsigma)[D^b + \frac{1}{2}m\gamma^b(\varsigma)]\psi^c(e,\varsigma)$

引理3.1.1. $\varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^d(\varsigma)[D^b + \frac{1}{2}m\gamma^b(\varsigma)]\psi^c(e,\varsigma) = 0$
$\Leftrightarrow \gamma_a(\varsigma)[\gamma_b(\varsigma)D^b - m][\gamma_c(\varsigma)\psi^c(e,\varsigma)] + [\gamma_b(\varsigma)D^b + m]\psi_a(e,\varsigma) - \gamma_a(\varsigma)D_c\psi^c(e,\varsigma) - D_a[\gamma_c(\varsigma)\psi^c(e,\varsigma)] = 0$

证明： $\varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^d(\varsigma)[D^b + \frac{1}{2}m\gamma^b(\varsigma)]\psi^c(e,\varsigma) = 0$
$\Leftrightarrow \varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^d(\varsigma)D^b\psi^c(e,\varsigma) + \frac{1}{2}m\varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^c(\varsigma)\gamma^d(\varsigma)\psi^b(e,\varsigma) = 0$
利用公式：$\varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^d(\varsigma) = 2iS_{ab}(e,\varsigma)\gamma_c(\varsigma) - \gamma_{[a}(\varsigma)\delta_{b]c}, \varepsilon_{abcd}S^{cd}(e,\varsigma) = -2\gamma_5(\varsigma)iS_{ab}(e,\varsigma)$
$\Leftrightarrow [2iS_{ab}(e,\varsigma)\gamma_c(\varsigma) - \gamma_{[a}(\varsigma)\delta_{b]c}]D^b\psi^c(e,\varsigma) - m\gamma_5(\varsigma)iS_{ab}(e,\varsigma)\psi^b(e,\varsigma) = 0$
$\Leftrightarrow \gamma_a(\varsigma)[\gamma_b(\varsigma)D^b - m][\gamma_c(\varsigma)\psi^c(e,\varsigma)] + [\gamma_b(\varsigma)D^b + m]\psi_a(e,\varsigma) - \gamma_a(\varsigma)D_c\psi^c(e,\varsigma) - D_a[\gamma_c(\varsigma)\psi^c(e,\varsigma)] = 0$ □

引理3.1.2. $\varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^d(\varsigma)[D^b + \frac{1}{2}m\gamma^b(\varsigma)]\psi^c(e,\varsigma) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m[\gamma_a(\varsigma)D^a][\gamma_b(\varsigma)\psi^b(e,\varsigma)] - m[D^a\psi_a(e,\varsigma)] = 0 \\ 2[\gamma_a(\varsigma)D^a][\gamma_b(\varsigma)\psi^b(e,\varsigma)] - 2[D^a\psi_a(e,\varsigma)] - 3m[\gamma_a(\varsigma)\psi^a(e,\varsigma)] = 0 \end{cases}$$

证明： $\varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^d(\varsigma)[D^b + \frac{1}{2}m\gamma^b(\varsigma)]\psi^c(e,\varsigma) = 0$
$\Leftrightarrow \gamma_a(\varsigma)[\gamma_b(\varsigma)D^b - m][\gamma_c(\varsigma)\psi^c(e,\varsigma)] + [\gamma_b(\varsigma)D^b + m]\psi_a(e,\varsigma) - \gamma_a(\varsigma)D_c\psi^c(e,\varsigma) - D_a[\gamma_c(\varsigma)\psi^c(e,\varsigma)] = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\gamma_a(\varsigma)D^a][\gamma_b(\varsigma)D^b - m][\gamma_c(\varsigma)\psi^c(e,\varsigma)] + [\gamma_b(\varsigma)D^b + m][D^a\psi_a(e,\varsigma)] - [\gamma_a(\varsigma)D^a]D_c\psi^c(e,\varsigma) \\ -D^aD_a[\gamma_c(\varsigma)\psi^c(e,\varsigma)] = 0 \\ 4[\gamma_b(\varsigma)D^b - m][\gamma_c(\varsigma)\psi^c(e,\varsigma)] + [\gamma_b(\varsigma)D^b + m][\gamma^a(\varsigma)\psi_a(e,\varsigma)] - 4D_c\psi^c(e,\varsigma) - [\gamma^a(\varsigma)D_a][\gamma_c(\varsigma)\psi^c(e,\varsigma)] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m[\gamma_a(\varsigma)D^a][\gamma_b(\varsigma)\psi^b(e,\varsigma)] - m[D^a\psi_a(e,\varsigma)] = 0 \\ 2[\gamma_a(\varsigma)D^a][\gamma_b(\varsigma)\psi^b(e,\varsigma)] - 2[D^a\psi_a(e,\varsigma)] - 3m[\gamma_a(\varsigma)\psi^a(e,\varsigma)] = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \gamma_a(\varsigma)\psi^a(e,\varsigma) = 0, D_a\psi^a(e,\varsigma) = 0$ □

引理3.1.3.
$$\begin{cases} m[\gamma_a(\varsigma)D^a][\gamma_b(\varsigma)\psi^b(e,\varsigma)] - m[D^a\psi_a(e,\varsigma)] = 0 \\ 2[\gamma_a(\varsigma)D^a][\gamma_b(\varsigma)\psi^b(e,\varsigma)] - 2[D^a\psi_a(e,\varsigma)] - 3m[\gamma_a(\varsigma)\psi^a(e,\varsigma)] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_a(\varsigma)\psi^a(e,\varsigma) = 0, D_a\psi^a(e,\varsigma) = 0, m \neq 0 \\ D_a\psi^a(e,\varsigma) = [\gamma_a(\varsigma)D^a][\gamma_b(\varsigma)\psi^b(e,\varsigma)] = 0, m = 0 \end{cases}$$

3.2 有质量Rarita-Schwinger方程的等价形式

推论3.2.1. $\varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^d(\varsigma)[D^b + \frac{1}{2}m\gamma^b(\varsigma)]\psi^c(e,\varsigma) = 0, m \neq 0$
$\Leftrightarrow [\gamma_b(\varsigma)D^b + m]\psi^a(e,\varsigma) = 0, \gamma_a(\varsigma)\psi^a(e,\varsigma) = 0, D_a\psi^a(e,\varsigma) = 0, m \neq 0$

证明： $\varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^d(\varsigma)[D^b + \frac{1}{2}m\gamma^b(\varsigma)]\psi^c(e,\varsigma) = 0$
$\Leftrightarrow \gamma_a(\varsigma)[\gamma_b(\varsigma)D^b - m][\gamma_c(\varsigma)\psi^c(e,\varsigma)] + [\gamma_b(\varsigma)D^b + m]\psi_a(\varsigma) - \gamma_a(\varsigma)D_c\psi^c(e,\varsigma) - D_a[\gamma_c(\varsigma)\psi^c(e,\varsigma)] = 0$
$\Leftrightarrow [\gamma_b(\varsigma)D^b + m]\psi^a(e,\varsigma) = 0, \gamma_a(\varsigma)\psi^a(e,\varsigma) = 0, D_a\psi^a(e,\varsigma) = 0$ □

推论3.2.2. $[\gamma_b(\varsigma)D^b + m]\psi^a(e,\varsigma) = 0, \gamma_a(\varsigma)\psi^a(e,\varsigma) = 0, D_a\psi^a(e,\varsigma) = 0, m \neq 0$
$\Leftrightarrow [\gamma_b(\varsigma)D^b + m]\psi^a(e,\varsigma) = 0, \gamma_a(\varsigma)\psi^a(e,\varsigma) = 0, m \neq 0$

重要结论：

定理3.2.1. $\varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^d(\varsigma)[D^b + \frac{1}{2}m\gamma^b(\varsigma)]\psi^c(e,\varsigma) = 0 \Leftrightarrow [\gamma_b(\varsigma)D^b + m]\psi^a(e,\varsigma) = 0, \gamma_a(\varsigma)\psi^a(e,\varsigma) = 0; m \neq 0$

3.3 无质量Rarita-Schwinger方程的等价形式

推论3.3.1. $\varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^d(\varsigma)D^b\psi^c(e,\varsigma)=0\Leftrightarrow\gamma_b(\varsigma)[D^b\psi^a(e,\varsigma)-D^a\psi^b(e,\varsigma)]=0,D_a\psi^a(e,\varsigma)=[\gamma_a(\varsigma)D^a][\gamma_b(\varsigma)\psi^b(e,\varsigma)]$

证明: $\varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^d(\varsigma)D^b\psi^c(e,\varsigma)=0$

$\Leftrightarrow\gamma_a(\varsigma)[\gamma_b(\varsigma)D^b][\gamma_c(\varsigma)\psi^c(e,\varsigma)]+[\gamma_b(\varsigma)D^b]\psi_a(\varsigma)-\gamma_a(\varsigma)D_c\psi^c(e,\varsigma)-D_a[\gamma_c(\varsigma)\psi^c(e,\varsigma)]=0$

$\Leftrightarrow\gamma_b(\varsigma)[D^b\psi^a(e,\varsigma)-D^a\psi^b(e,\varsigma)]=0,D_a\psi^a(e,\varsigma)=[\gamma_a(\varsigma)D^a][\gamma_b(\varsigma)\psi^b(e,\varsigma)]$ □

推论3.3.2. $\gamma_b(\varsigma)[D^b\psi^a(e,\varsigma)-D^a\psi^b(e,\varsigma)]=0\Rightarrow D_a\psi^a(e,\varsigma)=[\gamma_a(\varsigma)D^a][\gamma_b(\varsigma)\psi^b(e,\varsigma)],$

推论3.3.3. $\gamma_b(\varsigma)[D^b\psi^a(e,\varsigma)-D^a\psi^b(e,\varsigma)]=0$

$\Rightarrow[\gamma_b(\varsigma)D^b]\psi^a(e,\varsigma)=D^a[\gamma_b(\varsigma)\psi^b(e,\varsigma)]$

$\Rightarrow\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)D^b\psi^a(e,\varsigma)=[\gamma_a(\varsigma)D^a][\gamma_b(\varsigma)\psi^b(e,\varsigma)]$

$\Rightarrow[2\delta_{ab}-\gamma_b(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)]D^b\psi^a(e,\varsigma)=[\gamma_a(\varsigma)D^a][\gamma_b(\varsigma)\psi^b(e,\varsigma)]$

$\Rightarrow D_a\psi^a(e,\varsigma)=[\gamma_a(\varsigma)D^a][\gamma_b(\varsigma)\psi^b(e,\varsigma)],$

推论3.3.4. $\gamma_b(\varsigma)[D^b\psi^a(e,\varsigma)-D^a\psi^b(e,\varsigma)]=0,D_a\psi^a(e,\varsigma)=[\gamma_a(\varsigma)D^a][\gamma_b(\varsigma)\psi^b(e,\varsigma)]$

$\Leftrightarrow\gamma_b(\varsigma)[D^b\psi^a(e,\varsigma)-D^a\psi^b(e,\varsigma)]=0$

推论3.3.5. $\varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^d(\varsigma)D^b\psi^c(e,\varsigma)=0\Leftrightarrow\gamma_b(\varsigma)[D^b\psi^a(e,\varsigma)-D^a\psi^b(e,\varsigma)]=0$

重要结论：

定理3.3.1. $\varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^d(\varsigma)D^b\psi^c(e,\varsigma)=0\Leftrightarrow\gamma_a(\varsigma)F^{ab}(e,\varsigma)=0,F^{ab}(e,\varsigma)\equiv D^a\psi^b(e,\varsigma)-D^b\psi^a(e,\varsigma)$

推论3.3.6. $\varepsilon_{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma^d(\varsigma)D^b\psi^c(e,\varsigma)=0,\gamma_a(\varsigma)\psi^a(e,\varsigma)=0$(规范条件)

$\Leftrightarrow\gamma_b(\varsigma)D^b\psi^a(e,\varsigma)=0,\gamma_a(\varsigma)\psi^a(e,\varsigma)=0$

3.4 Weyl型R-S方程的等价形式

推论3.4.1. $\varepsilon_{abcd}(\sigma,-i\varsigma)^dD^b\psi^c(\varsigma)=0\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)_b[D^b\psi^a(\varsigma)-D^a\psi^b(\varsigma)]=0,D_a\psi^a(\varsigma)=[(\sigma,i\varsigma)_aD^a][(\sigma,-i\varsigma)_b\psi^b(\varsigma)]$

推论3.4.2. $(\sigma,-i\varsigma)_b[D^b\psi^a(\varsigma)-D^a\psi^b(\varsigma)]=0\Rightarrow D_a\psi^a(\varsigma)=[(\sigma,i\varsigma)_aD^a][(\sigma,-i\varsigma)_b\psi^b(\varsigma)]$

推论3.4.3. $\varepsilon_{abcd}(\sigma,-i\varsigma)^dD^b\psi^c(\varsigma)=0\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)_b[D^b\psi^a(\varsigma)-D^a\psi^b(\varsigma)]=0$

重要结论：

定理3.4.1. $\varepsilon_{abcd}(\sigma,-i\varsigma)^dD^b\psi^c(\varsigma)=0\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)_aF^{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)=0,F^{ab}(\frac{3}{2},\varsigma):=D^a\psi^b(\varsigma)-D^b\psi^a(\varsigma)$

推论3.4.4. $F_{uv}(\frac{3}{2},\varsigma)\equiv D_u\psi_v(\varsigma)-D_v\psi_u(\varsigma)\Leftrightarrow F_{uv}(\frac{3}{2},\varsigma)=(\partial_u+\frac{i}{2}\sigma_{\alpha_\varsigma}A_u^{\alpha_\varsigma})\psi_v(\varsigma)-(\partial_v+\frac{i}{2}\sigma_{\alpha_\varsigma}A_v^{\alpha_\varsigma})\psi_u(\varsigma)$

推论3.4.5. $\varepsilon_{abcd}(\sigma,-i\varsigma)^dD^b\psi^c(\varsigma)=0,(\sigma,-i\varsigma)_a\psi^a(\varsigma)=0\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)_bD^b\psi^a(\varsigma)=0,(\sigma,-i\varsigma)_a\psi^a(\varsigma)=0$

3.5 Weyl型R-S方程等价的低一阶导数自旋张量新形式

推论3.5.1. $\varepsilon_{abcd}(\sigma,-i\varsigma)^dD^b\psi^c(\varsigma)=0\Leftrightarrow[\frac{1}{2}\delta_{ab}+iS_{ab}(\varsigma)]F^{bc}(\frac{3}{2},\varsigma)=0,F^{bc}(\frac{3}{2},\varsigma)\equiv D^b\psi^c(\varsigma)-D^c\psi^b(\varsigma)$

4 方程的对比

4.1 Weyl型引力微子方程和Penrose型引力微子方程的对比

$$\textbf{Weyl型R-S方程}:(\sigma,-i\varsigma)_aF^{ab}(\tfrac{3}{2},\varsigma)=0\leftrightarrow\textbf{Penrose型R-S方程}:\partial_aF^{ab}(\tfrac{3}{2},\varsigma)=-J^b(\varsigma)\tag{10.6}$$

$$F_{uv}(\tfrac{3}{2},\varsigma)\equiv(\partial_u+\tfrac{i}{2}A_u^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma})\psi_v(\varsigma)-(\partial_v+\tfrac{i}{2}A_v^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma})\psi_u(\varsigma)\tag{10.7}$$

形式上相当于$(\sigma,-i\varsigma)_a\leftrightarrow\partial_a$**,**引力场情形和引力微子情形两者形式上也十分相似。

4.2 引力场Einstein方程和引力场规范方程的对比

$$\textbf{引力场Einstein方程}:(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\mathcal{F}^{ab}(2,\varsigma)=\varsigma\bar{\mathcal{T}}^b\leftrightarrow\textbf{引力场规范方程}:D_a\mathcal{F}^{ab}(2,\varsigma)=-\mathcal{J}^b(\varsigma)\tag{10.8}$$

$$\mathcal{F}_{uv}(2,\varsigma)=(\partial_u+\tfrac{i}{2}A_u^{\alpha_\varsigma}\mathcal{R}_{\alpha_\varsigma})\mathcal{A}_v(\varsigma)-(\partial_v+\tfrac{i}{2}A_v^{\alpha_\varsigma}\mathcal{R}_{\alpha_\varsigma})\mathcal{A}_u(\varsigma)\tag{10.9}$$

形式上相当于$(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\leftrightarrow D_a$

第十一章　各种粒子的自旋方程

自我评述：在此章中我独立创新地提出了一种全新的粒子方程表述形式：自旋方程，此方程直接用自旋和自旋张量矩阵构造，并注意到自旋张量同时也是场量相应表示的变换矩阵，所以此方程物理意义十分明确，可以根据粒子场量变换规律简单直接地写出相应的粒子方程，它正确描述了中微子、电磁场、**Yang-Mills** 场和电子等经典方程，并发现其无质量表示完全等价于全对称的**Penrose**旋量方程，当然它比**Penrose**旋量方程更广泛，可以描述更多物理方程。我继续利用自旋表述这个思想，进一步得到了正确描述**Einstein**引力场和引力微子的低一阶导数自旋方程。在以上这些自旋表述形式中可以很自然地引入一个标量场，从而推广得到了一个更有意思的方程：开关型自旋方程，在标量场为零时，自由粒子可以存在，在标量场不为零时，自由粒子不存在。此标量场的作用就象开关一样，控制粒子的产生与湮灭，这就为粒子的产生与湮灭提供了一种新的物理机制。

1 自旋矢量W_a的描述

1.1 自旋矢量$W_a, W_a(s,\varsigma)$定义

s自旋张量矩阵：$$S_{(ab)}(s,\varsigma)=\begin{bmatrix}0 & \sigma_z(s) & -\sigma_y(s) & -\varsigma\sigma_x(s)\\ -\sigma_z(s) & 0 & \sigma_x(s) & -\varsigma\sigma_y(s)\\ \sigma_y(s) & -\sigma_x(s) & 0 & -\varsigma\sigma_z(s)\\ \varsigma\sigma_x(s) & \varsigma\sigma_y(s) & \varsigma\sigma_z(s) & 0\end{bmatrix} \tag{11.1}$$

定义1.1.1. $W_a:=-i*M_{ab}p^b=\frac{-i}{2}\varepsilon_{abcd}M^{bc}p^d$

定义1.1.2. $W_a(s,\varsigma):=-i*M_{ab}(s,\varsigma)p^b, M_{ab}(s,\varsigma)=L_{ab}+S_{ab}(s,\varsigma)$

性质1.1.1. $W_ap^a=0, W_a(s,\varsigma)p^a=0$

说明自旋矢量与动量正交，且只有三个独立分量。

性质1.1.2. $*L_{ab}p^b=0$

证明: $*L_{ab}p^b=\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}(x^cp^d-x^dp^c)p^b=\varepsilon_{abcd}x^cp^dp^b=\varepsilon_{abcd}x^cp^bp^d=0$ □

说明轨道角动量对自旋矢量无贡献，因而有下面的结论。

推论1.1.1. $$\begin{cases}W_a=-i*S_{ab}p^b\\ W_a(s,\varsigma)=-i*S_{ab}(s,\varsigma)p^b=i\varsigma S_{ab}(s,\varsigma)p^b\end{cases}$$

1.2 自旋矢量$W_a(s,\varsigma)$的性质

性质1.2.1. $W_a(s,\varsigma)W^a(s,\varsigma)=m^2s(s+1), m^2=-p_ap^a$

证明: $W_a(s,\varsigma)W^a(s,\varsigma)=[i\varsigma S_{ab}(s,\varsigma)p^b][i\varsigma S^{ac}(s,\varsigma)p_c]$
$\Leftrightarrow W_a(s,\varsigma)W^a(s,\varsigma)=-p^aS_{ca}(s,\varsigma)S^{cb}(s,\varsigma)p_b$
$\Leftrightarrow W_a(s,\varsigma)W^a(s,\varsigma)=p^aS_{ac}(s,\varsigma){S^c}_b(s,\varsigma)p^b$
$\Leftrightarrow W_a(s,\varsigma)W^a(s,\varsigma)=-p^as(s+1)\delta_{ab}p^b$
$\Leftrightarrow W_a(s,\varsigma)W^a(s,\varsigma)=-s(s+1)p_ap^a$
$\Leftrightarrow W_a(s,\varsigma)W^a(s,\varsigma)=m^2s(s+1), m^2=-p_ap^a$ □

利用S_{ab}的常数张量性质可以证明以下一般结论：

性质1.2.2. $W_aW^a=m^2s(s+1), m^2=-p_ap^a\neq 0$

证明: $W_aW^a=[-i*S_{ab}p^b][-i*S^{ab}p_b]$
$=-[*S_{ab}(0,0,0,im)^b][*S^{ab}(0,0,0,im)_b]$
$=-[*S_{a\pi}ip][*S^{a\pi}ip]$

$= m^2 * S_{a\pi} * S^{a\pi}$
$= -m^2(S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2)$
$= m^2 s(s+1)$ □

性质1.2.3. $W_a W^a = p^2 s(s+1) - p^2(S_{x\pi}^2 + S_{y\pi}^2 + S_{xy}^2), m^2 = -p_a p^a = 0$

证明: $W_a W^a = [-i * S_{ab} p^b][-i * S^{ab} p_b]$
$= -[*S_{ab}(0,0,p,ip)^b][*S^{ab}(0,0,p,ip)_b]$
$= -[*S_{az}p][*S^{az}p] - [*S_{a\pi}ip][*S^{a\pi}ip]$
$= -p^2 * S_{az} * S^{az} - p^2 * S_{a\pi} * S^{a\pi}$
$= p^2(S_{x\pi}^2 + S_{y\pi}^2 + S_{xy}^2) - p^2(S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2)$
$= p^2 s(s+1) - p^2(S_{x\pi}^2 + S_{y\pi}^2 + S_{xy}^2)$ □

性质1.2.4. $W_a(s,\varsigma)W^a(s,\varsigma) = 0, m^2 = -p_a p^a = 0$

性质1.2.5. $[W_a(s,\varsigma), W_b(s,\varsigma)] = \varsigma[W_a(s,\varsigma)p_b - W_b(s,\varsigma)p_a] - m^2 S_{ab}(s,\varsigma)$

性质1.2.6. $\vec{W}(s,\varsigma) = -i\varsigma\sigma(s) \times \vec{p} - i\sigma(s)p_\pi, W_\pi(s,\varsigma) = i\sigma(s)\cdot\vec{p}$

性质1.2.7. $\vec{W}(s,\varsigma) \times \vec{W}(s,\varsigma) = \varsigma\vec{W}(s,\varsigma) \times \vec{p} + im^2\sigma(s)$

性质1.2.8. $[\sigma(s), i\varsigma]_a W^a(s,\varsigma) = -is(s+1)p_\pi$

1.3 自旋矢量$W_a(s,\varsigma)$在特殊坐标系中的性质

有质量粒子$W_a(s,\varsigma)$自旋矢量在随动坐标系中的性质：

性质1.3.1. $\vec{W}(s,\varsigma) = m\sigma(s), W_\pi(s,\varsigma) = 0 \ for \ \vec{p} = 0$

无质量粒子$W_a(s,\varsigma)$自旋矢量在运动方向坐标系中的性质：

性质1.3.2. $\begin{cases} W_x(s,\varsigma) = [\sigma_x(s) - i\varsigma\sigma_y(s)]p, W_y(s,\varsigma) = [\sigma_y(s) + i\varsigma\sigma_x(s)]p \\ W_z(s,\varsigma) = \sigma_z(s)p, W_\pi(s,\varsigma) = i\sigma_z(s)p \end{cases} \quad for \begin{cases} m = 0, p_x = p_y = 0 \\ p_z = -ip_\pi = p > 0 \end{cases}$

推论1.3.1. $[M_{ab}, p_c p^c] = 0, [L_{ab}, p_c p^c] = 0, [S_{ab}, p_c p^c] = 0, [p_a, p_c p^c] = 0, [p_a, W_b] = 0$

1.4 自旋矢量$W_a(s,\varsigma)$和$p_a, S_{ab}(s,\varsigma)$的对易关系

对易关系：

$$\begin{cases} i[S_{ab}(s,\varsigma), S_{cd}(s,\varsigma)] = g_{ad}S_{bc}(s,\varsigma) - g_{ac}S_{bd}(s,\varsigma) + g_{bc}S_{ad}(s,\varsigma) - g_{bd}S_{ac}(s,\varsigma) \\ [W_a(s,\varsigma), W_b(s,\varsigma)] = \varsigma[W_a(s,\varsigma)p_b + W_b(s,\varsigma)p_a + iS_{ab}(s,\varsigma)p_c p^c] \\ [W_a(s,\varsigma), S_{bc}(s,\varsigma)] = g_{ac}W_b(s,\varsigma) - g_{ab}W_c(s,\varsigma) - iS_{ac}(s,\varsigma)p_b + iS_{ab}(s,\varsigma)p_c \\ [p_a, W_b(s,\varsigma)] = 0, [p_a, S_{bc}(s,\varsigma)] = 0, [p_a, p_b] = 0 \end{cases} \tag{11.2}$$

1.5 有质量粒子彭加莱群的卡西米算子 [9]

性质1.5.1. $W_a(s,\varsigma)W^a(s,\varsigma) = m^2 s(s+1), p_a p^a = -m^2, p_a W^a(s,\varsigma) = 0$

1.6 无质量粒子彭加莱群的卡西米算子 [9]

性质1.6.1. $W_a(s,\varsigma)W^a(s,\varsigma) = 0, p_a p^a = 0, p_a W^a(s,\varsigma) = 0$

1.7 自旋张量$S_{ab}(s,\varsigma)$的统一描述

$S_{ab}(s,\varsigma)$适用于任何一种分量形式。

$$tr[S_{ab}(s,\varsigma)S_{cd}(s,\varsigma)] = -\frac{2}{3}s(s+\frac{1}{2})(s+1)\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd} \tag{11.3}$$

$$tr[S_{ab}(s,-\varsigma)S_{cd}(s,-\varsigma)] = -\frac{2}{3}s(s+\frac{1}{2})(s+1)\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma cd} \tag{11.4}$$

$$S_{ac}(s,\varsigma)S^{c}{}_{b}(s,\varsigma) = -s(s+1)\delta_{ab}, S_{ac}(s,-\varsigma)S^{c}{}_{b}(s,-\varsigma) = -s(s+1)\delta_{ab} \tag{11.5}$$

$$\sigma^2(s) = \frac{1}{4}S_{ab}(s,\varsigma)S^{ab}(s,\varsigma) = \frac{1}{4}S_{ab}(s,-\varsigma)S^{ab}(s,-\varsigma) = s(s+1) \tag{11.6}$$

2 自旋方程的构造

2.1 由自旋量直接构造的全新粒子方程

由自旋量直接构造如下粒子方程

$$[(s+\phi)D_a + iS_{ab}D^b]\psi = \mathbb{J}_a \tag{11.7}$$

ψ为粒子的态旋量,s为粒子自旋,S_{ab}为粒子自旋张量,ϕ为标量场,$\mathbb{J}_a$为旋量源,D_a为协变导数。

2.2 新粒子方程的性质

s-自旋矩阵： $S_{ab}(s,\varsigma) = i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s) \succ \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z(s) & -\sigma_y(s) & -\varsigma\sigma_x(s) \\ -\sigma_z(s) & 0 & \sigma_x(s) & -\varsigma\sigma_y(s) \\ \sigma_y(s) & -\sigma_x(s) & 0 & -\varsigma\sigma_z(s) \\ \varsigma\sigma_x(s) & \varsigma\sigma_y(s) & \varsigma\sigma_z(s) & 0 \end{bmatrix}$

定理2.2.1. $[(s+\phi)\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi = 0 \Rightarrow \phi = 0$或$\phi = -(2s+1)$或$\sigma(s)\cdot\nabla\psi = 0, \partial_\pi\psi = 0$

证明: $[(s+\phi)\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [(s+\phi)\partial_x + i\sigma_z(s)\partial_y - i\sigma_y(s)\partial_z - i\varsigma\sigma_x(s)\partial_\pi]\psi = 0 \\ [(s+\phi)\partial_y + i\sigma_x(s)\partial_z - i\sigma_z(s)\partial_x - i\varsigma\sigma_y(s)\partial_\pi]\psi = 0 \\ [(s+\phi)\partial_z + i\sigma_y(s)\partial_x - i\sigma_x(s)\partial_y - i\varsigma\sigma_z(s)\partial_\pi]\psi = 0 \\ [(s+\phi)\partial_\pi + i\varsigma\sigma_x(s)\partial_x + i\varsigma\sigma_y(s)\partial_y + i\varsigma\sigma_z(s)\partial_z]\psi = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [(s+1+\phi)\sigma(s)\cdot\nabla - i\varsigma\sigma^2(s)\partial_\pi]\psi = 0 \\ [(s+\phi)\partial_\pi + i\varsigma\sigma\cdot\nabla]\psi = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma(s)\cdot\nabla\psi = i\varsigma(s+\phi)\partial_\pi\psi \\ [(s+\phi)(s+1+\phi) - s(s+1)]\partial_\pi\psi = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \phi = 0$或$\phi = -(2s+1)$或$\sigma(s)\cdot\nabla\psi = 0, \partial_\pi\psi = 0$ □

定理2.2.2. $[s\partial_a + iS_{ab}\partial^b]\psi = 0 \Rightarrow \partial_a\partial^a\psi = 0$

证明: $[s\partial_a + iS_{ab}\partial^b]\psi = 0$

$\Rightarrow \partial^a[s\partial_a + iS_{ab}\partial^b]\psi = 0$

$\Leftrightarrow [s\partial_a\partial^a + iS_{ab}\partial^a\partial^b]\psi = 0$

$\Leftrightarrow [s\partial_a\partial^a + 0]\psi = 0$

$\Leftrightarrow \partial_a\partial^a\psi = 0$ □

即此方程描述的是无质量粒子。

定理2.2.3. $\begin{cases} 当\phi \neq 0时, [(s+\phi)\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s,\varsigma) = 0无平面波解 \\ 当\phi = 0时, [(s+\phi)\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s,\varsigma) = 0有平面波解 \end{cases}$

证明: 因为此方程描述的是无质量粒子，因此总可以选择粒子运动方向为z，此时$p_a = (0,0,p,ip)$, 则

$$[(s+\phi)p_a + iS_{ab}(s,\varsigma)p^b]\psi(s,\varsigma) = 0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[(s+\phi)p_x+i\sigma_z(s)p_y-i\sigma_y(s)p_z-i\varsigma\sigma_x(s)p_\pi]\psi(s,\varsigma)=0\\ [(s+\phi)p_y+i\sigma_x(s)p_z-i\sigma_z(s)p_x-i\varsigma\sigma_y(s)p_\pi]\psi(s,\varsigma)=0\\ [(s+\phi)p_z+i\sigma_y(s)p_x-i\sigma_x(s)p_y-i\varsigma\sigma_z(s)p_\pi]\psi(s,\varsigma)=0\\ [(s+\phi)p_\pi+i\varsigma\sigma_x(s)p_x+i\varsigma\sigma_y(s)p_y+i\varsigma\sigma_z(s)p_z]\psi(s,\varsigma)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[-i\sigma_y(s)p_z-i\varsigma\sigma_x(s)p_\pi]\psi(s,\varsigma)=0\\ [i\sigma_x(s)p_z-i\varsigma\sigma_y(s)p_\pi]\psi(s,\varsigma)=0\\ [(s+\phi)p_z-i\varsigma\sigma_z(s)p_\pi]\psi(s,\varsigma)=0\\ [(s+\phi)p_\pi+i\varsigma\sigma_z(s)p_z]\psi(s,\varsigma)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\sigma_x(s)-i\varsigma\sigma_y(s)]p\psi(s,\varsigma)=0\Leftrightarrow\psi_m(s,\varsigma)=0,m=s-1,\cdots,-(s-1),\varsigma s\\ [(s+\phi)+\varsigma\sigma_z(s)]p\psi(s,\varsigma)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\psi_m(s,\varsigma)=0,m=s-1,\cdots,-(s-1),\varsigma s\\ \phi\psi_{-\varsigma s}(s,\varsigma)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\text{当}\phi\neq0\text{时},\psi(s,\varsigma)=0,\text{即所有自旋分量全为}0\\ \text{当}\phi=0\text{时},\psi(s,\varsigma)=[\frac{1}{2}(\varsigma-1)\psi_s,0,\cdots,0,\frac{1}{2}(\varsigma+1)\psi_{-s}]^Te^{ip\cdot x}\\ \text{即}-\varsigma s\text{自旋分量可以不为0,其余分量全为0}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\text{当}\phi\neq0\text{时},[(s+\phi)\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s,\varsigma)=0\text{无平面波解}\\ \text{当}\phi=0\text{时},[(s+\phi)\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s,\varsigma)=0\text{有平面波解}\end{cases}$$ □

即此方程中的ϕ有类似开关的作用。

推论2.2.1. $[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s,\varsigma)=0$有平面波解$\psi(s,\varsigma)=[\frac{1}{2}(\varsigma-1)\psi_s,0,\cdots,0,\frac{1}{2}(\varsigma+1)\psi_{-s}]^Te^{ip\cdot x}$

2.3 自旋方程的定义

定义2.3.1. $[sD_a+iS_{ab}D^b]\psi=\mathbb{J}_a$称为自旋方程。

推论2.3.1. $(s\delta_{ab}+iS_{ab})D^b\psi=\mathbb{J}_a$

2.4 自旋方程的一种等价表述

推论2.4.1. $[s\hat{P}_a+\varsigma\hat{W}_a(s,\varsigma)]\psi(s,\varsigma)=-i\mathbb{J}_a(s,\varsigma),\hat{P}_a:=-i\partial_a,\hat{W}_a(s,\varsigma):=\varsigma S_{ab}(s,\varsigma)\partial^b$

即自旋方程可以看作动量和自旋矢量关系决定的方程。

定理2.4.1. $[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi=0\Leftrightarrow[s\varsigma\hat{p}_a+\hat{W}_a(s,\varsigma)]\psi(s,\varsigma)=0\Leftrightarrow\hat{W}_a(s,\varsigma)\psi(s,\varsigma)=-s\varsigma\hat{p}_a\psi(s,\varsigma)$

2.5 开关型自旋方程的定义

定义2.5.1. $[(s+\phi)D_a+iS_{ab}D^b]\psi=\mathbb{J}_a$称为开关型自旋方程,$\phi$称为开关型标量场。

推论2.5.1. $[(s+\phi)\delta_{ab}+iS_{ab}]D^b\psi=\mathbb{J}_a$

2.6 开关型自旋方程的一种等价表述

推论2.6.1. $[(s+\phi)\hat{p}_a+\varsigma\hat{W}_a(s,\varsigma)]\psi(s,\varsigma)=-i\mathbb{J}_a(s,\varsigma)$

即开关型自旋方程可以看作动量和自旋矢量关系决定的方程。

3 各种粒子自旋方程

3.1 中微子 [6]自旋方程

中微子自旋矩阵：$S_{ab}(\varsigma)=\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}\succ\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&\sigma_z&-\sigma_y&-\varsigma\sigma_x\\-\sigma_z&0&\sigma_x&-\varsigma\sigma_y\\\sigma_y&-\sigma_x&0&-\varsigma\sigma_z\\\varsigma\sigma_x&\varsigma\sigma_y&\varsigma\sigma_z&0\end{bmatrix}$ (11.8)

定理3.1.1. $[\frac{1}{2}D_a+iS_{ab}(\varsigma)D^b]\psi(\frac{1}{2},\varsigma)=0\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^a D_a\psi(\frac{1}{2},\varsigma)=0$

3.2 任意N+1维时空中的电子 [5]自旋方程

任意n=N+1维时空中的电子自旋方程:

定理3.2.1. $[\frac{1}{2}(D_a+m\gamma_a)+iS_{ab}D^b]\psi=0,S_{ab}=-\frac{i}{4}[\gamma_a,\gamma_b]\Leftrightarrow(\gamma^a D_a+m)\psi=0$

证明: $[\frac{1}{2}(D_a+m\gamma_a)+iS_{ab}D^b]\psi=0,S_{ab}=-\frac{i}{4}[\gamma_a,\gamma_b]$

$\Leftrightarrow[(2iS_{ab}+\delta_{ab})D^b+\gamma_a m]\psi=0,S_{ab}=-\frac{i}{4}[\gamma_a,\gamma_b]$

$\Leftrightarrow[\frac{1}{2}([\gamma_a,\gamma_b]+\{\gamma_a,\gamma_b\})D_b+\gamma_a m]\psi=0$

$\Leftrightarrow\gamma_a(\gamma_b D^b+m)\psi=0$

$\Leftrightarrow(\gamma_a D^a+m)\psi=0$

$\Leftrightarrow(\gamma^a D_a+m)\psi=0$ □

4维时空中的电子自旋方程:

推论3.2.1. $\{\frac{1}{2}[D_a+m\gamma_a(\varsigma)]+iS_{ab}(e,\varsigma)D^b\}\psi(e,\varsigma)=0\Leftrightarrow[\gamma^a(\varsigma)D_a+m]\psi(e,\varsigma)=0$

3.3 Yang-Mills场 [7]自旋方程

定理3.3.1. $(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\Psi^{\gamma_\varsigma\sigma}(1,\varsigma)=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^{b\sigma},S_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}$
$\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a D_a\tilde{\psi}^\sigma(1,\varsigma)=i\tilde{\mathcal{J}}^\sigma(1,\varsigma)$

定理3.3.2. $(D_a+iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\psi^{\gamma_\varsigma\sigma}(1,\varsigma)=-i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^{b\sigma},S_{ab}=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a D_a\tilde{\psi}^\sigma(1,\varsigma)=iJ^\sigma$

3.4 s-自旋粒子的自旋方程：全对称性Penrose方程 [1,2]

3.4.1 s-自旋方程

s-自旋矩阵：$S_{ab}(s,\varsigma)=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\succ\begin{bmatrix}0&\sigma_z(s)&-\sigma_y(s)&-\varsigma\sigma_x(s)\\-\sigma_z(s)&0&\sigma_x(s)&-\varsigma\sigma_y(s)\\\sigma_y(s)&-\sigma_x(s)&0&-\varsigma\sigma_z(s)\\\varsigma\sigma_x(s)&\varsigma\sigma_y(s)&\varsigma\sigma_z(s)&0\end{bmatrix}$ (11.9)

定理3.4.1. $\begin{cases}\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}\\\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2s}}\\J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}=\frac{1}{(2s-1)!}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{(B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2s-1}}\end{cases}\Leftrightarrow[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s)$

证明: $\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}},\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2s}},J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}=\frac{1}{(2s-1)!}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{(B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2s-1}}$

$\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}$

$\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s)D^a\psi_{k_\varsigma}(s)=iJ^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}$

$\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})D^a\psi_{k_\varsigma}(s)=iJ^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}$

$\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s)D^a\psi_{k_\varsigma}(s)=iJ^{A'_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow N^{Z_\varsigma l_\varsigma}_{j_\varsigma}(s)(\sigma,i\varsigma)_{a Z_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{A'_\varsigma A_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s)D^b\psi_{k_\varsigma}(s)=iN^{Z_\varsigma l_\varsigma}_{j_\varsigma}(s)(\sigma,i\varsigma)_{a Z_\varsigma A'_\varsigma}J^{A'_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow N_{j_\varsigma}^{z_\varsigma l_\varsigma}(s)[\delta_{ab}\delta_{z_\varsigma}{}^{A_\varsigma}+2iS_{abz_\varsigma}{}^{A_\varsigma}(\frac{1}{2},\varsigma)]N_{A_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s)D^b\psi_{k_\varsigma}(s)=iN_{j_\varsigma}^{z_\varsigma l_\varsigma}(s)(\sigma,i\varsigma)_{a_{z_\varsigma A'_\varsigma}}J^{A'_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})$
$\Leftrightarrow [s\delta_{ab}\delta_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+iS_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s,\varsigma)]D^b\psi_{k_\varsigma}(s)=is(\sigma,i\varsigma)_{a_{A_\varsigma A'_\varsigma}}N_{j_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s)J^{A'_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})$
$\Leftrightarrow [s\delta_{ab}\delta_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+iS_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s,\varsigma)]D^b\psi_{k_\varsigma}(s)=is\delta_{ab}(\sigma,i\varsigma)^b_{A_\varsigma A'_\varsigma}\Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}$
$\Leftrightarrow [s\delta_{ab}\delta_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+iS_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s,\varsigma)]D^b\psi_{k_\varsigma}(s)=-\sqrt{2}\varsigma sZ^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma j_\varsigma}(s,\varsigma)J^{A'_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})$
$\Leftrightarrow [sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s),\psi(s,\varsigma)\prec\psi_{k_\varsigma}(s),\tilde{J}(s)\prec J^{A'_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2})$ □

从上可知，s-自旋方程就是全对称性Penrose方程的自旋张量表述形式。

推论3.4.1. $(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)^aD_a\hat{\psi}(s,\varsigma)=i\hat{J}(s,\varsigma)\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^aD_a\tilde{\psi}(s,\varsigma)=i\tilde{J}(s,\varsigma)$

证明: $(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)^aD_a\hat{\psi}(s,\varsigma)=i\hat{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)^a\Gamma(s)D_a\psi(s,\varsigma)=i[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)^a[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]N(s)D_a\psi(s,\varsigma)=i[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})](\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^aN(s)D_a\psi(s,\varsigma)=i[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^aD_a\tilde{\psi}(s,\varsigma)=i\tilde{J}(s,\varsigma)$ □

推论3.4.2. $[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s)\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_aD^a\tilde{\psi}(s,\varsigma)=i\tilde{J}(s,\varsigma)$

证明: $[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow[s\delta_{ab}I_{2s+1}+iS_{ab}(s,\varsigma)]D^b\psi(s,\varsigma)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow 2s\bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_b(s,\varsigma)D^b\psi(s,\varsigma)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow Z_b(s,\varsigma)D^b\psi(s,\varsigma)=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^aD_a\tilde{\psi}(s,\varsigma)=i\tilde{J}(s,\varsigma)$ □

推论3.4.3.

$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}\\ \psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2s}},J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}=\frac{1}{(2s-1)!}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}\end{cases}\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^aD_a\tilde{\psi}(s,\varsigma)=i\tilde{J}(s,\varsigma)$$

推论3.4.4. $[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=\mathbb{J}_a(s,\varsigma)\Rightarrow\mathbb{J}^a(s,\varsigma)=\frac{2s}{2s+1}\bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_b(s,\varsigma)\mathbb{J}^b(s,\varsigma)$

证明: $[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=\mathbb{J}_a(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow 2s\bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_b(s,\varsigma)D^b\psi(s,\varsigma)=\mathbb{J}_a(s,\varsigma)$
$\Rightarrow Z_b(s,\varsigma)D^b\psi(s,\varsigma)=\frac{1}{2s+1}Z^a(s,\varsigma)\mathbb{J}_a(s,\varsigma)$
$\Rightarrow 2s\bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_b(s,\varsigma)D^b\psi(s,\varsigma)=\frac{1}{2s+1}2s\bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_b(s,\varsigma)\mathbb{J}^b(s,\varsigma)$
$\Rightarrow\mathbb{J}^a(s,\varsigma)=\frac{2s}{2s+1}\bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_b(s,\varsigma)\mathbb{J}^b(s,\varsigma)$ □

推论3.4.5. $[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=\mathbb{J}_a(s,\varsigma)$无解 $\Leftrightarrow\mathbb{J}^a(s,\varsigma)\neq\frac{2s}{2s+1}\bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_b(s,\varsigma)\mathbb{J}^b(s,\varsigma)$

3.4.2 不同阶自旋方程之间的等价性(需完善)

定理3.4.2. $[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow[(s-l)D_a+iS_{ab}(s-l,\varsigma)D^b]\psi^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2l}}(s-l,\varsigma)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s-l,\varsigma)\tilde{J}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2l}}(s-l,\varsigma)$
$l=0,\frac{1}{2},1,\cdots,s+$对称性条件

3.4.3 源$\mathbb{J}_a(s,\varsigma)$的性质

推论3.4.6. $\mathbb{J}^a(s,\varsigma)=\frac{2s}{2s+1}\bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_b(s,\varsigma)\mathbb{J}^b(s,\varsigma)\Leftrightarrow\exists\tilde{J}(s,\varsigma),\mathbb{J}_a(s,\varsigma)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$

推论3.4.7. $\mathbb{J}^a(s,\varsigma)=\frac{2s}{2s+1}\bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_b(s,\varsigma)\mathbb{J}^b(s,\varsigma)\Leftrightarrow\mathbb{J}_a(s,\varsigma)=\frac{1}{s+1}iS_{ab}(s,\varsigma)\mathbb{J}^b(s,\varsigma)$

推论3.4.8. $\mathbb{J}_a(s,\varsigma)=\frac{1}{s+1}iS_{ab}(s,\varsigma)\mathbb{J}^b(s,\varsigma)\Leftrightarrow\begin{cases}(s+1)\mathbb{J}=-i\sigma(s)\times\mathbb{J}-i\varsigma\sigma(s)\mathbb{J}_\pi\\ \sigma(s)\cdot\mathbb{J}+i\varsigma(s+1)\mathbb{J}_\pi=0\end{cases}$

性质3.4.1. $\sigma(s)\cdot[\sigma(s)\times\mathbb{J}]=i\sigma(s)\cdot\mathbb{J}$

推论3.4.9. $(s+1)\mathbb{J}=-i\sigma(s)\times\mathbb{J}-i\varsigma\sigma(s)\mathbb{J}_\pi\Rightarrow\sigma(s)\cdot\mathbb{J}+i\varsigma(s+1)\mathbb{J}_\pi=0$

推论3.4.10. $\mathbb{J}_a(s,\varsigma)=\frac{1}{s+1}iS_{ab}(s,\varsigma)\mathbb{J}^b(s,\varsigma)\Leftrightarrow(s+1)\mathbb{J}=-i\sigma(s)\times\mathbb{J}-i\varsigma\sigma(s)\mathbb{J}_\pi$

3.4.4 无质量s-自旋粒子的螺旋度

定义3.4.1. s-自旋粒子的螺旋度：$\mathscr{P}(s):=\frac{\sigma(s)\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$

推论3.4.11. $[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s,\varsigma)=0\Rightarrow[\sigma(s),-is\varsigma]^a\partial_a\varphi(s,\varsigma)=0,\partial^a\partial_a\varphi(s,\varsigma)=0$

推论3.4.12. $\begin{cases}(\vec{p}^2-E^2)\psi(s,\varsigma)=0\\ \sigma(s)\cdot\vec{p}\psi(s,\varsigma)=-s\varsigma E\psi(s,\varsigma)\end{cases}\Rightarrow\mathscr{P}(s)\psi(s,\varsigma)=\frac{\sigma(s)\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi(s,\varsigma)=\begin{cases}-s\varsigma\psi(s,\varsigma),E=|\vec{p}|\\ s\varsigma\psi(s,\varsigma),E=-|\vec{p}|\end{cases}$

从上可知，无质量s-自旋粒子螺旋度本征值只能是$\pm s$，没有其它值。

3.5 s-自旋方程的各种等价形式

推论3.5.1. $[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x;s)=\mathbb{J}_a\Leftrightarrow[s\partial_a+i\Omega_{ab}(s)\partial^b]\Gamma(s)\psi(x;s)=\Gamma(s)\mathbb{J}_a$
$\Leftrightarrow\{s\partial_a+i[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\otimes I_{2s}+I\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma)]\partial^b\}N(s)\psi(x;s)=N(s)\mathbb{J}_a$

证明: $[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x;s)=\mathbb{J}_a$
$\Leftrightarrow\Gamma(s)[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x;s)=\Gamma(s)\mathbb{J}_a$
$\Leftrightarrow[s\partial_a+i\Omega_{ab}(s)\partial^b]\Gamma(s)\psi(x;s)=\Gamma(s)\mathbb{J}_a$ □

证明: $[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x;s)=\mathbb{J}_a$
$\Leftrightarrow N(s)[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x;s)=N(s)\mathbb{J}_a$
$\Leftrightarrow\{s\partial_a+i[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\otimes I_{2s}+I\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma)]\partial^b\}N(s)\psi(x;s)=N(s)\mathbb{J}_a$ □

3.6 偶数维时空中s-自旋粒子的自旋方程：偶数维时空全对称性Penrose方程 [1,2]错？?

3.6.1 偶数维时空中的s-自旋方程

引理3.6.1. $?(\Gamma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^a_{B_\varsigma B'_\varsigma}=2\delta^{A_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}$

引理3.6.2. $(\Gamma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;n)N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;n)(\Gamma,i\varsigma)^a_{B_\varsigma B'_\varsigma}=2(1+\frac{n}{2s})\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}$

定理3.6.1. $\begin{cases}\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}\\ \psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2s}}\\ J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}=\frac{1}{(2s-1)!}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{(B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2s-1}}\end{cases}\Leftrightarrow[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma;n)D^b]\psi(s,\varsigma;n)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s;n)$

证明: $\nabla^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}=\frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}},\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2s}},J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}=\frac{1}{(2s-1)!}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{(B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2s-1}}$
$\Leftrightarrow(\Gamma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}$
$\Leftrightarrow(\Gamma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;n)D^a\psi_{k_\varsigma}(s;n)=iJ^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}$
$\Leftrightarrow(\Gamma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;n)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};n)D^a\psi_{k_\varsigma}(s;n)=iJ^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}$
$\Leftrightarrow(\Gamma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;n)D^a\psi_{k_\varsigma}(s;n)=iJ^{A'_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};n)$

$\Leftrightarrow N_{j_\varsigma}^{z_\varsigma l_\varsigma}(s;n)(\Gamma,i\varsigma)_{a_{Z_\varsigma A'_\varsigma}}(\Gamma,-i\varsigma)_b^{A'_\varsigma A_\varsigma}N_{A_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;n)D^b\psi_{k_\varsigma}(s;n)=iN_{j_\varsigma}^{z_\varsigma l_\varsigma}(s;n)(\Gamma,i\varsigma)_{a_{Z_\varsigma A'_\varsigma}}J^{A'_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};n)$
$\Leftrightarrow N_{j_\varsigma}^{z_\varsigma l_\varsigma}(s;n)[\delta_{ab}\delta_{Z_\varsigma}{}^{A_\varsigma}+2iS_{abZ_\varsigma}{}^{A_\varsigma}(\frac{1}{2},\varsigma)]N_{A_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;n)D^b\psi_{k_\varsigma}(s;n)=iN_{j_\varsigma}^{z_\varsigma l_\varsigma}(s;n)(\Gamma,i\varsigma)_{a_{Z_\varsigma A'_\varsigma}}J^{A'_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};n)$
$\Leftrightarrow [s\delta_{ab}\delta_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+iS_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s,\varsigma)]D^b\psi_{k_\varsigma}(s;n)=is(\Gamma,i\varsigma)_{a_{A_\varsigma A'_\varsigma}}N_{j_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;n)J^{A'_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};n)$
$\Leftrightarrow [s\delta_{ab}\delta_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+iS_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s,\varsigma)]D^b\psi_{k_\varsigma}(s;n)=is\delta_{ab}(\Gamma,i\varsigma)^b_{A_\varsigma A'_\varsigma}\Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;n)J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}$
$\Leftrightarrow [s\delta_{ab}\delta_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+iS_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s,\varsigma)]D^b\psi_{k_\varsigma}(s;n)=-\sqrt{2}\varsigma sZ^{al_\varsigma}_{A'_\varsigma j_\varsigma}(s,\varsigma;n)J^{A'_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};n)$
$\Leftrightarrow\begin{cases}[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma;n)D^b]\psi(s,\varsigma;n)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma;n)\tilde{J}(s;n)\\ \psi(s,\varsigma)\prec\psi_{k_\varsigma}(s;n),\tilde{J}(s;n)\prec J^{A'_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};n)\end{cases}$ □

从上可知，s-自旋方程就是全对称性Penrose方程的自旋张量表述形式。

3.7 广义自旋方程

定理3.7.1. $(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{(w+1)^{2s-1}},-i\varsigma)^aD_a\hat{\psi}(s,\varsigma;w)=i\hat{J}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)^aD_a\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)=i\tilde{J}(s,\varsigma;w)$

证明: $(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{(w+1)^{2s-1}},-i\varsigma)^aD_a\hat{\psi}(s,\varsigma;w)=i\hat{J}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{(w+1)^{2s-1}},-i\varsigma)^a\Gamma(s;w)D_a\psi(s,\varsigma;w)=i[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]\tilde{J}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{(w+1)^{2s-1}},-i\varsigma)^a[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w)D_a\psi(s,\varsigma;w)=i[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]\tilde{J}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)](\sigma\langle w\rangle\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)^aN(s;w)D_a\psi(s,\varsigma;w)=i[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]\tilde{J}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)^aD_a\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)=i\tilde{J}(s,\varsigma;w)$ □

定理3.7.2. $(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{(w+1)^{2s-1}},-i\varsigma)^aD_a\hat{\psi}(s,\varsigma;w)=i\hat{J}(s,\varsigma;w)$
$\Rightarrow\begin{cases}[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma;w)D^b]\psi(s,\varsigma;w)=is\bar{N}(s;w)(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},i\varsigma)_a\tilde{J}(s,\varsigma;w)\\ [\sigma(s;w),-is\varsigma]_aD^a\psi(s,\varsigma;w)=is\bar{N}(s;w)\tilde{J}(s,\varsigma;w)\end{cases}$

证明: $(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_bD^b\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)=i\tilde{J}(s,\varsigma;w)$
$\Rightarrow\bar{N}(s;w)(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},i\varsigma)_a(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_bN(s;w)D^b\psi(s,\varsigma;w)=i\bar{N}(s;w)(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},i\varsigma)_a\tilde{J}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow\bar{N}(s;w)[\delta_{ab}+2iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}}]N(s;w)D^b\psi(s,\varsigma;w)=i\bar{N}(s;w)(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},i\varsigma)_a\tilde{J}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow[\delta_{ab}+\frac{i}{s}S_{ab}(s,\varsigma;w)]D^b\psi(s,\varsigma;w)=i\bar{N}(s;w)(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},i\varsigma)_a\tilde{J}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma;w)D^b]\psi(s,\varsigma;w)=is\bar{N}(s;w)(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},i\varsigma)_a\tilde{J}(s,\varsigma;w)$ □

证明: $(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_aD^a\tilde{\psi}(s,\varsigma;w)=i\tilde{J}(s,\varsigma;w)$
$\Rightarrow\bar{N}(s;w)(\sigma\langle w\rangle\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+w}},-i\varsigma)_aN(s;w)D^a\psi(s,\varsigma;w)=i\bar{N}(s;w)\tilde{J}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow[\frac{1}{s}\sigma(s;w),-i\varsigma]_aD^a\psi(s,\varsigma;w)=i\bar{N}(s;w)\tilde{J}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow[\sigma(s;w),-is\varsigma]_aD^a\psi(s,\varsigma;w)=is\bar{N}(s;w)\tilde{J}(s,\varsigma;w)$ □

4 开关型自旋方程

4.1 开关型无源中微子自旋方程

定理4.1.1. $[(\frac{1}{2}+\phi)D_a+iS_{ab}(\varsigma)D^b]\psi(\frac{1}{2},\varsigma)=0$
$\Leftrightarrow\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)^aD_a\psi(\frac{1}{2},\varsigma)=0,\phi=0\\ \sigma_xD_x\psi(\frac{1}{2},\varsigma)=\sigma_yD_y\psi(\frac{1}{2},\varsigma)=\sigma_zD_z\psi(\frac{1}{2},\varsigma)=-i\varsigma D_\pi\psi(\frac{1}{2},\varsigma),\phi=-2\\ \psi(\frac{1}{2},\varsigma)=\text{常数解},\phi\neq 0,-2\end{cases}$

证明: $[(\frac{1}{2}+\phi)D_a+iS_{ab}(\varsigma)D^b]\psi(\frac{1}{2},\varsigma)=0$
$\Leftrightarrow[\frac{1}{2}D_a+iS_{ab}(\varsigma)D^b]\psi(\frac{1}{2},\varsigma)=-\phi D_a\psi(\frac{1}{2},\varsigma)$
$\Leftrightarrow\sigma_a[\frac{1}{2}D_a+iS_{ab}(\varsigma)D^b]\psi(\frac{1}{2},\varsigma)=-(\sigma,-i\varsigma)_a\phi D_a\psi(\frac{1}{2},\varsigma)$
$\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^bD_b\psi(\frac{1}{2},\varsigma)=-2\phi(\sigma,-i\varsigma)_aD_a\psi(\frac{1}{2},\varsigma)$

$$\Leftrightarrow (\sigma,-i\varsigma)^a D_a\psi(\tfrac{1}{2},\varsigma) = -2\phi\sigma_x D_x\psi(\tfrac{1}{2},\varsigma) = -2\phi\sigma_y D_y\psi(\tfrac{1}{2},\varsigma) = -2\phi\sigma_z D_z\psi(\tfrac{1}{2},\varsigma) = -2\phi(-i\varsigma)D_\pi\psi(\tfrac{1}{2},\varsigma)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sigma,-i\varsigma)^a D_a\psi(\frac{1}{2},\varsigma) = 0, \phi = 0 \\ \sigma_x D_x\psi(\frac{1}{2},\varsigma) = \sigma_y D_y\psi(\frac{1}{2},\varsigma) = \sigma_z D_z\psi(\frac{1}{2},\varsigma) = -i\varsigma D_\pi\psi(\frac{1}{2},\varsigma), \phi = -2 \\ D_a\psi(\frac{1}{2},\varsigma) = 0, \phi \neq 0,-2 \end{cases} \quad \square$$

推论4.1.1. $[(\frac{1}{2}+\phi)\partial_a + iS_{ab}(\varsigma)\partial^b]\psi(\frac{1}{2},\varsigma) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sigma,-i\varsigma)^a \partial_a\psi(\frac{1}{2},\varsigma) = 0, \phi = 0 \\ \sigma_x \partial_x\psi(\frac{1}{2},\varsigma) = \sigma_y \partial_y\psi(\frac{1}{2},\varsigma) = \sigma_z \partial_z\psi(\frac{1}{2},\varsigma) = -i\varsigma \partial_\pi\psi(\frac{1}{2},\varsigma), \phi = -2 \\ \psi(\frac{1}{2},\varsigma) = \text{常数解}, \phi \neq 0,-2 \end{cases}$$

推论4.1.2. $\sigma_x \partial_x\psi(\frac{1}{2},\varsigma) = \sigma_y \partial_y\psi(\frac{1}{2},\varsigma) = \sigma_z \partial_z\psi(\frac{1}{2},\varsigma) = -i\varsigma \partial_\pi\psi(\frac{1}{2},\varsigma)$

$$\Rightarrow \psi(\tfrac{1}{2},\varsigma) = \omega_0 + (x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z + i\varsigma\pi)\pi_0 \Leftrightarrow \psi_{A_\varsigma}(\tfrac{1}{2},\varsigma) = \omega_{A_\varsigma} + x_a(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\pi^{A'_\varsigma}$$

$$\Leftrightarrow (\sigma^*,i\varsigma)^a_{A'_\varsigma(A_\varsigma}\partial_a\omega_{B_\varsigma)} = 0$$

以上结论正是**Penrose**扭量[2,3]的投射关系。

4.2 开关型无源电磁场自旋方程

定理4.2.1. $[(1+\phi)D_a + iS_{ab}D^b]^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\Psi^{\gamma_\varsigma}(1,\varsigma) = 0, S_{ab} = i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a D_a\tilde{\psi}(1,\varsigma) = 0, \phi = 0 \\ \begin{cases} -D_y\Psi_{z_\varsigma} = D_z\Psi_{y_\varsigma} = \varsigma D_\pi\Psi_{x_\varsigma}, -D_z\Psi_{x_\varsigma} = D_x\Psi_{z_\varsigma} = \varsigma D_\pi\Psi_{y_\varsigma} \\ -D_x\Psi_{y_\varsigma} = D_y\Psi_{x_\varsigma} = \varsigma D_\pi\Psi_{z_\varsigma}, D_x\Psi_{x_\varsigma} = D_y\Psi_{y_\varsigma} = D_z\Psi_{z_\varsigma} \end{cases}, \phi = -3 \\ D_a\Psi_{b_\varsigma} = 0, \phi \neq 0,-3 \end{cases}$$

证明: $[(1+\phi)D_a + iS_{ab}D^b]^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\Psi^{\gamma_\varsigma}(1,\varsigma) = 0, S_{ab} = i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow (D_a + iS_{ab}D^b)^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\Psi^{\gamma_\varsigma}(1,\varsigma) = -\phi D_a\Psi^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma)$$

$$\Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a D_a\tilde{\psi}(1,\varsigma) = i\tilde{\mathcal{J}}(1,\varsigma), -\phi D_a\Psi^{\beta_\varsigma}(1,\varsigma) = -i\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma ab}J^b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a D_a\tilde{\psi}(1,\varsigma) = 0, \phi = 0 \\ \begin{cases} -D_y\Psi_{z_\varsigma} = D_z\Psi_{y_\varsigma} = \varsigma D_\pi\Psi_{x_\varsigma}, -D_z\Psi_{x_\varsigma} = D_x\Psi_{z_\varsigma} = \varsigma D_\pi\Psi_{y_\varsigma} \\ -D_x\Psi_{y_\varsigma} = D_y\Psi_{x_\varsigma} = \varsigma D_\pi\Psi_{z_\varsigma}, D_x\Psi_{x_\varsigma} = D_y\Psi_{y_\varsigma} = D_z\Psi_{z_\varsigma} \end{cases}, \phi = -3 \\ D_a\Psi_{b_\varsigma} = 0, \phi \neq 0,-3 \end{cases} \quad \square$$

推论4.2.1. $[(1+\phi)\partial_a + iS_{ab}\partial^b]^{\beta_\varsigma}{}_{\gamma_\varsigma}\Psi^{\gamma_\varsigma}(1,\varsigma) = 0, S_{ab} = i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a \partial_a\tilde{\psi}(1,\varsigma) = 0, \phi = 0 \\ \begin{cases} -\partial_y\Psi_{z_\varsigma} = \partial_z\Psi_{y_\varsigma} = \varsigma \partial_\pi\Psi_{x_\varsigma}, -\partial_z\Psi_{x_\varsigma} = \partial_x\Psi_{z_\varsigma} = \varsigma \partial_\pi\Psi_{y_\varsigma} \\ -\partial_x\Psi_{y_\varsigma} = \partial_y\Psi_{x_\varsigma} = \varsigma \partial_\pi\Psi_{z_\varsigma}, \partial_x\Psi_{x_\varsigma} = \partial_y\Psi_{y_\varsigma} = \partial_z\Psi_{z_\varsigma} \end{cases}, \phi = -3 \\ \Psi_{\alpha_\varsigma} = \text{常数解}, \phi \neq 0,-3 \end{cases}$$

推论4.2.2. $\begin{cases} -\partial_y\Psi_{z_\varsigma} = \partial_z\Psi_{y_\varsigma} = \varsigma \partial_\pi\Psi_{x_\varsigma}, -\partial_z\Psi_{x_\varsigma} = \partial_x\Psi_{z_\varsigma} = \varsigma \partial_\pi\Psi_{y_\varsigma} \\ -\partial_x\Psi_{y_\varsigma} = \partial_y\Psi_{x_\varsigma} = \varsigma \partial_\pi\Psi_{z_\varsigma}, \partial_x\Psi_{x_\varsigma} = \partial_y\Psi_{y_\varsigma} = \partial_z\Psi_{z_\varsigma} \end{cases} \Rightarrow \Psi^{\alpha_\varsigma}(1,\varsigma) = x^a\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}C^b$

4.3 任意N+1维时空中的矢量场自旋方程及其无源开关型自旋方程

任意N+1维时空中的矢量场自旋方程

定理4.3.1. $(D_a\delta_{cd} + S_{abcd}D^b)A^d = X_{ac} \Leftrightarrow X_{ab} = D_aA_b - D_bA_a + \delta_{ab}D_cA^c$

证明: $(D_a\delta_{cd}+S_{abcd}D^b)A^d=X_{ac}$
$\Leftrightarrow [D_a\delta_{cd}+(\delta_{ac}\delta_{bd}-\delta_{ad}\delta_{bc})D^b]A^d=X_{ac}$
$\Leftrightarrow D_aA_c+\delta_{ac}D_bA^b-D_cA_a=X_{ac}$
$\Leftrightarrow D_aA_b-D_bA_a+\delta_{ab}D_cA^c=X_{ab}$
$\Leftrightarrow X_{ab}=D_aA_b-D_bA_a+\delta_{ab}D_cA^c$ □

推论4.3.1. $(D_a\delta_{cd}+S_{abcd}D^b)A^d=0\Leftrightarrow D_aA_b-D_bA_a=0,D_aA^a=0$

推论4.3.2. $(\partial_a\delta_{cd}+S_{abcd}\partial^b)A^d=0\Leftrightarrow \partial_aA_b-\partial_bA_a=0,\partial_aA^a=0\Leftrightarrow \partial^a\partial_a\phi=0,A_a=\partial_a\phi$

任意N+1维时空中的无源矢量场开关型自旋方程

推论4.3.3. $[(1+\phi)D_a\delta_{cd}+S_{abcd}\partial^b]A^d=0\Leftrightarrow \begin{cases}D_aA_b-D_bA_a=0,D_aA^a=0,\phi=0\\ D_aA_b+D_bA_a=0,\phi=-2\\ D_aA_{b\neq a}=0,D_xA_x=D_yA_y=D_zA_z=D_\pi A_\pi,\phi=-4\\ D_aA_b=0,\phi\neq 0,-2,-4\end{cases}$

证明: $[(1+\phi)D_a\delta_{cd}+S_{abcd}D^b]A^d=0$
$\Leftrightarrow (D_a\delta_{cd}+S_{abcd}D^b)A^d=-\phi D_aA_c$
$\Leftrightarrow -\phi D_aA_b=D_aA_b-D_bA_a+\delta_{ab}D_cA^c$
$\Leftrightarrow -\phi D_aA_a=D_cA^c,-\phi(D_aA_{b\neq a}+D_bA_{a\neq b})=0,(2+\phi)(D_aA_b-D_bA_a)=0$
$\Leftrightarrow \begin{cases}-\phi D_aA_a=D_cA^c,(4+\phi)D_aA^a=0\\ -\phi(D_aA_{b\neq a}+D_bA_{a\neq b})=0,(2+\phi)(D_aA_b-D_bA_a)=0\end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases}D_aA_b-D_bA_a=0,D_aA^a=0,\phi=0\\ D_aA_b+D_bA_a=0,\phi=-2\\ D_aA_{b\neq a}=0,D_xA_x=D_yA_y=D_zA_z=D_\pi A_\pi,\phi=-4\\ D_aA_b=0,\phi\neq 0,-2,-4\end{cases}$ □

推论4.3.4. $[(1+\phi)\partial_a\delta_{cd}+S_{abcd}\partial^b]A^d=0\Leftrightarrow \begin{cases}\partial_aA_b-\partial_bA_a=0,\partial_aA^a=0,\phi=0\\ \partial_aA_b+\partial_bA_a=0,\phi=-2\\ \partial_aA_{b\neq a}=0,\partial_xA_x=\partial_yA_y=\partial_zA_z=\partial_\pi A_\pi,\phi=-4\\ A_a=\text{常数解},\phi\neq 0,-2,-4\end{cases}$

推论4.3.5. $\partial_aA_{b\neq a}=0,\partial_xA_x=\partial_yA_y=\partial_zA_z=\partial_\pi A_\pi\Rightarrow A_a=kx_a$

4.4 任意N+1维时空中标量场的来源

标量场的来源:

推论4.4.1. $(\partial_a\delta_{cd}+S_{abcd}\partial^b)\partial^d\phi=m^2\phi\delta_{ac}\Leftrightarrow(\partial^a\partial_a-m^2)\phi=0$

证明: $(\partial_a\delta_{cd}+S_{abcd}\partial^b)\partial^d\phi=m^2\phi\delta_{ac}$
$\Leftrightarrow [\partial_a\delta_{cd}+(\delta_{ac}\delta_{bd}-\delta_{ad}\delta_{bc})\partial^b]\partial^d\phi=m^2\phi\delta_{ac}$
$\Leftrightarrow (\partial^b\partial_b-m^2)\delta_{ac}\phi=0$
$\Leftrightarrow (\partial^a\partial_a-m^2)\phi=0$ □

4.5 任意N+1维时空中的无源开关型电子自旋方程

任意n=N+1维时空中的无源开关型电子自旋方程:

定理4.5.1. $[(\frac{1}{2}+\phi)(D_a+m\gamma_a)+iS_{ab}D^b]\psi=0, S_{ab}=-\frac{i}{4}[\gamma_a,\gamma_b]\Leftrightarrow(\gamma^aD_a+m)\psi=-2\phi\gamma_bD_b\psi$

证明: $[(\frac{1}{2}+\phi)(D_a+m\gamma_a)+iS_{ab}D^b]\psi=0, S_{ab}=-\frac{i}{4}[\gamma_a,\gamma_b]$
$\Leftrightarrow[\frac{1}{2}(D_a+m\gamma_a)+iS_{ab}D^b]\psi=-\phi D_a\psi, S_{ab}=-\frac{i}{4}[\gamma_a,\gamma_b]$
$\Leftrightarrow[(2iS_{ab}+\delta_{ab})D_b+\gamma_am]\psi=-2\phi D_a\psi, S_{ab}=-\frac{i}{4}[\gamma_a,\gamma_b]$
$\Leftrightarrow[\frac{1}{2}([\gamma_a,\gamma_b]+\{\gamma_a,\gamma_b\})D_b+\gamma_am]\psi=-2\phi D_a\psi$
$\Leftrightarrow\gamma_a(\gamma_bD^b+m)\psi=-2\phi D_a\psi$
$\Leftrightarrow(\gamma_bD^b+m)\psi=-2\phi\gamma_aD_a\psi$
$\Leftrightarrow(\gamma^aD_a+m)\psi=-2\phi\gamma_bD_b\psi$ □

推论4.5.1. $(\gamma^aD_a+m)\psi=-2\phi\gamma_bD_b\psi,\phi\neq0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\psi=0,\phi=-\frac{n}{2},m\neq0\\ \gamma_1D_{x_1}\psi=\gamma_2D_{x_2}\psi=\cdots=\gamma_nD_{x_n}\psi=-(n+2\phi)^{-1}m\psi,\phi\neq-\frac{n}{2},m\neq0\\ \gamma_1D_{x_1}\psi=\gamma_2D_{x_2}\psi=\cdots=\gamma_nD_{x_n}\psi,\phi=-\frac{n}{2},m=0\\ \gamma_1D_{x_1}\psi=\gamma_2D_{x_2}\psi=\cdots=\gamma_nD_{x_n}\psi=0,\phi\neq-\frac{n}{2},m=0\end{cases}$$

推论4.5.2. $(\gamma^aD_a+m)\psi=-2\phi\gamma_bD_b\psi,\phi\neq0\Rightarrow\begin{cases}\psi=0,\phi=-\frac{n}{2},m\neq0\\ \psi=0,\phi\neq-\frac{n}{2},m\neq0\\ \psi=x^a\gamma_a\lambda,\phi=-\frac{n}{2},m=0\\ \psi=\text{常数解},\phi\neq-\frac{n}{2},m=0\end{cases}$

4.6 s-自旋粒子的无源开关型自旋方程

推论4.6.1. $[(s+\phi)D_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=\mathbb{J}_a(s,\varsigma)\Rightarrow(2s+1+\phi)Z_a(s,\varsigma)D^a\psi(s,\varsigma)=Z_a(s,\varsigma)\mathbb{J}^a(s,\varsigma)$

证明: $[(s+\phi)D_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=\mathbb{J}_a(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=\mathbb{J}_a(s,\varsigma)-\phi D_a\psi(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow2s\bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_b(s,\varsigma)D^b\psi(s,\varsigma)=\mathbb{J}_a(s,\varsigma)-\phi D_a\psi(s,\varsigma)$
$\Rightarrow Z_b(s,\varsigma)D^b\psi(s,\varsigma)=Z^a(s,\varsigma)\mathbb{J}_a(s,\varsigma)-\frac{\phi}{2s+1}Z^a(s,\varsigma)D_a\psi(s,\varsigma)$
$\Rightarrow(2s+1+\phi)Z_a(s,\varsigma)D^a\psi(s,\varsigma)=Z_a(s,\varsigma)\mathbb{J}^a(s,\varsigma)$ □

推论4.6.2. $[(s+\phi)D_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=0\Rightarrow(2s+1+\phi)Z_a(s,\varsigma)D^a\psi(s,\varsigma)=0$

证明: $[(s+\phi)D_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=0$
$\Leftrightarrow[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=-\phi D_a\psi(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow2s\bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_b(s,\varsigma)D^b\psi(s,\varsigma)=-\phi D_a\psi(s,\varsigma)$
$\Rightarrow Z_b(s,\varsigma)D^b\psi(s,\varsigma)=\frac{-\phi}{2s+1}Z^a(s,\varsigma)D_a\psi(s,\varsigma)$
$\Rightarrow(2s+1+\phi)Z_a(s,\varsigma)D^a\psi(s,\varsigma)=0$ □

推论4.6.3. $[(s+\phi)D_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=0\Leftrightarrow\begin{cases}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^aD_a\tilde{\psi}(s,\varsigma)=0,\phi=0\\ D_a\psi(s,\varsigma)=\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma),\phi=-(2s+1)\\ D_a\psi(s,\varsigma)=0,\phi\neq0,-(2s+1)\end{cases}$

推论4.6.4. $[-(s+1)D_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=0\Leftrightarrow D_a\psi(s,\varsigma)=\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma),\forall\tilde{J}(s,\varsigma)$

推论4.6.5. $[-(s+1)\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s,\varsigma)=0\Leftarrow\psi(s,\varsigma)=x^a\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$

推论4.6.6. $[(s+\phi)\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s,\varsigma) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{当}\phi = 0\text{时}, (\sigma\otimes I_{2s}, -i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\psi}(s,\varsigma) = 0, \text{有平面波解,表征粒子的解} \\ \text{当}\phi = -(2s+1)\text{时}, \psi(s,\varsigma) = x^a\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma), \text{无平面波解,退化为表征时空的解} \\ \text{当}\phi \neq 0, -(2s+1)\text{时}, \psi(s,\varsigma) = \text{常数解, 只有常数解,退化为表征虚空的解} \end{cases}$$

4.7 s-自旋粒子开关型自旋方程的各种等价形式

推论4.7.1. $[(s+\phi)\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x;s) = \mathbb{J}_a \Leftrightarrow [(s+\phi)\partial_a + i\Omega_{ab}(s)\partial^b]\Gamma(s)\psi(x;s) = \Gamma(s)\mathbb{J}_a$
$\Leftrightarrow \{(s+\phi)\partial_a + i[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\otimes I_{2s} + I\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma)]\partial^b\}N(s)\psi(x;s) = N(s)\mathbb{J}_a$

证明: $[(s+\phi)\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x;s) = \mathbb{J}_a$
$\Leftrightarrow \Gamma(s)[(s+\phi)\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x;s) = \Gamma(s)\mathbb{J}_a$
$\Leftrightarrow [(s+\phi)\partial_a + i\Omega_{ab}(s)\partial^b]\Gamma(s)\psi(x;s) = \Gamma(s)\mathbb{J}_a$ □

证明: $[(s+\phi)\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x;s) = \mathbb{J}_a$
$\Leftrightarrow N(s)[(s+\phi)\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x;s) = N(s)\mathbb{J}_a$
$\Leftrightarrow \{(s+\phi)\partial_a + i[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\otimes I_{2s} + I\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma)]\partial^b\}N(s)\psi(x;s) = N(s)\mathbb{J}_a$ □

5 低一阶导数的自旋方程新形式

5.1 低一阶导数的s自旋方程

定义5.1.1. *低一阶导数的自旋方程:* $[s\delta_{ab} + iS_{ab}(s,\varsigma)]\psi^{bc}(s,\varsigma) = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}^c(s,\varsigma)$

定理5.1.1. $[s\delta_{ab} + iS_{ab}(s,\varsigma)]\psi^{bc}(s,\varsigma) = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}^c(s,\varsigma) \Leftrightarrow (\sigma\otimes I_{2s}, -i\varsigma)_a\tilde{\psi}^{ab}(s,\varsigma) = i\tilde{J}^b(s,\varsigma)$

证明: $[s\delta_{ab}I_{2s+1} + iS_{ab}(s,\varsigma)]\psi^{bc}(s,\varsigma) = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}^c(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow 2s\bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_b(s,\varsigma)\psi^{bc}(s,\varsigma) = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}^c(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow \mathbb{Z}_b(s,\varsigma)\psi^{bc}(s,\varsigma) = \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}\tilde{J}^c(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow (\sigma\otimes I_{2s}, -i\varsigma)_a\tilde{\psi}^{ab}(s,\varsigma) = i\tilde{J}^b(s,\varsigma)$ □

5.2 低一阶导数的$s=\frac{1}{2}$自旋方程：引力微子方程

自旋$s=\frac{1}{2}$情形，即**Weyl**型引力微子方程的矩阵形式:

推论5.2.1. $\varepsilon_{abcd}(\sigma,-i\varsigma)^d D^b\psi^c(\varsigma) = 0 \Leftrightarrow (\sigma,-i\varsigma)_a\psi^{ab}(\varsigma) = 0, \psi^{ab}(\varsigma) \equiv D^a\psi^b(\varsigma) - D^b\psi^a(\varsigma)$

推论5.2.2. $\varepsilon_{abcd}(\sigma,-i\varsigma)^d D^b\psi^c(\varsigma) = 0 \Leftrightarrow [\frac{1}{2}\delta_{ab} + iS_{ab}(\varsigma)]\psi^{bc}(\varsigma) = 0, \psi^{bc}(\varsigma) \equiv D^b\psi^c(\varsigma) - D^c\psi^b(\varsigma)$

5.3 低一阶导数的$s=1$自旋方程：Einstein方程

自旋$s=1$情形，即**Einstein**方程的矩阵形式:

推论5.3.1. $R^{ab} = -8\pi G(T^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}T) + \Lambda g^{ab} \Leftrightarrow (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)_a\mathcal{F}^{ab}(\varsigma) = i\bar{\mathcal{T}}^b$

推论5.3.2. $R^{ab} = -8\pi G(T^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}T) + \Lambda g^{ab} \Leftrightarrow (\sigma\otimes I, -i\varsigma)_a\tilde{\psi}^{ab}(1,\varsigma) = i\tilde{J}^b$
$\tilde{\psi}^{bc}(1,\varsigma) = S^+_{em}(\varsigma)\mathcal{F}^{bc}(\varsigma), \tilde{J}^c = S^+_{em}(\varsigma)\bar{\mathcal{T}}^c$

推论5.3.3. $R^{ab} = -8\pi G(T^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}T) + \Lambda g^{ab} \Leftrightarrow [\delta_{ab} + iS_{ab}(1,\varsigma)]\psi^{bc}(1,\varsigma) = -\sqrt{2}\varsigma\bar{Z}_a(1,\varsigma)\tilde{J}^c(1,\varsigma)$
$\psi^{bc}(1,\varsigma) = \bar{N}(1)S^+_{em}(\varsigma)\mathcal{F}^{bc}(\varsigma), \tilde{J}^c = S^+_{em}(\varsigma)\bar{\mathcal{T}}^c$

从上面推论通过表象变换可以直接得到如下推论，但也可以按如下方式证明。

推论5.3.4. $R^{ab} = -8\pi G(T^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}T) + \Lambda g^{ab} \Leftrightarrow [\delta_{ab} + iS_{ab}(\gamma,\varsigma)]F^{bc}(2,\varsigma) = -i\sigma^{[\beta_\varsigma]}_{\varsigma ab}\bar{T}^{bc}$

5.4 低一阶导数的$s-$自旋方程的各种等价形式

推论5.4.1. $[s\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)]\psi^{bc}(x;s)=\mathbb{J}_a{}^c \Leftrightarrow [s\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)]\Gamma(s)\psi^{bc}(x;s)=\Gamma(s)\mathbb{J}_a{}^c$
$\Leftrightarrow \{s\delta_{ab}+i[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\otimes I_{2s}+I\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma)]\}N(s)\psi^{bc}(x;s)=N(s)\mathbb{J}_a{}^c$

5.5 低一阶导数的开关型自旋方程新形式

定义5.5.1. *低一阶导数的开关型自旋方程:* $[(s+\phi)\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)]\psi^{bc}(s,\varsigma)=\mathbb{J}_a{}^c(s,\varsigma)$

推论5.5.1. $[(s+\phi)\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)]\psi^{bc}(s,\varsigma)=0 \Rightarrow (2s+1+\phi)Z_a(s,\varsigma)\psi^{ab}(s,\varsigma)=0$

证明: $[(s+\phi)\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)]\psi^{bc}(s,\varsigma)=0$
$\Leftrightarrow [s\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)]\psi^{bc}(s,\varsigma)=-\phi\psi_a{}^c(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow 2s\bar{Z}_a(s,\varsigma)Z_b(s,\varsigma)\psi^{bc}(s,\varsigma)=-\phi\psi_a{}^c(s,\varsigma)$
$\Rightarrow Z_b(s,\varsigma)\psi^{bc}(s,\varsigma)=\frac{-\phi}{2s+1}Z^a(s,\varsigma)\psi_a{}^c(s,\varsigma)$
$\Rightarrow (2s+1+\phi)Z_a(s,\varsigma)\psi^{ab}(s,\varsigma)=0$ □

推论5.5.2. $$[(s+\phi)\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)]\psi^{bc}(s,\varsigma)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\mathbb{Z}_a(s,\varsigma)\psi^{ab}(s,\varsigma)=0,\phi=0\\ \psi^{ab}(s,\varsigma)=\bar{Z}^a(s,\varsigma)\tilde{J}^b(s,\varsigma),\phi=-(2s+1)\\ \psi^{ab}(s,\varsigma)=0,\phi\neq 0,-(2s+1)\end{cases}$$

推论5.5.3. $$\begin{cases}[-(s+1)\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)]\psi^{bc}(s,\varsigma)=0\\ \psi^{ab}(s,\varsigma)+\psi^{ba}(s,\varsigma)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\psi^{ab}(s,\varsigma)=\bar{Z}^a(s,\varsigma)\tilde{J}^b(s,\varsigma)\\ \bar{Z}^a(s,\varsigma)\tilde{J}^b(s,\varsigma)+\bar{Z}^b(s,\varsigma)\tilde{J}^a(s,\varsigma)=0\end{cases}$$

5.6 低一阶导数的$s-$自旋开关型方程的各种等价形式

推论5.6.1. $[(s+\phi)\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)]\psi^{bc}(x;s)=\mathbb{J}_a{}^c \Leftrightarrow [(s+\phi)\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)]\Gamma(s)\psi^{bc}(x;s)=\Gamma(s)\mathbb{J}_a{}^c$
$\Leftrightarrow \{(s+\phi)\delta_{ab}+i[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\otimes I_{2s}+I\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma)]\}N(s)\psi^{bc}(x;s)=N(s)\mathbb{J}_a{}^c$

5.7 两种自旋方程的对比

低一阶导数的自旋方程:
$[s\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)]\psi^{bc}(s,\varsigma)=-\sqrt{2}\varsigma\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}^c(s,\varsigma) \Leftrightarrow (\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\tilde{\psi}^{ab}(s,\varsigma)=i\tilde{J}^b(s,\varsigma)$
自旋方程:
$[s\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)]D^b\psi(s,\varsigma)=-\sqrt{2}\varsigma\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma) \Leftrightarrow (\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_aD^a\tilde{\psi}(s,\varsigma)=i\tilde{J}(s,\varsigma)$

5.8 两种开关型自旋方程的对比

低一阶导数的开关型自旋方程:
$[(s+\phi)\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)]\psi^{bc}(s,\varsigma)=-\sqrt{2}\varsigma\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}^c(s,\varsigma)$
开关型自旋方程:
$[(s+\phi)\delta_{ab}+iS_{ab}(s,\varsigma)]D^b\psi(s,\varsigma)=-\sqrt{2}\varsigma\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$

5.9 猜测：一个新的物理方程

推论5.9.1. $Z_a(s,\varsigma)D^a\psi(s,\varsigma)-m^2\tilde{A}(s,\varsigma)=\tilde{J}(s,\varsigma),\psi(s,\varsigma)=\bar{Z}_a(s,\varsigma)D^a\tilde{A}(s,\varsigma)$

引入规范条件后的方程：

推论5.9.2. $Z_a(s,\varsigma)D^a\psi(s,\varsigma)-m^2\tilde{A}(s,\varsigma)=\tilde{J}(s,\varsigma),N(s)\psi(s,\varsigma)=(\sigma\otimes I_{2s},i\varsigma)_aD^a\tilde{A}(s,\varsigma)$

5.10 约束方程的显式表示

推论5.10.1. $O(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\begin{bmatrix}-1&0&1\end{bmatrix},i\begin{bmatrix}-1&0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&\sqrt{2}&0\end{bmatrix}\}$

推论5.10.2. $O(1)S_m^+(1)=\{\begin{bmatrix}i&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&i&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&i\end{bmatrix}\}$

推论5.10.3. $S_m(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 0 & -i \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -i\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, S_m^+(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \\ i & -1 & 0 \end{bmatrix}, S_m(1)S_m^+(1)=S_m^+(1)S_m(1)=I_3$

推论5.10.4. $[\gamma\cdot\nabla]\gamma\Psi=\nabla\Psi[\Leftrightarrow]O(1)S_m^+(1)\cdot\nabla\Psi=0[\Leftrightarrow]\nabla\cdot\Psi=0$

推论5.10.5. $O_x(s)=-\sqrt{s(s-\frac{1}{2})}[\bar{N}_{1_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{1_\varsigma}(s)-\bar{N}_{2_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{2_\varsigma}(s)]$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{2s\cdot(2s-1)} & 0 & \sqrt{2\cdot 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{(2s-1)\cdot(2s-2)} & 0 & \sqrt{3\cdot 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2\cdot 1} & 0 & \sqrt{2s\cdot(2s-1)} \end{bmatrix}$$

推论5.10.6. $O_y(s)=-i\sqrt{s(s-\frac{1}{2})}[\bar{N}_{1_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{1_\varsigma}(s)+\bar{N}_{2_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{2_\varsigma}(s)]$

$$=\frac{i}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{2s\cdot(2s-1)} & 0 & -\sqrt{2\cdot 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{(2s-1)\cdot(2s-2)} & 0 & -\sqrt{3\cdot 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2\cdot 1} & 0 & -\sqrt{2s\cdot(2s-1)} \end{bmatrix}$$

推论5.10.7. $O_z(s)=\sqrt{s(s-\frac{1}{2})}[\bar{N}_{1_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{2_\varsigma}(s)+\bar{N}_{2_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{1_\varsigma}(s)]$

$$=\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1\cdot(2s-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\cdot(2s-2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{(2s-1)\cdot 1} & 0 \end{bmatrix}, \bar{N}_{1_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{2_\varsigma}(s)=\bar{N}_{2_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{1_\varsigma}(s)$$

$$\sigma(s)=(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{2s} \\ 0 & 0 & 0 & A_{2s} & 0 \end{bmatrix}, \frac{i}{2}\begin{bmatrix} 0 & -A_1 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & -A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -A_{2s} \\ 0 & 0 & 0 & A_{2s} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(s-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s \end{bmatrix}) \tag{11.10a}$$

$$A_n=\sqrt{n}\cdot\sqrt{2s+1-n}, n=1,2,\cdots,2s; \sigma(s)\prec\sigma_{\alpha_\varsigma k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s)\simeq\sigma_{\alpha'_\varsigma}{}^{k'_\varsigma}{}_{l'_\varsigma}(s) \tag{11.10b}$$

$$\sigma(s)\times\sigma(s)=i\sigma(s), \sigma^2(s)=s(s+1), \sigma^+(s)=\sigma(s), s=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\cdots \tag{11.10c}$$

推论5.10.8.

$$O(s)\cdot\nabla=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{2s\cdot(2s-1)}(\partial_x+i\partial_y) & 2\sqrt{1\cdot(2s-1)}\partial_z & \sqrt{2\cdot 1}(\partial_x-i\partial_y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{(2s-1)\cdot(2s-2)}(\partial_x+i\partial_y) & 2\sqrt{2\cdot(2s-2)}\partial_z & \sqrt{3\cdot 2}(\partial_x-i\partial_y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2\cdot 1}(\partial_x+i\partial_y) & 2\sqrt{(2s-1)\cdot 1}\partial_z & \sqrt{2s\cdot(2s-1)}(\partial_x-i\partial_y) \end{bmatrix}$$

推论5.10.9. $\begin{cases} O^{\alpha_\varsigma}(s)=[e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1)}O^{\beta_\varsigma}(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)} \\ O^{+\alpha'_\varsigma}(s)=[e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha'_\varsigma}{}^{\beta'_\varsigma}e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}O^{+\beta'_\varsigma}(s)e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1)} \end{cases}$

引理5.10.1. $N(s)\bar{N}(s)+X(s)\bar{X}(s)=I_{4s}, Z_a(s,\varsigma):=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_aN(s), \bar{N}(s)\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}X(s)=\frac{1}{2s}O^+(s)$

推论5.10.10. $iO^+(s)\bar{X}(s)=-[\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)+i\sigma(s)\bar{N}(s,\varsigma)]$

证明: $iO^+(s)\bar{X}(s)$

$=is\bar{N}(s)\sigma\otimes I_{2s}X(s)\bar{X}(s)=is\bar{N}(s)\sigma\otimes I_{2s}[1-N(s)\bar{N}(s)]$

$=is\bar{N}(s)\sigma\otimes I_{2s}-i\sigma(s)\bar{N}(s,\varsigma)=-[\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)+i\sigma(s)\bar{N}(s,\varsigma)]$ □

6 $\sigma(s)$表述自旋方程

6.1 自旋方程的第一种等价形式

s-自旋矩阵： $$S_{ab}(s,\varsigma)=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\succ\begin{bmatrix} 0 & \sigma_z(s) & -\sigma_y(s) & -\varsigma\sigma_x(s) \\ -\sigma_z(s) & 0 & \sigma_x(s) & -\varsigma\sigma_y(s) \\ \sigma_y(s) & -\sigma_x(s) & 0 & -\varsigma\sigma_z(s) \\ \varsigma\sigma_x(s) & \varsigma\sigma_y(s) & \varsigma\sigma_z(s) & 0 \end{bmatrix} \tag{11.11}$$

定理6.1.1. $[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$

$\Leftrightarrow\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma), O(s)\cdot\nabla\psi(x)=is\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)$

证明: $[s\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x) = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow (\sigma \otimes I_{2s}, -i\varsigma)^a \partial_a \tilde{\psi}(s,\varsigma) = i\tilde{J}(s,\varsigma)$
(进行表象变换可得，利用了后面《高级表象变换技术》章节的证明。)
$\Leftrightarrow \sigma(s)\cdot\nabla\psi(x) - s\varsigma\partial_t\psi(x) = is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma), O(s)\cdot\nabla\psi(x) = is\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)$ □

6.2 自旋方程的第二种等价形式

推论6.2.1. $[s\delta_{ab} + iS_{ab}(s,\varsigma)]\partial^b\psi(s,\varsigma) = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma) \Leftrightarrow (\sigma \otimes I_{2s}, -i\varsigma)_a\partial^a\tilde{\psi}(s,\varsigma) = i\tilde{J}(s,\varsigma)$

性质6.2.1. $[\sigma(s), i\varsigma(s+1)]^a\bar{Z}_a(s,\varsigma) = 0, Z_a(s,\varsigma)[\sigma(s), -i\varsigma(s+1)]^a = 0$

引理6.2.1.

$$\begin{cases}[s\partial_x + i\sigma_z(s)\partial_y - i\sigma_y(s)\partial_z - i\varsigma\sigma_x(s)\partial_\pi]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_x(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ [s\partial_y + i\sigma_x(s)\partial_z - i\sigma_z(s)\partial_x - i\varsigma\sigma_y(s)\partial_\pi]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_y(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ [s\partial_z + i\sigma_y(s)\partial_x - i\sigma_x(s)\partial_y - i\varsigma\sigma_z(s)\partial_\pi]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_z(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$
$\Rightarrow [s\partial_\pi + i\varsigma\sigma_x(s)\partial_x + i\varsigma\sigma_y(s)\partial_y + i\varsigma\sigma_z(s)\partial_z]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_\pi(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$

证明:

$$\begin{cases}[s\partial_x + i\sigma_z(s)\partial_y - i\sigma_y(s)\partial_z - i\varsigma\sigma_x(s)\partial_\pi]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_x(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ [s\partial_y + i\sigma_x(s)\partial_z - i\sigma_z(s)\partial_x - i\varsigma\sigma_y(s)\partial_\pi]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_y(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ [s\partial_z + i\sigma_y(s)\partial_x - i\sigma_x(s)\partial_y - i\varsigma\sigma_z(s)\partial_\pi]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_z(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$
$\Rightarrow$
$$\begin{cases}[s\sigma_x(s)\partial_x + i\sigma_x(s)\sigma_z(s)\partial_y - i\sigma_x(s)\sigma_y(s)\partial_z - i\varsigma\sigma_x^2(s)\partial_\pi]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\sigma_x(s)\bar{Z}_x(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ [s\sigma_y(s)\partial_y + i\sigma_y(s)\sigma_x(s)\partial_z - i\sigma_y(s)\sigma_z(s)\partial_x - i\varsigma\sigma_y^2(s)\partial_\pi]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\sigma_y(s)\bar{Z}_y(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ [s\sigma_z(s)\partial_z + i\sigma_z(s)\sigma_y(s)\partial_x - i\sigma_z(s)\sigma_x(s)\partial_y - i\varsigma\sigma_z^2(s)\partial_\pi]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\sigma_z(s)\bar{Z}_z(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$
$\Rightarrow$
$[(s+1)\sigma_x(s)\partial_x + (s+1)\sigma_y(s)\partial_y + (s+1)\sigma_z(s)\partial_z - i\varsigma\sigma^2(s)\partial_\pi]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\sigma(s)\cdot\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow$
$[s\partial_\pi + i\varsigma\sigma_x(s)\partial_x + i\varsigma\sigma_y(s)\partial_y + i\varsigma\sigma_z(s)\partial_z]\psi = -\frac{is\sqrt{2}}{s+1}\sigma(s)\cdot\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma) = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_\pi(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$ □

定理6.2.1. $[s\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x) = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow s\nabla\psi(x) - [i\sigma(s)\times\nabla + \varsigma\sigma(s)\partial_t]\psi(x) = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow s\nabla\psi(x) - \{[\sigma(s)\cdot\nabla, \sigma(s)] + \varsigma\sigma(s)\partial_t\}\psi(x) = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$

证明: $[s\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x) = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$

$$\Leftrightarrow (s\partial_a + i\begin{bmatrix}0 & \sigma_z(s) & -\sigma_y(s) & -\varsigma\sigma_x(s)\\ -\sigma_z(s) & 0 & \sigma_x(s) & -\varsigma\sigma_y(s)\\ \sigma_y(s) & -\sigma_x(s) & 0 & -\varsigma\sigma_z(s)\\ \varsigma\sigma_x(s) & \varsigma\sigma_y(s) & \varsigma\sigma_z(s) & 0\end{bmatrix}_{ab}\partial^b)\psi(x) = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}[s\partial_x + i\sigma_z(s)\partial_y - i\sigma_y(s)\partial_z - i\varsigma\sigma_x(s)\partial_\pi]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_x(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ [s\partial_y + i\sigma_x(s)\partial_z - i\sigma_z(s)\partial_x - i\varsigma\sigma_y(s)\partial_\pi]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_y(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ [s\partial_z + i\sigma_y(s)\partial_x - i\sigma_x(s)\partial_y - i\varsigma\sigma_z(s)\partial_\pi]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_z(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ [s\partial_\pi + i\varsigma\sigma_x(s)\partial_x + i\varsigma\sigma_y(s)\partial_y + i\varsigma\sigma_z(s)\partial_z]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_\pi(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}[s\partial_x + i\sigma_z(s)\partial_y - i\sigma_y(s)\partial_z - i\varsigma\sigma_x(s)\partial_\pi]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_x(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ [s\partial_y + i\sigma_x(s)\partial_z - i\sigma_z(s)\partial_x - i\varsigma\sigma_y(s)\partial_\pi]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_y(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ [s\partial_z + i\sigma_y(s)\partial_x - i\sigma_x(s)\partial_y - i\varsigma\sigma_z(s)\partial_\pi]\psi = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_z(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$
$\Leftrightarrow s\nabla\psi(x) - [i\sigma(s)\times\nabla + \varsigma\sigma(s)\partial_t]\psi(x) = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow$ (利用了后面章节的公式：$i\sigma(s;w)\times\nabla = [\sigma(s;w)\cdot\nabla, \sigma(s;w)]$)
$s\nabla\psi(x) - \{[\sigma(s)\cdot\nabla, \sigma(s)] + \varsigma\sigma(s)\partial_t\}\psi(x) = -\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$ □

6.3 自旋方程的第三种等价形式

引理6.3.1. $s\nabla\psi(x)-\{[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\varsigma\sigma(s)\partial_t\}\psi(x)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Rightarrow\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=\frac{-s\sqrt{2}\varsigma}{s+1}\sigma(s)\cdot\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)=is\sqrt{2}\bar{Z}_\pi(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)=is\bar{N}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$

证明: $s\nabla\psi(x)-\{[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\varsigma\sigma(s)\partial_t\}\psi(x)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Rightarrow s\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-\sigma(s)\cdot\{[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\varsigma\sigma(s)\partial_t\}\}\psi(x)=-\sqrt{2}\varsigma s\sigma(s)\cdot\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow s\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-\{-\sigma^2(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]+\sigma(s)\cdot[\sigma(s)\cdot\nabla]\sigma(s)+\varsigma\sigma^2(s)\partial_t\}\psi(x)=-\sqrt{2}\varsigma s\sigma(s)\cdot\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$
利用后面章节的公式：$\sigma(s;w)\cdot\vec{p}=\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]-\sigma(s;w)\cdot[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]\sigma(s;w)$
$\Leftrightarrow(s+1)\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-\varsigma\sigma^2(s)\partial_t\psi(x)=-\sqrt{2}\varsigma s\sigma(s)\cdot\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=\frac{-s\sqrt{2}\varsigma}{s+1}\sigma(s)\cdot\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)=is\sqrt{2}\bar{Z}_\pi(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)=is\bar{N}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$ □

定理6.3.1. $s\nabla\psi(x)-\{[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\varsigma\sigma(s)\partial_t\}\psi(x)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ s^2\nabla\psi(x)-\{s[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi(x)=isO^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$

证明: $s\nabla\psi(x)-\{[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\varsigma\sigma(s)\partial_t\}\psi(x)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ s^2\nabla\psi(x)-\{s[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\varsigma s\sigma(s)\partial_t\}\psi(x)=-\sqrt{2}\varsigma s^2\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ s^2\nabla\psi(x)-\{s[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi(x)=-[\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)+i\sigma(s)\bar{N}(s,\varsigma)]s\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ s^2\nabla\psi(x)-\{s[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi(x)=isO^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$ □

6.4 自旋方程的第四种等价形式

定理6.4.1. $s\nabla\psi(x)-[i\sigma(s)\times\nabla+\varsigma\sigma(s)\partial_t]\psi(x)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ s^2\nabla\psi(x)-\{is\sigma(s)\times\nabla+\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi(x)=isO^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$

证明: $s\nabla\psi(x)-[i\sigma(s)\times\nabla+\varsigma\sigma(s)\partial_t]\psi(x)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$
$\Leftrightarrow s\nabla\psi(x)-\{[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\varsigma\sigma(s)\partial_t\}\psi(x)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ s\nabla\psi(x)-\{[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\varsigma\sigma(s)\partial_t\}\psi(x)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ s\nabla\psi(x)-[i\sigma(s)\times\nabla+\varsigma\sigma(s)\partial_t]\psi(x)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ s^2\nabla\psi(x)-\{is\sigma(s)\times\nabla+\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi(x)=-[\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)+i\bar{N}(s,\varsigma)]s\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ s^2\nabla\psi(x)-\{is\sigma(s)\times\nabla+\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi(x)=isO^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$ □

6.5 自旋方程的第五种等价形式

定义6.5.1. $D:=\begin{bmatrix}\sqrt{1(2s-1)}&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{2(2s-2)}&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{3(2s-3)}&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&0&\sqrt{(2s-1)1}\end{bmatrix},O_z^+(s)=\begin{bmatrix}0\\D\\0\end{bmatrix}$

引理6.5.1. $\{s^2\partial_z + s[\sigma_z(s), \sigma(s)\cdot\nabla] - \sigma_z(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi = isO_z^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma) \Leftrightarrow O(s)\cdot\nabla\psi = is\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)$

证明: $\{s^2\partial_z + s[\sigma_z(s), \sigma(s)\cdot\nabla] - \sigma_z(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi = isO_z^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma), A_n = \sqrt{n}\cdot\sqrt{2s+1-n}, n = 1, 2, \cdots, 2s;$

$\Leftrightarrow \{s^2\partial_z + is[\sigma_y(s)\partial_x - \sigma_x(s)\partial_y] - [\sigma_z^2(s)\partial_z + \sigma_z(s)\sigma_x(s)\partial_x + \sigma_z(s)\sigma_y(s)\partial_y]\}\psi = \frac{is}{2}O_z^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)$

$\Leftrightarrow \{[s^2 - \sigma_z^2(s)]\partial_z + [is\sigma_y(s) - \sigma_z(s)\sigma_x(s)]\partial_x - [is\sigma_x(s) + \sigma_z(s)\sigma_y(s)]\partial_y\}\psi = isO_z^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)$

$$\Leftrightarrow \{[s^2-\sigma_z^2(s)]\partial_z + [-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -sA_1 & 0 & 0 & 0 \\ sA_1 & 0 & -sA_2 & 0 & 0 \\ 0 & sA_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -sA_{2s} \\ 0 & 0 & 0 & sA_{2s} & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & sA_1 & 0 & 0 & 0 \\ (s-1)A_1 & 0 & (s-1)A_2 & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(s-1)A_{2s} \\ 0 & 0 & 0 & -sA_{2s} & 0 \end{bmatrix}]\partial_x$$

$$-[\frac{i}{2}\begin{bmatrix} 0 & sA_1 & 0 & 0 & 0 \\ sA_1 & 0 & sA_2 & 0 & 0 \\ 0 & sA_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & sA_{2s} \\ 0 & 0 & 0 & sA_{2s} & 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{2}\begin{bmatrix} 0 & -sA_1 & 0 & 0 & 0 \\ (s-1)A_1 & 0 & -(s-1)A_2 & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (s-1)A_{2s} \\ 0 & 0 & 0 & -sA_{2s} & 0 \end{bmatrix}]\partial_y\}\psi = isO_z^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)$$

$\Leftrightarrow$

$$\{[s^2 - \begin{bmatrix} s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (s-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^2 \end{bmatrix}]\partial_z - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -0A_1 & 0 & 0 & 0 \\ (2s-1)A_1 & 0 & -1A_2 & 0 & 0 \\ 0 & (2s-2)A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(2s-1)A_{2s} \\ 0 & 0 & 0 & 0A_{2s} & 0 \end{bmatrix}\partial_x - \frac{i}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0A_1 & 0 & 0 & 0 \\ (2s-1)A_1 & 0 & 1A_2 & 0 & 0 \\ 0 & (2s-2)A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (2s-1)A_{2s} \\ 0 & 0 & 0 & 0A_{2s} & 0 \end{bmatrix}\partial_y\}\psi$$

$$= is\begin{bmatrix} 0 \\ D \\ 0 \end{bmatrix}\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)$$

$\Leftrightarrow$

$$\{\begin{bmatrix} 0(2s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1(2s-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(2s-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1(2s-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0(2s) \end{bmatrix}\partial_z - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -0A_1 & 0 & 0 & 0 \\ (2s-1)A_1 & 0 & -1A_2 & 0 & 0 \\ 0 & (2s-2)A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(2s-1)A_{2s} \\ 0 & 0 & 0 & 0A_{2s} & 0 \end{bmatrix}\partial_x - \frac{i}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0A_1 & 0 & 0 & 0 \\ (2s-1)A_1 & 0 & 1A_2 & 0 & 0 \\ 0 & (2s-2)A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (2s-1)A_{2s} \\ 0 & 0 & 0 & 0A_{2s} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= isO_z^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 0(2s)2\partial_z & 0A_1(\partial_x - i\partial_y) & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ -(2s-1)A_1(\partial_x+i\partial_y) & 1(2s-1)2\partial_z & 1A_2(\partial_x-i\partial_y) & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -(2s-2)A_2(\partial_x+i\partial_y) & 2(2s-2)2\partial_z & 2A_3(\partial_x-i\partial_y) & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -(2s-3)A_3(\partial_x+i\partial_y) & 3(2s-3)2\partial_z & 3A_4(\partial_x-i\partial_y) & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -(1)A_{2s-1}(\partial_x+i\partial_y) & 1(2s-1)2\partial_z & (2s-1)A_{2s}(\partial_x-i\partial_y) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0A_{2s}(\partial_x+i\partial_y) & 0(2s)2\partial_z & \end{bmatrix}\psi = 2isD\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)$$

$\Leftrightarrow$

$$D\begin{bmatrix} -\sqrt{(2s-1)(2s)}(\partial_x+i\partial_y) & 2\sqrt{1(2s-1)}\partial_z & \sqrt{1\cdot 2}(\partial_x-i\partial_y) & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -\sqrt{(2s-1)(2s-2)}(\partial_x+i\partial_y) & 2\sqrt{2(2s-2)}\partial_z & \sqrt{2\cdot 3}(\partial_x-i\partial_y) & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -\sqrt{(2s-2)(2s-3)}(\partial_x+i\partial_y) & 2\sqrt{3(2s-3)}\partial_z & \sqrt{3\cdot 4}(\partial_x-i\partial_y) & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{1\cdot 2}(\partial_x+i\partial_y) & 2\sqrt{(2s-1)1}\partial_z & \sqrt{(2s-1)(2s)}(\partial_x-i\partial_y) & \end{bmatrix}\psi$$

$$= 2isD\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{(2s-1)(2s)}(\partial_x+i\partial_y) & 2\sqrt{1(2s-1)}\partial_z & \sqrt{1\cdot 2}(\partial_x-i\partial_y) & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -\sqrt{(2s-1)(2s-2)}(\partial_x+i\partial_y) & 2\sqrt{2(2s-2)}\partial_z & \sqrt{2\cdot 3}(\partial_x-i\partial_y) & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -\sqrt{(2s-2)(2s-3)}(\partial_x+i\partial_y) & 2\sqrt{3(2s-3)}\partial_z & \sqrt{3\cdot 4}(\partial_x-i\partial_y) & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{1\cdot 2}(\partial_x+i\partial_y) & 2\sqrt{(2s-1)1}\partial_z & \sqrt{(2s-1)(2s)}(\partial_x-i\partial_y) & \end{bmatrix}\psi$$

$= 2is\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma) \Leftrightarrow O(s)\cdot\nabla\psi = is\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)$ □

推论6.5.1.

$$\begin{cases} \sigma(s)\cdot\nabla\psi(x) - s\varsigma\partial_t\psi(x) = is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma) \\ O(s)\cdot\nabla\psi(x) = is\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma(s)\cdot\nabla\psi(x) - s\varsigma\partial_t\psi(x) = is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma) \\ \{s^2\partial_z + s[\sigma_z(s), \sigma(s)\cdot\nabla] - \sigma_z(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi = isO_z^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma) \end{cases}$$

6.6 自旋方程的第六种等价形式

推论6.6.1. $S_c(s) = e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_y(s)}e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_z(s)}, S_c^+(s) = e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_z(s)}e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_y(s)}$

推论6.6.2. $S_c^+(s)[\sigma_x(s), \sigma_y(s), \sigma_z(s)]S_c(s) = [\sigma_z(s), \sigma_x(s), \sigma_y(s)]$

推论6.6.3. $e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma} = 1 + sin\omega\begin{bmatrix} 0 & \hat{\omega}_z & -\hat{\omega}_y \\ -\hat{\omega}_z & 0 & \hat{\omega}_x \\ \hat{\omega}_y & -\hat{\omega}_x & 0 \end{bmatrix} + (1 - cos\omega)\begin{bmatrix} \hat{\omega}_x^2-1 & \hat{\omega}_x\hat{\omega}_y & \hat{\omega}_x\hat{\omega}_z \\ \hat{\omega}_y\hat{\omega}_x & \hat{\omega}_y^2-1 & \hat{\omega}_y\hat{\omega}_z \\ \hat{\omega}_z\hat{\omega}_x & \hat{\omega}_z\hat{\omega}_y & \hat{\omega}_z^2-1 \end{bmatrix}$

引理6.6.1. $\nabla = [e^{-i\frac{\pi}{2}\gamma_y(s)}e^{-i\frac{\pi}{2}\gamma_z(s)}]\nabla' = \begin{bmatrix} \partial_{z'} \\ \partial_{x'} \\ \partial_{y'} \end{bmatrix}$

证明: $\nabla=[e^{-i\frac{\pi}{2}\gamma_y(s)}e^{-i\frac{\pi}{2}\gamma_z(s)}]\nabla'$
$=\begin{bmatrix}\cos(-\frac{\pi}{2}) & 0 & -\sin(-\frac{\pi}{2})\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(-\frac{\pi}{2}) & 0 & \cos(-\frac{\pi}{2})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(-\frac{\pi}{2}) & \sin(-\frac{\pi}{2}) & 0\\ -\sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\nabla'$
$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\nabla'=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\nabla'=\begin{bmatrix}\partial_{z'}\\ \partial_{x'}\\ \partial_{y'}\end{bmatrix}$ □

引理6.6.2. $\sigma_{x'}=\sigma_x,\sigma_{y'}=\sigma_y,\sigma_{z'}=\sigma_z$

引理6.6.3. $S_c^+(s)\sigma(s)S_c(s)\cdot\nabla=\sigma(s)\cdot\nabla',\nabla'=[e^{i\frac{\pi}{2}\gamma_z(s)}e^{i\frac{\pi}{2}\gamma_y(s)}]\nabla$

引理6.6.4.
$$\begin{cases}S_c^+(s)\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)=\bar{N}(s)\tilde{J}'(s,\varsigma),e^{i\frac{\pi}{2}[\sigma_y(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma_y(s-\frac{1}{2})]}\tilde{J}(s,\varsigma)\\ S_c^+(s)O_z^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)=O_y^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}'(s,\varsigma),\tilde{J}'(s,\varsigma)=e^{i\frac{\pi}{2}[\sigma_z(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma_z(s-\frac{1}{2})]}e^{i\frac{\pi}{2}[\sigma_y(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma_y(s-\frac{1}{2})]}\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$

定理6.6.1.
$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \{s^2\partial_z+s[\sigma_z(s),\sigma(s)\cdot\nabla]-\sigma_z(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi=isO_z^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \{s^2\partial_y+s[\sigma_y(s),\sigma(s)\cdot\nabla]-\sigma_y(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi=isO_y^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$

证明:
$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \{s^2\partial_z+s[\sigma_z(s),\sigma(s)\cdot\nabla]-\sigma_z(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi=isO_z^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}S_c^+(s)\sigma(s)S_c(s)\cdot\nabla S_c^+(s)\psi(x)-s\varsigma\partial_t S_c^+(s)\psi(x)=isS_c^+(s)\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \{s^2\partial_z+s[S_c^+(s)\sigma_z(s)S_c(s),S_c^+(s)\sigma(s)S_c(s)\cdot\nabla]-S_c^+(s)\sigma_z(s)S_c(s)[S_c^+(s)\sigma(s)S_c(s)\cdot\nabla]\}S_c^+(s)\psi(x)\\ =isS_c^+(s)O_z^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla'\psi'(x')-s\varsigma\partial_t\psi'(x')=isS_c^+(s)\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \{s^2\partial_{y'}+s[\sigma_{y'}(s),\sigma(s)\cdot\nabla']-\sigma_{y'}(s)[\sigma(s)\cdot\nabla']\}\psi'(x')=isS_c^+(s)O_z^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \nabla'=[e^{i\frac{\pi}{2}\gamma_z(s)}e^{i\frac{\pi}{2}\gamma_y(s)}]\nabla,\psi'(x')=S_c^+(s)\psi(x)\end{cases}$$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla'\psi'(x')-s\varsigma\partial_t\psi'(x')=is\bar{N}(s)\tilde{J}'(s,\varsigma)\\ \{s^2\partial_{y'}+s[\sigma_{y'}(s),\sigma(s)\cdot\nabla']-\sigma_{y'}(s)[\sigma(s)\cdot\nabla']\}\psi'(x')=isO_{y'}^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}'(s,\varsigma)\\ \nabla'=[e^{i\frac{\pi}{2}\gamma_z(s)}e^{i\frac{\pi}{2}\gamma_y(s)}]\nabla,\psi'(x')=S_c^+(s)\psi(x),\tilde{J}'(s,\varsigma)=e^{i\frac{\pi}{2}[\sigma_z(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma_z(s-\frac{1}{2})]}e^{i\frac{\pi}{2}[\sigma_y(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma_y(s-\frac{1}{2})]}\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$ □

证明:
$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \{s^2\partial_z+s[\sigma_z(s),\sigma(s)\cdot\nabla]-\sigma_z(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi=isO_z^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla'\psi'(x')-s\varsigma\partial_t\psi'(x')=is\bar{N}(s)\tilde{J}'(s,\varsigma)\\ O(s)\cdot\nabla'\psi'(x')=is\bar{X}(s)\tilde{J}'(s,\varsigma)\end{cases}$$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla'\psi'(x')-s\varsigma\partial_t\psi'(x')=is\bar{N}(s)\tilde{J}'(s,\varsigma)\\ \{s^2\partial_{z'}+s[\sigma_{z'}(s),\sigma(s)\cdot\nabla']-\sigma_{z'}(s)[\sigma(s)\cdot\nabla']\}\psi'(x')=isO_{z'}^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}'(s,\varsigma)\end{cases}$$ □

6.7 自旋方程的第六种等价形式汇总

上节定理利用空间旋转协变性和多个常数不变张量进行了严格的证明，给出其中一个命题的证明，其它情形也可类似证明，不再详述，结论汇总如下：

定理6.7.1.

$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \{s^2\partial_x+s[\sigma_x(s),\sigma(s)\cdot\nabla]-\sigma_x(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi=isO_x^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \{s^2\partial_y+s[\sigma_y(s),\sigma(s)\cdot\nabla]-\sigma_y(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi=isO_y^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \{s^2\partial_z+s[\sigma_z(s),\sigma(s)\cdot\nabla]-\sigma_z(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi=isO_z^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)-s\varsigma\partial_t\psi(x)=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ O(s)\cdot\nabla\psi(x)=is\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$

6.8 自旋方程的多种等价形式小结

定理6.8.1.

$$[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)\quad[\Leftrightarrow]\quad\{s\nabla+[\sigma(s),\sigma(s)\cdot\nabla]-\varsigma\sigma(s)\partial_t\}\psi=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)$$
$$[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]$$
$$[s\nabla-i\sigma(s)\times\nabla-\varsigma\sigma(s)\partial_t]\psi=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}(s,\varsigma)\tilde{J}(s,\varsigma)[\Leftrightarrow]\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi-s\varsigma\partial_t\psi=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \{s^2\nabla-is\sigma(s)\times\nabla-\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi=isO^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$
$$[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]$$
$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi-s\varsigma\partial_t\psi=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \{s^2\nabla+s[\sigma(s),\sigma(s)\cdot\nabla]-\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi=isO^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}\quad[\Leftrightarrow](\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\psi=i\tilde{J}(s,\varsigma)$$
$$[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]$$
$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi-s\varsigma\partial_t\psi=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \{s^2\partial_x+s[\sigma_x(s),\sigma(s)\cdot\nabla]-\sigma_x(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi=isO_x^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}\quad[\Leftrightarrow]\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi-s\varsigma\partial_t\psi=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ O(s)\cdot\nabla\psi=is\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$
$$[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]$$
$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi-s\varsigma\partial_t\psi=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \{s^2\partial_y+s[\sigma_y(s),\sigma(s)\cdot\nabla]-\sigma_y(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi=isO_y^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}\quad[\Leftrightarrow]\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi-s\varsigma\partial_t\psi=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ O(s)\cdot\nabla\psi=is\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$
$$[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]$$
$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi-s\varsigma\partial_t\psi=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \{s^2\partial_z+s[\sigma_z(s),\sigma(s)\cdot\nabla]-\sigma_z(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi=isO_z^+(s)\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}\quad[\Leftrightarrow]\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi-s\varsigma\partial_t\psi=is\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ O(s)\cdot\nabla\psi=is\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$$

6.9 电磁场方程的另一种等价形式

第一种定义，本章采用第一种定义。

定义6.9.1. 电磁场复矢量第一种定义$\psi_{\alpha_\varsigma}:=\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}=i\varsigma(E-i\varsigma B)_{\alpha_\varsigma}=(i\varsigma E+B)_{\alpha_\varsigma}$

定理6.9.1. $i\varsigma\gamma\partial_t\psi(x)=(i\nabla+\gamma\times\nabla)\psi(x)+\sigma_{-\varsigma}J, J=J_e-i\varsigma J_m$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma\partial_t\vec{E}=-(i\nabla+\gamma\times\nabla)\vec{B}-\sigma_{-\varsigma}J_e\\ \gamma\partial_t\vec{B}=(i\nabla+\gamma\times\nabla)\vec{E}+\varsigma\sigma_{-\varsigma}J_m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=\rho_e,\nabla\times\vec{E}=-\vec{J}_m-\partial_t\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B}=\rho_m,\nabla\times\vec{B}=\vec{J}_e+\partial_t\vec{E}\end{cases}$$

证明: $i\varsigma\gamma\partial_t\psi(x)=(i\nabla+\gamma\times\nabla)\psi(x)+\sigma_{-\varsigma}J$

$\Leftrightarrow i\varsigma\gamma\partial_t(\vec{E}-i\varsigma\vec{B})=(i\nabla+\gamma\times\nabla)(\vec{E}-i\varsigma\vec{B})-i\varsigma\sigma_{-\varsigma}J$

$\Leftrightarrow i\varsigma\gamma\partial_t\vec{E}+\gamma\partial_t\vec{B}=(i\nabla+\gamma\times\nabla)\vec{E}-i\varsigma(i\nabla+\gamma\times\nabla)\vec{B}-i\varsigma\sigma_{-\varsigma}J_e+\varsigma\sigma_{-\varsigma}J_m$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma\partial_t\vec{E}=-(i\nabla+\gamma\times\nabla)\vec{B}-\sigma_{-\varsigma}J_e\\ \gamma\partial_t\vec{B}=(i\nabla+\gamma\times\nabla)\vec{E}+\varsigma\sigma_{-\varsigma}J_m\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=\rho_e,\nabla\times\vec{E}=-\vec{J}_m-\partial_t\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B}=\rho_m,\nabla\times\vec{B}=\vec{J}_e+\partial_t\vec{E}\end{cases}$$ □

7 $\sigma(s)$表述无源自旋方程

7.1 无源自旋方程的多种等价形式小结

定理7.1.1.

$[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x)=0$ $[\Leftrightarrow]$ $(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^a N(s)\psi(x)=0$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

$s\nabla\psi(x)=[i\sigma(s)\times\nabla+\varsigma\sigma(s)\partial_t]\psi(x)$ $[\Leftrightarrow]$ $\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)=s\varsigma\partial_t\psi(x)\\ s^2\nabla\psi(x)=is\sigma(s)\times\nabla+\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(x)\end{cases}$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

$s\nabla\psi(x)=\{[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\varsigma\sigma(s)\partial_t\}\psi(x)[\Leftrightarrow]$ $\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)=s\varsigma\partial_t\psi(x)\\ s^2\nabla\psi(x)=\{s[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi(x)\end{cases}$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)=s\varsigma\partial_t\psi(x)\\ \{s^2\partial_x+s[\sigma_x(s),\sigma(s)\cdot\nabla]-\sigma_x(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi(x)=0\end{cases}$ $[\Leftrightarrow]$ $\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)=s\varsigma\partial_t\psi(x)\\ \{s^2\partial_y+s[\sigma_y(s),\sigma(s)\cdot\nabla]-\sigma_y(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi(x)=0\end{cases}$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)=s\varsigma\partial_t\psi(x)\\ \{s^2\partial_z+s[\sigma_z(s),\sigma(s)\cdot\nabla]-\sigma_z(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi(x)=0\end{cases}$ $[\Leftrightarrow]\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x)=s\varsigma\partial_t\psi(x),O(s)\cdot\nabla\psi(x)=0$

7.2 无源自旋方程的一些特殊性质

引理7.2.1. $s\nabla\psi(\vec{r},t)=[i\sigma(s)\times\nabla+\varsigma\sigma(s)\partial_t]\psi(\vec{r},t)\Rightarrow[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)=\varsigma\partial_t\psi(\vec{r},t)$

证明: $s\nabla\psi(\vec{r},t)=[i\sigma(s)\times\nabla+\varsigma\sigma(s)\partial_t]\psi(\vec{r},t)$

$\Rightarrow s\sigma(s)\cdot\nabla\psi(\vec{r},t)=\sigma(s)\cdot[i\sigma(s)\times\nabla+\varsigma\sigma(s)\partial_t]\psi(\vec{r},t)$

$\Leftrightarrow s[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)=-[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)+\varsigma\sigma^2(s)\partial_t\psi(\vec{r},t)$

$\Leftrightarrow (s+1)[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)=\varsigma s(s+1)\partial_t\psi(\vec{r},t)$

$\Leftrightarrow [\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)=\varsigma\partial_t\psi(\vec{r},t)$ □

引理7.2.2. $s\nabla\psi(\vec{r},t)=[\sigma(s)\cdot\nabla-\varsigma(s-1)\partial_t]\sigma(s)\psi(\vec{r},t)\overset{s\neq1}{\Rightarrow}[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)=\varsigma\partial_t\psi(\vec{r},t)$

证明: $s\nabla\psi(\vec{r},t)=[\sigma(s)\cdot\nabla-\varsigma(s-1)\partial_t]\sigma(s)\psi(\vec{r},t)$

$\Rightarrow s\sigma(s)\cdot\nabla\psi(\vec{r},t)=\sigma(s)\cdot[\sigma(s)\cdot\nabla-\varsigma(s-1)\partial_t]\sigma(s)\psi(\vec{r},t)$

$\Leftrightarrow s[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)=\sigma(s)\cdot[\sigma(s)\cdot\nabla]\sigma(s)\psi(\vec{r},t)-\varsigma(s-1)\sigma^2(s)\partial_t\psi(\vec{r},t)$

$\Leftrightarrow s[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)=[\sigma^2(s)-1][\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)-\varsigma(s-1)\sigma^2(s)\partial_t\psi(\vec{r},t)$

$\Leftrightarrow (s+1)[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)=\sigma^2(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)-\varsigma(s-1)\sigma^2(s)\partial_t\psi(\vec{r},t)$

$\Leftrightarrow (s-1)[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)=\varsigma(s-1)s\partial_t\psi(\vec{r},t)$

$\overset{s\neq1}{\Leftarrow\Rightarrow}[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)=\varsigma\partial_t\psi(\vec{r},t)$ □

推论7.2.1. $\begin{cases}s\nabla\psi(\vec{r},t)=\{[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\varsigma\sigma(s)\partial_t\}\psi(\vec{r},t)\overset{s\neq1}{\Leftrightarrow}s\nabla\psi(\vec{r},t)=[\sigma(s)\cdot\nabla-\varsigma(s-1)\partial_t]\sigma(s)\psi(\vec{r},t)\\ s\nabla\psi(\vec{r},t)=\{[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\varsigma\sigma(s)\partial_t\}\psi(\vec{r},t)\overset{s=1}{\Rightarrow}s\nabla\psi(\vec{r},t)=[\sigma(s)\cdot\nabla]\sigma(s)\psi(\vec{r},t)\end{cases}$

推论7.2.2. $\nabla\psi(\vec{r},t)=\{[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\varsigma\sigma(s)\partial_t\}\psi(\vec{r},t)\overset{s=1}{\Rightarrow}\begin{cases}\nabla\psi(\vec{r},t)=[\sigma(s)\cdot\nabla]\sigma(s)\psi(\vec{r},t)\\ [\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)=\varsigma\partial_t\psi(\vec{r},t)\end{cases}$

推论7.2.3. $[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{n-1}\hat{\nabla}\psi(\vec{r},t),s=1$

引理7.2.3. $\begin{cases} s^2\nabla\psi(\vec{r},t)=\{is\sigma(s)\times\nabla+\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi(\vec{r},t)\Rightarrow\nabla^2\psi(\vec{r},t)=[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\nabla]^2\psi(\vec{r},t) \\ \Updownarrow \\ s^2\nabla\psi(\vec{r},t)=\{s[\sigma(s)\cdot\nabla,\sigma(s)]+\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi(\vec{r},t)\Rightarrow\nabla^2\psi(\vec{r},t)=[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\nabla]^2\psi(\vec{r},t) \end{cases}$

7.3 自旋方程简单分析

定理7.3.1.

$$\begin{cases} s\nabla\psi(x)=[i\sigma(s)\times\nabla+\varsigma\sigma(s)\partial_t]\psi(x) \\ \nabla\psi(x)=(i\sigma\times\nabla+\varsigma\sigma\partial_t)\psi(x) \\ \nabla\psi(x)=(i\gamma\times\nabla+\varsigma\gamma\partial_t)\psi(x)+i\sigma_{-\varsigma}J \end{cases} \quad \begin{cases} i\varsigma\sigma(s)\partial_t\psi(x)=[is\nabla+\sigma(s)\times\nabla]\psi(x) \\ i\varsigma\sigma\partial_t\psi(x)=(i\nabla+\sigma\times\nabla)\psi(x) \\ i\varsigma\gamma\partial_t\psi(x)=(i\nabla+\gamma\times\nabla)\psi(x)+\sigma_{-\varsigma}J \end{cases}$$

7.4 整自旋方程的电磁表象形式

定理7.4.1. $\psi(x;n):=i\varsigma E(n)+B(n),\gamma(n)$是纯虚$n$-自旋矩阵。

$$i\varsigma\gamma(n)\partial_t\psi(x;n)=[i\nabla+\gamma(n)\times\nabla]\psi(x;n)\Leftrightarrow\begin{cases} \gamma(n)\partial_t E(n)=-[i\nabla+\gamma(n)\times\nabla]B(n) \\ \gamma(n)\partial_t B(n)=[i\nabla+\gamma(n)\times\nabla]E(n) \end{cases}$$

7.5 自旋方程的重要推论

定理7.5.1. $[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(\vec{r},t)=0[\Leftrightarrow]\begin{cases} [\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)=\varsigma\partial_t\psi(\vec{r},t) \\ [\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=[s\hat{\nabla}+\varsigma(s-1)\hat{\partial}_t\sigma(s)]\psi(\vec{r},t) \\ \hat{\nabla}:=\frac{-i\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}},\hat{\nabla}^2=1,\hat{\partial}_t:=\frac{-i\partial_t}{\sqrt{-\nabla^2}}\simeq-1 \end{cases}$

$$[\Leftrightarrow]\begin{cases} [\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=\{s[s^n-(s-1)^n](\varsigma\hat{\partial}_t)^{n-1}\hat{\nabla}+(s-1)^n(\varsigma\hat{\partial}_t)^n\sigma(s)\}\psi(\vec{r},t) \\ [\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=\{s[s^n-(s-1)^n][\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{n-1}\hat{\nabla}+(s-1)^n\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\}\psi(\vec{r},t) \\ [\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\nabla]^n\psi(\vec{r},t)=\varsigma^n\partial_t^n\psi(\vec{r},t),\nabla^{2n}\psi(\vec{r},t)=[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\nabla]^{2n}\psi(\vec{r},t)=\partial_t^{2n}\psi(\vec{r},t),n\geq1 \end{cases}$$

证明:

$[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=[e_1\hat{\nabla}+d_1\sigma(s)]\psi(\vec{r},t),e_1=s,d_1=\varsigma(s-1)\hat{\partial}_t$

..

$[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{n-1}\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=[e_{n-1}\hat{\nabla}+d_{n-1}\sigma(s)]\psi(\vec{r},t)$

$[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=[e_n\hat{\nabla}+d_n\sigma(s)]\psi(\vec{r},t)$

..

$[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma(s)\psi(\vec{r},t)$

$=[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}][e_{n-1}\hat{p}+d_{n-1}\sigma(s)]\psi(\vec{r},t)=[(-s\varsigma e_{n-1}+d_1^{n-1}e_1)\hat{\nabla}+d_{n-1}d_1\sigma(s)]\psi(\vec{r},t)$

$$\begin{cases} e_n=e_{n-1}s\varsigma\hat{\partial}_t+e_1d_1^{n-1} \\ d_n=d_{n-1}d_1 \\ e_1=s,d_1=\varsigma(s-1)\hat{\partial}_t \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} e_n=s[s^n-(s-1)^n](\varsigma\hat{\partial}_t)^{n-1} \\ d_n=d_1^n=(s-1)^n(\varsigma\hat{\partial}_t)^n \end{cases}$$

$[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=\{s[s^n-(s-1)^n](\varsigma\hat{\partial}_t)^{n-1}\hat{\nabla}+(s-1)^n(\varsigma\hat{\partial}_t)^n\sigma(s)\}\psi(\vec{r},t)$

$[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=\{s[s^n-(s-1)^n][\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{n-1}\hat{\nabla}+(s-1)^n\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\}\psi(\vec{r},t),n\geq1$ □

推论7.5.1. $[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(\vec{r},t)=0$

$$[\Rightarrow]\begin{cases} \sigma^\alpha(s)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma_\alpha(s)\psi=s[s^{n+1}+(s-1)^n](\varsigma\hat{\partial}_t)^n(\vec{r},t) \\ \sigma^\alpha(s)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma_\alpha(s)\psi(\vec{r},t)=s[s^{n+1}+(s-1)^n][\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\psi(\vec{r},t) \end{cases}$$

定理7.5.2. $[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=\{s\hat{\nabla}+(s-1)\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\}\psi(\vec{r},t)$

$$[\Leftrightarrow]\begin{cases} [\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=\{s[s^n-(s-1)^n][\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{n-1}\hat{\nabla}+(s-1)^n\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\}\psi(\vec{r},t) \\ [\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{2n}\psi(\vec{r},t)=\psi(\vec{r},t),n\geq1 \end{cases}$$

证明:

$[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=[e_1\hat{\nabla}+d_1\sigma(s)]\psi(\vec{r},t),e_1=s,d_1=(s-1)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]$

. .

$[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{n-1}\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=[e_{n-1}\hat{\nabla}+d_{n-1}\sigma(s)]\psi(\vec{r},t)$

$[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{n}\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=[e_{n}\hat{\nabla}+d_{n}\sigma(s)]\psi(\vec{r},t)$

. .

$[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{n}\sigma(s)\psi(\vec{r},t)$

$=[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}][e_{n-1}\hat{p}+d_{n-1}\sigma(s)]\psi(\vec{r},t)=[(e_{n-1}s[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]+e_1d_1^{n-1})\hat{\nabla}+d_{n-1}d_1\sigma(s)]\psi(\vec{r},t)$

$$\begin{cases}e_n=e_{n-1}s[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]+e_1d_1^{n-1}\\ d_n=d_{n-1}d_1\\ e_1=s,d_1=(s-1)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e_n=s[s^n-(s-1)^n][\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{n-1}\\ d_n=d_1^n=(s-1)^n[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\end{cases}$$

$[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{n}\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=\{s[s^n-(s-1)^n][\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{n-1}\hat{\nabla}+(s-1)^n\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\}\psi(\vec{r},t),n\geq 1$ □

推论7.5.2. $[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=\{s\hat{\nabla}+(s-1)\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\}\psi(\vec{r},t)$

$[\Rightarrow]\sigma^{\alpha}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma_{\alpha}(s)\psi(\vec{r},t)=s[s^{n+1}+(s-1)^n][\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\psi(\vec{r},t),n\geq 1$

推论7.5.3. $[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=\{s\hat{\nabla}+(s-1)\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\}\psi(\vec{r},t)$

$$[\Rightarrow]\begin{cases}\sigma(s)\times\{[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\sigma(s)\}\psi(\vec{r},t)=i\{-s^2[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\sigma(s)+(s^2+s-1)\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\}\psi(\vec{r},t)\\ \sigma(s)\cdot\{\sigma(s)\times\{[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\sigma(s)\}\}\psi(\vec{r},t)=i[s^2+s-1][\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\psi(\vec{r},t)\end{cases}$$

推论7.5.4. $[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\sigma(s)\psi(\vec{r},t)=\{s\hat{\nabla}+(s-1)\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\}\psi(\vec{r},t)$

$$[\Rightarrow]\begin{cases}\sigma(s)\times\{[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma(s)\}\psi(\vec{r},t)\\ =i\{-s^2[s^n-(s-1)^n][\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{n-1}+[s^{n+2}-(s+1)(s-1)^{n+1}]\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\}\psi(\vec{r},t)\\ \sigma(s)\cdot\{\sigma(s)\times\{[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma(s)\}\}\psi(\vec{r},t)=is[s^{n+1}+(s-1)^n][\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\psi(\vec{r},t),n\geq 1\end{cases}$$

第十二章　Penrose方程和扭量方程

自我评述：本章对Penrose方程进行了全面深入的分析，指出Penrose旋量方程等价于自旋方程，适合描写无质量粒子，并发现Penrose扭量方程就是开关型自旋方程的一个特殊解。

1 任意自旋全对称Penrose方程 [1,2]的重新表述

1.1 任意自旋全对称Penrose方程的整旋量等价形式

定理1.1.1.

$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n}Z_\varsigma}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}Z_\varsigma}\\ \psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n}Z_\varsigma}=\frac{1}{(2n)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2n}Z_\varsigma}\\ J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}Z_\varsigma}=\frac{1}{(2n-1)!}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}Z_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}D^a\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}Z_\varsigma}=iJ_{\underbrace{b\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\cdots}_{n}Z_\varsigma}\\ \psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}Z_\varsigma}=\frac{1}{n!}\psi_{\underbrace{(\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots)}_{n}Z_\varsigma}\\ J_{\underbrace{b\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\cdots}_{n}Z_\varsigma}=\frac{1}{(n-1)!}J_{\underbrace{b(\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\cdots)}_{n}Z_\varsigma}\\ \delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}Z_\varsigma}=0,(\sigma,-i\varsigma)^a\sigma^{\alpha_\varsigma}J_{\underbrace{a\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}Z_\varsigma}=0\\ \sigma^{\alpha_\varsigma}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}[Z_\varsigma]}=0,(\sigma,-i\varsigma)^aJ_{\underbrace{a\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}[Z_\varsigma]}=0\end{cases}$$

定理1.1.2.

$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n}Z_\varsigma}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}Z_\varsigma}\\ \psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n}Z_\varsigma}=\frac{1}{(2n)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2n}Z_\varsigma}\\ J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}Z_\varsigma}=\frac{1}{(2n-1)!}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}Z_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\Psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}Z_\varsigma}=iJ_{\underbrace{b\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\cdots}_{n}Z_\varsigma}\\ \Psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}Z_\varsigma}=\frac{1}{n!}\Psi_{\underbrace{(\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots)}_{n}Z_\varsigma}\\ J_{\underbrace{b\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\cdots}_{n}Z_\varsigma}=\frac{1}{(n-1)!}J_{\underbrace{b(\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\cdots)}_{n}Z_\varsigma}\\ \delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\Psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}Z_\varsigma}=0,(\sigma,-i\varsigma)^a(\sigma,i\varsigma)^{\alpha_\varsigma}J_{\underbrace{a\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}Z_\varsigma}=0\\ (\sigma,-i\varsigma)^{\alpha_\varsigma}\Psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}[Z_\varsigma]}=0,(\sigma,-i\varsigma)^aJ_{\underbrace{a\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}[Z_\varsigma]}=0\end{cases}$$

定理1.1.3.

$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n}}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}}\\ \psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n}}=\frac{1}{(2n)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2n}}\\ J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}}=\frac{1}{(2n-1)!}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}D^a\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}}=iJ_{\underbrace{b\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\cdots}_{n}}\\ \psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}}=\frac{1}{n!}\psi_{\underbrace{(\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots)}_{n}},J_{\underbrace{b\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\cdots}_{n}}=\frac{1}{(n-1)!}J_{\underbrace{b(\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\cdots)}_{n}}\\ \delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}}=0,(\sigma,-i\varsigma)^a\sigma^{\alpha_\varsigma}J_{\underbrace{a\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}}=0\end{cases}$$

定理1.1.4.

$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n}}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}}\\ \psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n}}=\frac{1}{(2n)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2n}}\\ J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}}=\frac{1}{(2n-1)!}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^a{}_{b\alpha_\varsigma}D_a\Psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}}=iJ_{\underbrace{b\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\cdots}_{n}}\\ \Psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}}=\frac{1}{n!}\Psi_{\underbrace{(\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots)}_{n}},J_{\underbrace{b\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\cdots}_{n}}=\frac{1}{(n-1)!}J_{\underbrace{b(\beta_\varsigma\gamma_\varsigma\cdots)}_{n}}\\ \delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\Psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}}=0,(\sigma,-i\varsigma)^a(\sigma,i\varsigma)^{\alpha_\varsigma}J_{\underbrace{a\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}}=0\end{cases}$$

1.2 任意自旋全对称Penrose方程的矩阵等价形式

定理1.2.1.
$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n}}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}}\\ \psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n}}=\frac{1}{(2n)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2n}},J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}}=\frac{1}{(2n-1)!}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}}\end{cases}\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)^aD_a\hat{\psi}(s,\varsigma)=i\hat{J}(s,\varsigma)$$

将分量改写成矩阵就可以得到以上定理。

定理1.2.2. $(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)^aD_a\hat{\psi}(s,\varsigma)=i\hat{J}(s,\varsigma)\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^aD_a\tilde{\psi}(s,\varsigma)=i\tilde{J}(s,\varsigma)$

展开去掉冗余方程并整理就可以得到以上定理。

推论1.2.1.
$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n}}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}}\\ \psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n}}=\frac{1}{(2n)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2n}},J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}}=\frac{1}{(2n-1)!}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2n-1}}\end{cases}\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^aD_a\tilde{\psi}(s,\varsigma)=i\tilde{J}(s,\varsigma)$$

定理1.2.3. $(\sigma\otimes I_{2^{2n-1}},-i\varsigma)^aD_a\hat{\psi}(n,\varsigma)=i\hat{J}(n,\varsigma)\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma}\otimes I_{4^{n-1}},-i\varsigma)^aD_a\hat{\Psi}(n,\varsigma)=i\hat{\mathcal{J}}(n,\varsigma)$

作一个表象变换就可以得到以上定理。

定理1.2.4. $(\sigma\otimes I_{2n},-i\varsigma)^aD_a\tilde{\psi}(n,\varsigma)=i\tilde{J}(n,\varsigma)\Leftrightarrow(\sigma_{-\varsigma}\otimes I_n,-i\varsigma)^aD_a\tilde{\Psi}(n,\varsigma)=i\tilde{\mathcal{J}}(n,\varsigma)$

对于$n=1,2$作一个表象变换就可以得到以上定理,对于$n>2$证明以后补上。

1.3 任意自旋全对称Penrose方程的自旋方程形式

定理1.3.1.
$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}D^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}=iJ^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}\\ \psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2s}}\\ J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}=\frac{1}{(2s-1)!}J^{A'_\varsigma}{}_{\underbrace{(B_\varsigma C_\varsigma\cdots)}_{2s-1}}\end{cases}\Leftrightarrow[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s)$$

2 扭量方程的重新表述

2.1 Penrose扭量方程 [2,3]

$$\nabla_{A'_\varsigma(A_\varsigma}\omega_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots)}_{2s}}(s)=0,\nabla_{A'_\varsigma(A_\varsigma}\omega_{B_\varsigma)}(\tfrac{1}{2})=0\tag{12.1}$$

推论2.1.1. $\nabla_{A'_\varsigma(A_\varsigma}\omega_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots)}_{2s}}(s)=0\Leftrightarrow(\sigma^*,i\varsigma)^a_{A'_\varsigma(A_\varsigma}\partial_a\omega_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots)}_{2s}}(s)=0$

推论2.1.2. $\nabla_{A'_\varsigma(A_\varsigma}\omega_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots)}_{2s}}(s)=0\Leftrightarrow(\sigma^*,i\varsigma)^a_{A'_\varsigma(A_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots)}_{2s}}(s)\partial_a\omega_{k_\varsigma}(s)=0$

2.2 类扭量方程的等价形式

$$\nabla_{A'_\varsigma(A_\varsigma}\omega_{\underbrace{B_\varsigma)C_\varsigma D_\varsigma\cdots}_{2s}}(s)=0,\omega_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}_{2s}}(s)=\frac{1}{(2s)!}\omega_{\underbrace{(B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots)}_{2s}}(s)\tag{12.2}$$

推论2.2.1. $\nabla_{A'_\varsigma(A_\varsigma}\omega_{\underbrace{B_\varsigma)C_\varsigma D_\varsigma\cdots}_{2s}}(s)=0,\omega_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}_{2s}}(s)=\frac{1}{(2s)!}\omega_{\underbrace{(B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots)}_{2s}}(s)\Leftrightarrow\nabla_{A'_\varsigma(A_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma)l_\varsigma}(s)\omega_{k_\varsigma}(s)=0$

推论2.2.2. $\nabla_{A'_\varsigma(A_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma)l_\varsigma}(s)\omega_{k_\varsigma}(s)=0\Leftrightarrow(\sigma^*,i\varsigma)^a_{A'_\varsigma(A_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma)l_\varsigma}(s)\partial^a\psi_{k_\varsigma}(s)=0$

推论2.2.3. $\nabla_{A'_\varsigma(A_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma)l_\varsigma}(s)\omega_{k_\varsigma}(s)=0\Leftrightarrow[-(s+1)\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s)=0$

证明: $\nabla_{A'_\varsigma(A_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma)l_\varsigma}(s)\omega_{k_\varsigma}(s)=0$
$\Leftrightarrow\partial^a\omega_{k_\varsigma}(s)=(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)\mathring{\pi}^{A'_\varsigma}_{l_\varsigma}(s),\forall\mathring{\pi}^{A'_\varsigma}_{l_\varsigma}(s)$
$\Leftrightarrow\partial^a\omega_{k_\varsigma}(s)=(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)\mathring{\pi}^{A'_\varsigma}_{l_\varsigma}(s),\mathring{\pi}^{A'_\varsigma}_{l_\varsigma}(s)=\frac{s}{2s+1}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s)(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\omega_{k_\varsigma}(s)$
$\Leftrightarrow\partial^a\omega_{k_\varsigma}(s)=(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)\frac{s}{2s+1}N^{m_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s)(\sigma,-i\varsigma)_b^{A'_\varsigma B_\varsigma}\partial^b\omega_{m_\varsigma}(s)$
$\Leftrightarrow(2s+1)\partial^a\omega^{k_\varsigma}(s)=N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)s(\delta_{ab}\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}+2iS_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma})N^{m_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s)\partial^b\omega_{m_\varsigma}(s)$
$\Leftrightarrow(s+1)\partial^a\omega^{k_\varsigma}(s)=iS_{abk_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s)\partial^b\omega_{m_\varsigma}(s)$
$\Leftrightarrow[-(s+1)\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\omega(s,\varsigma)=0$ □

推论2.2.4. $\nabla_{A'_\varsigma(A_\varsigma}\omega_{B_\varsigma)}(\frac{1}{2})=0\Leftrightarrow[-\frac{3}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\omega(\frac{1}{2})=0$

2.3 类扭量方程的解

推论2.3.1. $\nabla_{A'_\varsigma(A_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma)l_\varsigma}(s)\omega_{k_\varsigma}(s)=0\Leftrightarrow\omega_{k_\varsigma}(s)=\mathring{\omega}_{k_\varsigma}(s)+x_a(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)\mathring{\pi}^{A'_\varsigma}_{l_\varsigma}(s)$

推论2.3.2. $\nabla_{A'_\varsigma(A_\varsigma}\omega_{B_\varsigma)}(\frac{1}{2})=0\Leftrightarrow\omega_{A_\varsigma}(\frac{1}{2})=\mathring{\omega}_{A_\varsigma}(\frac{1}{2})+x_a(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\mathring{\pi}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2})$

2.4 开关型自旋方程与类扭量方程的关系

推论2.4.1.

$$[(s+\phi)\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s,\varsigma)=0\Rightarrow\begin{cases}\text{粒子解：}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\psi}(s,\varsigma)=0,\phi=0\\\text{类扭量解：}\psi(s,\varsigma)=\mathring{\psi}_0(s,\varsigma)+x^a\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}_0(s,\varsigma),\phi=-(2s+1)\\\text{真空解：}\psi(s,\varsigma)=\text{常数},\phi\neq0,-(2s+1)\end{cases}$$

第十三章　Bargmann-Wigner方程的分析

自我评述：本章对Bargmann-Wigner方程进行了全面深入的分析。在平坦时空中严格证明了Bargmann-Wigner方程在半整数自旋情形等价于Rarita-Schwinger方程，在整数自旋情形等价于Klein-Gordon方程，揭示了Bargmann-Wigner方程的深刻物理内涵。通过对比研究，发现Bargmann-Wigner方程更适合描写有质量粒子，而Penrose旋量方程或自旋方程更适合描写无质量粒子。

1 Bargmann-Wigner方程

1.1 Bargmann-Wigner方程 [18]

$$[\gamma^a(\varsigma)D_a+m]_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma}_{2s}}=J_{\underbrace{\kappa_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma}_{2s}},\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma}_{2s}}\text{全对称},J_{\underbrace{\kappa_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma}_{2s}}\text{除}\kappa_\varsigma\text{外全对称} \tag{13.1}$$

2 二阶矩阵完备展开

2.1 二阶矩阵完备泡利基展开

二阶矩阵完备泡利基:$\Gamma_a(\varsigma)=\{\sigma,i\varsigma\}$

性质2.1.1. $x^a\Gamma_a(\varsigma)=0\Rightarrow x^a=0$

证明: $x^a\Gamma_a(\varsigma)=0$
$\Rightarrow x^a(\sigma,i\varsigma)_a=0$
$\Rightarrow\{x^a(\sigma,i\varsigma)_a,(\sigma,-i\varsigma)_b\}=0$
$\Rightarrow x^a(2\delta_{ab})=0$
$\Rightarrow x^a=0$ □

推论2.1.1. $x^a\Gamma_a(\varsigma)=0\Leftrightarrow x^a=0$

性质2.1.2. $X=\frac{1}{2}tr[\Gamma^a(-\varsigma)X]\Gamma_a(\varsigma),\forall X\in$ 二阶矩阵

证明: $X=X^{11}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+X^{12}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+X^{21}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+X^{22}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\forall X\in$ 二阶矩阵
$\Leftrightarrow X=\frac{1}{2}[X^{11}(I+\sigma_z)+X^{12}(\sigma_x+i\sigma_y)+X^{21}(\sigma_x-i\sigma_y)+X^{22}(I-\sigma_z)],\forall X\in$ 二阶矩阵
$\Leftrightarrow X=\frac{1}{2}(X^{12}+X^{21})\sigma_x+\frac{i}{2}(X^{12}-X^{21})\sigma_y+\frac{1}{2}(X^{11}-X^{22})\sigma_z-i\varsigma\frac{1}{2}(X^{11}+X^{22})i\varsigma I,\forall X\in$ 二阶矩阵
$\Leftrightarrow X=\frac{1}{2}tr[\Gamma^a(-\varsigma)X]\Gamma_a(\varsigma),\forall X\in$ 二阶矩阵 □

推论2.1.2. $X=x^a\Gamma_a(\varsigma),x^a=tr[\Gamma^a(-\varsigma)X],\forall X\in$ 二阶矩阵

二阶矩阵完备基性质:

正交性：$\Gamma_a(-\varsigma)\Gamma_a(\varsigma)=I,tr[\Gamma_a(-\varsigma)\Gamma_b(\varsigma)]=2\delta_{ab}$ (13.2)

线性无关性：$x^a\Gamma_a(\varsigma)=0\Leftrightarrow x^a=0$ (13.3)

完备性：$X=x^a\Gamma_a,\forall X\in$ 二阶矩阵 (13.4)

展开唯一性：$X=x^a\Gamma_a\Leftrightarrow x^a=\frac{1}{2}tr[\Gamma_a(-\varsigma)X],\forall X\in$ 二阶矩阵 (13.5)

2.2 二阶矩阵对称和反对称基展开

二阶矩阵对称和反对称基:$\Gamma_a(\varsigma)\varepsilon=\{\sigma,i\varsigma\}\varepsilon$，$[\Gamma_a(\varsigma)\varepsilon]^T=\{\sigma,-i\varsigma\}\varepsilon$，$\sigma\varepsilon$是对称基,$i\varsigma\varepsilon$是反对称基。

性质2.2.1. $x^a\Gamma_a(\varsigma)\varepsilon=0\Leftrightarrow x^a=0$

性质2.2.2. $X=\frac{1}{2}tr[\varepsilon\Gamma^a(-\varsigma)X]\Gamma_a(\varsigma)\varepsilon,\forall X\in$ 二阶矩阵

证明： $X\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}tr[\Gamma^a(-\varsigma)X\bar{\varepsilon}]\Gamma_a(\varsigma), \forall X \in$ 二阶矩阵
$\Leftrightarrow X = \frac{1}{2}tr[\Gamma^a(-\varsigma)X\bar{\varepsilon}]\Gamma_a(\varsigma)\varepsilon, \forall X \in$ 二阶矩阵
$\Leftrightarrow X = \frac{1}{2}tr[\varepsilon\bar{\varepsilon}\Gamma^a(-\varsigma)X\bar{\varepsilon}]\Gamma_a(\varsigma)\varepsilon, \forall X \in$ 二阶矩阵
$\Leftrightarrow X = \frac{1}{2}tr[\bar{\varepsilon}\Gamma^a(-\varsigma)X]\Gamma_a(\varsigma)\varepsilon, \forall X \in$ 二阶矩阵 □

3 四阶矩阵完备展开

3.1 四阶矩阵双泡利基展开

性质3.1.1. $X = \frac{1}{4}tr[\Gamma^a(-\varsigma)\otimes\Gamma^b(-\varsigma)X]\Gamma_a(\varsigma)\otimes\Gamma_b(\varsigma), \forall X$

证明： $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} tr[\Gamma^a(-\varsigma)X_{11}]\Gamma_a(\varsigma) & tr[\Gamma^a(-\varsigma)X_{12}]\Gamma_a(\varsigma) \\ tr[\Gamma^a(-\varsigma)X_{21}]\Gamma_a(\varsigma) & tr[\Gamma^a(-\varsigma)X_{22}]\Gamma_a(\varsigma) \end{bmatrix}, \forall X$
$\Leftrightarrow X = \frac{1}{2}\Gamma_a(\varsigma)\otimes\begin{bmatrix} tr[\Gamma^a(-\varsigma)X_{11}] & tr[\Gamma^a(-\varsigma)X_{12}] \\ tr[\Gamma^a(-\varsigma)X_{21}] & tr[\Gamma^a(-\varsigma)X_{22}] \end{bmatrix}, \forall X$
$\Leftrightarrow X = \frac{1}{4}tr\{\Gamma^b(-\varsigma)\begin{bmatrix} tr[\Gamma^a(-\varsigma)X_{11}] & tr[\Gamma^a(-\varsigma)X_{12}] \\ tr[\Gamma^a(-\varsigma)X_{21}] & tr[\Gamma^a(-\varsigma)X_{22}] \end{bmatrix}\}\Gamma_a(\varsigma)\otimes\Gamma_b(\varsigma), \forall X$
$\Leftrightarrow X = \frac{1}{4}tr[\Gamma^a(-\varsigma)\otimes\Gamma^b(-\varsigma)X]\Gamma_a(\varsigma)\otimes\Gamma_b(\varsigma), \forall X$ □

推论3.1.1. $tr\{\Gamma^b(-\varsigma)\begin{bmatrix} tr[\Gamma^a(-\varsigma)X_{11}] & tr[\Gamma^a(-\varsigma)X_{12}] \\ tr[\Gamma^a(-\varsigma)X_{21}] & tr[\Gamma^a(-\varsigma)X_{22}] \end{bmatrix}\} = tr[\Gamma^a(-\varsigma)\otimes\Gamma^b(-\varsigma)X]$

3.2 电荷共轭矩阵C [5,10]

定义3.2.1. $\bar{C}\gamma_a(\varsigma)C = -\gamma_a^T(\varsigma), C^T = -C, C^+ = \bar{C}$

推论3.2.1. $\gamma_a(\varsigma)C = [\gamma_a(\varsigma)C]^T$

证明： $\gamma_a(\varsigma)C = C\bar{C}\gamma_a(\varsigma)C = -C\gamma_a^T(\varsigma) = C^T\gamma_a^T(\varsigma) = [\gamma_a(\varsigma)C]^T$ □

推论3.2.2. $\bar{C}\gamma_a(\varsigma) = [\bar{C}\gamma_a(\varsigma)]^T$

证明： $\bar{C}\gamma_a(\varsigma) = \bar{C}\gamma_a(\varsigma)C\bar{C} = -\gamma_a^T(\varsigma)\bar{C} = -[C^*\gamma_a(\varsigma)]^T = [\bar{C}\gamma_a(\varsigma)]^T$ □

推论3.2.3. $S_{ab}(e,\varsigma)C = [S_{ab}(e,\varsigma)C]^T$

证明： $S_{ab}(e,\varsigma)C = -\frac{i}{4}[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma) - \gamma_b(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)]C$
$= -\frac{i}{4}[C\bar{C}\gamma_a(\varsigma)C\bar{C}\gamma_b(\varsigma)C - C\bar{C}\gamma_b(\varsigma)C\bar{C}\gamma_a(\varsigma)C]$
$= -\frac{i}{4}C[\gamma_a^T(\varsigma)\gamma_b^T(\varsigma) - \gamma_b^T(\varsigma)\gamma_a^T(\varsigma)] = --\frac{i}{4}C^T[\gamma_b(\varsigma)\gamma_a(\varsigma) - \gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)]^T$
$= C^T S_{ab}^T(e,\varsigma) = [S_{ab}(e,\varsigma)C]^T$ □

推论3.2.4. $\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma) = [\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma)]^T$

证明： $\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma) = -\frac{i}{4}\bar{C}[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma) - \gamma_b(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)]$
$= -\frac{i}{4}[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)C\bar{C}\gamma_b(\varsigma)C\bar{C} - \bar{C}\gamma_b(\varsigma)C\bar{C}\gamma_a(\varsigma)C\bar{C}]$
$= -\frac{i}{4}[\gamma_a^T(\varsigma)\gamma_b^T(\varsigma) - \gamma_b^T(\varsigma)\gamma_a^T(\varsigma)]\bar{C} = \frac{i}{4}[\gamma_b(\varsigma)\gamma_a(\varsigma) - \gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)]^T\bar{C}^T$
$= S_{ab}^T(e,\varsigma)\bar{C}^T = [\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma)]^T$ □

推论3.2.5. $\bar{C}\gamma_5(\varsigma)C = \gamma_5^T(\varsigma)$

证明： $\bar{C}\gamma_5(\varsigma)C = \bar{C}\gamma_x(\varsigma)\gamma_y(\varsigma)\gamma_z(\varsigma)\gamma_\pi(\varsigma)C$
$= \bar{C}\gamma_x(\varsigma)C\bar{C}\gamma_y(\varsigma)C\bar{C}\gamma_z(\varsigma)C\bar{C}\gamma_\pi(\varsigma)C$
$= \gamma_x^T(\varsigma)\gamma_y^T(\varsigma)\gamma_z^T(\varsigma)\gamma_\pi^T(\varsigma) = [\gamma_\pi(\varsigma)\gamma_z(\varsigma)\gamma_y(\varsigma)\gamma_x(\varsigma)]^T = \gamma_5^T(\varsigma)$ □

推论3.2.6. $C=-C^T,\bar{C}=-\bar{C}^T,$

推论3.2.7. $\gamma_5(\varsigma)C=-[\gamma_5(\varsigma)C]^T,\bar{C}\gamma_5(\varsigma)=-[\bar{C}\gamma_5(\varsigma)]^T$

推论3.2.8. $\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)C=-[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)C]^T$

证明: $\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)C=C\bar{C}\gamma_5(\varsigma)C\bar{C}\gamma_a(\varsigma)C=-C\gamma_5^T(\varsigma)\gamma_a^T(\varsigma)$
$=C^T\gamma_5^T(\varsigma)\gamma_a^T(\varsigma)=[\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)C]^T=-[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)C]^T$ □

推论3.2.9. $\bar{C}\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)=-[\bar{C}\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)]^T$

证明: $\bar{C}\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)=\bar{C}\gamma_5(\varsigma)C\bar{C}\gamma_a(\varsigma)C\bar{C}=-\gamma_5^T(\varsigma)\gamma_a^T(\varsigma)\bar{C}$
$=\gamma_5^T(\varsigma)\gamma_a^T(\varsigma)\bar{C}^T=[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)]^T=-[\bar{C}\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)]^T$ □

总结:
对称基 : $\gamma_a(\varsigma)C=[\gamma_a(\varsigma)C]^T,\bar{C}\gamma_a(\varsigma)=[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)]^T,S_{ab}(e,\varsigma)C=[S_{ab}(e,\varsigma)C]^T,\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma)=[\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma)]^T$
反对称基 : $C=-C^T,\bar{C}=-\bar{C}^T,\gamma_5(\varsigma)C=-[\gamma_5(\varsigma)C]^T,,\bar{C}\gamma_5(\varsigma)=-[\bar{C}\gamma_5(\varsigma)]^T,$
$\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)C=-[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)C]^T,\bar{C}\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)=-[\bar{C}\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)]^T$

3.3 特殊表象下狄拉克矩阵 [5, 10]

取特殊表象的狄拉克矩阵：$[\gamma_a(\varsigma),\gamma_5(\varsigma)]=[(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x),\varsigma I\otimes\sigma_z]$
详细展开：
$[\gamma_a(\varsigma),\gamma_5(\varsigma)]=[(\sigma_x\otimes\sigma_y,\sigma_y\otimes\sigma_y,\sigma_z\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x),\varsigma I\otimes\sigma_z]$
$[\gamma_a(\varsigma),\gamma_5(\varsigma)]\gamma_5(\varsigma)=-i\varsigma[(\sigma_x\otimes\sigma_x,\sigma_y\otimes\sigma_x,\sigma_z\otimes\sigma_x,\varsigma I\otimes\sigma_y),i\varsigma I\otimes I]$

$$S_{ab}(e,\varsigma)=-\frac{i}{4}[\gamma_a(\varsigma),\gamma_b(\varsigma)]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&\sigma_z\otimes I&-\sigma_y\otimes I&-\varsigma\sigma_x\otimes\sigma_z\\-\sigma_z\otimes I&0&\sigma_x\otimes I&-\varsigma\sigma_y\otimes\sigma_z\\\sigma_y\otimes I&-\sigma_x\otimes I&0&-\varsigma\sigma_z\otimes\sigma_z\\\varsigma\sigma_x\otimes\sigma_z&\varsigma\sigma_y\otimes\sigma_z&\varsigma\sigma_z\otimes\sigma_z&0\end{bmatrix}$$

特殊表象下的电荷共轭矩阵$C=\gamma_y(\varsigma)\gamma_\pi(\varsigma)$

3.4 四阶矩阵狄拉克基 [5, 10]展开

四阶矩阵狄拉克完备基: $\Gamma_A(\varsigma)=[\gamma_a(\varsigma),2S_{ab}(e,\varsigma),-I_4,-i\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma),-\gamma_5(\varsigma)]$

性质3.4.1. $X=[im\gamma_a(\varsigma)A^a+S_{ab}(e,\varsigma)F^{ab}]-[I_4\phi+im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a+\gamma_5(\varsigma)\Phi],\forall X$

$$\begin{cases}\phi=-\frac{1}{4}trX\\\Phi=-\frac{1}{4}tr[\gamma^5(\varsigma)X]\end{cases},\begin{cases}imA^a=\frac{1}{4}tr[\gamma^a(\varsigma)X]\\im\mathbf{A}^a=\frac{1}{4}tr[\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)X]\end{cases},F^{ab}=\frac{1}{2}tr[S^{ab}(e,\varsigma)X]$$

证明: $X=\frac{1}{4}tr[\Gamma^a(-\varsigma)\otimes\Gamma^b(-\varsigma)X]\Gamma_a(\varsigma)\otimes\Gamma_b(\varsigma),\forall X$
$\Leftrightarrow X=[im\gamma_a(\varsigma)A^a-iS_{ab}(e,\varsigma)F^{ab}]-[I_4\phi+im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a+\gamma_5(\varsigma)\Phi],\forall X$

$$\begin{cases}im\mathbf{A}^i=\frac{i\varsigma}{4}tr[\Gamma^i(-\varsigma)\otimes\Gamma^x(-\varsigma)X]=\frac{1}{4}tr[\gamma^i(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)X]\\imA^\pi=\frac{i}{4}tr[\Gamma^\pi(-\varsigma)\otimes\Gamma^x(-\varsigma)X]=\frac{1}{4}tr[\gamma^\pi(\varsigma)X]\end{cases}$$

$$\begin{cases}imA^i=\frac{1}{4}tr[\Gamma^i(-\varsigma)\otimes\Gamma^y(-\varsigma)X]=\frac{1}{4}tr[\gamma^i(\varsigma)X]\\im\mathbf{A}^\pi=\frac{\varsigma}{4}tr[\Gamma^\pi(-\varsigma)\otimes\Gamma^y(-\varsigma)X]=\frac{1}{4}tr[\gamma^\pi(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)X]\end{cases}$$

$$\begin{cases}F^{i\pi}=-F^{\pi i}=-\frac{\varsigma}{4}tr[\Gamma^i(-\varsigma)\otimes\Gamma^z(-\varsigma)X]=-\frac{i}{2}tr[S^{i\pi}(e,\varsigma)X]\\\Phi=-\frac{i}{4}tr[\Gamma^\pi(-\varsigma)\otimes\Gamma^z(-\varsigma)X]=-\frac{1}{4}tr[\gamma^5(\varsigma)X]\end{cases}$$

$$\begin{cases}F^{yz}=-F^{zy}=\frac{i\varsigma}{4}tr[\Gamma^x(-\varsigma)\otimes\Gamma^\pi(-\varsigma)X]=-\frac{i}{2}tr[S^{yz}(e,\varsigma)X]\\F^{zx}=-F^{xz}=\frac{i\varsigma}{4}tr[\Gamma^y(-\varsigma)\otimes\Gamma^\pi(-\varsigma)X]=-\frac{i}{2}tr[S^{zx}(e,\varsigma)X]\\F^{xy}=-F^{yx}=\frac{i\varsigma}{4}tr[\Gamma^z(-\varsigma)\otimes\Gamma^\pi(-\varsigma)X]=-\frac{i}{2}tr[S^{xy}(e,\varsigma)X]\\\phi=\frac{1}{4}tr[\Gamma^\pi(-\varsigma)\otimes\Gamma^\pi(-\varsigma)X]=-\frac{1}{4}trX\end{cases}$$

$\Leftrightarrow X=[im\gamma_a(\varsigma)A^a+S_{ab}(e,\varsigma)F^{ab}]-[I_4\phi+im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a+\gamma_5(\varsigma)\Phi],\forall X$

$$\begin{cases}\phi=-\frac{1}{4}trX\\ \Phi=-\frac{1}{4}tr[\gamma^5(\varsigma)X]\end{cases},\begin{cases}imA^a=\frac{1}{4}tr[\gamma^a(\varsigma)X]\\ im\mathbf{A}^a=\frac{1}{4}tr[\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)X]\end{cases},F^{ab}=\frac{1}{2}tr[S^{ab}(e,\varsigma)X]$$ □

推论3.4.1. $X=[im\gamma_a(\varsigma)A^a+S_{ab}(e,\varsigma)F^{ab}]-[I_4\phi+im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a+\gamma_5(\varsigma)\Phi],\forall X$

$\Leftrightarrow X=[im\gamma_a(\varsigma)A^a+S_{ab}(e,\varsigma)F^{ab}]-[I_4\phi+im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a+\gamma_5(\varsigma)\Phi],\forall X$

$$\begin{cases}\phi=-\frac{1}{4}trX\\ \Phi=-\frac{1}{4}tr[\gamma^5(\varsigma)X]\end{cases},\begin{cases}imA^a=\frac{1}{4}tr[\gamma^a(\varsigma)X]\\ im\mathbf{A}^a=\frac{1}{4}tr[\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)X]\end{cases},F^{ab}=\frac{1}{2}tr[S^{ab}(e,\varsigma)X]$$

3.5 四阶矩阵对称和反对称基展开

四阶矩阵对称和反对称基: $\Gamma_A(\varsigma)=[\gamma_a(\varsigma),2S_{ab}(e,\varsigma),|-I_4,-i\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma),-\gamma_5(\varsigma)]C$

性质3.5.1. $X=[im\gamma_a(\varsigma)CA^a+S_{ab}(e,\varsigma)CF^{ab}]-[C\phi+im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)C\mathbf{A}^a+\gamma_5(\varsigma)C\Phi],\forall X$

$$F^{ab}=\frac{1}{2}tr[\bar{C}S^{ab}(e,\varsigma)X],\begin{cases}imA^a=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)X]\\ im\mathbf{A}^a=-\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)X]\end{cases},\begin{cases}\phi=-\frac{1}{4}tr[\bar{C}X]\\ \Phi=-\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^5(\varsigma)X]\end{cases}$$

证明: $X\bar{C}=\frac{1}{4}tr[\Gamma^a(-\varsigma)\otimes\Gamma^b(-\varsigma)X\bar{C}]\Gamma_a(\varsigma)\otimes\Gamma_b(\varsigma),\forall X$

$\Leftrightarrow X\bar{C}=[im\gamma_a(\varsigma)A^a+S_{ab}(e,\varsigma)F^{ab}]-[\phi+im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a+\gamma_5(\varsigma)\Phi]$

$$\begin{cases}\phi=-\frac{1}{4}tr[X\bar{C}]\\ \Phi=-\frac{1}{4}tr[\gamma^5(\varsigma)X\bar{C}]\end{cases},\begin{cases}imA^a=\frac{1}{4}tr[\gamma^a(\varsigma)X\bar{C}]\\ im\mathbf{A}^a=\frac{1}{4}tr[\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)X\bar{C}]\end{cases},F^{ab}=\frac{1}{2}tr[S^{ab}(e,\varsigma)X\bar{C}]$$

$\Leftrightarrow X=[im\gamma_a(\varsigma)CA^a+S_{ab}(e,\varsigma)CF^{ab}]-[C\phi+im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)C\mathbf{A}^a+\gamma_5(\varsigma)C\Phi]$

$$F^{ab}=\frac{1}{2}tr[\bar{C}S^{ab}(e,\varsigma)X],\begin{cases}imA^a=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)X]\\ im\mathbf{A}^a=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)X]\end{cases},\begin{cases}\phi=-\frac{1}{4}tr[\bar{C}X]\\ \Phi=-\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^5(\varsigma)X]\end{cases}$$ □

推论3.5.1. $X=[im\gamma_a(\varsigma)CA^a-iS_{ab}(e,\varsigma)CF^{ab}]-[C\phi+im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)C\mathbf{A}^a+\gamma_5(\varsigma)C\Phi],\forall X$

$\Leftrightarrow X=[im\gamma_a(\varsigma)CA^a-iS_{ab}(e,\varsigma)CF^{ab}]-[C\phi+im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)C\mathbf{A}^a+\gamma_5(\varsigma)C\Phi],\forall X$

$$iF^{ab}=\frac{1}{2}tr[\bar{C}S^{ab}(e,\varsigma)X],\begin{cases}imA^a=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)X]\\ im\mathbf{A}^a=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)X]\end{cases},\begin{cases}\phi=-\frac{1}{4}tr[\bar{C}X]\\ \Phi=-\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^5(\varsigma)X]\end{cases}$$

3.6 对称四阶矩阵展开

四阶矩阵对称基: $\Gamma_A(\varsigma)=[\gamma_a(\varsigma),2S_{ab}(e,\varsigma)]C$, $\bar{C}\gamma_a(\varsigma)C=-\gamma_a^T(\varsigma),C^T=\bar{C}=-C,C^+(\varsigma)=\bar{C}$

性质3.6.1. $G=im\gamma_a(\varsigma)CA^a+S_{ab}(e,\varsigma)CF^{ab},G=G^T,F^{ab}=tr[\bar{C}S^{ab}(e,\varsigma)G],imA^a=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)G]$

证明: $G=[im\gamma_a(\varsigma)CA^a+S_{ab}(e,\varsigma)CF^{ab}]-[C\phi+im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)C\mathbf{A}^a+\gamma_5(\varsigma)C\Phi]$

$$F^{ab}=\frac{1}{2}tr[\bar{C}S^{ab}(e,\varsigma)G],G=G^T,\begin{cases}imA^a=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)G]\\ im\mathbf{A}^a=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)G]=0\end{cases},\begin{cases}\phi=-\frac{1}{4}tr[\bar{C}G]=0\\ \Phi=-\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^5(\varsigma)G]=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow G=im\gamma_a(\varsigma)CA^a+S_{ab}(e,\varsigma)CF^{ab},G=G^T,F^{ab}=\frac{1}{2}tr[\bar{C}S^{ab}(e,\varsigma)G],imA^a=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)G]$ □

4 自旋-1的Bargmann-Wigner方程 [18]

4.1 有质量自旋-1的Bargmann-Wigner方程的分析

引理4.1.1. $[\gamma^c(\varsigma)D_c+m][im\gamma^a(\varsigma)CA_a{}^\sigma+S^{ab}(e,\varsigma)CF_{ab}{}^\sigma]=J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma$,

$$\Leftrightarrow\begin{cases}i(D^bF_{ab}{}^\sigma+m^2A_a{}^\sigma)=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma],m[F_{ab}{}^\sigma-(D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma)]=\frac{1}{2}tr[\bar{C}S^{ab}(e,\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]\\ imD^aA_a{}^\sigma=\frac{1}{4}tr[\bar{C}J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma],0=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^5(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma],iD^b{*}F_{ab}{}^\sigma=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]\end{cases}$$

证明： $[\gamma^c(\varsigma)D_c+m][im\gamma^a(\varsigma)CA_a{}^\sigma+S^{ab}(e,\varsigma)CF_{ab}{}^\sigma]=J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma$,

$\Leftrightarrow im\gamma^c(\varsigma)\gamma^a(\varsigma)D_cA_a{}^\sigma+\gamma^c(\varsigma)S^{ab}(e,\varsigma)D_cF_{ab}{}^\sigma+im^2\gamma^a(\varsigma)A_a{}^\sigma+mS^{ab}(e,\varsigma)F_{ab}{}^\sigma=J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma\bar{C}$

$\Leftrightarrow im[\delta^{ca}+2iS^{ca}(e,\varsigma)]D_cA_a{}^\sigma-\frac{i}{2}[\varepsilon^{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)-\gamma^{[a}\delta^{b]c}]D_cF_{ab}{}^\sigma$

$+im^2\gamma^a(\varsigma)A_a{}^\sigma+mS^{ab}(e,\varsigma)F_{ab}{}^\sigma=J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma\bar{C}$,

$\Leftrightarrow im[D^aA_a{}^\sigma+2iS^{ab}(e,\varsigma)D_aA_b{}^\sigma]-\frac{i}{2}[\varepsilon^{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)-\gamma^{[a}\delta^{b]c}]D_cF_{ab}{}^\sigma$

$+im^2\gamma^a(\varsigma)A_a{}^\sigma+mS^{ab}(e,\varsigma)F_{ab}{}^\sigma=J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma\bar{C}$

$\Leftrightarrow i(D^bF_{ab}{}^\sigma+m^2A_a{}^\sigma)\gamma^a(\varsigma)C+m[F_{ab}{}^\sigma-(D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma)]S^{ab}(e,\varsigma)C$

$+imD^aA_a{}^\sigma C+iD^b{*}F_{ab}{}^\sigma\gamma_5(\varsigma)\gamma^a(\varsigma)C=J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}i(D^bF_{ab}{}^\sigma+m^2A_a{}^\sigma)=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma],m[F_{ab}{}^\sigma-(D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma)]=\frac{1}{2}tr[\bar{C}S^{ab}(e,\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]\\ imD^aA_a{}^\sigma=\frac{1}{4}tr[\bar{C}J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma],0=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^5(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma],iD^b{*}F_{ab}{}^\sigma=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]\end{cases}$$ □

引理4.1.2.
$$\begin{cases}i(D^bF_{ab}{}^\sigma+m^2A_a{}^\sigma)=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]\\ im[F_{ab}{}^\sigma-(D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma)]=\frac{1}{2}tr[\bar{C}S^{ab}(e,\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]=0\\ imD^aA_a{}^\sigma=\frac{1}{4}tr[\bar{C}J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]=0,0=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^5(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]\\ iD^b{*}F_{ab}{}^\sigma=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}D^bF_{ab}{}^\sigma+m^2A_a{}^\sigma=J_a{}^\sigma,D^b{*}F_{ab}{}^\sigma=0,F_{ab}{}^\sigma=D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma,D^aA_a{}^\sigma=0\\ J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C\end{cases}$$

证明：
$$\begin{cases}i(D^bF_{ab}{}^\sigma+m^2A_a{}^\sigma)=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]\\ im[F_{ab}{}^\sigma-(D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma)]=\frac{1}{2}tr[\bar{C}S^{ab}(e,\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]=0\\ imD^aA_a{}^\sigma=\frac{1}{4}tr[\bar{C}J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]=0,0=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^5(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]\\ iD^b{*}F_{ab}{}^\sigma=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}i(D^bF_{ab}{}^\sigma+m^2A_a{}^\sigma)=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma],D^b{*}F_{ab}{}^\sigma=0,F_{ab}{}^\sigma=D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma,D^aA_a{}^\sigma=0\\ J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma=\begin{bmatrix}0 & J^{[1_\varsigma2_\varsigma]\sigma}\\ J^{[2_\varsigma1_\varsigma]\sigma} & 0\end{bmatrix},\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}i(D^bF_{ab}{}^\sigma+m^2A_a{}^\sigma)=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma],J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma=\begin{bmatrix}0 & J_a{}^\sigma\Gamma^a(\varsigma)\bar{\varepsilon}\\ J_a{}^\sigma\Gamma^a(-\varsigma)\bar{\varepsilon} & 0\end{bmatrix}\\ D^b{*}F_{ab}{}^\sigma=0,F_{ab}{}^\sigma=D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma,D^aA_a{}^\sigma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}D^bF_{ab}{}^\sigma+m^2A_a{}^\sigma=J_a{}^\sigma,D^b{*}F_{ab}{}^\sigma=0,F_{ab}{}^\sigma=D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma,D^aA_a{}^\sigma=0\\ J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C\end{cases}$$ □

推论4.1.1. $[\gamma^c(\varsigma)D_c+m][im\gamma^a(\varsigma)CA_a{}^\sigma+S^{ab}(e,\varsigma)CF_{ab}{}^\sigma]=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C$

$\Leftrightarrow D^bF_{ab}{}^\sigma+m^2A_a{}^\sigma=-J_a{}^\sigma,D^b{*}F_{ab}{}^\sigma=0,F_{ab}{}^\sigma=D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma,D^aA_a{}^\sigma=0$

推论4.1.2. $[\gamma^c(\varsigma)D_c+m][im\gamma^a(\varsigma)CA_a{}^\sigma+S^{ab}(e,\varsigma)CF_{ab}{}^\sigma]=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^c(\varsigma)D_c+m][im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]A_a{}^\sigma=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C\\ F_{ab}{}^\sigma=D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma\end{cases}$$

推论4.1.3.
$$\begin{cases}[\gamma^c(\varsigma)D_c+m][im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]A_a{}^\sigma=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C\\ F_{ab}{}^\sigma=D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma\end{cases}$$

$\Leftrightarrow D^bF_{ab}{}^\sigma+m^2A_a{}^\sigma=-J_a{}^\sigma,D^b{*}F_{ab}{}^\sigma=0,F_{ab}{}^\sigma=D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma,D^aA_a{}^\sigma=0$

推论4.1.4. $\begin{cases}[\gamma^c(\varsigma)\partial_c+m][im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]A_a{}^\sigma=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C\\ F_{ab}{}^\sigma=\partial_aA_b{}^\sigma-\partial_bA_a{}^\sigma\end{cases}$

$\Leftrightarrow \partial^bF_{ab}{}^\sigma+m^2A_a{}^\sigma=-J_a{}^\sigma,F_{ab}{}^\sigma=\partial_aA_b{}^\sigma-\partial_bA_a{}^\sigma,\partial^aJ_a{}^\sigma=0$

推论4.1.5. $\begin{cases}[\gamma^c(\varsigma)D_c+m]\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C\\ \psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma=im\gamma^a(\varsigma)CA_a{}^\sigma+S^{ab}(e,\varsigma)CF_{ab}{}^\sigma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^c(\varsigma)D_c+m]\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C\\ \psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]A_a{}^\sigma\\ F_{ab}{}^\sigma=D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma\end{cases}$

推论4.1.6. $\begin{cases}[\gamma^c(\varsigma)D_c+m]\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}{}^\sigma=\psi_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^c(\varsigma)D_c+m]\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C\\ \psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]A_a{}^\sigma\end{cases}$

推论4.1.7. $\begin{cases}[\gamma^c(\varsigma)D_c+m]\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}{}^\sigma=\psi_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}D^bF_{ab}{}^\sigma+m^2A_a{}^\sigma=-J_a{}^\sigma,D^b{*F}_{ab}{}^\sigma=0,F_{ab}{}^\sigma=D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma,D^aA_a{}^\sigma=0\\ \psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]A_a{}^\sigma\end{cases}$

推论4.1.8. $\begin{cases}[\gamma^c(\varsigma)\partial_c+m]\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}{}^\sigma=\psi_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^bF_{ab}{}^\sigma+m^2A_a{}^\sigma=-J_a{}^\sigma,\partial^aJ_a{}^\sigma=0,F_{ab}{}^\sigma=\partial_aA_b{}^\sigma-\partial_bA_a{}^\sigma\\ \psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]A_a{}^\sigma\end{cases}$

4.2 有质量自旋-1的Bargmann-Wigner方程

定理4.2.1. $\begin{cases}[\gamma^c(\varsigma)\partial_c+m]\psi_{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma}{}^\sigma=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}{}^\sigma=\psi_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^b\partial_b+m^2)A_a{}^\sigma=-J_a{}^\sigma\\ \partial^aA_a{}^\sigma=0,\partial^aJ_a{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_a{}^\sigma\end{cases}$

4.3 无质量自旋-1的Bargmann-Wigner方程的分析

引理4.3.1. $[\gamma^c(\varsigma)D_c+m][im\gamma^a(\varsigma)CA_a{}^\sigma+S^{ab}(e,\varsigma)CF_{ab}{}^\sigma]=J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma$,

$\Leftrightarrow\begin{cases}i(D^bF_{ab}{}^\sigma+m^2A_a{}^\sigma)=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma],m[F_{ab}{}^\sigma-(D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma)]=\frac{1}{2}tr[\bar{C}S^{ab}(e,\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]\\ imD^aA_a{}^\sigma=\frac{1}{4}tr[\bar{C}J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma],0=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^5(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma],iD^b{*F}_{ab}{}^\sigma=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]\end{cases}$

证明: $\gamma^c(\varsigma)D_c[im\gamma^a(\varsigma)CA_a{}^\sigma+S^{ab}(e,\varsigma)CF_{ab}{}^\sigma]=J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma$

$\Leftrightarrow im\gamma^c(\varsigma)\gamma^a(\varsigma)D_cA_a{}^\sigma+\gamma^c(\varsigma)S^{ab}(e,\varsigma)D_cF_{ab}{}^\sigma=J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma\bar{C}$

$\Leftrightarrow im[\delta^{ca}+2iS^{ca}(e,\varsigma)]D_cA_a{}^\sigma-\frac{i}{2}[\varepsilon^{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)-\gamma^{[a}\delta^{b]c}]D_cF_{ab}{}^\sigma=J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma\bar{C}$

$\Leftrightarrow im[D^aA_a{}^\sigma+2iS^{ab}(e,\varsigma)D_aA_b{}^\sigma]-\frac{i}{2}[\varepsilon^{abcd}\gamma_5(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)-\gamma^{[a}\delta^{b]c}]D_cF_{ab}{}^\sigma=J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma\bar{C}$

$\Leftrightarrow iD^bF_{ab}{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C+im[(D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma)]S^{ab}(e,\varsigma)C+imD^aA_a{}^\sigma C+iD^b{*F}_{ab}{}^\sigma\gamma_5(\varsigma)\gamma^a(\varsigma)C=J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma$

$\Leftrightarrow\begin{cases}iD^bF_{ab}{}^\sigma=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma],-m(D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma)=\frac{1}{2}tr[\bar{C}S^{ab}(e,\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]\\ imD^aA_a{}^\sigma=\frac{1}{4}tr[\bar{C}J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma],0=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^5(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma],iD^b{*F}_{ab}{}^\sigma=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)J_{[\kappa_\varsigma\mu_\varsigma]}{}^\sigma]\end{cases}$ □

4.4 无质量自旋-1的Bargmann-Wigner方程

推论4.4.1. $\gamma^c(\varsigma)D_c[im\gamma^a(\varsigma)CA_a{}^\sigma+S^{ab}(e,\varsigma)CF_{ab}{}^\sigma]=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C$

$\Leftrightarrow D^bF_{ab}{}^\sigma=-J_a{}^\sigma,D^b{*F}_{ab}{}^\sigma=0,D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma=0,D^aA_a{}^\sigma=0$

证明: $\gamma^c(\varsigma)D_c[im\gamma^a(\varsigma)CA_a{}^\sigma+S^{ab}(e,\varsigma)CF_{ab}{}^\sigma]=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C$
$\Leftrightarrow iD^bF_{ab}{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C-m(D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma)S^{ab}(e,\varsigma)C+imD^aA_a{}^\sigma C+iD^b{*F_{ab}}^\sigma\gamma_5(\varsigma)\gamma^a(\varsigma)C=-iJ_a{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C$
$\Leftrightarrow D^bF_{ab}{}^\sigma=-J_a{}^\sigma, D^b{*F_{ab}}^\sigma=0, D_aA_b{}^\sigma-D_bA_a{}^\sigma=0, D^aA_a{}^\sigma=0$ □

推论4.4.2. $\gamma^c(\varsigma)\partial_c[im\gamma^a(\varsigma)CA_a+S^{ab}(e,\varsigma)CF_{ab}]=-iJ_a\gamma^a(\varsigma)C$
$\Leftrightarrow\partial^bF_{ab}=-J_a,\partial^b*F_{ab}=0,\partial^a\partial_a\phi=0,A_a=\partial_a\phi$

在无质量情形，由于$F_{ab}{}^\sigma, A_a{}^\sigma$完全相互独立，无法得到更简洁、更有意义的结论，且有多余的方程，显得拖泥带水不够简洁，也无法自然地向高自旋情形推广。所以**Bargmann-Wigner**方程似乎不太适合描写无质量粒子，更适合描写无质量粒子的是**Penrose**旋量方程 [1,2](自旋方程)。

5 自旋-$\frac{3}{2}$, 2的Bargmann-Wigner方程 [18]

5.1 有质量自旋-$\frac{3}{2}$的Bargmann-Wigner方程的分析

推论5.1.1. $\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\qquad tr[\bar{C}\psi_{\lambda_\varsigma[\mu_\varsigma\eta_\varsigma]}{}^\sigma]=0$
$\Rightarrow[im\gamma^a(\varsigma)-2S^{ab}(e,\varsigma)D_b]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0$

推论5.1.2. $\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\qquad tr[\bar{C}\gamma^5(\varsigma)\psi_{\lambda_\varsigma[\mu_\varsigma\eta_\varsigma]}{}^\sigma]=0$
$\Rightarrow[im\gamma^a(\varsigma)+2S^{ab}(e,\varsigma)D_b]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0$

推论5.1.3. $\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\qquad tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)\psi_{\lambda_\varsigma[\mu_\varsigma\eta_\varsigma]}{}^\sigma]=0,$
$\Rightarrow[im\gamma^a(\varsigma)\gamma^c(\varsigma)+2S^{ab}(e,\varsigma)\gamma^c(\varsigma)D_b]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0$

推论5.1.4. $\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ tr[\bar{C}\psi_{\lambda_\varsigma[\mu_\varsigma\eta_\varsigma]}{}^\sigma]=0,tr[\bar{C}\gamma^5(\varsigma)\psi_{\lambda_\varsigma[\mu_\varsigma\eta_\varsigma]}{}^\sigma]=0\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ \gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,D^aA_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0\end{cases}$

推论5.1.5. $\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=\psi_{\lambda_\varsigma\eta_\varsigma\mu_\varsigma}{}^\sigma$
$\Leftrightarrow tr[\bar{C}\psi_{\lambda_\varsigma[\mu_\varsigma\eta_\varsigma]}{}^\sigma]=0,tr[\bar{C}\gamma^5(\varsigma)\psi_{\lambda_\varsigma[\mu_\varsigma\eta_\varsigma]}{}^\sigma]=0,tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)\psi_{\lambda_\varsigma[\mu_\varsigma\eta_\varsigma]}{}^\sigma]=0$

推论5.1.6. $\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=\psi_{\lambda_\varsigma\eta_\varsigma\mu_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ [\gamma^b(\varsigma)D_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0\end{cases}$

推论5.1.7. $\begin{cases}A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bz}(e,\varsigma)C\partial_z]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}{}^\sigma\\ \gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma}{}^\sigma=0\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bz}(e,\varsigma)C\partial_z]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}{}^\sigma\\ \delta^{ab}A_{ab}{}^\sigma=0,A_{ab}{}^\sigma=A_{ba}{}^\sigma,\partial^aA_{ab}{}^\sigma=0\end{cases}$

证明: $A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bz}(e,\varsigma)C\partial_z]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}{}^\sigma,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma}{}^\sigma=0$
$\Leftrightarrow\begin{cases}A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bz}(e,\varsigma)C\partial_z]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}{}^\sigma\\ im[\delta^{ab}+2iS^{ab}(e,\varsigma)]A_{ab}{}^\sigma-i\gamma^d(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)\varepsilon^{abz}{}_d\partial_zA_{ab}{}^\sigma+i\gamma^z(\varsigma)(\delta^{ab}\partial_zA_{ab}{}^\sigma-\partial^aA_{az}{}^\sigma)=0\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bz}(e,\varsigma)C\partial_z]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}{}^\sigma\\ \delta^{ab}A_{ab}{}^\sigma=0,A_{ab}{}^\sigma-A_{ba}{}^\sigma=0,(\varsigma)\varepsilon^{abz}{}_d\partial_zA_{ab}{}^\sigma=0,(\delta^{ab}\partial_zA_{ab}{}^\sigma-\partial^aA_{az}{}^\sigma)=0\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bz}(e,\varsigma)C\partial_z]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}{}^\sigma\\ \delta^{ab}A_{ab}{}^\sigma=0,A_{ab}{}^\sigma=A_{ba}{}^\sigma,\partial^aA_{ab}{}^\sigma=0\end{cases}$ □

5.2 弯曲时空中有质量自旋-$\frac{3}{2}$的Bargmann-Wigner方程

引理5.2.1. $[\gamma^b(\varsigma)D_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0\Rightarrow D^aA_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0$

证明: $[\gamma^b(\varsigma)D_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0$
$\Rightarrow\gamma^a(\varsigma)[\gamma^b(\varsigma)D_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0$
$\Rightarrow\gamma^a(\varsigma)\gamma^b(\varsigma)D_bA_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0$
$\Rightarrow[\gamma^a(\varsigma)\gamma^b(\varsigma)+\gamma^b(\varsigma)\gamma^a(\varsigma)-\gamma^b(\varsigma)\gamma^a(\varsigma)]D_bA_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0$
$\Rightarrow 2\delta^{ab}D_bA_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma-\gamma^b(\varsigma)D_b[\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma]=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0$
$\Rightarrow D^aA_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0$ □

引理5.2.2. $[\gamma^b(\varsigma)\partial_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0\Rightarrow(\partial_b\partial^b-m^2)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0$

证明: $[\gamma^b(\varsigma)\partial_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0$
$\Rightarrow[\gamma^b(\varsigma)\partial_b-m][\gamma^b(\varsigma)\partial_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0$
$\Rightarrow[\gamma^b(\varsigma)\gamma^c(\varsigma)\partial_b\partial_c-m^2]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0$
$\Rightarrow\{[\delta^{bc}+2iS^{ab}(e,\varsigma)]\partial_b\partial_c-m^2\}A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0$
$\Rightarrow(\partial_b\partial^b-m^2)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0$ □

定理5.2.1. $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)D_a+m]_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]\eta_\varsigma}{}^\sigma=-iJ_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma\text{除}\sigma\text{外全对称}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ D^bF_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma+m^2A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma=-J_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma,D^b{*}F_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma=0,F_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma=D_aA_{b\eta_\varsigma}{}^\sigma-D_bA_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ [\gamma^b(\varsigma)D_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0\end{cases}$$

证明: $[\gamma^a(\varsigma)D_a+m]_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]\eta_\varsigma}{}^\sigma=-iJ_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma$除$\sigma$外全对称

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)D_a+m]_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=-iJ_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=\psi_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)\psi_{\lambda_\varsigma[\mu_\varsigma\eta_\varsigma]}{}^\sigma]=0,tr[\bar{C}\psi_{\lambda_\varsigma[\mu_\varsigma\eta_\varsigma]}{}^\sigma]=0,tr[\bar{C}\gamma^5(\varsigma)\psi_{\lambda_\varsigma[\mu_\varsigma\eta_\varsigma]}{}^\sigma]=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)D_a+m]_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=-iJ_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ tr[\bar{C}\gamma^a(\varsigma)\gamma^5(\varsigma)\psi_{\lambda_\varsigma[\mu_\varsigma\eta_\varsigma]}{}^\sigma]=0,tr[\bar{C}\psi_{\lambda_\varsigma[\mu_\varsigma\eta_\varsigma]}{}^\sigma]=0,tr[\bar{C}\gamma^5(\varsigma)\psi_{\lambda_\varsigma[\mu_\varsigma\eta_\varsigma]}{}^\sigma]=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)D_a+m]_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=-iJ_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ [\gamma^b(\varsigma)D_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,D^aA_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ D^bF_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma+m^2A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma=-J_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma,D^b{*}F_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma=0,F_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma=D_aA_{b\eta_\varsigma}{}^\sigma-D_bA_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma,D^aA_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma=0\\ [\gamma^b(\varsigma)D_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,D^aA_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)CD_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ D^bF_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma+m^2A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma=-J_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma,D^b{*}F_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma=0,F_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma=D_aA_{b\eta_\varsigma}{}^\sigma-D_bA_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ [\gamma^b(\varsigma)D_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)J_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0\end{cases}$$ □

在弯曲时空中方程不能进一步简化，所以无法得到更简洁更有意义的结论。

5.3 平坦时空中有质量自旋-$\frac{3}{2}$的Bargmann-Wigner方程的源项要求?

定理5.3.1. $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]\eta_\varsigma}{}^\sigma=-iJ_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma\text{除}\sigma\text{外全对称}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ \partial^bF_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma+m^2A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma=0,J_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma=0,F_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma=\partial_aA_{b\eta_\varsigma}{}^\sigma-\partial_bA_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ [\gamma^b(\varsigma)\partial_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0\end{cases}$$

证明: $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]\eta_\varsigma}{}^\sigma=-iJ_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\gamma^a(\varsigma)C\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma\text{除}\sigma\text{外全对称}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ \partial^bF_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma+m^2A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma=-J_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma,\partial^b{*}F_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma=0,F_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma=\partial_aA_{b\eta_\varsigma}{}^\sigma-\partial_bA_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ [\gamma^b(\varsigma)\partial_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ \partial^bF_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma+m^2A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma=-J_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma,F_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma=\partial_aA_{b\eta_\varsigma}{}^\sigma-\partial_bA_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ [\gamma^b(\varsigma)\partial_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\partial^aA_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ \partial^bF_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma+m^2A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma=0,J_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma=0,F_{ab\eta_\varsigma}{}^\sigma=\partial_aA_{b\eta_\varsigma}{}^\sigma-\partial_bA_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ [\gamma^b(\varsigma)\partial_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0\end{cases}$$ □

相对于弯曲时空情形，在平坦时空中方程进一步得到了简化，得到了更简洁更有意义的结论，方程本身自恰性也自动要求源项必须为零(???)。

5.4 平坦时空中有质量自旋-$\frac{3}{2}$的Bargmann-Wigner方程 [19]

定理5.4.1. $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma\text{除}\sigma\text{外全对称}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^b(\varsigma)\partial_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$

证明: $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma\text{除}\sigma\text{外全对称}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=\psi_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=\psi_{\lambda_\varsigma\eta_\varsigma\mu_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^b\partial_b+m^2)A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma=0,\partial^aA_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=\psi_{\lambda_\varsigma\eta_\varsigma\mu_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^b\partial_b+m^2)A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma=0,\partial^aA_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ [\gamma^b(\varsigma)\partial_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^b(\varsigma)\partial_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$$ □

5.5 平坦时空中有质量自旋-2的Bargmann-Wigner方程

定理5.5.1. $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\text{除}^\sigma\text{外全对称}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^d\partial_d+m^2)A_{ab}{}^\sigma=0,\delta^{ab}A_{ab}{}^\sigma=0,A_{ab}{}^\sigma=A_{ba}{}^\sigma,\partial^aA_{ab}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ac}(e,\varsigma)C\partial_c]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bd}(e,\varsigma)C\partial_d]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}{}^\sigma\end{cases}$$

证明: $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\text{除}^\sigma\text{外全对称}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\text{除}_{\xi_\varsigma}{}^\sigma\text{外全对称}\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\xi_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^b(\varsigma)\partial_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\xi_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^b(\varsigma)\partial_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma}{}^\sigma=0,A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=A_{a\xi_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma\\ \gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^d\partial_d+m^2)A_{ab}{}^\sigma=0,\partial^bA_{ab}{}^\sigma=0\\ A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bz}(e,\varsigma)C\partial_z]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}{}^\sigma\\ \gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^d\partial_d+m^2)A_{ab}{}^\sigma=0,\partial^bA_{ab}{}^\sigma=0\\ A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bz}(e,\varsigma)C\partial_z]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}{}^\sigma\\ \delta^{ab}A_{ab}{}^\sigma=0,A_{ab}{}^\sigma=A_{ba}{}^\sigma,\partial^aA_{ab}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^d\partial_d+m^2)A_{ab}{}^\sigma=0,\delta^{ab}A_{ab}{}^\sigma=0,A_{ab}{}^\sigma=A_{ba}{}^\sigma,\partial^aA_{ab}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bz}(e,\varsigma)C\partial_z]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}{}^\sigma\end{cases}$$

□

推论5.5.1. $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}{}^\sigma=0\\ \mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}{}^\sigma=\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\eta_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\mu_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}{}^\sigma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^d\partial_d+m^2)A_{ab}{}^\sigma=0\\ \delta^{ab}A_{ab}{}^\sigma=0,A_{ab}{}^\sigma=A_{ba}{}^\sigma,\partial^aA_{ab}{}^\sigma=0\end{cases}$

推论5.5.2. $\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}=\mathbb{X}^a_{\mu_\varsigma\eta_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}\Leftrightarrow ???$

6 平坦时空中任意自旋粒子的Bargmann-Wigner方程

6.1 平坦时空中有质量自旋$s=n$的Bargmann-Wigner方程 [18, 20, 23]

定义6.1.1. $\mathbb{X}_a:=[im\gamma_a(\varsigma)-2S_{ab}(e,\varsigma)\partial^b]C,\mathbb{X}^a:=[im\gamma^a(\varsigma)-2S^{ab}(e,\varsigma)\partial_b]C$

定理6.1.1. $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\zeta_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma=0\\ \psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\zeta_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma\text{除}^\sigma\text{外全对称}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^d\partial_d+m^2)A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}}{}^\sigma=0,A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}}{}^\sigma\text{除}^\sigma\text{外全对称}\\ \delta^{ab}A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}}{}^\sigma=0,\partial^aA_{\underbrace{abc\cdots}_{n}}{}^\sigma=0\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\zeta_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma=\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}}{}^\sigma\end{cases}$

推论6.1.1. $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}}{}^\sigma=0\Leftrightarrow(-\partial^d\partial_d+m^2)A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}}{}^\sigma=0\\ A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}}{}^\sigma=\frac{1}{n!}A_{\underbrace{\{abc\cdots\}}_{n}}{}^\sigma,\delta^{ab}A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}}{}^\sigma=0,\partial^aA_{\underbrace{abc\cdots}_{n}}{}^\sigma=0\end{cases}$

6.2 平坦时空中有质量自旋$s=n+\frac{1}{2}$的Bargmann-Wigner方程 [18,20,21]

定理6.2.1. $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\zeta_\varsigma}_{2n+1}}{}^\sigma=0\\ \psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\zeta_\varsigma}_{2n+1}}{}^\sigma\text{除}^\sigma\text{外全对称}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^d(\varsigma)\partial_d+m]A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^\sigma=0,A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^\sigma\text{除}_{\zeta_\varsigma}{}^\sigma\text{外全对称}\\ \delta^{ab}A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^\sigma=0\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\zeta_\varsigma}_{2n+1}}{}^\sigma=\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^\sigma\end{cases}$

推论6.2.1. $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^\sigma=0\Leftrightarrow[\gamma^d(\varsigma)\partial_d+m]A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^\sigma=0\\ A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^\sigma=\frac{1}{n!}A_{\underbrace{\{abc\cdots\}}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^\sigma,\delta^{ab}A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{\underbrace{abc\cdots}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^\sigma=0\end{cases}$

采用数学归纳法并运用$s=\frac{3}{2}$和$s=2$的推理技巧可容易并严格证明得到以上两个定理，下面开始证明。

6.3 用数学归纳法严格证明以上两个定理

证明: 采用数学归纳法一起证明以上两个定理。

第一步：$s=1/2$时成立：

$$\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{[\lambda_\varsigma]}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma}{}^\sigma\text{除}^\sigma\text{外全对称}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^d(\varsigma)\partial_d+m]A_{\underbrace{ab\cdots}_{0}[\lambda_\varsigma]}{}^\sigma=0,A_{\underbrace{ab\cdots}_{0}\eta_\varsigma}{}^\sigma\text{除}_{\lambda_\varsigma}{}^\sigma\text{外全对称}\\ \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdots}_{0}[\lambda_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{\underbrace{ab\cdots}_{0}[\lambda_\varsigma]}{}^\sigma=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma}{}^\sigma=A_{\underbrace{ab\cdots}_{0}\lambda_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$$

第二步：假设$s=n-1/2$时成立：

$$\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\cdots\eta_\varsigma}_{2n-1}}{}^\sigma=0\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\eta_\varsigma}_{2n-1}}{}^\sigma\text{除}^\sigma\text{外全对称}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^d(\varsigma)\partial_d+m]A_{\underbrace{ab\cdots}_{n-1}[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,A_{\underbrace{ab\cdots}_{n-1}\eta_\varsigma}{}^\sigma\text{除}_{\eta_\varsigma}{}^\sigma\text{外全对称}\\ \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdots}_{n-1}[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{\underbrace{ab\cdots}_{n-1}[\eta_\varsigma]}{}^\sigma=0\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\eta_\varsigma}_{2n-1}}{}^\sigma=\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n-1}A_{\underbrace{a\cdots}_{n-1}\eta_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$$

第三步$s=n$时，

1： $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\cdots\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma=0\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma\text{除}\sigma\text{外全对称}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma\text{除}_{\xi_\varsigma}{}^\sigma\text{外全对称}\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma=\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\xi_\varsigma\eta_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^d(\varsigma)\partial_d+m]A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma}{}^\sigma=0,A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\text{除}_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\text{外全对称}\\ \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma}{}^\sigma=0\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma=\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n-1}A_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-1}\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma=\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\xi_\varsigma\eta_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^d(\varsigma)\partial_d+m]A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma}{}^\sigma=0,A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\text{除}_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\text{外全对称}\\ \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma}{}^\sigma=0\\ A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}\xi_\varsigma\eta_\varsigma}{}^\sigma,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma=\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n-1}A_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-1}\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^d\partial_d+m^2)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}{}^\sigma=0,A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\text{除}_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\text{外全对称}\\ \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma}{}^\sigma=0,\gamma^a(\varsigma)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma}{}^\sigma=0,\partial^cA_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}{}^\sigma=0\\ A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=\mathbb{X}^c_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}{}^\sigma,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma=\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n-1}A_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-1}\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^d\partial_d+m^2)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}{}^\sigma=0,\partial^cA_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}{}^\sigma=0,A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\text{除}_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\text{外全对称}\\ \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}{}^\sigma=0,A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}{}^\sigma=A_{\underbrace{cb\cdot\cdot a}_{n}}{}^\sigma,\partial^aA_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}{}^\sigma=0\\ A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma=\mathbb{X}^c_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}{}^\sigma,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma=\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n-1}A_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-1}\eta_\varsigma\xi_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^d\partial_d+m^2)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}{}^\sigma=0,A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}{}^\sigma\text{除}^\sigma\text{外全对称}\\ \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}{}^\sigma=0,\partial^aA_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}{}^\sigma=0\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma=\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot\mathbb{X}^c_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}}^{n}A_{\underbrace{a\cdot\cdot c}_{n}}{}^\sigma\end{cases}$$

第三步$s=n+1/2$时，

$$2:\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma\zeta_\varsigma}_{2n+1}}{}^\sigma=0\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma\zeta_\varsigma}_{2n+1}}{}^\sigma\text{除}\sigma\text{外全对称}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma\zeta_\varsigma}_{2n+1}}{}^\sigma=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma\zeta_\varsigma}_{2n+1}}{}^\sigma\text{除}_{\zeta_\varsigma}{}^\sigma\text{外全对称}\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma\zeta_\varsigma}_{2n+1}}{}^\sigma=\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\zeta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n+1}}{}^\sigma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^d\partial_d+m^2)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}\zeta_\varsigma}{}^{\sigma}=0, A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}\zeta_\varsigma}{}^{\sigma}\text{除}_{\zeta_\varsigma}{}^{\sigma}\text{外全对称}\\ \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}\zeta_\varsigma}{}^{\sigma}=0,\partial^a A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}\zeta_\varsigma}{}^{\sigma}=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma\zeta_\varsigma}_{2n+1}}{}^{\sigma}=\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot\mathbb{X}^c_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}}^{n}A_{\underbrace{a\cdot\cdot c}_{n}\zeta_\varsigma}{}^{\sigma}\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma\zeta_\varsigma}_{2n+1}}{}^{\sigma}=\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\zeta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n+1}}{}^{\sigma}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^d\partial_d+m^2)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}\zeta_\varsigma}{}^{\sigma}=0, A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}\zeta_\varsigma}{}^{\sigma}\text{除}_{\zeta_\varsigma}{}^{\sigma}\text{外全对称}\\ \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}\zeta_\varsigma}{}^{\sigma}=0,\partial^a A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}\zeta_\varsigma}{}^{\sigma}=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma\zeta_\varsigma}_{2n+1}}{}^{\sigma}=\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot\mathbb{X}^c_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}}^{n}A_{\underbrace{a\cdot\cdot c}_{n}\zeta_\varsigma}{}^{\sigma}\\ [\gamma^d(\varsigma)\partial_d+m]A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^{\sigma}=0,\gamma^a(\varsigma)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^{\sigma}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^d(\varsigma)\partial_d+m]A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^{\sigma}=0, A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}\zeta_\varsigma}{}^{\sigma}\text{除}_{\zeta_\varsigma}{}^{\sigma}\text{外全对称}\\ \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}\zeta_\varsigma}{}^{\sigma}=0,\gamma^a(\varsigma)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^{\sigma}=0\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma\zeta_\varsigma}_{2n+1}}{}^{\sigma}=\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot\mathbb{X}^c_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}}^{n}A_{\underbrace{a\cdot\cdot c}_{n}\zeta_\varsigma}{}^{\sigma}\end{cases}$$

此步证明了$s=n$和$s=n+1/2$时命题都成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，以上两个定理同时得证。 □

6.4 对有质量自旋的Bargmann-Wigner方程的评述

从上可知，在平坦时空中Bargmann-Wigner方程在半整数自旋情形等价于Rarita-Schwinger方程 [21]，在整数自旋情形等价于Klein-Gordon方程 [23]，揭示了Bargmann-Wigner方程深刻丰富的物理内涵。但如果考虑一般的源项，并不能得到这个等价结果，只有满足一定条件的源项才能成立，并且只有自旋为$s=\frac{1}{2}$和$s=1$才能带源项，对于自旋为$s=\frac{3}{2}$或以上，方程内在自恰性要求源项必须为零。另外在弯曲时空中，由于广义协变导数项的存在导致这个等价结论不再成立，这个情况不如Penrose旋量方程或自旋方程的性质好。总的来说，Penrose旋量方程或自旋方程更适合描写无质量粒子，而Bargmann-Wigner方程更适合描写有质量粒子。

6.5 Bargmann-Wigner自旋方程形式

缩减一对矢量指标：(右边是Penrose简记法，用$\overset{P}{=}$表示。)

$$\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\delta^a_b\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}=\delta^{A_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}\qquad \delta^a_b\overset{P}{=}\delta^A_B\delta^{A'}_{B'}\tag{13.6}$$

$$\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\delta^{ab}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma}=\varepsilon^{AB}\varepsilon^{A'B'}\qquad \delta^{ab}\overset{P}{=}\varepsilon^{AB}\varepsilon^{A'B'}\tag{13.7}$$

$$\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta_{ab}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}=\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\qquad \delta_{ab}\overset{P}{=}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'}\tag{13.8}$$

引理6.5.1. $\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}$
$=\begin{bmatrix}0 & -i(\sigma,i\varsigma)^a\\ i(\sigma,-i\varsigma)_a & 0\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}0^a_{A_\varsigma B_\varsigma} & -i(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma B'_\varsigma}\\ i(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma B_\varsigma} & 0_a^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\end{bmatrix}$

6.6 Bargmann-Wigner自旋方程形式

定义6.6.1. $\begin{cases}S_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(e,s):=2sN^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{j_\varsigma}(s,3)S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(e,\varsigma)N^{k_\varsigma}_{\mu_\varsigma l_\varsigma}(s,3)\\ Z^{ak_\varsigma}_{\rho_\varsigma l_\varsigma}(s,3):=\gamma^a{}_{\rho_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s,3),\bar{Z}^{\rho_\varsigma l_\varsigma}_{aj_\varsigma}(s,3):=N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{j_\varsigma}(s,3)\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\rho_\varsigma}\end{cases}$

引理6.6.1. $\bar{Z}^{\rho_\varsigma l_\varsigma}_{aj_\varsigma}(s,3)Z^{bk_\varsigma}_{\rho_\varsigma l_\varsigma}(s,3)=\frac{1}{s}[s\delta_a{}^b\delta_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+iS_a{}^b{}_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(e,s)]$

证明: $\bar{Z}_{aj_\varsigma}^{\rho_\varsigma l_\varsigma}(s,3)Z_{\rho_\varsigma l_\varsigma}^{bk_\varsigma}(s,3)$
$= N_{j_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s,3)\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\rho_\varsigma}\gamma^b{}_{\rho_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}N_{\mu_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)$
$= N_{j_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s,3)(\gamma_a\gamma^b)_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}N_{\mu_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)$
$= N_{j_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s,3)[\delta_a{}^b + 2iS_a{}^b(e,\varsigma)]_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}N_{\mu_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)$
$= \delta_a{}^b\delta_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma} + N_{j_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s,3)2iS_a{}^b{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(e,\varsigma)N_{\mu_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)$
$= \frac{1}{s}[s\delta_a{}^b\delta_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma} + iS_a{}^b{}_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(e,s)]$ □

证明: $Z_{\rho'_\varsigma l'_\varsigma}^{ak_\varsigma}(s,3)\bar{Z}_{ak_\varsigma}^{\rho_\varsigma l_\varsigma}(s,3)$
$= \gamma^a{}_{\rho'_\varsigma}{}^{\lambda'_\varsigma}N_{\lambda'_\varsigma l'_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)N_{k_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s,3)\gamma_{a\lambda_\varsigma}{}^{\rho_\varsigma}$
$= \gamma^a{}_{\rho'_\varsigma}{}^{\lambda'_\varsigma}\gamma_{a\lambda_\varsigma}{}^{\rho_\varsigma}N_{\lambda'_\varsigma l'_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)N_{k_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s,3)$ □

定理6.6.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\rho_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s}} = 0 \Rightarrow \begin{cases}[\gamma^a(s)\partial_a + sm]\psi(e,s) = 0\\ [s\partial_a + iS_{ab}(e,s)\partial^b]\psi(e,s) = -m\gamma_a(s)\psi(e,s)\end{cases}$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)_{\rho_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}} = 0$
$\Leftrightarrow (\gamma^a\partial_a+m)_{\rho_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s}}(s,3)\psi_{k_\varsigma}(e,s) = 0$
$\Leftrightarrow (\gamma^a\partial_a+m)_{\rho_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}N_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2},3)\psi_{k_\varsigma}(e,s) = 0$
$\Leftrightarrow (\gamma^a\partial_a+m)_{\rho_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}N_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)\psi_{k_\varsigma}(e,s) = 0$
$\Rightarrow N_{j_\varsigma}^{\rho_\varsigma l_\varsigma}(s,3)(\gamma^a\partial_a+m)_{\rho_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}N_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)\psi_{k_\varsigma}(e,s) = 0$
$\Leftrightarrow [\gamma^a(s)\partial_a + sm]_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(e,s) = 0$
$\Leftrightarrow [\gamma^a(s)\partial_a + sm]\psi(e,s) = 0$ □

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)_{\rho_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}} = 0$
$\Leftrightarrow (\gamma^a\partial_a+m)_{\rho_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s}}(s,3)\psi_{k_\varsigma}(e,s) = 0$
$\Leftrightarrow (\gamma^a\partial_a+m)_{\rho_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}N_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2},3)\psi_{k_\varsigma}(e,s) = 0$
$\Leftrightarrow (\gamma^a\partial_a+m)_{\rho_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}N_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)\psi_{k_\varsigma}(e,s) = 0$
$\Leftrightarrow \gamma^a{}_{\rho_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}N_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)\partial_a\psi_{k_\varsigma}(e,s) = -mN_{\rho_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)\psi_{k_\varsigma}(e,s)$
$\Leftrightarrow Z_{\rho_\varsigma l_\varsigma}^{ak_\varsigma}(s,3)\partial_a\psi_{k_\varsigma}(e,s) = -mN_{\rho_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)\psi_{k_\varsigma}(e,s)$
$\Rightarrow \bar{Z}_{aj_\varsigma}^{\rho_\varsigma l_\varsigma}(s,3)Z_{\rho_\varsigma l_\varsigma}^{bk_\varsigma}(s,3)\partial_b\psi_{k_\varsigma}(e,s) = -m\bar{Z}_{aj_\varsigma}^{\rho_\varsigma l_\varsigma}(s,3)N_{\rho_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)\psi_{k_\varsigma}(e,s)$
$\Leftrightarrow [s\delta_{ab}\delta_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma} + iS_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(e,s)]\partial^b\psi_{k_\varsigma}(e,s) = -sm\bar{Z}_{aj_\varsigma}^{\rho_\varsigma l_\varsigma}(s,3)N_{\rho_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)\psi_{k_\varsigma}(e,s)$
$\Leftrightarrow [s\partial_a + iS_{ab}(e,s)\partial^b]_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(e,s) = -sm\bar{Z}_{aj_\varsigma}^{\rho_\varsigma l_\varsigma}(s,3)N_{\rho_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s,3)\psi_{k_\varsigma}(e,s)$
$\Leftrightarrow [s\partial_a + iS_{ab}(e,s)\partial^b]\psi(e,s) = -m\gamma_a(s)\psi(e,s)$ □

推论6.6.1. $\begin{cases}[\gamma^a(s)\partial_a + sm]\psi(e,s) = 0\\ [s\partial_a + iS_{ab}(e,s)\partial^b]\psi(e,s) = -m\gamma_a(s)\psi(e,s)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}[\gamma^a(s)\partial_a + sm]\psi(e,s) = 0\\ \frac{1}{s}\gamma_a(s)\gamma_b(s)\partial^b\psi(e,s) = [s\delta_{ab} + iS_{ab}(e,s)]\partial^b\psi(e,s)\end{cases}$

7 反对称性的Dirac方程 [5]

7.1 有质量反对称性Dirac方程的分析

定理7.1.1. $[\gamma^c(\varsigma)\partial_c + m]F_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]} = J, F_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} = -F_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}[-2mS_{ab}(e,\varsigma)\partial^a\mathbf{A}^b - \gamma_a(\varsigma)(im^2\mathbf{A}^a + \partial^a\Phi)]C + [m(\Phi + i\partial_a\mathbf{A}^a) + m\gamma_5(\varsigma)\phi - \gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\partial^a\phi]C = -\gamma_5(\varsigma)J\\ F = -[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi]C\end{cases}$$

证明: $[\gamma^a(\varsigma)\partial_a + m]F_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]} = J, F_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} = -F_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [\gamma^b(\varsigma)\partial_b + m]F_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]} = J \\ F = -[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi]C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [\gamma^b(\varsigma)\partial_b + m][C\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)C\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)C\Phi] = -J \\ F = -[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi]C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [\gamma^b(\varsigma)\partial_b + m][\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi] = -J\bar{C} \\ F = -[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi]C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\phi + \gamma_a(\varsigma)\partial^a\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\partial^a\mathbf{A}^b + \gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)(im^2\mathbf{A}^a + \partial^a\Phi) + m\gamma_5(\varsigma)\Phi = -J\bar{C} \\ F = -[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi]C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\phi + \gamma_a(\varsigma)\partial^a\phi - 2mS_{ab}(e,\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\partial^a\mathbf{A}^b + \gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)(im^2\mathbf{A}^a + \partial^a\Phi) + m\gamma_5(\varsigma)(\Phi + i\partial_a\mathbf{A}^a) = -J\bar{C} \\ F = -[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi]C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\gamma_5(\varsigma)\phi - \gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\partial^a\phi - 2mS_{ab}(e,\varsigma)\partial^a\mathbf{A}^b - \gamma_a(\varsigma)(im^2\mathbf{A}^a + \partial^a\Phi) + m(\Phi + i\partial_a\mathbf{A}^a) = -\gamma_5(\varsigma)J\bar{C} \\ F = -[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi]C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [-2mS_{ab}(e,\varsigma)\partial^a\mathbf{A}^b - \gamma_a(\varsigma)(im^2\mathbf{A}^a + \partial^a\Phi)]C + [m(\Phi + i\partial_a\mathbf{A}^a) + m\gamma_5(\varsigma)\phi - \gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\partial^a\phi]C = -\gamma_5(\varsigma)J \\ F = -[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi]C \end{cases}$$ □

7.2 无质量反对称性Dirac方程的分析

定理7.2.1. $\gamma^c(\varsigma)\partial_c F_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]} = J, F_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} = -F_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [-2mS_{ab}(e,\varsigma)\partial^a\mathbf{A}^b - \gamma_a(\varsigma)\partial^a\Phi]C + [im\partial_a\mathbf{A}^a - \gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\partial^a\phi]C = -\gamma_5(\varsigma)J \\ F = -[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi]C \end{cases}$$

证明: $\gamma^a(\varsigma)\partial_a F_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]} = J, F_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} = -F_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma^b(\varsigma)\partial_b F_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]} = J \\ F = -[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi]C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma^b(\varsigma)\partial_b[C\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)C\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)C\Phi] = -J \\ F = -[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi]C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma^b(\varsigma)\partial_b[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi] = -J\bar{C} \\ F = -[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi]C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_a(\varsigma)\partial^a\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\partial^a\mathbf{A}^b + \gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\partial^a\Phi = -J\bar{C} \\ F = -[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi]C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_a(\varsigma)\partial^a\phi - 2mS_{ab}(e,\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\partial^a\mathbf{A}^b + \gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\partial^a\Phi + im\gamma_5(\varsigma)\partial_a\mathbf{A}^a = -J\bar{C} \\ F = -[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi]C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\partial^a\phi - 2mS_{ab}(e,\varsigma)\partial^a\mathbf{A}^b - \gamma_a(\varsigma)\partial^a\Phi + im\partial_a\mathbf{A}^a = -\gamma_5(\varsigma)J\bar{C} \\ F = -[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi]C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [-2mS_{ab}(e,\varsigma)\partial^a\mathbf{A}^b - \gamma_a(\varsigma)\partial^a\Phi]C + [im\partial_a\mathbf{A}^a - \gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\partial^a\phi]C = -\gamma_5(\varsigma)J \\ F = -[\phi + im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a + \gamma_5(\varsigma)\Phi]C \end{cases}$$ □

7.3 有质量赝标量场方程

定理7.3.1. $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]F_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}=\frac{j}{m}\gamma_5(\varsigma)C\\F_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}=-F_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^a\partial_a+m^2)\Phi=-j\\F=\frac{1}{m}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a-m]\gamma_5(\varsigma)C\Phi\end{cases}$

证明:

$$\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]F_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}=\frac{j}{m}\gamma_5(\varsigma)C\\F_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}=-F_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[-2mS_{ab}(e,\varsigma)\partial^a\mathbf{A}^b-\gamma_a(\varsigma)(im^2\mathbf{A}^a+\partial^a\Phi)]C+[m(\Phi+i\partial_a\mathbf{A}^a)+m\gamma_5(\varsigma)\phi-\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\partial^a\phi]C=-\frac{j}{m}C\\F=-[\phi+im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a+\gamma_5(\varsigma)\Phi]C\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^a\mathbf{A}^b=\partial^b\mathbf{A}^a,(im^2\mathbf{A}^a+\partial^a\Phi)=0,\phi=0,\partial^a\phi=0\\m^2(\Phi+i\partial_a\mathbf{A}^a)=-j\\F=-[\phi+im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a+\gamma_5(\varsigma)\Phi]C\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^a\partial_a+m^2)\Phi=-j\\\mathbf{A}^a=im^{-2}\partial^a\Phi,\phi=0\\F=\frac{1}{m}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a-m]\gamma_5(\varsigma)C\Phi\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^a\partial_a+m^2)\Phi=-j\\F=\frac{1}{m}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a-m]\gamma_5(\varsigma)C\Phi\end{cases}$$ □

推论7.3.1. $[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m][\gamma^a(\varsigma)\partial_a-m]\gamma_5(\varsigma)C\Phi=j\gamma_5(\varsigma)C\Leftrightarrow(-\partial^a\partial_a+m^2)\Phi=-j$

7.4 无质量赝标量场方程

推论7.4.1. $\gamma^a(\varsigma)\partial_a[\gamma^b(\varsigma)\partial_b\gamma_5(\varsigma)C\Phi]=j\gamma_5(\varsigma)C\Leftrightarrow\gamma^a(\varsigma)\partial_a[\gamma^b(\varsigma)\partial_bC\Phi]=jC\Leftrightarrow\partial^a\partial_a\Phi=j$

推论7.4.2. $\gamma_a(\varsigma)\partial^a[\gamma_5(\varsigma)C\Phi]=\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)CJ^a\Leftrightarrow\gamma_a(\varsigma)\partial^a[C\Phi]=\gamma_a(\varsigma)CJ^a\Leftrightarrow\partial^a\Phi=J^a$

7.5 有质量赝矢量场方程

定理7.5.1. $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]F_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}=i\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)CJ^a\\F_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}=-F_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^b\partial_b+m^2)\mathbf{A}^a=-J^a,\partial^a\mathbf{A}^b=\partial^b\mathbf{A}^a\\F=i[\partial_a-m\gamma_a(\varsigma)]\gamma_5(\varsigma)C\mathbf{A}^a\end{cases}$

证明:

$$\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]F_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}=i\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)CJ^a\\F_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}=-F_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[-2mS_{ab}(e,\varsigma)\partial^a\mathbf{A}^b-\gamma_a(\varsigma)(im^2\mathbf{A}^a+\partial^a\Phi)]C+[m(\Phi+i\partial_a\mathbf{A}^a)+m\gamma_5(\varsigma)\phi-\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\partial^a\phi]C=i\gamma_a(\varsigma)CJ^a\\F=-[\phi+im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a+\gamma_5(\varsigma)\Phi]C\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^a\mathbf{A}^b=\partial^b\mathbf{A}^a,\Phi=-i\partial_a\mathbf{A}^a,\phi=0,\partial^a\phi=0\\(im^2\mathbf{A}^a+\partial^a\Phi)=-iJ^a\\F=-[\phi+im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)\mathbf{A}^a+\gamma_5(\varsigma)\Phi]C\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^b\partial_b+m^2)\mathbf{A}^a=-J^a\\\partial^a\mathbf{A}^b=\partial^b\mathbf{A}^a,\Phi=-i\partial_a\mathbf{A}^a,\phi=0\\F=i[\partial_a-m\gamma_a(\varsigma)]\gamma_5(\varsigma)C\mathbf{A}^a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^b\partial_b+m^2)\mathbf{A}^a=-J^a,\partial^a\mathbf{A}^b=\partial^b\mathbf{A}^a\\F=i[\partial_a-m\gamma_a(\varsigma)]\gamma_5(\varsigma)C\mathbf{A}^a\end{cases}$$ □

推论7.5.1. $[\gamma_b(\varsigma)\partial^b + m][\partial_a - m\gamma_a(\varsigma)]\gamma_5(\varsigma)C\mathbf{A}^a = \gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)CJ^a \Leftrightarrow (-\partial^b\partial_b + m^2)\mathbf{A}^a = -J^a, \partial^a\mathbf{A}^b = \partial^b\mathbf{A}^a$

证明: $[\gamma_b(\varsigma)\partial^b + m][\partial_a - m\gamma_a(\varsigma)]\gamma_5(\varsigma)C\mathbf{A}^a = \gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)CJ^a$
$\Leftrightarrow -2mS_{ab}(e,\varsigma)\partial^a\mathbf{A}^b - i\gamma_a(\varsigma)(m^2\mathbf{A}^a - \partial^a\partial_b\mathbf{A}^b) = i\gamma_a(\varsigma)J^a$
$\Leftrightarrow -\partial^a\partial_b\mathbf{A}^b + m^2\mathbf{A}^a = -J^a, \partial^a\mathbf{A}^b = \partial^b\mathbf{A}^a$
$\Leftrightarrow (-\partial^b\partial_b + m^2)\mathbf{A}^a = -J^a, \partial^a\mathbf{A}^b = \partial^b\mathbf{A}^a$ □

7.6 无质量赝矢量场方程

推论7.6.1. $\gamma_b(\varsigma)\partial^b[\partial_a - m\gamma_a(\varsigma)]\gamma_5(\varsigma)C\mathbf{A}^a = \gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)CJ^a \Leftrightarrow \partial^b\partial_b\mathbf{A}^a = J^a, \partial^a\mathbf{A}^b = \partial^b\mathbf{A}^a, \partial_a\mathbf{A}^a = 0$

证明: $\gamma_b(\varsigma)\partial^b[\partial_a - m\gamma_a(\varsigma)]\gamma_5(\varsigma)C\mathbf{A}^a = \gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)CJ^a$
$\Leftrightarrow [-2mS_{ab}(e,\varsigma)\partial^a\mathbf{A}^b + i\gamma_a(\varsigma)\partial^a\partial_b\mathbf{A}^b] + im\partial_a\mathbf{A}^a = i\gamma_a(\varsigma)J^a$
$\Leftrightarrow \partial^a\partial_b\mathbf{A}^b = J^a, \partial^a\mathbf{A}^b = \partial^b\mathbf{A}^a, \partial_a\mathbf{A}^a = 0$
$\Leftrightarrow \partial^b\partial_b\mathbf{A}^a = J^a, \partial^a\mathbf{A}^b = \partial^b\mathbf{A}^a, \partial_a\mathbf{A}^a = 0$ □

推论7.6.2. $\gamma_a(\varsigma)\partial^a[\gamma_5(\varsigma)C\partial_b\mathbf{A}^b] = \gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)CJ^a \Leftrightarrow \gamma_a(\varsigma)\partial^a[C\partial_b\mathbf{A}^b] = \gamma_a(\varsigma)CJ^a \Leftrightarrow \partial^a\partial_b\mathbf{A}^b = J^a$

推论7.6.3. $\gamma_b(\varsigma)\partial^b[\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)C\mathbf{A}^a] = \gamma_5(\varsigma)[jC + J^{ab}S_{ab}(e,\varsigma)]$
$\Leftrightarrow \gamma_b(\varsigma)\partial^b[\gamma_a(\varsigma)C\mathbf{A}^a] = jC + J^{ab}S_{ab}(e,\varsigma)$
$\Leftrightarrow \partial^a\mathbf{A}^b - \partial^b\mathbf{A}^a = J^{ab}, \partial_a\mathbf{A}^a = j$

第十四章　高级表象变换技术

自我评述：本章是对前面章节内容的进一步充实和深化，我换成从表象变换的角度去研究同一个物理问题，为后续的各种自旋粒子洛伦兹变换多项式表示的证明提供了一个数学基础，并同时用表象变换技术提出了全新的粒子耦合理论。

1 高级表象变换技巧

1.1 表象变换与常数不变张量

定理1.1.1. $\psi' = S\psi \Rightarrow \Lambda(\psi') = S\Lambda(\psi)S^{-1} \Leftrightarrow S = \Lambda(\psi')S\Lambda^{-1}(\psi) \Leftrightarrow S^{-1} = \Lambda(\psi)S^{-1}\Lambda^{-1}(\psi')$

所以表象变换就是一个二阶常数不变张量。写成分量形式如下：

推论1.1.1. $\psi'^{\alpha'} = S^{\alpha'}{}_{\alpha}\psi^{\alpha}, \psi^{\alpha} = S^{-1\alpha}{}_{\alpha'}\psi^{\alpha'}$

1.2 表象变换$\tilde{S}(s)$和常数矩阵$\Sigma(s)$的引入及其性质

1.2.1 表象变换矩阵$\tilde{S}(s)$的引入

定义1.2.1. $\tilde{S}(s) := \begin{bmatrix} \bar{N}(s) \\ \bar{X}(s) \end{bmatrix}, \tilde{S}^{+}(s) = [N(s), X(s)]$

推论1.2.1. $\begin{cases} \tilde{S}^{+}(s)\tilde{S}(s) = I_{4s} \Leftrightarrow N(s)\bar{N}(s) + X(s)\bar{X}(s) = I_{4s} \\ \tilde{S}(s)\tilde{S}^{+}(s) = I_{4s} \Leftrightarrow \bar{N}(s)N(s) = I_{2s+1}, \bar{X}(s)X(s) = I_{2s-1}, \bar{N}(s)X(s) = 0, \bar{X}(s)N(s) = 0 \end{cases}$

推论1.2.2. $\begin{cases} \tilde{S}(s)[\sigma(\frac{1}{2}) \otimes I_{2s} + I \otimes \sigma(s-\frac{1}{2})] = \begin{bmatrix} \sigma(s) & 0 \\ 0 & \sigma(s-1) \end{bmatrix} \tilde{S}(s) \\ [\sigma(\frac{1}{2}) \otimes I_{2s} + I \otimes \sigma(s-\frac{1}{2})]\tilde{S}^{+}(s) = \tilde{S}^{+}(s) \begin{bmatrix} \sigma(s) & 0 \\ 0 & \sigma(s-1) \end{bmatrix} \end{cases}$

推论1.2.3. $\tilde{S}(s)[\sigma(\frac{1}{2}) \otimes I_{2s} + I \otimes \sigma(s-\frac{1}{2})]\tilde{S}^{+}(s) = \begin{bmatrix} \sigma(s) & 0 \\ 0 & \sigma(s-1) \end{bmatrix}$

推论1.2.4. $\tilde{S}(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}} \begin{bmatrix} \sqrt{2s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & \sqrt{2s-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2s-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2s-1} & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2s} \\ 0 & -\sqrt{2s-1} & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2s-2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{1} & \sqrt{2s-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1_\varsigma}(s) \sqcup N_{2_\varsigma}(s) \\ \sqrt{1-\frac{1}{2s}} \cdot \bar{N}_{2_\varsigma}(s-\frac{1}{2}) \sqcup [-\bar{N}_{1_\varsigma}(s-\frac{1}{2})] \end{bmatrix}$

推论1.2.5. $\tilde{S}^{+}(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}} \begin{bmatrix} \sqrt{2s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2s-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2s-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2s-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2s-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2s-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2s-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2s} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.2.2 表象变换矩阵$\tilde{S}(s)$的几个具体表示

推论1.2.6.

$$\tilde{S}(\tfrac{1}{2}, 1, \cdot\cdot) = \begin{bmatrix} \sqrt{1} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{1} & \sqrt{1} & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{1} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{1} & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}, \cdots$$

推论1.2.7.

$$\tilde{S}^+(\tfrac{1}{2},1,\cdot\cdot)=\begin{bmatrix}\sqrt{1}&0\\0&\sqrt{1}\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0&0\\0&\sqrt{1}&0&-\sqrt{1}\\0&\sqrt{1}&0&\sqrt{1}\\0&0&\sqrt{2}&0\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{1}&0&0&-\sqrt{2}&0\\0&\sqrt{2}&0&0&\sqrt{1}&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&-\sqrt{1}\\0&0&\sqrt{1}&0&0&\sqrt{2}\\0&0&0&\sqrt{3}&0&0\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix}\sqrt{4}&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{1}&0&0&0&-\sqrt{3}&0&0\\0&\sqrt{3}&0&0&0&\sqrt{1}&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0&-\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0&\sqrt{2}&0\\0&0&0&\sqrt{3}&0&0&0&-\sqrt{1}\\0&0&0&\sqrt{1}&0&0&0&\sqrt{3}\\0&0&0&0&\sqrt{4}&0&0&0\end{bmatrix},\cdots$$

1.2.3 常数矩阵$O(s)$的引入及具体表示

定义1.2.2.
$$\begin{cases}X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2})N_{B_\varsigma l_\varsigma}^{n_\varsigma}(s):=\frac{1}{2s}O^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s)\Leftrightarrow X^{A_\varsigma}(s)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2})\bar{N}_{B_\varsigma}(s)=\frac{1}{2s}O(s)\\ \bar{X}(s)\sigma(\tfrac{1}{2})\otimes I_{2s}N(s)=\frac{1}{2s}O(s)\Leftrightarrow\bar{N}(s)\sigma(\tfrac{1}{2})\otimes I_{2s}X(s)=\frac{1}{2s}O^+(s)\end{cases}$$

推论1.2.8.
$$\begin{cases}O^{\alpha_\varsigma}(s)=[e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1)}O^{\beta_\varsigma}(s)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}\\ O^{+\alpha'_\varsigma}(s)=[e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\gamma}]_{\alpha'_\varsigma}{}^{\beta'_\varsigma}e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}O^{+\beta'_\varsigma}(s)e^{-(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1)}\end{cases}$$

定理1.2.1.
$$\begin{cases}O^+(s)\cdot O(s)=s(2s-1)I_{2s+1},O(s)\cdot O^+(s)=s(2s+1)I_{2s-1}\\ O(s)\cdot\sigma(s)=\sigma(s-1)\cdot O(s),\sigma(s)\cdot O^+(s)=O^+(s)\cdot\sigma(s-1)\end{cases}$$

证明: $\tilde{S}(s)\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}\tilde{S}^+(s)\cdot\tilde{S}(s)\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}\tilde{S}^+(s)=\frac{1}{2s}\begin{bmatrix}\sigma(s)&O^+(s)\\O(s)&-\sigma(s-1)\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2s}\begin{bmatrix}\sigma(s)&O^+(s)\\O(s)&-\sigma(s-1)\end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{4}=\frac{1}{4s^2}\begin{bmatrix}\sigma^2(s)+O^+(s)\cdot O(s)&\sigma(s)\cdot O^+(s)-O^+(s)\cdot\sigma(s-1)\\O(s)\cdot\sigma(s)-\sigma(s-1)\cdot O(s)&O(s)\cdot O^+(s)+\sigma^2(s-1)\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}O^+(s)\cdot O(s)=s(2s-1)I_{2s+1},O(s)\cdot O^+(s)=s(2s+1)I_{2s-1}\\ O(s)\cdot\sigma(s)=\sigma(s-1)\cdot O(s),\sigma(s)\cdot O^+(s)=O^+(s)\cdot\sigma(s-1)\end{cases}$$ □

推论1.2.9. $O_x(s)=-\sqrt{s(s-\frac{1}{2})}[\bar{N}_{1_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{1_\varsigma}(s)-\bar{N}_{2_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{2_\varsigma}(s)]$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\sqrt{2s\cdot(2s-1)}&0&\sqrt{2\cdot1}&0&0&0\\0&-\sqrt{(2s-1)\cdot(2s-2)}&0&\sqrt{3\cdot2}&0&0\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\\0&0&0&-\sqrt{2\cdot1}&0&\sqrt{2s\cdot(2s-1)}\end{bmatrix}$$

推论1.2.10. $O_y(s)=-i\sqrt{s(s-\frac{1}{2})}[\bar{N}_{1_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{1_\varsigma}(s)+\bar{N}_{2_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{2_\varsigma}(s)]$

$$=\frac{i}{2}\begin{bmatrix}-\sqrt{2s\cdot(2s-1)}&0&-\sqrt{2\cdot1}&0&0&0\\0&-\sqrt{(2s-1)\cdot(2s-2)}&0&-\sqrt{3\cdot2}&0&0\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\\0&0&0&-\sqrt{2\cdot1}&0&-\sqrt{2s\cdot(2s-1)}\end{bmatrix}$$

推论1.2.11. $O_z(s)=\sqrt{s(s-\frac{1}{2})}[\bar{N}_{1_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{2_\varsigma}(s)+\bar{N}_{2_\varsigma}(s-\frac{1}{2})\bar{N}_{1_\varsigma}(s)]$

$$=\begin{bmatrix}0&\sqrt{1\cdot(2s-1)}&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{2\cdot(2s-2)}&0&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{(2s-1)\cdot1}&0\end{bmatrix},\bar{N}_{1_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2})\bar{N}_{2_\varsigma}(s)=\bar{N}_{2_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2})\bar{N}_{1_\varsigma}(s)$$

推论1.2.12. $O(2)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\sqrt{4\cdot3}&0&\sqrt{2\cdot1}&0&0\\0&-\sqrt{3\cdot2}&0&\sqrt{3\cdot2}&0\\0&0&-\sqrt{2\cdot1}&0&\sqrt{4\cdot3}\end{bmatrix},\frac{i}{2}\begin{bmatrix}-\sqrt{4\cdot3}&0&-\sqrt{2\cdot1}&0&0\\0&-\sqrt{3\cdot2}&0&-\sqrt{3\cdot2}&0\\0&0&-\sqrt{2\cdot1}&0&-\sqrt{4\cdot3}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&\sqrt{1\cdot3}&0&0&0\\0&0&\sqrt{2\cdot2}&0&0\\0&0&0&\sqrt{3\cdot1}&0\end{bmatrix}$

1.2.4 常数矩阵$\Sigma(s)$的引入及具体表示

定义1.2.3. $\Sigma(s):=\tilde{S}(s)\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}\tilde{S}^+(s)=\frac{1}{2s}\begin{bmatrix}\sigma(s)&O^+(s)\\O(s)&-\sigma(s-1)\end{bmatrix},\tilde{S}(s)=\begin{bmatrix}\bar{N}(s)\\\bar{X}(s)\end{bmatrix}$

推论1.2.13. $\Sigma(1)=\frac{1}{4}\{\begin{bmatrix}0&\sqrt{1\cdot2}&0&-\sqrt{2\cdot1}\\\sqrt{1\cdot2}&0&\sqrt{2\cdot1}&0\\0&\sqrt{2\cdot1}&0&\sqrt{2\cdot1}\\-\sqrt{2\cdot1}&0&\sqrt{2\cdot1}&0\end{bmatrix},i\begin{bmatrix}0&-\sqrt{1\cdot2}&0&\sqrt{2\cdot1}\\\sqrt{1\cdot2}&0&-\sqrt{2\cdot1}&0\\0&\sqrt{2\cdot1}&0&\sqrt{2\cdot1}\\-\sqrt{2\cdot1}&0&-\sqrt{2\cdot1}&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&0&0&2\sqrt{1\cdot1}\\0&0&-2&0\\0&2\sqrt{1\cdot1}&0&0\end{bmatrix}\}$

推论1.2.14. $O(1)=\frac{1}{2}\{\begin{bmatrix}-\sqrt{2\cdot1}&0&\sqrt{2\cdot1}\end{bmatrix},i\begin{bmatrix}-\sqrt{2\cdot1}&0&-\sqrt{2\cdot1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&2\sqrt{1\cdot1}&0\end{bmatrix}\}$

推论1.2.15. $\Sigma(\frac{3}{2})$

$$=\frac{1}{6}\{\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1\cdot3} & 0 & 0 & -\sqrt{3\cdot2} & 0 \\ \sqrt{1\cdot3} & 0 & \sqrt{2\cdot2} & 0 & 0 & -\sqrt{2\cdot1} \\ 0 & \sqrt{2\cdot2} & 0 & \sqrt{3\cdot1} & \sqrt{2\cdot1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3\cdot1} & 0 & 0 & \sqrt{3\cdot2} \\ -\sqrt{3\cdot2} & 0 & \sqrt{2\cdot1} & 0 & 0 & -\sqrt{1\cdot1} \\ 0 & -\sqrt{2\cdot1} & 0 & \sqrt{3\cdot2} & -\sqrt{1\cdot1} & 0 \end{bmatrix}, i\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{1\cdot3} & 0 & 0 & \sqrt{3\cdot2} & 0 \\ \sqrt{1\cdot3} & 0 & -\sqrt{2\cdot2} & 0 & 0 & \sqrt{2\cdot1} \\ 0 & \sqrt{2\cdot2} & 0 & -\sqrt{3\cdot1} & \sqrt{2\cdot1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3\cdot1} & 0 & 0 & \sqrt{3\cdot2} \\ -\sqrt{3\cdot2} & 0 & -\sqrt{2\cdot1} & 0 & 0 & \sqrt{1\cdot1} \\ 0 & -\sqrt{2\cdot1} & 0 & -\sqrt{3\cdot2} & -\sqrt{1\cdot1} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\sqrt{1\cdot2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2\sqrt{2\cdot1} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{1\cdot2} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2\cdot1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\}$$

推论1.2.16.

$$\Sigma(2)=\frac{1}{8}\{\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1\cdot4} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{4\cdot3} & 0 & 0 \\ \sqrt{1\cdot4} & 0 & \sqrt{2\cdot3} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3\cdot2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2\cdot3} & 0 & \sqrt{3\cdot2} & 0 & \sqrt{2\cdot1} & 0 & -\sqrt{2\cdot1} \\ 0 & 0 & \sqrt{3\cdot2} & 0 & \sqrt{4\cdot1} & 0 & \sqrt{3\cdot2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4\cdot1} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4\cdot3} \\ -\sqrt{4\cdot3} & 0 & \sqrt{2\cdot1} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{1\cdot2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3\cdot2} & 0 & \sqrt{3\cdot2} & 0 & -\sqrt{1\cdot2} & 0 & -\sqrt{2\cdot1} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2\cdot1} & 0 & \sqrt{4\cdot3} & 0 & -\sqrt{2\cdot1} & 0 \end{bmatrix}, i\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{1\cdot4} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4\cdot3} & 0 & 0 \\ \sqrt{1\cdot4} & 0 & -\sqrt{2\cdot3} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3\cdot2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2\cdot3} & 0 & -\sqrt{3\cdot2} & 0 & \sqrt{2\cdot1} & 0 & \sqrt{2\cdot1} \\ 0 & 0 & \sqrt{3\cdot2} & 0 & -\sqrt{4\cdot1} & 0 & \sqrt{3\cdot2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4\cdot1} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4\cdot3} \\ -\sqrt{4\cdot3} & 0 & -\sqrt{2\cdot1} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1\cdot2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3\cdot2} & 0 & -\sqrt{3\cdot2} & 0 & -\sqrt{1\cdot2} & 0 & \sqrt{2\cdot1} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2\cdot1} & 0 & -\sqrt{4\cdot3} & 0 & -\sqrt{2\cdot1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$,\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{1\cdot3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2\cdot2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{3\cdot1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{1\cdot3} & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2\cdot2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{3\cdot1} & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\}$$

1.2.5 无质量粒子的等价分离方程

定理1.2.2. $(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\psi}(s,\varsigma)=i\tilde{J}(s,\varsigma)\Leftrightarrow\begin{cases}[\frac{1}{s}\sigma(s),-i\varsigma]^a\partial_a\psi(s,\varsigma)=i\bar{N}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\\ \frac{1}{s}O(s)\cdot\nabla\psi(s,\varsigma)=i\bar{X}(s)\tilde{J}(s,\varsigma)\end{cases}$

推论1.2.17. $\psi(s,\varsigma)=\bar{N}(s)\tilde{\psi}(s,\varsigma),0_{2s-1}=\bar{X}(s)\tilde{\psi}(s,\varsigma)$

1.3 表象变换矩阵$\hat{S}(s)$的引入

定义1.3.1. $\hat{S}(s)=\begin{bmatrix}\tilde{S}(s) & 0\\ 0 & I_{4^s-4s}\end{bmatrix}I\otimes\hat{S}(s-\frac{1}{2}),\tilde{S}(s)=\begin{bmatrix}\bar{N}(s)\\ \bar{X}(s)\end{bmatrix}$

推论1.3.1. $\hat{S}(s=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\cdots)=I,\begin{bmatrix}\bar{N}(1)\\ \bar{X}(1)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar{N}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{N}(1)]\\ \bar{X}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{N}(1)]\\ I\otimes\bar{X}(1)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar{N}(2)[I\otimes[\bar{N}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{N}(1)]]]\\ \bar{X}(2)[I\otimes[\bar{N}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{N}(1)]]]\\ I\otimes[\bar{X}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{N}(1)]]\\ I\otimes I\otimes\bar{X}(1)\end{bmatrix},\cdots$

推论1.3.2. $\hat{S}(s=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\cdots)=I,\begin{bmatrix}\bar{N}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]\\ \bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar{N}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(1)]\\ \bar{X}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(1)]\\ I\otimes[\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]]\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar{N}(2)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{3}{2})]\\ \bar{X}(2)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{3}{2})]\\ I\otimes[\bar{X}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(1)]\\ I\otimes I\otimes[\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]]\end{bmatrix},\cdots$

推论1.3.3. $\hat{S}(s=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\cdots)=I,\begin{bmatrix}\bar{\Gamma}(1)\\ \bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar{\Gamma}(\frac{3}{2})\\ \bar{X}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(1)]\\ I\otimes[\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]]\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar{\Gamma}(2)\\ \bar{X}(2)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{3}{2})]\\ I\otimes[\bar{X}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(1)]\\ I\otimes I\otimes[\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]]\end{bmatrix},\cdots$

推论1.3.4. $\hat{S}(s)=\begin{bmatrix}\bar{\Gamma}(s)\\ \bar{X}(s)[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})]\\ I\otimes[\bar{X}(s-\frac{1}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{3}{2})]]\\ \cdots\\ (I\otimes)^{2s-3}[\bar{X}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(1)]]\\ (I\otimes)^{2s-2}[\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]]\end{bmatrix},\hat{S}(s)\hat{S}^{+}(s)=\hat{S}^{+}(s)\hat{S}(s)=I_{4^s}$

推论1.3.5. $\hat{S}^{+}(s)=[\Gamma(s),[I\otimes\Gamma(s)]X(s-\frac{1}{2}),I\otimes[[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]X(s-\frac{3}{2})],\cdots,I\otimes\cdots I\otimes[[I\otimes\Gamma(\frac{1}{2})]X(1)]]$

推论1.3.6. $\bar{\Gamma}(s)\Gamma(s)=I_{2s+1},\bar{\Gamma}(s)\cdot I_{4^k}\otimes\{[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2}-k)]X(s-k)\}=0;k=0,\frac{1}{2},1,\cdots,s-1$

推论1.3.7. $\hat{S}(s)[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2^{2s-1}}]\hat{S}^{+}(s)=\frac{1}{2s}\begin{bmatrix}\sigma(s) & O^{+}(s) & 0\\ O(s) & -\sigma(s-1) & 0\\ 0 & 0 & 2s\sigma\otimes I_{(2^{2s-1}-2s)}\end{bmatrix}$

1.3.1 表象变换矩阵$\hat{S}(s)$的几个具体表示

推论1.3.8. $\hat{S}(\frac{1}{2})=I,\hat{S}^{+}(\frac{1}{2})=I$

推论1.3.9. $\hat{S}(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0&0\\0&\sqrt{1}&\sqrt{1}&0\\0&0&0&\sqrt{2}\\0&-\sqrt{1}&\sqrt{1}&0\end{bmatrix},\hat{S}^{+}(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0&0\\0&\sqrt{1}&0&-\sqrt{1}\\0&\sqrt{1}&0&\sqrt{1}\\0&0&\sqrt{2}&0\end{bmatrix}$

推论1.3.10. $\hat{S}(\frac{3}{2})=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{6}&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{2}&\sqrt{2}&0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&0&\sqrt{2}&\sqrt{2}&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{6}\\0&-\sqrt{4}&\sqrt{1}&0&\sqrt{1}&0&0&0\\0&0&0&-\sqrt{1}&0&-\sqrt{1}&\sqrt{4}&0\\0&0&-\sqrt{3}&0&\sqrt{3}&0&0&0\\0&0&0&-\sqrt{3}&0&\sqrt{3}&0&0\end{bmatrix},\hat{S}^{+}(\frac{3}{2})=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{6}&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{2}&0&0&-\sqrt{4}&0&0&0\\0&\sqrt{2}&0&0&\sqrt{1}&0&-\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&-\sqrt{1}&0&-\sqrt{3}\\0&\sqrt{2}&0&0&\sqrt{1}&0&\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&-\sqrt{1}&0&\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{2}&0&0&\sqrt{4}&0&0\\0&0&0&\sqrt{6}&0&0&0&0\end{bmatrix}$

推论1.3.11. $\hat{S}(2)=\frac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix}\sqrt{12}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{3}&\sqrt{3}&0&\sqrt{3}&0&0&0&\sqrt{3}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&0&\sqrt{2}&\sqrt{2}&0&0&\sqrt{2}&\sqrt{2}&0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{3}&0&0&0&\sqrt{3}&0&\sqrt{3}&\sqrt{3}&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{12}\\0&-\sqrt{9}&\sqrt{1}&0&\sqrt{1}&0&0&0&\sqrt{1}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}&\sqrt{2}&0&0&-\sqrt{2}&\sqrt{2}&0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&-\sqrt{1}&0&0&0&-\sqrt{1}&0&-\sqrt{1}&\sqrt{9}&0\\0&0&-\sqrt{8}&0&\sqrt{2}&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-\sqrt{8}&0&\sqrt{2}&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&0&-\sqrt{2}&0&\sqrt{8}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&0&-\sqrt{2}&0&\sqrt{8}&0&0\\0&0&0&0&-\sqrt{6}&0&0&0&\sqrt{6}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&-\sqrt{6}&0&0&0&\sqrt{6}&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&-\sqrt{6}&0&0&0&\sqrt{6}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&-\sqrt{6}&0&0&0&\sqrt{6}&0&0&0&0\end{bmatrix}$

推论1.3.12. $\hat{S}^{+}(2)=\frac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix}\sqrt{12}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{3}&0&0&0&-\sqrt{9}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{3}&0&0&0&\sqrt{1}&0&0&-\sqrt{8}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&-\sqrt{8}&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{3}&0&0&0&\sqrt{1}&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&-\sqrt{6}&0&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&-\sqrt{6}&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&0&-\sqrt{6}&0\\0&0&0&\sqrt{3}&0&0&0&-\sqrt{1}&0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&0&-\sqrt{6}\\0&\sqrt{3}&0&0&0&\sqrt{1}&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&\sqrt{6}&0&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&\sqrt{6}&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&0&\sqrt{6}&0\\0&0&0&\sqrt{3}&0&0&0&-\sqrt{1}&0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&0&\sqrt{6}\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&\sqrt{8}&0&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{3}&0&0&0&-\sqrt{1}&0&0&0&\sqrt{8}&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{3}&0&0&0&\sqrt{9}&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{12}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

推论1.3.13. $\bar{X}(s=1,\frac{3}{2},2)\bar{\Gamma}(s=1,\frac{3}{2},2,\cdots)$
$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&-\sqrt{1}&\sqrt{1}&0\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0&-2&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&-1&2&0\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix}0&-3&\sqrt{1}&0&\sqrt{1}&0&0&0&\sqrt{1}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}&\sqrt{2}&0&0&-\sqrt{2}&\sqrt{2}&0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&-\sqrt{1}&0&0&0&-\sqrt{1}&0&-\sqrt{1}&3&0\end{bmatrix}$

1.4 关于表象变换矩阵$\hat{S}(s)$的一个重要定理及其证明

定义1.4.1. $\pi(s,s'):=\Omega(s')\otimes I_{2(s-s')-1}+I_{4^{s'}}\otimes\sigma(s-s'-1);s'\geq 0,s-s'\geq 1$

引理1.4.1. $\hat{S}(s)\Omega(s=1,\frac{3}{2},2)\hat{S}^{+}(s)=\begin{bmatrix}\sigma(1)&0\\0&\sigma(0)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sigma(\frac{3}{2})&0&0\\0&\sigma(\frac{1}{2})&0\\0&0&\sigma(\frac{1}{2})\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sigma(2)&0&0&0\\0&\sigma(1)&0&0\\0&0&\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})&0\\0&0&0&\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})\end{bmatrix}$

定理1.4.1.

$$\hat{S}(s)\Omega(s)=\begin{bmatrix}\sigma(s)&0&0&0&0&0\\0&\pi(s,0)&0&0&0&0\\0&0&\pi(s,\frac{1}{2})&0&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&0&\pi(s,s-\frac{3}{2})&0\\0&0&0&0&0&\pi(s,s-1)\end{bmatrix}\hat{S}(s)[\Leftrightarrow]\Omega(s)\hat{S}^{+}(s)=\hat{S}^{+}(s)\begin{bmatrix}\sigma(s)&0&0&0&0&0\\0&\pi(s,0)&0&0&0&0\\0&0&\pi(s,\frac{1}{2})&0&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&0&\pi(s,s-\frac{3}{2})&0\\0&0&0&0&0&\pi(s,s-1)\end{bmatrix}$$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$s'=1$时成立：$\hat{S}(1)\Omega(1)=\begin{bmatrix}\sigma(1)&0\\0&\sigma(0)\end{bmatrix}\hat{S}(1)$

第二步：假设$s'=s-\frac{1}{2}$时成立：

$$\hat{S}(s-\tfrac{1}{2})\Omega(s-\tfrac{1}{2})=\begin{bmatrix}\sigma(s-\frac{1}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \pi(s-\frac{1}{2},0) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pi(s-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi(s-\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi(s-\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}-1)\end{bmatrix}\hat{S}(s-\tfrac{1}{2})$$

第三步：$s'=s$时，$\hat{S}(s)\Omega(s)=\begin{bmatrix}\tilde{S}(s) & 0\\ 0 & I_{4^s-4s}\end{bmatrix}[I\otimes\hat{S}(s-\frac{1}{2})][\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2^{2s-1}}+I\otimes\Omega(s-\frac{1}{2})]$

$$=\begin{bmatrix}\tilde{S}(s) & 0\\ 0 & I_{4^s-4s}\end{bmatrix}\{\sigma(\tfrac{1}{2})\otimes[I_{2^{2s-1}}\hat{S}(s)]+\{I\otimes[\hat{S}(s-\tfrac{1}{2})\Omega(s-\tfrac{1}{2})]\}\}$$

$$=\begin{bmatrix}\tilde{S}(s) & 0\\ 0 & I_{4^s-4s}\end{bmatrix}[\sigma(\tfrac{1}{2})\otimes I_{2^{2s-1}}+I\otimes\begin{bmatrix}\sigma(s-\frac{1}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \pi(s-\frac{1}{2},0) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pi(s-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi(s-\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi(s-\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}-1)\end{bmatrix}][I\otimes\hat{S}(s-\tfrac{1}{2})]$$

$$=\begin{bmatrix}\tilde{S}(s) & 0\\ 0 & I_{4^s-4s}\end{bmatrix}[\begin{bmatrix}\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \pi(s,\frac{1}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pi(s,\frac{3}{2}) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi(s,s-\frac{3}{2}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi(s,s-1)\end{bmatrix}][I\otimes\hat{S}(s-\tfrac{1}{2})]$$

$$=\begin{bmatrix}\tilde{S}(s)[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2})] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \pi(s,\frac{1}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pi(s,\frac{3}{2}) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi(s,s-\frac{3}{2}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi(s,s-1)\end{bmatrix}[I\otimes\hat{S}(s-\tfrac{1}{2})]$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \pi(s,0) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pi(s,\frac{1}{2}) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi(s,s-\frac{3}{2}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi(s,s-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{S}(s) & 0\\ 0 & I_{4^s-4s}\end{bmatrix}[I\otimes\hat{S}(s-\tfrac{1}{2})]$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \pi(s,0) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pi(s,\frac{1}{2}) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi(s,s-\frac{3}{2}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi(s,s-1)\end{bmatrix}\hat{S}(s)$$

此步证明了$s'=s$时成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

推论1.4.1. $\hat{S}(s)\Omega(s)\hat{S}^{+}(s)=\begin{bmatrix}\sigma(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \pi(s,0) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pi(s,\frac{1}{2}) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi(s,s-\frac{3}{2}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi(s,s-1)\end{bmatrix}$

终于严格证明了以上的结论，之前的一些常数不变张量的复杂性质便可以轻松得到，如下：

推论1.4.2.

$$\begin{cases}\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)=\sigma(s)\bar{\Gamma}(s),\Omega(s)\Gamma(s)=\Gamma(s)\sigma(s)\\ \bar{X}(s)[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})]\Omega(s)=\sigma(s-1)\bar{X}(s)[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})],\Omega(s)[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]X(s)=[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]X(s)\sigma(s-1)\end{cases}$$

推论1.4.3.

$$\begin{cases}I_{4^{s-1}}\otimes\{\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]\}\Omega(s)=\Omega(s-1)I_{4^{s-1}}\otimes\{\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]\}\\ \Omega(s)I_{4^{s-1}}\otimes\{[I\otimes\Gamma(\frac{1}{2})]X(1)\}=I_{4^{s-1}}\otimes\{[I\otimes\Gamma(\frac{1}{2})]X(1)\}\Omega(s-1)\end{cases}$$

推论1.4.4.

$$\begin{cases}I_{4^k}\otimes\{\bar{X}(s-k)[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2}-k)]\}\Omega(s)=\pi(s,k)I_{4^k}\otimes\{\bar{X}(s-k)[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2}-k)]\}\\ \Omega(s)I_{4^k}\otimes\{[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2}-k)]X(s-k)\}=I_{4^k}\otimes\{[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2}-k)]X(s-k)\}\pi(s,k)\end{cases}$$

推论1.4.5.

$$\begin{cases}\sigma(s)=\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)\Gamma(s)\\ \sigma(s-1)=\bar{X}(s)[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})]\Omega(s)[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]X(s)\\ \Omega(s-1)=I_{4^{s-1}}\otimes\{\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]\}\Omega(s)I_{4^{s-1}}\otimes\{[I\otimes\Gamma(\frac{1}{2})]X(1)\}\\ \pi(s,k)=I_{4^k}\otimes\{\bar{X}(s-k)[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2}-k)]\}\Omega(s)I_{4^k}\otimes\{[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2}-k)]X(s-k)\}\end{cases}$$

1.5 常数矩阵$\pi(s,s')$的表象变换

推论1.5.1. $\pi(s,s')=\Omega(s'-\frac{1}{2})\otimes I_{4(s-s')-2}+I_{2^{2s'-1}}\otimes[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2(s-s')-1}+I\otimes\sigma(s-s'-1)]$

证明：$\pi(s,s'):=\Omega(s')\otimes I_{2(s-s')-1}+I_{4^{s'}}\otimes\sigma(s-s'-1)$

$=[\Omega(s'-\frac{1}{2})\otimes I+I_{2^{2s'-1}}\otimes\sigma(\frac{1}{2})]\otimes I_{2(s-s')-1}+I_{4^{s'}}\otimes\sigma(s-s'-1)$

$=\Omega(s'-\frac{1}{2})\otimes I_{4(s-s')-2}+I_{2^{2s'-1}}\otimes[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2(s-s')-1}+I\otimes\sigma(s-s'-1)]$ □

推论1.5.2. $[I_{2^{2s'-1}}\otimes\tilde{S}(s-s'-\frac{1}{2})]\pi(s,s')=\begin{bmatrix}\pi(s,s'-\frac{1}{2}) & 0\\ 0 & \pi(s-1,s'-\frac{1}{2})\end{bmatrix}[I_{2^{2s'-1}}\otimes\tilde{S}(s-s'-\frac{1}{2})];s'\geq\frac{1}{2},s-s'\geq\frac{3}{2}$

证明：$[I_{2^{2s'-1}}\otimes\tilde{S}(s-s'-\frac{1}{2})]\pi(s,s')$

$=[I_{2^{2s'-1}}\otimes\tilde{S}(s-s'-\frac{1}{2})]\{\Omega(s'-\frac{1}{2})\otimes I_{4(s-s')-2}+I_{2^{2s'-1}}\otimes[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2(s-s')-1}+I\otimes\sigma(s-s'-1)]\}$

$=\{\Omega(s'-\frac{1}{2})\otimes I_{4(s-s')-2}+I_{2^{2s'-1}}\otimes\begin{bmatrix}\sigma(s-s'-\frac{1}{2}) & 0\\ 0 & \sigma(s-s'-\frac{3}{2})\end{bmatrix}\}[I_{2^{2s'-1}}\otimes\tilde{S}(s-s'-\frac{1}{2})]$

$=\begin{bmatrix}\Omega(s'-\frac{1}{2})\otimes I_{2(s-s')}+I_{2^{2s'-1}}\otimes\sigma(s-s'-\frac{1}{2}) & 0\\ 0 & \Omega(s'-\frac{1}{2})\otimes I_{2(s-s')-2}+I_{2^{2s'-1}}\otimes\sigma(s-s'-\frac{3}{2})\end{bmatrix}[I_{2^{2s'-1}}\otimes\tilde{S}(s-s'-\frac{1}{2})]$

$=\begin{bmatrix}\pi(s,s'-\frac{1}{2}) & 0\\ 0 & \pi(s-1,s'-\frac{1}{2})\end{bmatrix}[I_{2^{2s'-1}}\otimes\tilde{S}(s-s'-\frac{1}{2})]$ □

利用以上推理反复迭代可以得到以下推论：

推论1.5.3. $I_{2^{2s'-2}}\otimes\{\begin{bmatrix}\tilde{S}(s-s') & 0\\ 0 & \tilde{S}(s-s'-1)\end{bmatrix}[I\otimes\tilde{S}(s-s'-\frac{1}{2})]\}\pi(s,s');s'\geq 1,s-s'\geq 2$

$=\begin{bmatrix}\pi(s,s'-1) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \pi(s-1,s'-1) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pi(s-1,s'-1) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \pi(s-2,s'-1)\end{bmatrix}I_{2^{2s'-2}}\otimes\{\begin{bmatrix}\tilde{S}(s-s') & 0\\ 0 & \tilde{S}(s-s'-1)\end{bmatrix}[I\otimes\tilde{S}(s-s'-\frac{1}{2})]\}$

推论1.5.4.

$$I_{2^{2s'-3}}\otimes\{\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{S}(s-s'+\frac{1}{2}) & 0\\ 0 & \tilde{S}(s-s'-\frac{1}{2})\end{bmatrix}[I\otimes\tilde{S}(s-s')] & 0\\ 0 & \begin{bmatrix}\tilde{S}(s-s'-\frac{1}{2}) & 0\\ 0 & \tilde{S}(s-s'-\frac{3}{2})\end{bmatrix}[I\otimes\tilde{S}(s-s'-1)]\end{bmatrix}[I\otimes I\otimes\tilde{S}(s-s'-\frac{1}{2})]\}\pi(s,s')$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\pi(s,s'-\frac{3}{2}) & 0\\ 0 & \pi(s-1,s'-\frac{3}{2})\end{bmatrix} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \begin{bmatrix}\pi(s-1,s'-\frac{3}{2}) & 0\\ 0 & \pi(s-2,s'-\frac{3}{2})\end{bmatrix} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \begin{bmatrix}\pi(s-1,s'-\frac{3}{2}) & 0\\ 0 & \pi(s-2,s'-\frac{3}{2})\end{bmatrix} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix}\pi(s-2,s'-\frac{3}{2}) & 0\\ 0 & \pi(s-3,s'-\frac{3}{2})\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$I_{2^{2s'-3}}\otimes\{\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{S}(s-s'+\frac{1}{2}) & 0\\ 0 & \tilde{S}(s-s'-\frac{1}{2})\end{bmatrix}[I\otimes\tilde{S}(s-s')] & 0\\ 0 & \begin{bmatrix}\tilde{S}(s-s'-\frac{1}{2}) & 0\\ 0 & \tilde{S}(s-s'-\frac{3}{2})\end{bmatrix}[I\otimes\tilde{S}(s-s'-1)]\end{bmatrix}[I\otimes I\otimes\tilde{S}(s-s'-\frac{1}{2})]\}$$

$;s'\geq\frac{3}{2},s-s'\geq\frac{5}{2}$

1.6 常数矩阵$\pi(s,s')$的表象变换一般形式

推论1.6.1. $\{I_{2^{2s'-1}}\otimes\begin{bmatrix}[I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\end{bmatrix}\}\pi(s,s')=[\pi(s,s'-\frac{1}{2})\oplus\pi(s-1,s'-\frac{1}{2})]\{I_{2^{2s'-1}}\otimes\begin{bmatrix}[I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\end{bmatrix}\}$

$;s'\geq\frac{1}{2},s-s'\geq\frac{3}{2}$

推论1.6.2. $\{I_{2^{2s'-2}}\otimes\begin{bmatrix}[I_{2^0}\bar{N}(s-s')][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\bar{X}(s-s')][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\bar{N}(s-s'-1)][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\bar{X}(s-s'-1)][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\end{bmatrix}\}\pi(s,s');s'\geq 1,s-s'\geq 2$

$$=\{[\pi(s,s'-1)\oplus\pi(s-1,s'-1)]\oplus[\pi(s-1,s'-1)\oplus\pi(s-2,s'-1)]\}\{I_{2^{2s'-2}}\otimes\begin{bmatrix}[I_{2^0}\bar{N}(s-s')][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\bar{X}(s-s')][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\bar{N}(s-s'-1)][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\bar{X}(s-s'-1)][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\end{bmatrix}\}$$

推论1.6.3.

$$\{I_{2^{2s'-3}}\otimes\begin{bmatrix}[I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'+\frac{1}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s')][I_{2^2}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'+\frac{1}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s')][I_{2^2}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s')][I_{2^2}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s')][I_{2^2}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s'-1)][I_{2^2}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s'-1)][I_{2^2}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{3}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s'-1)][I_{2^2}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{3}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s'-1)][I_{2^2}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\end{bmatrix}\}\pi(s,s');s'\geq\tfrac{3}{2},s-s'\geq\tfrac{5}{2}$$

$$=\{[\pi(s,s'-\tfrac{3}{2})\oplus\pi(s-1,s'-\tfrac{3}{2})]\oplus[\pi(s-1,s'-\tfrac{3}{2})\oplus\pi(s-2,s'-\tfrac{3}{2})]\otimes I\oplus[\pi(s-2,s'-\tfrac{3}{2})\oplus\pi(s-3,s'-\tfrac{3}{2})]\}$$

$$\{I_{2^{2s'-3}}\otimes\begin{bmatrix}[I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'+\frac{1}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s')][I_{2^2}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'+\frac{1}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s')][I_{2^2}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s')][I_{2^2}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s')][I_{2^2}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s'-1)][I_{2^2}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s'-1)][I_{2^2}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{3}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s'-1)][I_{2^2}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{3}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s'-1)][I_{2^2}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\end{bmatrix}\}$$

推论1.6.4. $s'\geq\frac{l+1}{2},s-s'\geq\frac{l+3}{2}$

$$\{I_{2^{2s'-l-1}}\otimes\begin{bmatrix}[I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2}+\frac{l}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s'+\frac{l-2}{2})]\cdot\cdot[I_{2^{l-1}}\otimes\bar{N}(s-s')][I_{2^l}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2}+\frac{l}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s'+\frac{l-2}{2})]\cdot\cdot[I_{2^{l-1}}\otimes\bar{N}(s-s')][I_{2^l}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2}+\frac{l-2}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s'+\frac{l-2}{2})]\cdot\cdot[I_{2^{l-1}}\otimes\bar{N}(s-s')][I_{2^l}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2}+\frac{l-2}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s'+\frac{l-2}{2})]\cdot\cdot[I_{2^{l-1}}\otimes\bar{N}(s-s')][I_{2^l}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ \cdots\cdots\\ [I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2}-\frac{l-2}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{l}{2})]\cdot\cdot[I_{2^{l-1}}\otimes\bar{X}(s-s'-1)][I_{2^l}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2}-\frac{l-2}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{l}{2})]\cdot\cdot[I_{2^{l-1}}\otimes\bar{X}(s-s'-1)][I_{2^l}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2}-\frac{l}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{l}{2})]\cdot\cdot[I_{2^{l-1}}\otimes\bar{X}(s-s'-1)][I_{2^l}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2}-\frac{l}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{l}{2})]\cdot\cdot[I_{2^{l-1}}\otimes\bar{X}(s-s'-1)][I_{2^l}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\end{bmatrix}\}\pi(s,s')$$

$$=\{[\pi(s,s'-\tfrac{l+1}{2})\oplus\pi(s-1,s'-\tfrac{l+1}{2})]\oplus[\pi(s-1,s'-\tfrac{l+1}{2})\oplus\pi(s-2,s'-\tfrac{l+1}{2})]\otimes I\oplus[\pi(s-l,s'-\tfrac{l+1}{2})\oplus\pi(s-l-1,s'-\tfrac{l+1}{2})]\}$$

$$\{I_{2^{2s'-l-1}}\otimes\begin{bmatrix}[I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2}+\frac{l}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s'+\frac{l-2}{2})]\cdot\cdot[I_{2^{l-1}}\otimes\bar{N}(s-s')][I_{2^l}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2}+\frac{l}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s'+\frac{l-2}{2})]\cdot\cdot[I_{2^{l-1}}\otimes\bar{N}(s-s')][I_{2^l}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2}+\frac{l-2}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s'+\frac{l-2}{2})]\cdot\cdot[I_{2^{l-1}}\otimes\bar{N}(s-s')][I_{2^l}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2}+\frac{l-2}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s'+\frac{l-2}{2})]\cdot\cdot[I_{2^{l-1}}\otimes\bar{N}(s-s')][I_{2^l}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ \cdots\cdots\\ [I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2}-\frac{l-2}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{l}{2})]\cdot\cdot[I_{2^{l-1}}\otimes\bar{X}(s-s'-1)][I_{2^l}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2}-\frac{l-2}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{l}{2})]\cdot\cdot[I_{2^{l-1}}\otimes\bar{X}(s-s'-1)][I_{2^l}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{N}(s-s'-\frac{1}{2}-\frac{l}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{l}{2})]\cdot\cdot[I_{2^{l-1}}\otimes\bar{X}(s-s'-1)][I_{2^l}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\\ [I_{2^0}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2}-\frac{l}{2})][I_{2^1}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{l}{2})]\cdot\cdot[I_{2^{l-1}}\otimes\bar{X}(s-s'-1)][I_{2^l}\otimes\bar{X}(s-s'-\frac{1}{2})]\end{bmatrix}\}$$

1.7 表象变换矩阵$S(s)$的引入和性质

推论1.7.1. $\hat{S}(s)=\begin{bmatrix}\bar{\Gamma}(s)\\ \bar{X}(s)[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})]\\ I\otimes[\bar{X}(s-\frac{1}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(s-1)]]\\ \cdots\\ (I\otimes)^{2s-3}[\bar{X}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(1)]]\\ (I\otimes)^{2s-2}[\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{S}(s)I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})\\ I\otimes[\bar{X}(s-\frac{1}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(s-1)]]\\ \cdots\\ (I\otimes)^{2s-3}[\bar{X}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(1)]]\\ (I\otimes)^{2s-2}[\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]]\end{bmatrix}$

推论1.7.2. $S(s)=\begin{bmatrix} I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2}) \\ I\otimes[\bar{X}(s-\frac{1}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(s-1)]] \\ \cdots \\ (I\otimes)^{2s-3}[\bar{X}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(1)]] \\ (I\otimes)^{2s-2}[\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]] \end{bmatrix}=I\otimes\hat{S}(s-\frac{1}{2}),S(s)S^{+}(s)=S^{+}(s)S(s)=I_{4^s}$

推论1.7.3. $S(s)\Omega(s)S^{+}(s)=$

$$\begin{bmatrix} \sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega(\frac{1}{2})\otimes I_{2s-2}+I\otimes\sigma(s-\frac{3}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega(1)\otimes I_{2s-3}+[I\otimes]^2\sigma(s-2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega(s-\frac{3}{2})\otimes I_2+[I\otimes]^{2s-1}\sigma(\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega(s-1)+[I\otimes]^{2s-2}\sigma(0) \end{bmatrix}$$

定义1.7.1. $\pi(s,s'):=\Omega(s')\otimes I_{2(s-s')-1}+I_{4^{s'}}\otimes\sigma(s-s'-1);s'\geq 0,s-s'\geq 1$

推论1.7.4. $S(s)(\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2^{2s-1}})S^{+}(s)=\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2^{2s-1}}$

推论1.7.5. $(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)^a\partial_a\hat{\varphi}(s,\varsigma)=i\hat{K}(s,\varsigma)\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)^a\partial_a S(s)\hat{\varphi}(s,\varsigma)=iS(s)\hat{K}(s,\varsigma)$

推论1.7.6. $(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)^a\partial_a\hat{\psi}(s,\varsigma)=i\hat{J}(s,\varsigma)\Leftrightarrow\begin{cases}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\psi}(s,\varsigma)=i\tilde{J}(s,\varsigma)\\(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}-2s},-i\varsigma)^a\partial_a o(s,\varsigma)=io(s,\varsigma)\end{cases}$

推论1.7.7. $(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)^a\partial_a\hat{\psi}(s,\varsigma)=i\hat{J}(s,\varsigma)\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^a\partial_a\tilde{\psi}(s,\varsigma)=i\tilde{J}(s,\varsigma)$

1.8 引力子的表象变换

推论1.8.1. $\hat{S}_0(2)=\begin{bmatrix} \bar{N}(2)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{3}{2})] \\ \bar{X}(2)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{3}{2})] \\ \bar{N}(1)\{I\otimes[\bar{X}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(1)]\} \\ \bar{X}(1)\{I\otimes[\bar{X}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(1)]\} \\ \bar{N}(1)\{I\otimes I\otimes[\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]]\} \\ \bar{X}(1)\{I\otimes I\otimes[\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]]\} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{S}(2)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{3}{2})] \\ \tilde{S}(1)\{I\otimes[\bar{X}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(1)]\} \\ \tilde{S}(1)\{I\otimes I\otimes[\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]]\} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{S}(2) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S}(1) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{S}(1) \end{bmatrix}[I\otimes\hat{S}(\frac{3}{2})]$

定理1.8.1. $\hat{S}_0(2)\Omega(2)\hat{S}_0^{+}(2)=\begin{bmatrix} \sigma(2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma(0) \end{bmatrix},\hat{S}_0(s)[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_8]\hat{S}_0^{+}(s)=\begin{bmatrix} \Sigma(2) & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma(1) & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma(1) \end{bmatrix}$

推论1.8.2. $[\sigma\otimes I_8,-i\varsigma]^a\partial_a\hat{\varphi}(2,\varsigma)=i\hat{K}(2,\varsigma)\Leftrightarrow\begin{cases}[2\Sigma(2),-i\varsigma]^a\partial_a\tilde{\varphi}(2,\varsigma)=i\tilde{K}(2,\varsigma)\\ [2\Sigma(1),-i\varsigma]^a\partial_a\tilde{\varphi}(1,\varsigma)=i\tilde{K}(1,\varsigma)\\ [2\Sigma(1'),-i\varsigma]^a\partial_a\tilde{\varphi}(1',\varsigma)=i\tilde{K}(1',\varsigma)\end{cases}$

定理1.8.2. $S_0(2)=\begin{bmatrix} \bar{N}(2)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{3}{2})] \\ \bar{X}(2)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{3}{2})] \\ \bar{N}(1)\{I\otimes[\bar{X}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(1)]\} \\ \bar{N}(1)\{I\otimes I\otimes[\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]]\} \\ \bar{X}(1)\{I\otimes[\bar{X}(\frac{3}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(1)]\} \\ \bar{X}(1)\{I\otimes I\otimes[\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]]\} \end{bmatrix},S_0(2)\Omega(2)S_0^{+}(2)=\begin{bmatrix} \sigma(2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma(0) \end{bmatrix}$

1.9 常数矩阵$\pi(s,s')$的深入分析

推论1.9.1.

$$\begin{cases}\pi(s,0):=\sigma(s-1),s\geq 1;\pi(1,0)=0\\ \pi(s,\frac{1}{2}):=\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2(s-1)}+I\otimes\sigma(s-1-\frac{1}{2}),s\geq\frac{3}{2};\pi(\frac{3}{2},\frac{1}{2})=\sigma(\frac{1}{2}),\pi(2,\frac{1}{2})=\pi(2,1)=\Omega(1)\\ \pi(s,s-1):=\Omega(s-1),s\geq 1\\ \pi(s,s'):=\phi,s-s'\leq\frac{1}{2}\\ \Omega(s)=\pi(s+1,s)=\pi(s+1,s-\frac{1}{2}),s\geq\frac{1}{2}\end{cases}$$

推论1.9.2. $\Omega(s)=\pi(s+1,s)=\pi(s+1,s-\frac{1}{2}),s\geq\frac{1}{2}$
$\to[\pi(s+1,s-1)\oplus\pi(s,s-1)],s\geq 1$
$\to[\pi(s+1,s-\frac{3}{2})\oplus\pi(s,s-\frac{3}{2})]\oplus[\pi(s,s-\frac{3}{2})],s\geq\frac{3}{2}$
$\to[\pi(s+1,s-2)\oplus\pi(s,s-2)]\oplus[\pi(s,s-2)\oplus\pi(s-1,s-2)]^2,s\geq 2$
$\to[\pi(s+1,s-\frac{5}{2})\oplus\pi(s,s-\frac{5}{2})]\oplus[\pi(s,s-\frac{5}{2})\oplus\pi(s-1,s-\frac{5}{2})]^3\oplus[\pi(s-1,s-\frac{5}{2})]^2,s\geq\frac{5}{2}$
$\to[\pi(s+1,s-3)\oplus\pi(s,s-3)]\oplus[\pi(s,s-3)\oplus\pi(s-1,s-3)]^4\oplus[\pi(s-1,s-3)\oplus\pi(s-2,s-3)]^5,s\geq 3$
$\to\cdots\cdots$

自我评述：只要按以上方法，任何一个$\Omega(s)$都可以通过表象变换具体分解成多个单自旋态的直和，这个问题原则上算是彻底解决了。实际运用还需作一些计算，将具体的表象变换显式地写出来以便使用。同时也构造性地证明了$\Omega(s)$确实完全由单自旋态组成，没有多余成分。$\Omega(s)$不会同时包含玻色和费米自旋态，它表征了一个玻色或费米多重态。并且它遍历了高低玻色或费米自旋态，除最高自旋态外一般情况下其它自旋态均有多个冗余态。

1.10 多重态自旋方程

定义1.10.1. $[(S^+\sqrt{[S\Omega(s)S^+]^2+\frac{1}{4}}S-\frac{1}{2})\partial_a+iS_{ab}(\Omega(s),\varsigma)\partial^b]\Psi(x)=0,\partial^a\partial_a\Psi(x)=0;$
$\Omega(s)\times\Omega(s)=i\Omega(s),S\Omega(s)S^+=\sigma(s)\oplus\sigma(s-1)\oplus\cdots\oplus\sigma(\frac{1}{2})|\sigma(0)$

推论1.10.1.
$$\begin{cases}\{\tilde{S}^+(s)[sI_{2s+1}\oplus(s-1)I_{2s-1}]\tilde{S}(s)\partial_a+iS_{ab}(\pi(s+1,\frac{1}{2}),\varsigma)\partial^b\}\Psi(x)=0,\partial^a\partial_a\Psi(x)=0\\ \{[s-1+N(s)\bar{N}(s)]\partial_a+iS_{ab}(\pi(s+1,\frac{1}{2}),\varsigma)\partial^b\}\Psi(x)=0,\partial^a\partial_a\Psi(x)=0\\ \{[s-X(s)\bar{X}(s)]\partial_a+iS_{ab}(\pi(s+1,\frac{1}{2}),\varsigma)\partial^b\}\Psi(x)=0,\partial^a\partial_a\Psi(x)=0\end{cases}$$

1.11 自旋$s=2$的表象变换性质一

推论1.11.1.
$$S(1\otimes 1)=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{6}&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{3}&0&\sqrt{3}&0&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{1}&0&\sqrt{4}&0&\sqrt{1}&0&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{3}&0&\sqrt{3}&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{6}\\0&-\sqrt{3}&0&\sqrt{3}&0&0&0&0&0\\0&0&-\sqrt{3}&0&0&0&\sqrt{3}&0&0\\0&0&0&0&0&-\sqrt{3}&0&\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}&0&\sqrt{2}&0&0\end{bmatrix},S^+(1\otimes 1)=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{6}&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{3}&0&0&0&-\sqrt{3}&0&0&0\\0&0&\sqrt{1}&0&0&0&-\sqrt{3}&0&\sqrt{2}\\0&\sqrt{3}&0&0&0&\sqrt{3}&0&0&0\\0&0&\sqrt{4}&0&0&0&0&0&-\sqrt{2}\\0&0&0&\sqrt{3}&0&0&0&-\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{1}&0&0&0&\sqrt{3}&0&\sqrt{2}\\0&0&0&\sqrt{3}&0&0&0&\sqrt{3}&0\\0&0&0&0&\sqrt{6}&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

推论1.11.2. $\frac{1}{\sqrt{3}}[I_3\otimes\begin{bmatrix}-\sqrt{2}&-1\\-1&\sqrt{2}\end{bmatrix}][\sigma(1)\otimes I]\frac{1}{\sqrt{3}}[I_3\otimes\begin{bmatrix}-\sqrt{2}&-1\\-1&\sqrt{2}\end{bmatrix}]=\sigma(1)\otimes I$

定理1.11.1. $S(1\otimes 1)[\sigma(1)\otimes I_3+I_3\otimes\sigma(1)]S^+(1\otimes 1)=\begin{bmatrix}\sigma(2)&0&0\\0&\sigma(1)&0\\0&0&\sigma(0)\end{bmatrix}$

推论1.11.3. $$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{6}&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{3}&0&\sqrt{3}&0&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{1}&0&\sqrt{4}&0&\sqrt{1}&0&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{3}&0&\sqrt{3}&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{6}\end{bmatrix}[\sigma(1)\otimes I_3+I_3\otimes\sigma(1)]\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{6}&0&0&0&0\\0&\sqrt{3}&0&0&0\\0&0&\sqrt{1}&0&0\\0&\sqrt{3}&0&0&0\\0&0&\sqrt{4}&0&0\\0&0&0&\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{1}&0&0\\0&0&0&\sqrt{3}&0\\0&0&0&0&\sqrt{6}\end{bmatrix}=\sigma(2)$$

推论1.11.4. $$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0&-\sqrt{3}&0&\sqrt{3}&0&0&0&0&0\\0&0&-\sqrt{3}&0&0&0&\sqrt{3}&0&0\\0&0&0&0&0&-\sqrt{3}&0&\sqrt{3}&0\end{bmatrix}[\sigma(1)\otimes I_3+I_3\otimes\sigma(1)]\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0&0&0\\-\sqrt{3}&0&0\\0&-\sqrt{3}&0\\\sqrt{3}&0&0\\0&0&0\\0&0&-\sqrt{3}\\0&\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{3}\\0&0&0\end{bmatrix}=\sigma(1)$$

推论1.11.5. $$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0&0&\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}&0&\sqrt{2}&0&0\end{bmatrix}[\sigma(1)\otimes I_3+I_3\otimes\sigma(1)]\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0\\0\\\sqrt{2}\\0\\-\sqrt{2}\\0\\\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix}=\sigma(0)$$

1.12 自旋$s=2$的表象变换性质二

定理1.12.1. $S(1\otimes 1)[\sigma(1)\otimes I_3]S^{+}(1\otimes 1)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sigma(2) & \frac{1}{\sqrt{3}}O^{+}(2) & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}}O(2) & \sigma(1) & \frac{2}{\sqrt{3}}0^{+}(2)\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}0(2) & \sigma(0)\end{bmatrix},0(2)=\{\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix},i\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}\}$

1.13 更一般的表象变换性质(猜测)

定义1.13.1. $S(s_1\otimes s_2\cdots\otimes s_n)[\sigma(s_1)\otimes I_*+I_{2s_1+1}\otimes\sigma(s_2)\otimes I_*+\cdots]S^{+}(s_1\otimes s_2\cdots\otimes s_n)=?$

推论1.13.1. $\tilde{S}(s):=S[\frac{1}{2}\otimes(s-\frac{1}{2})],\hat{S}(s)?:=S[(\frac{1}{2})_1\otimes(\frac{1}{2})_2\cdots\otimes(\frac{1}{2})_{2s}]$

2 高级表象变换的物理应用

2.1 一般的新型耦合理论

2.1.1 s-自旋粒子的新型耦合理论

推论2.1.1.

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^a\partial_a\varphi(s,\varsigma)=iJ(s,\varsigma)\\ \psi(s,\varsigma)=\bar{N}(s)\varphi(s,\varsigma)\\ \psi(s-1,\varsigma)=\bar{X}(s)\varphi(s,\varsigma)\end{cases}\overset{S(s)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}[\frac{1}{s}\sigma(s),-i\varsigma]^a\partial_a\psi(s,\varsigma)=-\frac{1}{s}O^{+}(s)\cdot\nabla\psi(s-1,\varsigma)+i\bar{N}(s)J(s,\varsigma)\\ [\frac{1}{s}\sigma(s-1),i\varsigma]^a\partial_a\psi(s-1,\varsigma)=\frac{1}{s}O(s)\cdot\nabla\psi(s,\varsigma)-i\bar{X}(s)J(s,\varsigma)\end{cases}$$

推论2.1.2.

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^a\partial_a\varphi(s,\varsigma)=iJ(s,\varsigma)\\ \psi(s,\varsigma)=\bar{N}(s)\varphi(s,\varsigma)=0\\ \psi(s-1,\varsigma)=\bar{X}(s)\varphi(s,\varsigma)\end{cases}\overset{S(s)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\frac{1}{s}O^{+}(s)\cdot\nabla\psi(s-1,\varsigma)=i\bar{N}(s)J(s,\varsigma)\\ [\frac{1}{s}\sigma(s-1),i\varsigma]^a\partial_a\psi(s-1,\varsigma)=-i\bar{X}(s)J(s,\varsigma)\end{cases}$$

推论2.1.3.

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^a\partial_a\varphi(s,\varsigma)=iJ(s,\varsigma)\\ \psi(s,\varsigma)=\bar{N}(s)\varphi(s,\varsigma)\\ \psi(s-1,\varsigma)=\bar{X}(s)\varphi(s,\varsigma)=0\end{cases}\overset{S(s)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}[\frac{1}{s}\sigma(s),-i\varsigma]^a\partial_a\psi(s,\varsigma)=i\bar{N}(s)J(s,\varsigma)\\ \frac{1}{s}O(s)\cdot\nabla\psi(s,\varsigma)=i\bar{X}(s)J(s,\varsigma)\end{cases}$$

2.1.2 低一阶导数s-自旋粒子的新型耦合理论

推论2.1.4.

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I_4,-i\varsigma)_a\varphi^{ab}(s,\varsigma)=iJ(s,\varsigma)\\ \psi(s,\varsigma)=\bar{N}(s)\varphi(s,\varsigma)\\ \psi(s-1,\varsigma)=\bar{X}(s)\varphi(s,\varsigma)\end{cases}\overset{S(s)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}[\frac{1}{s}\sigma(s),-i\varsigma]_a\psi^{ab}(s,\varsigma)=-\frac{1}{s}O_i^{+}(s)\psi^{ib}(s-1,\varsigma)+i\bar{N}(s)J(s,\varsigma)\\ [\frac{1}{s}\sigma(s-1),i\varsigma]_a\psi^{ab}(s-1,\varsigma)=\frac{1}{s}O_i(s)\psi^{ib}(s,\varsigma)-i\bar{X}(s)J(s,\varsigma)\end{cases}$$

推论2.1.5.

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I_4,-i\varsigma)_a\varphi^{ab}(s,\varsigma)=iJ(s,\varsigma)\\ \psi(s,\varsigma)=\bar{N}(s)\varphi(s,\varsigma)=0\\ \psi(s-1,\varsigma)=\bar{X}(s)\varphi(s,\varsigma)\end{cases}\overset{S(s)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\frac{1}{s}O_i^{+}(s)\psi^{ib}(s-1,\varsigma)=i\bar{N}(s)J(s,\varsigma)\\ [\frac{1}{s}\sigma(s-1),i\varsigma]_a\psi^{ab}(s-1,\varsigma)=-i\bar{X}(s)J(s,\varsigma)\end{cases}$$

推论2.1.6.

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I_4,-i\varsigma)_a\varphi^{ab}(s,\varsigma)=iJ(s,\varsigma)\\ \psi(s,\varsigma)=\bar{N}(s)\varphi(s,\varsigma)\\ \psi(s-1,\varsigma)=\bar{X}(s)\varphi(s,\varsigma)=0\end{cases}\overset{S(s)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}[\frac{1}{s}\sigma(s),-i\varsigma]_a\psi^{ab}(s,\varsigma)=i\bar{N}(s)J(s,\varsigma)\\ \frac{1}{s}O_i(s)\psi^{ib}(s,\varsigma)=i\bar{X}(s)J(s,\varsigma)\end{cases}$$

2.2 具体的新型耦合理论

2.2.1 引力微子和中微子的新型耦合理论

推论2.2.1.

$$\begin{cases}[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2}),-i\varsigma]^a\partial_a\psi(\frac{3}{2},\varsigma)=-\frac{2}{3}O^+(\frac{3}{2})\cdot\nabla\psi(\frac{1}{2},\varsigma)\\ [-\frac{2}{3}\sigma(\frac{1}{2}),-i\varsigma]^a\partial_a\psi(\frac{1}{2},\varsigma)=-\frac{2}{3}O(\frac{3}{2})\cdot\nabla\psi(\frac{3}{2},\varsigma)\\ [2\sigma(\frac{1}{2}),-i\varsigma]^a\partial_a\psi(\frac{1}{2},\varsigma)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}i\varsigma\partial_\pi\psi(\frac{1}{2},\varsigma)=\frac{1}{2}O(\frac{3}{2})\cdot\nabla\psi(\frac{3}{2},\varsigma)\\ i\varsigma\partial_\pi\psi(\frac{3}{2},\varsigma)=\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla\psi(\frac{3}{2},\varsigma)+\frac{2}{3}O^+(\frac{3}{2})\cdot\nabla\psi(\frac{1}{2},\varsigma)\\ 4\sigma(\frac{1}{2})\cdot\nabla\psi(\frac{1}{2},\varsigma)-O(\frac{3}{2})\cdot\nabla\psi(\frac{3}{2},\varsigma)=0\end{cases}$$

2.2.2 引力子、光子和标量场新型耦合理论

推论2.2.2.

$$\begin{cases}[\frac{1}{2}\sigma(2),-i\varsigma]^a\partial_a\psi(2,\varsigma)=-\frac{1}{2}O^+(2)\cdot\nabla\psi(1,\varsigma)+i\bar{N}(2)J(2,\varsigma)\\ [-\frac{1}{2}\sigma(1),-i\varsigma]^a\partial_a\psi(1,\varsigma)=-\frac{1}{2}O(2)\cdot\nabla\psi(2,\varsigma)+i\bar{X}(2)J(2,\varsigma)\\ [\sigma(1),-i\varsigma]^a\partial_a\psi(1,\varsigma)=-O^+(1)\cdot\nabla\phi+i\bar{N}(1)J(1,\varsigma)\\ [-\sigma(0),-i\varsigma]^a\partial_a\phi=-O(1)\cdot\nabla\psi(1,\varsigma)+i\bar{X}(1)J(1,\varsigma)\end{cases}$$

推论2.2.3.

$$\begin{cases}[\frac{1}{2}\sigma(2),-i\varsigma]^a\partial_a\psi(2,\varsigma)=-\frac{1}{2}O^+(2)\cdot\nabla\psi(1,\varsigma)\\ [-\frac{1}{2}\sigma(1),-i\varsigma]^a\partial_a\psi(1,\varsigma)=-\frac{1}{2}O(2)\cdot\nabla\psi(2,\varsigma)\\ [\sigma(1),-i\varsigma]^a\partial_a\psi(1,\varsigma)=-O^+(1)\cdot\nabla\phi\\ [-\sigma(0),-i\varsigma]^a\partial_a\phi=-O(1)\cdot\nabla\psi(1,\varsigma)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}i\varsigma\partial_\pi\phi=O(1)\cdot\nabla\psi(1,\varsigma)\\ i\varsigma\partial_\pi\psi(1,\varsigma)=\frac{1}{3}O^+(1)\cdot\nabla\phi+\frac{1}{3}O(2)\cdot\nabla\psi(2,\varsigma)\\ i\varsigma\partial_\pi\psi(2,\varsigma)=\frac{1}{2}\sigma(2)\cdot\nabla\psi(2,\varsigma)+\frac{1}{2}O^+(2)\cdot\nabla\psi(1,\varsigma)\\ 2O^+(1)\cdot\nabla\phi+3\sigma(1)\cdot\nabla\psi(1,\varsigma)-O(2)\cdot\nabla\psi(2,\varsigma)=0\end{cases}$$

2.2.3 引力子、光子和标量场新型耦合的自旋方程

推论2.2.4. $\{\partial_a+iS_{ab}[\sigma(1),\varsigma]\partial^b\}\otimes I_3\psi(1\otimes 1,\varsigma)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\{2\partial_a+iS_{ab}[\sigma(2),\varsigma]\partial^b\}\psi(2,\varsigma)+iS_{ab}[\frac{1}{\sqrt{3}}O^+(2),\varsigma]\partial^b\psi(1,\varsigma)=0\\ iS_{ab}[\frac{1}{\sqrt{3}}O(2),\varsigma]\partial^b\psi(2,\varsigma)+\{2\partial_a+iS_{ab}[\sigma(1),\varsigma]\partial^b\}\psi(1,\varsigma)+iS_{ab}[\frac{2}{\sqrt{3}}0^+(2),\varsigma]\partial^b\psi(0,\varsigma)=0\\ iS_{ab}[\frac{2}{\sqrt{3}}0(2),\varsigma]\partial^b\psi(1,\varsigma)+\{2\partial_a+iS_{ab}[\sigma(0),\varsigma]\partial^b\}\psi(0,\varsigma)=0\end{cases}$$

2.2.4 一个束缚光子的理论

推论2.2.5. 无平面波解（Z轴）

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I_4,-i\varsigma)^a\partial_a\varphi(2,\varsigma)=0\\ \psi(2,\varsigma)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}O^+(2)\cdot\nabla\psi(1,\varsigma)=0\\ [\sigma(1),2i\varsigma]^a\partial_a\psi(1,\varsigma)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}O^+(2)S_m^+(1)\cdot\nabla\Psi(1,\varsigma)=0\\ (\gamma,2i\varsigma)^a\partial_a\Psi(1,\varsigma)=0\end{cases}$$

2.2.5 一个推广的新引力理论

推论2.2.6.

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I_4,-i\varsigma)_a\varphi^{ab}(2,\varsigma)=iJ(2,\varsigma)\\ \psi(2,\varsigma)=\bar{N}(2)\varphi(2,\varsigma)\\ \psi(1,\varsigma)=\bar{X}(2)\varphi(2,\varsigma)\end{cases}\overset{S(2)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}[\frac{1}{2}\sigma(2),-i\varsigma]_a\psi^{ab}(2,\varsigma)=-\frac{1}{2}O_i^+(2)\psi^{ib}(1,\varsigma)+i\bar{N}(2)J(2,\varsigma)\\ [\frac{1}{2}\sigma(1),i\varsigma]_a\psi^{ab}(1,\varsigma)=\frac{1}{2}O_i(2)\psi^{ib}(2,\varsigma)-i\bar{X}(2)J(2,\varsigma)\end{cases}$$

第十五章　洛伦兹变换的深入分析

自我评述：在本章我对洛伦兹变换作了细致深入的分析，揭示了基本粒子与质点系之间的某种等价关系。特别是得到了各种常见自旋粒子洛伦兹变换的多项式表示，为以后各种自旋粒子物理的研究提供了又一个十分有用的数学工具。备注：这一章已经利用了后一章的部分结论，但不构成循环论证，特此说明。

1 3+1维时空的洛伦兹群表示 [9,13]

1.1 彭加莱群表示 [9]

彭加莱群生成元M_{ab}, p_a对易关系：

$$M_{ab} = L_{ab} + S_{ab}, L_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, g_{ab} = \delta_{ab} \tag{15.1}$$

$$\begin{cases} [M_{ab}, M_{cd}] = -i(g_{ad}M_{bc} - g_{ac}M_{bd} + g_{bc}M_{ad} - g_{bd}M_{ac}) \\ [M_{ab}, p_c] = -i(g_{bc}p_a - g_{ac}p_b), [p_a, p_b] = 0 \end{cases} \tag{15.2}$$

彭加莱群生成元L_{ab}, S_{ab}, p_a对易关系：

$$\begin{cases} [L_{ab}, L_{cd}] = -i(g_{ad}L_{bc} - g_{ac}L_{bd} + g_{bc}L_{ad} - g_{bd}L_{ac}) \\ [L_{ab}, p_c] = -i(g_{bc}p_a - g_{ac}p_b), [p_a, p_b] = 0 \end{cases} \tag{15.3}$$

$$[S_{ab}, S_{cd}] = -i(g_{ad}S_{bc} - g_{ac}S_{bd} + g_{bc}S_{ad} - g_{bd}S_{ac}) \tag{15.4}$$

$$[S_{ab}, L_{cd}] = 0, [S_{ab}, p_c] = 0 \tag{15.5}$$

1.2 从自旋张量中提取矢量$\vec{X}, \vec{Y}, \vec{a}, \vec{b}$

定义1.2.1. $X^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}S_{jk}, Y_i \equiv S_{\pi i}, a_i \equiv \frac{1}{2}(X_i + Y_i), b_i \equiv \frac{1}{2}(X_i - Y_i), g_{ab} := \delta_{ab}$

性质1.2.1. $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}$

$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{k}{}_{lm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}, \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{jk}{}_{l} = 2\delta_{il}$

推论1.2.1. $X^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}S_{jk} \Leftrightarrow S_{ij} = \varepsilon_{ijk}X^k$

1.3 洛伦兹群表示关系命题的正向证明

定理1.3.1. $i[S_{ab}, S_{cd}] = g_{ad}S_{bc} - g_{ac}S_{bd} + g_{bc}S_{ad} - g_{bd}S_{ac} \Rightarrow [X^i, X^l] = i\varepsilon^{il}{}_{k}X^k$

证明： $[X^i, X^l] = [\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}S_{jk}, \frac{1}{2}\varepsilon^{lmn}S_{mn}]$

$= \frac{1}{4}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmn}[S_{jk}, S_{mn}]$

$= -i\frac{1}{4}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmn}(g_{jn}S_{km} - g_{jm}S_{kn} + g_{km}S_{jn} - g_{kn}S_{jm})$

$= -i\frac{1}{4}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmn}(2g_{jn}S_{km} + 2g_{km}S_{jn})$

$= -\frac{i}{2}(\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lm}{}_{j}S_{km} - \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ln}{}_{k}S_{jn})$

$= -\frac{i}{2}(\varepsilon^{ikj}\varepsilon^{ln}{}_{k}S_{jn} - \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ln}{}_{k}S_{jn})$

$= i\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ln}{}_{k}S_{jn}$

$= (\delta^{il}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jl})S_{jn}$

$= iS^{il} = i\varepsilon^{il}{}_{k}X^k$ □

定理1.3.2. $i[S_{ab}, S_{cd}] = g_{ad}S_{bc} - g_{ac}S_{bd} + g_{bc}S_{ad} - g_{bd}S_{ac} \Rightarrow [Y_i, Y_j] = i\varepsilon_{ij}{}^{k}X_k$

证明： $[Y_i, Y_j] = [S_{\pi i}, S_{\pi j}]$

$= [S_{i\pi}, S_{j\pi}]$

$= -i(g_{i\pi}S_{\pi j} - g_{ij}S_{\pi\pi} + g_{\pi j}S_{i\pi} - g_{\pi\pi}S_{ij})$

$= iS_{ij} = i\varepsilon_{ij}{}^{k}X_k$ □

定理1.3.3. $i[S_{ab}, S_{cd}] = g_{ad}S_{bc} - g_{ac}S_{bd} + g_{bc}S_{ad} - g_{bd}S_{ac} \Rightarrow [X^i, Y_l] = i\varepsilon^i{}_l{}^k Y_k$

证明: $[X^i, Y_l] = [\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}S_{jk}, S_{\pi l}]$
$= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}[S_{jk}, S_{l\pi}]$
$= \frac{i}{2}\varepsilon^{ijk}(g_{j\pi}S_{kl} - g_{jl}S_{k\pi} + g_{kl}S_{j\pi} - g_{k\pi}S_{jl})$
$= \frac{i}{2}\varepsilon^{ijk}(-g_{jl}S_{k\pi} + g_{kl}S_{j\pi})$
$= i\varepsilon^{ijk}g_{kl}S_{j\pi} = i\varepsilon^i{}_l{}^k Y_k$ □

推论1.3.1. $i[S_{ab}, S_{cd}] = g_{ad}S_{bc} - g_{ac}S_{bd} + g_{bc}S_{ad} - g_{bd}S_{ac}$
$\Rightarrow [X_i, X_j] = i\varepsilon_{ij}{}^k X^k, [Y_i, Y_j] = i\varepsilon_{ij}{}^k X_k, [X_i, Y_j] = i[Y_i, Y_j] = i\varepsilon_{ij}{}^k Y_k$

1.4 洛伦兹群表示关系命题的反向证明

定理1.4.1. $[X^i, X^l] = i\varepsilon^{il}{}_k X^k \Rightarrow i[S_{ij}, S_{lm}] = g_{im}S_{jl} - g_{il}S_{jm} + g_{jl}S_{im} - g_{jm}S_{il}$

证明: $i[S_{ij}, S_{lm}] = i[\varepsilon_{ijk}X^k, \varepsilon_{lmn}X^n]$
$= i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}[X^k, X^n] = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\varepsilon^{kn}{}_h X^h = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}S^{kn}$
$= -(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl})S^{kn}$
$= -(\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl})S^{kn}$
$= -(\delta_{jl}S_{mi} + \delta_{im}S^{lj} - \delta_{il}S^{mj} - \delta_{jm}S^{li})$
$= \delta_{im}S_{jl} - \delta_{il}S_{jm} + \delta_{jl}S_{im} - \delta_{jm}S_{il}$
$= g_{im}S_{jl} - g_{il}S_{jm} + g_{jl}S_{im} - g_{jm}S_{il}$ □

定理1.4.2. $[X_i, Y_j] = i\varepsilon_{ij}{}^k Y_k \Rightarrow i[S_{ij}, S_{\pi l}] = g_{il}S_{j\pi} - g_{i\pi}S_{jl} + g_{j\pi}S_{il} - g_{jl}S_{i\pi}$

证明: $i[S_{ij}, S_{\pi l}] = i[\varepsilon_{ijk}X^k, Y_l]$
$= i\varepsilon_{ijk}[X^k, Y^l] = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon^k{}_{lm}Y^m$
$= -(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})S^{\pi m} = \delta_{il}S_{j\pi} - \delta_{jl}S_{i\pi}$
$= \delta_{il}S_{j\pi} - \delta_{i\pi}S_{jl} + \delta_{j\pi}S_{il} - \delta_{jl}S_{i\pi}$
$= g_{il}S_{j\pi} - g_{i\pi}S_{jl} + g_{j\pi}S_{il} - g_{jl}S_{i\pi}$ □

定理1.4.3. $[Y_i, Y_j] = i\varepsilon_{ij}{}^k X_k \Rightarrow i[S_{\pi i}, S_{\pi j}] = g_{\pi j}S_{i\pi} - g_{\pi\pi}S_{ij} + g_{i\pi}S_{\pi j} - g_{ij}S_{\pi\pi}$

证明: $i[S_{\pi i}, S_{\pi j}] = i[Y_i, Y_j]$
$= -\varepsilon_{ijk}X^k = -S_{ij}$
$= \delta_{\pi j}S_{i\pi} - \delta_{\pi\pi}S_{ij} + \delta_{i\pi}S_{\pi j} - \delta_{ij}S_{\pi\pi}$
$= g_{\pi j}S_{i\pi} - g_{\pi\pi}S_{ij} + g_{i\pi}S_{\pi j} - g_{ij}S_{\pi\pi}$ □

推论1.4.1. $[X_i, X_j] = i\varepsilon_{ij}{}^k X^k, [Y_i, Y_j] = i\varepsilon_{ij}{}^k X_k, [X_i, Y_j] = i[Y_i, Y_j] = i\varepsilon_{ij}{}^k Y_k$
$\Rightarrow i[S_{ab}, S_{cd}] = g_{ad}S_{bc} - g_{ac}S_{bd} + g_{bc}S_{ad} - g_{bd}S_{ac}$

1.5 洛伦兹群表示关系命题的综合结论

推论1.5.1. $i[S_{ab}, S_{cd}] = g_{ad}S_{bc} - g_{ac}S_{bd} + g_{bc}S_{ad} - g_{bd}S_{ac}$
$\Leftrightarrow [X_i, X_j] = i\varepsilon_{ij}{}^k X^k, [Y_i, Y_j] = i\varepsilon_{ij}{}^k X_k, [X_i, Y_j] = i[Y_i, Y_j] = i\varepsilon_{ij}{}^k Y_k$

推论1.5.2. $[X_i, X_j] = i\varepsilon_{ij}{}^k X^k, [Y_i, Y_j] = i\varepsilon_{ij}{}^k X_k, [X_i, Y_j] = i[Y_i, Y_j] = i\varepsilon_{ij}{}^k Y_k$
$\Leftrightarrow \vec{X} \times \vec{X} = i\vec{X}, \vec{Y} \times \vec{Y} = i\vec{X}, \vec{X} \times \vec{Y} = i\vec{Y}, [X_i, Y_i] = 0$
$\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{a} = i\vec{a}, \vec{b} \times \vec{b} = i\vec{b}, [a_i, b_j] = 0$

推论1.5.3. $i[S_{ab}, S_{cd}] = g_{ad}S_{bc} - g_{ac}S_{bd} + g_{bc}S_{ad} - g_{bd}S_{ac} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{a} = i\vec{a}, \vec{b} \times \vec{b} = i\vec{b}, [a_i, b_j] = 0$

洛伦兹态变换分解:

推论1.5.4. $e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}} = e^{i\omega\cdot\vec{X} + \epsilon\cdot\vec{Y}} = e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\vec{a}}e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\vec{b}}$

2 单粒子的相对论洛伦兹推动变换

2.1 坐标的洛伦兹变换 [24–26]

约定：O在O'中的速度为$\vec{v}, v\neq 1$，O'在O中的速度为$-\vec{v}$，此约定好处是可以直观描述运动粒子。

坐标及其坐标微分的相对论洛伦兹推动变换的一般形式：

定义2.1.1. $\begin{cases}\nabla' = \nabla - \gamma_v \vec{v}\partial_t + (\gamma_v - 1)\vec{v}/v^2(\vec{v}\cdot\nabla) \\ \partial_{t'} = \gamma_v(\partial_t - \vec{v}\cdot\nabla), \gamma_v \equiv (1-v^2)^{-\frac{1}{2}}\end{cases}$

定义2.1.2. $\begin{cases}\vec{r'} = \vec{r} + \gamma_v \vec{v} t + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{r})\vec{v}/v^2 \\ t' = \gamma_v(t + \vec{v}\cdot\vec{r}), \gamma_v \equiv (1-v^2)^{-\frac{1}{2}}\end{cases}$ $\begin{cases}d\vec{r'} = d\vec{r} + \gamma_v \vec{v} dt + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot d\vec{r})\vec{v}/v^2 \\ dt' = \gamma_v(dt + \vec{v}\cdot d\vec{r})\end{cases}$

以上变换是整个狭义相对论的重要基础，另一个重要变换是矢量旋转变换。

推论2.1.1. $\vec{r'}^2 - t'^2 = \vec{r}^2 - t^2 = 不变量, d\vec{r'}^2 - dt'^2 = d\vec{r}^2 - dt^2 = 不变量$

定义2.1.3. $L_{\vec{v}} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -i\gamma_v v_x \\ 0 & 1 & 0 & -i\gamma_v v_y \\ 0 & 0 & 1 & -i\gamma_v v_z \\ i\gamma_v v_x & i\gamma_v v_y & i\gamma_v v_z & \gamma_v \end{bmatrix} + \frac{\gamma_v - 1}{v^2}\begin{bmatrix} v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z & 0 \\ v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z & 0 \\ v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, L_{\vec{v}}L_{-\vec{v}} = L_{-\vec{v}}L_{\vec{v}} = I$

推论2.1.2. $L_{\vec{v}}\begin{bmatrix}\vec{0} \\ i\end{bmatrix} = e^{-ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot L}\begin{bmatrix}\vec{0} \\ i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\gamma_v\vec{v} \\ i\gamma_v\end{bmatrix}, L_{\vec{v}}\begin{bmatrix}\vec{0} \\ im\end{bmatrix} = e^{-ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot L}\begin{bmatrix}\vec{0} \\ im\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{p} \\ iE\end{bmatrix}$

引理2.1.1. $(\vec{v}\cdot R)^2 + (\vec{v}\cdot L)^2 = \vec{v}^2$

推论2.1.3.

$L_{\vec{v}} = e^{-ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot L} = 1 - \gamma_v(\vec{v}\cdot L) + \frac{\gamma_v - 1}{v^2}(\vec{v}\cdot L)^2 = \gamma_v(1 - \vec{v}\cdot L) - \frac{\gamma_v - 1}{v^2}(\vec{v}\cdot R)^2, L_{\vec{v}}L_{-\vec{v}} = L_{-\vec{v}}L_{\vec{v}} = I$

推论2.1.4. $X' = L_{\vec{v}}dX, X \equiv \begin{bmatrix}\vec{r} \\ it\end{bmatrix}, X' \equiv \begin{bmatrix}\vec{r'} \\ it'\end{bmatrix}; dX' = L_{\vec{v}}dX, dX \equiv \begin{bmatrix}d\vec{r} \\ idt\end{bmatrix}, dX' \equiv \begin{bmatrix}d\vec{r'} \\ idt'\end{bmatrix}$

2.2 速度合成公式

推论2.2.1. $\vec{u}' = [\vec{u} + \gamma_v\vec{v} + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{v}/v^2]/[\gamma_v(1 + \vec{v}\cdot\vec{u})]$

推论2.2.2. $1 - \vec{u}'^2 = \frac{(1-\vec{u}^2)(1-\vec{v}^2)}{(1+\vec{v}\cdot\vec{u})^2}$

推论2.2.3. $\begin{cases}\gamma_{u'}\vec{u'} = \gamma_u\vec{u} + \gamma_v\vec{v}\gamma_u + (\gamma_v - 1)[\vec{v}\cdot(\gamma_u\vec{u})]\vec{v}/v^2 \\ \gamma_{u'} = \gamma_v[\gamma_u + \vec{v}\cdot(\gamma_u\vec{u})]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\gamma_{u'}\vec{u'} \\ i\gamma_{u'}\end{bmatrix} = L_{\vec{v}}\begin{bmatrix}\gamma_u\vec{u} \\ i\gamma_u\end{bmatrix}$

2.3 有质量粒子四动量的洛伦兹推动变换

有质量单粒子：$m_0 \neq 0, u \neq 1, u' \neq 1$

定义2.3.1. $E \equiv m_0(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}, E' \equiv m_0(1-u'^2)^{-\frac{1}{2}}, \vec{p} \equiv E\vec{u}, \vec{p'} \equiv E'\vec{u'}$

可以从坐标的洛伦兹推动变换出发，推导得到下面的能量动量的洛伦兹推动变换。

推论2.3.1. $\begin{cases}\vec{p'} = \vec{p} + \gamma_v E\vec{v} + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{p})\vec{v}/v^2 \\ E' = \gamma_v(E + \vec{v}\cdot\vec{p})\end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\vec{p'} \\ iE'\end{bmatrix} = L_{\vec{v}}\begin{bmatrix}\vec{p} \\ iE\end{bmatrix}$

推论2.3.2. $\vec{p'}^2 - E'^2 = \vec{p}^2 - E^2 = -m_0^2 = 不变量$

2.4 不同速度参考系间的温度洛伦兹变换猜想

猜想2.4.1.

$$\begin{cases}运动系动能\text{-}质点系平动动能 = E'_k - E'_{k0} = \sum\limits_i(\gamma_v E_i - m_0) - (\gamma_v - 1)\sum\limits_i E_i = \frac{3}{2}Nk_BT' \\ 静止系动能\text{-}质点系平动动能 = E_k - E_{k0} = \sum\limits_i(E_i - m_0) - 0 = \frac{3}{2}Nk_BT\end{cases} \Rightarrow T' = T$$

2.5 无质量粒子四动量的洛伦兹推动变换

无质量粒子：$m_0 = 0, u = 1, u' = 1$

定义2.5.1. $\vec{p} \equiv E\vec{u}, \vec{p'} \equiv E'\vec{u'}$

对于无质量粒子从坐标的洛伦兹推动变换出发，无法严格推导得到能量动量的洛伦兹推动变换，但可以使质量无限接近于零而得到。

$$\begin{cases} \vec{p'} = \vec{p} + \gamma_v E\vec{v} + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{p})\vec{v}/v^2 \\ E' = \gamma_v(E + \vec{v}\cdot\vec{p}) \end{cases}, \begin{bmatrix} \vec{p'} \\ iE' \end{bmatrix} = L_{\vec{v}} \begin{bmatrix} \vec{p} \\ iE \end{bmatrix} \tag{15.6}$$

推论2.5.1. $\vec{p'}^2 - E'^2 = \vec{p}^2 - E^2 = 0 =$ 不变量

2.6 单粒子外力的洛伦兹推动变换

定义2.6.1. $\vec{F} \equiv \frac{dp}{dt}, \vec{F'} \equiv \frac{dp'}{dt'}, \vec{f} \equiv \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-u^2}}, \vec{f'} \equiv \frac{\vec{F'}}{\sqrt{1-u'^2}}$

推论2.6.1. $\vec{a'} = [\vec{a} + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}/v^2]/[\gamma_v^2(1+\vec{v}\cdot\vec{u})^2] - [\vec{u} + \gamma_v\vec{v} + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{v}/v^2](\vec{v}\cdot\vec{a})/[\gamma_v^2(1+\vec{v}\cdot\vec{u})^3]$

推论2.6.2. $\vec{F'} = [\vec{F} + \gamma_v(\vec{u}\cdot\vec{F})\vec{v} + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{F})\vec{v}/v^2]/[\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\vec{u})]$

推论2.6.3. $\vec{u'}\cdot\vec{F'} = \gamma_v(\vec{u}\cdot\vec{F} + \vec{v}\cdot\vec{F})/[\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\vec{u})] = \frac{\vec{v}+\vec{u}}{1+\vec{v}\cdot\vec{u}}\cdot\vec{F}$

推论2.6.4. $\begin{cases} \vec{f'} = \vec{f} + \gamma_v(\vec{u}\cdot\vec{f})\vec{v} + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{f})\vec{v}/v^2 \\ \vec{u'}\cdot\vec{f'} = \gamma_v(\vec{u}\cdot\vec{f} + \vec{v}\cdot\vec{f}) = \gamma_v(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{f} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \vec{f'} \\ i\vec{u'}\cdot\vec{f'} \end{bmatrix} = L_{\vec{v}} \begin{bmatrix} \vec{f} \\ i\vec{u}\cdot\vec{f} \end{bmatrix}$

推论2.6.5. $\vec{f'}^2 - (\vec{u'}\cdot\vec{f'})^2 = \vec{f}^2 - (\vec{u}\cdot\vec{f})^2 =$ 不变量

2.7 单粒子外力的广义相对论变换关系假设

定义2.7.1. $\vec{a} \equiv \frac{d\vec{u}}{dt}, \vec{a'} \equiv \frac{d\vec{u'}}{dt'}, \vec{g} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt}$

定义2.7.2.

$$\begin{cases} \vec{a'} = [\vec{a} + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}/v^2]/[\gamma_v^2(1+\vec{v}\cdot\vec{u})^2] - [\vec{u} + \gamma_v\vec{v} + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{v}/v^2](\vec{v}\cdot\vec{a})/[\gamma_v^2(1+\vec{v}\cdot\vec{u})^3] + \\ [\gamma_v\vec{g} + (\gamma_v - 1)(\vec{g}\cdot\vec{u})\vec{v}/v^2 + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{g}/v^2 - 2(\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{g})\vec{v}/v^4 + \gamma_v^3(\vec{v}\cdot\vec{g})(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{v}/v^2]/[\gamma_v^2(1+\vec{v}\cdot\vec{u})^2] \\ -[\vec{u} + \gamma_v\vec{v} + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{v}/v^2][(\vec{g}\cdot\vec{u}) + \gamma_v^2(1+\vec{v}\cdot\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{g})]/[\gamma_v^2(1+\vec{v}\cdot\vec{u})^3] \\ \vec{F'} = [\vec{F} + \gamma_v(\vec{u}\cdot\vec{F})\vec{v} + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{F})\vec{v}/v^2 \\ +\gamma_v E\vec{g} + \gamma_v^3(\vec{v}\cdot\vec{g})E\vec{v} + (\gamma_v - 1)(\vec{g}\cdot\vec{p})\vec{v}/v^2 + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{p})\vec{g}/v^2 \\ +\gamma_v^3(\vec{v}\cdot\vec{g})(\vec{v}\cdot\vec{p})\vec{v}/v^2 - 2(\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{g})(\vec{v}\cdot\vec{p})\vec{v}/v^4]/[\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\vec{u})] \end{cases}$$

3 多粒子质点系的相对论洛伦兹变换

3.1 多粒子质点系的洛伦兹推动变换

$$\begin{cases} \vec{P}(v) = \sum_i [\vec{p}_i + \gamma_v E_i\vec{v} + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{p}_i)\vec{v}/v^2] \\ H(\vec{v}) = \sum_i \gamma_v(E_i + \vec{v}\cdot\vec{p}_i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \vec{P}(v) \\ iH(\vec{v}) \end{bmatrix} = \sum_i L_{\vec{v}} \begin{bmatrix} \vec{p}_i \\ iE_i \end{bmatrix} = L_{\vec{v}} \begin{bmatrix} \sum_i \vec{p}_i \\ i\sum_i E_i \end{bmatrix} \tag{15.7}$$

3.2 不同速度参考系质点系间的洛伦兹推动变换

不同速度参考系质点系间的洛伦兹推动变换：

$$\begin{cases}\vec{u'}=[\vec{u}+\gamma_v\vec{v}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{v}/v^2]/[\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\vec{u})]\\ \vec{P}(\vec{u'})=\vec{P}(\vec{u})+\gamma_v H(\vec{u})\vec{v}+(\gamma_v-1)[\vec{v}\cdot\vec{P}(\vec{u})]\vec{v}/v^2\\ H(\vec{u'})=\gamma_v[H(\vec{u})+\vec{v}\cdot\vec{P}(\vec{u})]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix}\gamma_{u'}\vec{u'}\\ i\gamma_{u'}\end{bmatrix}=L_{\vec{v}}\begin{bmatrix}\gamma_u\vec{u}\\ i\gamma_u\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\vec{P}(u')\\ iH(\vec{u'})\end{bmatrix}=L_{\vec{v}}\begin{bmatrix}\vec{P}(u)\\ iH(\vec{u})\end{bmatrix}\end{cases}\tag{15.8}$$

推论3.2.1. $\vec{P}^2(\vec{u'})-H^2(\vec{u'})=\vec{P}^2(\vec{u})-H^2(\vec{u})=-M_0^2=$ 不变量

不同质心速度质点系间外力的洛伦兹推动变换：

定义3.2.1. $\vec{f}(\vec{u})\equiv\frac{\vec{F}(\vec{u})}{\sqrt{1-u^2}},\vec{f}'(\vec{u'})\equiv\frac{\vec{F}'(\vec{u'})}{\sqrt{1-u'^2}},\vec{f}(\vec{u})=\frac{dP(\vec{u})}{d\tau},\vec{f}'(\vec{u'})=\frac{dP'(\vec{u'})}{d\tau}$

引理3.2.1. $\frac{dH(\vec{u})}{d\tau}\equiv\vec{u}\cdot\frac{dP(\vec{u})}{d\tau}$

推论3.2.2. $\begin{cases}\vec{f}'(\vec{u'})=\vec{f}(\vec{u})+\gamma_v[\vec{u}\cdot\vec{f}(\vec{u})]\vec{v}+(\gamma_v-1)[\vec{v}\cdot\vec{f}(\vec{u})]\vec{v}/v^2\\ \vec{u'}\cdot\vec{f}'(\vec{u'})=\gamma_v[\vec{u}\cdot\vec{f}(\vec{u})+\vec{v}\cdot\vec{f}(\vec{u})]=\gamma_v(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{f}(\vec{u})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\vec{f}'(\vec{u'})\\ i\vec{u'}\cdot\vec{f}'(\vec{u'})\end{bmatrix}=L_{\vec{v}}\begin{bmatrix}\vec{f}(\vec{u})\\ i\vec{u}\cdot\vec{f}(\vec{u})\end{bmatrix}$

推论3.2.3. $\vec{f'}^2(\vec{u'})-[\vec{u'}\cdot\vec{f}'(\vec{u'})]^2=\vec{f}^2(\vec{u})-[\vec{u}\cdot\vec{f}(\vec{u})]^2=$ 不变量

3.3 动质点系推动变换到静质点系

引理3.3.1. $|\sum\limits_i\vec{p}_i/\sum\limits_i E_i|\le 1$, 等号有且仅当$\vec{p}_i=E_i\vec{1}$时成立。

定义3.3.1. 动质点系：$|\sum\limits_i\vec{p}_i/\sum\limits_i E_i|\ne 0$, 静质点系：$|\sum\limits_i\vec{p}_i/\sum\limits_i E_i|=0$

有质量动质点系到静质点系的洛伦兹推动变换：

$$\vec{v}=-\sum_i\vec{p}_i/\sum_i E_i\ne\vec{1}\Rightarrow\begin{cases}\vec{P}(\vec{v})=\sum\limits_i[\vec{p}_i+\gamma_v E_i\vec{v}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{p}_i)\vec{v}/v^2]=0\\ M_0=H(\vec{v})=\sum\limits_i\gamma_v(E_i+\vec{v}\cdot\vec{p}_i)=\sum\limits_i E_i/\gamma_v\end{cases}\tag{15.9}$$

3.4 静质点系推动变换到动质点系

静质点系推动变换到动质点系：

$$\sum_i\vec{p}_i/\sum_i E_i=0\Rightarrow\begin{cases}H(\vec{v})=\gamma_v\sum\limits_i E_i=M,M\equiv\gamma_v M_0,M_0\equiv\sum\limits_i E_i\\ \vec{P}(\vec{v})=\gamma_v\vec{v}\sum\limits_i E_i=M\vec{v}\end{cases}\tag{15.10}$$

以上关系式的物理意义是：可以将质点系等效为一个粒子，当该质点系作运动时，可以等效为一个粒子的运动，并且与粒子一样符合相对论规律。并且该质点系质心静止时的总能就是该质点系的等效静止质量，质心运动时总能量就是等效的相对论动质量。因此质点系完全可以等效为一个粒子，反过来，也可以认为基本粒子就是一个质点系，难点是有相互作用的质点系是否还有如此的结论？是否可以按此线索对相互作用加一个约束，并得到新的物理？

3.5 单方向多光子系的洛伦兹推动变换

单方向多光子系的洛伦兹推动变换：

$$\vec{p}_i=E_i\vec{1},\vec{1}'=[\vec{1}+\gamma_v\vec{v}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{1})\vec{v}/v^2]/[\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\vec{1})]\tag{15.11}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\vec{P}(\vec{v})=\sum\limits_i[E_i\vec{1}+\gamma_v E_i\vec{v}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{1})E_i\vec{v}/v^2]=\sum\limits_i\gamma_v E_i(1+\vec{v}\cdot\vec{1})\vec{1}'\\ H(\vec{v})=\sum\limits_i\gamma_v E_i(1+\vec{v}\cdot\vec{1})\\ \vec{P}^2(\vec{v})-H^2(\vec{v})=-M_0^2,M_0=\sum\limits_i E_i\sqrt{1-1'^2}=0\end{cases}\tag{15.12}$$

3.6 质点系的普适静止质量公式

综合以上结论，可以得到以下普适的静止质量公式：

$$M_0=\sum_i E_i\sqrt{1-(\sum_i \vec{p}_i/\sum_i E_i)^2}=\sqrt{(\sum_i E_i)^2-(\sum_i \vec{p}_i)^2}=\sqrt{\sum_{i,j}(E_iE_j-\vec{p}_i\cdot\vec{p}_j)} \tag{15.13}$$

简化记号的质量公式：$M_0=\sqrt{\sum(E_iE_j-\vec{p}_i\cdot\vec{p}_j)}$

3.7 相互作用质点系势能的洛伦兹推动变换假设

相互作用动质点系势能状态假设：

$$\begin{cases}\vec{P}(\vec{0})=(\sum\limits_k \vec{p}_k/\sum\limits_k E_k)\frac{1}{2}\sum\limits_{i\neq j}V_{ij}\\ H(\vec{0})=\frac{1}{2}\sum\limits_{i\neq j}V_{ij}\end{cases} \tag{15.14}$$

相互作用动质点系势能的洛伦兹推动变换：

$$\begin{cases}\vec{P}(\vec{v})=\vec{P}(\vec{0})+\gamma_v H(\vec{0})\vec{v}+(\gamma_v-1)[\vec{v}\cdot\vec{P}(\vec{0})]\vec{v}/v^2=\frac{\sum\limits_{i\neq j}V_{ij}}{\sum\limits_k 2E_k}\sum\limits_i[\vec{p}_i+\gamma_v E_i\vec{v}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{p}_i)\vec{v}/v^2]\\ H(\vec{v})=\gamma_v[H(\vec{0})+\vec{v}\cdot\vec{P}(\vec{0})]=\frac{\sum\limits_{i\neq j}V_{ij}}{\sum\limits_k 2E_k}\sum\limits_i\gamma_v(E_i+\vec{v}\cdot\vec{p}_i)\\ \vec{P}^2(\vec{v})-H^2(\vec{v})=\vec{P}^2(\vec{0})-H^2(\vec{0})=-M_{V0}^2\end{cases} \tag{15.15}$$

相互作用静质点系势能的洛伦兹推动变换：

$$\vec{v}=-\sum_i\vec{p}_i/\sum_i E_i\neq\vec{1}\Rightarrow\begin{cases}\vec{P}(\vec{v})=\vec{0}\\ H(\vec{v})=\sum\limits_{i\neq j}V_{ij}\sqrt{1-v^2}\equiv M_{V0}\end{cases} \tag{15.16}$$

相互作用质点系势能的质量公式：$M_{V0}=(\frac{1}{2}\sum\limits_{i\neq j}V_{ij})\sqrt{\sum\limits_{i,j}(E_iE_j-\vec{p}_i\cdot\vec{p}_j)/\sum\limits_{i,j}(E_iE_j)}$

3.8 多粒子相互作用质点系的洛伦兹推动变换

相互作用质点系的洛伦兹推动变换：

推论3.8.1. $\begin{cases}\vec{P}(v)=\frac{1}{\sum\limits_k 2E_k}(\sum\limits_k 2E_k+\sum\limits_{i\neq j}V_{ij})\sum\limits_i[\vec{p}_i+\gamma_v E_i\vec{v}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{p}_i)\vec{v}/v^2]\\ H(\vec{v})=\frac{1}{\sum\limits_k 2E_k}(\sum\limits_k 2E_k+\sum\limits_{i\neq j}V_{ij})\sum\limits_i\gamma_v(E_i+\vec{v}\cdot\vec{p}_i)\end{cases}$

证明:

$$\vec{P}(v)=\sum_i[\vec{p}_i+\gamma_v E_i\vec{v}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{p}_i)\vec{v}/v^2]+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\{V_{ij}(\sum_k\vec{p}_k/\sum_k E_k)+\gamma_v V_{ij}\vec{v}+(\gamma_v-1)[\vec{v}\cdot(V_{ij}\sum_k\vec{p}_k/\sum_k E_k)]\vec{v}/v^2\}$$

$$=\frac{1}{\sum\limits_k 2E_k}\{\sum_k 2E_k\sum_i[\vec{p}_i+\gamma_v E_i\vec{v}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{p}_i)\vec{v}/v^2]+\sum_{i\neq j}V_{ij}\sum_k\{\vec{p}_k+\gamma_v E_k\vec{v}+(\gamma_v-1)[\vec{v}\cdot(\vec{p}_k)]\vec{v}/v^2\}\}$$

$$=\frac{1}{\sum\limits_k 2E_k}(\sum_k 2E_k+\sum_{i\neq j}V_{ij})\sum_i[\vec{p}_i+\gamma_v E_i\vec{v}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{p}_i)\vec{v}/v^2]$$

$$H(\vec{v})=\sum_i\gamma_v(E_i+\vec{v}\cdot\vec{p}_i)+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\gamma_v[V_{ij}+\vec{v}\cdot(V_{ij}\sum_k\vec{p}_k/\sum_k E_k)]=\frac{1}{\sum\limits_k 2E_k}(\sum_k 2E_k+\sum_{i\neq j}V_{ij})\sum_i\gamma_v(E_i+\vec{v}\cdot\vec{p}_i)$$ □

相互作用动质点系到静质点系的洛伦兹推动变换：

$$\vec{v}=-\sum_i\vec{p}_i/\sum_i E_i\neq\vec{1}\Rightarrow\begin{cases}\vec{P}(\vec{v})=\vec{0}\\ H(\vec{v})=(\sum\limits_k E_k+\frac{1}{2}\sum\limits_{i\neq j}V_{ij})\sqrt{1-v^2}\equiv M_0\end{cases} \tag{15.17}$$

相互作用质点系的质量公式：$M_0=(\sum\limits_i E_i+\frac{1}{2}\sum\limits_{i\neq j}V_{ij})\sqrt{\sum\limits_{i,j}(E_iE_j-\vec{p}_i\cdot\vec{p}_j)/\sum\limits_{i,j}(E_iE_j)}$

3.9 不同质心速度相互作用质点系间的洛伦兹推动变换

不同质心速度相互作用质点系间的洛伦兹推动变换：

$$\begin{cases}\vec{u'}=[\vec{u}+\gamma_v\vec{v}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{v}/v^2]/[\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\vec{u})]\\ H(\vec{u'})=\gamma_v[H(\vec{u})+\vec{v}\cdot\vec{P}(\vec{u})]\\ \vec{P}(\vec{u'})=\vec{P}(\vec{u})+\gamma_vH(\vec{u})\vec{v}+(\gamma_v-1)[\vec{v}\cdot\vec{P}(\vec{u})]\vec{v}/v^2\\ \vec{P}^2(\vec{u'})-H^2(\vec{u'})=\vec{P}^2(\vec{u})-H^2(\vec{u})=-M_0^2\end{cases}\tag{15.18}$$

不同质心速度相互作用质点系外力的洛伦兹推动变换：

$$\begin{cases}\vec{f'}(\vec{u'})=\vec{f}(\vec{u})+\gamma_v[\vec{u}\cdot\vec{f}(\vec{u})]\vec{v}+(\gamma_v-1)[\vec{v}\cdot\vec{f}(\vec{u})]\vec{v}/v^2\\ \vec{u'}\cdot\vec{f'}(\vec{u'})=\gamma_v[\vec{u}\cdot\vec{f}(\vec{u})+\vec{v}\cdot\vec{f}(\vec{u})]=\gamma_v(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{f}(\vec{u})\end{cases}\tag{15.19}$$

3.10 相互作用质点系的普适静止质量公式

综合以上结论，可以得到以下普适的静止质量公式：

$$M_0=(\sum_i E_i+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}V_{ij})\sqrt{\sum_{i,j}(E_iE_j-\vec{p}_i\cdot\vec{p}_j)/\sum_{i,j}(E_iE_j)}$$

3.11 氢原子的普适静止质量公式(质心系)???

$$M_0=\frac{[\sqrt{M^2+\vec{p}_M^2}+\sqrt{m^2+\vec{p}_m^2}+V(\vec{r}_M,\vec{r}_m)]\sqrt{(\sqrt{M^2+\vec{p}_M^2}+\sqrt{m^2+\vec{p}_m^2})^2-(\vec{p}_M+\vec{p}_m)^2}}{\sqrt{M^2+\vec{p}_M^2}+\sqrt{m^2+\vec{p}_m^2}}$$

$$M_0=[M+m+V(\vec{r}_{M0},\vec{r}_{m0})]$$

$$M+m=[\sqrt{M^2+\vec{p}^2}+\sqrt{m^2+\vec{p}^2}+V(\vec{r}_M,\vec{r}_m)]$$

$$V(\vec{r}_M,\vec{r}_m)=M+m-(\sqrt{M^2+\vec{p}^2}+\sqrt{m^2+\vec{p}^2})$$

4 各种旋量的洛伦兹推动变换

4.1 反对称张量和电磁旋量的洛伦兹变换规律 [24–26]

单粒子的角动量张量和电磁张量的洛伦兹变换规律：

定理4.1.1.

$$\begin{cases}F^{ab}=-F^{ba},F'=L_{\vec{v}}FL_{\vec{v}}^T,F=\begin{bmatrix}0&B_z&-B_y&-iE_x\\-B_z&0&B_x&-iE_y\\B_y&-B_x&0&-iE_z\\iE_x&iE_y&iE_z&0\end{bmatrix}\\ F'=\gamma_v\begin{bmatrix}0&(B_z+\vec{v}\times\vec{E})_z&-(B_y+\vec{v}\times\vec{E})_y&-i(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_x\\-(B_z+\vec{v}\times\vec{E})_z&0&(B_x+\vec{v}\times\vec{E})_x&-i(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_y\\(B_y+\vec{v}\times\vec{E})_y&-(B_x+\vec{v}\times\vec{E})_x&0&-i(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_z\\i(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_x&i(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_y&i(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_z&0\end{bmatrix}-\frac{\gamma_v-1}{v^2}\begin{bmatrix}0&(\vec{v}\cdot\vec{B})v_z&-(\vec{v}\cdot\vec{B})v_y&-i(\vec{v}\cdot\vec{E})v_x\\-(\vec{v}\cdot\vec{B})v_z&0&(\vec{v}\cdot\vec{B})v_x&-i(\vec{v}\cdot\vec{E})v_y\\(\vec{v}\cdot\vec{B})v_y&-(\vec{v}\cdot\vec{B})v_x&0&-i(\vec{v}\cdot\vec{E})v_z\\i(\vec{v}\cdot\vec{E})v_x&i(\vec{v}\cdot\vec{E})v_y&i(\vec{v}\cdot\vec{E})v_z&0\end{bmatrix}\end{cases}$$

证明:

$$L_{\vec{v}}F=(\begin{bmatrix}1&0&0&-i\gamma_vv_x\\0&1&0&-i\gamma_vv_y\\0&0&1&-i\gamma_vv_z\\i\gamma_vv_x&i\gamma_vv_y&i\gamma_vv_z&\gamma_v\end{bmatrix}+\frac{\gamma_v-1}{v^2}\begin{bmatrix}v_xv_x&v_xv_y&v_xv_z&0\\v_yv_x&v_yv_y&v_yv_z&0\\v_zv_x&v_zv_y&v_zv_z&0\\0&0&0&0\end{bmatrix})\begin{bmatrix}0&B_z&-B_y&-iE_x\\-B_z&0&B_x&-iE_y\\B_y&-B_x&0&-iE_z\\iE_x&iE_y&iE_z&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\gamma_vv_xE_x&B_z+\gamma_vv_xE_y&-B_y+\gamma_vv_xE_z&-iE_x\\-B_z+\gamma_vv_yE_x&\gamma_vv_yE_y&B_x+\gamma_vv_yE_z&-iE_y\\B_y+\gamma_vv_zE_x&-B_x+\gamma_vv_zE_y&\gamma_vv_zE_z&-iE_z\\i\gamma_v(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_x&i\gamma_v(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_y&i\gamma_v(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_z&\gamma_v\vec{v}\cdot\vec{E}\end{bmatrix}+\frac{\gamma_v-1}{v^2}\begin{bmatrix}-v_x(\vec{v}\times\vec{B})_x&-v_x(\vec{v}\times\vec{B})_y&-v_x(\vec{v}\times\vec{B})_z&-iv_x\vec{v}\cdot\vec{E}\\-v_y(\vec{v}\times\vec{B})_x&-v_y(\vec{v}\times\vec{B})_y&-v_y(\vec{v}\times\vec{B})_z&-iv_y\vec{v}\cdot\vec{E}\\-v_z(\vec{v}\times\vec{B})_x&-v_z(\vec{v}\times\vec{B})_y&-v_z(\vec{v}\times\vec{B})_z&-iv_z\vec{v}\cdot\vec{E}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$F'=L_{\vec{v}}FL_{\vec{v}}^T$$

$$=(\begin{bmatrix}\gamma_vv_xE_x&B_z+\gamma_vv_xE_y&-B_y+\gamma_vv_xE_z&-iE_x\\-B_z+\gamma_vv_yE_x&\gamma_vv_yE_y&B_x+\gamma_vv_yE_z&-iE_y\\B_y+\gamma_vv_zE_x&-B_x+\gamma_vv_zE_y&\gamma_vv_zE_z&-iE_z\\i\gamma_v(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_x&i\gamma_v(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_y&i\gamma_v(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_z&\gamma_v\vec{v}\cdot\vec{E}\end{bmatrix}+\frac{\gamma_v-1}{v^2}\begin{bmatrix}-v_x(\vec{v}\times\vec{B})_x&-v_x(\vec{v}\times\vec{B})_y&-v_x(\vec{v}\times\vec{B})_z&-iv_x\vec{v}\cdot\vec{E}\\-v_y(\vec{v}\times\vec{B})_x&-v_y(\vec{v}\times\vec{B})_y&-v_y(\vec{v}\times\vec{B})_z&-iv_y\vec{v}\cdot\vec{E}\\-v_z(\vec{v}\times\vec{B})_x&-v_z(\vec{v}\times\vec{B})_y&-v_z(\vec{v}\times\vec{B})_z&-iv_z\vec{v}\cdot\vec{E}\\0&0&0&0\end{bmatrix})$$

$$(\begin{bmatrix}1&0&0&i\gamma_vv_x\\0&1&0&i\gamma_vv_y\\0&0&1&i\gamma_vv_z\\-i\gamma_vv_x&-i\gamma_vv_y&-i\gamma_vv_z&\gamma_v\end{bmatrix}+\frac{\gamma_v-1}{v^2}\begin{bmatrix}v_xv_x&v_xv_y&v_xv_z&0\\v_yv_x&v_yv_y&v_yv_z&0\\v_zv_x&v_zv_y&v_zv_z&0\\0&0&0&0\end{bmatrix})$$

$$=\begin{bmatrix}0&B_z+\gamma_v(\vec{v}\times\vec{E})_z&-B_y-\gamma_v(\vec{v}\times\vec{E})_y&i\gamma_v^2v_x\vec{v}\cdot\vec{E}-i\gamma_v(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_x\\-B_z-\gamma_v(\vec{v}\times\vec{E})_z&0&B_x+\gamma_v(\vec{v}\times\vec{E})_x&i\gamma_v^2v_y\vec{v}\cdot\vec{E}-i\gamma_v(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_y\\B_y+\gamma_v(\vec{v}\times\vec{E})_y&-B_x-\gamma_v(\vec{v}\times\vec{E})_x&0&i\gamma_v^2v_z\vec{v}\cdot\vec{E}-i\gamma_v(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_z\\-i\gamma_v^2v_x\vec{v}\cdot\vec{E}+i\gamma_v(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_x&-i\gamma_v^2v_y\vec{v}\cdot\vec{E}+i\gamma_v(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_y&-i\gamma_v^2v_z\vec{v}\cdot\vec{E}+i\gamma_v(\vec{E}-\vec{v}\times\vec{B})_z&\gamma_v^2\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{B})=0\end{bmatrix}$$

$$+\frac{\gamma_v-1}{v^2}\begin{bmatrix} v_x(\vec v\times\vec B)_x+\gamma_v v_x v_x\vec v\cdot\vec E & v_y(\vec v\times\vec B)_x+\gamma_v v_x v_y\vec v\cdot\vec E & v_z(\vec v\times\vec B)_x+\gamma_v v_x v_z\vec v\cdot\vec E & 0\\ v_x(\vec v\times\vec B)_y+\gamma_v v_y v_x\vec v\cdot\vec E & v_y(\vec v\times\vec B)_y+\gamma_v v_y v_y\vec v\cdot\vec E & v_z(\vec v\times\vec B)_y+\gamma_v v_y v_z\vec v\cdot\vec E & 0\\ v_x(\vec v\times\vec B)_z+\gamma_v v_z v_x\vec v\cdot\vec E & v_y(\vec v\times\vec B)_z+\gamma_v v_z v_y\vec v\cdot\vec E & v_z(\vec v\times\vec B)_z+\gamma_v v_z v_z\vec v\cdot\vec E & 0\\ i\gamma_v v_x\vec v\cdot\vec E & i\gamma_v v_y\vec v\cdot\vec E & i\gamma_v v_z\vec v\cdot\vec E & 0\end{bmatrix}$$
$$+\frac{\gamma_v-1}{v^2}\begin{bmatrix} -v_x(\vec v\times\vec B)_x-\gamma_v v_x v_x\vec v\cdot\vec E & -v_x(\vec v\times\vec B)_y-\gamma_v v_x v_y\vec v\cdot\vec E & -v_x(\vec v\times\vec B)_z-\gamma_v v_x v_z\vec v\cdot\vec E & -i\gamma_v v_x\vec v\cdot\vec E\\ -v_y(\vec v\times\vec B)_x-\gamma_v v_y v_x\vec v\cdot\vec E & -v_y(\vec v\times\vec B)_y-\gamma_v v_y v_y\vec v\cdot\vec E & -v_y(\vec v\times\vec B)_z-\gamma_v v_y v_z\vec v\cdot\vec E & -i\gamma_v v_y\vec v\cdot\vec E\\ -v_z(\vec v\times\vec B)_x-\gamma_v v_z v_x\vec v\cdot\vec E & -v_z(\vec v\times\vec B)_y-\gamma_v v_z v_y\vec v\cdot\vec E & -v_z(\vec v\times\vec B)_z-\gamma_v v_z v_z\vec v\cdot\vec E & -i\gamma_v v_z\vec v\cdot\vec E\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$+\left(\frac{\gamma_v-1}{v^2}\right)^2\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 0 & B_z+\gamma_v(\vec v\times\vec E)_z & -B_y-\gamma_v(\vec v\times\vec E)_y & i\gamma_v^2 v_x\vec v\cdot\vec E-i\gamma_v(\vec E-\vec v\times\vec B)_x\\ -B_z-\gamma_v(\vec v\times\vec E)_z & 0 & B_x+\gamma_v(\vec v\times\vec E)_x & i\gamma_v^2 v_y\vec v\cdot\vec E-i\gamma_v(\vec E-\vec v\times\vec B)_y\\ B_y+\gamma_v(\vec v\times\vec E)_y & -B_x-\gamma_v(\vec v\times\vec E)_x & 0 & i\gamma_v^2 v_z\vec v\cdot\vec E-i\gamma_v(\vec E-\vec v\times\vec B)_z\\ -i\gamma_v^2 v_x\vec v\cdot\vec E+i\gamma_v(\vec E-\vec v\times\vec B)_x & -i\gamma_v^2 v_y\vec v\cdot\vec E+i\gamma_v(\vec E-\vec v\times\vec B)_y & -i\gamma_v^2 v_z\vec v\cdot\vec E+i\gamma_v(\vec E-\vec v\times\vec B)_z & \gamma_v^2\vec v\cdot(\vec v\times\vec B)=0\end{bmatrix}$$
$$-\frac{\gamma_v-1}{v^2}\begin{bmatrix} 0 & \vec v\times(\vec v\times\vec B)_z & -\vec v\times(\vec v\times\vec B)_y & i\gamma_v v_x\vec v\cdot\vec E\\ -\vec v\times(\vec v\times\vec B)_z & 0 & \vec v\times(\vec v\times\vec B)_x & i\gamma_v v_y\vec v\cdot\vec E\\ \vec v\times(\vec v\times\vec B)_y & -\vec v\times(\vec v\times\vec B)_x & 0 & i\gamma_v v_z\vec v\cdot\vec E\\ -i\gamma_v v_x\vec v\cdot\vec E & -i\gamma_v v_y\vec v\cdot\vec E & -i\gamma_v v_z\vec v\cdot\vec E & 0\end{bmatrix}$$
$$=\gamma_v\begin{bmatrix} 0 & (B_z+\vec v\times\vec E)_z & -(B_y+\vec v\times\vec E)_y & -i(\vec E-\vec v\times\vec B)_x\\ -(B_z+\vec v\times\vec E)_z & 0 & (B_x+\vec v\times\vec E)_x & -i(\vec E-\vec v\times\vec B)_y\\ (B_y+\vec v\times\vec E)_y & -(B_x+\vec v\times\vec E)_x & 0 & -i(\vec E-\vec v\times\vec B)_z\\ i(\vec E-\vec v\times\vec B)_x & i(\vec E-\vec v\times\vec B)_y & i(\vec E-\vec v\times\vec B)_z & 0\end{bmatrix}-\frac{\gamma_v-1}{v^2}\begin{bmatrix} 0 & (\vec v\cdot\vec B)v_z & -(\vec v\cdot\vec B)v_y & -i(\vec v\cdot\vec E)v_x\\ -(\vec v\cdot\vec B)v_z & 0 & (\vec v\cdot\vec B)v_x & -i(\vec v\cdot\vec E)v_y\\ (\vec v\cdot\vec B)v_y & -(\vec v\cdot\vec B)v_x & 0 & -i(\vec v\cdot\vec E)v_z\\ i(\vec v\cdot\vec E)v_x & i(\vec v\cdot\vec E)v_y & i(\vec v\cdot\vec E)v_z & 0\end{bmatrix}$$

□

推论4.1.1. $\vec E'=\gamma_v(\vec E-\vec v\times\vec B)-(\gamma_v-1)(\vec v\cdot\vec E)\vec v/v^2,\vec B'=\gamma_v(\vec B+\vec v\times\vec E)-(\gamma_v-1)(\vec v\cdot\vec B)\vec v/v^2$

推论4.1.2. $\vec\varphi_\varsigma'=\gamma_v(\vec\varphi_\varsigma-i\varsigma\vec v\times\vec\varphi_\varsigma)-(\gamma_v-1)(\vec v\cdot\vec\varphi_\varsigma)\vec v/v^2,\psi^{\alpha_\varsigma}:=\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}F^{ab}=-i\varsigma(\vec E-i\varsigma\vec B):=\vec\varphi_\varsigma$

推论4.1.3. $\vec\varphi_\varsigma'=R_{\varsigma\vec v}\vec\varphi_\varsigma,R_{\varsigma\vec v}\equiv\gamma_v-\varsigma\gamma_v\begin{bmatrix}0&-iv_z&iv_y\\iv_z&0&-iv_x\\-iv_y&iv_x&0\end{bmatrix}-\frac{\gamma_v-1}{v^2}\begin{bmatrix}v_xv_x&v_xv_y&v_xv_z\\v_yv_x&v_yv_y&v_yv_z\\v_zv_x&v_zv_y&v_zv_z\end{bmatrix}$

推论4.1.4. $R_{\varsigma\vec v}=1-\varsigma\gamma_v\vec v\cdot\gamma+\frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec v\cdot\gamma)^2,R_{\varsigma\vec v}R_{-\varsigma\vec v}=R_{-\varsigma\vec v}R_{\varsigma\vec v}=I$

引理4.1.1. $[1+\frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec v\cdot\gamma)^2]^2=1+\gamma_v^2(\vec v\cdot\gamma)^2$

推论4.1.5. $\begin{bmatrix}\vec E'\\\vec B'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec v\cdot\gamma)^2&-i\varsigma\gamma_v\vec v\cdot\gamma\\i\varsigma\gamma_v\vec v\cdot\gamma&1+\frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec v\cdot\gamma)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec E\\\vec B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1+\frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec v\cdot\gamma)^2&-i\varsigma\gamma_v\vec v\cdot\gamma\\i\varsigma\gamma_v\vec v\cdot\gamma&1+\frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec v\cdot\gamma)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+\frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec v\cdot\gamma)^2&i\varsigma\gamma_v\vec v\cdot\gamma\\-i\varsigma\gamma_v\vec v\cdot\gamma&1+\frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec v\cdot\gamma)^2\end{bmatrix}=I_6$

推论4.1.6. $\begin{cases}\vec E'+i\vec B'=e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}(\vec E+i\vec B)\\\vec E'-i\vec B'=e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}(\vec E-i\vec B)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\vec E'=[e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}+e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}]\vec E+i[e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}-e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}]\vec B\\2\vec B'=[e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}+e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}]\vec B-i[e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}-e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}]\vec E\end{cases}$

推论4.1.7. $\begin{bmatrix}\vec E'\\\vec B'\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}[e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}+e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}]&i[e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}-e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}]\\-i[e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}-e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}]&[e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}+e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec E\\\vec B\end{bmatrix}$

4.2 角动量变换规律

性质4.2.1. $M^{ab}=x^ap^b-x^bp^a,M'=L_{\vec v}ML_{\vec v}^T,\vec J=\vec B=\vec r\times\vec p,\vec W=\vec E=t\vec p-\vec rE$

性质4.2.2. $M^{ab}=x^ap^b-x^bp^a,M'=L_{\vec v}ML_{\vec v}^T,\vec J=\vec B=\vec r\times\vec p,\vec W=\vec E=r\vec p-\vec rE$

推论4.2.1. $\begin{cases}\vec W'=\gamma_v(\vec W-\vec v\times\vec J)-(\gamma_v-1)(\vec v\cdot\vec W)\vec v/v^2\\\vec J'=\gamma_v(\vec J+\vec v\times\vec W)-(\gamma_v-1)(\vec v\cdot\vec J)\vec v/v^2\end{cases}$

4.3 从光子旋量变换规律猜测得到旋量的变换规律

推论4.3.1. $\begin{cases}\vec\varphi_\varsigma'=\gamma_v(\vec\varphi_\varsigma-i\varsigma\vec v\times\vec\varphi_\varsigma)-(\gamma_v-1)(\vec v\cdot\vec\varphi_\varsigma)\vec v/v^2\\(\vec\varphi_\varsigma,0)=S_{em}(\kappa)\psi_\varsigma\otimes\psi_\varsigma\to\vec\varphi_\varsigma=\frac{1}{\sqrt2}(\psi_{\varsigma1}^2-\psi_{\varsigma2}^2,i\psi_{\varsigma1}^2+i\psi_{\varsigma2}^2,-2\psi_{\varsigma1}\psi_{\varsigma2})\end{cases}$

推论4.3.2. $\Lambda(\psi_{\varsigma1}^2,\psi_{\varsigma2}^2,\psi_{\varsigma1}\psi_{\varsigma2})=\frac12\begin{bmatrix}1&-i&0\\-1&-i&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\left(\gamma_v-\varsigma\gamma_v\begin{bmatrix}0&-iv_z&iv_y\\iv_z&0&-iv_x\\-iv_y&iv_x&0\end{bmatrix}-\frac{\gamma_v-1}{v^2}\begin{bmatrix}v_xv_x&v_xv_y&v_xv_z\\v_yv_x&v_yv_y&v_yv_z\\v_zv_x&v_zv_y&v_zv_z\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&-1&0\\i&i&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

猜测+推理：

推论4.3.3. $\Lambda(\psi_{\varsigma1}^2,\psi_{\varsigma2}^2,\psi_{\varsigma1}\psi_{\varsigma2})=\begin{bmatrix}(\gamma+1-\varsigma\gamma v_z)^2/[2(\gamma+1)]&[\gamma(v_x-iv_y)]^2/[2(\gamma+1)]&-i\varsigma v_y\\ [\gamma(v_x+iv_y)]^2/[2(\gamma+1)]&(\gamma+1+\varsigma\gamma v_z)^2/[2(\gamma+1)]&i\varsigma v_x\\i\varsigma v_y&-i\varsigma v_x&1\end{bmatrix}$

$\Leftarrow\Lambda_{\varsigma\vec v}(\psi_{\varsigma1},\psi_{\varsigma2})=\frac{1}{\sqrt{2(\gamma+1)}}\begin{bmatrix}\gamma+1-\varsigma\gamma v_z&-\gamma\varsigma(v_x-iv_y)\\-\varsigma\gamma(v_x+iv_y)&\gamma+1+\varsigma\gamma v_z\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2(\gamma+1)}}(1+\gamma-\varsigma\gamma\vec v\cdot\sigma)$

4.4 从旋量变换规律推得光子旋量的变换规律

推论4.4.1. $\Lambda_{\varsigma\vec{v}}\otimes\Lambda_{\varsigma\vec{v}}=\frac{\gamma+1}{2}-\frac{1}{2}\varsigma\gamma\vec{v}\cdot(\sigma\otimes I+I\otimes\sigma)+\frac{\gamma_v-1}{2v^2}(\vec{v}\cdot\sigma)\otimes(\vec{v}\cdot\sigma)$

推论4.4.2. $R_{\varsigma\vec{v}}=S_{em}(\kappa)\Lambda_{\varsigma\vec{v}}\otimes\Lambda_{\varsigma\vec{v}}S^+_{em}(\kappa)=\frac{\gamma_v+1}{2}-\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot R+\frac{\gamma_v-1}{2v^2}(\vec{v}\cdot\sigma_+)(\vec{v}\cdot\sigma_-)$
$=1-\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot R+\frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec{v}\cdot R)^2=\begin{bmatrix}\gamma_v&0&0&0\\0&\gamma_v&0&0\\0&0&\gamma_v&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\varsigma\gamma_v\begin{bmatrix}0&-iv_z&iv_y&0\\iv_z&0&-iv_x&0\\-iv_y&iv_x&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}-\frac{\gamma_v-1}{v^2}\begin{bmatrix}v_xv_x&v_xv_y&v_xv_z&0\\v_yv_x&v_yv_y&v_yv_z&0\\v_zv_x&v_zv_y&v_zv_z&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

推论4.4.3. $(\vec{v}\cdot\sigma_+)(\vec{v}\cdot\sigma_-)=-2\begin{bmatrix}v_xv_x&v_xv_y&v_xv_z&0\\v_yv_x&v_yv_y&v_yv_z&0\\v_zv_x&v_zv_y&v_zv_z&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+v^2\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$

推论4.4.4. $(\vec{v}\cdot R)^2=-\begin{bmatrix}v_xv_x&v_xv_y&v_xv_z&0\\v_yv_x&v_yv_y&v_yv_z&0\\v_zv_x&v_zv_y&v_zv_z&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+v^2\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},(\vec{v}\cdot\gamma)^2=-\begin{bmatrix}v_xv_x&v_xv_y&v_xv_z\\v_yv_x&v_yv_y&v_yv_z\\v_zv_x&v_zv_y&v_zv_z\end{bmatrix}+v^2$

推论4.4.5. $(\vec{v}\cdot\sigma_+)(\vec{v}\cdot\sigma_-)=2(\vec{v}\cdot R)^2-v^2=v^2-2(\vec{v}\cdot L)^2$

推论4.4.6. $(\vec{v}\cdot R)(\vec{v}\cdot L)=(\vec{v}\cdot L)(\vec{v}\cdot R),(\vec{v}\cdot R)^2+(\vec{v}\cdot L)^2=v^2$

4.5 从旋量变换规律推得矢量的变换规律

定义4.5.1. $L_{\vec{v}}\equiv\begin{bmatrix}1&0&0&-i\gamma_vv_x\\0&1&0&-i\gamma_vv_y\\0&0&1&-i\gamma_vv_z\\i\gamma_vv_x&i\gamma_vv_y&i\gamma_vv_z&\gamma_v\end{bmatrix}+\frac{\gamma_v-1}{v^2}\begin{bmatrix}v_xv_x&v_xv_y&v_xv_z&0\\v_yv_x&v_yv_y&v_yv_z&0\\v_zv_x&v_zv_y&v_zv_z&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\gamma_v(1-\vec{v}\cdot L)-\frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec{v}\cdot R)^2$

推论4.5.1.
$\Lambda_{\varsigma\vec{v}}\otimes\Lambda_{-\varsigma\vec{v}}=\frac{1}{2(\gamma_v+1)}(1+\gamma_v-\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot\sigma)\otimes(1+\gamma_v+\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot\sigma)=\frac{\gamma_v+1}{2}-\frac{1}{2}\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot(\sigma\otimes I-I\otimes\sigma)-\frac{\gamma_v-1}{2v^2}(\vec{v}\cdot\sigma)\otimes(\vec{v}\cdot\sigma)$

推论4.5.2.
$L_{-\kappa\varsigma\vec{v}}=S_{em}(\kappa)\Lambda_{\varsigma\vec{v}}\otimes\Lambda_{-\varsigma\vec{v}}S^+_{em}(\kappa)=\frac{\gamma_v+1}{2}+\kappa\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot L-\frac{\gamma_v-1}{2v^2}(\vec{v}\cdot\sigma_+)(\vec{v}\cdot\sigma_-)=\gamma_v(1+\kappa\varsigma\vec{v}\cdot L)-\frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec{v}\cdot R)^2$

4.6 洛伦兹推动变换小结

旋量的洛伦兹推动变换：

推论4.6.1. $\Lambda_{\varsigma\vec{v}}=e^{-\frac{1}{2}\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}(1+\gamma_v-\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot\sigma),\epsilon\sim -v,{}^{A_\varsigma}\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s)}$

狄拉克旋量的洛伦兹推动变换：

推论4.6.2. $D_{\varsigma\vec{v}}=e^{-\frac{1}{2}\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\sigma\otimes\sigma_z}=\frac{1}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}(1+\gamma_v-\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot\sigma\otimes\sigma_z),D_{\varsigma\vec{v}}=\Lambda_{\varsigma\vec{v}}\oplus\Lambda_{-\varsigma\vec{v}}$

矢量的洛伦兹推动变换：

推论4.6.3. $L_{-\kappa\varsigma\vec{v}}=\gamma_v(1+\kappa\varsigma\vec{v}\cdot L)-\frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec{v}\cdot R)^2,L_{-\kappa\varsigma\vec{v}}=S_{em}(\kappa)\Lambda_{\varsigma\vec{v}}\otimes\Lambda_{-\varsigma\vec{v}}S^+_{em}(\kappa)$

电磁旋量和角动量的洛伦兹推动变换：

推论4.6.4. $R_{\varsigma\vec{v}}=1-\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot R+\frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec{v}\cdot R)^2,R_{\varsigma\vec{v}}=S_{em}(\kappa)\Lambda_{\varsigma\vec{v}}\otimes\Lambda_{\varsigma\vec{v}}S^+_{em}(\kappa)$

s-旋量的洛伦兹推动变换：

推论4.6.5. $\Lambda_{\varsigma\vec{v}}(s)=\bar{\mathcal{P}}(s+\frac{1}{2})\overbrace{\Lambda_{\varsigma\vec{v}}\otimes\cdots\otimes\Lambda_{\varsigma\vec{v}}}^{2s}\mathcal{P}(s+\frac{1}{2}),\Lambda_{\varsigma\vec{v}}=\frac{1}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}(1+\gamma_v-\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot\sigma)$

5 各种自旋粒子洛伦兹变换的多项式表示

以上采用的是繁琐、直观、猜测的方法，下面将采用更解析、更严格、更有条理和更系统的分析与推导方法，得到更一般、更普适的结论。

5.1 数学准备

5.1.1 定义

定义5.1.1. $e(s,n,\sigma)\equiv(\overbrace{I\otimes\cdots\otimes I\otimes}^{n-1}\sigma\overbrace{\otimes I\otimes\cdots\otimes I}^{2s-n})$

定义5.1.2. $\hat{\Omega}(s)\equiv\hat{\Omega}(s,1,\sigma)\equiv\sum\limits_{n=1}^{2s}e(s,n,\sigma),\Omega(s)\equiv\frac{1}{2}\hat{\Omega}(s,1,\sigma)$

$\hat{\Omega}(s,1,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\equiv\sum\limits_{n=1}^{2s}e(s,n,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)=\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(s,1,\sigma)$

$\hat{\Omega}(s,2,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\equiv\frac{1}{2!}\sum\limits_{i\neq j}^{1,2s}e(s,i,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)e(s,j,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)$

$\hat{\Omega}(s,n,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\equiv\frac{1}{n!}\sum\limits_{i_1\neq i_2\cdots\neq i_n}^{1,2s}e(s,i_1,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)e(s,i_2,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\cdots e(s,i_n,\vec{\vartheta}\cdot\sigma),$

5.1.2 重要性质

性质5.1.1. $\hat{\Omega}(s,2,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)=\frac{1}{2}\hat{\Omega}^2(s,1,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)-s\vec{\vartheta}^2$

性质5.1.2. $\hat{\Omega}(s\leq 2,n,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)=\frac{1}{n!}\hat{\Omega}^n(s,1,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)u(n-1)$
$-\frac{1}{n!}(\frac{2sC_{2s-1}^{n-2}}{C_{2s}^{n-2}})[C_n^2(n-2)!]\vec{\vartheta}^2\hat{\Omega}(s,n-2,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)u(n-2)-\frac{1}{n!}(\frac{2sC_{2s-1}^{n-3}}{C_{2s}^{n-2}})[C_n^3(n-3)!]\vec{\vartheta}^2\hat{\Omega}(s,n-2,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)u(n-3)+\cdots$
$=\frac{1}{n!}\hat{\Omega}^n(s,1,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)u(n-1)-[s-\frac{1}{2}(n-2)]\vec{\vartheta}^2\hat{\Omega}(s,n-2,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)u(n-2)-\frac{1}{6}(n-2)\vec{\vartheta}^2\hat{\Omega}(s,n-2,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)u(n-3)-\frac{5}{3}\vec{\vartheta}^4\delta_{n,4}$

5.1.3 洛伦兹生成元矩阵性质 [24]

性质5.1.3. $\vec{\vartheta}^2=0\Rightarrow(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)^2=0,(\vec{\vartheta}\cdot\gamma)^2=0,(\vec{\vartheta}\cdot R)^2=0,(\vec{\vartheta}\cdot L)^2=0$

性质5.1.4. $\vec{\vartheta}^2=0\Rightarrow[\vec{\vartheta}\cdot(\sigma\otimes I+I\otimes\sigma)]^2=0,(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)=0$

性质5.1.5. $\vec{\vartheta}^2=0\Rightarrow[\vec{\vartheta}\cdot(\sigma\otimes I\otimes I+I\otimes\sigma\otimes I+I\otimes I\otimes\sigma)]^2=0$

性质5.1.6. $\vec{\vartheta}^2=0\Rightarrow[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(s)]^2=0,[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s)]^2=0,[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)]^2=0$

性质5.1.7. $\vec{\vartheta}^2=1\Rightarrow(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)^3=\vec{\vartheta}\cdot\sigma,(\vec{\vartheta}\cdot\gamma)^3=\vec{\vartheta}\cdot\gamma,(\vec{\vartheta}\cdot R)^3=\vec{\vartheta}\cdot R,(\vec{\vartheta}\cdot L)^3=\vec{\vartheta}\cdot L$

5.2 多项式展开的重要定理(终于严密化了2023.09.15)

定理5.2.1. $(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n=\sum\limits_{(\sum\limits_k i_k)=n}\frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_m!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_m^{i_m}$

定义5.2.1. $<k_1,k_2,\cdots,k_m>=\frac{1}{m!}a_{\{1}^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_{m\}}^{k_m};k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m\geq 0,k_1+k_2+\cdots+k_m=n$

定义5.2.2. $<(n_1;l_1),(n_2;l_2),\cdots,(n_k;l_k)>:=<\overbrace{n_1,\cdots,n_1}^{l_1},\overbrace{n_2,\cdots,n_2}^{l_2},\cdots,\overbrace{n_k,\cdots,n_k}^{l_k}>$
$n_1>n_2>\cdots>n_k\geq 0,l_1,l_2,\cdots,l_k\geq 1;l_1+l_2+\cdots+l_k=m,n_1l_1+n_2l_2+\cdots+n_kl_k=n$

推论5.2.1. $<(n_1;l_1),(n_2;l_2),\cdots,(n_k;l_k)>=\frac{1}{m!}(a_{\{1}^{n_1}\cdot\cdot a_{l_1}^{n_1})(a_{l_1+1}^{n_2}\cdot\cdot a_{l_1+l_2}^{n_2})\cdots(a_{l_1+\cdot\cdot+l_{k-1}+1}^{n_k}\cdot\cdot a_{l_1+\cdot\cdot+l_k\}}^{n_k})$
$=\frac{1}{m!}(l_1!a_{\{|1}^{n_1}\cdot\cdot a_{l_1|}^{n_1})(l_2!a_{|l_1+1}^{n_2}\cdot\cdot a_{l_1+l_2|}^{n_2})\cdots(l_k!a_{|l_1+\cdot\cdot+l_{k-1}+1}^{n_k}\cdot\cdot a_{l_1+\cdot\cdot+l_k|\}}^{n_k})$
$=\frac{l_1!l_2!\cdots l_k!}{m!}(a_{\{|1}^{n_1}\cdot\cdot a_{l_1|}^{n_1})(a_{|l_1+1}^{n_2}\cdot\cdot a_{l_1+l_2|}^{n_2})\cdots(a_{|l_1+\cdot\cdot+l_{k-1}+1}^{n_k}\cdot\cdot a_{l_1+\cdot\cdot+l_k|\}}^{n_k})$

定理5.2.2. $(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n=\sum\limits_{i_1\cdot\cdot+i_m=n}\frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_m!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_m^{i_m}$
$=\sum\frac{n!}{(n_1!)^{l_1}(n_2!)^{l_2}\cdots(n_k!)^{l_k}}\frac{m!}{l_1!l_2!\cdots l_k!}<(n_1;l_1),(n_2;l_2),\cdots,(n_k;l_k)>$
$n_1>n_2>\cdots>n_k\geq 0,l_1,l_2,\cdots,l_k\geq 1;l_1+l_2+\cdots+l_k=m,n_1l_1+n_2l_2+\cdots+n_kl_k=n$

证明: $(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n=\sum\limits_{i_1\cdot\cdot+i_m=n}\frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_m!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_m^{i_m}$
$=\sum\frac{n!}{(n_1!)^{l_1}(n_2!)^{l_2}\cdots(n_k!)^{l_k}}(a_{\{|1}^{n_1}\cdot\cdot a_{l_1|}^{n_1})(a_{|l_1+1}^{n_2}\cdot\cdot a_{l_1+l_2|}^{n_2})\cdots(a_{|l_1+\cdot\cdot+l_{k-1}+1}^{n_k}\cdot\cdot a_{l_1+\cdot\cdot+l_k|\}}^{n_k})$
$=\sum\frac{n!}{(n_1!)^{l_1}(n_2!)^{l_2}\cdots(n_k!)^{l_k}}\frac{m!}{l_1!l_2!\cdots l_k!}<(n_1;l_1),(n_2;l_2),\cdots,(n_k;l_k)>$ □

5.2.1 例子：二项式展开

性质5.2.1. $(a_1+a_2)^2=\sum\frac{2!}{i_1!i_2!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}$
$=\frac{2!}{2!0!}(a_1^2a_2^0+a_1^0a_2^2)+\frac{2!}{1!1!}(a_1^1a_2^1)$
$=\frac{2!}{2!0!}\frac{2!}{1!1!}<2,0>+\frac{2!}{1!1!}\frac{2!}{2!}<1,1>,<2,0>:=\frac{1!1!}{2!}(a_1^2a_2^0+a_1^0a_2^2),<1,1>:=\frac{2!}{2!}(a_1^1a_2^1)$
$=2<2,0>+2<1,1>$

性质5.2.2. $(a_1+a_2)^3=\sum\frac{3!}{i_1!i_2!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}$
$=\frac{3!}{3!0!}\frac{2!}{1!1!}<3,0>+\frac{3!}{2!1!}\frac{2!}{1!1!}<2,1>,<3,0>:=\frac{1!}{2!}(a_1^3a_2^0+a_1^0a_2^3),<2,1>:=\frac{1!1!}{2!}(a_1^2a_2^1+a_1^1a_2^2)$
$=2<3,0>+6<2,1>$

性质5.2.3. $(a_1+a_2)^4=\sum\frac{4!}{i_1!i_2!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}$
$=\frac{4!}{4!0!}\frac{2!}{1!1!}<4,0>+\frac{4!}{3!1!}\frac{2!}{1!1!}<3,1>+\frac{4!}{2!2!}\frac{2!}{2!}<2,2>$
$=2<4,0>+8<3,1>+6<2,2>$

5.2.2 例子：三项式展开

性质5.2.4. $(a_1+a_2+a_3)^2=\sum\frac{2!}{i_1!i_2!i_3!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}a_3^{i_3}$
$=\frac{2!}{2!0!0!}\frac{3!}{1!2!}<2,0,0>+\frac{2!}{1!1!0!}\frac{3!}{2!1!}<1,1,0>$
$=3<2,0,0>+6<1,1,0>$

性质5.2.5. $(a_1+a_2+a_3)^3=\sum\frac{3!}{i_1!i_2!i_3!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}a_3^{i_3}$
$=\frac{3!}{3!0!0!}\frac{3!}{1!2!}<3,0,0>+\frac{3!}{2!1!0!}\frac{3!}{1!1!1!}<2,1,0>+\frac{3!}{1!1!1!}\frac{3!}{3!}<1,1,1>$
$=3<3,0,0>+18<2,1,0>+6<1,1,1>$

性质5.2.6. $(a_1+a_2+a_3)^4=\sum\frac{4!}{i_1!i_2!i_3!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}a_3^{i_3}$
$=\frac{4!}{4!0!0!}\frac{3!}{1!2!}<4,0,0>+\frac{4!}{3!1!0!}\frac{3!}{1!1!1!}<3,1,0>+\frac{4!}{2!2!0!}\frac{3!}{2!1!}<2,2,0>+\frac{4!}{2!1!1!}\frac{3!}{1!2!}<2,1,1>$
$=3<4,0,0>+24<3,1,0>+18<2,2,0>+36<2,1,1>$

5.2.3 例子：四项式展开

性质5.2.7. $(a_1+a_2+a_3+a_4)^2=\sum\frac{2!}{i_1!i_2!i_3!i_4!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}a_3^{i_3}a_4^{i_4}$
$=\frac{2!}{2!0!0!0!}\frac{4!}{1!3!}<2,0,0,0>+\frac{2!}{1!1!0!0!}\frac{4!}{2!2!}<1,1,0,0>$
$=4<2,0,0,0>+12<1,1,0,0>$

性质5.2.8. $(a_1+a_2+a_3+a_4)^3=\sum\frac{3!}{i_1!i_2!i_3!i_4!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}a_3^{i_3}a_4^{i_4}$
$=\frac{3!}{3!0!0!0!}\frac{4!}{1!3!}<3,0,0,0>+\frac{3!}{2!1!0!0!}\frac{4!}{1!1!2!}<2,1,0,0>+\frac{3!}{1!1!1!0!}\frac{4!}{3!1!}<1,1,1,0>$
$=4<3,0,0,0>+36<2,1,0,0>+24<1,1,1,0>$

性质5.2.9. $(a_1+a_2+a_3+a_4)^4=\sum\frac{4!}{i_1!i_2!i_3!i_4!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}a_3^{i_3}a_4^{i_4}$
$=\frac{4!}{4!0!0!0!}\frac{4!}{1!3!}<4,0,0,0>+\frac{4!}{3!1!0!0!}\frac{4!}{1!1!2!}<3,1,0,0>+\frac{4!}{2!2!0!0!}\frac{4!}{2!2!}<2,2,0,0>$
$+\frac{4!}{2!1!1!0!}\frac{4!}{1!2!1!}<2,1,1,0>+\frac{4!}{1!1!1!1!}\frac{4!}{4!}<1,1,1,1>$
$=4<4,0,0,0>+48<3,1,0,0>+36<2,2>+144<2,1,1,0>+24<1,1,1,1>$

性质5.2.10. $(a_1+a_2+a_3+a_4)^5=\sum\frac{5!}{i_1!i_2!i_3!i_4!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}a_3^{i_3}a_4^{i_4}$
$=\frac{5!}{5!0!0!0!}\frac{4!}{1!3!}<5,0,0,0>+\frac{5!}{4!1!0!0!}\frac{4!}{1!1!2!}<4,1,0,0>+\frac{5!}{3!2!0!0!}\frac{4!}{1!1!2!}<3,2,0,0>$
$+\frac{5!}{3!1!1!0!}\frac{4!}{1!2!1!}<3,1,1,0>+\frac{5!}{2!2!1!0!}\frac{4!}{2!1!1!}<2,2,1,0>+\frac{5!}{2!1!1!1!}\frac{4!}{1!3!}<2,1,1,1>$
$=4<5,0,0,0>+60<4,1,0,0>+120<3,2,0,0>+240<3,1,1,0>+360<2,2,1,0>+240<2,1,1,1>$

5.2.4 例子：五项式展开

定理5.2.3. $(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n$
$=\sum\frac{n!}{(n_1!)^{l_1}(n_2!)^{l_2}\cdots(n_k!)^{l_k}}\frac{m!}{l_1!l_2!\cdots l_k!(m-l_1-\cdots-l_k)!}<(n_1;l_1),(n_2;l_2),\cdots,(n_k;l_k)>$

性质5.2.11. $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2=\sum\frac{2!}{i_1!i_2!i_3!i_4!i_5!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}a_3^{i_3}a_4^{i_4}a_5^{i_5}$
$=\frac{2!}{2!0!^4}\frac{5!}{1!4!}<2,0,0,0,0>+\frac{2!}{1!^2 0!^3}\frac{5!}{2!3!}<1,1,0,0,0>$
$=5<2,0,0,0>+20<1,1,0,0,0>$

性质5.2.12. $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^3=\sum\frac{3!}{i_1!i_2!i_3!i_4!i_5!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}a_3^{i_3}a_4^{i_4}a_5^{i_5}$
$=\frac{3!}{3!0!^4}\frac{5!}{1!4!}<3,0,0,0,0>+\frac{3!}{2!1!0!^3}\frac{5!}{1!1!3!}<2,1,0,0,0>+\frac{3!}{1!^3 0!^2}\frac{5!}{3!2!}<1,1,1,0>$
$=5<3,0,0,0,0>+60<2,1,0,0,0>+60<1,1,1,0,0>$

性质5.2.13. $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^4=\sum\frac{4!}{i_1!i_2!i_3!i_4!i_5!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}a_3^{i_3}a_4^{i_4}a_5^{i_5}$
$=\frac{4!}{4!0!^4}\frac{5!}{1!4!}<4,0,0,0,0>+\frac{4!}{3!1!0!^3}\frac{5!}{1!1!3!}<3,1,0,0,0>+\frac{4!}{2!^2 0!^3}\frac{5!}{2!3!}<2,2,0,0,0>$
$+\frac{4!}{2!1!^2 0!^2}\frac{5!}{1!2!2!}<2,1,1,0,0>+\frac{4!}{1!^4 0!}\frac{5!}{4!1!}<1,1,1,1,0>$
$=5<4,0,0,0,0>+80<3,1,0,0,0>+60<2,2,0>+360<2,1,1,0,0>+120<1,1,1,1,0>$

性质5.2.14. $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^5=\sum\frac{5!}{i_1!i_2!i_3!i_4!i_5!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}a_3^{i_3}a_4^{i_4}a_5^{i_5}$
$=\frac{5!}{5!0!^4}\frac{5!}{1!4!}<5,0,0,0,0>+\frac{5!}{4!1!0!^3}\frac{5!}{1!1!3!}<4,1,0,0,0>+\frac{5!}{3!2!0!^3}\frac{5!}{1!1!3!}<3,2,0,0,0>$
$+\frac{5!}{3!1!^2 0!^2}\frac{5!}{1!2!2!}<3,1,1,0,0>+\frac{5!}{2!^2 1!0!^2}\frac{5!}{2!1!2!}<2,2,1,0,0>+\frac{5!}{2!1!^3 0!}\frac{5!}{1!3!1!}<2,1,1,1,0>+\frac{5!}{1!^5}\frac{5!}{5!}<1,1,1,1,1>$
$=5<5,0,0,0,0>+100<4,1,0,0,0>+200<3,2,0,0,0>+600<3,1,1,0,0>+900<2,2,1,0,0>+1200<2,1,1,1,0>+120<1,1,1,1,1>$

5.3 归一化约束条件下的多项式展开

5.3.1 归一化约束条件下的二项式展开

定义5.3.1. $[a_i,a_j]=0,a_i^2=1,<1,0>=\frac{1}{2}(a_1+a_2)$

性质5.3.1. $(a_1+a_2)^2=2<2,0>+2<1,1>=2<0,0>+2<1,1>=2+2<1,1>$

推论5.3.1. $<1,1>=\frac{1}{2}(a_1+a_2)^2-1$

性质5.3.2. $(a_1+a_2)^3=2<3,0>+6<2,1>=2<1,0>+6<0,1>=8<1,0>$

推论5.3.2. $(a_1+a_2)^3=4(a_1+a_2),2^3=4\cdot2^1,0^3=4\cdot0^1$

推论5.3.3. $[\frac{1}{2}(a_1+a_2)]^3=[\frac{1}{2}(a_1+a_2)]$

性质5.3.3.
$(a_1+a_2)^4=2<4,0>+8<3,1>+6<2,2>=2<0,0>+8<1,1>+6<0,0>=8+8<1,1>$

推论5.3.4. $(a_1+a_2)^4=4(a_1+a_2)^2$

5.3.2 归一化约束条件下的三项式展开

定义5.3.2. $[a_i,a_j]=0,a_i^2=1,<1,0,0>=\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)$

推论5.3.5. $\frac{3!}{1!2!}<1,0,0>=(a_1+a_2+a_3)$

性质5.3.4. $(a_1+a_2+a_3)^2=3<2,0,0>+6<1,1,0>=3<0,0,0>+6<1,1,0>=3+6<1,1,0>$

推论5.3.6. $\frac{3!}{2!1!}<1,1,0>=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3)^2-\frac{3}{2}$

性质5.3.5. $(a_1+a_2+a_3)^3=3<3,0,0>+18<2,1,0>+6<1,1,1>$
$=3<1,0,0>+18<0,1,0>+6<1,1,1>=21<1,0,0>+6<1,1,1>$

推论5.3.7. $\frac{3!}{3!}<1,1,1>=\frac{1}{6}(a_1+a_2+a_3)^3-\frac{7}{6}(a_1+a_2+a_3)$

性质5.3.6. $(a_1+a_2+a_3)^4=3<4,0,0>+24<3,1,0>+18<2,2,0,0>+36<2,1,1>$
$=3<0,0,0>+24<1,1,0>+18<0,0,0>+36<0,1,1>=21+60<1,1,0>$

推论5.3.8. $(a_1+a_2+a_3)^4=10(a_1+a_2+a_3)^2-9,3^4=10\cdot3^2-9,1^4=10\cdot1^2-9$

推论5.3.9. $[\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3)]^4=\frac{5}{2}[\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3)]^2-\frac{9}{16}$

5.3.3 归一化约束条件下的四项式展开

定义5.3.3. $[a_i, a_j] = 0, a_i^2 = 1, < 1,0,0,0 >= \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$

推论5.3.10. $\frac{4!}{1!3!} < 1,0,0,0 >= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$

性质5.3.7. $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 = 4 < 2,0,0,0 > +12 < 1,1,0,0 >= 4 < 0,0,0,0 > +12 < 1,1,0,0 >= 4 + 12 < 1,1,0,0 >$

推论5.3.11. $\frac{4!}{2!2!} < 1,1,0,0 >= \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 - 2$

性质5.3.8. $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^3 = 4 < 3,0,0,0 > +36 < 2,1,0,0 > +24 < 1,1,1,0 >$
$= 4 < 1,0,0,0 > +36 < 0,1,0,0 > +24 < 1,1,1,0 >= 40 < 1,0,0,0 > +24 < 1,1,1,0 >$

推论5.3.12. $\frac{4!}{3!1!} < 1,1,1,0 >= \frac{1}{6}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^3 - \frac{5}{3}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$

性质5.3.9. $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^4 = 4 < 4,0,0,0 > +48 < 3,1,0,0 > +36 < 2,2,0,0 > +144 < 2,1,1,0 > +24 < 1,1,1,1 >$
$= 4 < 0,0,0,0 > +48 < 1,1,0,0 > +36 < 0,0,0,0 > +144 < 0,1,1,0 > +24 < 1,1,1,1 >= 40 + 192 < 1,1 > +24 < 1,1,1,1 >$

推论5.3.13. $\frac{4!}{4!} < 1,1,1,1 >= \frac{1}{24}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^4 - \frac{2}{3}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 + 1$

性质5.3.10. $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^5$
$= 4 < 5,0,0,0 > +60 < 4,1,0,0 > +120 < 3,2,0,0 > +240 < 3,1,1,0 > +360 < 2,2,1,0 > +240 < 2,1,1,1 >= 4 < 1,0,0,0 > +60 < 0,1,0,0 > +120 < 1,0,0,0 > +240 < 1,1,1,0 > +360 < 0,0,1,0 > +240 < 0,1,1,1 >= 544 < 1,0,0,0 > +480 < 1,1,1,0 >$

性质5.3.11. $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^5 = 20(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^3 - 64(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$
$4^5 = 20 \cdot 4^3 - 64 \cdot 4^1, 2^5 = 20 \cdot 2^3 - 64 \cdot 2^1, 0^5 = 20 \cdot 0^3 - 64 \cdot 0^1$

推论5.3.14. $[\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)]^5 = 5[\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)]^3 - 4[\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)]$

5.3.4 符号简化例子：5项式展开

定义5.3.4. $[a_i, a_j] = 0, a_i^2 = 1, < 1, 0_4 >= \frac{1}{5}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$

推论5.3.15. $\frac{5!}{1!4!} < 1, 0_4 >= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$

性质5.3.12. $(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_5)^2 = \sum \frac{2!}{i_1!i_2!i_3!i_4!i_5!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} a_3^{i_3} a_4^{i_4} a_5^{i_5}$
$= \frac{2!}{2!}\frac{5!}{1!4!} < 2, 0_4 > + \frac{2!}{1!1!}\frac{5!}{2!3!} < 1_2, 0_3 >$
$= 5 < 2, 0_4 > +5(5-1) < 1_2, 0_3 >$
$\stackrel{1}{=} 5 + 2! < 1_2, 0_3 >_+$

推论5.3.16. $< 1_2, 0_3 >_+ = \frac{1}{2!}[< 1, 0_4 >_+^2 - 5]$

性质5.3.13. $(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_5)^3 = \sum \frac{3!}{i_1!i_2!i_3!i_4!i_5!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} a_3^{i_3} a_4^{i_4} a_5^{i_5}$
$= \frac{3!}{3!}\frac{5!}{1!4!} < 3, 0_4 > + \frac{3!}{2!1!}\frac{5!}{1!1!3!} < 2, 1, 0_3 > + \frac{3!}{1!1!1!}\frac{5!}{3!2!} < 1_3, 0_2 >$
$= 5 < 3, 0_4 > +60 < 2, 1, 0_3 > +60 < 1_3, 0_2 >$
$\stackrel{1}{=} 65 < 1, 0_4 > +60 < 1_3, 0_2 >$
$\stackrel{1}{=} 13 < 1, 0_4 >_+ +3! < 1_3, 0_2 >_+$

推论5.3.17. $< 1_3, 0_2 >_+ = \frac{1}{3!}[< 1, 0_4 >_+^3 - 13 < 1, 0_4 >_+]$

性质5.3.14. $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_5)^4=\sum\frac{4!}{i_1!i_2!i_3!i_4!i_5!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}a_3^{i_3}a_4^{i_4}a_5^{i_5}$
$=\frac{4!}{4!}\frac{5!}{1!4!}<4,0_4>+\frac{4!}{3!1!}\frac{5!}{1!1!3!}<3,1,0_3>+\frac{4!}{2!2!}\frac{5!}{2!3!}<2_2,0_3>$
$+\frac{4!}{2!1!1!}\frac{5!}{1!2!2!}<2,1_2,0_2>+\frac{4!}{1!1!1!1!}\frac{5!}{4!1!}<1_4,0>$
$=5<4,0_4>+80<3,1,0_3>+60<2_2,0_3>+360<2,1_2,0_2>+120<1_4,0>$
$\overset{1}{=}65+440<1_2,0_3>+120<1_4,0>$
$\overset{1}{=}65+44<1_2,0_3>_++4!<1_4,0>_+$

推论5.3.18. $<1_4,0>_+=\frac{1}{4!}[<1,0_4>_+^4-22<1,0_4>_+^2+45]$

性质5.3.15. $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_5)^5=\sum\frac{5!}{i_1!i_2!i_3!i_4!i_5!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}a_3^{i_3}a_4^{i_4}a_5^{i_5}$
$=\frac{5!}{5!}\frac{5!}{1!4!}<5,0_4>+\frac{5!}{4!1!}\frac{5!}{1!1!3!}<4,1,0_3>+\frac{5!}{3!2!}\frac{5!}{1!1!3!}<3,2,0_3>$
$+\frac{5!}{3!1!1!}\frac{5!}{1!2!2!}<3,1_2,0_2>+\frac{5!}{2!2!1!}\frac{5!}{2!1!2!}<2_2,1,0_2>$
$+\frac{5!}{2!1!1!1!}\frac{5!}{1!3!1!}<2,1_3,0>+\frac{5!}{1!1!1!1!1!}\frac{5!}{5!}<1_5>$
$=5<5,0_4>+100<4,1,0_3>+200<3,2,0_3>+600<3,1_2,0_2>+900<2_2,1,0_2>+1200<2,1_3,0>$
$+120<1_5>$
$\overset{1}{=}1205<1,0_4>+1800<1_3,0_2>+120<1_5>$
$\overset{1}{=}241<1,0_4>_++180<1_3,0_2>_++5!<1_5>_+$

推论5.3.19. $<1_5>_+=\frac{1}{5!}[<1,0_4>_+^5-30<1,0_4>_+^3+149<1,0_4>_+]$

性质5.3.16. $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_5)^6=\sum\frac{6!}{i_1!i_2!i_3!i_4!i_5!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}a_3^{i_3}a_4^{i_4}a_5^{i_5}$
$=\frac{6!}{6!}\frac{5!}{1!4!}<6,0_4>+\frac{6!}{5!1!}\frac{5!}{1!1!3!}<5,1,0_3>+\frac{6!}{4!2!}\frac{5!}{1!1!3!}<4,2,0_3>+\frac{6!}{4!1!1!}\frac{5!}{1!2!2!}<4,1_2,0_2>$
$+\frac{6!}{3!3!}\frac{5!}{2!3!}<3_2,0_3>+\frac{6!}{3!2!1!}\frac{5!}{1!1!1!2!}<3,2,1,0_2>+\frac{6!}{3!1!1!1!}\frac{5!}{1!3!1!}<3,1_3,0>$
$+\frac{6!}{2!2!2!}\frac{5!}{3!2!}<2_3,0_2>+\frac{6!}{2!2!1!1!}\frac{5!}{2!2!1!}<2_2,1_2,0>+\frac{6!}{2!1!1!1!1!}\frac{5!}{1!4!0!}<2,1_4>$
$=5+120<1_2,0_3>+300+900<1_2,0_3>$
$+200<1_2,0_3>+3600<1_2,0_3>+2400<1_4,0>$
$+900+5400<1_2,0_3>+1800<1_4,0>$
$=1205+10220<1_2,0_3>+4200<1_4,0>$
$=1205+10220\frac{1}{C_5^2}<1_2,0_3>_++4200\frac{1}{C_5^4}<1_4,0>_+$
$=1205+1022<1_2,0_3>_++840<1_4,0>_+$
$=1205+1022\frac{1}{2!}[<1,0_4>_+^2-5]+840\frac{1}{4!}[<1,0_4>_+^4-22<1,0_4>_+^2+45]$

推论5.3.20.
$<1,0_4>_+^6=35<1,0_4>_+^4-259<1,0_4>_+^2+225$
$5^6=35\cdot5^4-259\cdot5^2+225$
$3^6=35\cdot3^4-259\cdot3^2+225$
$1^6=35\cdot1^4-259\cdot1^2+225$
$<1,0_5>_+^7=56<1,0_5>_+^5-784<1,0_5>_+^3+2304<1,0_5>_+^1$

5.3.5 例子：m项式展开(进一步简化符号)

性质5.3.17. $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m)^2=\sum\frac{2!}{i_1!i_2!\cdots i_m!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_m^{i_m}$
$=\frac{2!}{2!}\frac{m!}{1!(m-1)!}<2>+\frac{2!}{1!1!}\frac{m!}{2!(m-2)!}<1,1>$
$=m<2>+m(m-1)<1,1>$
$\overset{1}{=}m+m(m-1)<1,1>\overset{1}{=}m+2!<1,1>_+$

推论5.3.21. $<1,1>_+=\frac{1}{2!}[\hat{\Omega}^2(m)-m]$

性质5.3.18. $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m)^3=\sum\frac{3!}{i_1!i_2!\cdots i_m!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_m^{i_m}$
$=\frac{3!}{3!}\frac{m!}{1!(m-1)!}<3>+\frac{3!}{2!1!}\frac{m!}{1!1!(m-2)!}<2,1>+\frac{3!}{1!1!1!}\frac{m!}{3!(m-3)!}<1,1,1>$

$= m < 3 > +3m(m-1) < 2,1 > +m(m-1)(m-2) < 1,1,1 >$

$\overset{1}{=} [m+3m(m-1)] < 1 > +m(m-1)(m-2) < 1,1,1 >$

$\overset{1}{=} (3m-2) < 1 >_+ +3! < 1,1,1 >_+$

推论5.3.22. $< 1,1,1 >_+ = \frac{1}{3!}[\hat{\Omega}^3(m) - (3m-2)\hat{\Omega}(m)]$

性质5.3.19. $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m)^4 = \sum \frac{4!}{i_1!i_2!\cdots i_m!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m}$

$= \frac{4!}{4!}\frac{m!}{1!(m-1)!} < 4 > + \frac{4!}{3!1!}\frac{m!}{1!1!(m-2)!} < 3,1 > + \frac{4!}{2!2!}\frac{m!}{2!(m-2)!} < 2,2 >$

$+ \frac{4!}{2!1!1!}\frac{m!}{1!2!(m-3)!} < 2,1,1 > + \frac{4!}{1!1!1!1!}\frac{m!}{4!(m-4)!} < 1,1,1,1 >$

$= m < 4 > +4m(m-1) < 3,1 > +3m(m-1) < 2,2 >$

$+ 6m(m-1)(m-2) < 2,1,1 > +m(m-1)(m-2)(m-3) < 1,1,1,1 >$

$\overset{1}{=} [m+3m(m-1)] + [4m(m-1)+6m(m-1)(m-2)] < 1,1 > +m(m-1)(m-2)(m-3) < 1,1,1,1 >$

$\overset{1}{=} m(3m-2) + 4(3m-4) < 1,1 >_+ +4! < 1,1,1,1 >_+$

推论5.3.23. $< 1,1,1,1 >_+ = \frac{1}{4!}[\hat{\Omega}^4(m) - 2(3m-4)\hat{\Omega}^2(m) + 3m(m-2)]$

性质5.3.20. $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m)^5 = \sum \frac{5!}{i_1!i_2!\cdots i_m!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m}$

$= \frac{5!}{5!}\frac{m!}{1!(m-1)!} < 5 > + \frac{5!}{4!1!}\frac{m!}{1!1!(m-2)!} < 4,1 > + \frac{5!}{3!2!}\frac{m!}{1!1!(m-2)!} < 3,2 >$

$+ \frac{5!}{3!1!1!}\frac{m!}{1!2!(m-3)!} < 3,1,1 > + \frac{5!}{2!2!1!}\frac{m!}{2!1!(m-3)!} < 2,2,1 >$

$+ \frac{5!}{2!1!1!1!}\frac{m!}{1!3!(m-4)!} < 2,1,1,1 > + \frac{5!}{1!1!1!1!1!}\frac{m!}{5!(m-5)!} < 1,1,1,1,1 >$

$= m < 5 > +5m(m-1) < 4,1 > +10m(m-1) < 3,2 >$

$+ 10m(m-1)(m-2) < 3,1,1 > +15m(m-1)(m-2) < 2,2,1 >$

$+ 10m(m-1)(m-2)(m-3) < 2,1,1,1 > +m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) < 1,1,1,1,1 >$

$\overset{1}{=} m[1+15(m-1)^2] < 1 > +10m(m-1)(m-2)^2 < 1,1,1 >$

$+ m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) < 1,1,1,1,1 >$

$\overset{1}{=} [1+15(m-1)^2] < 1 >_+ +3!10(m-2) < 1,1,1 >_+ +5! < 1,1,1,1,1 >_+$

推论5.3.24. $< 1,1,1,1,1 >_+ = \frac{1}{5!}[\hat{\Omega}^5(m) - 10(m-2)\hat{\Omega}^3(m) + (15m^2-50m+24)\hat{\Omega}(m)]$

5.3.6 讨论

推论5.3.25.

$$\begin{cases} < 1,0_{m-1} >_+ = \frac{1}{1!} < 1,0_{m-1} >_+ \simeq C_m^1 \\ < 1_2,0_{m-2} >_+ = \frac{1}{2!}[< 1,0_{m-1} >_+^2 - m] \simeq C_m^2 \\ < 1_3,0_{m-3} >_+ = \frac{1}{3!}[< 1,0_{m-1} >_+^3 - (3m-2) < 1,0_{m-1} >_+] \simeq C_m^3 \\ < 1_4,0_{m-4} >_+ = \frac{1}{4!}[< 1,0_{m-1} >_+^4 - 2(3m-4) < 1,0_{m-1} >_+^2 + 3m(m-2)] \simeq C_m^4 \\ < 1_5,0_{m-5} >_+ = \frac{1}{5!}[< 1,0_{m-1} >_+^5 - 10(m-2) < 1,0_{m-1} >_+^3 + (15m^2-50m+24) < 1,0_{m-1} >_+] \simeq C_m^5 \end{cases}$$

推论5.3.26.

$$\begin{cases} < 1,0_{m-1} >_+ = \frac{1}{1!}[C_1^0 < 1,0_{m-1} >_+ - (C_1^2 m - 2C_1^3)] \simeq C_m^1 \\ < 1_2,0_{m-2} >_+ = \frac{1}{2!}[C_2^0 < 1,0_{m-1} >_+^2 - (C_2^2 m - 2C_2^3)] \simeq C_m^2 \\ < 1_3,0_{m-3} >_+ = \frac{1}{3!}[C_3^0 < 1,0_{m-1} >_+^3 - (C_3^2 m - 2C_3^3) < 1,0_{m-1} >_+] \simeq C_m^3 \\ < 1_4,0_{m-4} >_+ = \frac{1}{4!}[C_4^0 < 1,0_{m-1} >_+^4 - (C_4^2 m - 2C_4^3) < 1,0_{m-1} >_+^2 + 3m(m-2)] \simeq C_m^4 \\ < 1_5,0_{m-5} >_+ = \frac{1}{5!}[C_5^0 < 1,0_{m-1} >_+^5 - (C_5^2 m - 2C_5^3) < 1,0_{m-1} >_+^3 + (15m^2-50m+24) < 1,0_{m-1} >_+] \simeq C_m^5 \\ \text{一般通式???，这是下一步需要攻克的难题。先放一放，} \textit{10.5} \end{cases}$$

性质5.3.21.

$<>_+^1 = 0^1$

$< 1 >_+^2 = 1^2 < 1 >_+$

$< 1,0 >^3_+ = 2^2 < 1,0 >^1_+$

$< 1,0_2 >^4_+ = C^2_5 < 1,0_2 >^2_+ -(1^2 3^2)$

$< 1,0_3 >^5_+ = C^3_6 < 1,0_3 >^3_+ -(2^2 4^2) < 1,0_3 >^1_+$

$< 1,0_4 >^6_+ = C^4_7 < 1,0_4 >^4_+ -259 < 1,0_4 >^2_+ +(1\cdot 3\cdot 5)^2$

$< 1,0_5 >^7_+ = C^5_8 < 1,0_5 >^5_+ -784 < 1,0_5 >^3_+ +(2\cdot 4\cdot 6)^2 < 1,0_5 >^1_+$

$< 1,0_6 >^8_+ = C^6_9 < 1,0_6 >^6_+ -1974 < 1,0_6 >^4_+ +12916 < 1,0_6 >^2_+ -(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7)^2$

$< 1,0_7 >^9_+ = C^7_{10} < 1,0_7 >^7_+ - < 1,0_7 >^5_+ + < 1,0_7 >^3_+ -(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8)^2 < 1,0_7 >^1_+$

$1974 = 1^2 3^2 + 3^2 5^2 + 5^2 7^2 + 7^2 1^2 + 1^2 5^2 + 3^2 7^2, 12916 = 3^2 5^2 7^2 + 5^2 7^2 1^2 + 1^2 3^2 5^2 + 1^2 3^2 7^2$

性质5.3.22.

$<>^1_+ = 0^1$

$< 1 >^2_+ = 1^2 < 1 >_+$

$< 1,0 >^3_+ = 2^2 < 1,0 >^1_+$

$< 1,0_2 >^4_+ = (1^2+3^2) < 1,0_2 >^2_+ -(1^2 3^2)$

$< 1,0_3 >^5_+ = (2^2+4^2) < 1,0_3 >^3_+ -(2^2 4^2) < 1,0_3 >^1_+$

$< 1,0_4 >^6_+ = (1^2+3^2+5^2) < 1,0_4 >^4_+ -(1^2 3^2 + 3^2 5^2 + 5^2 1^2) < 1,0_4 >^2_+ +(1^2 3^2 5^2)$

$< 1,0_5 >^7_+ = (2^2+4^2+6^2) < 1,0_5 >^5_+ -(2^2 4^2 + 4^2 6^2 + 6^2 2^2) < 1,0_5 >^3_+ +(2^2 4^2 6^2) < 1,0_5 >^1_+$

$< 1,0_6 >^8_+ = C^1_{\{1^2,3^2,5^2,7^2\}} < 1,0_6 >^6_+ -C^2_{\{1^2,3^2,5^2,7^2\}} < 1,0_6 >^4_+ +C^3_{\{1^2,3^2,5^2,7^2\}} < 1,0_6 >^2_+ -C^4_{\{1^2,3^2,5^2,7^2\}}$

$< 1,0_7 >^9_+ = C^1_{\{2^2,4^2,6^2,8^2\}} < 1,0_7 >^7_+ -C^2_{\{2^2,4^2,6^2,8^2\}} < 1,0_7 >^5_+ +C^3_{\{2^2,4^2,6^2,8^2\}} < 1,0_7 >^3_+ -C^4_{\{2^2,4^2,6^2,8^2\}} < 1,0_7 >^1_+$

$$< 1,0_{m-1} >^{m+1}_+ = \sum_{i=1}^{[(m+1)/2]} (-1)^{i-1} C^i_{\{m^2,(m-2)^2,\cdots,(m\%2)^2\}} < 1,0_{m-1} >^{m+1-2i}_+$$

定理5.3.1. $\sum_{i=0}^{[(m+1)/2]} (-1)^i C^i_{\{m^2,(m-2)^2,\cdots,(m\%2)^2\}} < 1,0_{m-1} >^{m+1-2i}_+ = 0$

5.4 自然数拆分

定义5.4.1. $< n-l,(l) > := < n-l, \geq (l) >$

推论5.4.1. $(n) = \{< n >, < n-1,(1) >, < n-2,(2) >, \cdots, < 2,(n-2) >, < 1,(n-1) >\}$无限关联，难得通式。

推论5.4.2.

$$\begin{cases}
(1) = \{< 1 >\} \\
(2) = \{< 2 >; < 1,(1) >\} = \{< 2 >; < 1,1 >\} \\
(3) = \{< 3 >; < 2,(1) >; < 1,(2) >\} = \{< 3 >; < 2,1 >; < 1,1,1 >\} \\
(4) = \{< 4 >; < 3,(1) >; < 2,(2) >; < 1,(3) >\} = \{< 4 >, < 3,1 >; < 2,2 >, < 2,1,1 >; < 1,1,1,1 >\} \\
(5) = \{< 5 >; < 4,(1) >; < 3,(2) >; < 2,(3) >; < 1,(4) >\} \\
= \{< 5 >; < 4,1 >; < 3,2 >, < 3,1,1 >; < 2,2,1 >, < 2,1,1,1 >; < 1,1,1,1,1 >\} \\
(6) = \{< 6 >; < 5,(1) >; < 4,(2) >; < 3,(3) >; < 2,(4) >; < 1,(5) >\} \\
= \{< 6 >; < 5,1 >; < 4,2 >, < 4,1,1 >; \\
< 3,3 >, < 3,2,1 >, < 3,1,1,1 >; < 2,2,2 >, < 2,2,1,1 >, < 2,1,1,1,1 >; < 1,1,1,1,1,1 >\} \\
(7) = \{< 7 >; < 6,(1) >; < 5,(2) >; < 4,(3) >; < 3,(4) >; < 2,(5) >; < 1,(6) >\} \\
= \{< 7 >; < 6,1 >; < 5,2 >, < 5,1,1 >; < 4,3 >, < 4,2,1 >, < 4,1,1,1 > \\
; < 3,3,1 >, < 3,2,2 >, < 3,2,1,1 >, < 3,1,1,1,1 > \\
; < 2,2,2,1 >, < 2,2,1,1,1 >, < 2,1,1,1,1,1 >; < 1,1,1,1,1,1,1 >\} \\
\cdots
\end{cases}$$

5.5 平方零约束条件下的多项式展开

5.5.1 平方零约束条件下的二项式展开

定义5.5.1. $[a_i, a_j] = 0, a_i^2 = 0, <1,0>= \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$

性质5.5.1. $(a_1 + a_2)^2 = 2 < 2, 0 > +2 < 1, 1 >= 2 < 1, 1 >$

推论5.5.1. $< 1, 1 >= \frac{1}{2}(a_1 + a_2)^2$

性质5.5.2. $(a_1 + a_2)^3 = 2 < 3, 0 > +6 < 2, 1 >= 0$

性质5.5.3. $(a_1 + a_2)^4 = 2 < 4, 0 > +8 < 3, 1 > +6 < 2, 2 >= 0$

5.5.2 平方零约束条件下的三项式展开

定义5.5.2. $[a_i, a_j] = 0, a_i^2 = 0, < 1, 0, 0 >= \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$

推论5.5.2. $\frac{3!}{1!2!} < 1, 0, 0 >= (a_1 + a_2 + a_3)$

性质5.5.4. $(a_1 + a_2 + a_3)^2 = 3 < 2, 0, 0 > +6 < 1, 1, 0 >= 6 < 1, 1, 0 >$

推论5.5.3. $\frac{3!}{2!1!} < 1, 1, 0 >= \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)^2$

性质5.5.5. $(a_1 + a_2 + a_3)^3 = 3 < 3, 0, 0 > +18 < 2, 1, 0 > +6 < 1, 1, 1 >= 6 < 1, 1, 1 >$

推论5.5.4. $\frac{3!}{3!} < 1, 1, 1 >= \frac{1}{6}(a_1 + a_2 + a_3)^3$

性质5.5.6. $(a_1 + a_2 + a_3)^4 = 3 < 4, 0, 0 > +24 < 3, 1, 0 > +18 < 2, 2, 0, 0 > +36 < 2, 1, 1 >= 0$

5.5.3 平方零约束条件下的四项式展开

定义5.5.3. $[a_i, a_j] = 0, a_i^2 = 0, < 1, 0, 0, 0 >= \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$

推论5.5.5. $\frac{4!}{1!3!} < 1, 0, 0, 0 >= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$

性质5.5.7. $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 = 4 < 2, 0, 0, 0 > +12 < 1, 1, 0, 0 >= 12 < 1, 1, 0, 0 >$

推论5.5.6. $\frac{4!}{2!2!} < 1, 1, 0, 0 >= \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2$

性质5.5.8. $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^3 = 4 < 3, 0, 0, 0 > +36 < 2, 1, 0, 0 > +24 < 1, 1, 1, 0 >= 24 < 1, 1, 1, 0 >$

推论5.5.7. $\frac{4!}{3!1!} < 1, 1, 1, 0 >= \frac{1}{6}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^3$

性质5.5.9. $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^4 = 4 < 4, 0, 0, 0 > +48 < 3, 1, 0, 0 > +36 < 2, 2, 0, 0 > +144 < 2, 1, 1, 0 > +24 < 1, 1, 1, 1 >= 24 < 1, 1, 1, 1 >$

推论5.5.8. $\frac{4!}{4!} < 1, 1, 1, 1 >= \frac{1}{24}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^4$

性质5.5.10. $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^5 = 4 < 5, 0, 0, 0 > +60 < 4, 1, 0, 0 > +120 < 3, 2, 0, 0 > +240 < 3, 1, 1, 0 > +360 < 2, 2, 1, 0 > +240 < 2, 1, 1, 1 >= 0$

5.6 更具体的直接求法

5.6.1 二次元性质

性质5.6.1. $(\vec{\vartheta} \cdot \sigma) \otimes (\vec{\vartheta} \cdot \sigma) = \frac{1}{2}[\vec{\vartheta} \cdot (\sigma \otimes I + I \otimes \sigma)]^2 - \vec{\vartheta}^2$

性质5.6.2. $(\vec{\vartheta} \cdot \sigma) \otimes (-\vec{\vartheta}^* \cdot \sigma) + (-\vec{\vartheta}^* \cdot \sigma) \otimes (\vec{\vartheta} \cdot \sigma) = [\vec{\vartheta} \cdot \sigma \otimes I + (-\vec{\vartheta}^*) \cdot I \otimes \sigma]^2 - \vec{\vartheta}^2 - (-\vec{\vartheta}^*) \cdot (-\vec{\vartheta}^*)$

性质5.6.3. $(\vec{\vartheta} \cdot \sigma) \otimes (\vec{\vartheta} \cdot \sigma) \otimes I + (\vec{\vartheta} \cdot \sigma) \otimes I \otimes (\vec{\vartheta} \cdot \sigma) + I \otimes (\vec{\vartheta} \cdot \sigma) \otimes (\vec{\vartheta} \cdot \sigma)$
$= \frac{1}{2}[\vec{\vartheta} \cdot (\sigma \otimes I \otimes I + I \otimes \sigma \otimes I + I \otimes I \otimes \sigma)]^2 - \frac{3}{2}\vec{\vartheta}^2$

性质5.6.4. $(\vec{\vartheta} \cdot \sigma) \otimes (\vec{\vartheta} \cdot \sigma) \otimes I \otimes I + (\vec{\vartheta} \cdot \sigma) \otimes I \otimes (\vec{\vartheta} \cdot \sigma) \otimes I + I \otimes (\vec{\vartheta} \cdot \sigma) \otimes I \otimes (\vec{\vartheta} \cdot \sigma)$
$+ I \otimes (\vec{\vartheta} \cdot \sigma) \otimes (\vec{\vartheta} \cdot \sigma) \otimes I + I \otimes (\vec{\vartheta} \cdot \sigma) \otimes I \otimes (\vec{\vartheta} \cdot \sigma) + I \otimes I \otimes (\vec{\vartheta} \cdot \sigma) \otimes (\vec{\vartheta} \cdot \sigma)$
$= \frac{1}{2}[\vec{\vartheta} \cdot (\sigma \otimes I \otimes I \otimes I + I \otimes \sigma \otimes I \otimes I + I \otimes I \otimes \sigma \otimes I + I \otimes I \otimes I \otimes \sigma]^2 - 2\vec{\vartheta}^2$

5.6.2 三次元性质

性质5.6.5. $(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)$
$=\frac{1}{6}[\vec{\vartheta}\cdot(\sigma\otimes I\otimes I+I\otimes\sigma\otimes I+I\otimes I\otimes\sigma)]^3-\frac{7}{6}\vec{\vartheta}^2[\vec{\vartheta}\cdot(\sigma\otimes I\otimes I+I\otimes\sigma\otimes I+I\otimes I\otimes\sigma)]$

5.6.3 四次元性质

性质5.6.6. $(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes I+(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes I\otimes(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)+(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes I\otimes(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)+I\otimes(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)$
$=\frac{1}{6}[\vec{\vartheta}\cdot(\sigma\otimes I\otimes I\otimes I+I\otimes\sigma\otimes I\otimes I+I\otimes I\otimes\sigma\otimes I+I\otimes I\otimes I\otimes\sigma)]^3$
$-\frac{5}{3}\vec{\vartheta}^2[\vec{\vartheta}\cdot(\sigma\otimes I\otimes I\otimes I+I\otimes\sigma\otimes I\otimes I+I\otimes I\otimes\sigma\otimes I+I\otimes I\otimes I\otimes\sigma)]$

性质5.6.7. $(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)$
$=\frac{1}{24}[\vec{\vartheta}\cdot(\sigma\otimes I\otimes I\otimes I+I\otimes\sigma\otimes I\otimes I+I\otimes I\otimes\sigma\otimes I+I\otimes I\otimes I\otimes\sigma)]^4$
$-\frac{2}{3}\vec{\vartheta}^2[\vec{\vartheta}\cdot(\sigma\otimes I\otimes I\otimes I+I\otimes\sigma\otimes I\otimes I+I\otimes I\otimes\sigma\otimes I+I\otimes I\otimes I\otimes\sigma)]^2+\vec{\vartheta}^4$

5.7 中微子旋量的洛伦兹变换

5.7.1 数学准备

定义5.7.1. $cosh\theta:=\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}\sim cos\theta, sinh\theta:=\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}\sim isin\theta, tanh\theta=\frac{sinh\theta}{cosh\theta}\sim itan\theta$

性质5.7.1.
$cosh^2-sinh^2\theta=1$
$cosh(-\theta)=cosh\theta, sinh(-\theta)=-sinh\theta$

性质5.7.2.
$cosh(\alpha+\beta)=cosh\alpha cosh\beta+sinh\alpha sinh\beta$
$cosh(\alpha-\beta)=cosh\alpha cosh\beta-sinh\alpha sinh\beta$
$sinh(\alpha+\beta)=sinh\alpha cosh\beta+cosh\alpha sinh\beta$
$sinh(\alpha-\beta)=sinh\alpha cosh\beta-cosh\alpha sinh\beta$

性质5.7.3.
$cosh\alpha+cosh\beta=2cosh\frac{\alpha+\beta}{2}cosh\frac{\alpha-\beta}{2}$
$cosh\alpha-cosh\beta=2sinh\frac{\alpha+\beta}{2}sinh\frac{\alpha-\beta}{2}$
$sinh\alpha+sinh\beta=2sinh\frac{\alpha+\beta}{2}cosh\frac{\alpha-\beta}{2}$
$sinh\alpha-sinh\beta=2cosh\frac{\alpha+\beta}{2}sinh\frac{\alpha-\beta}{2}$

性质5.7.4.
$cosh(2\alpha)=2cosh^2\alpha-1, sinh(2\alpha)=2sinh\alpha cosh\alpha$
$cosh^2\frac{\alpha}{2}=\frac{cosh\alpha+1}{2}, sinh^2\frac{\alpha}{2}=\frac{cosh\alpha-1}{2}$

5.7.2 中微子旋量的洛伦兹变换

推论5.7.1. $\begin{cases}e^{\vec{\vartheta}\cdot\frac{\sigma}{2}}=cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}+\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\vec{\vartheta}\cdot\sigma,\vec{\vartheta}^2\neq0\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\frac{\sigma}{2}}=1+\vec{\vartheta}\cdot\frac{\sigma}{2},\vec{\vartheta}^2=0,\vec{\vartheta}=i\vec{\omega}+\varsigma\vec{\epsilon}\end{cases}$

定义5.7.2. $v:=|\vec{v}|, c:=cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}, s:=\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}, c^2-s^2\vec{\vartheta}^2\equiv1$

推论5.7.2. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(\frac{1}{2})}=cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}+\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\vec{\vartheta}\cdot\sigma\equiv c+s\vec{\vartheta}\cdot\sigma$

推论5.7.3. $\Lambda_{\varsigma\vec{v}}=e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\sigma(\frac{1}{2})}=\frac{1}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}(1+\gamma_v-\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot\sigma), c=\frac{(1+\gamma_v)}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}, s=-\frac{\varsigma\gamma_v}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}$

推论5.7.4. $\Lambda_{\varsigma\vec{v}}=e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\sigma(\frac{1}{2})}=\frac{1}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}[1+\gamma_v-2\varsigma\gamma_v v\hat{v}\cdot\sigma(\frac{1}{2})]$

5.7.3 电子旋量的洛伦兹变换

推论5.7.5. $D_{\varsigma\vec{v}} = e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot(\frac{i}{2}\vec{\gamma}\gamma_4)} = \frac{1}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}[1+\gamma_v - i\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot\vec{\gamma}\gamma_4]$

5.8 光子旋量洛伦兹变换的多项式表示

5.8.1 光子旋量的一般洛伦兹变换的多项式表示

定理5.8.1. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(1)} = 1 + \frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(1)] + \frac{cosh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}-1}{\vec{\vartheta}^2}[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(1)]^2$

证明: $e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(1)} = (c+s\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(c+s\vec{\vartheta}\cdot\sigma)$
$= c^2 + cs[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(1)] + s^2[\hat{\Omega}(1,2,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)]$
$= c^2 + cs[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(1)] + s^2\{\frac{1}{2}[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(1)]^2 - \vec{\vartheta}^2\}$
$= (c^2 - s^2\vec{\vartheta}^2) + cs[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(1)] + \frac{1}{2}s^2[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(1)]^2$
$= 1 + 2cs[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(1)] + 2s^2[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(1)]^2$
$= 1 + \frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(1)] + \frac{cosh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}-1}{\vec{\vartheta}^2}[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(1)]^2$ □

推论5.8.1.
$$\begin{cases} e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(1)} = 1 + \frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(1)] + \frac{cosh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}-1}{\vec{\vartheta}^2}[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(1)]^2 \\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(1)} = 1 + \frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(1)] + \frac{cosh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}-1}{\vec{\vartheta}^2}[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(1)]^2 \\ e^{\vec{\vartheta}\cdot R} = 1 + \frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}(\vec{\vartheta}\cdot R) + \frac{cosh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}-1}{\vec{\vartheta}^2}(\vec{\vartheta}\cdot R)^2 \\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\gamma} = 1 + \frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}(\vec{\vartheta}\cdot\gamma) + \frac{cosh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}-1}{\vec{\vartheta}^2}(\vec{\vartheta}\cdot\gamma)^2 \end{cases}$$

5.8.2 光子旋量的洛伦兹推动变换的多项式表示

推论5.8.2. $\epsilon = ln[\gamma_v(1+v)] \Leftrightarrow sinh\epsilon = \gamma_v v \Leftrightarrow cosh\epsilon = \gamma_v, sinh\epsilon = \gamma_v v$

推论5.8.3.
$$R_{\varsigma\vec{v}} = \begin{cases} e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\Omega(1)} = 1 - \varsigma\gamma_v v[\hat{v}\cdot\Omega(1)] + (\gamma_v - 1)[\hat{v}\cdot\Omega(1)]^2 \\ e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\sigma(1)} = 1 - \varsigma\gamma_v v[\hat{v}\cdot\sigma(1)] + (\gamma_v - 1)[\hat{v}\cdot\sigma(1)]^2 \\ e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot R} = 1 - \varsigma\gamma_v v(\hat{v}\cdot R) + (\gamma_v - 1)(\hat{v}\cdot R)^2 \\ e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\gamma} = 1 - \varsigma\gamma_v v(\hat{v}\cdot\gamma) + (\gamma_v - 1)(\hat{v}\cdot\gamma)^2 \end{cases}$$

5.9 引力微子旋量洛伦兹变换的多项式表示

5.9.1 引力微子旋量的一般洛伦兹变换的多项式表示

定理5.9.1. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{3}{2})} = cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}(1 - \frac{1}{2}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}) + 2\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}[1 - \frac{1}{6}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}][\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]$
$+ 2cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^2[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]^2 + \frac{4}{3}(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^3[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]^3$

证明: $e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{3}{2})} = (c+s\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(c+s\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(c+s\vec{\vartheta}\cdot\sigma)$
$= c^3 + c^2s[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(\frac{3}{2})] + cs^2[\hat{\Omega}(\frac{3}{2},2,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)] + s^3[\hat{\Omega}(\frac{3}{2},3,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)]$
$= c^3 + c^2s[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(\frac{3}{2})] + cs^2\{\frac{1}{2}[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(\frac{3}{2})]^2 - \frac{3}{2}\vec{\vartheta}^2\} + s^3\{\frac{1}{6}[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(\frac{3}{2})]^3 - \frac{7}{6}\vec{\vartheta}^2[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(\frac{3}{2})]\}$
$= c(c^2 - \frac{3}{2}s^2\vec{\vartheta}^2) + s(c^2 - \frac{7}{6}s^2\vec{\vartheta}^2)[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(s)] + \frac{1}{2}cs^2[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(\frac{3}{2})]^2 + \frac{1}{6}cs^3[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(\frac{3}{2})]^3$
$= c(1 - \frac{1}{2}s^2\vec{\vartheta}^2) + s(1 - \frac{1}{6}s^2\vec{\vartheta}^2)[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(\frac{3}{2})] + \frac{1}{2}cs^2[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(\frac{3}{2})]^2 + \frac{1}{6}cs^3[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(\frac{3}{2})]^3$
$= c(1 - \frac{1}{2}s^2\vec{\vartheta}^2) + 2s(1 - \frac{1}{6}s^2\vec{\vartheta}^2)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{3}{2})] + 2cs^2[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]^2 + \frac{4}{3}cs^3[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]^3$
$= cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}(1 - \frac{1}{2}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}) + 2\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}[1 - \frac{1}{6}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}][\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]$
$+ 2cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^2[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]^2 + \frac{4}{3}(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^3[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]^3$ □

推论5.9.1. $e^{\vec{\vartheta}\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_3+I\otimes\sigma(1)]}$
$= cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}(1-\frac{1}{2}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2})+2\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}[1-\frac{1}{6}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}]\{\vec{\vartheta}\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_3+I\otimes\sigma(1)]\}$
$+2cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^2\{\vec{\vartheta}\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_3+I\otimes\sigma(1)]\}^2+\frac{4}{3}(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^3\{\vec{\vartheta}\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_3+I\otimes\sigma(1)]\}^3$

推论5.9.2. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(\frac{3}{2})}=cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}(1-\frac{1}{2}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2})+2\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}[1-\frac{1}{6}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}][\vec{\vartheta}\cdot\sigma(\frac{3}{2})]$
$+2cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^2[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(\frac{3}{2})]^2+\frac{4}{3}(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^3[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(\frac{3}{2})]^3$

5.9.2 引力微子旋量的洛伦兹推动变换的多项式表示

推论5.9.3. $e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\Omega(\frac{3}{2})}=\frac{(\gamma_v+1)}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}(1-\frac{\gamma_v-1}{4})-\frac{2\varsigma\gamma_v v}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}(1-\frac{\gamma_v-1}{12})[\hat{v}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]$
$+\frac{\gamma_v^2-1}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}[\hat{v}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]^2-\frac{1}{3}\frac{2\varsigma\gamma_v v(\gamma_v-1)}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}[\hat{v}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]^3$

推论5.9.4.
$\Lambda_{\varsigma\vec{v}}(\frac{3}{2})=$
$$\begin{cases}e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\Omega(\frac{3}{2})}=\frac{1}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}[1+\gamma_v-2\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]+\frac{\gamma_v-1}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}[1+\gamma_v-\frac{2}{3}\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]\{[\hat{v}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]^2-\frac{1}{4}\}\\ e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\sigma(\frac{3}{2})}=\frac{1}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}[1+\gamma_v-2\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot\sigma(\frac{3}{2})]+\frac{\gamma_v-1}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}[1+\gamma_v-\frac{2}{3}\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot\sigma(\frac{3}{2})]\{[\hat{v}\cdot\sigma(\frac{3}{2})]^2-\frac{1}{4}\}\end{cases}$$

5.10 引力子旋量洛伦兹变换的多项式表示

5.10.1 引力子旋量的一般洛伦兹变换的多项式表示

定理5.10.1. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(2)}=1+(\frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})(1-\frac{2}{3}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(2)]+2(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^2(1-\frac{1}{3}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(2)]^2$
$+\frac{2}{3}(\frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^2[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(2)]^3+\frac{2}{3}(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^4[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(2)]^4$

证明: $e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(2)}=(c+s\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(c+s\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(c+s\vec{\vartheta}\cdot\sigma)\otimes(c+s\vec{\vartheta}\cdot\sigma)$
$=c^4+c^3s[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(2)]+c^2s^2[\hat{\Omega}(2,2,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)]+cs^3[\hat{\Omega}(2,3,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)]+s^4[\hat{\Omega}(2,4,\vec{\vartheta}\cdot\sigma)]$
$=c^4+c^3s[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(2)]+c^2s^2\{\frac{1}{2}[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(2)]^2-2\vec{\vartheta}^2\}$
$+cs^3\{\frac{1}{6}[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(2)]^3-\frac{5}{3}\vec{\vartheta}^2[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(2)]\}+s^4\{\frac{1}{24}[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(2)]^4-\frac{2}{3}\vec{\vartheta}^2[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(2)]^2+\vec{\vartheta}^4\}$
$=(c^2-s^2\vec{\vartheta}^2)^2+cs(c^2-\frac{5}{3}s^2\vec{\vartheta}^2)[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(2)]+\frac{1}{2}s^2(c^2-\frac{4}{3}s^2\vec{\vartheta}^2)[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(2)]^2+\frac{1}{6}cs^3[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(2)]^3+\frac{1}{24}s^4[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(2)]^4$
$=1+cs(1-\frac{2}{3}s^2\vec{\vartheta}^2)[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(2)]+\frac{1}{2}s^2(1-\frac{1}{3}s^2\vec{\vartheta}^2)[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(2)]^2+\frac{1}{6}cs^3[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(2)]^3+\frac{1}{24}s^4[\vec{\vartheta}\cdot\hat{\Omega}(2)]^4$
$=1+2cs(1-\frac{2}{3}s^2\vec{\vartheta}^2)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(2)]+2s^2(1-\frac{1}{3}s^2\vec{\vartheta}^2)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(2)]^2+\frac{4}{3}cs^3[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(2)]^3+\frac{2}{3}s^4[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(2)]^4$
$=1+(\frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})(1-\frac{2}{3}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(2)]+2(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^2(1-\frac{1}{3}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(2)]^2$
$+\frac{2}{3}(\frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^2[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(2)]^3+\frac{2}{3}(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^4[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(2)]^4$ □

推论5.10.1. $e^{\vec{\vartheta}\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_4+I\otimes\sigma(\frac{3}{2})]}=1+(\frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})(1-\frac{2}{3}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2})\{\vec{\vartheta}\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_4+I\otimes\sigma(\frac{3}{2})]\}$
$+2(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^2(1-\frac{1}{3}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2})\{\vec{\vartheta}\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_4+I\otimes\sigma(\frac{3}{2})]\}^2$
$+\frac{2}{3}(\frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^2\{\vec{\vartheta}\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_4+I\otimes\sigma(\frac{3}{2})]\}^3+\frac{2}{3}(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^4\{\vec{\vartheta}\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_4+I\otimes\sigma(\frac{3}{2})]\}^4$

推论5.10.2. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(2)}=1+(\frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})(1-\frac{2}{3}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(2)]+2(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^2(1-\frac{1}{3}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(2)]^2$
$+\frac{2}{3}(\frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^2[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(2)]^3+\frac{2}{3}(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^4[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(2)]^4$

推论5.10.3. $e^{\vec{\vartheta}\cdot G_m}=1+(\frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})(1-\frac{2}{3}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\vec{\vartheta}\cdot G_m]+2(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^2(1-\frac{1}{3}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\vec{\vartheta}\cdot G_m]^2$
$+\frac{2}{3}(\frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^2[\vec{\vartheta}\cdot G_m]^3+\frac{2}{3}(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^4[\vec{\vartheta}\cdot G_m]^4$

5.10.2 引力子旋量的洛伦兹推动变换的多项式表示

推论5.10.4. $e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\Omega(2)}=1-\varsigma\gamma_v(1-\frac{\gamma_v-1}{3})[\vec{v}\cdot\Omega(2)]+\frac{\gamma_v-1}{v^2}(1-\frac{\gamma_v-1}{6})[\vec{v}\cdot\Omega(2)]^2$
$-\frac{1}{3}\frac{\varsigma\gamma_v(\gamma_v-1)}{v^2}[\vec{v}\cdot\Omega(2)]^3+\frac{1}{6}\frac{(\gamma_v-1)^2}{v^4}[\vec{v}\cdot\Omega(2)]^4$

推论5.10.5.

$$\Lambda_{\varsigma\vec{v}}(2)=\begin{cases}e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\Omega(2)}=1-\varsigma\gamma_v v[\hat{v}\cdot\Omega(2)]+(\gamma_v-1)[\hat{v}\cdot\Omega(2)]^2\\ \qquad+\frac{1}{3}(\gamma_v-1)\{-\varsigma\gamma_v v[\hat{v}\cdot\Omega(2)]+\frac{1}{2}(\gamma_v-1)[\hat{v}\cdot\Omega(2)]^2\}\{[\hat{v}\cdot\Omega(2)]^2-1\}\\ e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\sigma(2)}=1-\varsigma\gamma_v v[\hat{v}\cdot\sigma(2)]+(\gamma_v-1)[\hat{v}\cdot\sigma(2)]^2\\ \qquad+\frac{1}{3}(\gamma_v-1)\{-\varsigma\gamma_v v[\hat{v}\cdot\sigma(2)]+\frac{1}{2}(\gamma_v-1)[\hat{v}\cdot\sigma(2)]^2\}\{[\hat{v}\cdot\sigma(2)]^2-1\}\end{cases}$$

推论5.10.6. $R_{\varsigma\vec{v}}(2)=e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot G_m}=1-\varsigma\gamma_v v[\hat{v}\cdot G_m]+(\gamma_v-1)[\hat{v}\cdot G_m]^2$
$+\frac{1}{3}(\gamma_v-1)\{-\varsigma\gamma_v v[\hat{v}\cdot G_m]+\frac{1}{2}(\gamma_v-1)[\hat{v}\cdot G_m]^2\}\{[\hat{v}\cdot G_m]^2-1\}$

5.11 s旋量洛伦兹变换的多项式统一表示

推论5.11.1. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s)}=\overbrace{e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes\cdots\otimes e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(\frac{1}{2})}}^{2s}$

推论5.11.2.

$$\begin{cases}e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}=\bar{\Gamma}(s)e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s)}\Gamma(s)\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-1)}=\bar{X}(s)[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})]e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s)}[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]X(s)\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot[\sigma\frac{1}{2}\otimes I_{2s}+I\otimes\sigma(s-\frac{1}{2})]}=[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})]e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s)}[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-1)}=I_{4^{s-1}}\otimes\{\bar{X}(1)[I\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})]\}e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s)}I_{4^{s-1}}\otimes\{[I\otimes\Gamma(\frac{1}{2})]X(1)\}\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\pi(s,k)}=I_{4^k}\otimes\{\bar{X}(s-k)[I\otimes\bar{\Gamma}(s-k-\frac{1}{2})]\}e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s)}I_{4^k}\otimes\{[I\otimes\Gamma(s-k-\frac{1}{2})]X(s-k)\}\end{cases}$$

推论5.11.3.

$$\begin{cases}[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s)]^{2s+1}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s)]^{2s+1-2k},[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)]^{2s+1}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)]^{2s+1-2k}\\ [\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-1)]^{2s+1}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-1)]^{2s+1-2k},[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-1)]^{2s+1}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-1)]^{2s+1-2k}\\ [\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-2)]^{2s+1}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-2)]^{2s+1-2k},[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-2)]^{2s+1}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-2)]^{2s+1-2k}\\ \cdots\\ [\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{1}{2}|0)]^{2s+1}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{1}{2}|0)]^{2s+1-2k},[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(\frac{1}{2}|0)]^{2s+1}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(\frac{1}{2}|0)]^{2s+1-2k}\end{cases}$$

推论5.11.4.

$$\begin{cases}e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s)}=\sum_{k=0}^{2s}A_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s)]^k,e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}=\sum_{k=0}^{2s}A_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)]^k\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-1)}=\sum_{k=0}^{2s}A_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-1)]^k,e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-1)}=\sum_{k=0}^{2s}A_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-1)]^k\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-2)}=\sum_{k=0}^{2s}A_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-2)]^k,e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-2)}=\sum_{k=0}^{2s}A_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-2)]^k\\ \cdots\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{1}{2}|0)}=\sum_{k=0}^{2s}A_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{1}{2}|0)]^k,e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(\frac{1}{2}|0)}=\sum_{k=0}^{2s}A_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(\frac{1}{2}|0)]^k\end{cases}$$

即粗略地讲有以下的说法，本质上是以上推论的意思，且本节结论是被严格证明的。

推论5.11.5.

$$\begin{cases} e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(n)}, e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(n-1)}, \cdots, e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(1)}, e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(0)} \\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(n)}, e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(n-1)}, \cdots, e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(1)}, e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(0)} \end{cases} \text{的展开系数} = e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(n)}\text{的展开系数}$$

$$\begin{cases} e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(n+\frac{1}{2})}, e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(n-\frac{1}{2})}, \cdots, e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{3}{2})}, e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(\frac{1}{2})} \\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(n+\frac{1}{2})}, e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(n-\frac{1}{2})}, \cdots, e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(\frac{3}{2})}, e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(\frac{1}{2})} \end{cases} \text{的展开系数} = e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(n+\frac{1}{2})}\text{的展开系数}$$

推论5.11.6. $e^{i2\pi\hat{\omega}\cdot\sigma(s)} = (-1)^{2s}$

推论5.11.7. $\vec{\vartheta}^2 = 0$

$$\Rightarrow [\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s)]^{2s+1} = 0, e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s)} = \sum_{n=0}^{2s}\frac{1}{n!}[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s)]^n \Rightarrow [\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)]^{2s+1} = 0, e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)} = \sum_{n=0}^{2s}\frac{1}{n!}[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)]^n$$

猜想5.11.1. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}|_{\vec{\vartheta}^2=0} =< e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)} >_{\vec{\vartheta}^2\to 0}???$

5.12 s旋量的洛伦兹推动变换的多项式表示？？？

推论5.12.1. $R_{\varsigma\vec{v}}(n) = e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\sigma(n)} = \sum_{k=0}^{2n} f_k(v)[\hat{v}\cdot\sigma(n)]^k$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{\varsigma\vec{v}}(l) = e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\sigma(l)} = \sum_{k=0}^{2n} f_k(v)[\hat{v}\cdot\sigma(l)]^k, f_0(v) = 1, 0 \le l \le n \\ R_{\varsigma\vec{v}}(l+\frac{1}{2}) = e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\sigma(l)} = \sum_{k=0}^{2n} f_k(\frac{v}{2})[2\hat{v}\cdot\sigma(l+\frac{1}{2})]^k = \sum_{k=0}^{2n} 2^k f_k(\frac{v}{2})[\hat{v}\cdot\sigma(l+\frac{1}{2})]^k, 0 \le l+\frac{1}{2} \le n \end{cases}$$

推论5.12.2. $R_{\varsigma\vec{v}}(n+\frac{1}{2}) = e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\sigma(n+\frac{1}{2})} = \sum_{k=0}^{2n+1} g_k(v)[\hat{v}\cdot\sigma(n+\frac{1}{2})]^k$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{\varsigma\vec{v}}(l) = e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\sigma(l)} = \sum_{k=0}^{2n+1} g_k(2v)[\frac{1}{2}\hat{v}\cdot\sigma(l)]^k = \sum_{k=0}^{2n+1} 2^{-k} g_k(2v)[\hat{v}\cdot\sigma(l)]^k, f_0(v) = 1, 0 \le l \le n+\frac{1}{2} \\ R_{\varsigma\vec{v}}(l+\frac{1}{2}) = e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\sigma(l+\frac{1}{2})} = \sum_{k=0}^{2n+1} g_k(v)[\hat{v}\cdot\sigma(l+\frac{1}{2})]^k, 0 \le l+\frac{1}{2} \le n+\frac{1}{2} \end{cases}$$

5.13 矢量洛伦兹变换的多项式表示

推论5.13.1. $\Lambda(1,\epsilon) = (c + s\epsilon\cdot\sigma)\otimes(c - s\epsilon\cdot\sigma)$

$= c^2 + cs[\epsilon\cdot(\sigma\otimes I - I\otimes\sigma)] - s^2[\epsilon\cdot()_2]$

$= c^2 + cs[\epsilon\cdot(\sigma\otimes I - I\otimes\sigma)] - s^2\{\frac{1}{2}[\epsilon\cdot\hat{\Omega}(1)]^2 - \epsilon\cdot\epsilon\}$

$= (c^2 + s^2\epsilon\cdot\epsilon) + cs[\epsilon\cdot(\sigma\otimes I - I\otimes\sigma)] - \frac{1}{2}s^2[\epsilon\cdot\hat{\Omega}(1)]^2$

$= (c^2 + s^2\epsilon\cdot\epsilon) + 2cs[\epsilon\cdot\frac{1}{2}(\sigma\otimes I - I\otimes\sigma)] - 2s^2[\epsilon\cdot\Omega(1)]^2$

$= cosh\sqrt{\epsilon\cdot\epsilon} + \frac{sinh\sqrt{\epsilon\cdot\epsilon}}{\sqrt{\epsilon\cdot\epsilon}}[\epsilon\cdot\frac{1}{2}(\sigma\otimes I - I\otimes\sigma)] - \frac{cosh\sqrt{\epsilon\cdot\epsilon}-1}{\epsilon\cdot\epsilon}[\epsilon\cdot\Omega(1)]^2$

推论5.13.2. $L(\epsilon) = e^{\epsilon\cdot L} = cosh\sqrt{\epsilon\cdot\epsilon} + \frac{sinh\sqrt{\epsilon\cdot\epsilon}}{\sqrt{\epsilon\cdot\epsilon}}\epsilon\cdot L - \frac{cosh\sqrt{\epsilon\cdot\epsilon}-1}{\epsilon\cdot\epsilon}(\epsilon\cdot R)^2 = 1 + \frac{sinh\sqrt{\epsilon\cdot\epsilon}}{\sqrt{\epsilon\cdot\epsilon}}(\epsilon\cdot L) + \frac{cosh\sqrt{\epsilon\cdot\epsilon}-1}{\epsilon\cdot\epsilon}(\epsilon\cdot L)^2$

推论5.13.3. $\Lambda(1,i\omega) = (c + is\omega\cdot\sigma)\otimes(c + is\omega\cdot\sigma)$

$= c^2 + cs[i\omega\cdot(\sigma\otimes I + I\otimes\sigma)] + s^2[i\omega\cdot()_2]$

$= c^2 + cs[i\omega\cdot(\sigma\otimes I + I\otimes\sigma)] + s^2\{\frac{1}{2}[i\omega\cdot\hat{\Omega}(1)]^2 - i\omega\cdot i\omega\}$

$= c^2 + cs[i\omega\cdot(\sigma\otimes I + I\otimes\sigma)] + s^2\{\frac{1}{2}[i\omega\cdot\hat{\Omega}(1)]^2 - i\omega\cdot i\omega\}$

$= 1 + \frac{sinh\sqrt{i\omega\cdot i\omega}}{\sqrt{i\omega\cdot i\omega}}[i\omega\cdot\frac{1}{2}(\sigma\otimes I + I\otimes\sigma)] + \frac{cosh\sqrt{i\omega\cdot i\omega}-1}{i\omega\cdot i\omega}[i\omega\cdot\Omega(1)]^2$

$= 1 + i\frac{sinh\sqrt{\omega\cdot\omega}}{\sqrt{\omega\cdot\omega}}[\omega\cdot\frac{1}{2}(\sigma\otimes I + I\otimes\sigma)] + \frac{cos\sqrt{\omega\cdot\omega}-1}{\omega\cdot\omega}[\omega\cdot\Omega(1)]^2$

推论5.13.4. $R(i\omega) = L(i\omega) = e^{i\omega\cdot R} = 1 + i\frac{sin\sqrt{\omega\cdot\omega}}{\sqrt{\omega\cdot\omega}}(\omega\cdot R) + \frac{cos\sqrt{\omega\cdot\omega}-1}{\omega\cdot\omega}(\omega\cdot R)^2$

推论5.13.5. $R_3(i\omega) = L_3(i\omega) = e^{i\omega\cdot\gamma} = 1 + i\frac{sin\sqrt{\omega\cdot\omega}}{\sqrt{\omega\cdot\omega}}(\omega\cdot\gamma) + \frac{cos\sqrt{\omega\cdot\omega}-1}{\omega\cdot\omega}(\omega\cdot\gamma)^2$

推论5.13.6. $e^{i\omega\cdot R + \varsigma\epsilon\cdot L} = \frac{1}{2}(\cosh a + \cos b) - \frac{1}{2}\frac{\cosh a - \cos b}{a^2+b^2}(\vec{\vartheta}\cdot\sigma_+)(\vec{\vartheta}^*\cdot\sigma_-) - \frac{1}{2}\frac{\sinh a - i\sin b}{a-ib}(\vec{\vartheta}^*\cdot\sigma_-) + \frac{1}{2}\frac{\sinh a + i\sin b}{a+ib}(\vec{\vartheta}\cdot\sigma_+)$

证明: $e^{i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L}, \sqrt{\vec{\vartheta}^2}:=a+ib$
$=e^{i\omega\cdot\frac{1}{2}(\sigma_++\sigma_-)+\varsigma\epsilon\cdot\frac{1}{2}(\sigma_+-\sigma_-)}=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_++(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_-}$
$=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_+}e^{(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\frac{1}{2}\sigma_-}=e^{\vec{\vartheta}\cdot\frac{1}{2}\sigma_+}e^{-\vec{\vartheta}^*\cdot\frac{1}{2}\sigma_-}$
$=(\cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}+\frac{\sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\vec{\vartheta}\cdot\sigma_+)(\cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^{*2}}-\frac{\sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^{*2}}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^{*2}}}\vec{\vartheta}^*\cdot\sigma_-)$
$=\cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}\cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^{*2}}-(\frac{\sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})(\frac{\sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^{*2}}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^{*2}}})(\vec{\vartheta}\cdot\sigma_+)(\vec{\vartheta}^*\cdot\sigma_-)$
$-\cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}\frac{\sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^{*2}}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^{*2}}}(\vec{\vartheta}^*\cdot\sigma_-)+\cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^{*2}}\frac{\sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}(\vec{\vartheta}\cdot\sigma_+)$
$=\frac{1}{2}(\cosh a+\cos b)-\frac{1}{2}\frac{\cosh a-\cos b}{a^2+b^2}(\vec{\vartheta}\cdot\sigma_+)(\vec{\vartheta}^*\cdot\sigma_-)-\frac{1}{2}\frac{\sinh a-i\sin b}{a-ib}(\vec{\vartheta}^*\cdot\sigma_-)+\frac{1}{2}\frac{\sinh a+i\sin b}{a+ib}(\vec{\vartheta}\cdot\sigma_+)$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}(\cosh a+1)-\frac{1}{2}\frac{\cosh a-1}{a^2}(\epsilon\cdot\sigma_+)(\epsilon\cdot\sigma_-)-\frac{1}{2}\frac{\sinh a}{a}(\epsilon\cdot\sigma_-)+\frac{1}{2}\frac{\sinh a}{a}(\epsilon\cdot\sigma_+);a=\sqrt{\epsilon\cdot\epsilon},b=0\\ \frac{1}{2}(1+\cos b)-\frac{1}{2}\frac{1-\cos b}{b^2}(\omega\cdot\sigma_+)(\omega\cdot\sigma_-)+\frac{1}{2}\frac{\sin b}{b}(i\omega\cdot\sigma_-)+\frac{1}{2}\frac{\sin b}{b}(i\omega\cdot\sigma_+);a=0,b=\sqrt{\omega\cdot\omega}\\ ???;a\neq0,b\neq0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1+\frac{\sinh a}{a}(\epsilon\cdot L)+\frac{\cosh a-1}{a^2}(\epsilon\cdot L)^2;a=\sqrt{\epsilon\cdot\epsilon},b=0\\ 1+i\frac{\sin b}{b}(\omega\cdot R)+\frac{\cos b-1}{b^2}(\omega\cdot R)^2;a=0,b=\sqrt{\omega\cdot\omega}\\ ???;a\neq0,b\neq0\end{cases}$$ □

5.14 矢量洛伦兹变换多项式表示的一般展开

定理5.14.1. $e^{i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L}=\frac{1}{2}(\cosh a+\cos b)-\frac{1}{2}\frac{\cosh a-\cos b}{a^2+b^2}(\vec{\vartheta}\cdot\sigma_+)(\vec{\vartheta}^*\cdot\sigma_-)-\frac{1}{2}\frac{\sinh a-i\sin b}{a-ib}(\vec{\vartheta}^*\cdot\sigma_-)+\frac{1}{2}\frac{\sinh a+i\sin b}{a+ib}(\vec{\vartheta}\cdot\sigma_+)$
$=\frac{1}{2}(\cosh a+\cos b)+\frac{1}{2}\frac{\cosh a-\cos b}{a^2+b^2}(\omega^2-\epsilon^2)+\frac{(a\sinh a+b\sin b)}{a^2+b^2}(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)+\frac{(b\sinh a-a\sin b)}{a^2+b^2}(\omega\cdot L-i\varsigma\epsilon\cdot R)$
$-\frac{\cosh a-\cos b}{a^2+b^2}[(\omega\cdot R)^2-(\epsilon\cdot L)^2-i\varsigma(\omega\cdot R)(\epsilon\cdot L)+i\varsigma(\omega\cdot L)(\epsilon\cdot R)]$

证明: $e^{i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L}=\frac{1}{2}(\cosh a+\cos b)-\frac{1}{2}\frac{\cosh a-\cos b}{a^2+b^2}(\vec{\vartheta}\cdot\sigma_+)(\vec{\vartheta}^*\cdot\sigma_-)-\frac{1}{2}\frac{\sinh a-i\sin b}{a-ib}(\vec{\vartheta}^*\cdot\sigma_-)+\frac{1}{2}\frac{\sinh a+i\sin b}{a+ib}(\vec{\vartheta}\cdot\sigma_+)$
$=\frac{1}{2}(\cosh a+\cos b)-\frac{1}{2}\frac{\cosh a-\cos b}{a^2+b^2}[(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma_+][(-i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma_-]$
$-\frac{1}{2}\frac{\sinh a-i\sin b}{a-ib}[(-i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma_-]+\frac{1}{2}\frac{\sinh a+i\sin b}{a+ib}[(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma_+]$
$=\frac{1}{2}(\cosh a+\cos b)-\frac{1}{2}\frac{\cosh a-\cos b}{a^2+b^2}[(\omega\cdot\sigma_+)(\omega\cdot\sigma_-)+(\epsilon\cdot\sigma_+)(\epsilon\cdot\sigma_-)+i\varsigma(\omega\cdot\sigma_+)(\epsilon\cdot\sigma_-)-i\varsigma(\epsilon\cdot\sigma_+)(\omega\cdot\sigma_-)]$
$+\frac{1}{2}\frac{\sinh a-i\sin b}{a-ib}[(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma_-]+\frac{1}{2}\frac{\sinh a+i\sin b}{a+ib}[(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma_+]$
$=\frac{1}{2}(\cosh a+\cos b)-\frac{1}{2}\frac{\cosh a-\cos b}{a^2+b^2}[(\omega\cdot R)^2-(\omega\cdot L)^2+(\epsilon\cdot R)^2-(\epsilon\cdot L)^2+i\varsigma(\omega\cdot\sigma_+)(\epsilon\cdot\sigma_-)-i\varsigma(\epsilon\cdot\sigma_+)(\omega\cdot\sigma_-)]$
$+\frac{1}{2}\frac{(a+ib)(\sinh a-i\sin b)}{a^2+b^2}[(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma_-]+\frac{1}{2}\frac{(a-ib)(\sinh a+i\sin b)}{a^2+b^2}[(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma_+]$
$=\frac{1}{2}(\cosh a+\cos b)-\frac{1}{2}\frac{\cosh a-\cos b}{a^2+b^2}[(\omega\cdot R)^2-(\omega\cdot L)^2+(\epsilon\cdot R)^2-(\epsilon\cdot L)^2+i\varsigma(\omega\cdot\sigma_+)(\epsilon\cdot\sigma_-)-i\varsigma(\epsilon\cdot\sigma_+)(\omega\cdot\sigma_-)]$
$+\frac{1}{2}\frac{(a\sinh a+b\sin b)+i(b\sinh a-a\sin b)}{a^2+b^2}[(i\omega-\varsigma\epsilon)\cdot\sigma_-]+\frac{1}{2}\frac{(a\sinh a+b\sin b)-i(b\sinh a-a\sin b)}{a^2+b^2}[(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma_+]$
$=\frac{1}{2}(\cosh a+\cos b)-\frac{1}{2}\frac{\cosh a-\cos b}{a^2+b^2}[(\omega\cdot R)^2-(\omega\cdot L)^2+(\epsilon\cdot R)^2-(\epsilon\cdot L)^2+i\varsigma(\omega\cdot\sigma_+)(\epsilon\cdot\sigma_-)-i\varsigma(\epsilon\cdot\sigma_+)(\omega\cdot\sigma_-)]$
$+\frac{1}{2}\frac{(a\sinh a+b\sin b)+i(b\sinh a-a\sin b)}{a^2+b^2}(i\omega\cdot\sigma_-)+\frac{1}{2}\frac{(a\sinh a+b\sin b)-i(b\sinh a-a\sin b)}{a^2+b^2}(i\omega\cdot\sigma_+)$
$-\frac{1}{2}\frac{(a\sinh a+b\sin b)+i(b\sinh a-a\sin b)}{a^2+b^2}(\varsigma\epsilon\cdot\sigma_-)+\frac{1}{2}\frac{(a\sinh a+b\sin b)-i(b\sinh a-a\sin b)}{a^2+b^2}(\varsigma\epsilon\cdot\sigma_+)$
$=\frac{1}{2}(\cosh a+\cos b)-\frac{1}{2}\frac{\cosh a-\cos b}{a^2+b^2}[(\omega\cdot R)^2-(\omega\cdot L)^2+(\epsilon\cdot R)^2-(\epsilon\cdot L)^2+i\varsigma(\omega\cdot\sigma_+)(\epsilon\cdot\sigma_-)-i\varsigma(\epsilon\cdot\sigma_+)(\omega\cdot\sigma_-)]$
$+\frac{(a\sinh a+b\sin b)}{a^2+b^2}(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)+\frac{(b\sinh a-a\sin b)}{a^2+b^2}(\omega\cdot L-i\varsigma\epsilon\cdot R)$
$=\frac{1}{2}(\cosh a+\cos b)-\frac{1}{2}\frac{\cosh a-\cos b}{a^2+b^2}[2(\omega\cdot R)^2-\omega^2+\epsilon^2-2(\epsilon\cdot L)^2-2i\varsigma(\omega\cdot R)(\epsilon\cdot L)+2i\varsigma(\omega\cdot L)(\epsilon\cdot R)]$
$+\frac{(a\sinh a+b\sin b)}{a^2+b^2}(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)+\frac{(b\sinh a-a\sin b)}{a^2+b^2}(\omega\cdot L-i\varsigma\epsilon\cdot R)$
$=\frac{1}{2}(\cosh a+\cos b)+\frac{1}{2}\frac{\cosh a-\cos b}{a^2+b^2}(\omega^2-\epsilon^2)-\frac{\cosh a-\cos b}{a^2+b^2}[(\omega\cdot R)^2-(\epsilon\cdot L)^2-i\varsigma(\omega\cdot R)(\epsilon\cdot L)+i\varsigma(\omega\cdot L)(\epsilon\cdot R)]$
$+\frac{(a\sinh a+b\sin b)}{a^2+b^2}(i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L)+\frac{(b\sinh a-a\sin b)}{a^2+b^2}(\omega\cdot L-i\varsigma\epsilon\cdot R)$ □

5.15 任意运动电荷的电磁场 [24]

5.15.1 空间坐标和推迟位

推论5.15.1. $\vec{r'}=\vec{r}+\gamma_v\vec{v}r+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{r})\vec{v}/v^2\Rightarrow r'=\gamma_v(r+\vec{v}\cdot\vec{r})$

推论5.15.2. $\vec{r'}=\vec{r}+\gamma_v\vec{v}r+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{r})\vec{v}/v^2\Rightarrow\hat{r}'=[\hat{r}+\gamma_v\vec{v}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\hat{r})\vec{v}/v^2]/[\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\hat{r})]$

推论5.15.3. $\vec{r'} = \vec{r} + \gamma_v \vec{v} r + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{r})\vec{v}/v^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{r'} = \vec{r} + \gamma_v \vec{v} r + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{r})\vec{v}/v^2 \\ r' = \gamma_v(r + \vec{v}\cdot\vec{r}), \vec{r'}^2 - r'^2 = \vec{r}^2 - r^2 = 0 \end{cases}$

推论5.15.4. $\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \gamma_v \vec{v} r_0 + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{r}_0)\vec{v}/v^2 \\ r = \gamma_v(r_0 + \vec{v}\cdot\vec{r}_0) \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{A} = \vec{A}_0 + \gamma_v \vec{v}\phi_0 + (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{A}_0)\vec{v}/v^2 = \frac{e\gamma_v \vec{v}}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{e\vec{v}}{4\pi\varepsilon_0(r - \vec{v}\cdot\vec{r})} \\ \phi = \gamma_v(\phi_0 + \vec{v}\cdot\vec{A}_0) = \frac{e\gamma_v}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0(r - \vec{v}\cdot\vec{r})} \end{cases}$

5.15.2 偏导数分析

推论5.15.5. $t = t' + R(t'), R(t') = \sqrt{[x'(t') - x]^2 + [y'(t') - y]^2 + [z'(t') - z]^2}$

推论5.15.6. ∂_x含义：t, y, z固定不变,x变化，且x与t'满足关系式$t = t' + R(t')$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_x = \frac{\partial t'}{\partial_x}\partial_{t'} \\ 0 = \frac{\partial t'}{\partial_x} + \frac{\partial R(t')}{\partial_{t'}}\frac{\partial t'}{\partial_x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R(t')}{\partial_{t'}} = -\frac{\vec{v}(t')\cdot\vec{R}(t') - \frac{\partial x}{\partial_{t'}}R_x(t')}{R(t')} = -1 \\ \frac{\partial t'}{\partial_x} = -\frac{\hat{R}_x(t')}{1 - \vec{v}(t')\cdot\hat{R}(t')}, \partial_x = -\frac{\hat{R}_x(t')}{1 - \vec{v}(t')\cdot\hat{R}(t')}\partial_{t'}|_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}(t')\cdot\partial_{t'}\vec{R}(t') = -\frac{1 - \vec{v}(t')\cdot\hat{R}(t')}{\hat{R}_x(t')}v_x - v^2(t') \\ \vec{v}(t')\cdot\partial_x\vec{R}(t') = v_x + \frac{v^2(t')\hat{R}_x(t')}{1 - \vec{v}(t')\cdot\hat{R}(t')} \end{cases}$$

推论5.15.7. ∂_y含义：x, t, z固定不变,y变化，且y与t'满足关系式$t = t' + R(t')$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_y = \frac{\partial t'}{\partial_y}\partial_{t'} \\ 0 = \frac{\partial t'}{\partial_y} + \frac{\partial R(t')}{\partial_{t'}}\frac{\partial t'}{\partial_y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R(t')}{\partial_{t'}} = -\frac{\vec{v}(t')\cdot\vec{R}(t') - \frac{\partial y}{\partial_{t'}}R_y(t')}{R(t')} = -1 \\ \frac{\partial t'}{\partial_y} = -\frac{\hat{R}_y(t')}{1 - \vec{v}(t')\cdot\hat{R}(t')}, \partial_y = -\frac{\hat{R}_y(t')}{1 - \vec{v}(t')\cdot\hat{R}(t')}\partial_{t'}|_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}(t')\cdot\partial_{t'}\vec{R}(t') = -\frac{1 - \vec{v}(t')\cdot\hat{R}(t')}{\hat{R}_y(t')}v_y - v^2(t') \\ \vec{v}(t')\cdot\partial_y\vec{R}(t') = v_y + \frac{v^2(t')\hat{R}_y(t')}{1 - \vec{v}(t')\cdot\hat{R}(t')} \end{cases}$$

推论5.15.8. ∂_z含义：x, y, t固定不变,z变化，且z与t'满足关系式$t = t' + R(t')$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_z = \frac{\partial t'}{\partial_z}\partial_{t'} \\ 0 = \frac{\partial t'}{\partial_z} + \frac{\partial R(t')}{\partial_{t'}}\frac{\partial t'}{\partial_z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R(t')}{\partial_{t'}} = -\frac{\vec{v}(t')\cdot\vec{R}(t') - \frac{\partial z}{\partial_{t'}}R_z(t')}{R(t')} = -1 \\ \frac{\partial t'}{\partial_z} = -\frac{\hat{R}_z(t')}{1 - \vec{v}(t')\cdot\hat{R}(t')}, \partial_z = -\frac{\hat{R}_z(t')}{1 - \vec{v}(t')\cdot\hat{R}(t')}\partial_{t'}|_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}(t')\cdot\partial_{t'}\vec{R}(t') = -\frac{1 - \vec{v}(t')\cdot\hat{R}(t')}{\hat{R}_z(t')}v_z - v^2(t') \\ \vec{v}(t')\cdot\partial_z\vec{R}(t') = v_z + \frac{v^2(t')\hat{R}_z(t')}{1 - \vec{v}(t')\cdot\hat{R}(t')} \end{cases}$$

推论5.15.9. ∂_t含义：x, y, z固定不变,t变化，且t与t'满足关系式$t = t' + R(t')$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t = \frac{\partial t'}{\partial_t}\partial_{t'} \\ 1 = \frac{\partial t'}{\partial_t} + \frac{\partial R(t')}{\partial_{t'}}\frac{\partial t'}{\partial_t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial t'}{\partial_t} = \frac{1}{1 - \vec{v}(t')\cdot\hat{R}(t')}, \partial_t = \frac{1}{1 - \vec{v}(t')\cdot\hat{R}(t')}\partial_{t'}|_t \\ \frac{\partial R(t')}{\partial_{t'}} = -\frac{\vec{v}(t')\cdot\vec{R}(t')}{R(t')} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}(t')\cdot\partial_{t'}\vec{R}(t') = -v^2(t') \\ \vec{v}(t')\cdot\partial_t\vec{R}(t') = -\frac{v^2(t')}{1 - \vec{v}(t')\cdot\hat{R}(t')} \end{cases}$$

推论5.15.10. $\begin{cases} \vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{e\vec{v}(t')}{4\pi\varepsilon_0[R(t') - \vec{v}\cdot\vec{R}(t')]} \\ \phi(t, \vec{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0[R(t') - \vec{v}(t')\cdot\vec{R}(t')]} \end{cases}$

推论5.15.11. $\begin{cases} \vec{E}(t, \vec{r}) = -\nabla\phi(t, \vec{r}) - \partial_t\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{e[\vec{R}(t') - R(t')\vec{v}(t')]}{4\pi\varepsilon_0\gamma_v^2[R(t') - \vec{v}(t')\cdot\vec{R}(t')]^3} + \frac{e\vec{R}(t')\times[\vec{R}(t') - R(t')\vec{v}(t')]\times\dot{\vec{v}}(t')}{4\pi\varepsilon_0[R(t') - \vec{v}(t')\cdot\vec{R}(t')]^3} \\ \vec{B}(t, \vec{r}) = \nabla\times\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{\vec{R}(t')\times\vec{E}(t, \vec{r})}{R(t')} \end{cases}$

推论5.15.12. $\begin{cases} \vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\gamma_v^2[R(t') - \vec{v}(t')\cdot\vec{R}(t')]^3}\{\frac{1}{\gamma_v^2}[\vec{R}(t') - R(t')\vec{v}(t')] + \vec{R}(t')\times[\vec{R}(t') - R(t')\vec{v}(t')]\times\dot{\vec{v}}(t')\} \\ \vec{B}(t, \vec{r}) = \frac{\vec{R}(t')\times\vec{E}(t, \vec{r})}{R(t')}, t = t' + R(t'), R(t') = \sqrt{[x'(t') - x]^2 + [y'(t') - y]^2 + [z'(t') - z]^2} \end{cases}$

5.15.3 光子的能量动量与推迟矢量比较

推论5.15.13. $\begin{cases}\vec{p'}=\vec{p}+\gamma_v\vec{v}p+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{p})\vec{v}/v^2\\ p'=\gamma_v(p+\vec{v}\cdot\vec{p}),\vec{p'}^2-p'^2=\vec{p}_0^2-p_0^2=0\end{cases}$ $\begin{cases}\vec{r'}=\vec{r}+\gamma_v\vec{v}r+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{r})\vec{v}/v^2\\ r'=\gamma_v(r+\vec{v}\cdot\vec{r}),\vec{r'}^2-r'^2=\vec{r}^2-r^2=0\end{cases}$

5.16 自旋矢量的变换规律 [24]

推论5.16.1. $\begin{cases}\vec{S}(\vec{v})=\vec{s}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{s})\vec{v}/v^2\\ S_0(\vec{v})=\gamma_v(\vec{v}\cdot\vec{s})\end{cases}\Rightarrow\vec{v}\cdot\vec{S}(\vec{v})=\gamma_v\vec{v}\cdot\vec{s}=S_0(\vec{v})$

推论5.16.2. $\begin{cases}\vec{S}(\vec{v})=\vec{s}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{s})\vec{v}/v^2\\ S_0(\vec{v})=\gamma_v(\vec{v}\cdot\vec{s})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{S}(\vec{v})=\vec{s}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{s})\vec{v}/v^2\\ \vec{v}\cdot\vec{S}(\vec{v})=\gamma_v(\vec{v}\cdot\vec{s})\end{cases}$

推论5.16.3. $\begin{cases}\vec{u}'=[\vec{u}+\gamma_v\vec{v}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{v}/v^2]/[\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\vec{u})]\\ \vec{S}(\vec{u}')=\vec{S}(\vec{u})+\gamma_v\vec{v}[\vec{u}\cdot\vec{S}(\vec{u})]+(\gamma_v-1)[\vec{v}\cdot\vec{S}(\vec{u})]\vec{v}/v^2\\ \vec{u'}\cdot\vec{S}(\vec{u'})=\gamma_v[\vec{u}\cdot\vec{S}(\vec{u})+\vec{v}\cdot\vec{S}(\vec{u})]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\vec{S}(\vec{u}')\\ i\vec{u}'\cdot\vec{S}(\vec{u'})\end{bmatrix}=L_{\vec{v}}\begin{bmatrix}\vec{S}(\vec{u})\\ i\vec{u}\cdot\vec{S}(\vec{u})\end{bmatrix}$

自旋的变换规律与力的变换规律类似。

5.17 无质量粒子的角动量变换规律

推论5.17.1. $\vec{r'}=\vec{r}+\gamma_v\vec{v}r+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{r})\vec{v}/v^2\Rightarrow r'=\gamma_v(r+\vec{v}\cdot\vec{r})$

推论5.17.2. $\vec{p'}=\vec{p}+\gamma_v\vec{v}p+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{p})\vec{v}/v^2\Rightarrow p'=\gamma_v(p+\vec{v}\cdot\vec{p})$

推论5.17.3. $M_{ab}=r_ap_b-r_bp_a=\begin{bmatrix}0&(\vec{r}\times\vec{p})_z&-(\vec{r}\times\vec{p})_y&-i(rp_x-xp)\\ -(\vec{r}\times\vec{p})_z&0&(\vec{r}\times\vec{p})_x&-i(rp_y-yp)\\ (\vec{r}\times\vec{p})_y&-(\vec{r}\times\vec{p})_x&0&-i(rp_z-zp)\\ i(xp-rp_x)&i(yp-rp_y)&i(zp-rp_z)&0\end{bmatrix}$

推论5.17.4. $\vec{J}=\vec{r}\times\vec{p},\vec{W}=r\vec{p}-p\vec{r}$

5.18 质点系的角动量变换规律

推论5.18.1. $M_{ab}=r_ap_b-r_bp_a=\begin{bmatrix}0&(\vec{r}\times\vec{p})_z&-(\vec{r}\times\vec{p})_y&-i(rp_x-xp)\\ -(\vec{r}\times\vec{p})_z&0&(\vec{r}\times\vec{p})_x&-i(rp_y-yp)\\ (\vec{r}\times\vec{p})_y&-(\vec{r}\times\vec{p})_x&0&-i(rp_z-zp)\\ i(xp-rp_x)&i(yp-rp_y)&i(zp-rp_z)&0\end{bmatrix}$

推论5.18.2. $\vec{J}=\sum_i(\vec{r}_i\times\vec{p}_i),\vec{W}=\sum_i(r_i\vec{p}_i-p_i\vec{r}_i)$

推论5.18.3. $\vec{u}'=[\vec{u}+\gamma_v\vec{v}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{v}/v^2]/[\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\vec{u})]$

中微子的自旋

推论5.18.4. $s(\nu)=\int\nu^+(\vec{0})\sigma_y\sigma\nu(\vec{0})dx^4$

光子的自旋

推论5.18.5. $s(\gamma)=\Psi(\vec{0})^T\gamma\Psi(\vec{0})$

电子的自旋

推论5.18.6. $s(e)=\bar{\psi}(\vec{0})\gamma_e\psi(\vec{0})$

5.19 魏格纳小群 [40]

5.19.1 有质量粒子的小群

推论5.19.1. $L_{\vec{v}}\Lambda[SO(3)]\begin{bmatrix}\vec{0}\\ im\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma m\vec{v}\\ i\gamma m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{p}\\ iE\end{bmatrix}$

推论5.19.2. $L_p \equiv L_{\vec{v}}\Lambda[SO(3)]$

推论5.19.3. $L_p p_0 = p, L_{\Lambda p} p_0 = \Lambda p = \Lambda L_p p_0$

推论5.19.4. $p_0 = L_{\Lambda p}^{-1}\Lambda L_p p_0$

推论5.19.5. $W(\Lambda,p) \equiv L_{\Lambda p}^{-1}\Lambda L_p = \Lambda_2^{-1}[SO(3)]L_{\Lambda v}^{-1}\Lambda L_{\vec{v}}\Lambda_1[SO(3)] = \Lambda_3[SO(3)]$

推论5.19.6. $U(\Lambda,p) \equiv U_{\Lambda p}^{-1}U_\Lambda U_p = U^{-1}(\Lambda_2[SO(3)])U_{\Lambda v}^{-1}U_\Lambda U_{\vec{v}}U(\Lambda_1[SO(3)])$

5.19.2 无质量粒子的小群

推论5.19.7. $L_p\Lambda[E(2)]\begin{bmatrix}0\\0\\p_0\\ip_0\end{bmatrix} = p := \begin{bmatrix}\vec{p}\\ip\end{bmatrix}$

推论5.19.8. $\tilde{L}_p \equiv L_p\Lambda[E(2)]$

推论5.19.9. $\tilde{L}_p\begin{bmatrix}0\\0\\p_0\\ip_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{p}\\ip\end{bmatrix}, L_{\Lambda p}\begin{bmatrix}0\\0\\p_0\\ip_0\end{bmatrix} = \Lambda\begin{bmatrix}\vec{p}\\ip\end{bmatrix} = \Lambda\tilde{L}_p\begin{bmatrix}0\\0\\p_0\\ip_0\end{bmatrix}$

推论5.19.10. $\begin{bmatrix}0\\0\\p_0\\ip_0\end{bmatrix} = \tilde{L}_{\Lambda p}^{-1}\Lambda\tilde{L}_p\begin{bmatrix}0\\0\\p_0\\ip_0\end{bmatrix}$

推论5.19.11. $W(\Lambda,p) \equiv \tilde{L}_{\Lambda p}^{-1}\Lambda\tilde{L}_p = \Lambda_2^{-1}[E(2)]L_{\Lambda p}^{-1}\Lambda L_p\Lambda_1[E(2)] = \Lambda_3[E(2)]$

推论5.19.12. $U(\Lambda,p) \equiv \tilde{U}_{\Lambda p}^{-1}U_\Lambda\tilde{U}_p = U^{-1}(\Lambda_2[SO(3)])U_{\Lambda p}^{-1}U_\Lambda U_p U(\Lambda_1[SO(3)])$

6 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l}$低阶展开的猜想

本论文所有结论都依赖于本节的猜想，只要本节猜想成立，则后面章节的结论全部成立。

6.1 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1}(\forall\hat{p},\forall s\geq\frac{1}{2})$低阶展开的猜想及其推论

猜想6.1.1. $[\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_k(s)[\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}, \forall\hat{p},\forall s\geq\frac{1}{2}$

推论6.1.1. $[\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_k(s)[\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2-2k}, \forall\hat{p},\forall s\geq\frac{1}{2}$

推论6.1.2. $[\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_k^l(s)[\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2-l\%2-2k}, \forall\hat{p},\forall s\geq\frac{1}{2}$

6.2 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l}(\forall\hat{p},\forall s\geq\frac{1}{2})$低阶展开的等价猜想

猜想6.2.1. $[\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l} = \sum_{k=0}^{2s} B_k^l(s)[\Omega(s)\cdot\hat{p}]^k, \forall\hat{p},\forall s\geq\frac{1}{2}$

推论6.2.1. $X_k^{2l+1}(s) = X_k^{2l+2}(s), B_k^{2l+1}(s) = B_{k+1}^{2l+2}(s), B_k^l(s) = 0$

推论6.2.2. $0 = B_{2s-2k}^{2l+1}(s), 0 = B_{2s+1-2k}^{2l+2}(s); 0\leq k\leq[s+1/2], s\geq\frac{1}{2}$

推论6.2.3. $X_k^{2l+1}(s) = B_{2s+1-2k}^{2l+1}(s), X_k^{2l+2}(s) = B_{2s+2-2k}^{2l+2}(s), X_k^{2l+1}(s) = X_k^{2l+2}(s); 1\leq k\leq[s+1/2], s\geq\frac{1}{2}$

7 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l}$低阶展开的第一种解法

7.1 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l}$低阶展开的第一种解法(利用范德蒙矩阵进行求解)

定理7.1.1. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l} = \sum_{k=0}^{2s} B_k^l(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{2s} B_k^l(s)h^k = h^{2s+l}; h = s,\cdot\cdot,-s$

证明: $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l}=\sum\limits_{k=0}^{2s}B_k^l(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k;\forall\hat{p},\forall s\geq\frac{1}{2}$

$\Rightarrow[\sigma(s)\cdot\hat{p}_z]^{2s+l}=\sum\limits_{k=0}^{2s}B_k^l(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}_z]^k;\hat{p}_z=(0,0,1)$

$\Leftrightarrow\sigma_z^{2s+l}(s)=\sum\limits_{k=0}^{2s}B_k^l(s)\sigma_z^k(s);\hat{p}_z=(0,0,1),h=s,\cdot\cdot,-s$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{2s}B_k^l(s)h^k=h^{2s+l};h=s,\cdot\cdot,-s$ □

推论7.1.1. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l}=\frac{1}{(2s)!}\sum\limits_{i=0}^{2s}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{i+s+h}C^{2s-i}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}C_{2s}^{s+h}h^{2s+l}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^i$

证明: $\sum\limits_{k=0}^{2s}B_k^l(s)h^k=h^{2s+l};h=s,\cdot\cdot,-s$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}s^0&s^1&\cdots&s^{2s-1}&s^{2s}\\(s-1)^0&(s-1)^1&\cdots&(s-1)^{2s-1}&(s-1)^{2s}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(1-s)^0&(1-s)^1&\cdots&(1-s)^{2s-1}&(1-s)^{2s}\\(-s)^0&(-s)^1&\cdots&(-s)^{2s-1}&(-s)^{2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_0^l(s)\\B_1^l(s)\\\cdots\\B_{2s-1}^l(s)\\B_{2s}^l(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(s)^{2s+1}\\(s-1)^{2s+1}\\\cdots\\(1-s)^{2s+1}\\(-s)^{2s+1}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}B_0^l(s)\\B_1^l(s)\\\cdots\\B_{2s-1}^l(s)\\B_{2s}^l(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s^0&s^1&\cdots&s^{2s-1}&s^{2s}\\(s-1)^0&(s-1)^1&\cdots&(s-1)^{2s-1}&(s-1)^{2s}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(1-s)^0&(1-s)^1&\cdots&(1-s)^{2s-1}&(1-s)^{2s}\\(-s)^0&(-s)^1&\cdots&(-s)^{2s-1}&(-s)^{2s}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}(s)^{2s+1}\\(s-1)^{2s+1}\\\cdots\\(1-s)^{2s+1}\\(-s)^{2s+1}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}B_0^l(s)\\B_1^l(s)\\\cdots\\B_{2s-1}^l(s)\\B_{2s}^l(s)\end{bmatrix}=\frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\begin{bmatrix}(-1)^0C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}}C_{2s}^0&\cdot\cdot&(-1)^jC^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C_{2s}^j&\cdot\cdot&(-1)^{2s}C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}}C_{2s}^{2s}\\(-1)^1C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}}C_{2s}^0&\cdot\cdot&(-1)^{1+j}C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C_{2s}^j&\cdot\cdot&(-1)^{1+2s}C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}}C_{2s}^{2s}\\\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot\\(-1)^iC^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}}C_{2s}^0&\cdot\cdot&(-1)^{i+j}C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C_{2s}^j&\cdot\cdot&(-1)^{i+2s}C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}}C_{2s}^{2s}\\\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot\\(-1)^{2s-1}C^{1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}}C_{2s}^0&\cdot\cdot&(-1)^{2s-1+j}C^{1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C_{2s}^j&\cdot\cdot&(-1)^{4s-1}C^{1}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}}C_{2s}^{2s}\\(-1)^{2s}C^{0}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}}C_{2s}^0&\cdot\cdot&(-1)^{2s+j}C^{0}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C_{2s}^j&\cdot\cdot&(-1)^{4s}C^{0}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}}C_{2s}^{2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(s)^{2s+l}\\(s-1)^{2s+l}\\\cdot\cdot\\(s-j)^{2s+l}\\\cdot\cdot\\(1-s)^{2s+l}\\(-s)^{2s+l}\end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow B_i^l=\frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\sum\limits_{j=0}^{2s}(-1)^{i+j}C^{2s-i}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot,s\}}C_{2s}^j(s-j)^{2s+l};0\leq i\leq 2s$

$\Rightarrow[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l}=\sum\limits_{k=0}^{2s}B_k^l(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k=\frac{1}{(2s)!}\sum\limits_{k=0}^{2s}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{k+s+h}C^{2s-k}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}C_{2s}^{s+h}h^{2s+l}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k$ □

7.2 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l}$低阶展开第一种解法的推论

引理7.2.1. $C^l_{\{-s,\cdot\cdot,\overline{-h},\cdot\cdot,s\}}\equiv(-1)^lC^l_{\{-s,\cdot\cdot,\overline{h},\cdot\cdot,s\}},C^{2k-1}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}+hC^{2k-2}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}=C^{2k-1}_{\{-s,\cdot\cdot,s\}}=0$

推论7.2.1. $s\geq\frac{1}{2},l\geq 0$

$$\begin{cases}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+1}=\frac{1}{(2s)!}\sum\limits_{i=0}^{2s}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{i+s+h}C^{2s-i}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}C_{2s}^{s+h}h^{2s+2l+1}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^i\\[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+2}=\frac{1}{(2s)!}\sum\limits_{i=0}^{2s}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{i+s+h}C^{2s-i}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}C_{2s}^{s+h}h^{2s+2l+2}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^i\end{cases}$$

推论7.2.2. $s\geq\frac{1}{2},l\geq 0$

$$\begin{cases}B^{2l+1}_{2s-2k}(s)=\frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C^{2k}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}C_{2s}^{s+h}h^{2s+2l+1}\equiv 0;0\leq k\leq[s]\\B^{2l+2}_{2s+1-2k}(s)=\frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h+1}C^{2k-1}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}C_{2s}^{s+h}h^{2s+2l+2}\equiv 0;1\leq k\leq[s+1/2]\end{cases}$$

$$\begin{cases}X^{2l+1}_k(s)=B^{2l+1}_{2s+1-2k}(s)=\frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h+1}C^{2k-1}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}C_{2s}^{s+h}h^{2s+2l+1};1\leq k\leq[s+1/2]\\X^{2l+2}_k(s)=B^{2l+2}_{2s+2-2k}(s)=\frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h+2}C^{2k-2}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}C_{2s}^{s+h}h^{2s+2l+2};1\leq k\leq[s+1/2]\end{cases}$$

推论7.2.3. $X^{2l+1}_k(s)\equiv X^{2l+2}_k(s)\Leftrightarrow\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C_{2s}^{s+h}h^{2s+2l+1}(C^{2k-1}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}+hC^{2k-2}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}})\equiv 0$

推论7.2.4. $s\geq\frac{1}{2},l\geq 0$

$$\begin{cases}X^{2l+1}_1(s)=B^{2l+1}_{2s-1}(s)=\frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C_{2s}^{s+h}h^{2s+2l+2}\\X^{2l+2}_1(s)=B^{2l+2}_{2s}(s)=\frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C_{2s}^{s+h}h^{2s+2l+2}\end{cases}$$

推论7.2.5.

$$\begin{cases} X_k(s) = X_k^1(s) = B_{2s+1-2k}^1(s) = \frac{(-1)^{2s+1}}{(2s)!}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}^{2k-1}C_{2s}^{s+h}h^{2s+1} \\ X_1(s) = X_1^1(s) = B_{2s-1}^1(s) = \frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C_{2s}^{s+h}h^{2s+2} \end{cases}$$

推论7.2.6.

$$\begin{cases} [\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+1} = \frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\sum\limits_{k=1}^{[s+1/2]}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h+1}C_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}^{2k-1}C_{2s}^{s+h}h^{2s+2l+1}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k} \\ [\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+2} = \frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\sum\limits_{k=1}^{[s+1/2]}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h+2}C_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}^{2k-2}C_{2s}^{s+h}h^{2s+2l+2}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2-2k} \end{cases}$$

推论7.2.7. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1} = \frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\sum\limits_{k=1}^{[s+1/2]}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h+1}C_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}^{2k-1}C_{2s}^{s+h}h^{2s+1}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

8 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+1}$低阶展开的第二种解法

8.1 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+1}$的低阶展开式系数方程的另一种严格证明方法

定理8.1.1. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+1} = \sum\limits_{k=1}^{[s+\frac{1}{2}]}X_k^{2l+1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{[s+1/2]}X_k^{2l+1}(s)h^{2s+1-2k} = h^{2s+1}; h = s,\cdot\cdot,\frac{1}{2}|1$

证明：$[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+1} = \sum\limits_{k=1}^{[s+\frac{1}{2}]}X_k^{2l+1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

$\Rightarrow \lambda^+(s,h)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+1}\lambda(s,h) = \sum\limits_{k=1}^{[s+\frac{1}{2}]}X_k^{2l+1}(s)\lambda^+(s,h)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}\lambda(s,h), h = s,\cdots,-s$

$\Rightarrow h^{2s+2l+1} = \sum\limits_{k=1}^{[s+\frac{1}{2}]}X_k^{2l+1}(s)h^{2s+1-2k}, h = s,\cdots,-s$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{[s+1/2]}X_k^{2l+1}(s)h^{2s+1-2k} = h^{2s+2l+1}; h = s,\cdot\cdot,\frac{1}{2}|1$ □

推论8.1.1. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+1} = \sum\limits_{k=1}^{[s+\frac{1}{2}]}X_k^{2l+1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k} = \sum\limits_{k=0}^{[s-1/2]}X_{[s+1/2]-k}^{2l+1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2k+(2s+1)\%2}$

推论8.1.2. $[\sigma(n-\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^{2n+2l} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}X_{n-k}^{2l+1}(n-\frac{1}{2})[\sigma(n-\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^{2k}, [\sigma(n)\cdot\hat{p}]^{2n+2l+1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}X_{n-k}^{2l+1}(n)[\sigma(n)\cdot\hat{p}]^{2k+1}$

8.2 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+1}$低阶展开的第二种解法(也利用范德蒙矩阵进行求解)

推论8.2.1. $X_k^{2l+1}(s) = \frac{(-1)^{2s+k}}{(2s)!}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h+1}C_{\{(1/2|1)^2,\cdot\cdot,\overline{h^2},\cdot\cdot,s^2\}}^{k-1}C_{2s}^{s+h}h^{2s+2l+2}; 1\le k\le[s+\frac{1}{2}]$

证明：$\sum\limits_{k=1}^{[s+1/2]}X_k^{2l+1}(s)h^{2s+1-2k} = h^{2s+2l+1}; h = s,\cdot\cdot,\frac{1}{2}|1$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} s^0 & s^2 & \cdots & s^{2[s-1/2]} \\ (s-1)^0 & (s-1)^2 & \cdots & (s-1)^{2[s-1/2]} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (s-[s-1/2])^0 & (s-[s-1/2])^2 & \cdots & (s-[s-1/2])^{2[s-1/2]} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{[s+1/2]}^{2l+1}(s) \\ X_{[s-1/2]}^{2l+1}(s) \\ \cdots \\ X_1^{2l+1}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{2[s+1/2]+2l} \\ (s-1)^{2[s+1/2]+2l} \\ \cdots \\ (s-[s-1/2])^{2[s+1/2]+2l} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} X_{[s+1/2]}^{2l+1}(s) \\ X_{[s-1/2]}^{2l+1}(s) \\ \cdots \\ X_1^{2l+1}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^0 & s^2 & \cdots & s^{2[s-1/2]} \\ (s-1)^0 & (s-1)^2 & \cdots & (s-1)^{2[s-1/2]} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (s-[s-1/2])^0 & (s-[s-1/2])^2 & \cdots & (s-[s-1/2])^{2[s-1/2]} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} s^{2[s+1/2]+2l} \\ (s-1)^{2[s+1/2]+2l} \\ \cdots \\ (s-[s-1/2])^{2[s+1/2]+2l} \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow X_{[s+1/2]-i}^{2l+1}(s) = \sum\limits_{j=0}^{[s-1/2]}\frac{C_{2s}^{j}C_{\{(s-[s-1/2])^2,\cdot\cdot,\overline{(s-j)^2},\cdot\cdot,s^2\}}^{[s-1/2]-i}(s-j)^{2[s+1/2]+2l}}{(-1)^{[s-1/2]+i+j}(2s)!}\frac{(2s-[s-1/2]-1-j)!(2s-2j)}{([s-1/2]-j)!}; 0\le i\le[s-\frac{1}{2}]$

$\Leftrightarrow X_{[s+1/2]-i}^{2l+1}(s) = \sum\limits_{j=0}^{[s-1/2]}\frac{2C_{2s}^{j}C_{\{(s-[s-1/2])^2,\cdot\cdot,\overline{(s-j)^2},\cdot\cdot,s^2\}}^{[s-1/2]-i}(s-j)^{2s+2l+2}}{(-1)^{[s-1/2]+i+j}(2s)!}; 0\le i\le[s-\frac{1}{2}]$

$\Leftrightarrow X_k^{2l+1}(s) = \sum\limits_{j=0}^{[s-1/2]}\frac{2C_{2s}^{j}C_{\{(s-[s-1/2])^2,\cdot\cdot,\overline{(s-j)^2},\cdot\cdot,s^2\}}^{k-1}(s-j)^{2s+2l+2}}{(-1)^{k-1+j}(2s)!}; 1\le k\le[s+\frac{1}{2}]$

$\Leftrightarrow X_k^{2l+1}(s) = \frac{(-1)^{2s+k}}{(2s)!}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h+1}C_{\{(1/2|1)^2,\cdot\cdot,\overline{h^2},\cdot\cdot,s^2\}}^{k-1}C_{2s}^{s+h}h^{2s+2l+2}; 1\le k\le[s+\frac{1}{2}]$ □

推论8.2.2. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+1}=\frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\sum_{k=1}^{[s+1/2]}\sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h+k-1}C^{k-1}_{\{(1/2|1)^2,\cdot\cdot,\overline{h^2},\cdot\cdot,s^2\}}C^{s+h}_{2s}h^{2s+2l+2}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

推论8.2.3. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1}=\frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\sum_{k=1}^{[s+1/2]}\sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h+k-1}C^{k-1}_{\{(1/2|1)^2,\cdot\cdot,\overline{h^2},\cdot\cdot,s^2\}}C^{s+h}_{2s}h^{2s+2}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

9 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1}$低阶展开的第三种解法

9.1 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l}(\forall\hat{p},\forall s\geq\frac{1}{2})$的低阶展开

引理9.1.1. $\begin{cases}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n=\bar{N}(s)[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})][\Omega(s)\cdot\hat{p}]^n[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]N(s)\\ [\sigma(s-1)\cdot\hat{p}]^n=\bar{X}(s)[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})][\Omega(s)\cdot\hat{p}]^n[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]X(s)\end{cases}$

定理9.1.1. $[\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X^l_k(s)[\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2-l\%2-2k};\forall\hat{p},s\geq\frac{1}{2},l\geq1$

$\Rightarrow[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X^l_k(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2-l\%2-2k},[\sigma(s-1)\cdot\hat{p}]^{2s+l}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X^l_k(s)[\sigma(s-1)\cdot\hat{p}]^{2s+2-l\%2-2k}$

证明: $[\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X^l_k(s)[\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2-l\%2-2k}$

$\Rightarrow\bar{N}(s)[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})][\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1}[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]N(s)$

$=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X^l_k(s)\bar{N}(s)[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})][\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2-l\%2-2k}[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]N(s)$

$\Leftrightarrow[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X^l_k(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2-l\%2-2k}$ □

证明: $[\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X^l_k(s)[\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2-l\%2-2k}$

$\Rightarrow\bar{X}(s)[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})][\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1}[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]X(s)$

$=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X^l_k(s)\bar{X}(s)[I\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2})][\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2-l\%2-2k}[I\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2})]X(s)$

$\Leftrightarrow[\sigma(s-1)\cdot\hat{p}]^{2s+l}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X^l_k(s)[\sigma(s-1)\cdot\hat{p}]^{2s+2-l\%2-2k}$ □

推论9.1.1. $s\geq\frac{1}{2},l\geq0$

$$\begin{cases}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+1}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X^{2l+1}_k(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}\\ [\sigma(s-1)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+1}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X^{2l+1}_k(s)[\sigma(s-1)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+2}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X^{2l+2}_k(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2-2k}\\ [\sigma(s-1)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+2}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X^{2l+2}_k(s)[\sigma(s-1)\cdot\hat{p}]^{2s+2-2k}\end{cases}$$

9.2 展开系数$X_k(s)$的递推关系

定义9.2.1. $C^k_{\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}}:=$ 按组合规律选出k个a相乘，并把所有乘积项全部加起来,$C^0_{\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}}:=1$

定义9.2.2. $X^{2l+1}_{[s+3/2]}(s):=0;s\geq\frac{1}{2},l\geq0$

引理9.2.1. $X^1_1(s)=(-1)^{2s}\sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C^{s+h}_{2s}h^{2s+2}=\sum_{j=0}^{2s}(-1)^jC^j_{2s}(s-j)^{2s+2}=\frac{(2s)!}{4}C^3_{2s+2}$

证明: $(1-x_1\cdot\cdot x_k)^{2s}=\sum_{j=0}^{2s}(-1)^jC^j_{2s}(x_1\cdot\cdot x_k)^j,0\leq k\leq2s$

$\Rightarrow\partial_{x_1}\cdot\cdot\partial_{x_k}(1-x_1\cdot\cdot x_k)^{2s}=\partial_{x_1}\cdot\cdot\partial_{x_k}\sum_{j=0}^{2s}(-1)^jC^j_{2s}(x_1\cdot\cdot x_k)^j,0\leq k\leq2s$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j j^k = 0, 0 \le k \le 2s-1, \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j j^{2s} = (-1)^{2s}(2s)! \\ \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j j^{2s+1} = (-1)^{2s}(2s)! C_{2s+1}^2, \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j j^{2s+2} = (-1)^{2s}(2s)!(C_{2s+2}^3 + 3C_{2s+2}^4) \end{cases} \quad \square$$

证明： $X_1^1(s) = \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j (s-j)^{2s+2} = \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j \sum_{k=0}^{2s+2}(-1)^k C_{2s+2}^k s^{2s+2-k} j^k$

$= \sum_{k=0}^{2s+2}(-1)^k C_{2s+2}^k s^{2s+2-k} \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j j^k = \sum_{k=2s}^{2s+2}(-1)^k C_{2s+2}^k s^{2s+2-k} \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j j^k$

$= (-1)^{2s} s^2 C_{2s+2}^2 \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j j^{2s} + (-1)^{2s+1} s^1 C_{2s+2}^1 \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j j^{2s+1} + (-1)^{2s+2} s^0 C_{2s+2}^0 \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j j^{2s+2}$

$= (-1)^{2s} s^2 C_{2s+2}^2 (-1)^{2s}(2s)! + (-1)^{2s+1} s C_{2s+2}^1 (-1)^{2s}(2s)! C_{2s+1}^2 + (-1)^{2s+2}(-1)^{2s}(2s)!(C_{2s+2}^3 + 3C_{2s+2}^4)$

$= s^2 C_{2s+2}^2 (2s)! - s C_{2s+2}^1 (2s)! C_{2s+1}^2 + (2s)!(C_{2s+2}^3 + 3C_{2s+2}^4) = \frac{(2s)!}{4} C_{2s+2}^3$ □

引理9.2.2. $s \ge \frac{1}{2}, l \ge 1$

$X_1^{2l-1}(s) = (-1)^{2s} \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h} C_{2s}^{s+h} h^{2s+2l} = (-1)^{2s} s^{2s+2l} \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j \sum_{k=0}^{2l}(-s)^{-k} C_{2s+2l}^{2s+k} j^{2s+k}$

证明： $X_1^{2l-1}(s) = \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j (s-j)^{2s+2l} = (-1)^{2s} \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h} C_{2s}^{s+h} h^{2s+2l}$

$= \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j \sum_{k=0}^{2s+2l}(-1)^k C_{2s+2l}^k s^{2s+2l-k} j^k = \sum_{k=0}^{2s+2l}(-1)^k C_{2s+2l}^k s^{2s+2l-k} \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j j^k$

$= \sum_{k=2s}^{2s+2l}(-1)^k C_{2s+2l}^k s^{2s+2l-k} \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j j^k = \sum_{k=0}^{2l}(-1)^{2s+k} C_{2s+2l}^{2s+k} s^{2s+2l-k} \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j j^{2s+k}$

$= (-1)^{2s} s^{2s+2l} \sum_{k=0}^{2l}(-s)^{-k} C_{2s+2l}^{2s+k} \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j j^{2s+k} = (-1)^{2s} s^{2s+2l} \sum_{j=0}^{2s}(-1)^j C_{2s}^j \sum_{k=0}^{2l}(-s)^{-k} C_{2s+2l}^{2s+k} j^{2s+k}$ □

引理9.2.3. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+3} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]}[X_1^{2l+1}(s)X_k^1(s) + X_{k+1}^{2l+1}(s)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}; s \ge \frac{1}{2}, l \ge 0$

证明： $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+3} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_k^{2l+1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+3-2k}$

$= X_1^{2l+1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1} + \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_{k+1}^{2l+1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

$= \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_1^{2l+1}(s)X_k^1(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k} + \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_{k+1}^{2l+1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

$= \sum_{k=1}^{[s+1/2]}[X_1^{2l+1}(s)X_k^1(s) + X_{k+1}^{2l+1}(s)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$ □

推论9.2.1. $X_k^{2l+3}(s) = X_1^{2l+1}(s)X_k^1(s) + X_{k+1}^{2l+1}(s); s \ge \frac{1}{2}, l \ge 0, k = 1, \cdot\cdot, [s+1/2]$

定理9.2.1. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+3} = \sum_{k=1}^{[s+3/2]} X_k^{2l+1}(s+1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+3-2k}$

$\Leftrightarrow X_{k+1}^{2l+1}(s+1) = [X_1^{2l+1}(s) - X_1^{2l+1}(s+1)]X_k^1(s) + X_{k+1}^{2l+1}(s); s \ge \frac{1}{2}, l \ge 0, k = 1, \cdot\cdot, [s+1/2]$

证明： $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+3} = \sum_{k=1}^{[s+3/2]} X_k^{2l+1}(s+1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+3-2k}$

$\Leftrightarrow [\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+3} = X_1^{2l+1}(s+1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1} + \sum_{k=2}^{[s+3/2]} X_k^{2l+1}(s+1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+3-2k}$

$\Leftrightarrow [\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+3} = X_1^{2l+1}(s+1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1} + \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_{k+1}^{2l+1}(s+1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

$\Leftrightarrow$

$\sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_{k+1}^{2l+1}(s+1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k} = [\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+3} - X_1^{2l+1}(s+1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1}$

$= \sum_{k=1}^{[s+1/2]}[X_1^{2l+1}(s)X_k^1(s) + X_{k+1}^{2l+1}(s)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k} - X_1^{2l+1}(s+1)\sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_k^1(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

$$= \sum_{k=1}^{[s+1/2]} \{[X_1^{2l+1}(s) - X_1^{2l+1}(s+1)]X_k^1(s) + X_{k+1}^{2l+1}(s)\}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$$
$$\Leftrightarrow X_{k+1}^{2l+1}(s+1) = [X_1^{2l+1}(s) - X_1^{2l+1}(s+1)]X_k^1(s) + X_{k+1}^{2l+1}(s), k=1,\cdot\cdot,[s+1/2]$$
$$\Rightarrow X_{k+1}^1(s+1) = X_{k+1}^1(s) - (s+1)^2 X_k^1(s), k=1,\cdot\cdot,[s+1/2] \qquad \square$$

推论9.2.2. $X_{k+1}^1(s+1) = X_{k+1}^1(s) - (s+1)^2 X_k^1(s); s \ge \frac{1}{2}, k=1,\cdot\cdot,[s+1/2]$

9.3 展开系数$X_k^1(s)$的严格求解

推论9.3.1.

$$\begin{cases} X_{k+1}^1(s+1) = X_{k+1}^1(s) - (s+1)^2 X_k^1(s), s \ge \frac{1}{2} \\ X_1^1(s) = \frac{1}{4}C_{2s+2}^3, X_{[s+3/2]}^1(s) := 0, k=1,\cdot\cdot,[s+1/2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_k^1(s) = -(-1)^k C^k_{\{(s-[s-1/2])^2,\cdots,(s-1)^2,s^2\}} \\ s \ge \frac{1}{2}, k=1,\cdot\cdot,[s+1/2] \end{cases}$$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$i=1$时成立：

$X_1^1(\frac{1}{2}) = -(-1)^1 C^1_{\{(1/2)^2\}}, X_1^1(1) = -(-1)^1 C^1_{\{1^2\}}$

第二步：假设$s'=s$时成立：

$X_k^1(s) = -(-1)^k C^k_{\{(1/2)^2|1^2,\cdots,(s-1)^2,s^2\}}, k=1,\cdot\cdot,[s+1/2]$

第三步：$i=n+1$时，$k=1,\cdot\cdot,[s+1/2]$

$$X_{k+1}^1(s+1) = X_{k+1}^1(s) - (s+1)^2 X_k^1(s) = -(-1)^{k+1} C^{k+1}_{\{(1/2)^2|1^2,\cdots,(s-1)^2,s^2\}} + (s+1)^2(-1)^k C^k_{\{(1/2)^2|1^2,\cdots,(s-1)^2,s^2\}}$$
$$\Leftrightarrow X_{k+1}^1(s+1) = -(-1)^{k+1}[C^{k+1}_{\{(1/2)^2|1^2,\cdots,(s-1)^2,s^2\}} + (s+1)^2 C^k_{\{(1/2)^2|1^2,\cdots,(s-1)^2,s^2\}}], k=1,\cdot\cdot,[s+1/2]$$
$$\Leftrightarrow X_{k+1}^1(s+1) = -(-1)^{k+1} C^{k+1}_{\{(1/2)^2|1^2,\cdots,s^2,(s+1)^2\}}, k=1,\cdot\cdot,[s+1/2]$$
$$\Rightarrow X_k^1(s+1) = -(-1)^k C^{k+1}_{\{(1/2)^2|1^2,\cdots,s^2,(s+1)^2\}}, k=1,\cdot\cdot,[s+3/2]$$

此步证明了$s'=s+1$时成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 $\square$

推论9.3.2.

$$\begin{cases} X_{k+1}^1(s+1) = X_{k+1}^1(s) - (s+1)^2 X_k^1(s), s \ge \frac{1}{2} \\ X_1^1(s) = \frac{1}{4}C_{2s+2}^3, X_{[s+3/2]}^1(s) := 0, k=1,\cdot\cdot,[s+1/2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_k^1(s) = -(-1)^k C^k_{\{(s-[s-1/2])^2,\cdots,(s-1)^2,s^2\}} \\ s \ge \frac{1}{2}, k=1,\cdot\cdot,[s+1/2] \end{cases}$$

推论9.3.3.

$$\begin{bmatrix} X_{1/2|1}^1(s) \\ \cdots \\ X_{[s-1/2]}^1(s) \\ X_{[s+1/2]}^1(s) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} (-1)^{-1}[C^1_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}] \\ (-1)^{-2}[C^2_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}] \\ \cdots \\ (-1)^{-[s+1/2]}[C^{[s+1/2]}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}] \end{bmatrix} [\Leftrightarrow] \begin{bmatrix} X_{[s+1/2]}^1(s) \\ X_{[s-1/2]}^1(s) \\ \cdots \\ X_{1/2|1}^1(s) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} (-1)^{-[s+1/2]}[C^{[s+1/2]}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}] \\ (-1)^{-[s-1/2]}[C^{[s-1/2]}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}] \\ \cdots \\ (-1)^{-1}[C^1_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}] \end{bmatrix}$$

推论9.3.4. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} (-1)^{k-1} C^k_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

推论9.3.5. $X_k^3(s) = (-1)^{k-1}[C^1_{\{(s-[s-1/2])^2,\cdots,s^2\}} C^k_{\{(s-[s-1/2])^2,\cdots,s^2\}} - C^{k+1}_{\{(s-[s-1/2])^2,\cdots,s^2\}}]; k=1,\cdot\cdot,[s+1/2]$

9.4 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1}$三种低阶展开式导出的恒等式

推论9.4.1.

$$\begin{cases} [\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1} = \frac{(-1)^{2s}}{(2s)!} \sum_{k=1}^{[s+1/2]} \sum_{h=s}^{-s} (-1)^{s+h+1} C^{2k-1}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}} C_{2s}^{s+h} h^{2s+1} [\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k} \\ [\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} (-1)^{k-1} C^k_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k} \\ [\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1} = \frac{(-1)^{2s}}{(2s)!} \sum_{k=1}^{[s+1/2]} \sum_{h=s}^{-s} (-1)^{s+h+k-1} C^{k-1}_{\{(1/2|1)^2,\cdot\cdot,\overline{h^2},\cdot\cdot,s^2\}} C_{2s}^{s+h} h^{2s+2} [\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k} \end{cases}$$

推论9.4.2. $C^k_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}} \equiv \sum_{h=s}^{-s} \frac{(-1)^{3s+h+k} C^{2k-1}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}} C_{2s}^{s+h} h^{2s+1}}{(2s)!} \equiv \sum_{h=s}^{-s} \frac{(-1)^{3s+h} C^{k-1}_{\{(1/2|1)^2,\cdot\cdot\overline{h^2}\cdot\cdot,s^2\}} C_{2s}^{s+h} h^{2s+2}}{(2s)!}$

10 $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}$的多项式展开

10.1 $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}$多项式展开系数的求解

定理10.1.1.
$$e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}=\sum_{k=0}^{2s}A_k(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)]^k,\vec{\vartheta}=\sqrt{\vec{\vartheta}^2}\hat{\vartheta},\hat{\vartheta}^2=1\Rightarrow e^{h\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}=\sum_{k=0}^{2s}A_k(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[h\sqrt{\vec{\vartheta}^2}]^k;h=s,\cdot\cdot,-s$$

证明: $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}=\sum_{k=0}^{2s}A_k(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)]^k,\vec{\vartheta}=\sqrt{\vec{\vartheta}^2}\hat{\vartheta},\hat{\vartheta}^2=1$($\sqrt{\vec{\vartheta}^2}$有$\pm$两个值,任取一个即可，结论都一样)

$$\Rightarrow\lambda^+(s,h)e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}\lambda(s,h)=\sum_{k=0}^{2s}A_k(s)\lambda^+(s,h)[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)]^k\lambda(s,h);h=s,\cdot\cdot,-s$$

$$\Leftrightarrow e^{h\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}=\sum_{k=0}^{2s}A_k(s)[h\sqrt{\vec{\vartheta}^2}]^k;h=s,\cdot\cdot,-s$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}s^0&s^1&\cdots&s^{2s-1}&s^{2s}\\(s-1)^0&(s-1)^1&\cdots&(s-1)^{2s-1}&(s-1)^{2s}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(1-s)^0&(1-s)^1&\cdots&(1-s)^{2s-1}&(1-s)^{2s}\\(-s)^0&(-s)^1&\cdots&(-s)^{2s-1}&(-s)^{2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\sqrt{\vec{\vartheta}^2})^0A_0(s)\\(\sqrt{\vec{\vartheta}^2})^1A_1(s)\\\cdots\\(\sqrt{\vec{\vartheta}^2})^{2s-1}A_{2s-1}(s)\\(\sqrt{\vec{\vartheta}^2})^{2s}A_{2s}(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{s\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\\e^{(s-1)\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\\\cdots\\e^{(1-s)\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\\e^{(-s)\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}A_0(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})\\A_1(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})\\\cdots\\A_{2s-1}(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})\\A_{2s}(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\sqrt{\vec{\vartheta}^2})^{-0}&0&\cdots&0\\0&(\sqrt{\vec{\vartheta}^2})^{-1}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&(\sqrt{\vec{\vartheta}^2})^{-2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s^0&s^1&\cdots&s^{2s-1}&s^{2s}\\(s-1)^0&(s-1)^1&\cdots&(s-1)^{2s-1}&(s-1)^{2s}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(1-s)^0&(1-s)^1&\cdots&(1-s)^{2s-1}&(1-s)^{2s}\\(-s)^0&(-s)^1&\cdots&(-s)^{2s-1}&(-s)^{2s}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{s\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\\e^{(s-1)\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\\\cdots\\e^{(1-s)\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\\e^{(-s)\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}A_0(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})\\A_1(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})\\\cdots\\A_{2s-1}(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})\\A_{2s}(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})\end{bmatrix}=\frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\begin{bmatrix}(\sqrt{\vec{\vartheta}^2})^{-0}&0&\cdots&0\\0&(\sqrt{\vec{\vartheta}^2})^{-1}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&(\sqrt{\vec{\vartheta}^2})^{-2s}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}(-1)^0C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}}C^0_{2s}&(-1)^1C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-1}\cdot\cdot\}}C^1_{2s}&\cdot\cdot&(-1)^jC^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2s}&\cdot\cdot&(-1)^{2s}C^{2s}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}}C^{2s}_{2s}\\(-1)^1C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}}C^0_{2s}&(-1)^2C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-1}\cdot\cdot\}}C^1_{2s}&\cdot\cdot&(-1)^{1+j}C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2s}&\cdot\cdot&(-1)^{1+2s}C^{2s-1}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}}C^{2s}_{2s}\\\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot\\(-1)^iC^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}}C^0_{2s}&(-1)^{i+1}C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-1}\cdot\cdot\}}C^1_{2s}&\cdot\cdot&(-1)^{i+j}C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2s}&\cdot\cdot&(-1)^{i+2s}C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}}C^{2s}_{2s}\\\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot\\(-1)^{2s-1}C^1_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}}C^0_{2s}&(-1)^{2s}C^1_{\{\cdot\cdot\overline{s-1}\cdot\cdot\}}C^1_{2s}&\cdot\cdot&(-1)^{2s-1+j}C^1_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2s}&\cdot\cdot&(-1)^{4s-1}C^1_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}}C^{2s}_{2s}\\(-1)^{2s}C^0_{\{\cdot\cdot\overline{s-0}\cdot\cdot\}}C^0_{2s}&(-1)^{2s+1}C^0_{\{\cdot\cdot\overline{s-1}\cdot\cdot\}}C^1_{2s}&\cdot\cdot&(-1)^{2s+j}C^0_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2s}&\cdot\cdot&(-1)^{4s}C^0_{\{\cdot\cdot\overline{0-s}\cdot\cdot\}}C^{2s}_{2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{s\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\\e^{(s-1)\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\\\cdot\cdot\\e^{(s-j)\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\\\cdot\cdot\\e^{(1-s)\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\\e^{(-s)\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A_i(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})=\frac{(-1)^{2s}}{(2s)!(\sqrt{\vec{\vartheta}^2})^i}\sum_{j=0}^{2s}(-1)^{i+j}C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2s}e^{(s-j)\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}=\frac{(-1)^k}{(2s)!(\sqrt{\vec{\vartheta}^2})^k}\sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C^{2s-k}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}C^{s+h}_{2s}e^{h\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\qquad\square$$

推论10.1.1. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}=\sum_{k=0}^{2s}[\sum_{h=s}^{-s}\frac{(-1)^{s+h+k}}{(2s)!}C^{2s-k}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}C^{s+h}_{2s}e^{h\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}][\frac{\vec{\vartheta}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\cdot\sigma(s)]^k$

推论10.1.2. $e^{\sigma(s)\cdot\hat{p}}=\sum_{k=0}^{2s}[\sum_{h=s}^{-s}\frac{(-1)^{s+h+k}}{(2s)!}C^{2s-k}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}C^{s+h}_{2s}e^h][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k,e^{\sigma_z(s)}=\sum_{k=0}^{2s}[\sum_{h=s}^{-s}\frac{(-1)^{s+h+k}}{(2s)!}C^{2s-k}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}C^{s+h}_{2s}e^h][\sigma_z(s)]^k$

10.2 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l},e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}$低阶展开的小结

定义10.2.1. $C(k,h):=\frac{(-1)^{s+h+k}}{(2s)!}C^{2s-k}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}C^{s+h}_{2s}$

推论10.2.1. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}=\sum_{k=0}^{2s}[\sum_{h=s}^{-s}C(k,h)e^{h\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}][\frac{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}]^k,[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)]^{2s+l}=\sum_{k=0}^{2s}[\sum_{h=s}^{-s}C(k,h)(h\sqrt{\vec{\vartheta}^2})^{2s+l}][\frac{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}]^k$

推论10.2.2. $e^{\sigma(s)\cdot\hat{p}}=\sum_{k=0}^{2s}[\sum_{h=s}^{-s}C(k,h)e^h][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k,[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+l}=\sum_{k=0}^{2s}[\sum_{h=s}^{-s}C(k,h)h^{2s+l}][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k$

11 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+1}$展开系数的同构性

定理11.0.1. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2l+3}=\sum_{k=1}^{[s+3/2]}X_k^{2l+1}(s+1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+3-2k}$

$$\Leftrightarrow X_{k+1}^{2l+1}(s+1)=[X_1^{2l+1}(s)-X_1^{2l+1}(s+1)]X_k^{2l+1}(s)+X_{k+1}^{2l+1}(s);s\geq\frac{1}{2},l\geq0,k=1,\cdot\cdot,[s+1/2]$$

11.1 $z^{2s+2l+1}$展开系数的同构性

定义11.1.1. $X_k^{2l+1}(s) := 0, k < 1 | k > [s+\frac{1}{2}]$

定义11.1.2. $X_k(s) := (-1)^{k+1} C^k_{\{(s-[s-1/2])^2,\cdots,s^2\}}, k = 1, 2, \cdot\cdot, [s+\frac{1}{2}]$

引理11.1.1. $z^{2s+2l-1} = \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_k^{2l+1}(s-1) z^{2s-1-2k}$

$\Rightarrow z^{2s+2l+1} = \sum_{k=1}^{[s-1/2]} [X_1^{2l+1}(s-1) X_k^1(s-1) + X_{k+1}^{2l+1}(s-1)] z^{2s-1-2k}$

证明： $z^{2s+2l+1} = \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_k^{2l+1}(s-1) z^{2s+1-2k}$

$= X_1^{2l+1}(s-1) z^{2s-1} + \sum_{k=1}^{[s-3/2]} X_{k+1}^{2l+1}(s-1) z^{2s-1-2k}$

$= \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_1^{2l+1}(s-1) X_k^1(s-1) z^{2s-1-2k} + \sum_{k=1}^{[s-3/2]} X_{k+1}^{2l+1}(s-1) z^{2s-1-2k}$

$= \sum_{k=1}^{[s-1/2]} [X_1^{2l+1}(s-1) X_k^1(s-1) + X_{k+1}^{2l+1}(s-1)] z^{2s-1-2k}$ □

定理11.1.1. $z^{2s+2l-1} = \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_k^{2l+1}(s-1) z^{2s-1-2k} \Rightarrow z^{2s+2l+1} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_k^{2l+1}(s) z^{2s+1-2k}$

证明： $X_{k+1}^{2l+1}(s) = [X_1^{2l+1}(s-1) - X_1^{2l+1}(s)] X_k^1(s-1) + X_{k+1}^{2l+1}(s-1), k = 1, \cdot\cdot, [s-1]$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{[s-1/2]} \{[X_1^{2l+1}(s-1) - X_1^{2l+1}(s)] X_k^1(s-1) + X_{k+1}^{2l+1}(s-1)\} z^{2s-1-2k} = \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_{k+1}^{2l+1}(s) z^{2s-1-2k}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{[s-1/2]} [X_1^{2l+1}(s-1) X_k^1(s-1) + X_{k+1}^{2l+1}(s-1)] z^{2s-1-2k} - \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_1^{2l+1}(s) X_k^1(s-1) z^{2s-1-2k}$

$= \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_{k+1}^{2l+1}(s) z^{2s-1-2k}$

$\Leftrightarrow z^{2s+2l+1} - X_1^{2l+1}(s) \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_k^1(s-1) z^{2s-1-2k} = \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_{k+1}^{2l+1}(s) z^{2s-1-2k}$

$\Leftrightarrow z^{2s+2l+1} - X_1^{2l+1}(s) z^{2s-1} = \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_{k+1}^{2l+1}(s) z^{2s-1-2k}$

$\Leftrightarrow z^{2s+2l+1} = X_1^{2l+1}(s) z^{2s-1} + \sum_{k=2}^{[s+1/2]} X_k^{2l+1}(s) z^{2s+1-2k}$

$\Leftrightarrow z^{2s+2l+1} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_k^{2l+1}(s) z^{2s+1-2k}$ □

推论11.1.1. $s \geq \frac{1}{2}, n \geq 0, l \geq 0$

$$\begin{cases} z^{2s+2l+1} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_k^{2l+1}(s) z^{2s+1-2k} \Rightarrow z^{2(s+n)+2l+1} = \sum_{k=1}^{[(s+n)+1/2]} X_k^{2l+1}(s+n) z^{2(s+n)+1-2k} \\ z^{2s+1} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_k^1(s) z^{2s+1-2k} \Rightarrow z^{2(s+n)+1} = \sum_{k=1}^{[(s+n)+1/2]} X_k^1(s+n) z^{2(s+n)+1-2k} \end{cases}$$

11.2 $[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}], [\sigma(1)\cdot\hat{p}], 1$满足的同构性一

推论11.2.1. $n \geq 1$

$$\begin{cases} [\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^{2+2l} = \sum_{k=1}^{1} X_k^{2l+1}(\frac{1}{2}) [\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^{2-2k}, X_1^{2l+1}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4^{l+1}} \Rightarrow [\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^{2n+2l} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{2l+1}(n-\frac{1}{2}) [\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^{2n-2k} \\ [\sigma(1)\cdot\hat{p}]^{3+2l} = \sum_{k=1}^{1} X_k^{2l+1}(1) [\sigma(1)\cdot\hat{p}]^{3-2k}, X_1^{2l+1}(1) = 1 \Rightarrow [\sigma(1)\cdot\hat{p}]^{2n+2l+1} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{2l+1}(n) [\sigma(1)\cdot\hat{p}]^{2n+1-2k} \\ [2\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^{3+2l} = \sum_{k=1}^{1} X_k^{2l+1}(1) [2\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^{3-2k}, X_1^{2l+1}(1) = 1 \Rightarrow [2\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^{2n+2l+1} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{2l+1}(n) [2\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^{2n+1-2k} \end{cases}$$

推论11.2.2. $n \geq 1$

$$\begin{cases} (\frac{1}{2})^{2+2l} = \sum_{k=1}^{1} X_k^{2l+1}(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{2-2k}, X_1^{2l+1}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4^{l+1}} \Rightarrow (\frac{1}{2})^{2n+2l} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{2l+1}(n-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{2n-2k} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} 4^k X_k^{2l+1}(n-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4^l} \\ 1^{3+2l} = \sum_{k=1}^{1} X_k^{2l+1}(1)1^{3-2k}, X_1^{2l+1}(1) = 1 \Rightarrow 1^{2n+2l+1} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{2l+1}(n)1^{2n+1-2k} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k^{2l+1}(n) = 1 \end{cases}$$

11.3 $z^{2s+2l+2}$展开系数的同构性

定义11.3.1. $X_k(s) := (-1)^{k+1} C^k_{\{(s-[s-1/2])^2,\cdots,s^2\}}, k = 1, 2, \cdot\cdot, [s+\frac{1}{2}]$

引理11.3.1. $z^{2s+2l} = \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_k^{2l+2}(s-1) z^{2s-2k}$

$\Rightarrow z^{2s+2l+2} = \sum_{k=1}^{[s-1/2]} [X_1^{2l+2}(s-1) X_k^2(s-1) + X_{k+1}^{2l+2}(s-1)] z^{2s-2k}$

证明: $z^{2s+2l+2} = \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_k^{2l+2}(s-1) z^{2s+2-2k}$

$= X_1^{2l+2}(s-1) z^{2s} + \sum_{k=1}^{[s-3/2]} X_{k+1}^{2l+2}(s-1) z^{2s-2k}$

$= \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_1^{2l+2}(s-1) X_k^2(s-1) z^{2s-2k} + \sum_{k=1}^{[s-3/2]} X_{k+1}^{2l+2}(s-1) z^{2s-2k}$

$= \sum_{k=1}^{[s-1/2]} [X_1^{2l+2}(s-1) X_k^2(s-1) + X_{k+1}^{2l+2}(s-1)] z^{2s-2k}$ □

定理11.3.1. $z^{2s+2l} = \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_k^{2l+2}(s-1) z^{2s-2k} \Rightarrow z^{2s+2l+2} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_k^{2l+2}(s) z^{2s+2-2k}$

证明: $X_{k+1}^{2l+2}(s) = [X_1^{2l+2}(s-1) - X_1^{2l+2}(s)] X_k^2(s-1) + X_{k+1}^{2l+2}(s-1), k = 1, \cdot\cdot, [s-1/2]$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{[s-1/2]} \{[X_1^{2l+2}(s-1) - X_1^{2l+2}(s)] X_k^2(s-1) + X_{k+1}^{2l+2}(s-1)\} z^{2s-2k} = \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_{k+1}^{2l+2}(s) z^{2s-2k}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{[s-1/2]} [X_1^{2l+2}(s-1) X_k^2(s-1) + X_{k+1}^{2l+2}(s-1)] z^{2s-2k} - \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_1^{2l+2}(s) X_k^2(s-1) z^{2s-2k} = \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_{k+1}^{2l+2}(s) z^{2s-2k}$

$\Leftrightarrow z^{2s+2l+2} - X_1^{2l+2}(s) \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_k^2(s-1) z^{2s-2k} + \sum_{k=1}^{[s-1/2]} X_{k+1}^{2l+2}(s) z^{2s-2k}$

$\Leftrightarrow z^{2s+2l+2} = X_1^{2l+2}(s) z^{2s} + \sum_{k=2}^{[s+1/2]} X_k^{2l+2}(s) z^{2s+2-2k}$

$\Leftrightarrow z^{2s+2l+2} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_{k+1}^{2l+2}(s) z^{2s+2-2k}$ □

推论11.3.1. $s \geq \frac{1}{2}, n \geq 0, l \geq 0$

$$\begin{cases} z^{2s+2l+2} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_k^{2l+2}(s) z^{2s+2-2k} \Rightarrow z^{2(s+n)+2l+2} = \sum_{k=1}^{[(s+n)+1/2]} X_k^{2l+2}(s+n) z^{2(s+n)+2-2k} \\ z^{2s+2} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_k^2(s) z^{2s+2-2k} \Rightarrow z^{2(s+n)+2} = \sum_{k=1}^{[(s+n)+1/2]} X_k^2(s+n) z^{2(s+n)+2-2k} \end{cases}$$

11.4 z^{2s+l}展开系数的同构性

11.5 $[\sigma(\frac{1}{2}) \cdot \hat{p}], [\sigma(1) \cdot \hat{p}]$满足的同构性二

推论11.5.1. $n \geq 1$

$$\begin{cases} [\sigma(\frac{1}{2}) \cdot \hat{p}]^{3+2l} = \sum_{k=1}^{1} X_k^{2l+2}(\frac{1}{2}) [\sigma(\frac{1}{2}) \cdot \hat{p}]^{3-2k}, X_1^{2l+2}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4^{l+1}} \Rightarrow [\sigma(\frac{1}{2}) \cdot \hat{p}]^{2n+2l+1} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{2l+2}(n-\frac{1}{2}) [\sigma(\frac{1}{2}) \cdot \hat{p}]^{2n+1-2k} \\ [\frac{1}{2}\sigma(1) \cdot \hat{p}]^{3+2l} = \sum_{k=1}^{1} X_k^{2l+2}(\frac{1}{2}) [\frac{1}{2}\sigma(1) \cdot \hat{p}]^{3-2k}, X_1^{2l+2}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4^{l+1}} \Rightarrow [\frac{1}{2}\sigma(1) \cdot \hat{p}]^{2n+2l+1} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{2l+2}(n-\frac{1}{2}) [\frac{1}{2}\sigma(1) \cdot \hat{p}]^{2n+1-2k} \\ [\sigma(1) \cdot \hat{p}]^{4+2l} = \sum_{k=1}^{1} X_k^{2l+2}(1) [\sigma(1) \cdot \hat{p}]^{4-2k}, X_1^{2l+2}(1) = 1 \Rightarrow [\sigma(1) \cdot \hat{p}]^{2n+2l+2} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{2l+2}(n) [\sigma(1) \cdot \hat{p}]^{2n+2-2k} \\ [2\sigma(\frac{1}{2}) \cdot \hat{p}]^{4+2l} = \sum_{k=1}^{1} X_k^{2l+2}(1) [2\sigma(\frac{1}{2}) \cdot \hat{p}]^{4-2k}, X_1^{2l+2}(1) = 1 \Rightarrow [2\sigma(\frac{1}{2}) \cdot \hat{p}]^{2n+2l+2} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{2l+2}(n) [2\sigma(\frac{1}{2}) \cdot \hat{p}]^{2n+2-2k} \end{cases}$$

推论11.5.2. $n \geq 1$

$$\begin{cases}(\frac{1}{2})^{3+2l} = \sum_{k=1}^{1} X_k^{2l+1}(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{3-2k}, X_1^{2l+2}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4^{l+1}} \Rightarrow (\frac{1}{2})^{2n+2l+1} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{2l+2}(n-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{2n+1-2k} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} 4^k X_k^{2l+2}(n-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4^l} \\ 1^{4+2l} = \sum_{k=1}^{1} X_k^{2l+1}(1)1^{4-2k}, X_1^{2l+2}(1) = 1 \Rightarrow 1^{2n+2l+2} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{2l+2}(n)1^{2n+2-2k} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k^{2l+2}(n) = 1\end{cases}$$

11.6 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1}$展开系数的同构性

推论11.6.1.

$$[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_k(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}[\Rightarrow][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2(s+l)+1} = \sum_{k=1}^{[(s+l)+1/2]} X_k(s+l)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2(s+l)+1-2k}, l \geq 0$$

推论11.6.2. $[\sigma(s-l)\cdot\hat{p}]^{2s+1} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_k(s)[\sigma(s-l)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}; 0 \leq l \leq [s], s \geq \frac{1}{2}$

11.7 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2}$展开系数的同构性

推论11.7.1.

$$[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_k(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2-2k}[\Rightarrow][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2(s+l)+2} = \sum_{k=1}^{[(s+l)+1/2]} X_k(s+l)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2(s+l)+2-2k}, l \geq 0$$

推论11.7.2. $[\sigma(s-l)\cdot\hat{p}]^{2s+2} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} X_k(s)[\sigma(s-l)\cdot\hat{p}]^{2s+2-2k}; 0 \leq l \leq [s], s \geq \frac{1}{2}$

推论11.7.3.
$$\begin{cases}[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^{2n} = \sum_{k=1}^{n} X_k(n-\frac{1}{2})[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^{2n-2k}, [\frac{1}{2}\sigma(1)\cdot\hat{p}]^{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} X_k(n-\frac{1}{2})[\frac{1}{2}\sigma(1)\cdot\hat{p}]^{2n+1-2k}, n \geq 1 \\ [2\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} X_k(n)[2\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^{2n+1-2k}, [\sigma(1)\cdot\hat{p}]^{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} X_k(n)[\sigma(1)\cdot\hat{p}]^{2n+1-2k}, n \geq 1\end{cases}$$

12 $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}$低阶展开系数的同构性

12.1 一个重要定理及其推论

定理12.1.1. $z^{2s+l} = \sum_{k=0}^{2s} B_k^l(s) z^k, l \geq 1 \Rightarrow e^{\rho z} = \sum_{k=0}^{2s} A_k(s,\rho)(\rho z)^k, A_k(s,\rho) := \frac{1}{k!} + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\rho^{2s+l-k}}{(2s+l)!} B_k^l(s)$

证明: $z^{2s+l} = \sum_{k=0}^{2s} B_k^l(s) z^k, l \geq 1$

$$\Rightarrow e^{\rho z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{2s} \frac{\rho^k}{k!} z^k + \sum_{k=2s+1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k!} z^k$$
$$= \sum_{k=0}^{2s} \frac{\rho^k}{k!} z^k + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\rho^{2s+l}}{(2s+l)!} z^{2s+l} = \sum_{k=0}^{2s} \frac{\rho^k}{k!} z^k + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\rho^{2s+l}}{(2s+l)!} \sum_{k=0}^{2s} B_k^l(s) z^k$$
$$= \sum_{k=0}^{2s} [\frac{1}{k!} + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\rho^{2s+l-k}}{(2s+l)!} B_k^l(s)](\rho z)^k = \sum_{k=0}^{2s} A_k(s,\rho)(\rho z)^k, A_k(s,\rho) := \frac{1}{k!} + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\rho^{2s+l-k}}{(2s+l)!} B_k^l(s)$$ □

12.2 $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}$低阶展开系数的同构性

推论12.2.1. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)} = \sum_{k=0}^{2s} A_k(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)]^k, A_k(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2}) = \frac{1}{k!} + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{\vec{\vartheta}^2})^{2s+l-k}}{(2s+l)!} B_k^l(s); s \geq \frac{1}{2}$

推论12.2.2. $[\sigma(s-s')\cdot\hat{p}]^{2s+l} = \sum_{k=1}^{[s+1/2]} B_k^l(s)[\sigma(s-s')\cdot\hat{p}]^k, l \geq 1$

推论12.2.3. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-s')} = \sum_{k=0}^{2s} A_k(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-s')]^k, A_k(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2}) = \frac{1}{k!} + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{\vec{\vartheta}^2})^{2s+l-k}}{(2s+l)!} B_k^l(s); 0 \leq s' \leq s - \frac{1}{2}$

12.3 $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(n-\frac{1}{2})}$多项式展开系数之间的关系

定理12.3.1. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(\frac{1}{2})}=\sum\limits_{k=0}^{2n-1}A_k(n-\frac{1}{2},\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(\frac{1}{2})]^k;n\geq 1$

推论12.3.1.

$$\begin{cases}e^{\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}=\sum\limits_{k=0}^{2n-1}\frac{A_k(n-\frac{1}{2},\sqrt{\vec{\vartheta}^2})}{2^k}[\sqrt{\vec{\vartheta}^2}]^k\\ e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}=\sum\limits_{k=0}^{2n-1}\frac{A_k(n-\frac{1}{2},\sqrt{\vec{\vartheta}^2})}{2^k}[-\sqrt{\vec{\vartheta}^2}]^k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}cosh\frac{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{2}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{A_{2i}(n-\frac{1}{2},\sqrt{\vec{\vartheta}^2})}{2^{2i}}[\sqrt{\vec{\vartheta}^2}]^{2i}\\ sinh\frac{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{2}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{A_{2i+1}(n-\frac{1}{2},\sqrt{\vec{\vartheta}^2})}{2^{2i+1}}[\sqrt{\vec{\vartheta}^2}]^{2i+1}\end{cases}$$

12.4 $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(n)}$多项式展开系数之间的关系

定理12.4.1. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(1)}=\sum\limits_{k=0}^{2n}A_k(n,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(1)]^k,e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma}=\sum\limits_{k=0}^{2s}A_k(n,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})(\vec{\vartheta}\cdot\sigma)^k;n\geq 1$

推论12.4.1.

$$\begin{cases}e^{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}=\sum\limits_{k=0}^{2n}A_k(n,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\sqrt{\vec{\vartheta}^2}]^k\\ A_0(n)=1\\ e^{-\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}=\sum\limits_{k=0}^{2n}A_k(n,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[-\sqrt{\vec{\vartheta}^2}]^k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}cosh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}=\sum\limits_{i=0}^{n}A_{2i}(n,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\sqrt{\vec{\vartheta}^2}]^{2i}\\ A_0(n)=1\\ sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}A_{2i+1}(n,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\sqrt{\vec{\vartheta}^2}]^{2i+1}\end{cases}$$

推论12.4.2.

$$\begin{cases}e^{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}=\sum\limits_{k=0}^{2n}A_k(n,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\sqrt{\vec{\vartheta}^2}]^k\\ e^{-\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}=\sum\limits_{k=0}^{2n}A_k(n,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[-\sqrt{\vec{\vartheta}^2}]^k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}cosh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}=\sum\limits_{i=0}^{n}A_{2i}(n,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\sqrt{\vec{\vartheta}^2}]^{2i}\\ sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}A_{2i+1}(n,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\sqrt{\vec{\vartheta}^2}]^{2i+1}\end{cases}$$

12.5 $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}$泰勒展开系数的相等性

定理12.5.1. $\lim\limits_{s\to+\infty}A_k(s,\sqrt{\vec{\vartheta}^2})=\frac{1}{k!},e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s)]^k$

13 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1}$低阶展开的各种验证

13.1 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1}$各种低阶展开系数

推论13.1.1.

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}(n-\frac{1}{2})^0&(n-\frac{1}{2})^2&\cdots&(n-\frac{1}{2})^{2n-4}&(n-\frac{1}{2})^{2n-2}\\(n-\frac{3}{2})^0&(n-\frac{3}{2})^2&\cdots&(n-\frac{3}{2})^{2n-4}&(n-\frac{3}{2})^{2n-2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(\frac{3}{2})^0&(\frac{3}{2})^2&\cdots&(\frac{3}{2})^{2n-4}&(\frac{3}{2})^{2n-2}\\(\frac{1}{2})^0&(\frac{1}{2})^2&\cdots&(\frac{1}{2})^{2n-4}&(\frac{1}{2})^{2n-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_n(n-\frac{1}{2})\\\cdots\\X_2(n-\frac{1}{2})\\X_1(n-\frac{1}{2})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(n-\frac{1}{2})^{2n}\\(n-\frac{3}{2})^{2n}\\\cdots\\(\frac{3}{2})^{2n}\\(\frac{1}{2})^{2n}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}X_n(n-\frac{1}{2})\\\cdots\\X_2(n-\frac{1}{2})\\X_1(n-\frac{1}{2})\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}(-1)^{-n}[C^n_{\{(1/2)^2,\cdots,(n-1/2)^2\}}]\\\cdots\\(-1)^{-2}[C^2_{\{(1/2)^2,\cdots,(n-1/2)^2\}}]\\(-1)^{-1}[C^1_{\{(1/2)^2,\cdots,(n-1/2)^2\}}]\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}(n-\frac{1}{2})^{2n-2}&(n-\frac{1}{2})^{2n-4}&\cdots&(n-\frac{1}{2})^2&(n-\frac{1}{2})^0\\(n-\frac{3}{2})^{2n-2}&(n-\frac{3}{2})^{2n-4}&\cdots&(n-\frac{3}{2})^2&(n-\frac{3}{2})^0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(\frac{3}{2})^{2n-2}&(\frac{3}{2})^{2n-4}&\cdots&(\frac{3}{2})^2&(\frac{3}{2})^0\\(\frac{1}{2})^{2n-2}&(\frac{1}{2})^{2n-4}&\cdots&(\frac{1}{2})^2&(\frac{1}{2})^0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1(n-\frac{1}{2})\\X_2(n-\frac{1}{2})\\\cdots\\X_n(n-\frac{1}{2})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(n-\frac{1}{2})^{2n}\\(n-\frac{3}{2})^{2n}\\\cdots\\(\frac{3}{2})^{2n}\\(\frac{1}{2})^{2n}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}X_1(n-\frac{1}{2})\\X_2(n-\frac{1}{2})\\\cdots\\X_n(n-\frac{1}{2})\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}(-1)^{-1}[C^1_{\{(1/2)^2,\cdots,(n-1/2)^2\}}]\\(-1)^{-2}[C^2_{\{(1/2)^2,\cdots,(n-1/2)^2\}}]\\\cdots\\(-1)^{-n}[C^n_{\{(1/2)^2,\cdots,(n-1/2)^2\}}]\end{bmatrix}\end{cases}$$

推论13.1.2.

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}n^0&n^2&\cdots&n^{2n-4}&n^{2n-2}\\(n-1)^0&(n-1)^2&\cdots&(n-1)^{2n-4}&(n-1)^{2n-2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2^0&2^2&\cdots&2^{2n-4}&2^{2n-2}\\1^0&1^2&\cdots&1^{2n-4}&1^{2n-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_n(n)\\\cdots\\X_2(n)\\X_1(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n^{2n}\\(n-1)^{2n}\\\cdots\\2^{2n}\\1^{2n}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}X_n(n)\\\cdots\\X_2(n)\\X_1(n)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}(-1)^{-n}[C^n_{\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}}]\\\cdots\\(-1)^{-2}[C^2_{\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}}]\\(-1)^{-1}[C^1_{\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}}]\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}n^{2n-2}&n^{2n-4}&\cdots&n^2&n^0\\(n-1)^{2n-2}&(n-1)^{2n-4}&\cdots&(n-1)^2&(n-1)^0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2^{2n-2}&2^{2n-4}&\cdots&2^2&2^0\\1^{2n-2}&1^{2n-4}&\cdots&1^2&1^0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1(n)\\X_2(n)\\\cdots\\X_n(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n^{2n}\\(n-1)^{2n}\\\cdots\\2^{2n}\\1^{2n}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}X_1(n)\\X_2(n)\\\cdots\\X_n(n)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}(-1)^{-1}[C^1_{\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}}]\\(-1)^{-2}[C^2_{\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}}]\\\cdots\\(-1)^{-n}[C^n_{\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}}]\end{bmatrix}\end{cases}$$

推论13.1.3.

$$\begin{cases}\begin{bmatrix} s^0 & s^2 & \cdots & s^{2[s-1/2]} \\ (s-1)^0 & (s-1)^2 & \cdots & (s-1)^{2[s-1/2]} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\frac{1}{2}|1)^0 & (\frac{1}{2}|1)^2 & \cdots & (\frac{1}{2}|1)^{2[s-1/2]}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{[s+1/2]}(s) \\ X_{[s-1/2]}(s) \\ \cdots \\ X_2(s) \\ X_1(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{2[s+1/2]} \\ (s-1)^{2[s+1/2]} \\ \cdots \\ (\frac{1}{2}|1)^{2[s+1/2]}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X_{[s+1/2]}(s) \\ X_{[s-1/2]}(s) \\ \cdots \\ X_2(s) \\ X_1(s)\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} (-1)^{-[s+1/2]}[C^{[s+1/2]}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}] \\ (-1)^{-[s-1/2]}[C^{[s-1/2]}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}] \\ \cdots \\ (-1)^{-2}[C^{2}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}] \\ (-1)^{-1}[C^{1}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}]\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} s^{2[s-1/2]} & \cdots & s^2 & s^0 \\ (s-1)^{2[s-1/2]} & \cdots & (s-1)^2 & (s-1)^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\frac{1}{2}|1)^{2[s-1/2]} & \cdots & (\frac{1}{2}|1)^2 & (\frac{1}{2}|1)^0\end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \cdots \\ X_{[s-1/2]}(s) \\ X_{[s+1/2]}(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{2[s+1/2]} \\ (s-1)^{2[s+1/2]} \\ \cdots \\ (\frac{1}{2}|1)^{2[s+1/2]}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \cdots \\ X_{[s-1/2]}(s) \\ X_{[s+1/2]}(s)\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} (-1)^{-1}[C^{1}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}] \\ (-1)^{-2}[C^{2}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}] \\ \cdots \\ (-1)^{-[s-1/2]}[C^{[s-1/2]}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}] \\ (-1)^{-[s+1/2]}[C^{[s+1/2]}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}]\end{bmatrix}\end{cases}$$

推论13.1.4.

$$\begin{cases}\begin{bmatrix} (2n-1)^{2n-2} & (2n-1)^{2n-4} & \cdots & (2n-1)^2 & (2n-1)^0 \\ (2n-3)^{2n-2} & (2n-3)^{2n-4} & \cdots & (2n-3)^2 & (2n-3)^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{2n-2} & 3^{2n-4} & \cdots & 3^2 & 3^0 \\ 1^{2n-2} & 1^{2n-4} & \cdots & 1^2 & 1^0\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^1X_1(n-\frac{1}{2}) \\ 4^2X_2(n-\frac{1}{2}) \\ \cdots \\ 4^nX_n(n-\frac{1}{2})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2n-1)^{2n} \\ (2n-3)^{2n} \\ \cdots \\ 3^{2n} \\ 1^{2n}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4^1X_1(n-\frac{1}{2}) \\ 4^2X_2(n-\frac{1}{2}) \\ \cdots \\ 4^nX_n(n-\frac{1}{2})\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} (-1)^1[C^1_{\{1^2,3^2,\cdots,(2n-1)^2\}}] \\ (-1)^2[C^2_{\{1^2,3^2,\cdots,(2n-1)^2\}}] \\ \cdots \\ (-1)^n[C^n_{\{1^2,3^2,\cdots,(2n-1)^2\}}]\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (2n)^{2n-2} & (2n)^{2n-4} & \cdots & (2n)^2 & (2n)^0 \\ (2n-2)^{2n-2} & (2n-2)^{2n-4} & \cdots & (2n-2)^2 & (2n-2)^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4^{2n-2} & 4^{2n-4} & \cdots & 4^2 & 4^0 \\ 2^{2n-2} & 2^{2n-4} & \cdots & 2^2 & 2^0\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^1X_1(n) \\ 4^2X_2(n) \\ \cdots \\ 4^nX_n(n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2n)^{2n} \\ (2n-2)^{2n} \\ \cdots \\ 4^{2n} \\ 2^{2n}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4^1X_1(n) \\ 4^2X_2(n) \\ \cdots \\ 4^nX_n(n)\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} (-1)^1[C^1_{\{2^2,4^2,\cdots,(2n)^2\}}] \\ (-1)^2[C^2_{\{2^2,4^2,\cdots,(2n)^2\}}] \\ \cdots \\ (-1)^n[C^n_{\{2^2,4^2,\cdots,(2n)^2\}}]\end{bmatrix}\end{cases}$$

推论13.1.5.

$$\begin{bmatrix} (2s)^{2[s-1/2]} & \cdots & (2s)^2 & (2s)^0 \\ (2s-2)^{2[s-1/2]} & \cdots & (2s-2)^2 & (2s-2)^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1|2)^{2[s-1/2]} & \cdots & (1|2)^2 & (1|2)^0\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^1X_1(s) \\ 4^2X_2(s) \\ \cdots \\ 4^{[s+1/2]}X_{[s+1/2]}(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2s)^{2[s+1/2]} \\ (2s-2)^{2[s+1/2]} \\ \cdots \\ (1|2)^{2[s+1/2]}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4^1X_1(s) \\ 4^2X_2(s) \\ \cdots \\ 4^{[s+1/2]}X_{[s+1/2]}(s)\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} (-1)^1[C^1_{\{(1|2)^2,\cdots,(2s)^2\}}] \\ (-1)^2[C^2_{\{(1|2)^2,\cdots,(2s)^2\}}] \\ \cdots \\ (-1)^{[s+1/2]}[C^{[s+1/2]}_{\{(1|2)^2,\cdots,(2s)^2\}}]\end{bmatrix}$$

13.2 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1}$低阶展开系数的第四种解法

定理13.2.1. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1}=\sum\limits_{k=0}^{2s}B_k(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k=-\sum\limits_{k=0}^{2s}(2s-k)\%2(-1)^{[s+1/2]-[k/2]}C^{[s+1/2]-[k/2]}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k$

证明: $\sum\limits_{k=0}^{2s}B_k(s)h^k=h^{2s+1},h=s,\cdots,-s$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} s^0 & s^1 & \cdots & s^{2s-1} & s^{2s} \\ (s-1)^0 & (s-1)^1 & \cdots & (s-1)^{2s-1} & (s-1)^{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-s)^0 & (1-s)^1 & \cdots & (1-s)^{2s-1} & (1-s)^{2s} \\ (-s)^0 & (-s)^1 & \cdots & (-s)^{2s-1} & (-s)^{2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0(s) \\ B_1(s) \\ \cdots \\ B_{2s-1}(s) \\ B_{2s}(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (s)^{2s+1} \\ (s-1)^{2s+1} \\ \cdots \\ (1-s)^{2s+1} \\ (-s)^{2s+1}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^0 & s^1 & \cdots & s^{2s-1} & s^{2s} \\ (s-1)^0 & (s-1)^1 & \cdots & (s-1)^{2s-1} & (s-1)^{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-s)^0 & (1-s)^1 & \cdots & (1-s)^{2s-1} & (1-s)^{2s} \\ (-s)^0 & (-s)^1 & \cdots & (-s)^{2s-1} & (-s)^{2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0(s) \\ B_1(s) \\ \cdots \\ B_{2s-1}(s) \\ B_{2s}(s)\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s)^{2s+1} \\ (s-1)^{2s+1} \\ \cdots \\ (1-s)^{2s+1} \\ (-s)^{2s+1}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix} s^0 & 0 & s^2 & 0 & \cdots & \frac{1}{2}[1+(-1)^{2s}]s^{2s} \\ (s-1)^0 & 0 & (s-1)^2 & 0 & \cdots & \frac{1}{2}[1+(-1)^{2s}](s-1)^{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & (s-1)^1 & 0 & (s-1)^3 & \cdots & \frac{1}{2}[1-(-1)^{2s}](s-1)^{2s} \\ 0 & s^1 & 0 & s^3 & \cdots & \frac{1}{2}[1-(-1)^{2s}]s^{2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0(s) \\ B_1(s) \\ \cdots \\ B_{2s-1}(s) \\ B_{2s}(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}[1+(-1)^{2s+1}]s^{2s+1} \\ \frac{1}{2}[1+(-1)^{2s+1}](s-1)^{2s+1} \\ \cdots \\ \frac{1}{2}[1-(-1)^{2s+1}](s-1)^{2s+1} \\ \frac{1}{2}[1-(-1)^{2s+1}]s^{2s+1}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix} s^0 & s^2 & \cdots & s^{2[s]} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (s-1)^0 & (s-1)^2 & \cdots & (s-1)^{2[s]} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (s-1)^1 & (s-1)^3 & \cdots & (s-1)^{2[s-1/2]+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s^1 & s^3 & \cdots & s^{2[s-1/2]+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0(s) \\ B_2(s) \\ \cdots \\ B_{2[s]}(s) \\ B_1(s) \\ B_3(s) \\ \cdots \\ B_{2[s-1/2]+1}(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}[1+(-1)^{2s+1}]s^{2s+1} \\ \frac{1}{2}[1+(-1)^{2s+1}](s-1)^{2s+1} \\ \cdots \\ \frac{1}{2}[1-(-1)^{2s+1}](s-1)^{2s+1} \\ \frac{1}{2}[1-(-1)^{2s+1}]s^{2s+1}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix} n^0 & n^2 & \cdots & n^{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (n-1)^0 & (n-1)^2 & \cdots & (n-1)^{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1^0 & 1^2 & \cdots & 1^{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0^0=1 & 0^2 & \cdots & 0^{2n} & 0^1 & 0^3 & \cdots & 0^{2n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1^1 & 1^3 & \cdots & 1^{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (n-1)^1 & (n-1)^3 & \cdots & (n-1)^{2n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n^1 & n^3 & \cdots & n^{2n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0(n) \\ B_2(n) \\ \cdots \\ B_{2n}(n) \\ B_1(n) \\ B_3(n) \\ \cdots \\ B_{2n-1}(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0^{2n+1} \\ 1^{2n+1} \\ \cdots \\ (n-1)^{2n+1} \\ n^{2n+1}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (n-\frac{1}{2})^0 & (n-\frac{1}{2})^2 & \cdots & (n-\frac{1}{2})^{2n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (n-\frac{3}{2})^0 & (n-\frac{3}{2})^2 & \cdots & (n-\frac{3}{2})^{2n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\frac{1}{2})^0 & (\frac{1}{2})^2 & \cdots & (\frac{1}{2})^{2n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (\frac{1}{2})^1 & (\frac{1}{2})^3 & \cdots & (\frac{1}{2})^{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (n-\frac{3}{2})^1 & (n-\frac{3}{2})^3 & \cdots & (n-\frac{3}{2})^{2n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (n-\frac{1}{2})^1 & (n-\frac{1}{2})^3 & \cdots & (n-\frac{1}{2})^{2n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0(n-\frac{1}{2}) \\ B_2(n-\frac{1}{2}) \\ \cdots \\ B_{2n-2}(n-\frac{1}{2}) \\ B_1(n-\frac{1}{2}) \\ B_3(n-\frac{1}{2}) \\ \cdots \\ B_{2n-1}(n-\frac{1}{2})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (n-\frac{1}{2})^{2n} \\ (n-\frac{3}{2})^{2n} \\ \cdots \\ (\frac{1}{2})^{2n} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} (n-\frac{1}{2})^0 & (n-\frac{1}{2})^2 & \cdots & (n-\frac{1}{2})^{2n-2} & \\ (n-\frac{3}{2})^0 & (n-\frac{3}{2})^2 & \cdots & (n-\frac{3}{2})^{2n-2} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\frac{3}{2})^0 & (\frac{3}{2})^2 & \cdots & (\frac{3}{2})^{2n-2} & \\ (\frac{1}{2})^0 & (\frac{1}{2})^2 & \cdots & (\frac{1}{2})^{2n-2} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0(n-\frac{1}{2}) \\ B_2(n-\frac{1}{2}) \\ \cdots \\ B_{2n-4}(n-\frac{1}{2}) \\ B_{2n-2}(n-\frac{1}{2}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (n-\frac{1}{2})^{2n} \\ (n-\frac{3}{2})^{2n} \\ \cdots \\ (\frac{3}{2})^{2n} \\ (\frac{1}{2})^{2n} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} n^0 & n^2 & \cdots & n^{2n-2} \\ (n-1)^0 & (n-1)^2 & \cdots & (n-1)^{2n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^0 & 2^2 & \cdots & 2^{2n-2} \\ 1^0 & 1^2 & \cdots & 1^{2n-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1(n) \\ B_3(n) \\ \cdots \\ B_{2n-3}(s) \\ B_{2n-1}(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n^{2n} \\ (n-1)^{2n} \\ \cdots \\ 2^{2n} \\ 1^{2n} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} B_0(n-\frac{1}{2}) \\ B_1(n-\frac{1}{2}) \\ B_2(n-\frac{1}{2}) \\ B_3(n-\frac{1}{2}) \\ \cdots \\ B_{2n-1}(n-\frac{1}{2}) \\ B_{2n}(n-\frac{1}{2}) \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} (-1)^n[C^n_{\{(1/2)^2,\cdots,(n-1/2)^2\}}] \\ 0 \\ (-1)^{n-1}[C^{n-1}_{\{(1/2)^2,\cdots,(n-1/2)^2\}}] \\ 0 \\ \cdots \\ (-1)^2[C^2_{\{(1/2)^2,\cdots,(n-1/2)^2\}}] \\ 0 \\ (-1)^1[C^1_{\{(1/2)^2,\cdots,(n-1/2)^2\}}] \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} B_0(n) \\ B_1(n) \\ B_2(n) \\ B_3(n) \\ \cdots \\ B_{2n-3}(n) \\ B_{2n-2}(n) \\ B_{2n-1}(n) \\ B_{2n}(n) \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 0 \\ (-1)^n[C^n_{\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}}] \\ 0 \\ (-1)^{n-1}[C^{n-1}_{\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}}] \\ 0 \\ \cdots \\ (-1)^2[C^2_{\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}}] \\ 0 \\ (-1)^1[C^1_{\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}}] \\ 0 \end{bmatrix}
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix} B_0(s) \\ B_1(s) \\ \cdots \\ B_k(s) \\ \cdots \\ B_{2s-1}(s) \\ B_{2s}(s) \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} (2s)\%2(-1)^{[s+1/2]}[C^{[s+1/2]}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}] \\ (2s-1)\%2(-1)^{[s+1/2]}[C^{[s+1/2]}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}] \\ \cdots \\ (2s-k)\%2(-1)^{[s+1/2]-[k/2]}C^{[s+1/2]-[k/2]}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}} \\ \cdots \\ (1)\%2(-1)^1[C^1_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}] \\ (0)\%2(-1)^1[C^1_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}] \end{bmatrix},B_k(s)=-(2s-k)\%2(-1)^{[s+1/2]-[k/2]}C^{[s+1/2]-[k/2]}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}$$

$$\Rightarrow[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1}=\sum_{k=0}^{2s}B_k(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k=-\sum_{k=0}^{2s}(2s-k)\%2(-1)^{[s+1/2]-[k/2]}C^{[s+1/2]-[k/2]}_{\{(1/2|1)^2,\cdots,s^2\}}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k \qquad \square$$

13.3 展开系数求解的关键

推论13.3.1. $\begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^0 & (\frac{1}{2})^1 \\ (-\frac{1}{2})^0 & (-\frac{1}{2})^1 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

推论13.3.2. $\begin{bmatrix} 1^0 & 1^1 & 1^2 \\ 0^0 & 0^1 & 0^2 \\ (-1)^0 & (-1)^1 & (-1)^2 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2!}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

推论13.3.3. $\begin{bmatrix} (\frac{3}{2})^0 & (\frac{3}{2})^1 & (\frac{3}{2})^2 & (\frac{3}{2})^3 \\ (\frac{1}{2})^0 & (\frac{1}{2})^1 & (\frac{1}{2})^2 & (\frac{1}{2})^3 \\ (-\frac{1}{2})^0 & (-\frac{1}{2})^1 & (-\frac{1}{2})^2 & (-\frac{1}{2})^3 \\ (-\frac{3}{2})^0 & (-\frac{3}{2})^1 & (-\frac{3}{2})^2 & (-\frac{3}{2})^3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{24} & \frac{9}{8} & -\frac{9}{8} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

推论13.3.4. $\begin{bmatrix} 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 1^0 & 1^1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ 0^0 & 0^1 & 0^2 & 0^3 & 0^4 \\ (-1)^0 & (-1)^1 & (-1)^2 & (-1)^3 & (-1)^4 \\ (-2)^0 & (-2)^1 & (-2)^2 & (-2)^3 & (-2)^4 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{4!}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ -2 & 16 & 0 & -16 & 2 \\ -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{24} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$

推论13.3.5. $\begin{bmatrix} (\frac{5}{2})^0 & (\frac{5}{2})^1 & (\frac{5}{2})^2 & (\frac{5}{2})^3 & (\frac{5}{2})^4 & (\frac{5}{2})^5 \\ (\frac{3}{2})^0 & (\frac{3}{2})^1 & (\frac{3}{2})^2 & (\frac{3}{2})^3 & (\frac{3}{2})^4 & (\frac{3}{2})^5 \\ (\frac{1}{2})^0 & (\frac{1}{2})^1 & (\frac{1}{2})^2 & (\frac{1}{2})^3 & (\frac{1}{2})^4 & (\frac{1}{2})^5 \\ (-\frac{1}{2})^0 & (-\frac{1}{2})^1 & (-\frac{1}{2})^2 & (-\frac{1}{2})^3 & (-\frac{1}{2})^4 & (-\frac{1}{2})^5 \\ (-\frac{3}{2})^0 & (-\frac{3}{2})^1 & (-\frac{3}{2})^2 & (-\frac{3}{2})^3 & (-\frac{3}{2})^4 & (-\frac{3}{2})^5 \\ (-\frac{5}{2})^0 & (-\frac{5}{2})^1 & (-\frac{5}{2})^2 & (-\frac{5}{2})^3 & (-\frac{5}{2})^4 & (-\frac{5}{2})^5 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{96}\begin{bmatrix} \frac{9}{8} & -\frac{75}{8} & \frac{225}{4} & \frac{225}{4} & -\frac{75}{8} & \frac{9}{8} \\ \frac{9}{20} & -\frac{25}{4} & \frac{225}{2} & -\frac{225}{2} & \frac{25}{4} & -\frac{9}{20} \\ -5 & 39 & -34 & -34 & 39 & -5 \\ -2 & 26 & -68 & 68 & -26 & 2 \\ 2 & -6 & 4 & 4 & -6 & 2 \\ \frac{4}{5} & -4 & -8 & 8 & 4 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$

推论13.3.6. $\begin{bmatrix} 3^0 & 3^1 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 & 3^6 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 \\ 1^0 & 1^1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 & 1^5 & 1^6 \\ 0^0 & 0^1 & 0^2 & 0^3 & 0^4 & 0^5 & 0^6 \\ (-1)^0 & (-1)^1 & (-1)^2 & (-1)^3 & (-1)^4 & (-1)^5 & (-1)^6 \\ (-2)^0 & (-2)^1 & (-2)^2 & (-2)^3 & (-2)^4 & (-2)^5 & (-2)^6 \\ (-3)^0 & (-3)^1 & (-3)^2 & (-3)^3 & (-3)^4 & (-3)^5 & (-3)^6 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{60} & -\frac{9}{60} & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{9}{60} & -\frac{1}{60} \\ \frac{1}{80} & -\frac{7}{60} & \frac{41}{48} & -\frac{3}{2} & \frac{41}{48} & -\frac{7}{60} & \frac{1}{80} \\ -\frac{1}{48} & \frac{1}{6} & -\frac{13}{48} & 0 & \frac{13}{48} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{48} \\ -\frac{1}{72} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{19}{36} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{72} \\ \frac{1}{240} & -\frac{1}{60} & \frac{1}{48} & 0 & -\frac{1}{48} & \frac{1}{60} & -\frac{1}{240} \\ \frac{1}{720} & -\frac{1}{120} & \frac{1}{48} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{48} & -\frac{1}{120} & \frac{1}{720} \end{bmatrix}$

推论13.3.7. $\begin{bmatrix} s^0 & s^2 \\ (s-1)^0 & (s-1)^2 \end{bmatrix}^{-1}=-\frac{1}{2s-1}\begin{bmatrix} (s-1)^2 & -s^2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

推论13.3.8.

$$\begin{bmatrix} s^0 & s^2 & s^4 \\ (s-1)^0 & (s-1)^2 & (s-1)^4 \\ (s-2)^0 & (s-2)^2 & (s-2)^4 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2(2s-1)(2s-2)(2s-3)} \begin{bmatrix} -(s-1)^2(s-2)^2(2s-3) & s^2(s-2)^2 2(2s-2) & -s^2(s-1)^2(2s-1) \\ [(s-1)^2+(s-2)^2](2s-3) & -[s^2+(s-2)^2]2(2s-2) & [s^2+(s-1)^2](2s-1) \\ -(2s-3) & 2(2s-2) & -(2s-1) \end{bmatrix}$$

推论13.3.9. $\det \begin{bmatrix} s^0 & s^2 \\ (s-1)^0 & (s-1)^2 \end{bmatrix} = -(2s-1), \det \begin{bmatrix} s^0 & s^2 & s^4 \\ (s-1)^0 & (s-1)^2 & (s-1)^4 \\ (s-2)^0 & (s-2)^2 & (s-2)^4 \end{bmatrix} = -2(2s-1)(2s-2)(2s-3)$

$$\det \begin{bmatrix} s^0 & s^2 & s^4 & s^6 \\ (s-1)^0 & (s-1)^2 & (s-1)^4 & (s-1)^6 \\ (s-2)^0 & (s-2)^2 & (s-2)^4 & (s-2)^6 \\ (s-3)^0 & (s-3)^2 & (s-3)^4 & (s-3)^6 \end{bmatrix} = 12(2s-3)(2s-1)(2s-2)(2s-3)(2s-4)(2s-5)$$

推论13.3.10.

$$\begin{bmatrix} s^k & s^{k+2} & s^{k+4} \\ (s-1)^k & (s-1)^{k+2} & (s-1)^{k+4} \\ (s-2)^k & (s-2)^{k+2} & (s-2)^{k+4} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} s^0 & s^2 & s^4 \\ (s-1)^0 & (s-1)^2 & (s-1)^4 \\ (s-2)^0 & (s-2)^2 & (s-2)^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s^{-k} & 0 & 0 \\ 0 & (s-1)^{-k} & 0 \\ 0 & 0 & (s-2)^{-k} \end{bmatrix}$$

13.4 $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1}$低阶展开的特例验证

定义13.4.1. $a_i^2 = 1$

性质13.4.1. $(a_1)^2 = 1, [\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^4 = \frac{1}{4}$

性质13.4.2. $(a_1+a_2)^3 = 4(a_1+a_2), [\sigma(1)\cdot\hat{p}]^3 = [\sigma(1)\cdot\hat{p}]$

推论13.4.1.

$$\begin{bmatrix} 3^2 & 3^0 \\ 1^2 & 1^0 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 3^4 \\ 1^4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Y = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1^0 & -1^2 \\ -3^0 & 3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^4 \\ 1^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2+3^2 \\ -1^2 3^2 \end{bmatrix}$$

性质13.4.3. $(a_1+a_2+a_3)^4 = 10(a_1+a_2+a_3)^2 - 9, [\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{p}]^4 = \frac{5}{2}[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{p}]^2 - \frac{9}{16}$

推论13.4.2.

$$\begin{bmatrix} 4^2 & 4^0 \\ 2^2 & 2^0 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 4^4 \\ 2^4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Y = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2^0 & 2^2 \\ -4^0 & 4^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4^4 \\ 2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2+4^2 \\ -2^2 4^2 \end{bmatrix}$$

性质13.4.4. $(a_1+a_2+a_3+a_4)^5 = 20(a_1+a_2+a_3+a_4)^3 - 64(a_1+a_2+a_3+a_4), [\sigma(2)\cdot\hat{p}]^5 = 5[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^3 - 4[\sigma(2)\cdot\hat{p}]$

推论13.4.3.

$$\begin{bmatrix} 5^4 & 5^2 & 5^0 \\ 3^4 & 3^2 & 3^0 \\ 1^4 & 1^2 & 1^0 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 5^6 \\ 3^6 \\ 1^6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Y = \frac{1}{384}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -10 & 78 & -68 \\ 9 & -75 & 450 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5^6 \\ 3^6 \\ 1^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ -259 \\ 225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2+3^2+5^2 \\ -(1^2 3^2+3^2 5^2+5^2 1^2) \\ 1^2 3^2 5^2 \end{bmatrix}$$

性质13.4.5. $\begin{cases} (a_1+a_2+\cdot\cdot+a_5)^6 = 35(a_1+a_2+\cdot\cdot+a_5)^4 - 259(a_1+a_2+\cdot\cdot+a_5)^2 + 225 \\ [\sigma(\frac{5}{2})\cdot\hat{p}]^6 = \frac{35}{4}[\sigma(\frac{5}{2})\cdot\hat{p}]^4 - \frac{259}{16}[\sigma(\frac{5}{2})\cdot\hat{p}]^2 + \frac{225}{64} \end{cases}$

推论13.4.4.

$$\begin{bmatrix} 6^4 & 6^2 & 6^0 \\ 4^4 & 4^2 & 4^0 \\ 2^4 & 2^2 & 2^0 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 6^6 \\ 4^6 \\ 2^6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Y = \frac{1}{7680}\begin{bmatrix} 12 & -32 & 20 \\ -240 & 1280 & -1040 \\ 768 & -4608 & 11520 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6^6 \\ 4^6 \\ 2^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ -784 \\ 48^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2+4^2+6^2 \\ -(2^2 4^2+4^2 6^2+6^2 2^2) \\ 2^2 4^2 6^2 \end{bmatrix}$$

性质13.4.6. $\begin{cases} (a_1+a_2+\cdot\cdot+a_6)^7 = 56(a_1+a_2+\cdot\cdot+a_5)^5 - 784(a_1+a_2+\cdot\cdot+a_5)^3 + 2304(a_1+a_2+\cdot\cdot+a_5) \\ [\sigma(3)\cdot\hat{p}]^7 = 14[\sigma(3)\cdot\hat{p}]^5 - 49[\sigma(3)\cdot\hat{p}]^3 + 36[\sigma(3)\cdot\hat{p}] \end{cases}$

推论13.4.5.

$$\begin{bmatrix} 3^2 & 3^0 \\ 1^2 & 1^0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1^0 & -3^0 \\ -1^2 & 3^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4^2 & 4^0 \\ 2^2 & 2^0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2^0 & -4^0 \\ -2^2 & 4^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5^4 & 5^2 & 5^0 \\ 3^4 & 3^2 & 3^0 \\ 1^4 & 1^2 & 1^0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{384}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -10 & 78 & -68 \\ 9 & -75 & 450 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6^4 & 6^2 & 6^0 \\ 4^4 & 4^2 & 4^0 \\ 2^4 & 2^2 & 2^0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7680}\begin{bmatrix} 12 & -32 & 20 \\ -240 & 1280 & -1040 \\ 768 & -4608 & 11520 \end{bmatrix}$$

性质13.4.7. $(a_1+a_2+\cdot\cdot+a_7)^8 = 84(a_1+a_2+\cdot\cdot+a_5)^6 - 1974(a_1+a_2+\cdot\cdot+a_5)^4 + 12916(a_1+a_2+\cdot\cdot+a_5)^2 - 11025$

$84 = C_9^6 = 1^2+3^2+5^2+7^2, 1974 = 1^2 3^2 + 3^2 5^2 + 5^2 7^2 + 7^2 1^2 + 1^2 5^2 + 3^2 7^2$

$12916 = 3^2 5^2 7^2 + 5^2 7^2 1^2 + 1^2 3^2 5^2 + 1^2 3^2 7^2, 11025 = 1^2 3^2 5^2 7^2$

$[\sigma(\frac{7}{2})\cdot\hat{p}]^8 = 21[\sigma(\frac{7}{2})\cdot\hat{p}]^6 - \frac{987}{8}[\sigma(\frac{7}{2})\cdot\hat{p}]^4 + \frac{3229}{16}[\sigma(\frac{7}{2})\cdot\hat{p}]^2 - \frac{11025}{256}$

性质13.4.8. $(a_1+a_2+\cdot\cdot+a_8)^9$

$= 120(a_1+a_2+\cdot\cdot+a_8)^7 - 4368(a_1+a_2+\cdot\cdot+a_8)^5 + 52480(a_1+a_2+\cdot\cdot+a_8)^3 - 147456(a_1+a_2+\cdot\cdot+a_8)$

$120 = C_{10}^7 = 2^2+4^2+6^2+8^2, 4368 = 2^2 4^2 + 4^2 6^2 + 6^2 8^2 + 8^2 2^2 + 2^2 6^2 + 4^2 8^2$

$52480 = 4^2 6^2 8^2 + 6^2 8^2 2^2 + 2^2 4^2 6^2 + 2^2 4^2 8^2, 147456 = 2^2 4^2 6^2 8^2$

$[\sigma(4)\cdot\hat{p}]^9 = 30[\sigma(4)\cdot\hat{p}]^7 - 273[\sigma(4)\cdot\hat{p}]^5 + 820[\sigma(4)\cdot\hat{p}]^3 - 576[\sigma(4)\cdot\hat{p}]$

13.5 $[\sigma(s)\cdot\vec{p}]^{2s+1+m}$低阶展开系数之间的关系

定义13.5.1. $X_k(s) := 0, k < 1 | k > [s+1/2]$

性质13.5.1. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1} = \sum\limits_{k=1}^{[s+1/2]} X_k(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}, n := [s+1/2]$

性质13.5.2. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2} = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+2-2k}$

性质13.5.3. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+3} = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+3-2k}$

$= X_1(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} X_{k+1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} X_1(s)X_k(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} X_{k+1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} [X_1(s)X_k(s) + X_{k+1}(s)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

性质13.5.4. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2n+5}$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} [X_1(s)X_k(s) + X_{k+1}(s)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+3-2k}$

$= [X_1^2(s) + X_2(s)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} [X_1(s)X_{k+1}(s) + X_{k+2}(s)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+3-2k}$

$= \sum\limits_{k=1}^{[s+1/2]} [X_1^2(s) + X_2(s)]X_k(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k} + \sum\limits_{k=1}^{n} [X_1(s)X_{k+1}(s) + X_{k+2}(s)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} \{[X_1^2(s) + X_2(s)]X_k(s) + X_1(s)X_{k+1}(s) + X_{k+2}(s)\}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

性质13.5.5. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2n+7}$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} [\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

$\{[X_1^3(s) + 2X_1(s)X_2(s) + X_3(s)]X_k(s) + [X_1^2(s) + X_2(s)]X_{k+1}(s) + X_1(s)X_{k+2}(s) + X_{k+3}(n)\}$

性质13.5.6. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2n+9}$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} [\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

$\{[X_1^4(s) + 3X_1^2(s)X_2(s) + 2X_1(s)X_3(s) + X_2^2(s) + X_4(s)]X_k(s)$

$+ [X_1^3(s) + 2X_1(s)X_2(s) + X_3(s)]X_{k+1}(s) + [X_1^2(s) + X_2(s)]X_{k+2}(s) + X_1(s)X_{k+3}(s) + X_{k+4}(n)\}$

性质13.5.7. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1+2m}$

$= \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=0}^{m} \{(l+1-m)X_1^{m-l}(s) + \sum\limits_{\sum_{i=1}^{n} ir_i}^{=m-l}\sum\limits_{i=1}^{n} r_i[X_1^{r_1}(s)X_2^{r_1}(s)\cdot\cdot X_n^{r_n}(s)]\}u(n-k-l)X_{k+l}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

$= \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=0}^{m|(n-k)} \{(l+1-m)X_1^{m-l}(s) + \sum\limits_{\sum_{i=1}^{n} ir_i}^{=m-l}\sum\limits_{i=1}^{n} r_i[X_1^{r_1}(s)X_2^{r_1}(s)\cdot\cdot X_n^{r_n}(s)]\}X_{k+l}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k}$

性质13.5.8. $[\sigma(s)\cdot\vec{p}]^{2s+1+2m}$

$= \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=0}^{m|(n-k)} \{(l+1-m)X_1^{m-l}(s) + \sum\limits_{\sum_{j=1}^{n} jr_j}^{=m-l}\sum\limits_{i=1}^{n} r_i[X_1^{r_1}(s)X_2^{r_1}(s)\cdot\cdot X_n^{r_n}(s)]\}X_{k+l}(s)(\vec{p}^2)^{k+m}[\sigma(s)\cdot\vec{p}]^{2s+1-2k}$

性质13.5.9. $[\sigma(s)\cdot\vec{p}]^{2s+2+2m}$

$= \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=0}^{m|(n-k)} \{(l+1-m)X_1^{m-l}(s) + \sum\limits_{\sum_{j=1}^{n} jr_j}^{=m-l}\sum\limits_{i=1}^{n} r_i[X_1^{r_1}(s)X_2^{r_1}(s)\cdot\cdot X_n^{r_n}(s)]\}X_{k+l}(s)(\vec{p}^2)^{k+m}[\sigma(s)\cdot\vec{p}]^{2s+2-2k}$

性质13.5.10. $[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\vec{p}]^{2+2m} = X_1^{1+m}(\frac{1}{2})(\vec{p}^2)^{1+m}[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\vec{p}]^0, [\sigma(\frac{1}{2})\cdot\vec{p}]^{3+2m} = X_1^{1+m}(\frac{1}{2})(\vec{p}^2)^{1+m}[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\vec{p}]^1$

性质13.5.11. $[\sigma(1)\cdot\vec{p}]^{3+2m} = X_1^{1+m}(1)(\vec{p}^2)^{1+m}[\sigma(1)\cdot\vec{p}]^1, [\sigma(1)\cdot\vec{p}]^{4+2m} = X_1^{1+m}(1)(\vec{p}^2)^{1+m}[\sigma(1)\cdot\vec{p}]^2$

13.6 具体求解验证

推论13.6.1. $[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^2=\frac{(-1)^2}{1!}\sum_{l=0}^{0}\sum_{h=1/2}^{-1/2}(-1)^{1/2+h}C_{\{\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot\}}^{2l+1}C_1^{1/2+h}h^2[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]^{-2l}=\frac{1}{4}$

推论13.6.2. $[\sigma(1)\cdot\hat{p}]^3=\frac{(-1)^3}{2!}\sum_{l=0}^{0}\sum_{h=1}^{-1}(-1)^{1+h}C_{\{\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot\}}^{2l+1}C_2^{1+h}h^3[\sigma(1)\cdot\hat{p}]^{1-2l}=[\sigma(1)\cdot\hat{p}]$

推论13.6.3. $[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{p}]^4=\frac{(-1)^4}{3!}\sum_{l=0}^{1}\sum_{h=3/2}^{-3/2}(-1)^{3/2+h}C_{\{\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot\}}^{2l+1}C_3^{3/2+h}h^4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{p}]^{2-2l}$
$=\frac{2}{3!}[(\frac{3}{2})^5-3(\frac{1}{2})^5][\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{p}]^2+\frac{2}{3!}[-\frac{3}{8}(\frac{3}{2})^4+\frac{27}{8}(\frac{1}{2})^4]=\frac{5}{2}[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{p}]^2-\frac{9}{16}$

推论13.6.4. $[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^5=\frac{(-1)^5}{4!}\sum_{l=0}^{1}\sum_{h=2}^{-2}(-1)^{2+h}C_{\{\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot\}}^{2l+1}C_4^{2+h}h^5[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^{3-2l}$
$=\frac{2}{4!}(2^6-4)[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{p}]^3+\frac{2}{4!}(-2^6+16)[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{p}]=5[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{p}]^3-4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{p}]$

推论13.6.5. $[\sigma(\frac{5}{2})\cdot\hat{p}]^6=\frac{(-1)^6}{5!}\sum_{l=0}^{2}\sum_{h=5/2}^{-5/2}(-1)^{5/2+h}C_{\{\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot\}}^{2l+1}C_5^{5/2+h}h^6[\sigma(\frac{5}{2})\cdot\hat{p}]^{4-2l}$
$=\frac{2}{5!}[(\frac{5}{2})^7-5(\frac{3}{2})^7+10(\frac{1}{2})^7][\sigma(\frac{5}{2})\cdot\hat{p}]^4+\frac{2}{5!}[(\frac{5}{2})^6-5(\frac{3}{2})^6+10(\frac{1}{2})^6][\sigma(\frac{5}{2})\cdot\hat{p}]^2+\frac{2}{5!}[(\frac{5}{2})^5-5(\frac{3}{2})^5+10(\frac{1}{2})^5](\frac{1}{2})^2(\frac{3}{2})^2(\frac{5}{2})^2$
$=\frac{35}{4}[\sigma(\frac{5}{2})\cdot\hat{p}]^4+???[\sigma(\frac{5}{2})\cdot\hat{p}]^2+\frac{225}{64}$

13.7 推理过程的梳理

首先有以下猜想，可以利用多项式展开定理和自然数拆分的方式加以证明，但只在低阶情形得到了严格证明，一般情形仍是猜想，真正没被严格证明的是这个猜想，其它均可严格加以证明。

猜想13.7.1. $[\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X_k(s)[\Omega(s)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k},\forall\hat{p},\forall s\geq\frac{1}{2}$

有了以上猜想后，一是可以通过线性代数方法直接求出$X_k(s)$；二是通过以上推理严格得到递推关系，并可以完全严格解出系数，进行一一比对可以得到一系列恒等式。以下两个同构性的推论，一是可以从以上猜想和系数完全推理出来；二是可以从高级表象变换技术推理，但不能具体推得系数。

推论13.7.1. $[\sigma(s-l)\cdot\hat{p}]^{2s+1}=\sum_{k=1}^{[s+1/2]}X_k(s)[\sigma(s-l)\cdot\hat{p}]^{2s+1-2k},l=0,1,\cdots,[s]$

推论13.7.2. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-l)}=\sum_{k=0}^{2s}A_k(s)[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-l)]^k,l=0,1,\cdots,[s]$

第十六章　自旋代数的数学分析

自我评述：为了进一步研究一般自旋粒子的物理内容，在本章节中我独自发展了自旋代数的数学方法，并以$\sigma(s;w)\times\sigma(s;w)=i\sigma(s;w)$为唯一前提条件，进行了一般的数学分析，为研究各种自旋粒子提供了又一个新的数学工具。

1 自旋-单位矢量算符的基本代数性质

1.1 $\sigma(s;w)$的基本前提性质

定义1.1.1. $\sigma(s;w)\times\sigma(s;w)=i\sigma(s;w),\sigma(s;1):=\sigma(s),\sigma^2(s;1)=\sigma^2(s)=s(s+1)$

引理1.1.1. $\sigma(s;w)\times\sigma(s;w)=i\sigma(s;w)\Rightarrow[\sigma_k(s;w),\sigma^2(s;w)]=0;k=x,y,z$

证明： $[\sigma_x(s;w),\sigma^2(s;w)]$

$$
\begin{aligned}
&=[\sigma_x(s;w),\sigma_x^2(s;w)+\sigma_y^2(s;w)+\sigma_z^2(s;w)]\\
&=[\sigma_x(s;w),\sigma_y^2(s;w)]+[\sigma_x(s;w),\sigma_z^2(s;w)]\\
&=[\sigma_x(s;w)\sigma_y^2(s;w)-\sigma_y^2(s;w)\sigma_x(s;w)]+[\sigma_x(s;w)\sigma_z^2(s;w)-\sigma_z^2(s;w)\sigma_x(s;w)]\\
&=[\sigma_x(s;w)\sigma_y^2(s;w)-\sigma_y(s;w)\sigma_x(s;w)\sigma_y(s;w)+\sigma_y(s;w)\sigma_x(s;w)\sigma_y(s;w)-\sigma_y^2(s;w)\sigma_x(s;w)]\\
&+[\sigma_x(s;w)\sigma_z^2(s;w)-\sigma_z(s;w)\sigma_x(s;w)\sigma_z(s;w)+\sigma_z(s;w)\sigma_x(s;w)\sigma_z(s;w)-\sigma_z^2(s;w)\sigma_x(s;w)]\\
&=[\sigma_x(s;w)\sigma_y(s;w)-\sigma_y(s;w)\sigma_x(s;w)]\sigma_y(s;w)+\sigma_y(s;w)[\sigma_x(s;w)\sigma_y(s;w)-\sigma_y(s;w)\sigma_x(s;w)]\\
&+[\sigma_x(s;w)\sigma_z(s;w)-\sigma_z(s;w)\sigma_x(s;w)]\sigma_z(s;w)+\sigma_z(s;w)[\sigma_x(s;w)\sigma_z(s;w)-\sigma_z(s;w)\sigma_x(s;w)]\\
&=[\sigma_x(s;w),\sigma_y(s;w)]\sigma_y(s;w)+\sigma_y(s;w)[\sigma_x(s;w),\sigma_y(s;w)]\\
&+[\sigma_x(s;w),\sigma_z(s;w)]\sigma_z(s;w)+\sigma_z(s;w)[\sigma_x(s;w),\sigma_z(s;w)]\\
&=i\sigma_z(s;w)\sigma_y(s;w)+i\sigma_y(s;w)\sigma_z(s;w)\\
&-i\sigma_y(s;w)\sigma_z(s;w)-i\sigma_z(s;w)\sigma_y(s;w)\\
&=0
\end{aligned}
$$

□

1.2 $\sigma(s;w),\vec{p}$的基本运算规则

性质1.2.1.
$$\begin{cases}\sigma(s;w)\times\vec{p}=[\sigma(s;w),i\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]=i\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]-[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]\sigma(s;w)\}\\ \vec{p}\times\sigma(s;w)=-[\sigma(s;w),i\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]=i\{[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]\sigma(s;w)-\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]\}\end{cases}$$

性质1.2.2.
$$\begin{cases}\sigma(s;w)\times\vec{p}=-\vec{p}\times\sigma(s;w)\\ \sigma(s;w)\times\sigma(s;w)=i\sigma(s;w)\end{cases}\quad\begin{cases}\sigma(s;w)\cdot\vec{p}=\vec{p}\cdot\sigma(s;w)\\ [\sigma(s;w),\sigma^2(s;w)]=0\end{cases}\quad\begin{cases}[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\cdot\vec{p}=0\\ \sigma(s;w)\cdot[\sigma(s;w)\times\vec{p}]=i\sigma(s;w)\cdot\vec{p}\\ [\vec{p}\times\sigma(s;w)]\cdot\sigma(s;w)=i\sigma(s;w)\cdot\vec{p}\end{cases}$$

性质1.2.3. $\sigma(s;w)\cdot\vec{p}=\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]-\sigma(s;w)\cdot[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]\sigma(s;w)$

性质1.2.4.
$$\begin{cases}[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\times\vec{p}=[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]\vec{p}-\sigma(s;w)(\vec{p}\cdot\vec{p})\\ \sigma(s;w)\times[\sigma(s;w)\times\vec{p}]=[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]\sigma(s;w)-\sigma^2(s;w)\vec{p}\\ [\vec{p}\times\sigma(s;w)]\times\sigma(s;w)=\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]-\sigma^2(s;w)\vec{p}\\ \sigma(s;w)\times\{\sigma(s;w)\times[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\}=\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]\sigma(s;w)\}-\sigma(s;w)\times\vec{p}\sigma^2(s;w)\end{cases}$$

性质1.2.5.
$$\begin{cases}\{[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\times\vec{p}\}\cdot\vec{p}=0\\ \{\sigma(s;w)\times[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\}\cdot\sigma(s;w)=0\\ \sigma(s;w)\cdot\{[\vec{p}\times\sigma(s;w)]\times\sigma(s;w)\}=0\end{cases}\quad\begin{cases}\vec{p}\cdot\{[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\times\vec{p}\}=0\\ \sigma(s;w)\cdot\{\sigma(s;w)\times[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\}=-\sigma(s;w)\cdot\vec{p}\\ \{[\vec{p}\times\sigma(s;w)]\times\sigma(s;w)\}\cdot\sigma(s;w)=-\sigma(s;w)\cdot\vec{p}\end{cases}$$

性质1.2.6. $$\begin{cases}\{[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\times\vec{p}\}\cdot\sigma(s;w)=[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]^2-\sigma^2(s;w)\vec{p}^2\\ \sigma(s;w)\cdot\{[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\times\vec{p}\}=[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]^2-\sigma^2(s;w)\vec{p}^2\\ \{\sigma(s;w)\times[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\}\cdot\vec{p}=[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]^2-\sigma^2(s;w)\vec{p}^2\\ \vec{p}\cdot\{[\vec{p}\times\sigma(s;w)]\times\sigma(s;w)\}=[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]^2-\sigma^2(s;w)\vec{p}^2\\ -[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\cdot[\sigma(s;w)\times\vec{p}]=[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]^2-\sigma^2(s;w)\vec{p}^2\end{cases}$$

==

性质1.2.7. $$\begin{cases}[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\times[\sigma(s;w)\times\vec{p}]=i[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]\vec{p}\\ \{[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\times[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\}\cdot\vec{p}=i[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]\vec{p}^2\\ \sigma(s;w)\cdot\{[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\times[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\}=i[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]^2\\ \{[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\times[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\}\cdot\sigma(s;w)=i[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]^2\end{cases}$$

性质1.2.8. $$\begin{cases}[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\times\{[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\times[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\}=i\{[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\times\vec{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]\\ \{[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\times[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\}\times[\sigma(s;w)\times\vec{p}]=-i[\sigma(s;w)\cdot\vec{p}]\{[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\times\vec{p}\}\\ [\sigma(s;w)\times\vec{p}]\cdot\{[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\times[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\}=0\\ \{[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\times[\sigma(s;w)\times\vec{p}]\}\cdot[\sigma(s;w)\times\vec{p}]=0\end{cases}$$

性质1.2.9. $$\begin{cases}\{[\sigma(s;w)\times\hat{p}]\times\hat{p}\}\times\vec{p}=-\sigma(s;w)\times\hat{p}\\ i^{2k-1}\hat{p}\cdot\{\sigma(s;w)\times\{\sigma(s;w)[\times\hat{p}|]^{2k-1}\}\}=i\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-\sigma^2(s;w)\}\\ i^{2k}\hat{p}\cdot\{\sigma(s;w)\times\{\sigma(s;w)[\times\hat{p}|]^{2k}\}\}=i\sigma(s;w)\cdot\hat{p}\end{cases}$$

2 基本展开式

2.1 $\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n$和$i^n[\hat{p}\times|]^n\sigma(s;w)$的两种展开式

2.1.1 $i^n\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n$和$i^n[\hat{p}\times|]^n\sigma(s;w)$的简单展开式和通项公式

性质2.1.1. $\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^1=\sigma(s;w)\times\hat{p},\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^2=[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\hat{p}-\sigma(s;w),\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^3=-\sigma(s;w)\times\hat{p}$

定理2.1.1. $k\geq 1$

$$i^n\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n=\begin{cases}i\sigma(s;w)\times\hat{p},n=2k-1\\ \sigma(s;w)-[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\hat{p},n=2k\end{cases},i^n[\hat{p}\times|]^n\sigma(s;w)=\begin{cases}i\hat{p}\times\sigma(s;w),n=2k-1\\ \sigma(s;w)-[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\hat{p},n=2k\end{cases}$$

推论2.1.1. $\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n=(-1)^n[\hat{p}\times|]^n\sigma(s;w),\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n|\cdot\hat{p}=(-1)^n\hat{p}\cdot|[\hat{p}\times|]^n\sigma(s;w)=0,n\geq 1$

推论2.1.2. $k\geq 1$

$$i^n\sigma(s;w)\cdot\{\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n\}=i^{-n}\{[\hat{p}\times|]^n\sigma(s;w)\}\cdot\sigma(s;w)=\begin{cases}-\sigma(s;w)\cdot\hat{p},n=2k-1\\ -\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-\sigma^2(s;w)\},n=2k\end{cases}$$

推论2.1.3. $n\geq 1$

$$i^n\sigma(s;w)\cdot\{\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n\}=i^{-n}\{[\hat{p}\times|]^n\sigma(s;w)\}\cdot\sigma(s;w)=-\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{2-n\%2}-(1-n\%2)\sigma^2(s;w)\}$$

推论2.1.4. $i^n\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n|\cdot\hat{p}=i^n\hat{p}\cdot|[\hat{p}\times|]^n\sigma(s;w)=0,n\geq 1$

推论2.1.5. $\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^{2k-1}=(-1)^{k+1}\sigma(s;w)\times\hat{p},\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^{2k}=(-1)^{k+1}\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\hat{p}-\sigma(s;w)\}$

$$\Rightarrow\begin{cases}i^{2k}\hat{p}\cdot\{\sigma(s;w)\times\{\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^{2k-1}\}\}=-\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-\sigma^2(s;w)\}\\ i^{2k+1}\hat{p}\cdot\{\sigma(s;w)\times\{\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^{2k}\}\}=-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}\end{cases}$$

2.1.2 $\sigma(s;w)[| \times \hat{p}]^n$和$i^n[\hat{p} \times |]^n\sigma(s;w)$的类二项式展开

性质2.1.2. $\sigma(s;w) \times \hat{p} = [\sigma(s;w), i\sigma(s;w) \cdot \hat{p}] = i\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}] - [\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]\sigma(s;w)\}$
$= i\{\sigma(s;w)A + B\sigma(s;w)\}$

性质2.1.3. $\sigma(s;w)| \times \hat{p} \times \hat{p} = i^2\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^2 - 2[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}] + [\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^2\sigma(s;w)\}$
$= i^2[\sigma(s;w)A^2 + 2B\sigma(s;w)A + B^2\sigma(s;w)] \simeq i^2[\sigma^{\frac{1}{2}}(s;w)A + B\sigma^{\frac{1}{2}}(s;w)]^2_{B[]A}$

定理2.1.2. $\sigma(s;w)[| \times \hat{p}]^n = i^n \sum\limits_{k=0}^{n} c_n^k[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n-k}, n \geq 1$

证明: 采用数学归纳法证明：

第一步：$i = 1$时成立，即$\sigma(s;w)[| \times \hat{p}]^1 = i^1 \sum\limits_{k=0}^{1} c_1^k[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{1-k}$

第二步：假设$i = n$时成立，即$\sigma(s;w)[| \times \hat{p}]^n = i^n \sum\limits_{k=0}^{n} c_n^k[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n-k}$

第三步：$i = n + 1$时

$\sigma(s;w)[| \times \hat{p}]^{n+1} = \sigma(s;w)[| \times \hat{p}]^n| \times \hat{p}$

$= i^n \sum\limits_{k=0}^{n} c_n^k[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k[\sigma(s;w) \times \hat{p}][\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n-k}$

$= i^{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} c_n^k[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}] - [\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]\sigma(s;w)\}[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n-k}$

$= i^{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} c_n^k[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n+1-k} + i^{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} c_n^k[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{k+1}\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n-k}$

$= i^{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} c_n^k[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n+1-k} + i^{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n+1} c_n^{k-1}[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n+1-k}$

$= i^{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n+1} c_n^k[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n+1-k} + i^{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n+1} c_n^{k-1}[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n+1-k}$

$= i^{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n+1} (c_n^k + c_n^{k-1})[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n+1-k}$

$= i^{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n+1} c_{n+1}^k[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n+1-k}$

此步证明了$i = n + 1$时成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

推论2.1.6.
$$\begin{cases} i^n\sigma(s;w)[| \times \hat{p}]^n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_n^k[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k\sigma(s;w)[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n-k}, n \geq 0 \\ i^n[\hat{p} \times |]^n\sigma(s;w) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_n^k[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n-k}\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k, n \geq 0 \end{cases}$$

2.2 $[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^n\sigma(s;w)$和$\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^n$的递推公式

定理2.2.1.
$$\begin{cases} [\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^n\sigma(s;w) = i^n\sigma(s;w)[| \times \hat{p}]^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_n^k[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k\sigma(s;w)[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n-k}, n \geq 0 \\ \sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^n = i^n[\hat{p} \times |]^n\sigma(s;w) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_n^k[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n-k}\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k, n \geq 0 \end{cases}$$

推论2.2.1.
$$\begin{cases} \sigma^\alpha(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^n\sigma_\alpha(s;w) \\ = i^n\sigma(s;w) \cdot \{\sigma(s;w)[| \times \hat{p}]^n\} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_n^k\sigma^\alpha(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k\sigma_\alpha(s;w)[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n-k}, n \geq 0 \\ \sigma^\alpha(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^n\sigma_\alpha(s;w) \\ = i^n\{[\hat{p} \times |]^n\sigma(s;w)\} \cdot \sigma(s;w) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_n^k[-\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^{n-k}\sigma^\alpha(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^k\sigma_\alpha(s;w), n \geq 0 \end{cases}$$

推论2.2.2.

$$\begin{cases}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\} \\ =i^n\sigma(s;w)\times\{\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n\}-\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_n^k\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^k\sigma(s;w)\}[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-k},n\geq 0 \\ \{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\}\times\sigma(s;w) \\ =i^n\{[\hat{p}\times|]^n\sigma(s;w)\}\times\sigma(s;w)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_n^k[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-k}\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^k\}\times\sigma(s;w),n\geq 0\end{cases}$$

推论2.2.3. $X(n)=O(n)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_n^kX(k)[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-k},n\geq 0$

2.3 $i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}$和$i^{-n}\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^n$的通项公式

2.3.1 $i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}$的通项公式

性质2.3.1.

$$\begin{cases}i^{-0}[\sigma(s;w)\times|]^0\hat{p}=\hat{p} \\ i^{-1}[\sigma(s;w)\times|]^1\hat{p}=\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)\} \\ i^{-2}[\sigma(s;w)\times|]^2\hat{p}=-[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+\sigma^2(s;w)\hat{p} \\ i^{-3}[\sigma(s;w)\times|]^3\hat{p}=-[1-\sigma^2(s;w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-[1+\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+\sigma^2(s;w)\hat{p} \\ i^{-4}[\sigma(s;w)\times|]^4\hat{p}=-[2-\sigma^2(s;w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-[1+2\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+[1+\sigma^2(s;w)]\sigma^2(s;w)\hat{p} \\ i^{-5}[\sigma(s;w)\times|]^5\hat{p} \\ =-[3-\sigma^4(s;w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-[1+3\sigma^2(s;w)+\sigma^4(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+[1+2\sigma^2(s;w)]\sigma^2(s;w)\hat{p}\end{cases}$$

性质2.3.2.

$$\begin{cases}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^2\hat{p}=[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-\sigma^2(s;w) \\ \hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^3\hat{p}=2i[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-i\sigma^2(s;w) \\ \hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^4\hat{p}=i^2[3+\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-i^2[1+\sigma^2(s;w)]\sigma^2(s;w)\end{cases}$$

定理2.3.1.

$$\begin{cases}i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}=a_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+b_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-c_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p} \\ a_{n+1}(w)=a_n(w)+b_n(w)-c_n(w)\sigma^2(s;w),b_{n+1}(w)=b_n(w)+c_n(w)\sigma^2(s;w),c_{n+1}(w)=b_n(w),n\geq 0 \\ a_0(w)=0,b_0(w)=0,c_0=-\sigma^{-2}(s;w);a_1(w)=1,b_1(w)=-1,c_1(w)=0\end{cases}$$

证明: 采用数学归纳法证明：

第一步：$i=0$时成立，即

$$\begin{cases}i^{-0}[\sigma(s;w)\times|]^0\hat{p}=a_0(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+b_0(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-c_0\sigma^2(s;w)\hat{p} \\ a_0(w)=0,b_0(w)=0,c_0=-\sigma^{-2}(s;w)\end{cases}$$

第二步：假设$i=n$时成立，即

$i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}=a_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+b_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-c_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}$

第三步：$i=n+1$时

$i^{-(n+1)}[\sigma(s;w)\times|]^{n+1}\hat{p}$

$=a_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-ib_n(w)\sigma(s;w)\times|[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+ic_n(w)\sigma(s;w)\times\sigma^2(s;w)\hat{p}$

$=a_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+b_n(w)\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-\sigma^2(s;w)\hat{p}\}-c_n(w)\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot$
$\hat{p}]-[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)\}\sigma^2(s;w)$

$=[a_n(w)+b_n(w)-c_n(w)\sigma^2(s;w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+[b_n(w)+c_n(w)\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-b_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}$

$=a_{n+1}(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+b_{n+1}(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-c_{n+1}(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}$

此步证明了$i=n+1$时成立。

第四步：得到如下递推关系

$$\begin{cases} a_{n+1}(w) = a_n(w) + b_n(w) - c_n(w)\sigma^2(s;w), b_{n+1}(w) = b_n(w) + c_n(w)\sigma^2(s;w), c_{n+1}(w) = b_n(w) \\ a_0(w) = 0, b_0(w) = 0, c_0 = -\sigma^{-2}(s;w); a_1(w) = 1, b_1(w) = -1, c_1(w) = 0 \end{cases}$$

第五步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

推论2.3.1. $i^{-n}[\sigma(s;w) \times |]^n \hat{p} = a_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}] + b_n(w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]\sigma(s;w) - b_{n-1}(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}, n \geq 0$

推论2.3.2. $i^{-n}\hat{p} \cdot \{[\sigma(s;w) \times |]^n \hat{p}\} = -k_n(w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]^2 + b_{n-1}(w)\sigma^2(s;w), n \geq 0, k_n(w) = -[a_n(w) + b_n(w)]$

2.3.2 $i^{-n}[\sigma(s) \times |]^n \hat{p}$的通项公式

引理2.3.1.

$$\begin{cases} a_{n+1}(1) = a_n(1) + b_n(1) - c_n(1)\sigma^2(s), b_{n+1}(1) = b_n(1) + c_n(1)\sigma^2(s), c_{n+1}(1) = b_n(1) \\ a_0(1) = 0, b_0(1) = 0, c_0 = -\sigma^{-2}(s); a_1(1) = 1, b_1(1) = -1, c_1(1) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} a_n(1) = \frac{[(s+1)^{n+2} - (-s)^{n+2}] - 2[(s+1)^{n+1} - (-s)^{n+1}] + (2s+1)}{s(2s+1)(s+1)} \\ b_n(1) = -\frac{(s+1)^n - (-s)^n}{2s+1}, c_n(1) = -\frac{(s+1)^{n-1} - (-s)^{n-1}}{2s+1}, n \geq 0 \end{cases}$$

引理2.3.2. $-(2s+1) = [(s+1)^4 - (-s)^4] - 2[(s+1)^3 - (-s)^3]$

定理2.3.2.

$$\begin{cases} i^{-n}[\sigma(s) \times |]^n \hat{p} = a_n(1)\sigma(s)[\sigma(s) \cdot \hat{p}] + b_n(1)[\sigma(s) \cdot \hat{p}]\sigma(s) - c_n(1)\sigma^2(s)\hat{p} \\ a_n(1) = \frac{[(s+1)^{n+2} - (-s)^{n+2}] - 2[(s+1)^{n+1} - (-s)^{n+1}] + (2s+1)}{s(2s+1)(s+1)} \\ b_n(1) = -\frac{(s+1)^n - (-s)^n}{2s+1}, c_n(1) = -\frac{(s+1)^{n-1} - (-s)^{n-1}}{2s+1}, n \geq 0 \end{cases}$$

推论2.3.3.

$$\begin{cases} i^{-n}[\sigma(s) \times |]^n \hat{p} = a_n(1)\sigma(s)[\sigma(s) \cdot \hat{p}] + b_n(1)[\sigma(s) \cdot \hat{p}]\sigma(s) - b_{n-1}(1)\sigma^2(s)\hat{p}, n \geq 0 \\ a_n(1) = \frac{[(s+1)^{n+2} - (-s)^{n+2}] - 2[(s+1)^{n+1} - (-s)^{n+1}] + (2s+1)}{s(2s+1)(s+1)}, b_n(1) = -\frac{(s+1)^n - (-s)^n}{2s+1} \end{cases}$$

推论2.3.4.

$$\begin{cases} i^{-n}\hat{p} \cdot \{[\sigma(s) \times |]^n \hat{p}\} = -k_n(1)[\sigma(s) \cdot \hat{p}]^2 + b_{n-1}(1)\sigma^2(s), n \geq 0 \\ k_n(1) = -[a_n(1) + b_n(1)] = \frac{(s+1)^{n+1} - (-s)^{n+1} - (2s+1)}{s(2s+1)(s+1)}, b_{n-1}(1) = -\frac{(s+1)^{n-1} - (-s)^{n-1}}{2s+1} \end{cases}$$

2.3.3 $i^{-n}\hat{p}[| \times \sigma(s;w)]^n$的通项公式

定理2.3.3.

$$\begin{cases} i^{-n}\hat{p}[| \times \sigma(s;w)]^n = a_n(w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]\sigma(s;w) + b_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}] - c_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p} \\ a_{n+1}(w) = a_n(w) + b_n(w) - c_n(w)\sigma^2(s;w), b_{n+1}(w) = b_n(w) + c_n(w)\sigma^2(s;w), c_{n+1}(w) = b_n(w), n \geq 0 \\ a_0(w) = 0, b_0(w) = 0, c_0 = -\sigma^{-2}(s;w); a_1(w) = 1, b_1(w) = -1, c_1(w) = 0 \end{cases}$$

证明: 采用数学归纳法证明：

第一步：$i = 0$时成立，即

$$\begin{cases} i^{-0}\hat{p}[| \times \sigma(s;w)]^0 = a_0(w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]\sigma(s;w) + b_0(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}] - c_0\sigma^2(s;w)\hat{p} \\ a_0(w) = 0, b_0(w) = 0, c_0 = -\sigma^{-2}(s;w) \end{cases}$$

第二步：假设$i = n$时成立，即

$i^{-n}\hat{p}[| \times \sigma(s;w)]^n = a_n(w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]\sigma(s;w) + b_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}] - c_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}$

第三步：$i = n + 1$时

$i^{-(n+1)}\hat{p}[| \times \sigma(s;w)]^{n+1}$

$= a_n(w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]\sigma(s;w) - ib_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]| \times \sigma(s;w) + ic_n(w)\hat{p} \times \sigma(s;w)\sigma^2(s;w)$

$= a_n(w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]\sigma(s;w) + b_n(w)\{[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}]\sigma(s;w) + \sigma(s;w)[\sigma(s;w) \cdot \hat{p}] - \sigma^2(s;w)\hat{p}\}$

$-c_n(w)\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\}\sigma^2(s;w)$
$=[a_n(w)+b_n(w)-c_n(w)\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+[b_n(w)+c_n(w)\sigma^2(s;w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-b_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}$
$=a_{n+1}(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+b_{n+1}(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-c_{n+1}(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}$
此步证明了$i=n+1$时成立。
第四步：得到如下递推关系

$$\begin{cases}a_{n+1}(w)=a_n(w)+b_n(w)-c_n(w)\sigma^2(s;w),b_{n+1}(w)=b_n(w)+c_n(w)\sigma^2(s;w),c_{n+1}(w)=b_n(w)\\a_0(w)=0,b_0(w)=0,c_0=-\sigma^{-2}(s;w);a_1(w)=1,b_1(w)=-1,c_1(w)=0\end{cases}$$

第五步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

推论2.3.5. $i^{-n}\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^n=a_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+b_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-b_{n-1}(w)\sigma^2(s;w)\hat{p},n\geq 0$

推论2.3.6. $i^{-n}\{\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^n\}\cdot\hat{p}=-k_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+b_{n-1}(w)\sigma^2(s;w),n\geq 0,k_n(w)=-[a_n(w)+b_n(w)]$

推论2.3.7. $\hat{p}\cdot\{[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}\}=\{\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^n\}\cdot\hat{p},n\geq 0$

2.3.4 $i^{-n}\hat{p}[|\times\sigma(s)]^n$的通项公式

定理2.3.4.

$$\begin{cases}i^{-n}\hat{p}[|\times\sigma(s)]^n=a_n(1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s)+b_n(1)\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]-c_n(1)\sigma^2(s)\hat{p}\\a_n(1)=\frac{[(s+1)^{n+2}-(-s)^{n+2}]-2[(s+1)^{n+1}-(-s)^{n+1}]+(2s+1)}{s(2s+1)(s+1)}\\b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1},c_n(1)=-\frac{(s+1)^{n-1}-(-s)^{n-1}}{2s+1},n\geq 0\end{cases}$$

推论2.3.8.

$$\begin{cases}i^{-n}\hat{p}[|\times\sigma(s)]^n=a_n(1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s)+b_n(1)\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]-b_{n-1}(1)\sigma^2(s)\hat{p},n\geq 0\\a_n(1)=\frac{[(s+1)^{n+2}-(-s)^{n+2}]-2[(s+1)^{n+1}-(-s)^{n+1}]+(2s+1)}{s(2s+1)(s+1)},b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1}\end{cases}$$

推论2.3.9.

$$\begin{cases}i^{-n}\{\hat{p}[|\times\sigma(s)]^n\}\cdot\hat{p}=-k_n(1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2+b_{n-1}(1)\sigma^2(s),n\geq 0\\k_n(1)=-[a_n(1)+b_n(1)]=\frac{(s+1)^{n+1}-(-s)^{n+1}-(2s+1)}{s(2s+1)(s+1)},b_{n-1}(1)=-\frac{(s+1)^{n-1}-(-s)^{n-1}}{2s+1}\end{cases}$$

推论2.3.10. $\hat{p}\cdot\{[\sigma(s)\times|]^n\hat{p}\}=\{\hat{p}[|\times\sigma(s)]^n\}\cdot\hat{p},n\geq 0$

2.3.5 一般情形的参数递推关系汇总

推论2.3.11.

$$\begin{cases}a_{n+1}(w)=a_n(w)+b_n(w)-c_n(w)\sigma^2(s;w),b_{n+1}(w)=b_n(w)+c_n(w)\sigma^2(s;w),c_{n+1}(w)=b_n(w)\\a_0(w)=0,b_0(w)=0,c_0=-\sigma^{-2}(s;w);a_1(w)=1,b_1(w)=-1,c_1(w)=0;a_2(w)=0,b_2(w)=-1,c_2(w)=-1\\k_n(w)=-[a_n(w)+b_n(w)]\end{cases}$$

2.3.6 $w=1$情形的参数递推关系汇总

推论2.3.12.

$$\begin{cases}a_{n+1}(1)=a_n(1)+b_n(1)-c_n(1)\sigma^2(s),b_{n+1}(1)=b_n(1)+c_n(1)\sigma^2(s),c_{n+1}(1)=b_n(1)\\a_0(1)=0,b_0(1)=0,c_0=-\sigma^{-2}(s);a_1(1)=1,b_1(1)=-1,c_1(1)=0;a_2(1)=0,b_2(1)=-1,c_2(1)=-1\end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases}a_n(1)=\frac{[(s+1)^{n+2}-(-s)^{n+2}]-2[(s+1)^{n+1}-(-s)^{n+1}]+(2s+1)}{s(2s+1)(s+1)},b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1},c_n(1)=-\frac{(s+1)^{n-1}-(-s)^{n-1}}{2s+1}\\k_n(1)=-[a_n(1)+b_n(1)]=\frac{(s+1)^{n+1}-(-s)^{n+1}-(2s+1)}{s(2s+1)(s+1)},c_n(1)-[a_n(1)+b_n(1)]=\frac{(s+1)^n-(-s)^n-(2s+1)}{s(2s+1)(s+1)},n\geq 0\end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases}\sigma^2(s)a_n(1)=-b_{n+2}(1)+2b_{n+1}(1)+1,\sigma^2(s)k_n(1)=-b_{n+1}(1)-1,c_n(1)=b_{n-1}(1),k_{n+1}=k_n(1)-b_n(1)\\b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1},\sigma^2(s)[c_n(1)-a_n(1)-b_n(1)]=-b_n(1)-1,n\geq 0\end{cases}$$

2.3.7 $w=1$情形下参数定义域的扩展

定理2.3.5. $b_{n+1}(1)=b_n(1)+b_{n-1}(1)\sigma^2(s), b_0(1)=0, b_{-1}(1)=-\sigma^{-2}(s)\Leftrightarrow b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1}; n\in Z$

证明: $b_{n+1}(1)=b_n(1)+b_{n-1}(1)\sigma^2(s), b_0(1)=0, b_{-1}=-\sigma^{-2}(s); n\in Z$

$\Leftrightarrow b_{n+1}(1)+sb_n(1)=(s+1)[b_n(1)+sb_{n-1}(1)], b_0(1)=0, b_{-1}=-\sigma^{-2}(s); n\in Z$

$\Leftrightarrow b_n(1)+sb_{n-1}(1)=(s+1)^n[b_0(1)+sb_{-1}(1)], b_0(1)=0, b_{-1}(1)=-\sigma^{-2}(s); n\in Z$

$\Leftrightarrow b_n(1)+sb_{n-1}(1)=-(s+1)^{n-1}, b_0(1)=0, b_{-1}(1)=-\sigma^{-2}(s); n\in Z$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} b_n(1)-(-s)b_{n-1}(1)=-(s+1)^{n-1}(-s)^0 \\ (-s)b_{n-1}(1)-(-s)^2b_{n-2}(1)=-(s+1)^{n-2}(-s) \\ (-s)^2b_{n-2}(1)-(-s)^3b_{n-3}(1)=-(s+1)^{n-3}(-s)^2 \\ \cdots\cdots \\ (-s)^{n-1}b_1(1)-(-s)^nb_0(1)=-(s+1)^0(-s)^{n-1} \\ (-s)^nb_0(1)-(-s)^{n+1}b_{-1}(1)=-(s+1)^{-1}(-s)^n \\ (-s)^{n+1}b_{-1}(1)-(-s)^{n+2}b_{-2}(1)=-(s+1)^{-2}(-s)^{n+1} \\ \cdots\cdots \\ (-s)^{n-l-2}b_{l+2}-(-s)^{n-l-1}b_{l+1}(1)=-(s+1)^{l+1}(-s)^{n-l-2} \\ (-s)^{n-l-1}b_{l+1}(1)-(-s)^{n-l}b_l(1)=-(s+1)^l(-s)^{n-l-1} \end{cases}, b_0(1)=0, b_{-1}(1)=-\sigma^{-2}(s); n\geq 0, l\leq -1$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} b_n(1)-(-s)^nb_0(1)=-(s+1)^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{-s}{s+1})^i \\ (-s)^nb_0(1)-(-s)^{n-l}b_l(1)=-(s+1)^{n-1}(\frac{-s}{s+1})^n\sum_{i=0}^{-l-1}(\frac{-s}{s+1})^i \end{cases}, b_0(1)=0; n\geq 1, l\leq -1$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} b_n(1)-(-s)^nb_0(1)=-(s+1)^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{-s}{s+1})^i \\ (-s)^lb_0(1)-b_l(1)=-\frac{(-s)^l}{s+1}\sum_{i=0}^{-l-1}(\frac{-s}{s+1})^i \end{cases}, b_0(1)=0; n\geq 1, l\leq -1$$

$\Leftrightarrow b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1}, b_l(1)=-\frac{(s+1)^l-(-s)^l}{2s+1}, b_0(1)=0; n\geq 1, l\leq -1$

$\Leftrightarrow b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1}; n\in Z$ □

定理2.3.6. $n\in Z$

$$\begin{cases} a_{n+1}(1)=a_n(1)+b_n(1)-b_{n-1}(1)\sigma^2(s), a_0(1)=0 \\ b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n(1)=\frac{[(s+1)^{n+2}-(-s)^{n+2}]-2[(s+1)^{n+1}-(-s)^{n+1}]+(2s+1)}{s(2s+1)(s+1)} \\ b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1} \end{cases}$$

证明: $\begin{cases} a_{n+1}(1)=a_n(1)+b_n(1)-b_{n-1}(1)\sigma^2(s), a_0(1)=0 \\ b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1} \end{cases}; n\in Z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1}(1)=a_n(1)+b_n(1)-b_{n-1}(1)\sigma^2(s), b_{n+1}(1)=b_n(1)+b_{n-1}(1)\sigma^2(s) \\ a_0(1)=0, b_0(1)=0, b_{-1}(1)=-\sigma^{-2}(s) \end{cases}; n\in Z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [a_{n+1}(1)+b_{n+1}(1)]-[a_n(1)+b_n(1)]=b_n(1), b_{n+1}(1)=b_n(1)+b_{n-1}(1)\sigma^2(s) \\ a_0(1)+b_0(1)=0, b_0(1)=0, b_{-1}(1)=-\sigma^{-2}(s) \end{cases}; n\in Z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n(1)=\sum_{i=0}^{n-1}b_i(1)-b_n(1), a_l(1)=\sum_{i=l}^{0}b_i(1)-b_l(1); n\geq 1, l\leq 0 \\ b_{n+1}(1)=b_n(1)+b_{n-1}(1)\sigma^2(s), b_0(1)=0, b_{-1}(1)=-\sigma^{-2}(s); n\in Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_n(1)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}b_i(1)-b_n(1),a_l(1)=-\sum\limits_{i=l}^{0}b_i(1)-b_l(1);n\geq 1,l\leq 0\\ b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1};n\in Z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_n(1)=-\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{(s+1)^i-(-s)^i}{2s+1}+\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1};n\geq 1\\ a_l(1)=\sum\limits_{i=l}^{0}\frac{(s+1)^i-(-s)^i}{2s+1}+\frac{(s+1)^l-(-s)^l}{2s+1};l\leq 0\\ b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1};n\in Z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_n(1)=-\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{(s+1)^i}{2s+1}+\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{(-s)^i}{2s+1}+\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1}=\frac{[(s+1)^{n+2}-(-s)^{n+2}]-2[(s+1)^{n+1}-(-s)^{n+1}]+(2s+1)}{s(2s+1)(s+1)};n\geq 1\\ a_l(1)=\sum\limits_{i=l}^{0}\frac{(s+1)^i}{2s+1}-\sum\limits_{i=l}^{0}\frac{(-s)^i}{2s+1}+\frac{(s+1)^l-(-s)^l}{2s+1}=\frac{1}{2s+1}\frac{1-(\frac{1}{s+1})^{-l+1}}{1-\frac{1}{s+1}}-\frac{1}{2s+1}\frac{1-(\frac{1}{-s})^{-l+1}}{1-\frac{1}{-s}}+\frac{(s+1)^l-(-s)^l}{2s+1}\\ =\frac{s+1-(s+1)^l}{s(2s+1)}-\frac{s+(-s)^l}{(2s+1)(s+1)}+\frac{(s+1)^l-(-s)^l}{2s+1}=\frac{(s+1)^2-(s+1)^{l+1}}{s(2s+1)(s+1)}-\frac{s^2-(-s)^{l+1}}{s(2s+1)(s+1)}+\frac{s(s+1)^{l+1}+(s+1)(-s)^{l+1}}{s(2s+1)(s+1)}\\ =\frac{[(s+1)^{l+2}-(-s)^{l+2}]-2[(s+1)^{l+1}-(-s)^{l+1}]+(2s+1)}{s(2s+1)(s+1)};l\leq 0\\ b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1};n\in Z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_n(1)=\frac{[(s+1)^{n+2}-(-s)^{n+2}]-2[(s+1)^{n+1}-(-s)^{n+1}]+(2s+1)}{s(2s+1)(s+1)}\\ b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1}\end{cases};n\in Z$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma^2(s)a_n(1)=-b_{n+2}(1)+2b_{n+1}(1)+1\\ b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1}\end{cases};n\in Z$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma^2(s)a_n(1)=-b_{n+2}(1)+2b_{n+1}(1)+1\\ b_{n+1}(1)=b_n(1)+b_{n-1}(1)\sigma^2(s),b_0(1)=0,b_{-1}(1)=-\sigma^{-2}(s)\end{cases};n\in Z \qquad \square$$

推论2.3.13. $n\in Z$

$$\begin{cases}a_{n+1}(1)=a_n(1)+b_n(1)-b_{n-1}(1)\sigma^2(s)\\ b_{n+1}(1)=b_n(1)+b_{n-1}(1)\sigma^2(s)\\ a_0(1)=0,b_0(1)=0,b_{-1}(1)=-\sigma^{-2}(s)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma^2(s)a_n(1)=-b_{n+2}(1)+2b_{n+1}(1)+1\\ b_{n+1}(1)=b_n(1)+b_{n-1}(1)\sigma^2(s)\\ b_0(1)=0,b_{-1}(1)=-\sigma^{-2}(s)\end{cases}$$

2.3.8 一般情形下参数递推关系分析(猜想)

猜想2.3.1. $\begin{cases}\sigma^2(s;w)=(s_1\oplus s_2\oplus\cdot\cdot\oplus s_n)(s_1\oplus s_2\oplus\cdot\cdot\oplus s_n+1)=\hat{S}(s;w)[\hat{S}(s;w)+1]\\ [\sigma_x(s;w),(s_1\oplus s_2\oplus\cdot\cdot\oplus s_n)]=[\sigma_x(s;w),\hat{S}(s;w)]=0,\hat{S}(s;w):=(s_1\oplus s_2\oplus\cdot\cdot\oplus s_n)\end{cases}$

如果以上猜想成立，则上一节结论全部成立，只要将分母项理解为相应矩阵的逆即可，下面只是给出几个例子进行了严格的证明，其它均可如此进行，在此略去，不再展开。如果以上猜想不成立，则参数a_n,b_n,c_n只有递推关系可用，无法解析地求出，一般只能写成其它章节的形式，即保留参数a_n,b_n,c_n原有形式，无法进一步展开。

定理2.3.7. $b_{n+1}(w)=b_n(w)+b_{n-1}(w)\sigma^2(\hat{s}),b_0(w)=0,b_1(w)=-1\Leftrightarrow b_n(w)=[(-\hat{s})^n-(\hat{s}+1)^n](2\hat{s}+1)^{-1};n\geq 0$

证明: $b_{n+1}(w)=b_n(w)+b_{n-1}(w)\sigma^2(\hat{s}),b_0(w)=0,b_1(w)=-1;n\in Z$

$\Leftrightarrow b_{n+1}(w)+\hat{s}b_n(w)=(\hat{s}+1)[b_n(w)+\hat{s}b_{n-1}(w)],b_0(w)=0,b_1(w)=-1;n\in Z$

$\Leftrightarrow b_n(w)+\hat{s}b_{n-1}(w)=(\hat{s}+1)^{n-1}[b_1(w)+\hat{s}b_0(w)],b_0(w)=0,b_1(w)=-1;n\in Z$

$\Leftrightarrow b_n(w)+\hat{s}b_{n-1}(w)=-(\hat{s}+1)^{n-1},b_0(w)=0,b_1(w)=-1;n\in Z$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b_n(w)-(-\hat{s})b_{n-1}(w)=-(\hat{s}+1)^{n-1}(-\hat{s})^0\\ (-\hat{s})b_{n-1}(w)-(-\hat{s})^2b_{n-2}(w)=-(\hat{s}+1)^{n-2}(-\hat{s})\\ (-\hat{s})^2b_{n-2}(w)-(-\hat{s})^3b_{n-3}(w)=-(\hat{s}+1)^{n-3}(-\hat{s})^2\\ \cdots\cdots\\ (-\hat{s})^{n-1}b_1(w)-(-\hat{s})^nb_0(w)=-(\hat{s}+1)^0(-\hat{s})^{n-1}\end{cases},b_0(w)=0,b_{-1}(w)=-\sigma^{-2}(\hat{s});n\geq 0,l\leq -1$$

$$\Leftrightarrow b_n(w)-(-\hat{s})^n b_0(w)=-(\hat{s}+1)^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}[-\hat{s}(\hat{s}+1)^{-1}]^i, b_0(w)=0; n\ge 1, l\le -1$$

$$\Leftrightarrow b_n(w)=[(-\hat{s})^n-(\hat{s}+1)^n](2\hat{s}+1)^{-1}; n\ge 0 \qquad \square$$

推论2.3.14. $\sum_{k=0}^{n} b_k=\{[(-\hat{s})^{n+2}-(\hat{s}+1)^{n+2}]+2\hat{s}+1\}[\hat{s}(2\hat{s}+1)(\hat{s}+1)]^{-1}$

定理2.3.8.

$$\begin{cases} a_{n+2}(w)=a_{n+1}(w)+b_{n+1}(w)-b_n(w)\sigma^2(\hat{s}), a_0(w)=0, a_1(w)=1 \\ b_n(w)=[(-\hat{s})^n-(\hat{s}+1)^n](2\hat{s}+1)^{-1}, n\ge 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} a_n(w)=\{[(\hat{s}+1)^{n+2}-(-\hat{s})^{n+2}]-2[(\hat{s}+1)^{n+1}-(-\hat{s})^{n+1}]+(2\hat{s}+1)\}[\hat{s}(2\hat{s}+1)(\hat{s}+1)]^{-1} \\ b_n(w)=[(-\hat{s})^n-(\hat{s}+1)^n](2\hat{s}+1)^{-1}, n\ge 0 \end{cases}$$

证明: $a_{n+2}(w)=a_{n+1}(w)+b_{n+1}(w)-b_n(w)\sigma^2(\hat{s}), a_0(w)=0, a_1(w)=1$

$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} a_n(w)-a_{n-1}(w)=b_{n-1}(w)-b_{n-2}(w)\sigma^2(\hat{s}) \\ \cdots \\ a_2(w)-a_1(w)=b_1(w)-b_0(w)\sigma^2(\hat{s}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a_n(w)=a_1(w)+\sum_{i=1}^{n-1} b_i(w)-\sum_{j=0}^{n-2} b_j(w)\sigma^2(\hat{s}), n\ge 2$$

$$\Leftrightarrow a_n(w)=1+\{[(-\hat{s})^{n+1}-(\hat{s}+1)^{n+1}]+2\hat{s}+1\}[\hat{s}(2\hat{s}+1)(\hat{s}+1)]^{-1}-\{[(-\hat{s})^n-(\hat{s}+1)^n]+2\hat{s}+1\}[(2\hat{s}+1)]^{-1}$$

$$\Leftrightarrow a_n(w)=\{[(\hat{s}+1)^{n+2}-(-\hat{s})^{n+2}]-2[(\hat{s}+1)^{n+1}-(-\hat{s})^{n+1}]+(2\hat{s}+1)\}[\hat{s}(2\hat{s}+1)(\hat{s}+1)]^{-1} \qquad \square$$

推论2.3.15.

$$\begin{cases} a_{n+2}(w)=a_{n+1}(w)+b_{n+1}(w)-b_n(w)\sigma^2(\hat{s}) \\ b_{n+2}(w)=b_{n+1}(w)+b_n(w)\sigma^2(\hat{s}) \\ a_0(w)=0, b_0(w)=0; a_1(w)=1, b_1(w)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma^2(\hat{s})a_n(w)=-b_{n+2}(w)+2b_{n+1}(w)+1 \\ b_{n+2}(w)=b_{n+1}(w)+b_n(w)\sigma^2(\hat{s}) \\ b_0(w)=0, b_1(w)=-1 \end{cases} ; n\ge 0$$

2.3.9 $i^{l-n}\{[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}\}[|\times\hat{p}]^l$的通项公式

推论2.3.16.

$$\begin{cases} i^{l-n}\{[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}\}[|\times\hat{p}]^l=a_n(w)i^l\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^l[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+b_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]i^l\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^l \\ =\begin{cases} -a_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+[a_n(w)-b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+b_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s;w), l=2k-1 \\ -[a_n(w)+b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2\hat{p}+a_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+b_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w), l=2k \end{cases} \end{cases}$$

推论2.3.17.

$$\left\{ i^{l-n}\{[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}\}[|\times\hat{p}]^l|\cdot\sigma(s;w)=\begin{cases} [2a_n(w)+b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-a_n(w)\sigma^2(s;w), l=2k-1 \\ -[a_n(w)+b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3+\{[(a_n(w)+b_n(w)]\sigma^2(s;w)-a_n(w)\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p} \end{cases} \right.$$

推论2.3.18.

$$\left\{ i^{l-n}\sigma(s;w)\cdot|\{[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}\}[|\times\hat{p}]^l=\begin{cases} -[a_n(w)+2b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+b_n(w)\sigma^2(s;w), l=2k-1 \\ -[a_n(w)+b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3+\{[(a_n(w)+b_n(w)]\sigma^2(s;w)-b_n(w)\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p} \end{cases} \right.$$

推论2.3.19. $i^{l-n}\hat{p}\cdot|\{[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}\}[|\times\hat{p}]^l=0, n\ge 0, l\ge 1$

2.3.10 $i^{l-n}[\hat{p}\times|]^l\{\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^n\}$的通项公式

推论2.3.20. $i^{l-n}[\hat{p}\times|]^l\{\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^n\}$

$$=a_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]i^l[\hat{p}\times|]^l\sigma(s;w)+b_n(w)i^l[\hat{p}\times|]^l\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-c_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}$$

$$=\begin{cases} -a_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s;w)+[a_n(w)-b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+b_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2, l=2k-1 \\ -[a_n(w)+b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2\hat{p}+a_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+b_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}], l=2k \end{cases}$$

推论2.3.21. $i^{l-n}\sigma(s;w)\cdot|[\hat{p}\times|]^l\{\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^n\}$

$$=\begin{cases}[2a_n(w)+b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-a_n(w)\sigma^2(s;w),l=2k-1\\-[a_n(w)+b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3+\{[(a_n(w)+b_n(w)]\sigma^2(s;w)-a_n(w)\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}],l=2k\end{cases}$$

推论2.3.22. $i^{l-n}[\hat{p}\times|]^l\{\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^n\}|\cdot\sigma(s;w)$

$$=\begin{cases}-[a_n(w)+2b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+b_n(w)\sigma^2(s;w),l=2k-1\\-[a_n(w)+b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3+\{[(a_n(w)+b_n(w)]\sigma^2(s;w)-b_n(w)\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}],l=2k\end{cases}$$

推论2.3.23. $i^{l-n}\hat{p}\cdot|[\hat{p}\times|]^l\{\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^n\}=0,n\geq 0,l\geq 1$

推论2.3.24.

$$\begin{cases}i^{l-n}\{[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}\}[|\times\hat{p}]^l|\cdot\sigma(s;w)=i^{l-n}\sigma(s;w)\cdot|[\hat{p}\times|]^l\{\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^n\}\\i^{l-n}\sigma(s;w)\cdot|\{[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}\}[|\times\hat{p}]^l=i^{l-n}[\hat{p}\times|]^l\{\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^n\}|\cdot\sigma(s;w)\end{cases}$$

2.3.11 $i^{l-n}\{[\sigma(s)\times|]^n\hat{p}\}[|\times\hat{p}]^l$的通项公式

推论2.3.25.

$$\begin{cases}i^{l-n}\{[\sigma(s)\times|]^n\hat{p}\}[|\times\hat{p}]^l=a_n(1)i^l\sigma(s)[|\times\hat{p}]^l[\sigma(s)\cdot\hat{p}]+b_n(1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]i^l\sigma(s)[|\times\hat{p}]^l\\=\begin{cases}-a_n(1)\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2+[a_n(1)-b_n(1)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]+b_n(1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s),l=2k-1\\-[a_n(1)+b_n(1)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\hat{p}+a_n(1)\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]+b_n(1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s),l=2k\end{cases}\\a_n(1)=\frac{[(s+1)^{n+2}-(-s)^{n+2}]-2[(s+1)^{n+1}-(-s)^{n+1}]+(2s+1)}{s(2s+1)(s+1)},b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1},n\geq 0,l\geq 1\end{cases}$$

推论2.3.26.

$$\begin{cases}i^{l-n}\{[\sigma(s)\times|]^n\hat{p}\}[|\times\hat{p}]^l|\cdot\sigma(s)=\begin{cases}[2a_n(1)+b_n(1)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2-a_n(1)\sigma^2(s),l=2k-1\\-[a_n(1)+b_n(1)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^3+\{[(a_n(1)+b_n(1)]\sigma^2(s)-a_n(1)\}[\sigma(s)\cdot\hat{p}],l=2k\end{cases}\\a_n(1)=\frac{[(s+1)^{n+2}-(-s)^{n+2}]-2[(s+1)^{n+1}-(-s)^{n+1}]+(2s+1)}{s(2s+1)(s+1)},b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1},n\geq 0,l\geq 1\end{cases}$$

推论2.3.27.

$$\begin{cases}i^{l-n}\sigma(s)\cdot|\{[\sigma(s)\times|]^n\hat{p}\}[|\times\hat{p}]^l=\begin{cases}-[a_n(1)+2b_n(1)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2+b_n(1)\sigma^2(s),l=2k-1\\-[a_n(1)+b_n(1)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^3+\{[(a_n(1)+b_n(1)]\sigma^2(s)-b_n(1)\}[\sigma(s)\cdot\hat{p}],l=2k\end{cases}\\a_n(1)=\frac{[(s+1)^{n+2}-(-s)^{n+2}]-2[(s+1)^{n+1}-(-s)^{n+1}]+(2s+1)}{s(2s+1)(s+1)},b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1},n\geq 0,l\geq 1\end{cases}$$

推论2.3.28. $i^{l-n}\hat{p}\cdot|\{[\sigma(s)\times|]^n\hat{p}\}[|\times\hat{p}]^l=0,n\geq 0,l\geq 1$

2.3.12 $i^{l-n}[\hat{p}\times|]^l\{\hat{p}[|\times\sigma(s)]^n\}$的通项公式

推论2.3.29.

$$\begin{cases}i^{l-n}[\hat{p}\times|]^l\{\hat{p}[|\times\sigma(s)]^n\}=a_n(1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]i^l[\hat{p}\times|]^l\sigma(s)+b_n(1)i^l[\hat{p}\times|]^l\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]-c_n(1)\sigma^2(s)\hat{p}\\=\begin{cases}-a_n(1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s)+[a_n(1)-b_n(1)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]+b_n(1)\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2,l=2k-1\\-[a_n(1)+b_n(1)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\hat{p}+a_n(1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s)+b_n(1)\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}],l=2k\end{cases}\\a_n(1)=\frac{[(s+1)^{n+2}-(-s)^{n+2}]-2[(s+1)^{n+1}-(-s)^{n+1}]+(2s+1)}{s(2s+1)(s+1)},b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1},n\geq 0,l\geq 1\end{cases}$$

推论2.3.30.

$$\begin{cases}i^{l-n}\sigma(s)\cdot|[\hat{p}\times|]^l\{\hat{p}[|\times\sigma(s)]^n\}=\begin{cases}[2a_n(1)+b_n(1)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2-a_n(1)\sigma^2(s),l=2k-1\\-[a_n(1)+b_n(1)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^3+\{[(a_n(1)+b_n(1)]\sigma^2(s)-a_n(1)\}[\sigma(s)\cdot\hat{p}],l=2k\end{cases}\\a_n(1)=\frac{[(s+1)^{n+2}-(-s)^{n+2}]-2[(s+1)^{n+1}-(-s)^{n+1}]+(2s+1)}{s(2s+1)(s+1)},b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1},n\geq 0,l\geq 1\end{cases}$$

推论2.3.31.

$$\begin{cases}i^{l-n}[\hat{p}\times|]^l\{\hat{p}[|\times\sigma(s)]^n\}|\cdot\sigma(s)=\begin{cases}-[a_n(1)+2b_n(1)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2+b_n(1)\sigma^2(s),l=2k-1\\-[a_n(1)+b_n(1)][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^3+\{[(a_n(1)+b_n(1)]\sigma^2(s)-b_n(1)\}[\sigma(s)\cdot\hat{p}],l=2k\end{cases}\\a_n(1)=\frac{[(s+1)^{n+2}-(-s)^{n+2}]-2[(s+1)^{n+1}-(-s)^{n+1}]+(2s+1)}{s(2s+1)(s+1)},b_n(1)=-\frac{(s+1)^n-(-s)^n}{2s+1},n\geq 0,l\geq 1\end{cases}$$

推论2.3.32. $i^{l-n}\hat{p}\cdot|[\hat{p}\times|]^l\{\hat{p}[|\times\sigma(s)]^n\}=0, n\geq 0, l\geq 1$

推论2.3.33. $\begin{cases} i^{l-n}\{[\sigma(s)\times|]^n\hat{p}\}[|\times\hat{p}]^l|\cdot\sigma(s)=i^{l-n}\sigma(s)\cdot|[\hat{p}\times|]^l\{\hat{p}[|\times\sigma(s)]^n\} \\ i^{l-n}\sigma(s)\cdot|\{[\sigma(s)\times|]^n\hat{p}\}[|\times\hat{p}]^l=i^{l-n}[\hat{p}\times|]^l\{\hat{p}[|\times\sigma(s)]^n\}|\cdot\sigma(s) \end{cases}$

3 两类基本自旋复合算符的通项公式

3.1 $\sigma^\alpha(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma_\alpha(s;w)$的通项公式

3.1.1 $\sigma^\alpha(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma_\alpha(s;w)$通项公式的试探和猜想

推论3.1.1. $\sigma(s;w)\cdot\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\}$

$$=-\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{2-n\%2}-(1-n\%2)\sigma^2(s;w)\}-\sum_{k=0}^{n-1}c_n^k\{\sigma(s;w)\cdot\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^k\sigma(s;w)\}\}[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-k}$$

性质3.1.1.

$$\begin{cases} \sigma(s;w)\cdot\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^0\sigma(s;w)\}=\sigma^2(s;w) \\ \sigma(s;w)\cdot\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^1\sigma(s;w)\}=[\sigma^2(s;w)-1][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] \\ \sigma(s;w)\cdot\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s;w)\}=[\sigma^2(s;w)-3][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+\sigma^2(s;w) \\ \sigma(s;w)\cdot\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3\sigma(s;w)\}=[\sigma^2(s;w)-6][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3+[3\sigma^2(s;w)-1]\sigma(s;w)\cdot\hat{p} \\ \sigma(s;w)\cdot\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^4\sigma(s;w)\}=[\sigma^2(s;w)-10][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^4+[6\sigma^2(s;w)-5][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+\sigma^2(s;w) \end{cases}$$

性质3.1.2.

$$\begin{cases} \sigma(s;w)\cdot\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^5\sigma(s;w)\}=[\sigma^2(s;w)-15][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^5+[10\sigma^2(s;w)-15][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3 \\ +[5\sigma^2(s;w)-1][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] \\ \sigma(s;w)\cdot\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^6\sigma(s;w)\}=[\sigma^2(s;w)-21][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^6+[15\sigma^2(s;w)-35][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^4 \\ +[15\sigma^2(s;w)-7][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+\sigma^2(s;w) \\ \sigma(s;w)\cdot\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^7\sigma(s;w)\}=[\sigma^2(s;w)-28][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^7+[21\sigma^2(s;w)-70][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^5 \\ +[35\sigma^2(s;w)-28][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+[7\sigma^2(s;w)-1][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] \end{cases}$$

猜想3.1.1. $\sigma^\alpha(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma_\alpha(s;w)=\sum_{k=0}^{[n/2]}[c_n^{2k}\sigma^2(s;w)-c_{n+1}^{2(k+1)}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k}, n\geq 0$

3.1.2 $\sigma^\alpha(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma_\alpha(s;w)$通项公式的有关引理及其证明

引理3.1.1. $\sum_{l=2k}^{n}(-1)^{n-l}c_{n+1}^lC_l^{2k}=c_{n+1}^{2k}, \sum_{l=2k+1}^{n}(-1)^{n-l}c_{n+1}^lC_{l+1}^{2(k+1)}=C_{n+2}^{2(k+1)}-\delta_{n,2k+1}$

引理3.1.2. $\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{[l/2]}A(k,l)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\sum_{l=2k}^{n}A(k,l)$

定理3.1.1. $\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}[c_{n+1}^{2k}\sigma^2(s;w)-C_{n+2}^{2(k+1)}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k}=-[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{2-(n+1)\%2}-[1-(n+1)\%2]\sigma^2(s;w)$

$$+\sum_{k=0}^{[n/2]}\sum_{l=2k}^{n}(-1)^{n-l}c_{n+1}^l[C_l^{2k}\sigma^2(s;w)-C_{l+1}^{2(k+1)}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k}$$

证明: $\sum_{k=0}^{[n/2]}\sum_{l=2k}^{n}(-1)^{n-l}c_{n+1}^l[C_l^{2k}\sigma^2(s;w)-C_{l+1}^{2(k+1)}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k}$

$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}[c_{n+1}^{2k}\sigma^2(s;w)-C_{n+2}^{2(k+1)}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k}+[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{2-(n+1)\%2}$$

$$=\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}[c_{n+1}^{2k}\sigma^2(s;w)-C_{n+2}^{2(k+1)}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k}+[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{2-(n+1)\%2}+[1-(n+1)\%2]\sigma^2(s;w)$$ □

3.1.3 $\sigma^{\alpha}(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma_{\alpha}(s;w)$通项公式的数学归纳法证明

定理3.1.2. $\sigma^{\alpha}(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma_{\alpha}(s;w)=\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}[c_n^{2k}\sigma^2(s;w)-c_{n+1}^{2(k+1)}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k},n\geq 0$

证明:

采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$i=0$时成立：$\sigma^{\alpha}(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^0\sigma_{\alpha}(s;w)=\sum\limits_{k=0}^{[0/2]}[C_0^{2k}\sigma^2(s;w)-C_{0+1}^{2(k+1)}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{0-2k}$

第二步：假设$i<=n$时成立：$\sigma^{\alpha}(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^i\sigma_{\alpha}(s;w)=\sum\limits_{k=0}^{[i/2]}[C_i^{2k}\sigma^2(s;w)-C_{i+1}^{2(k+1)}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{i-2k},0\leq i\leq n$

第三步：$i=n+1$时，$\sigma(s;w)\cdot\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1}\sigma(s;w)\}$

$=-\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{2-(n+1)\%2}-[1-(n+1)\%2]\sigma^2(s;w)\}-\sum\limits_{l=0}^{n}c_{n+1}^l\{\sigma(s;w)\cdot\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\}\}[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-l}$

$=-\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{2-(n+1)\%2}-[1-(n+1)\%2]\sigma^2(s;w)\}-\sum\limits_{l=0}^{n}c_{n+1}^l\sum\limits_{k=0}^{[l/2]}[C_l^{2k}\sigma^2(s;w)-C_{l+1}^{2(k+1)}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k}[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-l}$

$=-\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{2-(n+1)\%2}-[1-(n+1)\%2]\sigma^2(s;w)\}-\sum\limits_{l=0}^{n}\sum\limits_{k=0}^{[l/2]}(-1)^{n+1-l}c_{n+1}^l[C_l^{2k}\sigma^2(s;w)-C_{l+1}^{2(k+1)}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k}$

$=-\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{2-(n+1)\%2}-[1-(n+1)\%2]\sigma^2(s;w)\}-\sum\limits_{l=0}^{n}\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^{n+1-l}c_{n+1}^l[C_l^{2k}\sigma^2(s;w)-C_{l+1}^{2(k+1)}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k}$

$=-\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{2-(n+1)\%2}-[1-(n+1)\%2]\sigma^2(s;w)\}-\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}\sum\limits_{l=0}^{n}(-1)^{n+1-l}c_{n+1}^l[C_l^{2k}\sigma^2(s;w)-C_{l+1}^{2(k+1)}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k}$

$=-\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{2-(n+1)\%2}-[1-(n+1)\%2]\sigma^2(s;w)\}+\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}\sum\limits_{l=2k}^{n}(-1)^{n-l}c_{n+1}^l[C_l^{2k}\sigma^2(s;w)-C_{l+1}^{2(k+1)}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k}$

$=\sum\limits_{k=0}^{[(n+1)/2]}[c_{n+1}^{2k}\sigma^2(s;w)-C_{n+2}^{2(k+1)}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k}$

此步证明了$i=n+1$时成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

3.1.4 $\sigma^{\alpha}(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma_{\alpha}(s;w)$的通项公式的推论

引理3.1.3. $\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}s^{n-2k}[c_n^{2k}\sigma^2(s;w)-c_{n+1}^{2(k+1)}]=s[s^{n+1}+(s-1)^n]$

推论3.1.2. $\sigma^{\alpha}(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma_{\alpha}(s;w)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)=s[s^{n+1}+(s-1)^n][-\varsigma]^n\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$

推论3.1.3. $[\frac{1}{s}\sigma(s;w)\cdot\hat{\nabla}]^2\psi=\psi\Rightarrow\sigma^{\alpha}(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma_{\alpha}(s;w)\psi=s[s^{n+1}+(s-1)^n][\frac{1}{s}\sigma(s;w)\cdot\hat{\nabla}]^n\psi$

3.2 $i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\}$的通项公式

3.2.1 $i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\}$的通项公式试探

性质3.2.1.

$$\begin{cases}\sigma(s;w)\times\hat{p}=[\sigma(s;w),i\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]=i\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)\}\\ \hat{p}\times\sigma(s;w)=-[\sigma(s;w),i\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]=i\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\}\end{cases}$$

性质3.2.2.

$$\begin{cases}i^n\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n=\begin{cases}i\sigma(s;w)\times\hat{p},n=2k-1\\-\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\hat{p}-\sigma(s;w)\},n=2k\end{cases},k\geq 1\\ i^n[\hat{p}\times|]^n\sigma(s;w)=\begin{cases}i\hat{p}\times\sigma(s;w),n=2k-1\\-\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\hat{p}-\sigma(s;w)\},n=2k\end{cases},k\geq 1\end{cases}$$

性质3.2.3.

$$\begin{cases} i^n\sigma(s;w)\times\{\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n\}=\begin{cases} i\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-\sigma^2(s;w)\hat{p}\},n=2k-1\\ -[\sigma(s;w)\times\hat{p}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+i\sigma(s;w),n=2k\end{cases} & ,k\geq 1\\ i^ni^{-1}\sigma(s;w)\times\{\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n\}=\begin{cases} [\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-\sigma^2(s;w)\hat{p},n=2k-1\\ -\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+\sigma(s;w),n=2k\end{cases} & ,k\geq 1\end{cases}$$

推论3.2.1. $i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\}$

$$=i^ni^{-1}\sigma(s;w)\times\{\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n\}-\sum_{k=0}^{n-1}c_n^k\{i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^k\sigma(s;w)\}\}[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-k}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^0\sigma(s;w)\}=\sigma(s;w)\\ i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^1\sigma(s;w)\}=[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-\sigma^2(s;w)\hat{p}\\ i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s;w)\}=3[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-2\sigma^2(s;w)\hat{p}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+\sigma(s;w)\\ i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3\sigma(s;w)\}=6[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)\\ -2\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3-3\sigma^2(s;w)\hat{p}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+3\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-\sigma^2(s;w)\hat{p}\\ i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^4\sigma(s;w)\}=[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)\{10[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+5\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\\ +\sigma(s;w)\{-5[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^4+5[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+1\}-\sigma^2(s;w)\hat{p}\{4[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+4\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^1\end{cases}$$

猜想3.2.1. $i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\},n\geq 0$

$$=[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(c_n^{2k+1}+c_n^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k-1}+\sigma(s;w)\sum_{k=0}^{[n/2]}(c_n^{2k}-c_n^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k}$$
$$-\sigma^2(s;w)\hat{p}\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}c_n^{2k+1}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k-1}$$

3.2.2 $i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\}$通项公式的数学归纳法证明

定理3.2.1. $i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\},n\geq 0$

$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}\{(c_n^{2k+1}+c_n^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+(c_n^{2k}-c_n^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-c_n^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k-1}$$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$i=0$时成立：

$i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^0\sigma(s;w)\}$

$$=\sum_{k=0}^{[0/2]}\{(C_0^{2k+1}+C_0^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+(C_0^{2k}-C_0^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-C_0^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{0-2k-1}$$

第二步：假设$0\leq l\leq n$时成立：

$i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\}$

$$=\sum_{k=0}^{[l/2]}\{(C_i^{2k+1}+C_i^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+(C_i^{2k}-C_i^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-C_i^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{i-2k-1}$$

第三步：$i=n+1$时，$i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1}\sigma(s;w)\}$

$$=i^{n+1}i^{-1}\sigma(s;w)\times\{\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^{n+1}\}-\sum_{l=0}^{n}c_{n+1}^l\{i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\}\}[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-l}$$

$$=i^{n+1}i^{-1}\sigma(s;w)\times\{\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^{n+1}\}-\sum_{l=0}^{n}c_{n+1}^l\sum_{k=0}^{[l/2]}\{(C_l^{2k+1}+C_l^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)$$
$$+(C_l^{2k}-C_l^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-l}$$

$$=i^{n+1}i^{-1}\sigma(s;w)\times\{\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^{n+1}\}+\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^{n-l}c_{n+1}^l\{(C_l^{2k+1}+C_l^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)$$
$$+(C_l^{2k}-C_l^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k}$$

$$=i^{n+1}i^{-1}\sigma(s;w)\times\{\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^{n+1}\}+\sum_{k=0}^{[n/2]}\sum_{l=2k}^{n}(-1)^{n-l}c_{n+1}^l\{(C_l^{2k+1}+C_l^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)$$
$$+(C_l^{2k}-C_l^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k}$$

$=\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}$
$\{(c_{n+1}^{2k+1}+c_{n+1}^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+(c_{n+1}^{2k}-c_{n+1}^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-c_{n+1}^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k}$

此步证明了$i=n+1$时成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

3.2.3 $i^{-1}\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\}\times\sigma(s;w)$通项公式的归纳法证明

定理3.2.2. $i^{-1}\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\}\times\sigma(s;w),n\geq 0$
$=\{\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(c_n^{2k+1}+c_n^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k-1}\}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+\{\sum_{k=0}^{[n/2]}(c_n^{2k}-c_n^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k}\}\sigma(s;w)$
$-\{\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}c_n^{2k+1}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k-1}\}\sigma^2(s;w)\hat{p}$

定理3.2.3. $i^{-1}\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\}\times\sigma(s;w),n\geq 0$
$=\sum_{k=0}^{[n/2]}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k-1}\{(c_n^{2k+1}+c_n^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+(c_n^{2k}-c_n^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-c_n^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$i=0$时成立：

$i^{-1}\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^0\}\times\sigma(s;w)$
$=\sum_{k=0}^{[0/2]}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{0-2k-1}\{(C_0^{2k+1}+C_0^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+(C_0^{2k}-C_0^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-C_0^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}$

第二步：假设$0\leq l\leq n$时成立：

$i^{-1}\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\}\times\sigma(s;w)$
$=\sum_{k=0}^{[l/2]}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{i-2k-1}\{(C_i^{2k+1}+C_i^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+(C_i^{2k}-C_i^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-C_i^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}$

第三步：$i=n+1$时，$i^{-1}\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1}\}\times\sigma(s;w)$
$=i^{n+1}i^{-1}\{[\hat{p}\times|]^{n+1}\sigma(s;w)\}\times\sigma(s;w)-\sum_{l=0}^{n}c_{n+1}^{l}[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-l}\{i^{-1}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\}\times\sigma(s;w)$
$=i^{n+1}i^{-1}\{[\hat{p}\times|]^{n+1}\sigma(s;w)\}\times\sigma(s;w)-\sum_{l=0}^{n}c_{n+1}^{l}\sum_{k=0}^{[l/2]}[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-l}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$\{(C_l^{2k+1}+C_l^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+(C_l^{2k}-C_l^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}$
$=i^{n+1}i^{-1}\{[\hat{p}\times|]^{n+1}\sigma(s;w)\}\times\sigma(s;w)+\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{[l/2]}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k}(-1)^{n-l}c_{n+1}^{l}$
$\{(C_l^{2k+1}+C_l^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+(C_l^{2k}-C_l^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}$
$=i^{n+1}i^{-1}\{[\hat{p}\times|]^{n+1}\sigma(s;w)\}\times\sigma(s;w)+\sum_{k=0}^{[n/2]}\sum_{l=2k}^{n}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k}(-1)^{n-l}c_{n+1}^{l}$
$\{(C_l^{2k+1}+C_l^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+(C_l^{2k}-C_l^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}$
$=\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k}\{(c_{n+1}^{2k+1}+c_{n+1}^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+(c_{n+1}^{2k}-c_{n+1}^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-c_{n+1}^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}$

此步证明了$i=n+1$时成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

3.2.4 $i^{-1}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\}$的通项公式

推论3.2.2. $i^{-1}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\}=\sum_{k=0}^{(n+1)/2}[c_{n+1}^{2k+1}-c_n^{2k-1}\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k},n\geq 0$

证明: $i^{-1}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\}=i^{-1}\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\}\times\sigma(s;w)|\cdot\hat{p}$
$=\sum_{k=0}^{[n/2]}\{(c_n^{2k+1}+c_n^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+(c_n^{2k}-c_n^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-c_n^{2k+1}\sigma^2(s;w)\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k-1}$
$=\sum_{k=0}^{[n/2]}\{(c_n^{2k+1}+c_n^{2k+2})+(c_n^{2k}-c_n^{2k+2})\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k}-\sum_{k=0}^{[n/2]}c_n^{2k+1}\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-1-2k}$
$=\sum_{k=0}^{[n/2]}c_{n+1}^{2k+1}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k}-\sum_{k=1}^{[n/2]+1}c_n^{2k-1}\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k}$

$$= \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} c_{n+1}^{2k+1}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k} - \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]+1} c_n^{2k-1}\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k}$$
$$= \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} [c_{n+1}^{2k+1} - c_n^{2k-1}\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k} \qquad \square$$

4 复杂自旋复合算符的通项公式

4.1 $i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)$ 和$i^{-n}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}][|\times\sigma(s;w)]^n$ 的通项公式

4.1.1 $i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)$的通项公式

性质4.1.1.

$$\begin{cases} i^{-0}[\sigma(s;w)\times|]^0\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)\} = [\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) \\ i^{-1}[\sigma(s;w)\times|]^1\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)\} = \sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] + [\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) - \sigma^2(s;w)\hat{p} \\ i^{-2}[\sigma(s;w)\times|]^2[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) = [2-\sigma^2(s;w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] + [1+\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) - \sigma^2(s;w)\hat{p} \\ i^{-3}[\sigma(s;w)\times|]^3[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) \\ = [3-\sigma^2(s;w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] + [1+2\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) - [1+\sigma^2(s;w)]\sigma^2(s;w)\hat{p} \\ i^{-4}[\sigma(s;w)\times|]^4[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) \\ = [4-\sigma^4(s;w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] + [1+3\sigma^2(s;w)+\sigma^4(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) - [1+2\sigma^2(s;w)]\sigma^2(s;w)\hat{p} \end{cases}$$

性质4.1.2.

$$\begin{cases} i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) = \sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] - i^{-(n+1)}[\sigma(s;w)\times|]^{n+1}\hat{p} \\ i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) = [\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2 - i^{-(n+1)}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^{n+1}\hat{p} \end{cases}$$

证明: $i^{-(n+1)}[\sigma(s;w)\times|]^{n+1}\hat{p}$

$= i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n i^{-1}\sigma(s;w)\times\hat{p}$

$= i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] - [\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)\}$

$= \sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] - i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)$

$\Rightarrow i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) = \sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] - i^{-(n+1)}[\sigma(s;w)\times|]^{n+1}\hat{p}$ $\square$

推论4.1.1. $i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)$
$= [1-a_{n+1}(w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] - b_{n+1}(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) + c_{n+1}(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}$

推论4.1.2. $i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)$
$= [1-a_{n+1}(w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] - b_{n+1}(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) + b_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}, n\geq 0$

推论4.1.3. $i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) = [1-a_{n+1}(w)-b_{n+1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2 + c_{n+1}(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}, n\geq 0$

推论4.1.4. $i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) = [1-a_n(w)-2b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2 + b_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}, n\geq 0$

4.1.2 $i^{-n}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}][|\times\sigma(s;w)]^n$的通项公式

性质4.1.3.

$$\begin{cases} i^{-n}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}][|\times\sigma(s;w)]^n = [\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) - i^{-(n+1)}\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^{n+1} \\ i^{-n}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}][|\times\sigma(s;w)]^n = [\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2 - i^{-(n+1)}\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^{n+1}|\cdot\hat{p} \end{cases}$$

证明: $i^{-(n+1)}\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^{n+1}$

$= i^{-1}\hat{p}\times\sigma(s;w)][|\times\sigma(s;w)]^n i^{-n}$

$= \{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) - \sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\}[|\times\sigma(s;w)]^n i^{-n}$

$= [\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) - i^{-n}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}][|\times\sigma(s;w)]^n$

$\Rightarrow i^{-n}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}][|\times\sigma(s;w)]^n = [\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) - i^{-(n+1)}\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^{n+1}$ $\square$

推论4.1.5. $i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)$
$=[1-a_{n+1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-b_{n+1}(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+c_{n+1}(w)\sigma^2(s;w)\hat{p},n\geq 0$

推论4.1.6. $i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)$
$=[1-a_{n+1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-b_{n+1}(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+b_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p},n\geq 0$

推论4.1.7. $i^{-n}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}][|\times\sigma(s;w)]^n=[1-a_{n+1}(w)-b_{n+1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+c_{n+1}(w)\sigma^2(s;w)\hat{p},n\geq 0$

推论4.1.8. $i^{-n}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}][|\times\sigma(s;w)]^n=[1-a_n(w)-2b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+b_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p},n\geq 0$

推论4.1.9. $i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)=i^{-n}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}][|\times\sigma(s;w)]^n,n\geq 0$

4.2 $i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)$和$i^{-n}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l[|\times\sigma(s;w)]^n$的通项公式

4.2.1 $i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)$的通项公式

定理4.2.1. $i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\},n\geq 1,l\geq 0$
$=\sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1}-C_{l+1}^{2k+2}a_n(w)-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)a_{n-1}(w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$-[C_{l+1}^{2k+2}b_n(w)+C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+[C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)+C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)b_{n-2}(w)]\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$

证明: $i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\}$
$=i^{-(n-1)}[\sigma(s;w)\times|]^{n-1}i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\}$
$=i^{-(n-1)}[\sigma(s;w)\times|]^{n-1}\sum_{k=0}^{[l/2]}\{(C_l^{2k+1}+C_l^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+(C_l^{2k}-C_l^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$=\sum_{k=0}^{[l/2]}\{(C_l^{2k+1}+C_l^{2k+2})\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}\}+(C_l^{2k}-C_l^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)i^{-(n-1)}[\sigma(s;w)\times|]^{n-1}\hat{p}\}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$=\sum_{k=0}^{[l/2]}\{-C_{l+1}^{2k+2}i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}+C_{l+1}^{2k+1}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)i^{-(n-1)}[\sigma(s;w)\times|]^{n-1}\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$=\sum_{k=0}^{[l/2]}\{-C_{l+1}^{2k+2}\{a_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+b_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-c_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}\}+C_{l+1}^{2k+1}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)\{a_{n-1}(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+b_{n-1}(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-c_{n-1}(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}\}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$=\sum_{k=0}^{[l/2]}\{[-C_{l+1}^{2k+2}a_n(w)-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)a_{n-1}(w)+C_{l+1}^{2k+1}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$+[-C_{l+1}^{2k+2}b_n(w)-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+[C_{l+1}^{2k+2}c_n(w)+C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)c_{n-1}(w)]\sigma^2(s;w)\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$=\sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1}-C_{l+1}^{2k+2}a_n(w)-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)a_{n-1}(w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$-[C_{l+1}^{2k+2}b_n(w)+C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+[C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)c_n(w)+C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)c_{n-1}(w)]\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$=\sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1}-C_{l+1}^{2k+2}a_n(w)-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)a_{n-1}(w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$-[C_{l+1}^{2k+2}b_n(w)+C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+[C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)+C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)b_{n-2}(w)]\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$ □

推论4.2.1. $i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\},n\geq 1,l\geq 0$
$=\sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1}-C_{l+1}^{2k+2}[a_n(w)+b_n(w)]-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)[a_{n-1}(w)+b_{n-1}(w)]][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2$
$+[C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)c_n(w)+C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)c_{n-1}(w)]\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$=\sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1}-C_{l+1}^{2k+2}[a_n(w)+b_n(w)]-C_l^{2k+1}[1+b_n(w)]][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+[C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)c_n(w)+C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)c_{n-1}(w)]\}[\sigma(s;w)\cdot$

$\hat{p}]^{l-2k-1}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_l^{2k} - C_{l+1}^{2k+2}[a_n(w)+b_n(w)] - C_l^{2k+1}b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2 + [C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w) + C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)b_{n-2}(w)]\}[\sigma(s;w)\cdot$
$\hat{p}]^{l-2k-1}$

推论4.2.2. $i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\}, n\geq 1, l\geq 0$
$= \sum_{k=0}^{[(l+1)/2]}[C_l^{2k+1}k_{n+1} + C_l^{2k+2}k_n(w) + [C_l^{2k-1}b_n(w) + C_l^{2k}b_{n-1}(w)]\sigma^2(s;w) + C_l^{2k}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1-2k}$
$- b_{n-1}(w)\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1}$

证明: $i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\}, n\geq 1, l\geq 0$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}[a_n(w)+b_n(w)] - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)[a_{n-1}(w)+b_{n-1}(w)]][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2$
$+ [C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)c_n(w) + C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)c_{n-1}(w)]\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$= \sum_{k=0}^{[(l+1)/2]}[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}[a_n(w)+b_n(w)] - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)[a_{n-1}(w)+b_{n-1}(w)]][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$+ \sum_{k=0}^{[(l-1)/2]}[C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)c_n(w) + C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)c_{n-1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$= \sum_{k=0}^{[(l+1)/2]}[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}[a_n(w)+b_n(w)] - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)[a_{n-1}(w)+b_{n-1}(w)]][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1-2k}$
$+ \sum_{k=1}^{[(l+1)/2]}[C_{l+1}^{2k}\sigma^2(s;w)c_n(w) + C_l^{2k-1}\sigma^4(s;w)c_{n-1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1-2k}$
$= \sum_{k=0}^{[(l+1)/2]}[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}[a_n(w)+b_n(w)] - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)[a_{n-1}(w)+b_{n-1}(w)]][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1-2k}$
$+ \sum_{k=0}^{[(l+1)/2]}[C_{l+1}^{2k}\sigma^2(s;w)c_n(w) + C_l^{2k-1}\sigma^4(s;w)c_{n-1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1-2k} - \sigma^2(s;w)c_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1}$
$= \sum_{k=0}^{[(l+1)/2]}[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}[a_n(w)+b_n(w)] - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)[a_{n-1}(w)+b_{n-1}(w)] + C_{l+1}^{2k}\sigma^2(s;w)c_n(w) + C_l^{2k-1}\sigma^4(s;w)c_{n-1}(w)]$
$[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1-2k} - \sigma^2(s;w)c_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1}$
$= \sum_{k=0}^{[(l+1)/2]}[C_l^{2k+1}k_{n+1} + C_l^{2k+2}k_n(w) + [C_l^{2k-1}c_{n+1}(w) + C_l^{2k}c_n(w)]\sigma^2(s;w) + C_l^{2k}]$
$[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1-2k} - c_n(w)\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1}$
$= \sum_{k=0}^{[(l+1)/2]}[C_l^{2k+1}k_{n+1} + C_l^{2k+2}k_n(w) + [C_l^{2k-1}b_n(w) + C_l^{2k}b_{n-1}(w)]\sigma^2(s;w) + C_l^{2k}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1-2k}$
$- b_{n-1}(w)\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1}$ □

推论4.2.3. $i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\}, n\geq 0, l\geq 0$
$= \sum_{k=0}^{[(l+1)/2]}[C_l^{2k+1}k_{n+1} + C_l^{2k+2}k_n(w) + [C_l^{2k-1}b_n(w) + C_l^{2k}b_{n-1}(w)]\sigma^2(s;w) + C_l^{2k}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1-2k}$
$- b_{n-1}(w)\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1}$

4.2.2 $i^{-n}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l[|\times\sigma(s;w)]^n$的通项公式

定理4.2.2. $i^{-n}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l[|\times\sigma(s;w)]^n, n\geq 1, l\geq 0$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}\{[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}a_n(w) - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)a_{n-1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)$
$- [C_{l+1}^{2k+2}b_n(w) + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] + [C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w) + C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)b_{n-2}(w)]\hat{p}\}$

证明: $i^{-n}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l[|\times\sigma(s;w)]^n, n\geq 1, l\geq 0$
$= i^{-(n-1)}i^{-1}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\times\sigma(s;w)[|\times\sigma(s;w)]^{n-1}$
$= i^{-(n-1)}\sum_{k=0}^{[l/2]}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}\{(C_l^{2k+1} + C_l^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$+ (C_l^{2k} - C_l^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}[|\times\sigma(s;w)]^{n-1}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}\{(C_l^{2k+1} + C_l^{2k+2})\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) - i^{-n}\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^n\}$

$+ (C_l^{2k} - C_l^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)i^{-(n-1)}\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^{n-1}\}\}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}\{-C_{l+1}^{2k+2}i^{-n}\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^n + C_{l+1}^{2k+1}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)$
$- C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)i^{-(n-1)}\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^{n-1}\}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}\{-C_{l+1}^{2k+2}\{a_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) + b_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] - c_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}\}$
$+C_{l+1}^{2k+1}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)\{a_{n-1}(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w) + b_{n-1}(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] - c_{n-1}(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}\}\}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}\{[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}a_n(w) - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)a_{n-1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)$
$- [C_{l+1}^{2k+2}b_n(w) + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] + [C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)c_n(w) + C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)c_{n-1}(w)]\hat{p}\}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}\{[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}a_n(w) - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)a_{n-1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)$
$- [C_{l+1}^{2k+2}b_n(w) + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] + [C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w) + C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)b_{n-2}(w)]\hat{p}\}$ □

推论4.2.4. $i^{-n}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l[|\times\sigma(s;w)]^n, n\geq 1, l\geq 0$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}[a_n(w)+b_n(w)] - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)[a_{n-1}(w)+b_{n-1}(w)]][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2$
$+ [C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)c_n(w) + C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)c_{n-1}(w)]\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}[a_n(w)+b_n(w)] - C_l^{2k+1}[1+b_n(w)]][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2 + [C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)c_n(w) + C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)c_{n-1}(w)]\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_l^{2k} - C_{l+1}^{2k+2}[a_n(w)+b_n(w)] - C_l^{2k+1}b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2 + [C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w) + C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)b_{n-2}(w)]\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$

推论4.2.5. $i^{-n}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l[|\times\sigma(s;w)]^n, n\geq 0, l\geq 0$
$= \sum_{k=0}^{[(l+1)/2]}[C_l^{2k+1}k_{n+1} + C_l^{2k+2}k_n(w) + [C_l^{2k-1}b_n(w) + C_l^{2k}b_{n-1}(w)]\sigma^2(s;w) + C_l^{2k}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1-2k}$
$- b_{n-1}(w)\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1}$

推论4.2.6. $i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\} = i^{-n}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l[|\times\sigma(s;w)]^n, n\geq 0, l\geq 0$

4.2.3 $i^{-n}\sigma(s;w)\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\}, i^{-n}\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\}[|\times\sigma(s;w)]^n|\cdot\sigma(s;w)$ 的通项公式

定理4.2.3. $i^{-n}\sigma(s;w)\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\} = i^{-n}\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\}[|\times\sigma(s;w)]^n|\cdot\sigma(s;w)$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}[C_l^{2k}\sigma^2(s;w) - C_{l+1}^{2k+2}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k}, n\geq 1, l\geq 0$

证明: $n\geq 1, l\geq 0$
$i^{-n}\sigma(s;w)\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\} = i^{-n}\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\}[|\times\sigma(s;w)]^n|\cdot\sigma(s;w)$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}a_n(w) - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)a_{n-1}(w)]\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$- [C_{l+1}^{2k+2}b_n(w) + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)]\sigma(s;w)\cdot[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)$
$+ [C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w) + C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)b_{n-2}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}a_n(w) - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)a_{n-1}(w)]\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$- [C_{l+1}^{2k+2}b_n(w) + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)][\sigma^2(s;w)-1][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$+ [C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w) + C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)b_{n-2}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}a_n(w) - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)a_{n-1}(w) - C_{l+1}^{2k+2}b_n(w) - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)]\sigma^2(s;w)$
$+ [C_{l+1}^{2k+2}b_n(w) + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)] + [C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w) + C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)b_{n-2}(w)]\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1} + C_{l+1}^{2k+2}k_n(w) + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)k_{n-1}]\sigma^2(s;w) + [C_{l+1}^{2k+2}b_{n+1}(w) + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_n(w)]\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}\sigma^{-2}(s;w)(b_{n+1}(w)+1) - C_l^{2k+1}(b_n(w)+1)]\sigma^2(s;w) + [C_{l+1}^{2k+2}b_{n+1}(w) + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_n(w)]\}[\sigma(s;w)\cdot$

$\hat{p}]^{l-2k}$

$= \sum_{k=0}^{[l/2]}[C_l^{2k}\sigma^2(s;w) - C_{l+1}^{2k+2}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k}$ □

推论4.2.7. $i^{-n}\sigma(s;w)\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\} = i^{-n}\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\}[|\times\sigma(s;w)]^n|\cdot\sigma(s;w)$
$= \sigma(s;w)\cdot[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w) = \sum_{k=0}^{[l/2]}[C_l^{2k}\sigma^2(s;w) - C_{l+1}^{2k+2}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k}, n\geq 0, l\geq 0$

4.2.4 $i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\}|\cdot\sigma(s;w), i^{-n}\sigma(s;w)\cdot|\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\}[|\times\sigma(s;w)]^n$ 的通项公式

定理4.2.4. $i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\}|\cdot\sigma(s;w) = i^{-n}\sigma(s;w)\cdot|\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\}[|\times\sigma(s;w)]^n$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}[C_l^{2k}\sigma^2(s;w) - C_{l+2}^{2k+2} + C_{l+1}^{2k+2}[a_n(w)-b_n(w)] + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)[a_{n-1}(w)-b_{n-1}(w)]][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k}, n\geq 1, l\geq 0$

证明: $n\geq 1, l\geq 0$

$i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\}|\cdot\sigma(s;w) = i^{-n}\sigma(s;w)\cdot|\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\}[|\times\sigma(s;w)]^n$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}a_n(w) - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)a_{n-1}(w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\cdot\sigma(s;w)$
$-[C_{l+1}^{2k+2}b_n(w) + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma^2(s;w)$
$+[C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w) + C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)b_{n-2}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}a_n(w) - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)a_{n-1}(w)][\sigma^2(s;w)-1][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$-[C_{l+1}^{2k+2}b_n(w) + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)]\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$+[C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w) + C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)b_{n-2}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}a_n(w) - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)a_{n-1}(w) - C_{l+1}^{2k+2}b_n(w) - C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)]\sigma^2(s;w)$
$+[-C_{l+1}^{2k+1}+C_{l+1}^{2k+2}a_n(w)+C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)a_{n-1}(w)]+[C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)+C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)b_{n-2}(w)]\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1} + C_{l+1}^{2k+2}k_n(w) + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)k_{n-1}]\sigma^2(s;w) + [C_{l+1}^{2k+2}b_{n+1}(w) + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_n(w)]$
$+[-C_{l+1}^{2k+1} + C_{l+1}^{2k+2}[a_n(w)-b_n(w)] + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)[a_{n-1}(w)-b_{n-1}(w)]]\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1} - C_{l+1}^{2k+2}\sigma^{-2}(s;w)(b_{n+1}(w)+1) - C_l^{2k+1}(b_n(w)+1)]\sigma^2(s;w) + [C_{l+1}^{2k+2}b_{n+1}(w) + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_n(w)]$
$+[-C_{l+1}^{2k+1} + C_{l+1}^{2k+2}[a_n(w)-b_n(w)] + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)[a_{n-1}(w)-b_{n-1}(w)]]\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}\{C_l^{2k}\sigma^2(s;w) - C_{l+1}^{2k+2} + [-C_{l+1}^{2k+1} + C_{l+1}^{2k+2}[a_n(w)-b_n(w)] + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)[a_{n-1}(w)-b_{n-1}(w)]]\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k}$
$= \sum_{k=0}^{[l/2]}[C_l^{2k}\sigma^2(s;w) - C_{l+2}^{2k+2} + C_{l+1}^{2k+2}[a_n(w)-b_n(w)] + C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)[a_{n-1}(w)-b_{n-1}(w)]][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k}$ □

5 复杂自旋复合算符通项公式的另一种独立求法

5.1 $i^{-1}\hat{p}\cdot\{\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\}\}$通项公式的另一种求法

5.1.1 $i^{-1}\hat{p}\cdot\{\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\}\}$的通项公式的试探和猜想

定义5.1.1. $A(1,n) := i^{-1}\hat{p}\cdot\{\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\}\}, A(1,0) = \sigma(s;w)\cdot\hat{p}$

推论5.1.1. $\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^{2k-1} = (-1)^{k+1}\sigma(s;w)\times\hat{p}, \sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^{2k} = (-1)^{k+1}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\hat{p} - \sigma(s;w)$

$$\Rightarrow\begin{cases} i^{2k-1}i^{-1}\hat{p}\cdot\{\sigma(s;w)\times\{\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^{2k-1}\}\} = \{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2 - \sigma^2(s;w)\} \\ i^{2k}i^{-1}\hat{p}\cdot\{\sigma(s;w)\times\{\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^{2k}\}\} = \sigma(s;w)\cdot\hat{p}\end{cases}$$

推论5.1.2. $i^{-1}\hat{p}\cdot\{\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\}\}$
$= i^{-1}i^n\hat{p}\cdot\{\sigma(s;w)\times\{\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n\}\} - \sum_{k=0}^{n-1}c_n^k i^{-1}\hat{p}\cdot\{\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^k\sigma(s;w)\}\}[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-k}$

推论5.1.3.
$A(1,n) = \{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{1+n\%2} - (n\%2)\sigma^2(s;w)\} - \sum_{k=0}^{n-1}c_n^k A(1,k)[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-k}, A(1,0) = -\sigma(s;w)\cdot\hat{p}$

性质5.1.1.

$$\begin{cases} A(1,0)=1[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] \\ A(1,1)=2[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-\sigma^2(s;w) \\ A(1,2)=3[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3-[2\sigma^2(s;w)-1][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] \\ A(1,3)=4[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^4-[3\sigma^2(s;w)-4][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-\sigma^2(s;w) \\ A(1,4)=5[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^5-[4\sigma^2(s;w)-10][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3-[4\sigma^2(s;w)-1][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^1 \\ A(1,5)=6[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^6-[5\sigma^2(s;w)-20][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^4-[10\sigma^2(s;w)-6][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-\sigma^2(s;w) \end{cases}$$

重新整理得到：

性质5.1.2.

$$\begin{cases} A(1,0)=c_1^1[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] \\ A(1,1)=c_2^1[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-c_1^1\sigma^2(s;w) \\ A(1,2)=C_3^1[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3-[c_2^1\sigma^2(s;w)-C_3^3][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}] \\ A(1,3)=C_4^1[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^4-[C_3^1\sigma^2(s;w)-C_4^3][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-C_3^3\sigma^2(s;w) \\ A(1,4)=C_5^1[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^5-[C_4^1\sigma^2(s;w)-C_5^3][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3-[C_4^3\sigma^2(s;w)-C_5^5][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^1 \\ A(1,5)=C_6^1[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^6-[C_5^1\sigma^2(s;w)-C_6^3][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^4-[C_5^3\sigma^2(s;w)-C_6^5][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-C_5^5\sigma^2(s;w) \end{cases}$$

猜想5.1.1.

$$A(1,n)=c_{n+1}^1[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1}-[c_n^1\sigma^2(s;w)-c_{n+1}^3][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-1}-[c_n^3\sigma^2(s;w)-c_{n+1}^5][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-3}+\cdots$$

猜想5.1.2. $i^{-1}\hat{p}\cdot\{\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\}\}=\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}[c_{n+1}^{2k+1}-c_n^{2k-1}\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k},n\geq 0$

下面用数学归纳法严格证明以上猜想。

5.1.2 $i^{-1}\hat{p}\cdot\{\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\}\}$的通项公式的数学归纳法证明

定理5.1.1. $A(1,n)=\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}[c_{n+1}^{2k+1}-c_n^{2k-1}\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k},n\geq 0$

证明： $A(1,n+1)=\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{1+(n+1)\%2}-(n+1)\%2\sigma^2(s;w)\}-\sum_{l=0}^{n}c_{n+1}^{l}A(1,l)[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-l}$

$=\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{1+(n+1)\%2}-(n+1)\%2\sigma^2(s;w)\}$

$-\sum_{l=0}^{n}c_{n+1}^{l}\sum_{k=0}^{[(l+1)/2]}[C_{l+1}^{2k+1}-C_l^{2k-1}\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1-2k}[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-l}$

$=\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{1+(n+1)\%2}-(n+1)\%2\sigma^2(s;w)\}-\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{[(l+1)/2]}(-1)^{n+1-l}c_{n+1}^{l}[C_{l+1}^{2k+1}-C_l^{2k-1}\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+2-2k}$

$=\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{1+(n+1)\%2}-(n+1)\%2\sigma^2(s;w)\}$

$-\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}\sum_{l=2k-1|0}^{n}(-1)^{n+1-l}c_{n+1}^{l}[C_{l+1}^{2k+1}-C_l^{2k-1}\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+2-2k}$

$=\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{1+(n+1)\%2}-(n+1)\%2\sigma^2(s;w)\}-\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+2-2k}\sum_{l=2k-1|0}^{n}(-1)^{n-l}c_{n+1}^{l}[C_l^{2k-1}\sigma^2(s;w)-C_{l+1}^{2k+1}]$

$=\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}[c_{n+1}^{2k+1}-c_n^{2k-1}\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n+1-2k}$ □

5.2 $i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)$ 和$i^{-n}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l[|\times\sigma(s;w)]^n$通项公式的另一种求法

5.2.1 $i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)$的通项公式

定义5.2.1. $A_L(n,l):=i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w),A_L(n,0)=\sigma(s;w)\cdot\hat{p}$

推论5.2.1.

$$i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)$$
$$=i^{-n}i^l\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^l-\sum_{k=0}^{l-1}C_l^k i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^k\sigma(s;w)[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-k}$$

推论5.2.2.

$$\begin{cases}i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n i^{2k-1}\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^{2k-1}\\ =-i^{-(n+1)}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n\sigma(s;w)\times\hat{p}=-[a_{n+1}(w)+b_{n+1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+c_{n+1}(w)\sigma^2(s;w)\\ i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n i^{2k}\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^{2k}\\ =-i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\hat{p}-\sigma(s;w)\}=-[a_n(w)+b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3+[c_n(w)\sigma^2(s;w)+1][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\end{cases}$$

推论5.2.3. $i^{l-n}[\sigma(s;w)\times|]^n\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^l$

$$=\begin{cases}-a_{n+1}(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-b_{n+1}(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+c_{n+1}(w)\sigma^2(s;w)\hat{p},l=2k-1\\ -a_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-b_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+c_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+\sigma(s;w),l=2k\\ i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}=a_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+b_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-c_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}\end{cases}$$

推论5.2.4.

$$i^{l-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^l=\begin{cases}-[a_{n+1}(w)+b_{n+1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+c_{n+1}(w)\sigma^2(s;w),l=2k-1\\ -[a_n(w)+b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3+[1+c_n(w)\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}],l=2k\end{cases}$$

定理5.2.1.

$$\begin{cases}A_L(n,l)=i^{l-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^l-\sum_{k=0}^{l-1}C_l^kA_L(n,k)[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-k},A_L(n,0)=\sigma(s;w)\cdot\hat{p}\\ i^{l-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^l=\begin{cases}k_{n+1}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+c_{n+1}(w)\sigma^2(s;w),l=2k-1;k_n(w)=-[a_n(w)+b_n(w)]\\ k_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3+[1+c_n(w)\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}],l=2k\end{cases}\end{cases}$$

推论5.2.5.

$$\begin{cases}A_L(n,0)=C_0^0\sigma(s;w)\cdot\hat{p}\\ A_L(n,1)=(c_1^1k_{n+1}+c_1^0)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+c_1^1c_{n+1}(w)\sigma^2(s;w),k_{n+1}=-[a_{n+1}(w)+b_{n+1}(w)]\\ A_L(n,2)=[c_2^1k_{n+1}+c_2^2k_n(w)+c_2^0][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3+\{[c_2^1c_{n+1}(w)+c_2^2c_n(w)]\sigma^2(s;w)+c_2^2\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\\ A_L(n,3)=[C_3^1k_{n+1}+C_3^2k_n(w)+C_3^0][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^4+\{C_3^3k_{n+1}+[C_3^1c_{n+1}(w)+C_3^2c_n(w)]\sigma^2(s;w)+C_3^2\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2\\ +C_3^3c_{n+1}(w)\sigma^2(s;w)\\ A_L(n,4)=[C_4^1k_{n+1}+C_4^2k_n(w)+C_4^0][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^5+\{C_4^3k_{n+1}+C_4^4k_n(w)+[C_4^1c_{n+1}(w)+C_4^2c_n(w)]\sigma^2(s;w)+C_4^2\}[\sigma(s;w\\ +\{[(C_4^3c_{n+1}(w)+C_4^4c_n(w)]\sigma^2(s;w)+C_4^4\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^1\end{cases}$$

定理5.2.2.

$$\begin{cases}A_L(n,l)=i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\\ =\sum_{k=0}^{[(l+1)/2]}\{C_l^{2k+1}k_{n+1}+C_l^{2k+2}k_n(w)+[C_l^{2k-1}c_{n+1}(w)+C_l^{2k}c_n(w)]\sigma^2(s;w)+C_l^{2k}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1-2k}\\ -c_n(w)\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1}\\ k_n(w)=-[a_n(w)+b_n(w)],n\geq 0,l\geq 0\end{cases}$$

推论5.2.6.

$$\begin{cases}A_L(n,l)=i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\\ =\sum_{k=0}^{[(l+1)/2]}\{C_l^{2k+1}k_{n+1}+C_l^{2k+2}k_n(w)+[C_l^{2k-1}b_n(w)+C_l^{2k}b_{n-1}(w)]\sigma^2(s;w)+C_l^{2k}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1-2k}\\ -b_{n-1}(w)\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1};k_n(w)=-[a_n(w)+b_n(w)],n\geq 0,l\geq 0\end{cases}$$

可以用数学归纳法严格证明以上定理，有空再补上。

5.2.2 $i^{-n}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l[|\times\sigma(s;w)]^n$的通项公式

定义5.2.2. $A_R(n,l):=i^{-n}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l[|\times\sigma(s;w)]^n, A_R(n,0)=\sigma(s;w)\cdot\hat{p}$

性质5.2.1. $\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l=i^l[\hat{p}\times|]^l\sigma(s;w)-\sum\limits_{k=0}^{l-1}c_n^k[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-k}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^k$

推论5.2.7. $i^{-n}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l[|\times\sigma(s;w)]^n$
$=i^{l-n}\hat{p}\cdot|[\hat{p}\times|]^l\sigma(s;w)[|\times\sigma(s;w)]^n-\sum\limits_{k=0}^{l-1}c_n^k[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-k}i^{-n}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^k[|\times\sigma(s;w)]^n$

推论5.2.8. $i^{l-n}[\hat{p}\times|]^l\sigma(s;w)[|\times\sigma(s;w)]^n$

$$=\begin{cases}-a_{n+1}(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-b_{n+1}(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+c_{n+1}(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}, l=2k-1\\-a_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s;w)-b_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+c_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+\sigma(s;w), l=2k\\i^{-n}\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^n=a_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+b_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-c_n(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}\end{cases}$$

推论5.2.9. $i^{l-n}\hat{p}\cdot|[\hat{p}\times|]^l\sigma(s;w)[|\times\sigma(s;w)]^n=\begin{cases}-[a_{n+1}(w)+b_{n+1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+c_{n+1}(w)\sigma^2(s;w), l=2k-1\\-[a_n(w)+b_n(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3+[1+c_n(w)\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}], l=2k\end{cases}$

定理5.2.3.

$$\begin{cases}A_R(n,l)=i^{l-n}\hat{p}\cdot|[\hat{p}\times|]^l\sigma(s;w)[|\times\sigma(s;w)]^n-\sum\limits_{k=0}^{l-1}c_n^k[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-k}A_R(n,k), A_R(n,0)=\sigma(s;w)\cdot\hat{p}\\i^{l-n}\hat{p}\cdot|[\hat{p}\times|]^l\sigma(s;w)[|\times\sigma(s;w)]^n=\begin{cases}k_{n+1}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+c_{n+1}(w)\sigma^2(s;w), l=2k-1; k_n(w)=-[a_n(w)+b_n(w)]\\k_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^3+[1+c_n(w)\sigma^2(s;w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}], l=2k\end{cases}\end{cases}$$

与上节的离散方程和初始条件完全等价，故有以下相同的解。

定理5.2.4.

$$\begin{cases}A_R(n,l)=i^{-n}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l[|\times\sigma(s;w)]^n\\=\sum\limits_{k=0}^{[(l+1)/2]}\{C_l^{2k+1}k_{n+1}+C_l^{2k+2}k_n(w)+[C_l^{2k-1}c_{n+1}(w)+C_l^{2k}c_n(w)]\sigma^2(s;w)+C_l^{2k}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1-2k}\\-c_n(w)\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1}; k_n(w)=-[a_n(w)+b_n(w)], n\geq0, l\geq0\end{cases}$$

推论5.2.10.

$$\begin{cases}A_R(n,l)=i^{-n}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l[|\times\sigma(s;w)]^n\\=\sum\limits_{k=0}^{[(l+1)/2]}\{C_l^{2k+1}k_{n+1}+C_l^{2k+2}k_n(w)+[C_l^{2k-1}b_n(w)+C_l^{2k}b_{n-1}(w)]\sigma^2(s;w)+C_l^{2k}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1-2k}\\-b_{n-1}(w)\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1}; k_n(w)=-[a_n(w)+b_n(w)], n\geq0, l\geq0\end{cases}$$

推论5.2.11. $A_L(n,l)=A_R(n,l), \hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)=\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l[|\times\sigma(s;w)]^n, n\geq0$

6 各种通项公式汇总小结

6.1 基本通项公式小结

定理6.1.1.

$$\begin{cases}i^n\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n=\sum\limits_{k=0}^{n}c_n^k[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^k\sigma(s;w)[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-k}, n\geq0=\begin{cases}i\sigma(s;w)\times\hat{p}, n=2k-1, k\geq1\\\sigma(s;w)-[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\hat{p}, n=2k\end{cases}\\i^n[\hat{p}\times|]^n\sigma(s;w)=\sum\limits_{k=0}^{n}c_n^k[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-k}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^k, n\geq0=\begin{cases}i\hat{p}\times\sigma(s;w), n=2k-1, k\geq1\\\sigma(s;w)-[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\hat{p}, n=2k\end{cases}\end{cases}$$

定理6.1.2.

$$\begin{cases}i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}=a_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+b_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-b_{n-1}(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}, n\geq0\\i^{-n}\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^n=a_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+b_n(w)\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-b_{n-1}(w)\sigma^2(s;w)\hat{p}, n\geq0\end{cases}$$

定理6.1.3.

$$\begin{cases}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)=i^n\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n-\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_n^k[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^k\sigma(s;w)[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-k},n\geq 0\\ \sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n=i^n[\hat{p}\times|]^n\sigma(s;w)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_n^k[-\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-k}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^k,n\geq 0\end{cases}$$

6.2 基本叉乘型通项公式小结

定理6.2.1.

$$\begin{cases}i^{-1}\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)\},n\geq 0\\ =\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}\{(c_n^{2k+1}+c_n^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+(c_n^{2k}-c_n^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-c_n^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k-1}\\ i^{-1}\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\}\times\sigma(s;w),n\geq 0\\ =\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k-1}\{(c_n^{2k+1}+c_n^{2k+2})\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+(c_n^{2k}-c_n^{2k+2})[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-c_n^{2k+1}\sigma^2(s;w)\hat{p}\}\end{cases}$$

6.3 基本叉乘型扩展通项公式小结

定理6.3.1.

$$\begin{cases}i^{-n}[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\},n\geq 1,l\geq 0\\ =\sum\limits_{k=0}^{[l/2]}\{[C_{l+1}^{2k+1}-C_{l+1}^{2k+2}a_n(w)-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)a_{n-1}(w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\\ -[C_{l+1}^{2k+2}b_n(w)+C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+[C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)+C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)b_{n-2}(w)]\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\\ i^{-n}\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l[|\times\sigma(s;w)]^n,n\geq 1,l\geq 0\\ =\sum\limits_{k=0}^{[l/2]}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k-1}\{[C_{l+1}^{2k+1}-C_{l+1}^{2k+2}a_n(w)-C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)a_{n-1}(w)][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)\\ -[C_{l+1}^{2k+2}b_n(w)+C_l^{2k+1}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+[C_{l+1}^{2k+2}\sigma^2(s;w)b_{n-1}(w)+C_l^{2k+1}\sigma^4(s;w)b_{n-2}(w)]\hat{p}\}\end{cases}$$

6.4 基本标积型通项公式小结

定理6.4.1.

$$\sigma(s;w)\cdot[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s;w)=\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^n\cdot\sigma(s;w)=\sum_{k=0}^{[n/2]}[c_n^{2k}\sigma^2(s;w)-c_{n+1}^{2k+2}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{n-2k},n\geq 0$$

6.5 基本标积型扩展通项公式小结

定理6.5.1. $i^n\sigma(s;w)[|\times\hat{p}]^n|\cdot\hat{p}=i^n\hat{p}\cdot|[\hat{p}\times|]^n\sigma(s;w)=0,n\geq 1$

定理6.5.2.

$$\left\{i^{-n}\hat{p}\cdot\{[\sigma(s;w)\times|]^n\hat{p}\}=i^{-n}\{\hat{p}[|\times\sigma(s;w)]^n\}\cdot\hat{p}=-k_n(w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2+b_{n-1}(w)\sigma^2(s;w),n\geq 0\right.$$

定理6.5.3.

$$\begin{cases}A_L(n,l)=i^{-n}\hat{p}\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)=i^{-n}\hat{p}\cdot|\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l[|\times\sigma(s;w)]^n=A_R(n,l)\\ =\sum\limits_{k=0}^{[(l+1)/2]}\{C_l^{2k+1}k_{n+1}+C_l^{2k+2}k_n(w)+[C_l^{2k-1}b_n(w)+C_l^{2k}b_{n-1}(w)]\sigma^2(s;w)+C_l^{2k}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1-2k}\\ -b_{n-1}(w)\sigma^2(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l+1},n\geq 0,l\geq 0\end{cases}$$

定理6.5.4.

$$\begin{cases}i^{-n}\sigma(s;w)\cdot|[\sigma(s;w)\times|]^n\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)\}=i^{-n}\{\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\}[|\times\sigma(s;w)]^n|\cdot\sigma(s;w)\\ =\sigma(s;w)\cdot[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^l\sigma(s;w)=\sum\limits_{k=0}^{[l/2]}[C_l^{2k}\sigma^2(s;w)-C_{l+1}^{2k+2}][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^{l-2k},n\geq 0,l\geq 0\end{cases}$$

6.6 更一般各种通项公式的探讨

利用以上基本的通项公式，可以比较容易地严格推导出更多、更复杂的各种通项公式，不再存在原则上的推导困难。

7 特殊的通项公式

7.1 关于$\sigma(s;w)$的一种特殊通项公式

性质7.1.1. $$\begin{cases}\hat{p}\cdot\{\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^1\sigma(s;w)\}\}=2i[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-i\sigma^2(s;w)\\ \hat{p}\cdot\{\sigma(s;w)\times\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s;w)\}\}=3i[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-i[\sigma^2(s;w)-1][\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\end{cases}$$

定理7.1.1. $[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\hat{p}=-i[\sigma(s;w)\times\hat{p}]\times[\sigma(s;w)\times\hat{p}]$
$=\sigma(s;w)-\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s;w)+2[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$

证明: $[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\hat{p}=-i[\sigma(s;w)\times\hat{p}]\times[\sigma(s;w)\times\hat{p}]$
$=i\sigma(s;w)\times|[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]i\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]|\times\sigma(s;w)$
$-i\sigma(s;w)\times|[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s;w)+[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$=\{-[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+\sigma^2(s;w)\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$+[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\{-[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)-\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+\sigma^2(s;w)\hat{p}\}$
$+3[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-2\sigma^2(s;w)\hat{p}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+\sigma(s;w)+[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$=-\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-\sigma^2(s;w)\hat{p}\}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$-[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\{[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)+\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-\sigma^2(s;w)\hat{p}\}$
$+3[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]-2\sigma^2(s;w)\hat{p}[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]+\sigma(s;w)+[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$
$=\sigma(s;w)-\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2-[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s;w)+2[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]\sigma(s;w)[\sigma(s;w)\cdot\hat{p}]$ □

7.2 关于$\sigma(s)$的一种特殊通项公式

性质7.2.1. $$\begin{cases}\hat{p}\cdot\{\sigma(s)\times\{[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^1\sigma(s)\}\}=2i[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2-i\sigma^2(s)\\ \hat{p}\cdot\{\sigma(s)\times\{[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s)\}\}=3i[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2-i[\sigma^2(s)-1][\sigma(s)\cdot\hat{p}]\end{cases}$$

定理7.2.1. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\hat{p}=-i[\sigma(s)\times\hat{p}]\times[\sigma(s)\times\hat{p}]=\sigma(s)-\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2-[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s)+2[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]$

7.3 关于$\sigma(s)$特殊通项公式的推论

推论7.3.1. $[1-(h-h')^2]\lambda^+(\hat{p},h;s)\sigma(s)\lambda(\hat{p},h';s)=\delta_{hh'}h\hat{p}$

证明: $\lambda^+(\hat{p},h;s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\hat{p}\lambda(\hat{p},h';s)$
$=\lambda^+(\hat{p},h;s)\{\sigma(s)-\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2-[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s)+2[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\}\lambda(\hat{p},h';s)$
$\Leftrightarrow[1-(h-h')^2]\lambda^+(\hat{p},h;s)\sigma(s)\lambda(\hat{p},h';s)=\delta_{hh'}h\hat{p}$ □

推论7.3.2. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n\hat{p}_{i_1}\hat{p}_{i_2}\cdot\cdot\hat{p}_{i_n}=$
$\{\sigma_{i_1}(s)-\sigma_{i_1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2-[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma_{i_1}(s)+2[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma_{i_1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\}$
$\{\sigma_{i_2}(s)-\sigma_{i_2}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2-[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma_{i_2}(s)+2[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma_{i_2}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\}$
$\cdots\cdots$
$\{\sigma_{i_n}(s)-\sigma_{i_n}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2-[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma_{i_n}(s)+2[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma_{i_n}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\}$

推论7.3.3. $[2\sigma\cdot\hat{p}]^n\hat{p}_{i_1}\hat{p}_{i_2}\cdot\cdot\hat{p}_{i_n}=\{\sigma_{i_1}+[\sigma\cdot\hat{p}]\sigma_{i_1}[\sigma\cdot\hat{p}]\}\{\sigma_{i_2}+[\sigma\cdot\hat{p}]\sigma_{i_2}[\sigma\cdot\hat{p}]\}\cdot\cdot\{\sigma_{i_n}+[\sigma\cdot\hat{p}]\sigma_{i_n}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\}$

推论7.3.4. $\frac{1}{4}\hat{p}_i\hat{p}_j$
$=\{\frac{1}{4}\sigma_i+\frac{1}{4}[\sigma\cdot\hat{p}]\sigma_i[\sigma\cdot\hat{p}]\}\{\frac{1}{4}\sigma_j+\frac{1}{4}[\sigma\cdot\hat{p}]\sigma_j[\sigma\cdot\hat{p}]\}$
$=\frac{1}{16}\{\sigma_i\sigma_j+[\sigma\cdot\hat{p}]\sigma_i[\sigma\cdot\hat{p}]\sigma_j+\sigma_i[\sigma\cdot\hat{p}]\sigma_j[\sigma\cdot\hat{p}]+[\sigma\cdot\hat{p}]\sigma_i\sigma_j[\sigma\cdot\hat{p}]\}$

证明: $\lambda^+(\hat{p},h;s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n\hat{p}_{i_1}\hat{p}_{i_2}\cdot\cdot\hat{p}_{i_n}\lambda(\hat{p},h';s)$
$=\lambda^+(\hat{p},h;s)$
$\{\sigma_{i_1}(s)-\sigma_{i_1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2-[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma_{i_1}(s)+2[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma_{i_1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\}$
$\{\sigma_{i_2}(s)-\sigma_{i_2}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2-[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma_{i_2}(s)+2[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma_{i_2}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\}\lambda(\hat{p},h';s)$

$\cdots\cdots$

$\{\sigma_{i_n}(s)-\sigma_{i_n}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2-[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma_{i_n}(s)+2[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma_{i_n}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\}$

$\lambda(\hat{p},h';s)$

$=\lambda^+(\hat{p},h;s)$

$\{\sigma_{i_1}(s)-\sigma_{i_1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2-[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma_{i_1}(s)+2[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma_{i_1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\}\lambda(\hat{p},h';s)$

$\sum_{h_1=s}^{-s}\lambda(\hat{p},h_1;s)\lambda^+(\hat{p},h_1;s)$

$\{\sigma_{i_2}(s)-\sigma_{i_2}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2-[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma_{i_2}(s)+2[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma_{i_2}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\}$

$\sum_{h_2=s}^{-s}\lambda(\hat{p},h_2;s)\lambda^+(\hat{p},h_2;s)$

$\cdots\cdots$

$\{\sigma_{i_n}(s)-\sigma_{i_n}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2-[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma_{i_n}(s)+2[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma_{i_n}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\}$

$\lambda(\hat{p},h';s)$ □

定理7.3.1. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\hat{p}$

$=\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2-[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s)+2[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]$

$=\sigma(s)-\sum_{k=0}^{2}C_2^k[-\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2-k}$

推论7.3.5. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n\hat{p}_{i_1}\hat{p}_{i_2}\cdot\cdot\hat{p}_{i_n}=$

$\{\sigma_{i_1}(s)-\sum_{k=0}^{2}C_2^k[-\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k\sigma_{i_1}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2-k}\}$

$\{\sigma_{i_2}(s)-\sum_{k=0}^{2}C_2^k[-\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k\sigma_{i_2}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2-k}\}$

$\cdots\cdots$

$\{\sigma_{i_n}(s)-\sum_{k=0}^{2}C_2^k[-\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k\sigma_{i_n}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2-k}\}$

推论7.3.6. $\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)\sigma_i(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n\sigma_j(s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)=(-\varsigma)^ns^2s^n\hat{p}_i\hat{p}_j+(-\varsigma)^n(s-1)^n[\frac{s}{2}(\delta_{ij}-\hat{p}_i\hat{p}_j-i\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\hat{p}_k)]$

推论7.3.7. $\lambda^+(\hat{p},h;s)\sigma_i(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n\sigma_j(s)\lambda(\hat{p},h';s)=???$

第十七章　螺旋度的数学分析

自我评述：为了进一步研究各种自旋粒子的物理，在本章中我发展了关于螺旋度的数学分析，为研究各种自旋粒子提供了一个有力的数学工具。

1 单位矢量的空间旋转变换

1.1 自旋-1旋量的空间旋转变换

性质1.1.1. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\bar{\Omega}(1)} = 1 + \frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}[\vec{\vartheta}\cdot\bar{\Omega}(1)] + \frac{cosh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}-1}{\vec{\vartheta}^2}[\vec{\vartheta}\cdot\bar{\Omega}(1)]^2$

$\Rightarrow e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma} = 1 + i\hat{\omega}\cdot\gamma sin\omega + (i\hat{\omega}\cdot\gamma)^2(1-cos\omega), \omega := |\vec{\omega}|$

推论1.1.1. $e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma} = 1 + sin\omega\begin{bmatrix} 0 & \hat{\omega}_z & -\hat{\omega}_y \\ -\hat{\omega}_z & 0 & \hat{\omega}_x \\ \hat{\omega}_y & -\hat{\omega}_x & 0 \end{bmatrix} + (1-cos\omega)\begin{bmatrix} \hat{\omega}_x^2-1 & \hat{\omega}_x\hat{\omega}_y & \hat{\omega}_x\hat{\omega}_z \\ \hat{\omega}_y\hat{\omega}_x & \hat{\omega}_y^2-1 & \hat{\omega}_y\hat{\omega}_z \\ \hat{\omega}_z\hat{\omega}_x & \hat{\omega}_z\hat{\omega}_y & \hat{\omega}_z^2-1 \end{bmatrix}$

推论1.1.2. $e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(1)} = 1 + i\hat{\omega}\cdot\sigma(1)sin\omega + [i\hat{\omega}\cdot\sigma(1)]^2(1-cos\omega)$

1.2 单位矢量$\hat{p}$的空间旋转变换

定义1.2.1. $\hat{\omega}_+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\omega}_x + i\hat{\omega}_y), \hat{\omega}_- := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\omega}_x - i\hat{\omega}_y), \hat{p}_+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{p}_x + i\hat{p}_y), \hat{p}_- := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{p}_x - i\hat{p}_y)$

定理1.2.1. $\hat{p} = exp\{i\frac{(\gamma\times\hat{p})_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, 0 \le arccos\hat{p}_z \le \pi$

证明: $\hat{p} = e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + sin\omega\begin{bmatrix} -\hat{\omega}_y \\ \hat{\omega}_x \\ 0 \end{bmatrix} + (1-cos\omega)\begin{bmatrix} \hat{\omega}_x\hat{\omega}_z \\ \hat{\omega}_y\hat{\omega}_z \\ \hat{\omega}_z^2-1 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{p}_x = -\hat{\omega}_y sin\omega + \hat{\omega}_x\hat{\omega}_z(1-cos\omega) \\ \hat{p}_y = \hat{\omega}_x sin\omega + \hat{\omega}_y\hat{\omega}_z(1-cos\omega) \\ \hat{p}_z = 1 + (\hat{\omega}_z^2-1)(1-cos\omega) \end{cases} \overset{\hat{\omega}_z=0}{\Rightarrow} \begin{cases} \hat{p}_x = -\hat{\omega}_y sin\omega \\ \hat{p}_y = \hat{\omega}_x sin\omega \\ \hat{p}_z = cos\omega \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \hat{\omega}_x = \frac{\hat{p}_y}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}} \\ \hat{\omega}_y = \frac{-\hat{p}_x}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}} \\ \hat{\omega}_z = 0, 0 \le \omega = arccos\hat{p}_z \le \pi \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{p} = exp\{i\frac{(\gamma\times\hat{p})_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, 0 \le arccos\hat{p}_z \le \pi$ □

性质1.2.1. $\begin{cases} \hat{\omega}\cdot\gamma \overset{\hat{\omega}_z=0}{=} \gamma_x\hat{\omega}_x + \gamma_y\hat{\omega}_y = \frac{\gamma_x\hat{p}_y - \gamma_y\hat{p}_x}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}} = \frac{(\gamma\times\hat{p})_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}} \\ \vec{\omega}\cdot\gamma \overset{\hat{\omega}_z=0}{=} \frac{(\gamma\times\hat{p})_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z, 0 \le arccos\hat{p}_z \le \pi \end{cases}$

性质1.2.2. $e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma} \overset{\hat{\omega}_z=0}{=} exp\{i\frac{(\gamma\times\hat{p})_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\} = 1 + i(\gamma\times\hat{p})_z - (\gamma\times\hat{p})_z^2/(1+\hat{p}_z), 0 \le arccos\hat{p}_z \le \pi$

1.3 Wigner SO(2)小群

性质1.3.1. $\hat{p} = e^{i\omega_z\gamma_z}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

1.4 单位矢量$\hat{p}$洛伦兹推动变换 [26]与空间旋转变换的等价性

推论1.4.1. $\hat{p}' = [\hat{p} + \gamma_v\vec{v} + (\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\hat{p})\vec{v}/v^2]/[\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\hat{p})]$

推论1.4.2. $\hat{p} = [\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma_v\vec{v} + (\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})\vec{v}/v^2]/[\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})] = [1 + i(\gamma\times\hat{p})_z - (\gamma\times\hat{p})_z^2/(1+\hat{p}_z)]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

推论1.4.3. $e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\sigma(s)}, exp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}$

2 螺旋度$\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}$本征函数的分析

2.1 螺旋度$\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}$本征函数的具体求法 [41]

定义2.1.1. $\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p},h)=h\lambda(\hat{p},h),h=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$

推论2.1.1. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\frac{\sigma}{2}}=cosh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}+\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}\vec{\vartheta}\cdot\sigma\Rightarrow e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}=cos\frac{1}{2}\omega+i\hat{\omega}\cdot\sigma sin\frac{1}{2}\omega=\frac{(1+\hat{p}_z)+i(\sigma\times\hat{p})_z}{\sqrt{2(1+\hat{p}_z)}}$

推论2.1.2. $i\hat{\omega}\cdot\sigma=i\{\begin{bmatrix}0&\hat{\omega}_x\\\hat{\omega}_x&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-i\hat{\omega}_y\\i\hat{\omega}_y&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{\omega}_z&0\\0&-\hat{\omega}_z\end{bmatrix}\}=i\begin{bmatrix}\hat{\omega}_z&\sqrt{2}\hat{\omega}_-\\\sqrt{2}\hat{\omega}_+&-\hat{\omega}_z\end{bmatrix}\overset{\hat{\omega}_z=0}{=}i\sqrt{2}\begin{bmatrix}0&\hat{\omega}_-\\\hat{\omega}_+&0\end{bmatrix}$

推论2.1.3. $e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}\overset{\hat{\omega}_z=0}{=}cos\frac{1}{2}\omega+i\hat{\omega}\cdot\sigma sin\frac{1}{2}\omega=\begin{bmatrix}cos\frac{1}{2}\omega&i\sqrt{2}\hat{\omega}_-sin\frac{1}{2}\omega\\i\sqrt{2}\hat{\omega}_+sin\frac{1}{2}\omega&cos\frac{1}{2}\omega\end{bmatrix}$

推论2.1.4.
$$\begin{cases}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cos\frac{1}{2}\omega\\i\sqrt{2}\hat{\omega}_+sin\frac{1}{2}\omega\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\\\hat{p}_+\end{bmatrix},\lambda(-\hat{p},\frac{1}{2})=-\frac{\hat{p}_+}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}}\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\\\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})=e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i\sqrt{2}\hat{\omega}_-sin\frac{1}{2}\omega\\cos\frac{1}{2}\omega\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}-\hat{p}_-\\\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix},\lambda(-\hat{p},-\frac{1}{2})=\frac{\hat{p}_-}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\\\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=i\sigma_y\lambda^*(\hat{p},-\frac{1}{2}),\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})=-i\sigma_y\lambda^*(\hat{p},\frac{1}{2})\end{cases}$$

推论2.1.5.
$$\begin{cases}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(\sigma\cdot\hat{p}+I)=\frac{1}{2}(\sigma,-i)^a\hat{p}_a,\hat{p}_a:=(\hat{p},i)\\\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}(\sigma\cdot\hat{p}-I)=-\frac{1}{2}(\sigma,i)^a\hat{p}_a\\\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(\sigma\cdot\hat{p}+I)i\sigma_y=\frac{1}{2}(\sigma,i)^a\hat{p}_ai\sigma_y\\\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}(\sigma\cdot\hat{p}+I)i\sigma_y=-\frac{1}{2}(\sigma,i)^a\hat{p}_ai\sigma_y\end{cases}$$

2.2 螺旋度$\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}$本征函数的正交性与完备性

推论2.2.1. $\lambda^+(\hat{p},h)\lambda(\hat{p},h')=\delta_{hh'},\sum_{h=\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\lambda(\hat{p},h)\lambda^+(\hat{p},h)=1,\sum_{h=\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}h\lambda(\hat{p},h)\lambda^+(\hat{p},h)=\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}$

2.3 螺旋度$\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}$本征函数的升降算符

定理2.3.1.
$$\begin{cases}e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}\sigma_xe^{-i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}=\sigma_x-\hat{p}_x\frac{(\sigma\cdot\hat{p}+\sigma_z)}{(1+\hat{p}_z)}\\e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}\sigma_ye^{-i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}=\sigma_y-\hat{p}_y\frac{(\sigma\cdot\hat{p}+\sigma_z)}{(1+\hat{p}_z)}\\e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}\sigma_ze^{-i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}=\sigma\cdot\hat{p}\end{cases}$$

证明: $e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}\sigma_xe^{-i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}=(e^{-i\vec{\omega}\cdot\gamma})_x{}^k\sigma_k$

$=\frac{(1+\hat{p}_z)+i(\sigma_x\hat{p}_y-\sigma_y\hat{p}_x)}{\sqrt{2(1+\hat{p}_z)}}\sigma_x\frac{(1+\hat{p}_z)-i(\sigma_x\hat{p}_y-\sigma_y\hat{p}_x)}{\sqrt{2(1+\hat{p}_z)}}$

$=\frac{(1+\hat{p}_z)+i(\sigma_x\hat{p}_y-\sigma_y\hat{p}_x)}{\sqrt{2(1+\hat{p}_z)}}\frac{(1+\hat{p}_z)-i(\sigma_x\hat{p}_y+\sigma_y\hat{p}_x)}{\sqrt{2(1+\hat{p}_z)}}\sigma_x$

$=\frac{(1+\hat{p}_z)^2-2i(1+\hat{p}_z)\sigma_y\hat{p}_x+(\sigma_x\hat{p}_y-\sigma_y\hat{p}_x)(\sigma_x\hat{p}_y+\sigma_y\hat{p}_x)}{2(1+\hat{p}_z)}\sigma_x$

$=\frac{(1+\hat{p}_z)^2-2i(1+\hat{p}_z)\sigma_y\hat{p}_x+\hat{p}_y^2-\hat{p}_x^2+2i\sigma_z\hat{p}_x\hat{p}_y}{2(1+\hat{p}_z)}\sigma_x$

$=\frac{2(1+\hat{p}_z)-2i(1+\hat{p}_z)\sigma_y\hat{p}_x-2\hat{p}_x^2+2i\sigma_z\hat{p}_x\hat{p}_y}{2(1+\hat{p}_z)}\sigma_x$

$=\frac{(1+\hat{p}_z)(\sigma_x-\hat{p}_x\sigma_z)-\hat{p}_x(\hat{p}_x\sigma_x+\hat{p}_y\sigma_y)}{(1+\hat{p}_z)}$

$=\frac{\sigma_x+\hat{p}_z\sigma_x-\hat{p}_x\sigma_z-\hat{p}_x(\sigma\cdot\hat{p})}{(1+\hat{p}_z)}$

$=\sigma_x-\hat{p}_x\frac{(\sigma\cdot\hat{p}+\sigma_z)}{(1+\hat{p}_z)}$

$=\frac{\sigma_x-(\sigma\times\hat{p})_y-\hat{p}_x(\sigma\cdot\hat{p})}{(1+\hat{p}_z)}$ □

证明： $e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}\sigma_y e^{-i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}} = (e^{-i\vec{\omega}\cdot\gamma})_y{}^k\sigma_k$

$= \frac{(1+\hat{p}_z)+i(\sigma_x\hat{p}_y-\sigma_y\hat{p}_x)}{\sqrt{2(1+\hat{p}_z)}}\sigma_y\frac{(1+\hat{p}_z)-i(\sigma_x\hat{p}_y-\sigma_y\hat{p}_x)}{\sqrt{2(1+\hat{p}_z)}}$

$= \frac{(1+\hat{p}_z)+i(\sigma_x\hat{p}_y-\sigma_y\hat{p}_x)}{\sqrt{2(1+\hat{p}_z)}}\frac{(1+\hat{p}_z)+i(\sigma_x\hat{p}_y+\sigma_y\hat{p}_x)}{\sqrt{2(1+\hat{p}_z)}}\sigma_y$

$= \frac{(1+\hat{p}_z)^2+2i(1+\hat{p}_z)\sigma_x\hat{p}_y-(\sigma_x\hat{p}_y-\sigma_y\hat{p}_x)(\sigma_x\hat{p}_y+\sigma_y\hat{p}_x)}{2(1+\hat{p}_z)}\sigma_y$

$= \frac{(1+\hat{p}_z)^2+2i(1+\hat{p}_z)\sigma_x\hat{p}_y+\hat{p}_x^2-\hat{p}_y^2-2i\sigma_z\hat{p}_x\hat{p}_y}{2(1+\hat{p}_z)}\sigma_y$

$= \frac{2(1+\hat{p}_z)+2i(1+\hat{p}_z)\sigma_x\hat{p}_y-2\hat{p}_y^2-2i\sigma_z\hat{p}_x\hat{p}_y}{2(1+\hat{p}_z)}\sigma_y$

$= \frac{(1+\hat{p}_z)(\sigma_y-\hat{p}_y\sigma_z)-\hat{p}_y(\hat{p}_x\sigma_x+\hat{p}_y\sigma_y)}{(1+\hat{p}_z)}$

$= \frac{\sigma_y+\hat{p}_z\sigma_y-\hat{p}_y\sigma_z-\hat{p}_y(\sigma\cdot\hat{p})}{(1+\hat{p}_z)}$

$= \sigma_y - \hat{p}_y\frac{(\sigma\cdot\hat{p}+\sigma_z)}{(1+\hat{p}_z)}$

$= \frac{\sigma_y+(\sigma\times\hat{p})_x-\hat{p}_y(\sigma\cdot\hat{p})}{(1+\hat{p}_z)}$ □

证明： $e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}\sigma_z e^{-i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}} = (e^{-i\vec{\omega}\cdot\gamma})_z{}^k\sigma_k$

$= \frac{(1+\hat{p}_z)+i(\sigma_x\hat{p}_y-\sigma_y\hat{p}_x)}{\sqrt{2(1+\hat{p}_z)}}\sigma_z\frac{(1+\hat{p}_z)-i(\sigma_x\hat{p}_y-\sigma_y\hat{p}_x)}{\sqrt{2(1+\hat{p}_z)}}$

$= \frac{(1+\hat{p}_z)+i(\sigma_x\hat{p}_y-\sigma_y\hat{p}_x)}{\sqrt{2(1+\hat{p}_z)}}\frac{(1+\hat{p}_z)+i(\sigma_x\hat{p}_y-\sigma_y\hat{p}_x)}{\sqrt{2(1+\hat{p}_z)}}\sigma_z$

$= \frac{(1+\hat{p}_z)^2+2i(1+\hat{p}_z)(\sigma_x\hat{p}_y-\sigma_y\hat{p}_x)-(\sigma_x\hat{p}_y-\sigma_y\hat{p}_x)^2}{2(1+\hat{p}_z)}\sigma_z$

$= \frac{(1+\hat{p}_z)^2+2i(1+\hat{p}_z)(\sigma_x\hat{p}_y-\sigma_y\hat{p}_x)-(\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2)}{2(1+\hat{p}_z)}\sigma_z$

$= [\hat{p}_z + i(\sigma_x\hat{p}_y - \sigma_y\hat{p}_x)]\sigma_z$

$= \sigma\cdot\hat{p}$ □

推论2.3.1.

$$\begin{cases} e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}(\sigma_x+i\sigma_y)e^{-i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}} = (\sigma_x+i\sigma_y) - \frac{(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)}{(1+\hat{p}_z)}(\sigma\cdot\hat{p}+\sigma_z) \\ e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}(\sigma_x-i\sigma_y)e^{-i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}} = (\sigma_x-i\sigma_y) - \frac{(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)}{(1+\hat{p}_z)}(\sigma\cdot\hat{p}+\sigma_z) \\ e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}\sigma_z e^{-i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}} = \sigma\cdot\hat{p} \end{cases}$$

推论2.3.2.

$$\begin{cases} \{[\sigma_x(\frac{1}{2})+i\sigma_y(\frac{1}{2})] - \frac{(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)}{(1+\hat{p}_z)}[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}+\sigma_z(\frac{1}{2})]\}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2}) = 0 \\ \{[\sigma_x(\frac{1}{2})+i\sigma_y(\frac{1}{2})] - \frac{(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)}{(1+\hat{p}_z)}[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}+\sigma_z(\frac{1}{2})]\}\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2}) = \lambda(\hat{p},\frac{1}{2}) \\ \{[\sigma_x(\frac{1}{2})-i\sigma_y(\frac{1}{2})] - \frac{(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)}{(1+\hat{p}_z)}[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}+\sigma_z(\frac{1}{2})]\}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2}) = \lambda(\hat{p},-\frac{1}{2}) \\ \{[\sigma_x(\frac{1}{2})-i\sigma_y(\frac{1}{2})] - \frac{(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)}{(1+\hat{p}_z)}[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}+\sigma_z(\frac{1}{2})]\}\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

2.4 螺旋度$\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}$本征函数的基本性质

性质2.4.1. $\lambda^*(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2}) \equiv -i\varsigma\sigma_y\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2}), \lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2}) \equiv i\varsigma\lambda^T(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\sigma_y$

2.5 螺旋度$\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}$本征函数的复杂性质

性质2.5.1. $\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})(\sigma,-i\varsigma)_a\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2}) = -\varsigma\hat{p}_a, \lambda^T(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)_a\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2}) = i\hat{p}_a$

性质2.5.2. $\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})(\sigma,-i\varsigma)_a\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2}) = \begin{bmatrix} \frac{\hat{p}_x\hat{p}_z-i\varsigma\hat{p}_y}{\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y} \\ \frac{\hat{p}_y\hat{p}_z+i\varsigma\hat{p}_x}{\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y} \\ -\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda^T(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})(\sigma,1)\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2}) = \begin{bmatrix} \varsigma\hat{p}_x+i\hat{p}_y \\ 0 \\ \frac{\varsigma\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y}{\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y} \\ \frac{\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y\hat{p}_z}{\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y} \end{bmatrix}$

性质2.5.3. $\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\sigma_i\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2}) = \begin{bmatrix} \frac{\hat{p}_x\hat{p}_z-i\varsigma\hat{p}_y}{\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y} \\ \frac{\hat{p}_y\hat{p}_z+i\varsigma\hat{p}_x}{\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y} \\ -\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{p}_x\hat{p}_z-i\varsigma\hat{p}_y\delta_{xx}+i\varsigma\hat{p}_x\delta_{xy}-\delta_{xz}}{\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y} \\ \frac{\hat{p}_y\hat{p}_z-i\varsigma\hat{p}_y\delta_{yx}+i\varsigma\hat{p}_x\delta_{yy}-\delta_{yz}}{\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y} \\ \frac{\hat{p}_z\hat{p}_z-i\varsigma\hat{p}_y\delta_{yx}+i\varsigma\hat{p}_x\delta_{yy}-\delta_{zz}}{\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y} \end{bmatrix} = \frac{(\hat{p}_i\hat{p}_z-\delta_{iz})-i\varsigma(\hat{p}_y\delta_{ix}-\hat{p}_x\delta_{iy})}{\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y}$

性质2.5.4. $\lambda^T(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})(\sigma,1)\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2}) = \begin{bmatrix} \hat{p}_z \\ -i\varsigma \\ -\hat{p}_x \\ i\hat{p}_y \end{bmatrix}$

性质2.5.5. $\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_- & -\frac{1}{2}(\varsigma-\hat{p}_z)\\ \frac{1}{2}(\varsigma+\hat{p}_z) & \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_+\end{bmatrix}$

性质2.5.6. $\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_- & -\frac{1}{2}(\varsigma-\hat{p}_z)\\ \frac{1}{2}(\varsigma+\hat{p}_z) & \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_+\end{bmatrix}=\frac{i}{2}(\sigma\cdot\hat{p}-\varsigma I)\sigma_y=\frac{i}{2}(\sigma,i\varsigma)^a\hat{p}_a\sigma_y$

性质2.5.7. $\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})=-\frac{\varsigma}{2}(\sigma,i\varsigma)^a\hat{p}_a,\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})=\frac{i}{2}(\sigma,i\varsigma)^a\hat{p}_a\sigma_y$

性质2.5.8. $\begin{cases}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})+\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})=I,\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})=\sigma\cdot\hat{p}\\ \lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda^T(\hat{p},-\frac{1}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})=i\sigma_y,\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda^T(\hat{p},-\frac{1}{2})+\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})=i\sigma\cdot\hat{p}\sigma_y\end{cases}$

3 螺旋度$\sigma(1)\cdot\hat{p}$本征函数的分析

3.1 螺旋度$\sigma(1)\cdot\hat{p}$本征函数的具体求法I

推论3.1.1. $\sigma(1)\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p},h;1)=h\lambda(\hat{p},h;1),h=-1,0,1$

推论3.1.2. $i\hat{\omega}\cdot\sigma(1)=i\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&\hat{\omega}_x&0\\ \hat{\omega}_x&0&\hat{\omega}_x\\ 0&\hat{\omega}_x&0\end{bmatrix}+\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&-\hat{\omega}_y&0\\ \hat{\omega}_y&0&-\hat{\omega}_y\\ 0&\hat{\omega}_y&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{\omega}_z&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&-\hat{\omega}_z\end{bmatrix}\}=i\begin{bmatrix}\hat{\omega}_z&\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\omega}_x-i\hat{\omega}_y)&0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\omega}_x+i\hat{\omega}_y)&0&\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\omega}_x-i\hat{\omega}_y)\\ 0&\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\omega}_x+i\hat{\omega}_y)&-\hat{\omega}_z\end{bmatrix}$

推论3.1.3. $i\hat{\omega}\cdot\sigma(1)=i\begin{bmatrix}\hat{\omega}_z&\hat{\omega}_-&0\\ \hat{\omega}_+&0&\hat{\omega}_-\\ 0&\hat{\omega}_+&-\hat{\omega}_z\end{bmatrix}\overset{\hat{\omega}_z=0}{=}i\begin{bmatrix}0&\hat{\omega}_-&0\\ \hat{\omega}_+&0&\hat{\omega}_-\\ 0&\hat{\omega}_+&0\end{bmatrix}$

推论3.1.4. $[i\hat{\omega}\cdot\sigma(1)]^2=-\begin{bmatrix}\hat{\omega}_z&\hat{\omega}_-&0\\ \hat{\omega}_+&0&\hat{\omega}_-\\ 0&\hat{\omega}_+&-\hat{\omega}_z\end{bmatrix}^2=-\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\hat{\omega}_z^2+1)&\hat{\omega}_z\hat{\omega}_-&\hat{\omega}_-^2\\ \hat{\omega}_z\hat{\omega}_+&2\hat{\omega}_+\hat{\omega}_-&-\hat{\omega}_z\hat{\omega}_-\\ \hat{\omega}_+^2&-\hat{\omega}_z\hat{\omega}_+&\frac{1}{2}(\hat{\omega}_z^2+1)\end{bmatrix}\overset{\hat{\omega}_z=0}{=}-\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\hat{\omega}_-^2\\ 0&1&0\\ \hat{\omega}_+^2&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

推论3.1.5. $e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(1)}\overset{\hat{\omega}_z=0}{=}1+i\hat{\omega}\cdot\sigma(1)sin\omega+[i\hat{\omega}\cdot\sigma(1)]^2(1-cos\omega)=1+isin\omega\begin{bmatrix}0&\hat{\omega}_-&0\\ \hat{\omega}_+&0&\hat{\omega}_-\\ 0&\hat{\omega}_+&0\end{bmatrix}-(1-cos\omega)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\hat{\omega}_-^2\\ 0&1&0\\ \hat{\omega}_+^2&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

推论3.1.6. $e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(1)}\overset{\hat{\omega}_z=0}{=}1+isin\omega\begin{bmatrix}0&\hat{\omega}_-&0\\ \hat{\omega}_+&0&\hat{\omega}_-\\ 0&\hat{\omega}_+&0\end{bmatrix}-(1-cos\omega)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\hat{\omega}_-^2\\ 0&1&0\\ \hat{\omega}_+^2&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1+cos\omega)&i\hat{\omega}_-sin\omega&-\hat{\omega}_-^2(1-cos\omega)\\ i\hat{\omega}_+sin\omega&cos\omega&i\hat{\omega}_-sin\omega\\ -\hat{\omega}_+^2(1-cos\omega)&i\hat{\omega}_+sin\omega&\frac{1}{2}(1+cos\omega)\end{bmatrix}$

推论3.1.7. $e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(1)}=exp\{i\frac{[\sigma(1)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}=1+i[\sigma(1)\times\hat{p}]_z-[\sigma(1)\times\hat{p}]_z^2/(1+\hat{p}_z),0\le arccos\hat{p}_z\le\pi$

推论3.1.8. $\sigma(1)\cdot\hat{p}=e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(1)}\sigma_z(1)e^{-i\vec{\omega}\cdot\sigma(1)}$

推论3.1.9.

$$\begin{cases}\lambda(\hat{p},1;1)=e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(1)}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1+cos\omega)\\ i\hat{\omega}_+sin\omega\\ -\hat{\omega}_+^2(1-cos\omega)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_+\\ \hat{p}_+^2/(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix}=\frac{1}{\hat{p}_-}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_+\hat{p}_-\\ \frac{1}{2}\hat{p}_+(1-\hat{p}_z)\end{bmatrix},\lambda(-\hat{p},1;1)=\frac{\hat{p}_+}{\hat{p}_-}\lambda(\hat{p},-1;1)\\ \lambda(\hat{p},0;1)=e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(1)}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i\hat{\omega}_-sin\omega\\ cos\omega\\ i\hat{\omega}_+sin\omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\hat{p}_-\\ \hat{p}_z\\ \hat{p}_+\end{bmatrix},\lambda(-\hat{p},0;1)=-\lambda(\hat{p},0;1)\\ \lambda(\hat{p},-1;1)=e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(1)}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\hat{\omega}_-^2(1-cos\omega)\\ i\hat{\omega}_-sin\omega\\ \frac{1}{2}(1+cos\omega)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{p}_-^2/(1+\hat{p}_z)\\ -\hat{p}_-\\ \frac{1}{2}(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix}=\frac{1}{\hat{p}_+}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\hat{p}_-(1-\hat{p}_z)\\ -\hat{p}_+\hat{p}_-\\ \frac{1}{2}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix},\lambda(-\hat{p},-1;1)=\frac{\hat{p}_-}{\hat{p}_+}\lambda(\hat{p},1;1)\end{cases}$$

3.2 螺旋度$\sigma(1)\cdot\hat{p}$本征函数的具体求法II

定理3.2.1. $\lambda(\hat{p},h;1)=\sqrt{C_2^{1-h}}\bar{\Gamma}(1)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{1+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{1-h}$

3.3 螺旋度$\sigma(1)\cdot\hat{p}$本征函数正交性与完备性的验证

推论3.3.1. $\lambda^+(\hat{p},h;1)\lambda(\hat{p},h';1)=\delta_{hh'}$

推论3.3.2. $\lambda(\hat{p},1;1)\lambda^+(\hat{p},1;1)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1+cos\omega)^2&-i\hat{\omega}_-sin\omega(1+cos\omega)&-\hat{\omega}_-^2sin^2\omega\\ i\hat{\omega}_+sin\omega(1+cos\omega)&sin^2\omega&-i\hat{\omega}_-sin\omega(1-cos\omega)\\ -\hat{\omega}_+^2sin^2\omega&i\hat{\omega}_+sin\omega(1-cos\omega)&\frac{1}{2}(1-cos\omega)^2\end{bmatrix}$

推论3.3.3. $\lambda(\hat{p},0;1)\lambda^{+}(\hat{p},0;1)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}sin^2\omega & i\hat{\omega}_{-}sin\omega cos\omega & \hat{\omega}_{-}^2 sin^2\omega\\ -i\hat{\omega}_{+}sin\omega cos\omega & cos^2\omega & -i\hat{\omega}_{-}sin\omega cos\omega\\ \hat{\omega}_{+}^2 sin^2\omega & i\hat{\omega}_{+}sin\omega cos\omega & \frac{1}{2}sin^2\omega\end{bmatrix}$

推论3.3.4. $\lambda(\hat{p},-1;1)\lambda^{+}(\hat{p},-1;1)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1-cos\omega)^2 & i\hat{\omega}_{-}sin\omega(1-cos\omega) & -\hat{\omega}_{-}^2 sin^2\omega\\ -i\hat{\omega}_{+}sin\omega(1-cos\omega) & sin^2\omega & i\hat{\omega}_{-}sin\omega(1+cos\omega)\\ -\hat{\omega}_{+}^2 sin^2\omega & -i\hat{\omega}_{+}sin\omega(1+cos\omega) & \frac{1}{2}(1+cos\omega)^2\end{bmatrix}$

推论3.3.5. $\sum_{h=1}^{-1}\lambda(\hat{p},h;1)\lambda^{+}(\hat{p},h;1)=1$

推论3.3.6. $\lambda_{\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma;1)\lambda^{+}_{\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma;1)=\frac{1}{2}[(-1)^h(2-|h|)[S^{+}_m(1)\hat{p}\hat{p}^T S_m(1)]_{A_\varsigma A'_\varsigma}+h\sigma^k(1)_{A_\varsigma A'_\varsigma}\hat{p}_k+|h|\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}]$

3.4 螺旋度$\sigma(1)\cdot\hat{p}$本征函数的正交性与完备性

推论3.4.1. $\lambda^{+}(\hat{p},h;1)\lambda(\hat{p},h';1)=\delta_{hh'},\sum_{h=1}^{-1}\lambda(\hat{p},h;1)\lambda^{+}(\hat{p},h;1)=1,\sum_{h=1}^{-1}h\lambda(\hat{p},h;1)\lambda^{+}(\hat{p},h;1)=\sigma(1)\cdot\hat{p}$

4 螺旋度$\gamma\cdot\hat{p}$本征函数的分析

4.1 螺旋度$\gamma\cdot\hat{p}$本征函数

推论4.1.1. $S_m(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i&0&-i\\-1&0&-1\\0&-i\sqrt{2}&0\end{bmatrix},S^{+}_m(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i&-1&0\\0&0&i\sqrt{2}\\i&-1&0\end{bmatrix},S_m(1)S^{+}_m(1)=S^{+}_m(1)S_m(1)=I_3$

推论4.1.2.
$$\begin{cases}\lambda(\hat{p},1;1)=e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(1)}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1+cos\omega)\\ i\hat{\omega}_{+}sin\omega\\ -\hat{\omega}_{+}^2(1-cos\omega)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_{+}\\ \hat{p}_{+}^2/(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix}=\frac{1}{\hat{p}_{-}}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\hat{p}_{-}(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_{+}\hat{p}_{-}\\ \frac{1}{2}\hat{p}_{+}(1-\hat{p}_z)\end{bmatrix},\lambda(-\hat{p},1;1)=\frac{\hat{p}_{+}}{\hat{p}_{-}}\lambda(\hat{p},-1;1)\\ \lambda(\hat{p},0;1)=e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(1)}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i\hat{\omega}_{-}sin\omega\\ cos\omega\\ i\hat{\omega}_{+}sin\omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\hat{p}_{-}\\ \hat{p}_z\\ \hat{p}_{+}\end{bmatrix},\lambda(-\hat{p},0;1)=-\lambda(\hat{p},0;1)\\ \lambda(\hat{p},-1;1)=e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(1)}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\hat{\omega}_{-}^2(1-cos\omega)\\ i\hat{\omega}_{-}sin\omega\\ \frac{1}{2}(1+cos\omega)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{p}_{-}^2/(1+\hat{p}_z)\\ -\hat{p}_{-}\\ \frac{1}{2}(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix}=\frac{1}{\hat{p}_{+}}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\hat{p}_{-}(1-\hat{p}_z)\\ -\hat{p}_{+}\hat{p}_{-}\\ \frac{1}{2}\hat{p}_{+}(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix},\lambda(-\hat{p},-1;1)=\frac{\hat{p}_{-}}{\hat{p}_{+}}\lambda(\hat{p},1;1)\end{cases}$$

推论4.1.3. $\gamma\cdot\hat{p}\lambda_m(\hat{p},h;1)=h\lambda_m(\hat{p},h;1),\lambda_m(\hat{p},h;1)=S_m(1)\lambda(\hat{p},h;1),h=-1,0,1$

推论4.1.4.
$$\begin{cases}\lambda_m(\hat{p},1;1)=S_m(1)\lambda(\hat{p},1;1)=e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i\\-1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2\hat{p}_{-}}\begin{bmatrix}i(\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y)\\ -1(\hat{p}_x-i\hat{p}_y\hat{p}_z)\\ -2i(\hat{p}_{+}\hat{p}_{-})\end{bmatrix},\lambda_m(-\hat{p},1;1)=\frac{\hat{p}_{+}}{\hat{p}_{-}}\lambda_m(\hat{p},-1;1)\\ \lambda_m(\hat{p},0;1)=S_m(1)\lambda(\hat{p},0;1)=e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}\begin{bmatrix}0\\0\\-i\end{bmatrix}=-i\begin{bmatrix}\hat{p}_x\\ \hat{p}_y\\ \hat{p}_z\end{bmatrix}=-i\hat{p},\lambda_m(-\hat{p},0;1)=-\lambda_m(\hat{p},0;1)\\ \lambda_m(\hat{p},-1;1)=S_m(1)\lambda(\hat{p},-1;1)=e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i\\-1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2\hat{p}_{+}}\begin{bmatrix}-i(\hat{p}_x\hat{p}_z+i\hat{p}_y)\\ -1(\hat{p}_x+i\hat{p}_y\hat{p}_z)\\ 2i(\hat{p}_{+}\hat{p}_{-})\end{bmatrix},\lambda_m(-\hat{p},-1;1)=\frac{\hat{p}_{-}}{\hat{p}_{+}}\lambda_m(\hat{p},1;1)\end{cases}$$

推论4.1.5. $\gamma\cdot\hat{p}=e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}\gamma_z e^{-i\vec{\omega}\cdot\gamma}$

引理4.1.1. $\lambda^{+}_m(-\hat{p},1;1)\begin{bmatrix}-\hat{p}_z\\-i\\ \hat{p}_x\end{bmatrix}=0,\lambda^{+}_m(-\hat{p},1;1)\begin{bmatrix}i\\-\hat{p}_z\\ \hat{p}_y\end{bmatrix}=0,\lambda^{+}_m(-\hat{p},-1;1)\begin{bmatrix}-\hat{p}_z\\i\\ \hat{p}_x\end{bmatrix}=0,\lambda^{+}_m(-\hat{p},-1;1)\begin{bmatrix}-i\\-\hat{p}_z\\ \hat{p}_y\end{bmatrix}=0$

推论4.1.6.
$$\begin{cases}\lambda_m(\hat{p},1;1)=\frac{1}{2\hat{p}_{-}}\{-i\hat{p}_x\begin{bmatrix}-\hat{p}_z\\-i\\ \hat{p}_x\end{bmatrix}-i\hat{p}_y\begin{bmatrix}i\\-\hat{p}_z\\ \hat{p}_y\end{bmatrix}\}\\ \lambda_m(\hat{p},0;1)=-i\begin{bmatrix}\hat{p}_x\\ \hat{p}_y\\ \hat{p}_z\end{bmatrix}=-i\hat{p}\\ \lambda_m(\hat{p},-1;1)=\frac{1}{2\hat{p}_{+}}\{i\hat{p}_x\begin{bmatrix}-\hat{p}_z\\i\\ \hat{p}_x\end{bmatrix}+i\hat{p}_y\begin{bmatrix}-i\\-\hat{p}_z\\ \hat{p}_y\end{bmatrix}\}\end{cases}$$

推论4.1.7.
$$\begin{cases}\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},1;1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i\\-1\\0\end{bmatrix}\\ \lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},0;1)=\begin{bmatrix}0\\0\\-i\end{bmatrix}\\ \lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-1;1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i\\-1\\0\end{bmatrix}\end{cases}$$

4.2 螺旋度$\gamma\cdot\hat{p}$本征函数的基本性质

推论4.2.1. $\lambda_m(\hat{p},-1;1)=\lambda_m^*(\hat{p},1;1),\lambda_m(\hat{p},0;1)=-\lambda_m^*(\hat{p},0;1),\lambda_m(\hat{p},1;1)=\lambda_m^*(\hat{p},-1;1)$

推论4.2.2.
$$\begin{cases}\lambda_m(\hat{p},-1;1)\times\lambda_m(\hat{p},0;1)=-\lambda_m(\hat{p},-1;1),\lambda_m(\hat{p},0;1)\times\lambda_m(\hat{p},1;1)=-\lambda_m(\hat{p},1;1),\lambda_m(\hat{p},1;1)\times\lambda_m(\hat{p},-1;1)=\lambda_m(\hat{p},0;1\\ \lambda_m(\hat{p},\varsigma;1)\cdot\lambda_m(\hat{p},\varsigma;1)=0,\lambda_m(\hat{p},0;1)\cdot\lambda_m(\hat{p},\varsigma;1)=0,\lambda_m(\hat{p},h;1)\times\lambda_m(\hat{p},h;1)=0\\ \lambda_m(\hat{p},0;1)\cdot\lambda_m(\hat{p},0;1)=-1,\lambda_m(\hat{p},\varsigma;1)\cdot\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)=1\end{cases}$$

4.3 螺旋度$\gamma\cdot\hat{p}$本征函数的正交性与完备性

推论4.3.1. $\lambda_m^+(\hat{p},h)\lambda_m(\hat{p},h')=\delta_{hh'},\sum_{h=1}^{-1}\lambda_m(\hat{p},h)\lambda_m^+(\hat{p},h)=1,\sum_{h=1}^{-1}h\lambda_m(\hat{p},h)\lambda_m^+(\hat{p},h)=\gamma\cdot\hat{p}$

4.4 螺旋度$\gamma\cdot\hat{p}$本征函数的复杂性质

推论4.4.1.
$$\begin{cases}\gamma\lambda_m(\hat{p},1;1)=\frac{1}{2\hat{p}_-}\gamma\begin{bmatrix}i(\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y)\\-1(\hat{p}_x-i\hat{p}_y\hat{p}_z)\\-2i(\hat{p}_+\hat{p}_-)\end{bmatrix}=\frac{1}{2\hat{p}_-}\{\begin{bmatrix}0\\-2(\hat{p}_+\hat{p}_-)\\-i(\hat{p}_x-i\hat{p}_y\hat{p}_z)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2(\hat{p}_+\hat{p}_-)\\0\\(\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}i(\hat{p}_x-i\hat{p}_y\hat{p}_z)\\-1(\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y)\\0\end{bmatrix}\}\\ \gamma\lambda_m(\hat{p},0;1)=-i\gamma\begin{bmatrix}\hat{p}_x\\\hat{p}_y\\\hat{p}_z\end{bmatrix}=\{\begin{bmatrix}0\\-\hat{p}_z\\\hat{p}_y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\hat{p}_z\\0\\-\hat{p}_x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-\hat{p}_y\\\hat{p}_x\\0\end{bmatrix}\}\\ \gamma\lambda_m(\hat{p},-1;1)=\frac{1}{2\hat{p}_+}\gamma\begin{bmatrix}-i(\hat{p}_x\hat{p}_z+i\hat{p}_y)\\-1(\hat{p}_x+i\hat{p}_y\hat{p}_z)\\2i(\hat{p}_+\hat{p}_-)\end{bmatrix}=\frac{1}{2\hat{p}_+}\{\begin{bmatrix}0\\2(\hat{p}_+\hat{p}_-)\\-i(\hat{p}_x+i\hat{p}_y\hat{p}_z)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2(\hat{p}_+\hat{p}_-)\\0\\-(\hat{p}_x\hat{p}_z+i\hat{p}_y)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}i(\hat{p}_x-i\hat{p}_y\hat{p}_z)\\1(\hat{p}_x\hat{p}_z+i\hat{p}_y)\\0\end{bmatrix}\}\end{cases}$$

推论4.4.2.
$$\begin{cases}\lambda_m^+(\hat{p},1;1)\gamma\lambda_m(\hat{p},1;1)=\{\hat{p}_x,\hat{p}_y,\hat{p}_z\}=1\cdot\hat{p}\\ \lambda_m^+(\hat{p},0;1)\gamma\lambda_m(\hat{p},0;1)=\{0,0,0\}=0\cdot\hat{p}\\ \lambda_m^+(\hat{p},-1;1)\gamma\lambda_m(\hat{p},-1;1)=\{-\hat{p}_x,-\hat{p}_y,-\hat{p}_z\}=-1\cdot\hat{p}\end{cases}\quad\begin{cases}\lambda_m^+(-\hat{p},1;1)\gamma\lambda_m(\hat{p},1;1)=0\\ \lambda_m^+(-\hat{p},0;1)\gamma\lambda_m(\hat{p},0;1)=0\\ \lambda_m^+(-\hat{p},-1;1)\gamma\lambda_m(\hat{p},-1;1)=0\end{cases}$$

推论4.4.3. $\lambda_m^+(\hat{p},h)\gamma\lambda_m(\hat{p},h)=h\{\hat{p}_x,\hat{p}_y,\hat{p}_z\}=h\hat{p},\lambda_m^+(-\hat{p},h)\gamma\lambda_m(\hat{p},h)=0,\lambda_m^+(\hat{p},-h)\gamma\lambda_m(\hat{p},h)=0$

推论4.4.4. $\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_b=-2|\vec{p}|^2\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma;1)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma;1)$

证明： $\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_b$

$=p_{\alpha_\varsigma}p_{\alpha'_\varsigma}+\varsigma\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_k|\vec{p}|-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}|\vec{p}|^2$

$=p_{\alpha_\varsigma}p_{\alpha'_\varsigma}+\varsigma|\vec{p}|\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}p_k\delta_{\beta_\varsigma\alpha'_\varsigma}-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}|\vec{p}|^2$

$=\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},0;1)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},0;1)|\vec{p}|^2+\varsigma|\vec{p}|\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}p_k\sum_{h=1}^{-1}\lambda_{m\beta_\varsigma}(\hat{p},h)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},h)-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}|\vec{p}|^2$

$=\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},0;1)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},0;1)|\vec{p}|^2+\varsigma|\vec{p}|[\varsigma|\vec{p}|\lambda_{m\beta_\varsigma}(\hat{p},\varsigma;1)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},\varsigma;1)-\varsigma|\vec{p}|\lambda_{m\beta_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma;1)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma;1)]-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}|\vec{p}|^2$

$=|\vec{p}|^2\sum_{h=1}^{-1}\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},h)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},h)-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}|\vec{p}|^2-2|\vec{p}|^2\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma;1)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma;1)$

$=-2|\vec{p}|^2\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma;1)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma;1)$ □

推论4.4.5. $\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},h)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},h)=\frac{1}{2}[(-1)^h(2-|h|)\hat{p}_{\alpha_\varsigma}\hat{p}_{\alpha'_\varsigma}+h\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\hat{p}_k+|h|\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}]$

推论4.4.6.
$$\begin{cases}\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},1;1)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},1;1)=\frac{1}{2}(-\hat{p}_{\alpha_\varsigma}\hat{p}_{\alpha'_\varsigma}+\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\hat{p}_k+\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma})\\ \lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},0;1)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},0;1)=\hat{p}_{\alpha_\varsigma}\hat{p}_{\alpha'_\varsigma}\\ \lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-1;1)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-1;1)=\frac{1}{2}(-\hat{p}_{\alpha_\varsigma}\hat{p}_{\alpha'_\varsigma}-\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\hat{p}_k+\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma})\end{cases}$$

5 螺旋度$\sigma(2)\cdot\hat{p}$本征函数的分析

5.1 自旋-2洛伦兹变换$e^{i\omega\cdot\sigma(2)}$

推论5.1.1. $\sigma(2)=(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&\sqrt{2}&0&0&0\\\sqrt{2}&0&\sqrt{3}&0&0\\0&\sqrt{3}&0&\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{3}&0&\sqrt{2}\\0&0&0&\sqrt{2}&0\end{bmatrix},\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&-\sqrt{2}&0&0&0\\\sqrt{2}&0&-\sqrt{3}&0&0\\0&\sqrt{3}&0&-\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{3}&0&-\sqrt{2}\\0&0&0&\sqrt{2}&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-2\end{bmatrix})$

推论5.1.2. $\sigma(2)\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p},h)=h\lambda(\hat{p},s),h=-2,-1,0,1,2$

推论5.1.3. $e^{\vec{\vartheta}\cdot\bar{\Omega}(2)}=1+(\frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})(1-\frac{2}{3}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\vec{\vartheta}\cdot\bar{\Omega}(2)]+2(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^2(1-\frac{1}{3}sinh^2\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2})[\vec{\vartheta}\cdot\bar{\Omega}(2)]^2$
$+\frac{2}{3}(\frac{sinh\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^2[\vec{\vartheta}\cdot\bar{\Omega}(2)]^3+\frac{2}{3}(\frac{sinh\frac{1}{2}\sqrt{\vec{\vartheta}^2}}{\sqrt{\vec{\vartheta}^2}})^4[\vec{\vartheta}\cdot\bar{\Omega}(2)]^4$

推论5.1.4. $e^{i\omega\cdot\sigma(2)}=1+isin\omega(1+\frac{2}{3}sin^2\frac{\omega}{2})[\hat{\omega}\cdot\sigma(2)]-2sin^2\frac{\omega}{2}(1+\frac{1}{3}sin^2\frac{\omega}{2})[\hat{\omega}\cdot\sigma(2)]^2-\frac{2}{3}isin\omega sin^2\frac{\omega}{2}[\hat{\omega}\cdot\sigma(2)]^3$
$+\frac{2}{3}sin^4\frac{\omega}{2}[\hat{\omega}\cdot\sigma(2)]^4$

推论5.1.5.
$e^{i\omega\cdot\sigma(2)}=1+isin\omega[\hat{\omega}\cdot\sigma(2)]-2sin^2\frac{\omega}{2}[\hat{\omega}\cdot\sigma(2)]^2+\frac{2}{3}sin^2\frac{\omega}{2}[isin\omega[\hat{\omega}\cdot\sigma(2)]-sin^2\frac{\omega}{2}[\hat{\omega}\cdot\sigma(2)]^2][1-[\hat{\omega}\cdot\sigma(2)]^2]$

推论5.1.6.
$e^{i\omega\cdot\sigma(1)}=1+isin\omega[\hat{\omega}\cdot\sigma(1)]-2sin^2\frac{\omega}{2}[\hat{\omega}\cdot\sigma(1)]^2+\frac{2}{3}sin^2\frac{\omega}{2}[isin\omega[\hat{\omega}\cdot\sigma(1)]-sin^2\frac{\omega}{2}[\hat{\omega}\cdot\sigma(1)]^2][1-[\hat{\omega}\cdot\sigma(1)]^2]$
$=1+i\hat{\omega}\cdot\sigma(1)sin\omega+(1-cos\omega)[i\hat{\omega}\cdot\sigma(1)]^2$

推论5.1.7.
$e^{i\omega\cdot\sigma}=1+isin\omega(\hat{\omega}\cdot\sigma)-2sin^2\frac{\omega}{2}(\hat{\omega}\cdot\sigma)^2+\frac{2}{3}sin^2\frac{\omega}{2}[isin\omega(\hat{\omega}\cdot\sigma)-sin^2\frac{\omega}{2}(\hat{\omega}\cdot\sigma)^2][1-(\hat{\omega}\cdot\sigma)^2]=cos\omega+isin\omega(\hat{\omega}\cdot\sigma)$

推论5.1.8. $e^{i\omega\cdot\sigma(2)}=1+isin\omega[\hat{\omega}\cdot\sigma(2)]-(1-cos\omega)[\hat{\omega}\cdot\sigma(2)]^2+\frac{1}{6}(1-cos\omega)[2isin\omega[\hat{\omega}\cdot\sigma(2)]$
$-(1-cos\omega)[\hat{\omega}\cdot\sigma(2)]^2][1-[\hat{\omega}\cdot\sigma(2)]^2]$

推论5.1.9. $e^{i\omega\cdot\sigma(2)}=1+[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z+\frac{[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z^2}{1+\hat{p}_z}+\frac{1}{6}[2[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z+\frac{[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z^2}{1+\hat{p}_z}][(1-\hat{p}_z)+\frac{[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z^2}{1+\hat{p}_z}]$

推论5.1.10. $\sigma(2)\cdot\hat{p}=e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(2)}\sigma_z(2)e^{-i\vec{\omega}\cdot\sigma(2)}$

5.2 螺旋度$\sigma(2)\cdot\hat{p}$本征函数的具体求法I

推论5.2.1.

$$[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z=\begin{bmatrix}0&-\sqrt{2}\hat{p}_-&0&0&0\\ \sqrt{2}\hat{p}_+&0&-\sqrt{3}\hat{p}_-&0&0\\ 0&\sqrt{3}\hat{p}_+&0&-\sqrt{3}\hat{p}_-&0\\ 0&0&\sqrt{3}\hat{p}_+&0&-\sqrt{2}\hat{p}_-\\ 0&0&0&\sqrt{2}\hat{p}_+&0\end{bmatrix},[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z^2=\begin{bmatrix}-2\hat{p}_+\hat{p}_-&0&\sqrt{6}\hat{p}_-^2&0&0\\ 0&-5\hat{p}_+\hat{p}_-&0&3\hat{p}_-^2&0\\ \sqrt{6}\hat{p}_+^2&0&-6\hat{p}_+\hat{p}_-&0&\sqrt{6}\hat{p}_-^2\\ 0&3\hat{p}_+^2&0&-5\hat{p}_+\hat{p}_-&0\\ 0&0&\sqrt{6}\hat{p}_+^2&0&-2\hat{p}_+\hat{p}_-\end{bmatrix}$$

推论5.2.2. $$[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z^4=\begin{bmatrix}10\hat{p}_+^2\hat{p}_-^2&0&-8\sqrt{6}\hat{p}_+\hat{p}_-^3&0&6\hat{p}_-^4\\ 0&34\hat{p}_+^2\hat{p}_-^2&0&-30\hat{p}_+\hat{p}_-^3&0\\ -8\sqrt{6}\hat{p}_+^3\hat{p}_-&0&48\hat{p}_+^2\hat{p}_-^2&0&-8\sqrt{6}\hat{p}_+\hat{p}_-^3\\ 0&-30\hat{p}_+^3\hat{p}_-&0&34\hat{p}_+^2\hat{p}_-^2&0\\ 6\hat{p}_+^4&0&-8\sqrt{6}\hat{p}_+^3\hat{p}_-&0&10\hat{p}_+^2\hat{p}_-^2\end{bmatrix}$$

推论5.2.3. $$[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z+\frac{[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z^2}{1+\hat{p}_z}=\frac{1}{1+\hat{p}_z}\begin{bmatrix}-2\hat{p}_+\hat{p}_-&-\sqrt{2}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)&\sqrt{6}\hat{p}_-^2&0&0\\ \sqrt{2}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z)&-5\hat{p}_+\hat{p}_-&-\sqrt{3}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)&3\hat{p}_-^2&0\\ \sqrt{6}\hat{p}_+^2&\sqrt{3}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z)&-6\hat{p}_+\hat{p}_-&-\sqrt{3}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)&\sqrt{6}\hat{p}_-^2\\ 0&-3\hat{p}_+^2&\sqrt{3}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z)&-5\hat{p}_+\hat{p}_-&-\sqrt{2}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)\\ 0&0&\sqrt{6}\hat{p}_+^2&\sqrt{2}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z)&-2\hat{p}_+\hat{p}_-\end{bmatrix}$$

推论5.2.4.

$$\frac{1}{6}[2[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z+\frac{[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z^2}{1+\hat{p}_z}]=\frac{1}{6}\frac{1}{1+\hat{p}_z}\begin{bmatrix}-2\hat{p}_+\hat{p}_-&-2\sqrt{2}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)&\sqrt{6}\hat{p}_-^2&0&0\\ 2\sqrt{2}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z)&-5\hat{p}_+\hat{p}_-&-2\sqrt{3}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)&-3\hat{p}_-^2&0\\ \sqrt{6}\hat{p}_+^2&2\sqrt{3}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z)&-6\hat{p}_+\hat{p}_-&-2\sqrt{3}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)&\sqrt{6}\hat{p}_-^2\\ 0&3\hat{p}_+^2&2\sqrt{3}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z)&-5\hat{p}_+\hat{p}_-&-2\sqrt{2}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)\\ 0&0&\sqrt{6}\hat{p}_+^2&2\sqrt{2}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z)&-2\hat{p}_+\hat{p}_-\end{bmatrix}$$

推论5.2.5. $$[(1-\hat{p}_z)+\frac{[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z^2}{1+\hat{p}_z}]=\frac{1}{1+\hat{p}_z}\begin{bmatrix}0&0&\sqrt{6}\hat{p}_-^2&0&0\\ 0&-3\hat{p}_+\hat{p}_-&0&3\hat{p}_-^2&0\\ \sqrt{6}\hat{p}_+^2&0&-4\hat{p}_+\hat{p}_-&0&\sqrt{6}\hat{p}_-^2\\ 0&3\hat{p}_+^2&0&-3\hat{p}_+\hat{p}_-&0\\ 0&0&\sqrt{6}\hat{p}_+^2&0&0\end{bmatrix}$$

推论5.2.6. $\frac{1}{6}[2[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z+\frac{[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z^2}{1+\hat{p}_z}][(1-\hat{p}_z)+\frac{[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z^2}{1+\hat{p}_z}]$

$$=\frac{1}{(1+\hat{p}_z)^2}\begin{bmatrix}\hat{p}_+^2\hat{p}_-^2&\sqrt{2}\hat{p}_+\hat{p}_-^2(1+\hat{p}_z)&-\sqrt{6}\hat{p}_+\hat{p}_-^3&-2\sqrt{2}\hat{p}_-^3(1+\hat{p}_z)&\hat{p}_-^4\\ -\sqrt{2}\hat{p}_+^2\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)&4\hat{p}_+^2\hat{p}_-^2&2\sqrt{3}\hat{p}_+\hat{p}_-^2(1+\hat{p}_z)&-4\hat{p}_+\hat{p}_-^3&-\sqrt{2}\hat{p}_-^3(1+\hat{p}_z)\\ -\sqrt{6}\hat{p}_+^3\hat{p}_-&-2\sqrt{3}\hat{p}_+^2\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)&6\hat{p}_+^2\hat{p}_-^2&2\sqrt{3}\hat{p}_+\hat{p}_-^2(1+\hat{p}_z)&-\sqrt{6}\hat{p}_+\hat{p}_-^3\\ \sqrt{2}\hat{p}_+^3(1+\hat{p}_z)&-4\hat{p}_+^3\hat{p}_-&-2\sqrt{3}\hat{p}_+^2\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)&4\hat{p}_+^2\hat{p}_-^2&\sqrt{2}\hat{p}_+\hat{p}_-^2(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_+^4&\sqrt{2}\hat{p}_+^3(1+\hat{p}_z)&-\sqrt{6}\hat{p}_+^3\hat{p}_-&-\sqrt{2}\hat{p}_+^2\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)&\hat{p}_+^2\hat{p}_-^2\end{bmatrix}$$

推论5.2.7. $e^{i\omega\cdot\sigma(2)} \overset{\omega_z=0}{=} 1+[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z+\frac{[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z^2}{1+\hat{p}_z}+\frac{1}{6}[2[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z+\frac{[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z^2}{1+\hat{p}_z}][(1-\hat{p}_z)+\frac{[i\sigma(2)\times\hat{p}]_z^2}{1+\hat{p}_z}]$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1+\hat{p}_z)^2 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z) & \frac{\sqrt{6}}{2}\hat{p}_-^2 & -\sqrt{2}\hat{p}_-^3/(1+\hat{p}_z) & \hat{p}_-^4/(1+\hat{p}_z)^2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z) & \frac{1}{2}(1+\hat{p}_z)(2\hat{p}_z-1) & -\sqrt{3}\hat{p}_-\hat{p}_z & \hat{p}_-^2(2\hat{p}_z+1)/(1+\hat{p}_z) & -\sqrt{2}\hat{p}_-^3/(1+\hat{p}_z) \\ \frac{\sqrt{6}}{2}\hat{p}_+^2 & \sqrt{3}\hat{p}_+\hat{p}_z & \frac{1}{2}(3\hat{p}_z^2-1) & -\sqrt{3}\hat{p}_-\hat{p}_z & \frac{\sqrt{6}}{2}\hat{p}_-^2 \\ \sqrt{2}\hat{p}_+^3/(1+\hat{p}_z) & \hat{p}_+^2(2\hat{p}_z+1)/(1+\hat{p}_z) & \sqrt{3}\hat{p}_+\hat{p}_z & \frac{1}{2}(1+\hat{p}_z)(2\hat{p}_z-1) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z) \\ \hat{p}_+^4/(1+\hat{p}_z)^2 & \sqrt{2}\hat{p}_+^3/(1+\hat{p}_z) & \frac{\sqrt{6}}{2}\hat{p}_+^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z) & \frac{1}{4}(1+\hat{p}_z)^2 \end{bmatrix}$$

推论5.2.8. $e^{-i\omega\cdot\sigma(2)} \overset{\omega_z=0}{=} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1+\hat{p}_z)^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z) & \frac{\sqrt{6}}{2}\hat{p}_-^2 & \sqrt{2}\hat{p}_-^3/(1+\hat{p}_z) & \hat{p}_-^4/(1+\hat{p}_z)^2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z) & \frac{1}{2}(1+\hat{p}_z)(2\hat{p}_z-1) & \sqrt{3}\hat{p}_-\hat{p}_z & \hat{p}_-^2(2\hat{p}_z+1)/(1+\hat{p}_z) & \sqrt{2}\hat{p}_-^3/(1+\hat{p}_z) \\ \frac{\sqrt{6}}{2}\hat{p}_+^2 & -\sqrt{3}\hat{p}_+\hat{p}_z & \frac{1}{2}(3\hat{p}_z^2-1) & \sqrt{3}\hat{p}_-\hat{p}_z & \frac{\sqrt{6}}{2}\hat{p}_-^2 \\ -\sqrt{2}\hat{p}_+^3/(1+\hat{p}_z) & \hat{p}_+^2(2\hat{p}_z+1)/(1+\hat{p}_z) & -\sqrt{3}\hat{p}_+\hat{p}_z & \frac{1}{2}(1+\hat{p}_z)(2\hat{p}_z-1) & \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z) \\ \hat{p}_+^4/(1+\hat{p}_z)^2 & -\sqrt{2}\hat{p}_+^3/(1+\hat{p}_z) & \frac{\sqrt{6}}{2}\hat{p}_+^2 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z) & \frac{1}{4}(1+\hat{p}_z)^2 \end{bmatrix}$

5.3 螺旋度$\sigma(2)\cdot\hat{p}$本征函数

推论5.3.1.

$$\lambda(\hat{p},2;2):=\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1+\hat{p}_z)^2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z) \\ \frac{\sqrt{6}}{2}\hat{p}_+^2 \\ \sqrt{2}\hat{p}_+^3/(1+\hat{p}_z) \\ \hat{p}_+^4/(1+\hat{p}_z)^2 \end{bmatrix}, \lambda(\hat{p},-2;2):=\begin{bmatrix} \hat{p}_-^4/(1+\hat{p}_z)^2 \\ -\sqrt{2}\hat{p}_-^3/(1+\hat{p}_z) \\ \frac{\sqrt{6}}{2}\hat{p}_-^2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z) \\ \frac{1}{4}(1+\hat{p}_z)^2 \end{bmatrix}, \begin{cases} \lambda(\hat{p},2;2)=\frac{\hat{p}_+^2}{\hat{p}_-^2}\lambda(-\hat{p},-2) \\ \lambda(-\hat{p},2;2)=\frac{\hat{p}_+^2}{\hat{p}_-^2}\lambda(\hat{p},-2) \\ \lambda(\hat{p},-2;2)=\frac{\hat{p}_-^2}{\hat{p}_+^2}\lambda(-\hat{p},2) \\ \lambda(-\hat{p},-2;2)=\frac{\hat{p}_-^2}{\hat{p}_+^2}\lambda(\hat{p},2) \end{cases}$$

推论5.3.2.

$$\lambda(\hat{p},1;2):=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z) \\ \frac{1}{2}(1+\hat{p}_z)(2\hat{p}_z-1) \\ \sqrt{3}\hat{p}_+\hat{p}_z \\ \hat{p}_+^2(2\hat{p}_z+1)/(1+\hat{p}_z) \\ \sqrt{2}\hat{p}_+^3/(1+\hat{p}_z) \end{bmatrix}, \lambda(\hat{p},-1;2):=\begin{bmatrix} -\sqrt{2}\hat{p}_-^3/(1+\hat{p}_z) \\ \hat{p}_-^2(2\hat{p}_z+1)/(1+\hat{p}_z) \\ -\sqrt{3}\hat{p}_-\hat{p}_z \\ \frac{1}{2}(1+\hat{p}_z)(2\hat{p}_z-1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z) \end{bmatrix}, \begin{cases} \lambda(\hat{p},1;2)=-\frac{\hat{p}_+}{\hat{p}_-}\lambda(-\hat{p},-1;2) \\ \lambda(-\hat{p},1;2)=-\frac{\hat{p}_+}{\hat{p}_-}\lambda(\hat{p},-1;2) \\ \lambda(\hat{p},-1;2)=-\frac{\hat{p}_-}{\hat{p}_+}\lambda(-\hat{p},1;2) \\ \lambda(-\hat{p},-1;2)=-\frac{\hat{p}_-}{\hat{p}_+}\lambda(\hat{p},1;2) \end{cases}$$

推论5.3.3.

$$\lambda(\hat{p},0;2):=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2}\hat{p}_-^2 \\ -\sqrt{3}\hat{p}_-\hat{p}_z \\ \frac{1}{2}(3\hat{p}_z^2-1) \\ \sqrt{3}\hat{p}_+\hat{p}_z \\ \frac{\sqrt{6}}{2}\hat{p}_+^2 \end{bmatrix}, \begin{cases} \lambda(\hat{p},0;2)=\lambda(-\hat{p},0;2) \\ \lambda(-\hat{p},0;2)=\lambda(\hat{p},0;2) \end{cases}$$

推论5.3.4.

$$\lambda(\hat{p},2;2)\lambda^+(\hat{p},2;2)=\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1+\hat{p}_z)^2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z) \\ \frac{\sqrt{6}}{2}\hat{p}_+^2 \\ \sqrt{2}\hat{p}_+^3/(1+\hat{p}_z) \\ \hat{p}_+^4/(1+\hat{p}_z)^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{16}(1+\hat{p}_z)^4 & \frac{\sqrt{2}}{8}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)^3 & \frac{\sqrt{6}}{8}\hat{p}_-^2(1+\hat{p}_z)^2 & \frac{\sqrt{2}}{4}\hat{p}_-^3(1+\hat{p}_z) & \frac{1}{4}\hat{p}_-^4 \\ 0 & \frac{1}{2}\hat{p}_+\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)^2 & \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{p}_+\hat{p}_-^2(1+\hat{p}_z) & \hat{p}_+\hat{p}_-^3 & \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{p}_+\hat{p}_-^4/(1+\hat{p}_z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.4 螺旋度$\sigma(2)\cdot\hat{p}$本征函数的具体求法II

定理5.4.1. $\lambda(\hat{p},h;2)=\sqrt{C_4^{2-h}}\bar{\Gamma}(2)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{2+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{2-h}$

5.5 螺旋度$\sigma(2)\cdot\hat{p}$本征函数的正交性与完备性

推论5.5.1. $\lambda^+(\hat{p},h;2)\lambda(\hat{p},h';2)=\delta_{hh'}, \sum\limits_{h=2}^{-2}\lambda(\hat{p},h;2)\lambda^+(\hat{p},h;2)=1, \sum\limits_{h=2}^{-2}h\lambda(\hat{p},h;2)\lambda^+(\hat{p},h;2)=\sigma(2)\cdot\hat{p}$

6 螺旋度$\sigma(s)\cdot\hat{p}$本征函数的分析

6.1 螺旋度$\sigma(s)\cdot\hat{p}$本征函数的定义

定义6.1.1. $\sigma(s)\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p},h;s)=h\lambda(\hat{p},h;s),h=-s,\cdot\cdot,s$

6.2 螺旋度$\sigma(s)\cdot\hat{p}$的z-方向本征函数

定义6.2.1. $\sigma(s)\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)=h\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$

推论6.2.1. $\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},s;s)=\begin{bmatrix}1\\0\\\cdot\cdot\\0\\0\end{bmatrix},\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},s-1;s)=\begin{bmatrix}0\\1\\\cdot\cdot\\0\\0\end{bmatrix},\cdot\cdot,\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-s+1;s)=\begin{bmatrix}0\\0\\\cdot\cdot\\1\\0\end{bmatrix},\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-s;s)=\begin{bmatrix}0\\0\\\cdot\cdot\\0\\1\end{bmatrix}$

推论6.2.2.
$\lambda(e^{i\omega_z\gamma_z}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},s;s)=e^{is\omega_z}\begin{bmatrix}1\\0\\\cdot\cdot\\0\\0\end{bmatrix},\lambda(e^{i\omega_z\gamma_z}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},s-1;s)=e^{i(s-1)\omega_z}\begin{bmatrix}0\\1\\\cdot\cdot\\0\\0\end{bmatrix},\cdot\cdot,\lambda(e^{i\omega_z\gamma_z}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-s;s)=e^{-is\omega_z}\begin{bmatrix}0\\0\\\cdot\cdot\\0\\1\end{bmatrix}$

推论6.2.3.
$\lambda(e^{\epsilon_z\cdot L_z}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix},s;s)=e^{s\epsilon_z}\begin{bmatrix}1\\0\\\cdot\cdot\\0\\0\end{bmatrix},\lambda(e^{\epsilon_z\cdot L_z}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},s-1;s)=e^{(s-1)\epsilon_z}\begin{bmatrix}0\\1\\\cdot\cdot\\0\\0\end{bmatrix},\cdot\cdot,\lambda(e^{\epsilon_z\cdot L_z}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-s;s)=e^{-s\epsilon_z}\begin{bmatrix}0\\0\\\cdot\cdot\\0\\1\end{bmatrix}$

6.3 螺旋度$\sigma(s)\cdot\hat{p}$的一般本征函数

性质6.3.1. $\begin{cases}\hat{\omega}\cdot\sigma(s)\overset{\hat{\omega}_z=0}{=}\sigma_x(s)\hat{\omega}_x+\sigma_y(s)\hat{\omega}_y=\frac{\sigma_x(s)\hat{p}_y-\sigma_y(s)\hat{p}_x}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}=\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}\\\vec{\omega}\cdot\sigma(s)\overset{\hat{\omega}_z=0}{=}\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\end{cases}$

性质6.3.2. $e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}\overset{\hat{\omega}_z=0}{=}exp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}$

定理6.3.1. $\lambda(\hat{p},h;s)=exp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$

证明: $\sigma(s)\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)=h\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$\Leftrightarrow exp\{-i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\sigma(s)\cdot exp\{i\frac{[\gamma\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}exp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)=h\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$\Leftrightarrow\sigma(s)\cdot\hat{p}exp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)=hexp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$\Rightarrow\lambda(\hat{p},h;s)=exp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$ □

6.4 螺旋度$\sigma(s)\cdot\hat{p}$本征函数的正交性与完备性

推论6.4.1. $\lambda^+(\hat{p},h;s)\lambda(\hat{p},h';s)=\delta_{hh'},\sum_{h=s}^{-s}\lambda(\hat{p},h;s)\lambda^+(\hat{p},h;s)=1,\sum_{h=s}^{-s}h\lambda(\hat{p},h;s)\lambda^+(\hat{p},h;s)=\sigma(s)\cdot\hat{p}$

以上三个推论可以很容易证明得到。

6.5 自旋洛伦兹变换性质的合理性猜测(还需严格化)

猜想6.5.1. $\begin{cases}exp\{-i\pi\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}\}=(\frac{\hat{p}_-}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{2\sigma_z(s)}\varepsilon(s)=(-1)^{2s}\varepsilon^+(s)(\frac{\hat{p}_+}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{2\sigma_z(s)}\\exp\{i\pi\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}\}=\varepsilon^+(s)(\frac{\hat{p}_+}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{2\sigma_z(s)}=(-1)^{2s}(\frac{\hat{p}_-}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{2\sigma_z(s)}\varepsilon(s)\end{cases},e^{i2\pi\hat{\omega}\cdot\sigma(s)}=(-1)^{2s}$

推论6.5.1. $\lambda(-\hat{p},h;s)=(-1)^{s+h}(\frac{\hat{p}_+}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{2h}\lambda(\hat{p},-h;s)=(-1)^{s+h}(\frac{\hat{p}_-}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{-2h}\lambda(\hat{p},-h;s)$

证明: $\lambda(-\hat{p},h;s)$
$=exp\{-i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos(-\hat{p}_z)\}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$=exp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}exp\{-i\pi\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}\}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$=(-1)^{s+h}(\frac{\hat{p}_+}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{2h}\lambda(\hat{p},-h;s)$ □

6.6 螺旋度$\sigma(s)\cdot\hat{p}$本征函数的性质

引理6.6.1. $\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)\sigma(s)\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)=h\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

定理6.6.1. $\lambda^{+}(\hat{p},h;s)\sigma(s)\lambda(\hat{p},h;s)=h\hat{p},h=-s,\cdot\cdot,s$

证明: $\lambda^{+}(\hat{p},h;s)\sigma_k(s)\lambda(\hat{p},h;s)$
$=\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)e^{-i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}\sigma_k(s)e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$=\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)e^{-i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}[e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_k{}^l e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}\sigma_l(s)e^{-i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}]e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$=e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_k{}^l\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)\sigma_l(s)\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$=h\{e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\}_k=h\hat{p}_k$ □

证明: $\lambda^{+}(\hat{p},h;s)\sigma_i(s)\sigma_j(s)\lambda(\hat{p},h;s)$
$=\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)e^{-i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}\sigma_i(s)\sigma_j(s)e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$=\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)e^{-i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}[e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_i{}^k e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}\sigma_k(s)e^{-i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}][e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_j{}^l e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}\sigma_l(s)e^{-i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}]e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$=e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_i{}^k e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_j{}^l\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)\sigma_k(s)\sigma_l(s)\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$=e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_i{}^k e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_j{}^l\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)\sigma_k(s)\sum_{h'}[\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h';s)\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h';s)]\sigma_l(s)\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$=e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_i{}^k e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_j{}^l\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$\sigma_k(s)[\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h-1;s)\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h-1;s)+\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)+\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h+1;s)\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h+1;s)]\sigma_l(s)$
$\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$?=h^2\hat{p}_i\hat{p}_j$ □

证明: $\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},s;s)\sigma_k(s)\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},s-1;s)$
$=\begin{bmatrix}1\\0\\\cdot\cdot\\0\\0\end{bmatrix}^{+}\sigma_k(s)\begin{bmatrix}0\\1\\\cdot\cdot\\0\\0\end{bmatrix}$
$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2s}\\-i\sqrt{2s}\\0\end{bmatrix}_k$ □

证明: $\lambda^{+}(\hat{p},\varsigma s;s)\sigma_i(s)\sigma_j(s)\lambda(\hat{p},\varsigma s;s)$
$=e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_i{}^k e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_j{}^l\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\varsigma s;s)\sigma_k(s)[\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\varsigma(s-1);s)\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\varsigma(s-1);s)$
$+\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\varsigma s;s)\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\varsigma s;s)]\sigma_l(s)\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\varsigma s;s)$
$=s^2\hat{p}_i\hat{p}_j+\frac{s}{2}(\delta_{ij}-\hat{p}_i\hat{p}_j+i\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\hat{p}_k)$
$=s^2\hat{p}_i\hat{p}_j-\frac{s}{2}\sigma_{ij}^{ab}\hat{p}_a\hat{p}_b$ □

证明: $\lambda^{+}(\hat{p},\varsigma s;s)\sigma_i(s)\sigma_j(s)\lambda(\hat{p},-\varsigma s;s),s\geq\frac{3}{2}$
$=e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_i{}^k e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_j{}^l\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\varsigma s;s)\sigma_k(s)[\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\varsigma(s-1);s)\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\varsigma(s-1);s)$
$+\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\varsigma s;s)\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\varsigma s;s)]\sigma_l(s)\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-\varsigma s;s)$
$=0$ □

证明: $\lambda^{+}(\hat{p},-\varsigma s;s)\sigma_i(s)\sigma_j(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n\lambda(\hat{p},-\varsigma s;s)=(-\varsigma)^n s^n s^2\hat{p}_i\hat{p}_j+(-\varsigma)^n s^n\frac{s}{2}(\delta_{ij}-\hat{p}_i\hat{p}_j+i\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\hat{p}_k)$ □

推论6.6.1. $\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_a p_b=p_{\alpha_\varsigma}p_{\alpha'_\varsigma}-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}|\vec{p}|^2-i\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_k|\vec{p}|$

推论6.6.2. $\lambda^{+}(\hat{p},h;s)[\sigma(s),ih]_a\lambda(\hat{p},h;s)=h(\hat{p},i)_a=h\hat{p}_a,h=-s,\cdot\cdot,s$

引理6.6.2. $\lambda^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)\sigma(s)\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h';s)=0,|h-h'|\geq 2$

定理6.6.2. $\lambda^{+}(\hat{p},h;s)\sigma(s)\lambda(\hat{p},h';s)=0,h,h'=-s,\cdot\cdot,s;|h-h'|\geq 2$

证明: $\lambda^{+}(\hat{p},h;s)\sigma_k(s)\lambda(\hat{p},h';s)$
$= \lambda^{+}(\begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix},h;s)e^{-i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}\sigma_k(s)e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}\lambda(\begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix},h';s)$
$= \lambda^{+}(\begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix},h;s)e^{-i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}[e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_k{}^l e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}\sigma_l(s)e^{-i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}]e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}\lambda(\begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix},h';s)$
$= e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_k{}^l \lambda^{+}(\begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix},h;s)\sigma_l(s)\lambda(\begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix},h';s), |h-h'|\geq 2$
$= e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}|_k{}^l\cdot 0$
$= 0$ □

6.7 自旋矢量算符本征态$\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$

定义6.7.1. $\lambda(\hat{p},-s\varsigma) := \lambda(\hat{p},-s\varsigma;s)$

定理6.7.1. $[s\begin{bmatrix} 0\\0\\1\\i \end{bmatrix}_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\begin{bmatrix} 0\\0\\1\\i \end{bmatrix}^b]\lambda(\begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix},-s\varsigma) \equiv 0[\Leftrightarrow][s\hat{p}_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\hat{p}^b]\lambda(\hat{p},-s\varsigma)\equiv 0$

定理6.7.2. $[s\hat{p}_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\hat{p}^b]\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = 0[\Leftrightarrow]\begin{cases} W_a(\hat{p},\varsigma;s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = -s\varsigma\hat{p}_a\lambda(\hat{p},-s\varsigma) \\ W_a(\hat{p},\varsigma;s) := -i * S_{ab}(s,\varsigma)\hat{p}^b = i\varsigma S_{ab}(s,\varsigma)\hat{p}^b \end{cases}$

性质6.7.1. $W_a(\hat{p},\varsigma;s) = (\hat{W}(\hat{p},\varsigma;s), i\sigma(s)\cdot\hat{p}), \hat{W}(\hat{p},\varsigma;s) = \sigma(s) - i\varsigma\sigma(s)\times\hat{p}$

推论6.7.1. $\hat{W}(\hat{p},\varsigma;s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = -s\varsigma\hat{p}\lambda(\hat{p},-s\varsigma)[\Rightarrow]\sigma(s)\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = -s\varsigma\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$

推论6.7.2. $\hat{W}(\hat{p},\varsigma;s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = -s\varsigma\hat{p}\lambda(\hat{p},-s\varsigma)[\Leftrightarrow]W_a(\hat{p},\varsigma;s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = -s\varsigma\hat{p}_a\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$

$\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$是螺旋度算符、四维自旋矢量算符和自旋矢量算符的共同本征态，本质上自旋矢量算符已完全包含了前两个算符。所以$\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$本质上只是自旋矢量算符$\hat{W}(\hat{p},\varsigma;s)$的本征态，其他两个只是它的推论而已，而且$\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$正是无质量粒子的本征态。

6.8 自旋矢量算符本征态$\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$的性质

性质6.8.1. $\sigma(s)\times\hat{p} = [\sigma(s), i\sigma(s)\cdot\hat{p}]$

性质6.8.2. $[sp_a + iS_{ab}(s,\varsigma)p^b]\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = 0[\Leftrightarrow]\begin{cases} [\sigma(s) - i\varsigma\sigma(s)\times\hat{p}]\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = -s\varsigma\hat{p}\lambda(\hat{p},-s\varsigma) \\ \sigma(s)\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = -s\varsigma\lambda(\hat{p},-s\varsigma) \end{cases}$

性质6.8.3. $[sp_a + iS_{ab}(s,\varsigma)p^b]\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = 0[\Leftrightarrow]\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2s}\cdot\hat{p}\begin{bmatrix} \lambda(\hat{p},-s\varsigma) \\ 0_{2s-1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\varsigma\begin{bmatrix} \lambda(\hat{p},-s\varsigma) \\ 0_{2s-1} \end{bmatrix}$

性质6.8.4. $\begin{cases} [sp_a + iS_{ab}(s,\varsigma)p^b]\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = 0[\Leftrightarrow] - \varsigma[\sigma(s)\cdot\hat{p} + \varsigma(s-1)]\sigma(s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = -s\varsigma\hat{p}\lambda(\hat{p},-s\varsigma) \\ \qquad\qquad [\Updownarrow] \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [\Downarrow] \\ [\sigma(s) - i\varsigma\sigma(s)\times\hat{p}]\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = -s\varsigma\hat{p}\lambda(\hat{p},-s\varsigma)[\Rightarrow][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = (-s\varsigma)^n\lambda(\hat{p},-s\varsigma) \end{cases}$

推论6.8.1. $[sp_a + iS_{ab}(s,\varsigma)p^b]\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = 0[\Leftrightarrow][\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = [s\hat{p} - \varsigma(s-1)\sigma(s)]\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$
$[\Leftrightarrow][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = \{(-\varsigma)^{n-1}s[s^n - (s-1)^n]\hat{p} + (-\varsigma)^n(s-1)^n\sigma(s)\}\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$

证明:
$[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = [e_1\hat{p} + d_1\sigma(s)]\lambda(\hat{p},-s\varsigma), e_1 = s, d_1 = -\varsigma(s-1)$
..
$[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{n-1}\sigma(s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = [e_{n-1}\hat{p} + d_{n-1}\sigma(s)]\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$
$[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{n}\sigma(s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = [e_n\hat{p} + d_n\sigma(s)]\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$
..
$[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{n}\sigma(s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$
$= [\sigma(s)\cdot\hat{p}][e_{n-1}\hat{p} + d_{n-1}\sigma(s)]\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = [(-s\varsigma e_{n-1} + d_1^{n-1}e_1)\hat{p} + d_{n-1}d_1\sigma(s)]\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$

$$\begin{cases} e_n = -s\varsigma e_{n-1} + d_1^{n-1} e_1 \\ d_n = d_{n-1} d_1 \\ e_1 = s, d_1 = -\varsigma(s-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_n = (-\varsigma)^{n-1} s[s^n - (s-1)^n] \\ d_n = d_1^n = (-\varsigma)^n (s-1)^n \end{cases}$$

$[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n \sigma(s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = \{(-\varsigma)^{n-1}s[s^n-(s-1)^n]\hat{p} + (-\varsigma)^n(s-1)^n\sigma(s)\}\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$ □

推论6.8.2. $\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)\sigma_i(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n\sigma_j(s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$
$= \lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)\sigma_i(s)\{(-\varsigma)^{n-1}s[s^n-(s-1)^n]\hat{p}_j + (-\varsigma)^n(s-1)^n\sigma_j(s)\}\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$
$= (-\varsigma)^n s^2[s^n-(s-1)^n]\hat{p}_i\hat{p}_j + (-\varsigma)^n(s-1)^n\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)\sigma_i(s)\sigma_j(s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$
$= (-\varsigma)^n s^2[s^n-(s-1)^n]\hat{p}_i\hat{p}_j + (-\varsigma)^n(s-1)^n[s^2\hat{p}_i\hat{p}_j + \frac{s}{2}(\delta_{ij}-\hat{p}_i\hat{p}_j - i\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\hat{p}_k)]$
$= (-\varsigma)^n s^2 s^n\hat{p}_i\hat{p}_j + (-\varsigma)^n(s-1)^n[\frac{s}{2}(\delta_{ij}-\hat{p}_i\hat{p}_j - i\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\hat{p}_k)]$

推论6.8.3. $\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = (-\varsigma s)^{n+1}\hat{p} = \lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$

6.9 螺旋度$\sigma(s)\cdot\hat{p}$本征态$\lambda(\hat{p},h;s)$分解为$\frac{1}{2}$-自旋本征态

定理6.9.1. $\lambda(\hat{p},h;s) = \sqrt{C_{2s}^{s-h}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s-h}$

证明: $\lambda(\hat{p},h;s) = e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$= e^{i\vec{\omega}\cdot\bar{\Gamma}(s)\bar{\Omega}(s)\Gamma(s)}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$= \bar{\Gamma}(s)e^{i\vec{\omega}\cdot\bar{\Omega}(s)}\Gamma(s)\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$
$= \bar{\Gamma}(s)e^{i\vec{\omega}\cdot\bar{\Omega}(s)}\Gamma(s)\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\cdot\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}^{s+h}\otimes\overbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\cdot\cdot\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}^{s-h}$
$= \sqrt{C_{2s}^{s-h}}\bar{\Gamma}(s)\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)e^{i\vec{\omega}\cdot\bar{\Omega}(s)}\overbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\cdot\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}^{s+h}\otimes\overbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\cdot\cdot\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}^{s-h}$
$= \sqrt{C_{2s}^{s-h}}\bar{\Gamma}(s)e^{i\vec{\omega}\cdot\bar{\Omega}(s)}\overbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\cdot\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}^{s+h}\otimes\overbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\cdot\cdot\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}^{s-h}$
$= \sqrt{C_{2s}^{s-h}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\cdot\cdot e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}^{s+h}\otimes\overbrace{e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\cdot\cdot\otimes e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}^{s-h}$
$= \sqrt{C_{2s}^{s-h}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s-h}$ □

定理6.9.2. $\lambda(-\hat{p},h;s) = (-1)^{s+h}(\frac{\hat{p}_+}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{2h}\lambda(\hat{p},-h;s)$

证明: $\lambda(-\hat{p},h;s) = \sqrt{C_{2s}^{s-h}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(-\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(-\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(-\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(-\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s-h}$
$= (-\frac{\hat{p}_+}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{s+h}(\frac{\hat{p}_-}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{s-h}\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s-h}$
$= (-\frac{\hat{p}_+}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{s+h}(\frac{\hat{p}_-}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{s-h}\sqrt{C_{2s}^{s+h}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s-h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s+h}$
$= (-\frac{\hat{p}_+}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{s+h}(\frac{\hat{p}_-}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{s-h}\lambda(\hat{p},-h;s)$
$= (-1)^{s+h}(\frac{\hat{p}_+}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{2h}\lambda(\hat{p},-h;s)$ □

推论6.9.1. $\lambda(-\hat{p},-h;s) = (-1)^{s-h}(\frac{\hat{p}_-}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{2h}\lambda(\hat{p},h;s)$

推论6.9.2.

$$\begin{cases}\lambda_{k_\varsigma}(\hat p,h;s)=\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,\tfrac12)\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,\tfrac12)\cdot\cdot}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda_{C_\varsigma}(\hat p,-\tfrac12)\lambda_{D_\varsigma}(\hat p,-\tfrac12)\cdot\cdot}^{s-h}\\ \frac{1}{(2s)!}\overbrace{\lambda_{\{A_\varsigma}(\hat p,\tfrac12)\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,\tfrac12)\cdot\cdot}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda_{C_\varsigma}(\hat p,-\tfrac12)\lambda_{D_\varsigma}(\hat p,-\tfrac12)\cdot\cdot_{\}}}^{s-h}=\sqrt{C_{2s}^{h-s}}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)\lambda_{k_\varsigma}(\hat p,h;s)\end{cases}$$

推论6.9.3.

$$\begin{cases}\lambda_{k_\varsigma}(\hat p,-s\varsigma)=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}^{2s}\\ \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)\lambda_{k_\varsigma}(\hat p,-s\varsigma)=\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}_{2s}\end{cases}$$

推论6.9.4.

$$\begin{cases}\lambda(\hat p,-s\varsigma)=\bar\Gamma(s)\overbrace{\lambda(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})}^{2s}\\ \Gamma(s)\lambda(\hat p,-s\varsigma)=\overbrace{\lambda(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})}^{2s}\end{cases}$$

定理6.9.3. $\lambda_{k_\varsigma}(\hat p,-\varsigma h;s)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat p,-\varsigma h;s)=(-\frac{i}{2})^{2h}2^sC_{2s}^{s-h}(-\frac{i\varsigma}{\sqrt2})^{s+h}(\frac{i\varsigma}{\sqrt2})^{s-h}$

$$\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s)\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\cdot\cdot(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}}^{s+h}\overbrace{(\sigma,-i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdot\cdot(\sigma,-i\varsigma)^d_{D_\varsigma D'_\varsigma}}^{s-h}\hat p_a\cdot\cdot\hat p_b\hat p_c\cdot\cdot\hat p_d$$

证明: $\lambda(\hat p,-\varsigma h;s)\lambda^+(\hat p,-\varsigma h;s)=C_{2s}^{s-h}\bar\Gamma(s)\overbrace{\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat p,\frac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat p,\frac{\varsigma}{2})}^{s-h}$

$\overbrace{\lambda^+(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat p,\frac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat p,\frac{\varsigma}{2})}^{s-h}\Gamma(s)$

$=C_{2s}^{s-h}\bar\Gamma(s)$

$\overbrace{\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat p,\frac{\varsigma}{2})\lambda^+(\hat p,\frac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat p,\frac{\varsigma}{2})\lambda^+(\hat p,\frac{\varsigma}{2})}^{s-h}\Gamma(s)$

$=(-\frac{\varsigma}{2})^{2h}C_{2s}^{s-h}\bar\Gamma(s)\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a\hat p_a\otimes\cdot\cdot\otimes(\sigma,i\varsigma)^b\hat p_b}^{s+h}\otimes\overbrace{(\sigma,-i\varsigma)^c\hat p_c\otimes\cdot\cdot\otimes(\sigma,-i\varsigma)^d\hat p_d}^{s-h}\Gamma(s)$

$=(-\frac{\varsigma}{2})^{2h}C_{2s}^{s-h}\bar\Gamma(s)\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a\otimes\cdot\cdot\otimes(\sigma,i\varsigma)^b}^{s+h}\otimes\overbrace{(\sigma,-i\varsigma)^c\otimes\cdot\cdot\otimes(\sigma,-i\varsigma)^d}^{s-h}\Gamma(s)\hat p_a\cdot\cdot\hat p_b\hat p_c\cdot\cdot\hat p_d$

$=(-\frac{i}{2})^{2h}2^sC_{2s}^{s-h}(-\frac{i\varsigma}{\sqrt2})^{s+h}(\frac{i\varsigma}{\sqrt2})^{s-h}$

$\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s)\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\cdot\cdot(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}}^{s+h}\overbrace{(\sigma,-i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdot\cdot(\sigma,-i\varsigma)^d_{D_\varsigma D'_\varsigma}}^{s-h}\hat p_a\cdot\cdot\hat p_b\hat p_c\cdot\cdot\hat p_d$ □

6.10 特例:1-自旋本征态$\lambda(\hat p,h;1)$分解为$\frac12$-自旋本征态

引理6.10.1. $\begin{cases}\Gamma_{\alpha_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(1)\succ S_m(1)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}i&0&-i\\-1&0&-1\\0&-i\sqrt2&0\end{bmatrix}\\ \Gamma_{k_\varsigma}{}^{\alpha_\varsigma}(1)\succ S_m^+(1)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}-i&-1&0\\0&0&i\sqrt2\\i&-1&0\end{bmatrix}\end{cases}$ $\begin{cases}\Gamma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}(1)\succ S_m^*(1)\\ \Gamma^{k_\varsigma}{}_{\alpha_\varsigma}(1)\succ S_m^T(1)\end{cases}$

引理6.10.2. $[S_m(1)\bar\Gamma(1)]_{\alpha_\varsigma}{}^{A_\varsigma\otimes B_\varsigma}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}i&0&0&-i\\-1&0&0&-1\\0&-i&-i&0\end{bmatrix},[S_m(1)\bar\Gamma(1)]_{\alpha_\varsigma}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}=-\frac{1}{\sqrt2}\sigma_y\sigma=\frac{i\varsigma}{\sqrt2}\sigma_{\alpha_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma}$

定理6.10.1. $\lambda(\hat p,h;1)=\sqrt{C_2^{1-h}}\bar\Gamma(1)\overbrace{\lambda(\hat p,\frac12)\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat p,\frac12)}^{1+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat p,-\frac12)\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat p,-\frac12)}^{1-h}$

推论6.10.1. $\begin{cases}\lambda(\hat p,-\varsigma;1)=\bar\Gamma(1)\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})=\lambda^T(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\Gamma\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\\ \lambda(\hat p,0;1)=\sqrt{C_2^1}\bar\Gamma(1)\lambda(\hat p,\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})=\sqrt{C_2^1}\lambda^T(\hat p,\frac{\varsigma}{2})\Gamma\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\end{cases}$

推论6.10.2. $\begin{cases}\lambda_m(\hat p,-\varsigma;1)=S_m(1)\bar\Gamma(1)\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})=-\frac{1}{\sqrt2}\lambda^T(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\sigma_y\sigma\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\\ \lambda_m(\hat p,0;1)=\sqrt{C_2^1}S_m(1)\bar\Gamma(1)\lambda(\hat p,\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})=-\lambda^T(\hat p,\frac{\varsigma}{2})\sigma_y\sigma\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\end{cases}$

推论6.10.3. $\begin{cases}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma;1)=\Gamma_{k_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\\ \lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},0;1)=\sqrt{C_2^1}\Gamma_{k_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\end{cases}$

推论6.10.4. $\begin{cases}\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma;1)=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_y\sigma)_{\alpha_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\\ \lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},0;1)=\sqrt{C_2^1}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})=-(\sigma_y\sigma)_{\alpha_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\end{cases}$

6.10.1 螺旋度的上升和下降

定义6.10.1.

$$\begin{cases}\hat{Q}(\hat{p},s):=exp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\hat{Q}exp\{-i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\},\hat{Q}(s):=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&\cdot\cdot&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}_{(2s+1)\times(2s+1)}\\ \hat{Q}^+(\hat{p},s):=exp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\hat{Q}^+(s)exp\{-i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\},\hat{Q}^+(s):=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}_{(2s+1)\times(2s+1)}\end{cases}$$

推论6.10.5. $\hat{Q}(\hat{p},s)\hat{Q}^+(\hat{p},s)=\hat{Q}^+(\hat{p},s)\hat{Q}(\hat{p},s)=\hat{Q}(s)\hat{Q}^+(s)=\hat{Q}^+(s)\hat{Q}(s)=1$

推论6.10.6.

$$\begin{cases}\hat{Q}(s)\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)=\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h-1;s),\hat{Q}(s)\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-s;s)=\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},s;s),h=s,s-1,\cdot\cdot,-(s-1)\\ \hat{Q}^+(s)\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)=\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h+1;s),\hat{Q}^+(s)\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},s;s)=\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-s;s),h=-s,-(s-1),\cdot\cdot,s-1\end{cases}$$

推论6.10.7.

$$\begin{cases}\hat{Q}(\hat{p},s)\lambda(\hat{p},h;s)=\lambda(\hat{p},h-1;s),\hat{Q}(\hat{p},s)\lambda(\hat{p},-s;s)=\lambda(\hat{p},s;s),h=s,s-1,\cdot\cdot,-(s-1)\\ \hat{Q}^+(\hat{p},s)\lambda(\hat{p},h;s)=\lambda(\hat{p},h+1;s),\hat{Q}^+(\hat{p},s)\lambda(\hat{p},s;s)=\lambda(\hat{p},-s;s),h=-s,-(s-1),\cdot\cdot,s-1\end{cases}$$

推论6.10.8.

$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\hat{p}\hat{Q}(\hat{p},s)\lambda(\hat{p},h;s)=(h-1)\lambda(\hat{p},h-1;s),\hat{Q}(\hat{p},s)\sigma(s)\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p},h;s)=h\lambda(\hat{p},h-1;s)\\ \sigma(s)\cdot\hat{p}\hat{Q}(\hat{p},s)\lambda(\hat{p},-s;s)=s\lambda(\hat{p},s;s),\hat{Q}(\hat{p},s)\sigma(s)\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p},-s;s)=-s\lambda(\hat{p},s;s)\\ h=-(s-1),\cdot\cdot,s-1,s\end{cases}$$

推论6.10.9.

$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\hat{p}\hat{Q}^+(\hat{p},s)\lambda(\hat{p},h;s)=(h+1)\lambda(\hat{p},h+1;s),\hat{Q}^+(\hat{p},s)\sigma(s)\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p},h;s)=h\lambda(\hat{p},h+1;s)\\ \sigma(s)\cdot\hat{p}\hat{Q}^+(\hat{p},s)\lambda(\hat{p},s;s)=-s\lambda(\hat{p},-s;s),\hat{Q}^+(\hat{p},s)\sigma(s)\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p},s;s)=s\lambda(\hat{p},-s;s)\\ h=-s,-(s-1),\cdot\cdot,s-1\end{cases}$$

推论6.10.10.

$$\begin{cases}[\sigma(s)\cdot\hat{p},\hat{Q}(\hat{p},s)]\lambda(\hat{p},h;s)=-\hat{Q}(\hat{p},s)\lambda(\hat{p},h;s),[\sigma(s)\cdot\hat{p},\hat{Q}(\hat{p},s)]\lambda(\hat{p},-s;s)=2s\hat{Q}(\hat{p},s)\lambda(\hat{p},-s;s)\\ \{\sigma(s)\cdot\hat{p},\hat{Q}(\hat{p},s)\}\lambda(\hat{p},h;s)=(2h-1)\hat{Q}(\hat{p},s)\lambda(\hat{p},h;s),\{\sigma(s)\cdot\hat{p},\hat{Q}(\hat{p},s)\}\lambda(\hat{p},-s;s)=0\\ h=-(s-1),\cdot\cdot,s-1,s\end{cases}$$

推论6.10.11.

$$\begin{cases}[\sigma(s)\cdot\hat{p},\hat{Q}^+(\hat{p},s)]\lambda(\hat{p},h;s)=\hat{Q}^+(\hat{p},s)\lambda(\hat{p},h;s),[\sigma(s)\cdot\hat{p},\hat{Q}^+(\hat{p},s)]\lambda(\hat{p},s;s)=-2\hat{Q}^+(\hat{p},s)\lambda(\hat{p},s;s)\\ \{\sigma(s)\cdot\hat{p},\hat{Q}^+(\hat{p},s)\}\lambda(\hat{p},h;s)=(2h+1)\hat{Q}^+(\hat{p},s)\lambda(\hat{p},h;s),\{\sigma(s)\cdot\hat{p},\hat{Q}^+(\hat{p},s)\}\lambda(\hat{p},s;s)=0\\ h=-s,-(s-1),\cdot\cdot,s-1\end{cases}$$

6.11 螺旋度本征函数的算符化–新数学工具

定义6.11.1. $\lambda(\hat{\nabla},h;s):=\lambda(\hat{p},h;s)|_{\hat{p}\to\hat{\nabla}},\hat{\nabla}:=\frac{-i\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}}$

推论6.11.1. $\lambda(\hat{\nabla},h;s)=exp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{\nabla}]_z}{\sqrt{1-\hat{\nabla}_z^2}}arccos\hat{\nabla}_z\}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)$

推论6.11.2. $\sigma(s)\cdot\hat{\triangledown}\lambda(\hat{\triangledown},h;s)=h\lambda(\hat{\triangledown},s;s),h=-s,\cdot\cdot,s$

推论6.11.3. $\lambda^+(\hat{\triangledown},h;s)\lambda(\hat{\triangledown},h';s)=\delta_{hh'},\sum_{h=s}^{-s}\lambda(\hat{\triangledown},h;s)\lambda^+(\hat{\triangledown},h;s)=1$

推论6.11.4. $\lambda(-\hat{\triangledown},h;s)=(-1)^{s+|h|}(\frac{\hat{\triangledown}_+}{\hat{\triangledown}_-})^h\lambda(\hat{\triangledown},-h;s)$

推论6.11.5. $\lambda^+(\hat{\triangledown},h;s)\sigma(s)\lambda(\hat{\triangledown},h;s)=h\hat{\triangledown},h=-s,\cdot\cdot,s$

推论6.11.6. $\lambda^+(-\hat{\triangledown},h;s)\sigma(s)\lambda(\hat{\triangledown},h;s)=0,\lambda^+(\hat{\triangledown},-h;s)\sigma(s)\lambda(\hat{\triangledown},h;s)=0,h=-s,\cdot\cdot,s$

推论6.11.7. $\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdot\cdot}^{2s}=(i\sqrt{2})^{2s}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdot\cdot}^{2s}=(i\sqrt{2})^{2s}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{\triangledown},-s\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{\triangledown},-s\varsigma)\end{cases}$

推论6.11.8. $\tilde{\partial}_k\{\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}$
$=-\{\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{1-\hat{p}_z^2}\}\tilde{\partial}_k\hat{p}_z+\{\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z\hat{p}_z}{(1-\hat{p}_z^2)^{3/2}}arccos\hat{p}_z\}\tilde{\partial}_k\hat{p}_z+\{\frac{arccos\hat{p}_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}\}\tilde{\partial}_k[\sigma(s)\times\hat{p}]_z$

7 螺旋度的导数分析

7.1 螺旋度$\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}$本征函数的导数性质

7.1.1 基本导数性质

推论7.1.1.

$$\begin{cases}\tilde{\partial}_ip=\hat{p}_i\\ \tilde{\partial}_i\hat{p}_j=\frac{p^2\delta_{ij}-p_ip_j}{p^3}=\frac{\delta_{ij}-\hat{p}_i\hat{p}_j}{p}\\ \tilde{\partial}_i\hat{p}_+=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{ix}+i\delta_{iy})-\hat{p}_i\hat{p}_+}{p},\tilde{\partial}_i\hat{p}_-=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{ix}-i\delta_{iy})-\hat{p}_i\hat{p}_-}{p}\\ \tilde{\partial}_i\frac{\hat{p}_+}{\hat{p}_-}=\frac{i\hat{p}_x\delta_{iy}-i\hat{p}_y\delta_{ix}}{p\hat{p}_-^2},\tilde{\partial}_i\frac{\hat{p}_-}{\hat{p}_+}=\frac{-i\hat{p}_x\delta_{iy}+i\hat{p}_y\delta_{ix}}{p\hat{p}_+^2}\\ \tilde{\partial}_i\frac{\hat{p}_+}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}}=\frac{\hat{p}_-}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}}\frac{i\hat{p}_x\delta_{iy}-i\hat{p}_y\delta_{ix}}{2p\hat{p}_-^2},\tilde{\partial}_i\frac{\hat{p}_-}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}}=\frac{\hat{p}_+}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}}\frac{-i\hat{p}_x\delta_{iy}+i\hat{p}_y\delta_{ix}}{2p\hat{p}_+^2}\end{cases}$$

7.1.2 螺旋度$\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}$本征函数导数性质一

推论7.1.2. $\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=-\frac{\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)}{2p(1+\hat{p}_z)}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})+\frac{1}{\sqrt{2}p\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}\delta_{iz}+\hat{p}_i\\ \delta_{ix}+i\delta_{iy}\end{bmatrix}$

$$=\frac{1}{2p\sqrt{1+\hat{p}_z}^3}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\\ -\hat{p}_+(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)+\sqrt{2}(1+\hat{p}_z)[(\delta_{ix}-\hat{p}_i\hat{p}_x)+i(\delta_{iy}-\hat{p}_i\hat{p}_y)]\end{bmatrix}$$

证明: $\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=\tilde{\partial}_i\frac{1}{\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_+\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{1+\hat{p}_z}}\tilde{\partial}_i\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_+\end{bmatrix}$

$$=\frac{-\delta_{iz}+\hat{p}_i\hat{p}_z}{2p\sqrt{1+\hat{p}_z}^3}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_+\end{bmatrix}+\frac{1}{p\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{ix}+i\delta_{iy})-\hat{p}_i\hat{p}_+\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2p\sqrt{1+\hat{p}_z}^3}\{\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\\ -\hat{p}_+(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)2(1+\hat{p}_z)\\ [\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{ix}+i\delta_{iy})-\hat{p}_i\hat{p}_+]2(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix}\}$$

$$=\frac{1}{2p\sqrt{1+\hat{p}_z}^3}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\\ -\hat{p}_+(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)+2(1+\hat{p}_z)[\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{ix}+i\delta_{iy})-\hat{p}_i\hat{p}_+]\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2p\sqrt{1+\hat{p}_z}^3}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\\ -\hat{p}_+(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)+\sqrt{2}(1+\hat{p}_z)[(\delta_{ix}-\hat{p}_i\hat{p}_x)+i(\delta_{iy}-\hat{p}_i\hat{p}_y)]\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1+\hat{p}_z}^3}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\tilde{\partial}_i\hat{p}_z\\ -\hat{p}_+\tilde{\partial}_i\hat{p}_z+2(1+\hat{p}_z)\tilde{\partial}_i\hat{p}_+\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\partial}_i\hat{p}_z\\ -\frac{\hat{p}_+}{1+\hat{p}_z}\tilde{\partial}_i\hat{p}_z+2\tilde{\partial}_i\hat{p}_+\end{bmatrix}$$ □

证明: $\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=\frac{-\delta_{iz}+\hat{p}_i\hat{p}_z}{2p(1+\hat{p}_z)}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})+\frac{1}{p\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{ix}+i\delta_{iy})-\hat{p}_i\hat{p}_+\end{bmatrix}$

$=\frac{-\delta_{iz}+\hat{p}_i\hat{p}_z}{2p(1+\hat{p}_z)}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})+\frac{1}{\sqrt{2}p\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}\delta_{iz}+\hat{p}_i\\ \delta_{ix}+i\delta_{iy}\end{bmatrix}-\frac{\hat{p}_i}{p\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_+\end{bmatrix}$

$=[\frac{-\delta_{iz}+\hat{p}_i\hat{p}_z}{2p(1+\hat{p}_z)}-\frac{\hat{p}_i}{p}]\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})+\frac{1}{\sqrt{2}p\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}\delta_{iz}+\hat{p}_i\\ \delta_{ix}+i\delta_{iy}\end{bmatrix}$

$=-\frac{\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)}{2p(1+\hat{p}_z)}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})+\frac{1}{\sqrt{2}p\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}\delta_{iz}+\hat{p}_i\\ \delta_{ix}+i\delta_{iy}\end{bmatrix}$ □

推论7.1.3. $\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})=-\frac{\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)}{2p(1+\hat{p}_z)}\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})+\frac{1}{\sqrt{2}p\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}-\delta_{ix}+i\delta_{iy}\\ \delta_{iz}+\hat{p}_i\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2p\sqrt{1+\hat{p}_z}^3}\begin{bmatrix}\hat{p}_-(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)-\sqrt{2}(1+\hat{p}_z)[(\delta_{ix}-\hat{p}_i\hat{p}_x)-i(\delta_{iy}-\hat{p}_i\hat{p}_y)]\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\end{bmatrix}$

证明: $\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})=-i\sigma_y\tilde{\partial}_i\lambda^*(\hat{p},\frac{1}{2})$

$=-\frac{\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)}{2p(1+\hat{p}_z)}[-i\sigma_y\lambda^*(\hat{p},\frac{1}{2})]+\frac{-i\sigma_y}{\sqrt{2}p\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}\delta_{iz}+\hat{p}_i\\ \delta_{ix}-i\delta_{iy}\end{bmatrix}$

$=\frac{-i\sigma_y}{2p\sqrt{1+\hat{p}_z}^3}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\\ -\hat{p}_-(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)+\sqrt{2}(1+\hat{p}_z)[(\delta_{ix}-\hat{p}_i\hat{p}_x)-i(\delta_{iy}-\hat{p}_i\hat{p}_y)]\end{bmatrix}$

$=-\frac{\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)}{2p(1+\hat{p}_z)}\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})+\frac{1}{\sqrt{2}p\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}-\delta_{ix}+i\delta_{iy}\\ \delta_{iz}+\hat{p}_i\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2p\sqrt{1+\hat{p}_z}^3}\begin{bmatrix}\hat{p}_-(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)-\sqrt{2}(1+\hat{p}_z)[(\delta_{ix}-\hat{p}_i\hat{p}_x)-i(\delta_{iy}-\hat{p}_i\hat{p}_y)]\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\end{bmatrix}$ □

7.1.3 螺旋度$\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}$本征函数导数性质二

推论7.1.4. $\begin{cases}\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=[\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})]^*,\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})=[\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})]^*\\ \lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})=-[\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})]^*,\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=-[\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})]^*\end{cases}$

性质7.1.1. $\begin{cases}\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\frac{[\sigma_k(\frac{1}{2}),\sigma_z(\frac{1}{2})]}{p(1+\hat{p}_z)}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{2p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})=\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\frac{[\sigma_k(\frac{1}{2}),\sigma_z(\frac{1}{2})]}{p(1+\hat{p}_z)}\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})=-\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{2p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(-\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(-\hat{p},\frac{1}{2})=-\lambda^+(-\hat{p},\frac{1}{2})\frac{[\sigma_k(\frac{1}{2}),\sigma_z(\frac{1}{2})]}{p(1-\hat{p}_z)}\lambda(-\hat{p},\frac{1}{2})=\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{2p(1-\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(-\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(-\hat{p},-\frac{1}{2})=-\lambda^+(-\hat{p},-\frac{1}{2})\frac{[\sigma_k(\frac{1}{2}),\sigma_z(\frac{1}{2})]}{p(1-\hat{p}_z)}\lambda(-\hat{p},-\frac{1}{2})=-\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{2p(1-\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},h)\partial_z\lambda(\hat{p},h)=0\end{cases}$

证明: $\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})$

$=\frac{1}{2p(1+\hat{p}_z)^2}\begin{bmatrix}-\hat{p}_+\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\hat{p}_-(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)-\sqrt{2}(1+\hat{p}_z)[(\delta_{ix}-\hat{p}_i\hat{p}_x)-i(\delta_{iy}-\hat{p}_i\hat{p}_y)]\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\end{bmatrix}$

$=\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\frac{[\sigma_i(\frac{1}{2}),\sigma_z(\frac{1}{2})]}{p(1+\hat{p}_z)}\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})=(\frac{i\hat{p}_y}{2p},\frac{-i\hat{p}_x}{2p},0)=\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{2p(1+\hat{p}_z)}$ □

证明: $\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})$

$=\frac{1}{2p(1+\hat{p}_z)^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_-\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\\ -\hat{p}_+(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)+\sqrt{2}(1+\hat{p}_z)[(\delta_{ix}-\hat{p}_i\hat{p}_x)+i(\delta_{iy}-\hat{p}_i\hat{p}_y)]\end{bmatrix}$

$=\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\frac{[\sigma_i(\frac{1}{2}),\sigma_z(\frac{1}{2})]}{p(1+\hat{p}_z)}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=(\frac{-i\hat{p}_y}{2p},\frac{i\hat{p}_x}{2p},0)=-\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{2p(1+\hat{p}_z)}$ □

7.1.4 螺旋度$\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}$本征函数导数性质三

性质7.1.2. $$\begin{cases}\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{2}\hat{p}_-\hat{p}_i+\sqrt{2}\hat{p}_-\delta_{iz}-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}-i\delta_{iy})}{2p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=\frac{-\sqrt{2}\hat{p}_+\hat{p}_i-\sqrt{2}\hat{p}_+\delta_{iz}+(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})}{2p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(-\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})=\frac{\hat{p}_+}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}}\frac{\sqrt{2}\hat{p}_-\hat{p}_i+\sqrt{2}\hat{p}_-\delta_{iz}-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}-i\delta_{iy})}{2p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(-\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=-\frac{\hat{p}_-}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}}\frac{-\sqrt{2}\hat{p}_+\hat{p}_i-\sqrt{2}\hat{p}_+\delta_{iz}+(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})}{2p(1+\hat{p}_z)}\end{cases}$$

证明： $\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})$

$$=\frac{1}{2p(1+\hat{p}_z)^2}\begin{bmatrix}-\hat{p}_+\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\\ -\hat{p}_+(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)+\sqrt{2}(1+\hat{p}_z)[(\delta_{ix}-\hat{p}_i\hat{p}_x)+i(\delta_{iy}-\hat{p}_i\hat{p}_y)]\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{2p(1+\hat{p}_z)^2}\begin{bmatrix}-\hat{p}_+\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\\ -\hat{p}_+(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)+\sqrt{2}(1+\hat{p}_z)[(\delta_{ix}+i\delta_{iy})-\sqrt{2}\hat{p}_i\hat{p}_+]\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{2p(1+\hat{p}_z)^2}\begin{bmatrix}-\hat{p}_+\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\\ -\hat{p}_+\delta_{iz}-2\hat{p}_i\hat{p}_+-\hat{p}_+\hat{p}_i\hat{p}_z+\sqrt{2}(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{2p(1+\hat{p}_z)^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}-\hat{p}_+\delta_{iz}+\hat{p}_+\hat{p}_i\hat{p}_z\\ -\hat{p}_+\delta_{iz}-2\hat{p}_i\hat{p}_+-\hat{p}_+\hat{p}_i\hat{p}_z+\sqrt{2}(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})\end{bmatrix}$$
$$=\frac{-\sqrt{2}\hat{p}_+\hat{p}_i-\sqrt{2}\hat{p}_+\delta_{iz}+(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})}{2p(1+\hat{p}_z)}$$ □

证明： $\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})$

$$=\frac{1}{2p(1+\hat{p}_z)^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_-\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\hat{p}_-(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)-\sqrt{2}(1+\hat{p}_z)[(\delta_{ix}-\hat{p}_i\hat{p}_x)-i(\delta_{iy}-\hat{p}_i\hat{p}_y)]\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{2p(1+\hat{p}_z)^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_-\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\hat{p}_-(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)-\sqrt{2}(1+\hat{p}_z)[(\delta_{ix}-i\delta_{iy})-\sqrt{2}\hat{p}_i\hat{p}_-]\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{2p(1+\hat{p}_z)^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_-\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\hat{p}_-\delta_{iz}+2\hat{p}_i\hat{p}_-+\hat{p}_i\hat{p}_-\hat{p}_z-\sqrt{2}(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}-i\delta_{iy})\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)(\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_z)\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{2p(1+\hat{p}_z)^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\hat{p}_-\delta_{iz}+2\hat{p}_i\hat{p}_-+\hat{p}_i\hat{p}_-\hat{p}_z-\sqrt{2}(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}-i\delta_{iy})\\ \hat{p}_-\delta_{iz}-\hat{p}_i\hat{p}_-\hat{p}_z\end{bmatrix}$$
$$=\frac{\sqrt{2}\hat{p}_-\hat{p}_i+\sqrt{2}\hat{p}_-\delta_{iz}-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}-i\delta_{iy})}{p(1+\hat{p}_z)}$$ □

7.1.5 螺旋度$\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}$本征函数导数性质四

推论7.1.5. $\lambda^+(\hat{p},h)\lambda(\hat{p},h')=\delta_{hh'},\sum_{h=\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\lambda(\hat{p},h)\lambda^+(\hat{p},h)=1,\sum_{h=\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\lambda^+(\hat{p},h)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h)=0$

推论7.1.6. $(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}p_a=-2\varsigma|\vec{p}|\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})$

证明： $(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}p_a$
$=(\sigma\cdot\vec{p})_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}[\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})+\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},\varsigma)\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},\varsigma)]-\varsigma|\vec{p}|[\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})+\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},\varsigma)\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},\varsigma)]$
$=[-\varsigma|\vec{p}|\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})+\varsigma|\vec{p}|\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},\varsigma)\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},\varsigma)]-\varsigma|\vec{p}|[\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})+\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},\varsigma)\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},\varsigma)]$
$=-2\varsigma|\vec{p}|\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})$ □

推论7.1.7. $\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},h)\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},h)=h\sigma^k_{A_\varsigma A'_\varsigma}\hat{p}_k+\frac{1}{2}\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}$

推论7.1.8. $e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}=cos\frac{1}{2}\omega+i\hat{\omega}\cdot\sigma sin\frac{1}{2}\omega$
$=\frac{1}{\sqrt{2}}[p+p_z+i(\sigma_xp_y-\sigma_yp_x)][p^2+pp_z]^{-1/2}$
$=\frac{1}{\sqrt{2}}[1+\hat{p}_z+i(\sigma\times\hat{p})_z][1+\hat{p}_z]^{-1/2}$

推论7.1.9. $\partial_z e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}} = \frac{\sqrt{1+\hat{p}_z}}{\sqrt{2}p}[1-\hat{p}_z - i(\sigma\times\hat{p})_z], e^{-i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}}\partial_z e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma}{2}} = \frac{-i}{p}(\sigma\times\hat{p})_z$

推论7.1.10. $\lambda^+(\hat{p},h)\partial_z\lambda(\hat{p},h) = 0$

7.1.6 螺旋度$\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}$本征函数导数性质的小结

性质7.1.3.
$$\begin{cases}\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2}) = \frac{(\hat{p}_i+\delta_{iz})(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}-i\delta_{iy})}{2p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},\frac{1}{2}) = -\frac{(\hat{p}_i+\delta_{iz})(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})}{2p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)}\end{cases}$$

7.2 螺旋度$\sigma(1)\cdot\hat{p}$本征函数导数的性质

推论7.2.1. $\lambda(\hat{p},\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_+\end{bmatrix}, \lambda(-\hat{p},\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}-\hat{p}_-\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix}$

引理7.2.1. $\lambda(\hat{p},1;1) = \bar{\Gamma}(1)\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})$

定理7.2.1. $\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},1;1) = -\frac{\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)}{p(1+\hat{p}_z)}\lambda(\hat{p},1;1) + \frac{1}{p(1+\hat{p}_z)}\begin{bmatrix}(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(1+\hat{p}_z)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}[(\delta_{ix}+i\delta_{iy})(1+\hat{p}_z)+(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)]\\ (\delta_{ix}+i\delta_{iy})(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)\end{bmatrix}$

证明: $\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},1;1) = \bar{\Gamma}(1)[\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2}) + \lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})]$

$= -\frac{\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)}{p(1+\hat{p}_z)}\lambda(\hat{p},1;1) + \frac{1}{\sqrt{2}p\sqrt{1+\hat{p}_z}}\bar{\Gamma}(1)[\begin{bmatrix}\delta_{iz}+\hat{p}_i\\ \delta_{ix}+i\delta_{iy}\end{bmatrix}\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2}) + \lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\begin{bmatrix}\delta_{iz}+\hat{p}_i\\ \delta_{ix}+i\delta_{iy}\end{bmatrix}]$

$= -\frac{\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)}{p(1+\hat{p}_z)}\lambda(\hat{p},1;1) + \frac{\sqrt{2}}{p\sqrt{1+\hat{p}_z}}\bar{\Gamma}(1)\begin{bmatrix}\delta_{iz}+\hat{p}_i\\ \delta_{ix}+i\delta_{iy}\end{bmatrix}\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})$

$= -\frac{\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)}{p(1+\hat{p}_z)}\lambda(\hat{p},1;1) + \frac{1}{p(1+\hat{p}_z)}\bar{\Gamma}(1)\begin{bmatrix}\delta_{iz}+\hat{p}_i\\ \delta_{ix}+i\delta_{iy}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1+\hat{p}_z\\ \hat{p}_x+i\hat{p}_y\end{bmatrix}$

$= -\frac{\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)}{p(1+\hat{p}_z)}\lambda(\hat{p},1;1) + \frac{1}{p(1+\hat{p}_z)}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0&0\\ 0&\sqrt{1}&\sqrt{1}&0\\ 0&0&0&\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(1+\hat{p}_z)\\ (\delta_{ix}+i\delta_{iy})(1+\hat{p}_z)\\ (\delta_{iz}+\hat{p}_i)(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)\\ (\delta_{ix}+i\delta_{iy})(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)\end{bmatrix}$

$= -\frac{\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)}{p(1+\hat{p}_z)}\lambda(\hat{p},1;1) + \frac{1}{p(1+\hat{p}_z)}\begin{bmatrix}(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(1+\hat{p}_z)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}[(\delta_{ix}+i\delta_{iy})(1+\hat{p}_z)+(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)]\\ (\delta_{ix}+i\delta_{iy})(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)\end{bmatrix}$ □

推论7.2.2. $\lambda^+(\hat{p},-1;1)\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},1;1) = 0$

证明: $\lambda^+(\hat{p},-1;1)\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},1;1)$

$= 0 + \frac{1}{\hat{p}_-}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\hat{p}_+(1-\hat{p}_z)\\ -\hat{p}_+\hat{p}_-\\ \frac{1}{2}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix}^T\frac{1}{p(1+\hat{p}_z)}\begin{bmatrix}(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(1+\hat{p}_z)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}[(\delta_{ix}+i\delta_{iy})(1+\hat{p}_z)+(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)]\\ (\delta_{ix}+i\delta_{iy})(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)\end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2p\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)}\begin{bmatrix}\hat{p}_+(1-\hat{p}_z)\\ -2\hat{p}_+\hat{p}_-\\ \hat{p}_-(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(1+\hat{p}_z)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}[(\delta_{ix}+i\delta_{iy})(1+\hat{p}_z)+(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)]\\ (\delta_{ix}+i\delta_{iy})(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)\end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2p\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}2\hat{p}_+\hat{p}_-\hat{p}_+(\delta_{iz}+\hat{p}_i)\\ -\sqrt{2}\hat{p}_+\hat{p}_-[(\delta_{ix}+i\delta_{iy})(1+\hat{p}_z)+(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)]\\ \sqrt{2}\hat{p}_+\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})\end{bmatrix}$

$$= \frac{\hat{p}_+}{\sqrt{2}p(1+\hat{p}_z)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\hat{p}_x + i\hat{p}_y)(\delta_{iz} + \hat{p}_i) \\ -[(\delta_{ix} + i\delta_{iy})(1 + \hat{p}_z) + (\delta_{iz} + \hat{p}_i)(\hat{p}_x + i\hat{p}_y)] \\ (1 + \hat{p}_z)(\delta_{ix} + i\delta_{iy}) \end{bmatrix}$$
$$= 0$$ □

推论7.2.3. $\lambda^+(\hat{p}, 1; 1)\tilde{\partial}_k \lambda(\hat{p}, 1; 1) = \frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx} + i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)}$

证明: $\lambda^+(\hat{p}, 1; 1)\tilde{\partial}_i \lambda(\hat{p}, 1; 1)$

$$= -\frac{\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)}{p(1+\hat{p}_z)} + \frac{1}{\hat{p}_+} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\hat{p}_+(1+\hat{p}_z) \\ \hat{p}_+\hat{p}_- \\ \frac{1}{2}\hat{p}_-(1-\hat{p}_z) \end{bmatrix}^T \frac{1}{p(1+\hat{p}_z)} \begin{bmatrix} (\delta_{iz} + \hat{p}_i)(1 + \hat{p}_z) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[(\delta_{ix} + i\delta_{iy})(1 + \hat{p}_z) + (\delta_{iz} + \hat{p}_i)(\hat{p}_x + i\hat{p}_y)] \\ (\delta_{ix} + i\delta_{iy})(\hat{p}_x + i\hat{p}_y) \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)}{p(1+\hat{p}_z)} + \frac{1}{p\hat{p}_+(1+\hat{p}_z)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\hat{p}_+(1 + \hat{p}_z)(\delta_{iz} + \hat{p}_i)(1 + \hat{p}_z) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_+\hat{p}_-[(\delta_{ix} + i\delta_{iy})(1 + \hat{p}_z) + (\delta_{iz} + \hat{p}_i)(\hat{p}_x + i\hat{p}_y)] \\ \frac{1}{2}\hat{p}_-(1 - \hat{p}_z)(\delta_{ix} + i\delta_{iy})(\hat{p}_x + i\hat{p}_y) \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)}{p(1+\hat{p}_z)} + \frac{1}{2p(1+\hat{p}_z)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\delta_{iz} + \hat{p}_i)(1 + \hat{p}_z)^2 \\ (\hat{p}_x - i\hat{p}_y)[(\delta_{ix} + i\delta_{iy})(1 + \hat{p}_z) + (\delta_{iz} + \hat{p}_i)(\hat{p}_x + i\hat{p}_y)] \\ (\hat{p}_x - i\hat{p}_y)(1 - \hat{p}_z)(\delta_{ix} + i\delta_{iy}) \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)}{p(1+\hat{p}_z)} + \frac{1}{2p(1+\hat{p}_z)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\delta_{iz} + \hat{p}_i)(1 + \hat{p}_z)^2 \\ (\hat{p}_x - i\hat{p}_y)(\delta_{ix} + i\delta_{iy})(1 + \hat{p}_z) + (\delta_{iz} + \hat{p}_i)(1 - \hat{p}_z^2)] \\ (\hat{p}_x - i\hat{p}_y)(1 - \hat{p}_z)(\delta_{ix} + i\delta_{iy}) \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)}{p(1+\hat{p}_z)} + \frac{1}{p(1+\hat{p}_z)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\delta_{iz} + \hat{p}_i)(1 + \hat{p}_z) \\ 0 \\ (\hat{p}_x - i\hat{p}_y)(\delta_{ix} + i\delta_{iy}) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})+\delta_{iz}\hat{p}_z-\hat{p}_i}{p(1+\hat{p}_z)} = \frac{-i\hat{p}_y\delta_{ix}+i\hat{p}_x\delta_{iy}}{p(1+\hat{p}_z)}$$ □

7.3 螺旋度$\sigma(1)\cdot\hat{p}$本征函数导数性质的小结

推论7.3.1.

$$\begin{cases} \lambda^+(\hat{p}, 1; 1)\tilde{\partial}_k \lambda(\hat{p}, 1; 1) = \frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)} \\ \lambda^+(\hat{p}, 1; 1)\tilde{\partial}_k \lambda(\hat{p}, 0; 1) = \frac{\sqrt{2}\hat{p}_-\hat{p}_k+\sqrt{2}\hat{p}_-\delta_{kz}-(1+\hat{p}_z)(\delta_{kx}-i\delta_{ky})}{\sqrt{2}p(1+\hat{p}_z)} \\ \lambda^+(\hat{p}, 1; 1)\tilde{\partial}_k \lambda(\hat{p}, -1; 1) = 0 \\ \lambda^+(\hat{p}, 0; 1)\tilde{\partial}_k \lambda(\hat{p}, 0; 1) = 0 \\ \lambda^+(\hat{p}, -1; 1)\tilde{\partial}_k \lambda(\hat{p}, 1; 1) = 0 \\ \lambda^+(\hat{p}, -1; 1)\tilde{\partial}_k \lambda(\hat{p}, 0; 1) = -\frac{\sqrt{2}\hat{p}_+\hat{p}_k+\sqrt{2}\hat{p}_+\delta_{kz}-(1+\hat{p}_z)(\delta_{kx}+i\delta_{ky})}{\sqrt{2}p(1+\hat{p}_z)} \\ \lambda^+(\hat{p}, -1; 1)\tilde{\partial}_k \lambda(\hat{p}, -1; 1) = -\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)} \end{cases}$$

7.4 螺旋度$\gamma\cdot\hat{p}$本征函数的导数性质一

引理7.4.1. $\lambda_m^+(-\hat{p}, 1; 1)\begin{bmatrix} -\hat{p}_z \\ -i \\ \hat{p}_x \end{bmatrix} = 0, \lambda_m^+(-\hat{p}, 1; 1)\begin{bmatrix} i \\ -\hat{p}_z \\ \hat{p}_y \end{bmatrix} = 0, \lambda_m^+(-\hat{p}, -1; 1)\begin{bmatrix} -\hat{p}_z \\ i \\ \hat{p}_x \end{bmatrix} = 0, \lambda_m^+(-\hat{p}, -1; 1)\begin{bmatrix} -i \\ -\hat{p}_z \\ \hat{p}_y \end{bmatrix} = 0$

引理7.4.2.

$$\begin{cases} \tilde{\partial}_k \lambda_m(\hat{p}, 1; 1) = \frac{1}{2p_-} \begin{bmatrix} -i\hat{p}_x(\hat{p}_k\hat{p}_z-\delta_{kz})+i\delta_{kx}(\hat{p}_z-\frac{\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y}{\hat{p}_x-i\hat{p}_y})+\delta_{ky}(1-\frac{\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y}{\hat{p}_x-i\hat{p}_y}) \\ -i\hat{p}_y(\hat{p}_k\hat{p}_z-\delta_{kz})-\delta_{kx}(1-\frac{\hat{p}_x-i\hat{p}_y\hat{p}_z}{\hat{p}_x-i\hat{p}_y})+i\delta_{ky}(\hat{p}_z-\frac{\hat{p}_x-i\hat{p}_y\hat{p}_z}{\hat{p}_x-i\hat{p}_y}) \\ i\hat{p}_k(\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2)-i(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)(\delta_{kx}+i\delta_{ky}) \end{bmatrix} \\ \tilde{\partial}_k \lambda_m(\hat{p}, -1; 1) = \frac{1}{2p_+} \begin{bmatrix} i\hat{p}_x(\hat{p}_k\hat{p}_z-\delta_{kz})-i\delta_{kx}(\hat{p}_z-\frac{\hat{p}_x\hat{p}_z+i\hat{p}_y}{\hat{p}_x+i\hat{p}_y})+\delta_{ky}(1-\frac{\hat{p}_x\hat{p}_z+i\hat{p}_y}{\hat{p}_x+i\hat{p}_y}) \\ +i\hat{p}_y(\hat{p}_k\hat{p}_z-\delta_{kz})-\delta_{kx}(1-\frac{\hat{p}_x+i\hat{p}_y\hat{p}_z}{\hat{p}_x+i\hat{p}_y})-i\delta_{ky}(\hat{p}_z-\frac{\hat{p}_x+i\hat{p}_y\hat{p}_z}{\hat{p}_x+i\hat{p}_y}) \\ -i\hat{p}_k(\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2)+i(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)(\delta_{kx}-i\delta_{ky}) \end{bmatrix} \end{cases}$$

证明: $\tilde{\partial}_k\lambda_m(\hat{p},1;1)=\tilde{\partial}_k\frac{1}{2pp_-}\begin{bmatrix} i(p_xp_z-ipp_y)\\ -1(pp_x-ip_yp_z)\\ -2i(p_+p_-)\end{bmatrix}$

$=(2pp_-\tilde{\partial}_k\frac{1}{2pp_-})\frac{1}{2pp_-}\begin{bmatrix} i(p_xp_z-ipp_y)\\ -1(pp_x-ip_yp_z)\\ -2i(p_+p_-)\end{bmatrix}+\frac{1}{2pp_-}\tilde{\partial}_k\begin{bmatrix} i(p_xp_z-ipp_y)\\ -1(pp_x-ip_yp_z)\\ -2i(p_+p_-)\end{bmatrix}$

$=-\frac{1}{2p_-}[2\hat{p}_k\hat{p}_-+\sqrt{2}(\delta_{kx}-i\delta_{ky})]\lambda_m(\hat{p},1;1)+\frac{1}{2p_-}\begin{bmatrix} i(\delta_{kx}\hat{p}_z+\hat{p}_x\delta_{kz}-i\delta_{ky}-i\hat{p}_k\hat{p}_y)\\ -1(\hat{p}_k\hat{p}_x+\delta_{kx}-i\delta_{ky}\hat{p}_z-i\hat{p}_y\delta_{kz})\\ -2i(\hat{p}_x\delta_{kx}+\hat{p}_y\delta_{ky})\end{bmatrix}$

$=-\frac{1}{2p_-}[2\hat{p}_k\hat{p}_-+\sqrt{2}(\delta_{kx}-i\delta_{ky})]\frac{1}{2\hat{p}_-}\begin{bmatrix} i(\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y)\\ -1(\hat{p}_x-i\hat{p}_y\hat{p}_z)\\ -2i(\hat{p}_+\hat{p}_-)\end{bmatrix}+\frac{1}{2p_-}\begin{bmatrix} i(\delta_{kx}\hat{p}_z+\hat{p}_x\delta_{kz}-i\delta_{ky}-i\hat{p}_k\hat{p}_y)\\ -1(\hat{p}_k\hat{p}_x+\delta_{kx}-i\delta_{ky}\hat{p}_z-i\hat{p}_y\delta_{kz})\\ -2i(\hat{p}_x\delta_{kx}+\hat{p}_y\delta_{ky})\end{bmatrix}$

$=-\frac{1}{2p_-}[\hat{p}_k+\frac{1}{\sqrt{2}\hat{p}_-}(\delta_{kx}-i\delta_{ky})]\begin{bmatrix} i(\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y)\\ -1(\hat{p}_x-i\hat{p}_y\hat{p}_z)\\ -2i(\hat{p}_+\hat{p}_-)\end{bmatrix}+\frac{1}{2p_-}\begin{bmatrix} i(\delta_{kx}\hat{p}_z+\hat{p}_x\delta_{kz}-i\delta_{ky}-i\hat{p}_k\hat{p}_y)\\ -1(\hat{p}_k\hat{p}_x+\delta_{kx}-i\delta_{ky}\hat{p}_z-i\hat{p}_y\delta_{kz})\\ -2i(\hat{p}_x\delta_{kx}+\hat{p}_y\delta_{ky})\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2p_-}\begin{bmatrix} -i\hat{p}_x(\hat{p}_k\hat{p}_z-\delta_{kz})+i\delta_{kx}(\hat{p}_z-\frac{\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y}{\hat{p}_x-i\hat{p}_y})+\delta_{ky}(1-\frac{\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y}{\hat{p}_x-i\hat{p}_y})\\ -i\hat{p}_y(\hat{p}_k\hat{p}_z-\delta_{kz})-\delta_{kx}(1-\frac{\hat{p}_x-i\hat{p}_y\hat{p}_z}{\hat{p}_x-i\hat{p}_y})+i\delta_{ky}(\hat{p}_z-\frac{\hat{p}_x-i\hat{p}_y\hat{p}_z}{\hat{p}_x-i\hat{p}_y})\\ i\hat{p}_k(\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2)-i(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)(\delta_{kx}+i\delta_{ky})\end{bmatrix}$ □

推论7.4.1. $\begin{cases}\tilde{\partial}_x\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)=\frac{1}{2p_{+\varsigma}}\{i\varsigma\hat{p}_x\hat{p}_z\begin{bmatrix}\hat{p}_x\\ \hat{p}_y\\ \hat{p}_z\end{bmatrix}+i\varsigma\begin{bmatrix}-\hat{p}_z\\ i\varsigma\\ \hat{p}_x\end{bmatrix}-\sqrt{2}\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)\}\\ \tilde{\partial}_y\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)=\frac{1}{2p_+}\{i\varsigma\hat{p}_y\hat{p}_z\begin{bmatrix}\hat{p}_x\\ \hat{p}_y\\ \hat{p}_z\end{bmatrix}+i\varsigma\begin{bmatrix}-i\varsigma\\ -\hat{p}_z\\ \hat{p}_y\end{bmatrix}-i\varsigma\sqrt{2}\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)\}\\ \tilde{\partial}_z\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)=-i\varsigma p_{-\varsigma}\begin{bmatrix}\hat{p}_x\\ \hat{p}_y\\ \hat{p}_z\end{bmatrix}\end{cases}$

推论7.4.2. $\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma;1)=\frac{1}{2\hat{p}_{-\varsigma}}\begin{bmatrix} i\varsigma(\hat{p}_x\hat{p}_z-i\varsigma\hat{p}_y)\\ -1(\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y\hat{p}_z)\\ -2i\varsigma(\hat{p}_+\hat{p}_-)\end{bmatrix},\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)=\frac{1}{2\hat{p}_{+\varsigma}}\begin{bmatrix} -i\varsigma(\hat{p}_x\hat{p}_z+i\varsigma\hat{p}_y)\\ -1(\hat{p}_x+i\varsigma\hat{p}_y\hat{p}_z)\\ 2i\varsigma(\hat{p}_+\hat{p}_-)\end{bmatrix}$

推论7.4.3. $\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma;1)\tilde{\partial}_x\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)=\frac{i\varsigma\hat{p}_y}{p(1+\hat{p}_z)},\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma;1)\tilde{\partial}_y\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)=\frac{-i\varsigma\hat{p}_x}{p(1+\hat{p}_z)},\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma;1)\tilde{\partial}_z\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)=0$

$\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma;1)\hat{p}\cdot\tilde{\nabla}\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)=0$

推论7.4.4. $\begin{cases}\lambda_m^+(\hat{p},1;1)\tilde{\partial}_k\lambda_m(\hat{p},1;1)=\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda_m^+(\hat{p},-1;1)\tilde{\partial}_k\lambda_m(\hat{p},-1;1)=-\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda_m^+(\hat{p},0;1)\tilde{\partial}_k\lambda_m(\hat{p},0;1)=0\\ \lambda_m^+(\hat{p},-1;1)\tilde{\partial}_k\lambda_m(\hat{p},1;1)=0\\ \lambda_m^+(\hat{p},1;1)\tilde{\partial}_k\lambda_m(\hat{p},-1;1)=0\end{cases}$

7.5 螺旋度$\gamma\cdot\hat{p}$本征函数的导数性质二?

推论7.5.1. $\begin{cases}(\gamma_y\tilde{\partial}_z-\gamma_z\tilde{\partial}_y)\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)=\frac{\varsigma}{2p_{+\varsigma}}\{\hat{p}_x\hat{p}_z\hat{p}-\begin{bmatrix}-\hat{p}_z\\ i\varsigma\\ \hat{p}_x\end{bmatrix}+i\sqrt{2}\gamma_z\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)\}\\ (\gamma_z\tilde{\partial}_x-\gamma_x\tilde{\partial}_z)\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)=\frac{\varsigma}{2p_{+\varsigma}}\{\hat{p}_y\hat{p}_z\hat{p}-\begin{bmatrix}-i\varsigma\\ -\hat{p}_z\\ \hat{p}_y\end{bmatrix}-\varsigma\sqrt{2}\gamma_z\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)\}\\ (\gamma_x\tilde{\partial}_y-\gamma_y\tilde{\partial}_x)\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)=\frac{\varsigma}{2p_{+\varsigma}}\{\hat{p}_z\hat{p}_z\hat{p}+\begin{bmatrix}\hat{p}_x\\ \hat{p}_y\\ \hat{p}_z\end{bmatrix}-i\sqrt{2}(\gamma_x+i\varsigma\gamma_y)\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)\}\end{cases}$

推论7.5.2. $\begin{cases}\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma;1)(\gamma_x\tilde{\partial}_y-\gamma_y\tilde{\partial}_x)\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)=\frac{i\hat{p}_z}{p(1+\hat{p}_z)}+\frac{i}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma;1)(\gamma_y\tilde{\partial}_z-\gamma_z\tilde{\partial}_y)\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)=\frac{i\hat{p}_x}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma;1)(\gamma_z\tilde{\partial}_x-\gamma_x\tilde{\partial}_z)\lambda_m(-\hat{p},-\varsigma;1)=\frac{i\hat{p}_y}{p(1+\hat{p}_z)}\end{cases}$

推论7.5.3. $\lambda_m^+(-\hat{p},-\varsigma;1)(\gamma_i\tilde{\partial}_j-\gamma_j\tilde{\partial}_i)\lambda_m(\hat{p},-\varsigma;1)=0,\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma;1)(\gamma_i\tilde{\partial}_j-\gamma_j\tilde{\partial}_i)\lambda_m(-\hat{p},-\varsigma;1)=0$

推论7.5.4. $\Big\{\tilde{\partial}_k\lambda_m(\hat{p},1;1)|_{\hat{p}_z\to 1}=0$

7.6 螺旋度$\sigma(2)\cdot\hat{p}$本征函数导数性质的小结

推论7.6.1.

$$\begin{cases}\lambda^+(\hat{p},2;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},2;2)=2\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},1;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},1;2)=\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},0;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},0;2)=0\\ \lambda^+(\hat{p},-1;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-1;2)=-\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},-2;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-2;2)=-2\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)}\end{cases}\qquad\begin{cases}\lambda^+(\hat{p},-2;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},2;2)=0\\ \lambda^+(\hat{p},-1;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},1;2)=0\\ \lambda^+(\hat{p},0;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},0;2)=0\\ \lambda^+(\hat{p},1;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-1;2)=0\\ \lambda^+(\hat{p},2;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-2;2)=0\end{cases}$$

推论7.6.2.

$$\begin{cases}\lambda^+(\hat{p},2;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},2;2)=2\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},1;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},2;2)\\ =-\frac{(\hat{p}_i+\delta_{iz})(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},0;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},2;2)=0\\ \lambda^+(\hat{p},-1;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},2;2)=0\\ \lambda^+(\hat{p},-2;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},2;2)=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\lambda^+(\hat{p},2;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},1;2)=\frac{(\hat{p}_i+\delta_{iz})(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}-i\delta_{iy})}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},1;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},1;2)=\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},0;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},1;2)=-\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{(\hat{p}_i+\delta_{iz})(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},-1;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},1;2)=0\\ \lambda^+(\hat{p},-2;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},1;2)=0\end{cases}$$

推论7.6.3.

$$\begin{cases}\lambda^+(\hat{p},2;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},0;2)=0\\ \lambda^+(\hat{p},1;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},0;2)=\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{(\hat{p}_i+\delta_{iz})(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}-i\delta_{iy})}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},0;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},0;2)=0\\ \lambda^+(\hat{p},-1;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},0;2)=-\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{(\hat{p}_i+\delta_{iz})(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},-2;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},0;2)=0\end{cases}$$

推论7.6.4.

$$\begin{cases}\lambda^+(\hat{p},2;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-1;2)=0\\ \lambda^+(\hat{p},1;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-1;2)=0\\ \lambda^+(\hat{p},0;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-1;2)=\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{(\hat{p}_i+\delta_{iz})(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}-i\delta_{iy})}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},-1;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-1;2)=-\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},-2;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-1;2)=-\frac{(\hat{p}_i+\delta_{iz})(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})}{p(1+\hat{p}_z)}\end{cases}\qquad\begin{cases}\lambda^+(\hat{p},2;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-2;2)=0\\ \lambda^+(\hat{p},1;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-2;2)=0\\ \lambda^+(\hat{p},0;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-2;2)=0\\ \lambda^+(\hat{p},-1;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-2;2)\\ =\frac{(\hat{p}_i+\delta_{iz})(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}-i\delta_{iy})}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},-2;2)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-2;2)=-2\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)}\end{cases}$$

7.7 螺旋度$\sigma(s)\cdot\hat{p}$本征函数导数的性质

定理7.7.1. $\lambda(\hat{p},h;s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)=C_{2s}^{s-h}h\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)},\lambda(-\hat{p},h;s)\tilde{\partial}_k\lambda(-\hat{p},h;s)=C_{2s}^{s-h}h\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1-\hat{p}_z)}$

推论7.7.1.

$$\begin{cases}\lambda^+(\hat{p},h';s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)=\sqrt{C_{2s}^{s-h'}C_{2s}^{s-h}}[(h'+h)\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{2p(1+\hat{p}_z)}+(h'-h)\frac{\sqrt{2}\hat{p}_+\hat{p}_i+\sqrt{2}\hat{p}_+\delta_{iz}-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})}{2p(1+\hat{p}_z)}],h'\le h\\ \lambda^+(\hat{p},h';s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)=\sqrt{C_{2s}^{s-h'}C_{2s}^{s-h}}[(h'+h)\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{2p(1+\hat{p}_z)}+(h'-h)\frac{\sqrt{2}\hat{p}_-\hat{p}_i+\sqrt{2}\hat{p}_-\delta_{iz}-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}-i\delta_{iy})}{2p(1+\hat{p}_z)},h'\ge h\\ \lambda^+(-\hat{p},-h';s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)\\ =(-1)^{s-h'}(\frac{\hat{p}_-}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{2h'}\sqrt{C_{2s}^{s-h'}C_{2s}^{s-h}}[(h'+h)\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{2p(1+\hat{p}_z)}+(h'-h)\frac{\sqrt{2}\hat{p}_+\hat{p}_i+\sqrt{2}\hat{p}_+\delta_{iz}-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})}{2p(1+\hat{p}_z)}],h'\le h\\ \lambda^+(-\hat{p},-h';s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)\\ =(-1)^{s-h'}(\frac{\hat{p}_-}{\sqrt{\hat{p}_+\hat{p}_-}})^{2h'}\sqrt{C_{2s}^{s-h'}C_{2s}^{s-h}}[(h'+h)\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{2p(1+\hat{p}_z)}+(h'-h)\frac{\sqrt{2}\hat{p}_-\hat{p}_i+\sqrt{2}\hat{p}_-\delta_{iz}-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}-i\delta_{iy})}{2p(1+\hat{p}_z)},h'\ge h\end{cases}$$

7.8 螺旋度$\sigma(s)\cdot\hat{p}$本征函数导数的通用解法一

引理7.8.1. $\lambda(\hat{p},s;s)=\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{2s},\lambda(\hat{p},-s;s)=\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{2s}$

定理7.8.1. $\lambda^{+}(\hat{p},-\varsigma s;s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\varsigma s;s)=2s\lambda^{+}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})$

证明： $\lambda^{+}(\hat{p},-\varsigma s;s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\varsigma s;s)$

$$=\overbrace{\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})}^{2s}\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)\tilde{\partial}_k\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})}^{2s}$$
$$=2s\overbrace{\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})}^{2s}\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})}^{2s}$$
$$=2s\overbrace{\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})}^{2s}\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})}^{2s}$$
$$=2s\overbrace{\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})}^{2s}$$
$$=2s\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})$$ □

定理7.8.2. $\lambda^{+}(\hat{p},-s;s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},s;s)=0[\Leftrightarrow]\lambda^{+}(\hat{p},s;s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-s;s)=0;s\geq1$

证明： $\lambda^{+}(\hat{p},-\varsigma s;s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\varsigma s;s);s\geq1$

$$=\overbrace{\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})}^{2s}\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)\tilde{\partial}_k\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{\varsigma}{2})}^{2s}$$
$$=2s\overbrace{\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})}^{2s}\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{\varsigma}{2})}^{2s}$$
$$=2s\overbrace{\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})}^{2s}\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{\varsigma}{2})}^{2s}$$
$$=2s\overbrace{\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda(\hat{p},\tfrac{\varsigma}{2})}^{2s}$$
$$=0$$ □

证明： $\lambda^{+}(\hat{p},-\varsigma s;s)\lambda(\hat{p},\varsigma s;s)=0,\lambda^{+}(\hat{p},-\varsigma s;s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\varsigma s;s)=0$

$$\Leftrightarrow\tilde{\partial}_k[\lambda^{+}(\hat{p},-\varsigma s;s)\lambda(\hat{p},\varsigma s;s)]=0,\lambda^{+}(\hat{p},-\varsigma s;s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\varsigma s;s)=0$$
$$\Leftrightarrow\tilde{\partial}_k\lambda^{+}(\hat{p},-\varsigma s;s)\lambda(\hat{p},\varsigma s;s)+\lambda^{+}(\hat{p},-\varsigma s;s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\varsigma s;s)=0,\lambda^{+}(\hat{p},-\varsigma s;s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\varsigma s;s)=0$$
$$\Rightarrow\tilde{\partial}_k\lambda^{+}(\hat{p},-\varsigma s;s)\lambda(\hat{p},\varsigma s;s)=0$$
$$\Leftrightarrow[\tilde{\partial}_k\lambda^{+}(\hat{p},-\varsigma s;s)\lambda(\hat{p},\varsigma s;s)]^{+}=0$$
$$\Leftrightarrow\lambda^{+}(\hat{p},\varsigma s;s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\varsigma s;s)=0$$ □

7.9 螺旋度$\sigma(s)\cdot\hat{p}$本征函数导数的通用解法二

引理7.9.1. $\lambda(\hat{p},h;s)=\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h}$

定理7.9.1. $\lambda^{+}(\hat{p},h;s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)=2h\lambda^{+}(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})$

证明： $\lambda^{+}(\hat{p},h;s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)$

$$=[\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s-h}]^{+}$$
$$\tilde{\partial}_k\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s-h}$$
$$=C_{2s}^{s-h}\overbrace{\lambda^{+}(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^{+}(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^{+}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s-h}\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)$$
$$[(s+h)\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s-h}+(s-h)\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s-h}]$$

$$= (s+h)\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s-h}$$
$$+ (s-h)\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s-h}$$
$$= (s+h)\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2}) + (s-h)\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})$$
$$= 2h\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})$$
□

定理7.9.2. $\lambda^+(\hat{p},-h;s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s) = 0, |h| \geq 1$

证明: $\lambda^+(\hat{p},-h;s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)$

$$= [\sqrt{C_{2s}^{s+h}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s-h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s+h}]^+$$
$$\tilde{\partial}_k\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s-h}$$
$$= C_{2s}^{s-h}\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s-h}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s+h}\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)$$
$$[(s+h)\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s-h}+(s-h)\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{s-h}]$$
$$= 0 + 0 = 0$$
□

定理7.9.3. $\lambda^+(\hat{p},0;n)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},0;n) = 0$

证明: $\lambda^+(\hat{p},0;n)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},0;n)$

$$= [\sqrt{C_{2n}^{n}}\bar{\Gamma}(n)\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{n}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{n}]^+$$
$$\tilde{\partial}_k\sqrt{C_{2n}^{n}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{n}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{n}$$
$$= C_{2n}^{n}\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{n}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{n}\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)$$
$$[n\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{n}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{n}+n\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{n}\otimes\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{n}]$$
$$= n[\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{n}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{n}$$
$$+\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{n}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{n}]$$
$$= n\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2}) + n\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})$$
$$= 0$$
□

定理7.9.4. $\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2};n+\tfrac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2};n+\tfrac{1}{2}) = (n+1)\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})$

证明: $\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2};n+\tfrac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2};n+\tfrac{1}{2})$

$$= [\sqrt{C_{2n+1}^{n}}\bar{\Gamma}(n+\tfrac{1}{2})\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{n}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{n+1}]^+$$
$$\tilde{\partial}_k\sqrt{C_{2n+1}^{n}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{n+1}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{n}$$
$$= C_{2n+1}^{n}\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{n}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{n+1}\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)$$
$$[(n+1)\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{n+1}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{n}+n\overbrace{\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{n+1}\otimes\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{n}]$$
$$= (n+1)[\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\tfrac{1}{2})\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})}^{n+1}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\lambda(\hat{p},-\tfrac{1}{2})}^{n}+0$$
$$= (n+1)\lambda^+(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\tfrac{1}{2})$$
□

定理7.9.5. $\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2};n+\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2};n+\frac{1}{2})=(n+1)\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})$

证明: $\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2};n+\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2};n+\frac{1}{2})$

$=[\sqrt{C_{2n+1}^n}\bar{\Gamma}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{n+1}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{n}]^+$

$\tilde{\partial}_k\sqrt{C_{2n+1}^n}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{n}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{n+1}$

$=C_{2n+1}^n\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})}^{n+1}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{n}\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)$

$[n\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{n}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{n+1}+(n+1)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{n}\otimes\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{n+1}]$

$=0+(n+1)\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{n}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{n+1}]$

$=(n+1)\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})$ □

7.10 螺旋度$\sigma(s)\cdot\hat{p}$本征函数导数的通用解法三

定理7.10.1. $\lambda^+(\hat{p},h';s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)=0,|h'-h|\geq 2$

证明: $\lambda^+(\hat{p},h';s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)$

$=[\sqrt{C_{2s}^{s-h'}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h'}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h'}]^+$

$\tilde{\partial}_k\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h}$

$=\sqrt{C_{2s}^{s-h'}}\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h'}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h'}\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)$

$[(s+h)\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h}+(s-h)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h}]$

$=0+0=0$ □

定理7.10.2. $\lambda^+(\hat{p},h';s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)=\sqrt{(s+h')(s-h)}\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2}),h'-h=1$

证明: $\lambda^+(\hat{p},h';s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)$

$=[\sqrt{C_{2s}^{s-h'}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h'}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h'}]^+$

$\tilde{\partial}_k\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h}$

$=\sqrt{C_{2s}^{s-h'}}\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h'}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h'}\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)$

$[(s+h)\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h}+(s-h)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h}]$

$=\sqrt{C_{2s}^{s-h'}}\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h'}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h'}\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)$

$(s-h)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h}$

$=\sqrt{C_{2s}^{s-h'}}\sqrt{C_{2s}^{s-h}}(C_{2s}^{s-h'})^{-1}(s-h)\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h}$

$=\sqrt{(s+h')(s-h)}\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})$ □

定理7.10.3. $\lambda^+(\hat{p},h';s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)=\sqrt{(s-h')(s+h)}\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2}),h'-h=-1$

证明：$\lambda^+(\hat{p},h';s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)$

$= [\sqrt{C_{2s}^{s-h'}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h'}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h'}]^+$

$\tilde{\partial}_k\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h}$

$= \sqrt{C_{2s}^{s-h'}}\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h'}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h'}\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)$

$[(s+h)\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h}+(s-h)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h}]$

$= \sqrt{C_{2s}^{s-h'}}\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h'}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h'}\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)$

$(s+h)\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h}$

$= \sqrt{C_{2s}^{s-h'}}\sqrt{C_{2s}^{s-h}}(C_{2s}^{s-h'})^{-1}(s+h)$

$\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h}$

$= \sqrt{(s-h')(s+h)}\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})$ □

7.11 螺旋度$\sigma(s)\cdot\hat{p}$本征函数导数性质的小结

定理7.11.1.

$$\begin{cases}\lambda^+(\hat{p},h;s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)=2h\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=h\frac{-i\hat{p}_y\delta_{kx}+i\hat{p}_x\delta_{ky}}{p(1+\hat{p}_z)}\\ \lambda^+(\hat{p},h';s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)=\sqrt{(s+\varsigma h')(s-\varsigma h)}\lambda^+(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\\ =\varsigma\sqrt{(s+\varsigma h')(s-\varsigma h)}\frac{(\hat{p}_i+\delta_{iz})(\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y)-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}-i\varsigma\delta_{iy})}{2p(1+\hat{p}_z)},h'-h=\varsigma\\ \lambda^+(\hat{p},h';s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},h;s)=0,|h'-h|\geq 2\end{cases}$$

7.12 螺旋度$\sigma(s)\cdot\hat{p}$本征函数导数的通用解法四

引理7.12.1. $\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\Omega(s;w)\Gamma(s;w)$

定理7.12.1. $\lambda^+(\hat{p},\varsigma s;s)\sigma(s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\varsigma s;s)=0,s\geq\frac{3}{2}$

证明：$\lambda^+(\hat{p},\varsigma s;s)\sigma(s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\varsigma s;s)$

$= \overbrace{\lambda^+(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})}^{2s}\Gamma(s)[\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)\Gamma(s)]\bar{\Gamma}(s)\tilde{\partial}_k\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})}^{2s}$

$= 2s\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})}^{2s}\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})}^{2s}$

$= 2s\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})}^{2s}\Gamma(s)\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})}^{2s}$

$= 2s\overbrace{\lambda^+(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^+(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})}^{2s}\Omega(s)\overbrace{\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})}^{2s}$

$= 0$ □

推论7.12.1. $\lambda^+(\hat{p},\varsigma s;s)[\sigma_i(s)\tilde{\partial}_j-\sigma_j(s)\tilde{\partial}_i]\lambda(\hat{p},-\varsigma s;s)=0,s\geq\frac{3}{2}$

定理7.12.2. $\lambda^+(\hat{p},-1;1)\sigma(s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},1;1)=0$

证明：$\lambda^+(\hat{p},-1;s)\sigma(s)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},1;1)$

$= \lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\Gamma(1)\bar{\Gamma}(1)\Omega(1)\Gamma(1)\bar{\Gamma}(1)\tilde{\partial}_k[\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})]$

$= 2s\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\Gamma(1)\bar{\Gamma}(1)\Omega(1)\Gamma(1)\bar{\Gamma}(1)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})$

$= 2\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\Gamma(1)\bar{\Gamma}(1)\Omega(1)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})$

$= 2\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\Omega(1)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})$
$= \lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})(\sigma\otimes I+I\otimes\sigma)\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})$
$= [\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_k\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})][\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\sigma\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})]$ □

性质7.12.1.
$\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},\frac{1}{2}) = -\frac{(\hat{p}_i+\delta_{iz})(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)-(1+\hat{p}_z)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})}{2p(1+\hat{p}_z)}$

$$= -\begin{bmatrix}\frac{\hat{p}_x(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)-(1+\hat{p}_z)}{2p(1+\hat{p}_z)}\\ \frac{\hat{p}_y(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)-i(1+\hat{p}_z)}{2p(1+\hat{p}_z)}\\ \frac{(1+\hat{p}_z)(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)}{2p(1+\hat{p}_z)}\end{bmatrix} = -\frac{1}{2p(1+\hat{p}_z)}[(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)\hat{p}+\begin{bmatrix}-(1+\hat{p}_z)\\ -i(1+\hat{p}_z)\\ (\hat{p}_x+i\hat{p}_y)\end{bmatrix}]$$

$$\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})(\sigma,-i\varsigma)_a\lambda(\hat{p},\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix}\frac{\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y}{\hat{p}_x-i\hat{p}_y}\\ \frac{\hat{p}_y\hat{p}_z+i\hat{p}_x}{\hat{p}_x-i\hat{p}_y}\\ \frac{\hat{p}_z\hat{p}_z-1}{\hat{p}_x-i\hat{p}_y}\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{p}_x-i\hat{p}_y}(\hat{p}_z\hat{p}+\begin{bmatrix}-i\hat{p}_y\\ i\hat{p}_x\\ -1\\ 0\end{bmatrix})$$

推论7.12.2. $\lambda^+(\hat{p},-1;1)[\sigma_i(1)\tilde{\partial}_j-\sigma_j(1)\tilde{\partial}_i]\lambda(\hat{p},1;1)$
$= [\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_j\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})][\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\sigma_i\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})] - [\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})][\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\sigma_j\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})]$
$= 0$

推论7.12.3. $\lambda^+(\hat{p},\varsigma s;s)[\sigma_i(s)\tilde{\partial}_j-\sigma_j(s)\tilde{\partial}_i]\lambda(\hat{p},-\varsigma s;s) = 0, s\geq 1$

8 螺旋度$\sigma(s)\cdot\hat{p}$的解析延拓(还需严格化)

8.1 螺旋度$\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p},\hat{p}\in C$本征函数的分析

定义8.1.1. $\tilde{\lambda}^T(\hat{p},\frac{1}{2}) := -i\lambda^T(\hat{p},-\frac{1}{2})\sigma_y, \tilde{\lambda}^T(\hat{p},-\frac{1}{2}) := i\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})\sigma_y, \hat{p} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{\vec{p}\cdot\vec{p}}}\in C$

推论8.1.1. $\lambda(\hat{p},\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_+\end{bmatrix}, \lambda(\hat{p},-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}-\hat{p}_-\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\hat{p}_z)\end{bmatrix}, \hat{p}^2=1,\hat{p}\in C$

推论8.1.2. $[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]\lambda(\hat{p},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2}), [\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2}), \hat{p}^2=1,\hat{p}\in C$

性质8.1.1. $\tilde{\lambda}^T(\hat{p},\frac{1}{2}) = \lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2}), \tilde{\lambda}^T(\hat{p},-\frac{1}{2}) = \lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2}), \hat{p}\in R$

推论8.1.3. $\tilde{\lambda}^T(\hat{p},h)\lambda(\hat{p},h') = \delta_{hh'}, \sum_{h=\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\lambda(\hat{p},h)\tilde{\lambda}^T(\hat{p},h) = 1, \sum_{h=\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}h\lambda(\hat{p},h)\tilde{\lambda}^T(\hat{p},h) = \sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}, \hat{p}\in C$

8.2 螺旋度$\sigma(s)\cdot\hat{p},\hat{p}\in C$本征函数的分析

定义8.2.1. $\lambda(\hat{p},h;s) := \sqrt{C_{2s}^{s-h}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}^{s-h}, \hat{p}\in C$

定义8.2.2.
$\tilde{\lambda}^T(\hat{p},h;s) := (-1)^h\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\overbrace{\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})\sigma_y\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})\sigma_y}^{s+h}\otimes\overbrace{\lambda^T(\hat{p},-\frac{1}{2})\sigma_y\otimes\cdot\cdot\otimes\lambda^T(\hat{p},-\frac{1}{2})\sigma_y}^{s-h}\Gamma(s), \hat{p}\in C$

推论8.2.1. $[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\lambda(\hat{p},h;s) = h\lambda(\hat{p},h;s), \hat{p}^2=1,\hat{p}\in C$

性质8.2.1. $\tilde{\lambda}^T(\hat{p},h;s) = \lambda^+(\hat{p},h;s), \hat{p}\in R$

推论8.2.2. $\tilde{\lambda}^T(\hat{p},h;s)\lambda(\hat{p},h';s) = \delta_{hh'}, \sum_{h=s}^{-s}\lambda(\hat{p},h;s)\tilde{\lambda}^T(\hat{p},h;s) = 1, \sum_{h=s}^{-s}h\lambda(\hat{p},h;s)\tilde{\lambda}^T(\hat{p},h;s) = \sigma(s)\cdot\hat{p}, \hat{p}\in C$

8.3 螺旋度$\sigma(s)\cdot\hat{p},\hat{p}\in C$杂分析

定理8.3.1. $\tilde{\partial}_i\lambda(\hat{p},1;1)=\frac{1}{p(1+\hat{p}_z)}\{-[\delta_{iz}+\hat{p}_i(2+\hat{p}_z)]\lambda(\hat{p},1;1)+[(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(1+\hat{p}_z)+(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})]\lambda(\hat{p},1;1)$

$$+\begin{bmatrix}(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(1+\hat{p}_z)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}[(\delta_{ix}+i\delta_{iy})(1+\hat{p}_z)+(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)]\\ (\delta_{ix}+i\delta_{iy})(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)\end{bmatrix}-[(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(1+\hat{p}_z)+(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})]\lambda(\hat{p},1;1)\}$$

$$=\frac{1}{p(1+\hat{p}_z)}\{(-i\hat{p}_y\delta_{ix}+i\hat{p}_x\delta_{iy})\lambda(\hat{p},1;1)$$

$$+\begin{bmatrix}(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(1+\hat{p}_z)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}[(\delta_{ix}+i\delta_{iy})(1+\hat{p}_z)+(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)]\\ (\delta_{ix}+i\delta_{iy})(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)\end{bmatrix}$$

$$-[(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(1+\hat{p}_z)+(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)(\delta_{ix}+i\delta_{iy})]\frac{1}{\hat{p}_-}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_+\hat{p}_-\\ \frac{1}{2}\hat{p}_+(1-\hat{p}_z)\end{bmatrix}\}$$

$$=\frac{1}{p(1+\hat{p}_z)}\{(-i\hat{p}_y\delta_{ix}+i\hat{p}_x\delta_{iy})\lambda(\hat{p},1;1)$$

$$+\begin{bmatrix}(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(1+\hat{p}_z)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}[(\delta_{ix}+i\delta_{iy})(1+\hat{p}_z)+(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)]\\ (\delta_{ix}+i\delta_{iy})(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)\end{bmatrix}$$

$$-(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(1+\hat{p}_z)\frac{1}{\hat{p}_-}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_+\hat{p}_-\\ \frac{1}{2}\hat{p}_+(1-\hat{p}_z)\end{bmatrix}-\sqrt{2}(\delta_{ix}+i\delta_{iy})\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_+\hat{p}_-\\ \frac{1}{2}\hat{p}_+(1-\hat{p}_z)\end{bmatrix}\}$$

$$=\frac{1}{p(1+\hat{p}_z)}\{(-i\hat{p}_y\delta_{ix}+i\hat{p}_x\delta_{iy})\lambda(\hat{p},1;1)$$

$$+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(1-\hat{p}_z)^2\\ \frac{1}{\sqrt{2}}[(\delta_{ix}+i\delta_{iy})(1+\hat{p}_z)+(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)]\\ (\delta_{ix}+i\delta_{iy})(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)\end{bmatrix}$$

$$-(\delta_{iz}+\hat{p}_i)(1+\hat{p}_z)\frac{1}{\hat{p}_-}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_+\hat{p}_-\\ \frac{1}{2}\hat{p}_+(1-\hat{p}_z)\end{bmatrix}-\sqrt{2}(\delta_{ix}+i\delta_{iy})\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\hat{p}_-(1+\hat{p}_z)\\ \hat{p}_+\hat{p}_-\\ \frac{1}{2}\hat{p}_+(1-\hat{p}_z)\end{bmatrix}\}$$

第十八章　特殊拟微分算子和矩阵连乘积

1 新数学工具的建立

1.1 特殊拟微分算子的引入

平面波解假设：假设满足无质量粒子物理方程的所有平面波解都不含零频解，所以常数解不是无质量粒子方程的平面波解，应另行处理。

定义1.1.1. $f(\vec{r},t) := \int\limits_{\vec{p}\neq 0} f(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}$

定义1.1.2. $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{m^2-\nabla^2}}f(\vec{r},t) := \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{E}f(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}, \forall f(\vec{r},t) \\ \sqrt{m^2-\nabla^2}f(\vec{r},t) := \frac{1}{(2\pi)^3}\int Ef(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}, \forall f(\vec{r},t) \end{cases}$　$\sqrt{m^2-\nabla^2} \longleftrightarrow E = \sqrt{m^2+\vec{p}^2}$

定义1.1.3. $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}}f(\vec{r},t) := \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{|\vec{p}|}f(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}, \forall f(\vec{r},t) \\ \sqrt{-\nabla^2}f(\vec{r},t) := \frac{1}{(2\pi)^3}\int |\vec{p}|f(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}, \forall f(\vec{r},t) \end{cases}$　$\sqrt{-\nabla^2} \longleftrightarrow |\vec{p}|$

1.2 有质量特殊拟微分算子的基本性质

性质1.2.1. $\begin{cases} (\sqrt{m^2-\nabla^2})^2 = m^2-\nabla^2, (\frac{1}{\sqrt{m^2-\nabla^2}})^2 = \frac{1}{m^2-\nabla^2} \\ \sqrt{m^2-\nabla^2}\frac{1}{\sqrt{m^2-\nabla^2}} = \frac{1}{\sqrt{m^2-\nabla^2}}\sqrt{m^2-\nabla^2} = 1 \\ [\sqrt{m^2-\nabla^2}]^* = \sqrt{m^2-\nabla^2}, [\frac{1}{\sqrt{m^2-\nabla^2}}]^* = \frac{1}{\sqrt{m^2-\nabla^2}} \end{cases}$

证明: $(\sqrt{m^2-\nabla^2})^*f(\vec{r},t)$
$= [\sqrt{m^2-\nabla^2}f^*(\vec{r},t)]^*$
$= [\frac{1}{(2\pi)^3}\int \sqrt{m^2+\vec{p}^2}f^*(-\hat{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}]^*$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \sqrt{m^2+\vec{p}^2}f(-\hat{p},t)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \sqrt{m^2+\vec{p}^2}f(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}$
$= \sqrt{m^2-\nabla^2}f(\vec{r},t)$ □

证明: $(\frac{1}{\sqrt{m^2-\nabla^2}})^*f(\vec{r},t)$
$= [\frac{1}{\sqrt{m^2-\nabla^2}}f^*(\vec{r},t)]^*$
$= [\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{\sqrt{m^2+\vec{p}^2}}f^*(-\hat{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}]^*$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{\sqrt{m^2+\vec{p}^2}}f(-\hat{p},t)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{\sqrt{m^2+\vec{p}^2}}f(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}$
$= \frac{1}{\sqrt{m^2-\nabla^2}}f(\vec{r},t)$ □

性质1.2.2. $(\sqrt{m^2-\nabla^2})^n f(\vec{r},t) = \int \sqrt{m^2+\vec{p}^2}^n f(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}, n\in Z$

性质1.2.3. $\int \sqrt{m^2-\nabla^2}f(\vec{r},t)d^3\vec{r} = mf(\vec{p}=0,t), \int \frac{1}{\sqrt{m^2-\nabla^2}}f(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \frac{1}{m}f(\vec{p}=0,t)$

性质1.2.4. $(\sqrt{m^2-\nabla^2})^n f(\vec{r},t) = \int \sqrt{m^2+\vec{p}^2}^n f(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}, n\in Z$

性质1.2.5. $\int f(\vec{r},t)(\sqrt{m^2-\nabla^2})^n g(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int[(\sqrt{m^2-\nabla^2})^n f(\vec{r},t)]g(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

证明: $\int f(\vec{r},t)(\sqrt{m^2-\nabla^2})^n g(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int f(\vec{p}',t)e^{i\vec{p}'\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}'\frac{1}{(2\pi)^3}\int \sqrt{m^2+\vec{p}^2}^n g(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}d^3\vec{r}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \sqrt{m^2+\vec{p}^2}^n f(\vec{p}',t)g(\vec{p},t)\delta^3(\vec{p}'+\vec{p})d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \sqrt{m^2+\vec{p}^2}^n f(-\hat{p},t)g(\vec{p},t)d^3\vec{p}$ □

证明: $\int[(\sqrt{m^2-\nabla^2})^n f(\vec{r},t)]g(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{m^2+\vec{p}'^2}^n f(\vec{p}',t)e^{i\vec{p}'\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}'\frac{1}{(2\pi)^3}\int g(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{m^2+\vec{p}'^2}^n f(\vec{p}',t)g(\vec{p},t)\delta^3(\vec{p}'+\vec{p})d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{m^2+\vec{p}^2}^n f(-\hat{p},t)g(\vec{p},t)d^3\vec{p}$ □

性质1.2.6. $(\sqrt{m^2-\nabla^2})^n\delta^3(\vec{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{m^2+\vec{p}^2}^n e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}=(\sqrt{m^2-\nabla^2})^n\delta^3(-\vec{r})$

性质1.2.7. $\int f(\vec{r}',t)(\sqrt{-\nabla'^2})^n\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}'=(\sqrt{m^2-\nabla^2})^n f(\vec{r},t)$

1.3 无质量特殊拟微分算子的基本性质

性质1.3.1. $\begin{cases}(\sqrt{-\nabla^2})^2=-\nabla^2,(\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}})^2=\frac{1}{-\nabla^2}\\ \sqrt{-\nabla^2}\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}}=\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}}\sqrt{-\nabla^2}=1\\ [\sqrt{-\nabla^2}]^*=\sqrt{-\nabla^2},[\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}}]^*=\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}}\end{cases}$

证明: $(\sqrt{-\nabla^2})^* f(\vec{r},t)$
$=[\sqrt{-\nabla^2}f^*(\vec{r},t)]^*$
$=[\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|f^*(-\hat{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}]^*$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|f(-\hat{p},t)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|f(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}$
$=\sqrt{-\nabla^2}f(\vec{r},t)$ □

证明: $(\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}})^* f(\vec{r},t)$
$=[\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}}f^*(\vec{r},t)]^*$
$=[\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{|\vec{p}|}f^*(-\hat{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}]^*$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{|\vec{p}|}f(-\hat{p},t)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{|\vec{p}|}f(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}$
$=\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}}f(\vec{r},t)$ □

性质1.3.2. $(\sqrt{-\nabla^2})^n f(\vec{r},t)=\int|\vec{p}|^n f(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p},n\in Z$

性质1.3.3. $\int\sqrt{-\nabla^2}f(\vec{r},t)d^3\vec{r}=0,\int\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}}f(\vec{r},t)d^3\vec{r}=$ 奇异性

性质1.3.4. $(\sqrt{-\nabla^2})^n f(\vec{r},t)=\int|\vec{p}|^n f(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p},n\in Z$

性质1.3.5. $\int f(\vec{r},t)(\sqrt{-\nabla^2})^n g(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int[(\sqrt{-\nabla^2})^n f(\vec{r},t)]g(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

证明: $\int f(\vec{r},t)(\sqrt{-\nabla^2})^n g(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int f(\vec{p}',t)e^{i\vec{p}'\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}'\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|^n g(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|^n f(\vec{p}',t)g(\vec{p},t)\delta^3(\vec{p}'+\vec{p})d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|^n f(-\hat{p},t)g(\vec{p},t)d^3\vec{p}$ □

证明: $\int[(\sqrt{-\nabla^2})^n f(\vec{r},t)]g(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}'|^n f(\vec{p}',t)e^{i\vec{p}'\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}'\frac{1}{(2\pi)^3}\int g(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}'|^n f(\vec{p}',t)g(\vec{p},t)\delta^3(\vec{p}'+\vec{p})d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|^n f(-\hat{p},t)g(\vec{p},t)d^3\vec{p}$ □

性质1.3.6. $(\sqrt{-\nabla^2})^n\delta^3(\vec{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|^n e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}=(\sqrt{-\nabla^2})^n\delta^3(-\vec{r})$

性质1.3.7. $\int f(\vec{r}',t)(\sqrt{-\nabla'^2})^n\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}'=(\sqrt{-\nabla^2})^n f(\vec{r},t)$

2 四维时空中矩阵连乘迹

2.1 自旋矩阵连乘迹$tr[\sigma_{\alpha_1}(s)\cdots\sigma_{\alpha_n}(s)]$的性质

推论2.1.1.

$tr[\sigma_{\alpha'_\varsigma}(s)]=0, tr[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)]=0$

$tr[\sigma_{\alpha'_\varsigma}(s)\sigma_{\beta'_\varsigma}(s)]=\frac{2}{3}s(s+\frac{1}{2})(s+1)\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}, tr[\sigma^{\alpha_\varsigma}(s)\sigma^{\beta_\varsigma}(s)]=\frac{2}{3}s(s+\frac{1}{2})(s+1)\delta^{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}$

2.2 泡利矩阵连乘迹$tr[\sigma_{\alpha_1}\cdots\sigma_{\alpha_n}]$的性质

定义2.2.1. $A_{\alpha_1\cdots\alpha_n}:=tr[\sigma_{\alpha_1}\cdots\sigma_{\alpha_n}]$

性质2.2.1.

$A_{\alpha_1}=0$

$A_{\alpha_1\alpha_2}=2\delta_{\alpha_1\alpha_2}$

$A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}=2i\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$

$A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}=2[\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_3\alpha_4}-S_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}]$

$A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}=2[\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_3\alpha_4}-\delta_{\alpha_1\alpha_3}\delta_{\alpha_2\alpha_4}+\delta_{\alpha_1\alpha_4}\delta_{\alpha_2\alpha_3}]$

$A_{\alpha_1\cdots\alpha_5}=2i[\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\delta_{\alpha_4\alpha_5}-\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_4}\delta_{\alpha_3\alpha_5}+\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_5}\delta_{\alpha_3\alpha_4}+\varepsilon_{\alpha_3\alpha_4\alpha_5}\delta_{\alpha_1\alpha_2}]$

定理2.2.1. $A_{\alpha_1\cdots\alpha_n}=i\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2}{}^{\alpha}A_{\alpha\alpha_3\cdots\alpha_n}+\delta_{\alpha_1\alpha_2}A_{\alpha_3\cdots\alpha_n}$

2.3 Dirac矩阵连乘迹$tr[\gamma_{a_1}\cdots\gamma_{a_n}]$的一般性质

定义2.3.1. $B_{a_1\cdots a_n}:=tr[\gamma_{a_1}\cdots\gamma_{a_n}], B^5_{a_1\cdots a_n}:=tr[\gamma^5\gamma_{a_1}\cdots\gamma_{a_n}]$

性质2.3.1.

$B_{a_1}=0, B^5_{a_1}=0$

$B_{a_1a_2}=4\delta_{a_1a_2}, B^5_{a_1a_2}=0$

定理2.3.1.

$$\begin{cases}B_{a_1\cdots a_n}=\varepsilon_{a_1a_2a_3}{}^{a}B^5_{aa_4\cdots a_n}+\delta_{a_1a_2}B_{a_3\cdots a_n}+\delta_{a_3[a_2}B_{a_1]a_4\cdots a_n}\\ B^5_{a_1\cdots a_n}=\varepsilon_{a_1a_2a_3}{}^{a}B_{aa_4\cdots a_n}+\delta_{a_1a_2}B^5_{a_3\cdots a_n}+\delta_{a_3[a_2}B^5_{a_1]a_4\cdots a_n}\end{cases}$$

2.4 Dirac矩阵连乘迹$tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\cdots]$的具体性质

$$tr[\gamma_a(\varsigma)]=0 \quad tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)]=0 \quad tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)\gamma_e(\varsigma)]=0 \tag{18.1}$$

$$tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)]=0 \quad tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)]=0 \quad tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)\gamma_e(\varsigma)]=0 \tag{18.2}$$

$$tr[\gamma_5(\varsigma)]=0 \quad tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)\gamma_e(\varsigma)]=0 \quad tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)\gamma_e(\varsigma)]=0 \tag{18.3}$$

$$tr[S_{ab}(e,\varsigma)]=0 \quad tr[\gamma_c(\varsigma)S_{ab}(e,\varsigma)]=0 \quad tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)]=0 \tag{18.4}$$

$$tr[\gamma_5(\varsigma)S_{ab}(e,\varsigma)]=0 \quad tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)S_{ab}(e,\varsigma)]=0 \quad tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)]=0 \tag{18.5}$$

$$tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)]=4\delta_{ab} \quad tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)]=4[\delta_{ab}\delta_{cd}-\delta_{a[c}\delta_{d]b}] \tag{18.6}$$

$$tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)]=0 \quad tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)]=4\varepsilon_{abcd} \tag{18.7}$$

$$tr[S_{ab}(e,\varsigma)S_{cd}(e,\varsigma)]=S_{abcd}=\delta_{ac}\delta_{db}-\delta_{ad}\delta_{cb} \quad tr[\gamma_5S_{ab}(e,\varsigma)S_{cd}(e,\varsigma)]=-\varepsilon_{abcd} \tag{18.8}$$

$$tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)S_{cd}(e,\varsigma)]=2iS_{abcd} \quad tr[\gamma_5\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)S_{cd}(e,\varsigma)]=-2i\varepsilon_{abcd} \tag{18.9}$$

$$tr[S_{ab}(e,\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)]=2iS_{abcd} \quad tr[\gamma_5S_{ab}(e,\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)]=-2i\varepsilon_{abcd} \tag{18.10}$$

$$tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)S_{ef}(e,\varsigma)] = 2i\{\delta_{ab}S_{cdef} + \delta_{cd}S_{abef} + \delta_{a[c}S_{d]bef} - \delta_{b[c}S_{d]aef}\} \tag{18.11}$$

$$tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)S_{ef}(e,\varsigma)] = -2i\{\delta_{ab}\varepsilon_{cdef} + \delta_{cd}\varepsilon_{abef} + \delta_{a[c}\varepsilon_{d]bef} - \delta_{b[c}\varepsilon_{d]aef}\} \tag{18.12}$$

$$tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)\gamma_e(\varsigma)\gamma_f(\varsigma)] = 4\{(\delta_{ab}\delta_{cd} - S_{abcd})\delta_{ef} - (\delta_{ab}S_{cdef} + \delta_{cd}S_{abef} + \delta_{a[c}S_{d]bef} - \delta_{b[c}S_{d]aef})\} \tag{18.13}$$

$$tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)\gamma_b(\varsigma)\gamma_c(\varsigma)\gamma_d(\varsigma)\gamma_e(\varsigma)\gamma_f(\varsigma)] = 4\{\varepsilon_{abcd}\delta_{ef} + \delta_{ab}\varepsilon_{cdef} + \delta_{cd}\varepsilon_{abef} + \delta_{a[c}\varepsilon_{d]bef} - \delta_{b[c}\varepsilon_{d]aef}\} \tag{18.14}$$

$$tr[\gamma_a(\varsigma)S_{bc}(e,\varsigma)\gamma_d(\varsigma)S_{ef}(e,\varsigma)] = \delta_{ab}S_{cdef} + \delta_{cd}S_{abef} + \delta_{a[c}S_{d]bef} - \delta_{b[c}S_{d]aef} - \delta_{bc}S_{adef} \tag{18.15}$$

$$tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)S_{bc}(e,\varsigma)\gamma_d(\varsigma)S_{ef}(e,\varsigma)] = \delta_{bc}\varepsilon_{adef} - \{\delta_{ab}\varepsilon_{cdef} + \delta_{cd}\varepsilon_{abef} + \delta_{a[c}\varepsilon_{d]bef} - \delta_{b[c}\varepsilon_{d]aef}\} \tag{18.16}$$

$$tr[\gamma_a(\varsigma)S_{bc}(e,\varsigma)\gamma_d(\varsigma)S_{ef}(e,\varsigma)] = \delta_{ad}S_{bcef} + \delta_{a[b}S_{c]def} + \delta_{d[b}S_{c]aef} \tag{18.17}$$

$$tr[\gamma_5(\varsigma)\gamma_a(\varsigma)S_{bc}(e,\varsigma)\gamma_d(\varsigma)S_{ef}(e,\varsigma)] = -\{\delta_{ad}\varepsilon_{bcef} + \delta_{a[b}\varepsilon_{c]def} + \delta_{d[b}\varepsilon_{c]aef}\} \tag{18.18}$$

3 N+1=n维时空中的Dirac矩阵连乘积

在2023年9月5日-9月7日这三天灵感突发，我终于把这一章节的猜想都进行了严格的证明，本章节几乎所有的猜想都变成了定理。剩下的那个猜想事实上也可以认为被严格证明了，只是表述上有些复杂而已，需要进一步理清和梳理。

3.1 N+1=n维时空中Dirac矩阵连乘积的一个重要定理及其推论

定理3.1.1.

$$\begin{cases}\frac{1}{(l-1)!}\gamma_{a_1}\gamma_{[a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} = \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-2)!}\delta_{a_1[a_2}\gamma_{a_3}\cdots\gamma_{a_l]} \\ \frac{1}{(l-1)!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}]}\gamma_{a_l} = \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-2)!}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_{l-2}}\delta_{a_{l-1}]a_l}\end{cases}$$

证明: 分情况证明：

$1: a_i = a_j, i > j \geq 2$

$0 = \frac{1}{(l-1)!}\gamma_{a_1}\gamma_{[a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} = \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-2)!}\delta_{a_1[a_2}\gamma_{a_3}\cdots\gamma_{a_l]} = 0$

$2: a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq \cdots \neq a_l$

$\frac{1}{(l-1)!}\gamma_{a_1}\gamma_{[a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} = \gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l} = \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} = \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-2)!}\delta_{a_1[a_2}\gamma_{a_3}\cdots\gamma_{a_l]}$

$3: a_2 \neq a_3 \neq \cdots \neq a_l; a_1 = a_i, i \geq 2$

$\frac{1}{(l-1)!}\gamma_{a_1}\gamma_{[a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} = \gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l} = \frac{1}{(l-2)!}\delta_{a_1[a_2}\gamma_{a_3}\cdots\gamma_{a_l]} = \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-2)!}\delta_{a_1[a_2}\gamma_{a_3}\cdots\gamma_{a_l]}$ □

证明: 分情况证明：

$1: a_i = a_j, i < j \geq l-1$

$0 = \frac{1}{(l-1)!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}]}\gamma_{a_l} = \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-2)!}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_{l-2}}\delta_{a_{l-1}]a_l} = 0$

$2: a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq \cdots \neq a_l$

$\frac{1}{(l-1)!}\gamma_{a_1}\gamma_{[a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} = \gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l} = \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} = \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-2)!}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_{l-2}}\delta_{a_{l-1}]a_l}$

$3: a_1 \neq a_2 \neq \cdots \neq a_{l-1}; a_l = a_i, i \leq l-1$

$\frac{1}{(l-1)!}\gamma_{a_1}\gamma_{[a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} = \gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l} = \frac{1}{(l-2)!}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_{l-2}}\delta_{a_{l-1}]a_l} = \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-2)!}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_{l-2}}\delta_{a_{l-1}]a_l}$ □

推论3.1.1. $\frac{1}{(l-2)!}\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{[a_3}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} = \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-2)!}\delta_{a_1[a_2}\gamma_{a_3}\cdots\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-3)!}\gamma_{a_1}\delta_{a_2[a_3}\gamma_{a_4}\cdots\gamma_{a_l]}$

证明: $\frac{1}{(l-1)!}\gamma_{a_1}\gamma_{[a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} = \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-2)!}\delta_{a_1[a_2}\gamma_{a_3}\cdots\gamma_{a_l]}$

$\Rightarrow \gamma_{a_1}[\frac{1}{(l-2)!}\gamma_{a_2}\gamma_{[a_3}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} - \frac{1}{(l-3)!}\delta_{a_2[a_3}\gamma_{a_4}\cdots\gamma_{a_l]}] = \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-2)!}\delta_{a_1[a_2}\gamma_{a_3}\cdots\gamma_{a_l]}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(l-2)!}\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{[a_3}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} = \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-2)!}\delta_{a_1[a_2}\gamma_{a_3}\cdots\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-3)!}\gamma_{a_1}\delta_{a_2[a_3}\gamma_{a_4}\cdots\gamma_{a_l]}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(l-2)!}\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{[a_3}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} = \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-2)!}\delta_{a_1[a_2}\gamma_{a_3}\cdots\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-3)!}\gamma_{a_1}\delta_{a_2[a_3}\gamma_{a_4}\cdots\gamma_{a_l]}$ □

推论3.1.2. $\frac{1}{(l-k)!}\gamma_{a_1}\cdots\gamma_{a_k}\gamma_{[a_{k+1}}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]}$

$= \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdots\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-2)!}\delta_{a_1[a_2}\gamma_{a_3}\cdots\gamma_{a_l]} + \frac{1}{(l-3)!}\gamma_{a_1}\delta_{a_2[a_3}\gamma_{a_4}\cdots\gamma_{a_l]} + \cdots + \frac{1}{(l-k-1)!}\gamma_{a_1}\cdots\gamma_{a_{k-1}}\delta_{a_k[a_{k+1}}\gamma_{a_{k+2}}\cdots\gamma_{a_l]}$

推论3.1.3.

$$\begin{cases}\frac{1}{4!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}\gamma_e=\frac{1}{5!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}+\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\delta_{d]e}\\ \gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d=\frac{1}{4!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}+\frac{1}{2!}\langle\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]},\frac{4!}{1!1!|2!2!}\rangle+\frac{1}{0!}\langle\delta_{ab}\delta_{cd},\frac{4!}{2!|2!2!}\rangle\end{cases}$$

$$\Rightarrow\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e=\frac{1}{5!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}+\frac{1}{3!}\langle\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_{e]},\frac{5!}{1!1!|2!3!}\rangle+\frac{1}{1!}\langle\delta_{ad}\delta_{bc}\gamma_e,\frac{5!}{2!1!|2!2!1!}\rangle$$

证明: $\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e$

$$=\frac{1}{4!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}\gamma_e+\frac{1}{2!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]}-\delta_{ac}\gamma_{[b}\gamma_{d]}+\delta_{ad}\gamma_{[b}\gamma_{c]}+\gamma_{[a}\gamma_{b]}\delta_{cd}-\gamma_{[a}\gamma_{c]}\delta_{bd}+\gamma_{[a}\gamma_{d]}\delta_{bc})\gamma_e$$
$$+\frac{1}{0!}(\delta_{ab}\delta_{cd}-\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc})\gamma_e$$
$$=\frac{1}{5!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}+\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\delta_{d]e}$$
$$+\frac{1}{2!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]}-\delta_{ac}\gamma_{[b}\gamma_{d]}+\delta_{ad}\gamma_{[b}\gamma_{c]}+\gamma_{[a}\gamma_{b]}\delta_{cd}-\gamma_{[a}\gamma_{c]}\delta_{bd}+\gamma_{[a}\gamma_{d]}\delta_{bc})\gamma_e$$
$$+\frac{1}{0!}(\delta_{ab}\delta_{cd}-\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc})\gamma_e$$
$$=\frac{1}{5!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}+\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\delta_{d]e}$$
$$+\delta_{ab}(\tfrac{1}{3!}\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_{e]}+\tfrac{1}{1!}\gamma_{[c}\delta_{d]e})-\delta_{ac}(\tfrac{1}{3!}\gamma_{[b}\gamma_d\gamma_{e]}+\tfrac{1}{1!}\gamma_{[b}\delta_{d]e})+\delta_{ad}(\tfrac{1}{3!}\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_{e]}+\tfrac{1}{1!}\gamma_{[b}\delta_{c]e})+(\tfrac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{e]}+\tfrac{1}{1!}\gamma_{[a}\delta_{b]e})\delta_{cd}$$
$$-(\tfrac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_c\gamma_{e]}+\tfrac{1}{1!}\gamma_{[a}\delta_{c]e})\delta_{bd}+(\tfrac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_d\gamma_{e]}+\tfrac{1}{1!}\gamma_{[a}\delta_{d]e})\delta_{bc}+\frac{1}{0!}(\delta_{ab}\delta_{cd}-\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc})\gamma_e$$
$$=\frac{1}{5!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}$$
$$+\frac{1}{3!}(\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}\delta_{de}-\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_{d]}\delta_{ae}+\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_{a]}\delta_{be}-\gamma_{[d}\gamma_a\gamma_{b]}\delta_{ce})$$
$$+\frac{1}{3!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_{e]}-\delta_{ac}\gamma_{[b}\gamma_d\gamma_{e]}+\delta_{ad}\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_{e]}+\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{e]}\delta_{cd})-\gamma_{[a}\gamma_c\gamma_{e]}\delta_{bd}+\gamma_{[a}\gamma_d\gamma_{e]}\delta_{bc}$$
$$+\frac{1}{1!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\delta_{d]e}-\delta_{ac}\gamma_{[b}\delta_{d]e}+\delta_{ad}\gamma_{[b}\delta_{c]e}+\gamma_{[a}\delta_{b]e}\delta_{cd}-\gamma_{[a}\delta_{c]e}\delta_{bd}+\gamma_{[a}\delta_{d]e}\delta_{bc})+\frac{1}{1!}(\delta_{ab}\delta_{cd}-\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc})\gamma_e$$
$$=\frac{1}{5!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}$$
$$+\frac{1}{3!}[(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_{e]}-\delta_{ac}\gamma_{[b}\gamma_d\gamma_{e]}+\delta_{ad}\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_{e]}-\delta_{ae}\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_{d]})$$
$$+(\delta_{bc}\gamma_{[a}\gamma_d\gamma_{e]}-\delta_{bd}\gamma_{[a}\gamma_c\gamma_{e]}+\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_{a]}\delta_{be})+(\delta_{cd}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{e]}-\delta_{ce}\gamma_{[d}\gamma_a\gamma_{b]})+(\delta_{de}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]})]$$
$$+\frac{1}{1!}[(\delta_{be}\delta_{cd}-\delta_{bd}\delta_{ce}+\delta_{bc}\delta_{de})\gamma_a+(-\delta_{ac}\delta_{de}+\delta_{ad}\delta_{ce}-\delta_{ae}\delta_{cd})\gamma_b$$
$$+(\delta_{ab}\delta_{de}-\delta_{ad}\delta_{be}+\delta_{ae}\delta_{bd})\gamma_c+(-\delta_{ab}\delta_{ce}+\delta_{ac}\delta_{be}-\delta_{ae}\delta_{bc})\gamma_d+(\delta_{ab}\delta_{cd}-\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc})\gamma_e]$$
$$=\frac{1}{5!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}+\frac{1}{3!}\langle\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_{e]},C_5^3\rangle+\langle\tfrac{1}{1!}\delta_{ad}\delta_{bc}\gamma_e,C_5^1C_4^2/2!\rangle$$
$$=\frac{1}{5!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}+\frac{1}{3!}\langle\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_{e]},\frac{5!}{1!1!|2!3!}\rangle+\langle\tfrac{1}{1!}\delta_{ad}\delta_{bc}\gamma_e,\frac{5!}{2!1!|2!2!1!}\rangle$$

□

性质3.1.1.

$$\begin{cases}\gamma_a=\frac{1}{1!}\gamma_a\\ \frac{1}{1!}\gamma_a\gamma_b=\frac{1}{2!}\gamma_{[a}\gamma_{b]}+\frac{1}{0!}\delta_{ab}\\ \frac{1}{2!}\gamma_a\gamma_{[b}\gamma_{c]}=\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}+\frac{1}{1!}\delta_{a[b}\gamma_{c]},\frac{1}{2!}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\gamma_c=\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}+\frac{1}{1!}\gamma_{[a}\delta_{b]c}\\ \frac{1}{3!}\gamma_a\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_{d]}=\frac{1}{4!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}+\frac{1}{2!}\delta_{a[b}\gamma_c\gamma_{d]},\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}\gamma_d=\frac{1}{4!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}+\frac{1}{2!}\gamma_{[a}\gamma_b\delta_{c]d}\\ \frac{1}{4!}\gamma_a\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}=\frac{1}{5!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}+\frac{1}{3!}\delta_{a[b}\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]},\frac{1}{4!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}\gamma_e=\frac{1}{5!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}+\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\delta_{d]e}\\ \frac{1}{5!}\gamma_a\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_{f]}=\frac{1}{6!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_{f]}+\frac{1}{4!}\delta_{a[b}\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_{f]},\frac{1}{5!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}\gamma_f=\frac{1}{6!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_{f]}+\frac{1}{4!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\delta_{e]f}\end{cases}$$

3.2 N+1=n维时空中Dirac矩阵连乘积的重要推论

定理3.2.1. $\frac{1}{(l-1)!}\gamma_{a_1}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]}=\frac{1}{0!l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]}+\frac{1}{1!(l-2)!}\sum_{k_1\neq 1}(-1)^{k_1}\delta_{a_1a_{k_1}}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_1-1}}\gamma_{a_{k_1+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$

定理3.2.2. $\frac{1}{(l-2)!}\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{[a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]}=\frac{1}{0!l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]}$

$$+\frac{1}{1!(l-2)!}\sum_{k_1\neq 1}(-1)^{k_1}\delta_{a_1a_{k_1}}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_1-1}}\gamma_{a_{k_1+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}+\frac{1}{1!(l-2)!}\sum_{k_2\neq 2}(-1)^{k_2}\delta_{a_2a_{k_2}}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_2-1}}\gamma_{a_{k_2+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$
$$+\frac{1}{2!(l-4)!}\sum_{k_1,k_2\neq 1,2}(-1)^{k_1+k_2}\delta_{a_1[a_{k_1}}\delta_{a_{k_2}]a_2}\gamma_{[a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_1-1}}\gamma_{a_{k_1+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_2-1}}\gamma_{a_{k_2+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$

证明: $\frac{1}{(l-2)!}\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{[a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]}$

$$=\frac{1}{(l-1)!}\gamma_{a_1}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]}+\frac{1}{(l-3)!}\sum_{k=3}^{l}(-1)^k\delta_{a_2a_k}\gamma_{a_1}\gamma_{[a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_{k-1}}\gamma_{a_{k+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$
$$=\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]}+\frac{1}{(l-2)!}\sum_{k=2}^{l}(-1)^k\delta_{a_1a_k}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{k-1}}\gamma_{a_{k+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$

$$+\frac{1}{(l-2)!}\sum_{k=3}^{l}(-1)^k\delta_{a_2a_k}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_{k-1}}\gamma_{a_{k+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}+\frac{1}{(l-4)!}\sum_{k=3}^{l}(-1)^k\delta_{a_2a_k}\sum_{k'=3}^{l}(-1)^{k'+u(k'-k)}\delta_{a_1a'_k}\gamma_{[a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_{k'-1}}\gamma_{a_{k'+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$

$$=\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]}$$

$$+\frac{1}{(l-2)!}\sum_{k\neq 1}(-1)^k\delta_{a_1a_k}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{k-1}}\gamma_{a_{k+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}+\frac{1}{(l-2)!}\sum_{k\neq 2}(-1)^k\delta_{a_2a_k}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_{k-1}}\gamma_{a_{k+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$

$$+\frac{1}{(l-4)!}\sum_{k\neq 1,2}\sum_{k'\neq 1,2,k}(-1)^{k+k'+u(k'-k)}\delta_{a_1[a_{k_1}}\delta_{a_{k_2}]a_2}\gamma_{[a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_1-1}}\gamma_{a_{k_1+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_2-1}}\gamma_{a_{k_2+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$

$$=\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]}$$

$$+\frac{1}{(l-2)!}\sum_{k_1\neq 1}(-1)^{k_1}\delta_{a_1a_{k_1}}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_1-1}}\gamma_{a_{k_1+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}+\frac{1}{(l-2)!}\sum_{k_2\neq 2}(-1)^{k_2}\delta_{a_2a_{k_2}}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_2-1}}\gamma_{a_{k_2+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$

$$+\frac{1}{(l-4)!}\sum_{k_2\neq 1,2}\sum_{k_1\neq 1,2,k_2}(-1)^{k_1+k_2+u(k_2-k_1)}\delta_{a_1[a_{k_1}}\delta_{a_{k_2}]a_2}\gamma_{[a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_1-1}}\gamma_{a_{k_1+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_2-1}}\gamma_{a_{k_2+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$

$$=\frac{1}{0!l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]}$$

$$+\frac{1}{1!(l-2)!}\sum_{k_1\neq 1}(-1)^{k_1}\delta_{a_1a_{k_1}}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_1-1}}\gamma_{a_{k_1+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}+\frac{1}{1!(l-2)!}\sum_{k_2\neq 2}(-1)^{k_2}\delta_{a_2a_{k_2}}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_2-1}}\gamma_{a_{k_2+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$

$$+\frac{1}{2!(l-4)!}\sum_{k_2\neq 1,2}\sum_{k_1\neq 1,2,k_2}(-1)^{k_1+k_2}\delta_{a_1[a_{k_1}}\delta_{a_{k_2}]a_2}\gamma_{[a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_1-1}}\gamma_{a_{k_1+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_2-1}}\gamma_{a_{k_2+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$

$$=\frac{1}{0!l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]}$$

$$+\frac{1}{1!(l-2)!}\sum_{k_1\neq 1}(-1)^{k_1}\delta_{a_1a_{k_1}}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_1-1}}\gamma_{a_{k_1+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}+\frac{1}{1!(l-2)!}\sum_{k_2\neq 2}(-1)^{k_2}\delta_{a_2a_{k_2}}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_2-1}}\gamma_{a_{k_2+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$

$$+\frac{1}{2!(l-4)!}\sum_{k_1,k_2\neq 1,2}(-1)^{k_1+k_2}\delta_{a_1[a_{k_1}}\delta_{a_{k_2}]a_2}\gamma_{[a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_1-1}}\gamma_{a_{k_1+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_2-1}}\gamma_{a_{k_2+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\qquad\square$$

3.3 N+1=n维时空中Dirac矩阵连乘积的重要猜想

猜想3.3.1. $\frac{1}{(l-i)!}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i}\gamma_{[a_{i+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]}=\frac{1}{0!l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]}$

$$+\frac{1}{1!(l-2)!}\sum_{j_1}^{=1,\cdot,i}\sum_{k_1\neq}^{j_1}(-1)^{k_1}\delta_{a_{j_1}a_{k_1}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_1-1}}\gamma_{a_{k_1+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$

$$+\frac{1}{2!(l-4)!}\sum_{j_1,j_2}^{=1,\cdot,i}\sum_{k_1,k_2\neq}^{j_1,j_2}(-1)^{k_1+k_2}\delta^{a_{j_1}}_{[a_{k_1}}\delta^{a_{j_2}}_{a_{k_2}]}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_1-1}}\gamma_{a_{k_1+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_2-1}}\gamma_{a_{k_2+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$

$$+\frac{1}{3!(l-6)!}\sum_{j_1,j_2,j_3}^{=1,\cdot,i}\sum_{k_1,k_2,k_3\neq}^{j_1,j_2,j_3}(-1)^{k_1+k_2+k_3}\delta^{a_{j_1}}_{[a_{k_1}}\delta^{a_{j_2}}_{a_{k_2}}\delta^{a_{j_3}}_{a_{k_3}]}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_1-1}}\gamma_{a_{k_1+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_2-1}}\gamma_{a_{k_2+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_3-1}}\gamma_{a_{k_3+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$

$$+\cdots\cdots$$

猜想3.3.2. $\frac{1}{(l-i)!}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l}=\frac{1}{0!l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]}$

$$+\frac{1}{1!(l-2)!}\sum_{j_1}^{=1,\cdot,l}\sum_{k_1\neq}^{j_1}(-1)^{k_1}\delta_{a_{j_1}a_{k_1}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_1-1}}\gamma_{a_{k_1+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$

$$+\frac{1}{2!(l-4)!}\sum_{j_1,j_2}^{=1,\cdot,l}\sum_{k_1,k_2\neq}^{j_1,j_2}(-1)^{k_1+k_2}\delta^{a_{j_1}}_{[a_{k_1}}\delta^{a_{j_2}}_{a_{k_2}]}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_1-1}}\gamma_{a_{k_1+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_2-1}}\gamma_{a_{k_2+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$

$$+\frac{1}{3!(l-6)!}\sum_{j_1,j_2,j_3}^{=1,\cdot,l}\sum_{k_1,k_2,k_3\neq}^{j_1,j_2,j_3}(-1)^{k_1+k_2+k_3}\delta^{a_{j_1}}_{[a_{k_1}}\delta^{a_{j_2}}_{a_{k_2}}\delta^{a_{j_3}}_{a_{k_3}]}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_1-1}}\gamma_{a_{k_1+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_2-1}}\gamma_{a_{k_2+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_{k_3-1}}\gamma_{a_{k_3+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}$$

$$+\cdots\cdots$$

3.4 N+1=n维时空中Dirac矩阵连乘积猜想的优化表述

定义3.4.1.

$$\begin{cases}\frac{1}{2!}\langle\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]},\frac{4!}{1!1!|2!2!}\rangle:=\frac{1}{2!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]}-\delta_{ac}\gamma_{[b}\gamma_{d]}+\delta_{ad}\gamma_{[b}\gamma_{c]}+\gamma_{[a}\gamma_{b]}\delta_{cd}-\gamma_{[a}\gamma_{c]}\delta_{bd}+\gamma_{[a}\gamma_{d]}\delta_{bc})\\ \frac{1}{0!}\langle\delta_{ab}\delta_{cd},\frac{4!}{2!|2!2!}\rangle:=\frac{1}{0!}(\delta_{ab}\delta_{cd}-\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc})\\ \frac{1}{1!}\langle\delta_{ab}\gamma_{c},\frac{3!}{1!1!|2!1!}\rangle:=\frac{1}{1!}(\delta_{ab}\gamma_{c}+\delta_{bc}\gamma_{a}-\delta_{ac}\gamma_{b})\\ \frac{1}{0!}\langle\delta_{ab},\frac{2!}{1!|2!}\rangle:=\frac{1}{0!}\delta_{ab}\end{cases}$$

性质3.4.1.

$$\begin{cases}\langle\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]},\frac{4!}{1!1!|2!2!}\rangle=\frac{1}{2!}(\langle\delta_{\{ab\}}\gamma_{[c}\gamma_{d]},\frac{4!}{1!1!|2!2!}\rangle+\langle\delta_{[ab]}\gamma_{[c}\gamma_{d]},\frac{4!}{1!1!|2!2!}\rangle)\\ \langle\delta_{ab}\delta_{cd},\frac{4!}{2!|2!2!}\rangle=\frac{1}{2!}(\langle\delta_{\{ab\}}\delta_{cd},\frac{4!}{2!|2!2!}\rangle+\langle\delta_{[ab]}\delta_{cd},\frac{4!}{2!|2!2!}\rangle)\\ \langle\delta_{ab}\gamma_c,\frac{3!}{1!1!|2!1!}\rangle=\frac{1}{2!}(\langle\delta_{\{ab\}}\gamma_c,\frac{3!}{1!1!|2!1!}\rangle+\langle\delta_{[ab]}\gamma_c,\frac{3!}{1!1!|2!1!}\rangle)\\ \langle\delta_{ab},\frac{2!}{1!|2!}\rangle=\frac{1}{2!}(\langle\delta_{\{ab\}},\frac{2!}{1!|2!}\rangle+\langle\delta_{[ab]},\frac{2!}{1!|2!}\rangle)\end{cases}$$

猜想3.4.1.

$$\begin{cases}\gamma_a=\frac{1}{1!}\gamma_a\\ \gamma_a\gamma_b=\frac{1}{2!}\gamma_{[a}\gamma_{b]}+\frac{1}{0!}\langle\delta_{ab},\frac{2!}{1!|2!}\rangle\\ \gamma_a\gamma_b\gamma_c=\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}+\frac{1}{1!}\langle\delta_{ab}\gamma_c,\frac{3!}{1!1!|2!1!}\rangle\\ \gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d=\frac{1}{4!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}+\frac{1}{2!}\langle\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]},\frac{4!}{1!1!|2!2!}\rangle+\frac{1}{0!}\langle\delta_{ab}\delta_{cd},\frac{4!}{2!|2!2!}\rangle\\ \gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e=\frac{1}{5!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}+\frac{1}{3!}\langle\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_{e]},\frac{5!}{1!1!|2!3!}\rangle+\frac{1}{1!}\langle\delta_{ad}\delta_{bc}\gamma_e,\frac{5!}{2!1!|2!2!1!}\rangle\\ \gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_f=\frac{1}{6!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_{f]}+\frac{1}{4!}\langle\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_e\gamma_{f]},\frac{6!}{1!1!|2!4!}\rangle+\frac{1}{2!}\langle\delta_{ab}\delta_{cd}\gamma_{[e}\gamma_{f]},\frac{6!}{2!1!|2!2!2!}\rangle+\frac{1}{0!}\langle\delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{ef},\frac{6!}{3!|2!2!2!}\rangle\\ \gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_f\gamma_g=\frac{1}{7!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_f\gamma_{g]}+\frac{1}{5!}\langle\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_e\gamma_f\gamma_{g]},\frac{7!}{1!1!|2!5!}\rangle+\frac{1}{3!}\langle\delta_{ab}\delta_{cd}\gamma_{[e}\gamma_f\gamma_{g]},\frac{7!}{2!1!|2!2!3!}\rangle\\ +\frac{1}{1!}\langle\delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{ef}\gamma_g,\frac{7!}{3!1!|2!2!2!1!}\rangle\\ \gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_f\gamma_g\gamma_h=\frac{1}{8!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_f\gamma_g\gamma_{h]}+\frac{1}{6!}\langle\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_e\gamma_f\gamma_g\gamma_{h]},\frac{8!}{1!1!|2!6!}\rangle\\ +\frac{1}{4!}\langle\delta_{ab}\delta_{cd}\gamma_{[e}\gamma_f\gamma_g\gamma_{h]},\frac{8!}{2!1!|2!2!4!}\rangle+\frac{1}{2!}\langle\delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{ef}\gamma_{[g}\gamma_{h]},\frac{8!}{3!1!|2!2!2!2!}\rangle+\frac{1}{0!}\langle\delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{ef}\delta_{gh},\frac{8!}{4!|2!2!2!2!}\rangle\\ \cdots\end{cases}$$

命题3.4.1.

$$\begin{cases}\gamma_a=\frac{1}{1!}\gamma_a\\ \gamma_{\{a}\gamma_{b\}}=\langle\{\delta_{ab},\frac{2!}{1!|2!}\}\rangle=\delta_{\{ab\}}\\ \gamma_{\{a}\gamma_b\gamma_{c\}}=\langle\{\delta_{ab}\gamma_c,\frac{3!}{1!1!|2!1!}\}\rangle=\delta_{\{ab}\gamma_{c\}}\\ \gamma_{\{a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d\}}=\langle\{\delta_{ab}\delta_{cd},\frac{4!}{2!|2!2!}\}\rangle=\delta_{\{ab}\delta_{cd\}}\\ \gamma_{\{a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_{e\}}=\langle\{\delta_{ad}\delta_{bc}\gamma_e,\frac{5!}{2!1!|2!2!1!}\}\rangle=\delta_{\{ad}\delta_{bc}\gamma_{e\}}\\ \gamma_{\{a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_{f\}}=\langle\{\delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{ef},\frac{6!}{3!|2!2!2!}\}\rangle=\delta_{\{ab}\delta_{cd}\delta_{ef\}}\\ \gamma_{\{a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_f\gamma_{g\}}=\langle\{\delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{ef}\gamma_g,\frac{7!}{3!1!|2!2!2!1!}\}\rangle=\delta_{\{ab}\delta_{cd}\delta_{ef}\gamma_{g\}}\\ \gamma_{\{a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_f\gamma_g\gamma_{h\}}=\langle\{\delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{ef}\delta_{gh},\frac{8!}{4!|2!2!2!2!}\}\rangle=\delta_{\{ab}\delta_{cd}\delta_{ef}\delta_{gh\}}\\ \cdots\end{cases}$$

3.5 N+1=n维时空中前几阶Dirac矩阵连乘积猜想的验证

猜想3.5.1.

$$\begin{cases}\gamma_a=\frac{1}{1!}\gamma_a\\ \gamma_a\gamma_b=\frac{1}{2!}\gamma_{[a}\gamma_{b]}+\frac{1}{0!}\delta_{ab}\\ \gamma_a\gamma_b\gamma_c=\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}+\frac{1}{1!}(\delta_{ab}\gamma_c+\delta_{bc}\gamma_a-\delta_{ac}\gamma_b)\\ \gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d=\frac{1}{4!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}+\frac{1}{2!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]}+\cdot\cdot)+\frac{1}{0!}(\delta_{ab}\delta_{cd}-\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc})\\ \gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e=\frac{1}{5!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}+\frac{1}{3!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_{e]}+\cdot\cdot)+\frac{1}{1!}(\delta_{ab}\delta_{cd}\gamma_e+\cdot\cdot)\\ \gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_f=\frac{1}{6!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_{f]}+\frac{1}{4!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_e\gamma_{f]}+\cdot\cdot)+\frac{1}{2!}(\delta_{ab}\delta_{cd}\gamma_{[e}\gamma_{f]}+\cdot\cdot)+\frac{1}{0!}(\delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{ef}+\cdot\cdot)\\ \gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_f\gamma_g=\frac{1}{7!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\gamma_f\gamma_{g]}+\frac{1}{5!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_e\gamma_f\gamma_{g]}+\cdot\cdot)+\frac{1}{3!}(\delta_{ab}\delta_{cd}\gamma_{[e}\gamma_f\gamma_{g]}+\cdot\cdot)+\frac{1}{1!}(\delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{ef}\gamma_g+\cdot\cdot)\\ \cdots\end{cases}$$

证明： $\gamma_a\gamma_b=\frac{1}{2!}\gamma_{[a}\gamma_{b]}+\frac{1}{0!}\delta_{ab}$

$\Leftrightarrow\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}=\frac{1}{2!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{0!}\delta_{a_1a_2}$

$\Rightarrow \gamma^{a_1}\gamma^{a_2}\gamma_{a'_1}\gamma_{a'_2} = (\frac{1}{2!}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2]} + \frac{1}{0!}\delta^{a_1a_2})(\frac{1}{2!}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]} + \frac{1}{0!}\delta_{a'_1a'_2})$

$\Rightarrow tr\{\gamma^{a_1}\gamma^{a_2}\gamma_{a'_1}\gamma_{a'_2}\} = \frac{2^{[\frac{n}{2}]}(1!)^2}{2!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2]}_{a'_2]} + \frac{2^{[\frac{n}{2}]}(1!)^2}{0!}\delta^{a_1a_2}\delta_{a'_1a'_2} = 2^{[\frac{n}{2}]}(1!)^2(\frac{1}{2!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2]}_{a'_2]} + \frac{1}{0!}\delta^{a_1a_2}\delta_{a'_1a'_2})$ □

证明： $\gamma_a\gamma_b\gamma_c$

$= \frac{1}{2}(\gamma_a\gamma_b\gamma_c - \gamma_a\gamma_c\gamma_b + 2\gamma_a\delta_{bc})$

$= \frac{1}{4}(\gamma_a\gamma_b\gamma_c - \gamma_b\gamma_a\gamma_c + \gamma_c\gamma_a\gamma_b - \gamma_a\gamma_c\gamma_b + 2\delta_{ab}\gamma_c - 2\delta_{ac}\gamma_b + 4\gamma_a\delta_{bc})$

$= \frac{1}{8}(\gamma_a\gamma_{[b}\gamma_{c]} + \gamma_b\gamma_{[c}\gamma_{a]} + \gamma_c\gamma_{[a}\gamma_{b]} + 6\delta_{ab}\gamma_c - 6\delta_{ac}\gamma_b + 6\gamma_a\delta_{bc} + 2\gamma_a\gamma_b\gamma_c)$

$\Leftrightarrow \gamma_a\gamma_b\gamma_c = \frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]} + (\delta_{ab}\gamma_c + \delta_{bc}\gamma_a - \delta_{ac}\gamma_b)$

$\Leftrightarrow \gamma_a\gamma_b\gamma_c = \frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]} + (\delta_{a[b}\gamma_{c]} + \gamma_a\delta_{bc})$ □

证明： $\gamma_a\gamma_b\gamma_c = \frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]} + (\delta_{a[b}\gamma_{c]} + \gamma_a\delta_{bc}) \Rightarrow \begin{cases}\gamma_a\gamma_{[b}\gamma_{c]} = \frac{1}{3}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]} + 2\delta_{a[b}\gamma_{c]} \\ \gamma_{[a}\gamma_{b]}\gamma_c = \frac{1}{3}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]} + 2\gamma_{[a}\delta_{b]c}\end{cases}$ □

证明： $\begin{cases}\gamma_a\gamma_{[b}\gamma_{c]} = \frac{1}{3}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]} + 2\delta_{a[b}\gamma_{c]} \\ \gamma_{[a}\gamma_{b]}\gamma_c = \frac{1}{3}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]} + 2\gamma_{[a}\delta_{b]c}\end{cases}$

$\Rightarrow \gamma^{a_1}\gamma^{[a_2}\gamma^{a_3]}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]}\gamma_{a'_3} = (\frac{1}{3}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3]} + 2\delta^{a_1[a_2}\gamma^{a_3]})(\frac{1}{3}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\gamma_{a'_3]} + 2\gamma_{[a'_1}\delta_{a'_2]a'_3})$

$\Rightarrow tr\{\gamma^{a_1}\gamma^{[a_2}\gamma^{a_3]}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]}\gamma_{a'_3}\}$

$= \frac{2^{[\frac{n}{2}]}(2!)^2}{3!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\delta^{a_3]}_{a'_3]} + 4tr\{\delta^{a_1[a_2}\gamma^{a_3]}\gamma_{[a'_1}\delta_{a'_2]a'_3}\}$

$= \frac{2^{[\frac{n}{2}]}(2!)^2}{3!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\delta^{a_3]}_{a'_3]} + \frac{2^{[\frac{n}{2}]}(2!)^2}{1!}\delta^{a_1[a_2}\delta^{a_3]}_{[a'_1}\delta_{a'_2]a'_3}$

$= 2^{[\frac{n}{2}]}(2!)^2(\frac{1}{3!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\delta^{a_3]}_{a'_3]} + \frac{1}{1!}\delta^{a_1[a_2}\delta^{a_3]}_{[a'_1}\delta_{a'_2]a'_3})$ □

证明： $\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d = \frac{1}{3!}\gamma_a\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_{d]} + \gamma_a(\delta_{b[c}\gamma_{d]} + \gamma_b\delta_{cd})$

$= \frac{1}{3!}\gamma_a(\gamma_b\gamma_{[c}\gamma_{d]} + \gamma_c\gamma_{[d}\gamma_{b]} + \gamma_d\gamma_{[b}\gamma_{c]}) + \gamma_a(\delta_{b[c}\gamma_{d]} + \gamma_b\delta_{cd})$

$= \frac{1}{3!2}[(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a)\gamma_{[c}\gamma_{d]} + (\gamma_a\gamma_c - \gamma_c\gamma_a)\gamma_{[d}\gamma_{b]} + (\gamma_a\gamma_d - \gamma_d\gamma_a)\gamma_{[b}\gamma_{c]})]$

$+ \frac{1}{3!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]} + \delta_{ac}\gamma_{[d}\gamma_{b]} + \delta_{ad}\gamma_{[b}\gamma_{c]}) + \gamma_a(\delta_{b[c}\gamma_{d]} + \gamma_b\delta_{cd})$

$= \frac{1}{3!2}\gamma_a\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_{d]} - \frac{1}{3!2}(\gamma_b\gamma_a\gamma_{[c}\gamma_{d]} + \gamma_c\gamma_a\gamma_{[d}\gamma_{b]} + \gamma_d\gamma_a\gamma_{[b}\gamma_{c]})$

$+ \frac{1}{3!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]} + \delta_{ac}\gamma_{[d}\gamma_{b]} + \delta_{ad}\gamma_{[b}\gamma_{c]}) + \gamma_a(\delta_{b[c}\gamma_{d]} + \gamma_b\delta_{cd})$

$= \frac{1}{3!3!}\gamma_a\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_{d]} - \frac{1}{3!}[\gamma_b(\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_c\gamma_{d]} + \delta_{a[c}\gamma_{d]}) + \gamma_c(\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_d\gamma_{b]} + \delta_{a[d}\gamma_{b]}) + \gamma_d(\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]} + \delta_{a[b}\gamma_{c]})]$

$+ \frac{1}{3!3}\gamma_a\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_{d]} + \frac{1}{3!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]} + \delta_{ac}\gamma_{[d}\gamma_{b]} + \delta_{ad}\gamma_{[b}\gamma_{c]}) + \gamma_a(\delta_{b[c}\gamma_{d]} + \gamma_b\delta_{cd})$

$= \frac{1}{3!3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]} - \frac{1}{3!}(\gamma_b\delta_{a[c}\gamma_{d]} + \gamma_c\delta_{a[d}\gamma_{b]} + \gamma_d\delta_{a[b}\gamma_{c]})$

$+ \frac{1}{3!3}\gamma_a\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_{d]} + \frac{1}{3!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]} + \delta_{ac}\gamma_{[d}\gamma_{b]} + \delta_{ad}\gamma_{[b}\gamma_{c]}) + \gamma_a(\delta_{b[c}\gamma_{d]} + \gamma_b\delta_{cd})$

$= \frac{1}{3!3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]} + \frac{1}{3}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]} + \delta_{ac}\gamma_{[d}\gamma_{b]} + \delta_{ad}\gamma_{[b}\gamma_{c]}) + \frac{2}{3}\gamma_a(\delta_{b[c}\gamma_{d]} + \gamma_b\delta_{cd}) + \frac{1}{3}\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d$

$= \frac{1}{3!3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]} + \frac{1}{3}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]} + \delta_{ac}\gamma_{[d}\gamma_{b]} + \delta_{ad}\gamma_{[b}\gamma_{c]}) + \frac{1}{3}(\gamma_{[a}\gamma_{b]}\delta_{cd} + \gamma_{[c}\gamma_{a]}\delta_{bd} + \gamma_{[a}\gamma_{d]}\delta_{bc})$

$+ \frac{2}{3}(\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) + \frac{1}{3}\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d$

$\Leftrightarrow \gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d = \frac{1}{4!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]} + \frac{1}{2!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]} + \delta_{ac}\gamma_{[d}\gamma_{b]} + \delta_{ad}\gamma_{[b}\gamma_{c]} + \gamma_{[a}\gamma_{b]}\delta_{cd} + \gamma_{[c}\gamma_{a]}\delta_{bd} + \gamma_{[a}\gamma_{d]}\delta_{bc})$

$+ (\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc})$

$\Leftrightarrow \gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d = \frac{1}{4!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]} + \frac{1}{2!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]} + \cdot\cdot) + (\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc})$ □

证明： $\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d = \frac{1}{4!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]} + \frac{1}{2!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]} + \delta_{ac}\gamma_{[d}\gamma_{b]} + \delta_{ad}\gamma_{[b}\gamma_{c]} + \gamma_{[a}\gamma_{b]}\delta_{cd} + \gamma_{[c}\gamma_{a]}\delta_{bd} + \gamma_{[a}\gamma_{d]}\delta_{bc})$

$+ (\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc})$

$\Rightarrow \begin{cases}\gamma_a\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_{d]} = \frac{1}{4}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]} + 3\delta_{a[b}\gamma_c\gamma_{d]} \\ \gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}\gamma_d = \frac{1}{4}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]} + 3\gamma_{[a}\gamma_b\delta_{c]d}\end{cases}$ □

证明：

$\begin{cases}\gamma_a\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_{d]} = \frac{1}{4}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]} + 3\delta_{a[b}\gamma_c\gamma_{d]} \\ \gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}\gamma_d = \frac{1}{4}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]} + 3\gamma_{[a}\gamma_b\delta_{c]d}\end{cases}$

$\Rightarrow \gamma_{a_1}\gamma_{[a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4]}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\gamma_{a'_3]}\gamma_{a'_4} = (\frac{1}{4}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4]} + 3\delta_{a_1[a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4]})(\frac{1}{4}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\gamma_{a'_3}\gamma_{a'_4]} + 3\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\delta_{a'_3]a'_4})$
$\Rightarrow tr\{\gamma^{a_1}\gamma^{[a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4]}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\gamma_{a'_3]}\gamma_{a'_4}\} = (\frac{1}{4}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4]} + 3\delta^{a_1[a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4]})(\frac{1}{4}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\gamma_{a'_3}\gamma_{a'_4]} + 3\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\delta_{a'_3]a'_4})$
$= \frac{2^{[\frac{n}{2}]}(3!)^2}{4!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\delta^{a_3}_{a'_3}\delta^{a_4]}_{a'_4]} + 9tr\{\delta^{a_1[a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4]}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\delta_{a'_3]a'_4}\}$
$= \frac{2^{[\frac{n}{2}]}(3!)^2}{4!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\delta^{a_3}_{a'_3}\delta^{a_4]}_{a'_4]} + \frac{9}{4}tr\{\delta^{a_1[a_2}\gamma^{[a_3}\gamma^{a_4]]}\gamma_{[[a'_1}\gamma_{a'_2]}\delta_{a'_3]a'_4}\}$
$= \frac{2^{[\frac{n}{2}]}(3!)^2}{4!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\delta^{a_3}_{a'_3}\delta^{a_4]}_{a'_4]} + 9\frac{2^{[\frac{n}{2}]}}{2!}\delta^{a_1[a_2}\delta^{[a_3}_{[[a'_1}\delta^{a_4]]}_{a'_2]}\delta_{a'_3]a'_4}$
$= \frac{2^{[\frac{n}{2}]}(3!)^2}{4!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\delta^{a_3}_{a'_3}\delta^{a_4]}_{a'_4]} + \frac{2^{[\frac{n}{2}]}(3!)^2}{2!}\delta^{a_1[a_2}\delta^{a_3}_{[a'_1}\delta^{a_4]}_{a'_2}\delta_{a'_3]a'_4}$
$= 2^{[\frac{n}{2}]}(3!)^2(\frac{1}{4!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\delta^{a_3}_{a'_3}\delta^{a_4]}_{a'_4]} + \frac{1}{2!}\delta^{a_1[a_2}\delta^{a_3}_{[a'_1}\delta^{a_4]}_{a'_2}\delta_{a'_3]a'_4})$ □

自我评述：以上Dirac矩阵连乘积展开是根据前几项的具体计算结果，然后归纳合理猜出来的，本质上还没有被严格证明，以后有时间再补上。以上虽然可以一步步严格具体完整写出来，但写法不够紧凑，无法方便运用，必须想一个好的写法表示出来，以便使用。

3.6 N+1=n维时空中Dirac矩阵连乘积常数项的具体计算

引理3.6.1. $\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}$的常数项
$= \delta_{a_1a_2}\delta_{a_3a_4} - \delta_{a_1a_3}\delta_{a_2a_4} + \delta_{a_1a_4}\delta_{a_2a_3}$
$= \delta_{a_1a_2}\delta_{a_3a_4} - \delta_{a_1[a_3}\delta_{a_4]a_2}$
$= \delta_{a_1a_2}\delta_{a_3a_4} + \delta_{a_2[a_3}\delta_{a_4]a_1}$

引理3.6.2. $\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5}\gamma_{a_6}$的常数项
$= \delta_{a_1a_2}(\delta_{a_3a_4}\delta_{a_5a_6} - \delta_{a_3a_5}\delta_{a_4a_6} + \delta_{a_3a_6}\delta_{a_4a_5}) - \delta_{a_1a_3}(\delta_{a_2a_4}\delta_{a_5a_6} - \delta_{a_2a_5}\delta_{a_4a_6} + \delta_{a_2a_6}\delta_{a_4a_5})$
$+ \delta_{a_1a_4}(\delta_{a_2a_3}\delta_{a_5a_6} - \delta_{a_2a_5}\delta_{a_3a_6} + \delta_{a_2a_6}\delta_{a_3a_5}) - \delta_{a_1a_5}(\delta_{a_2a_3}\delta_{a_4a_6} - \delta_{a_2a_4}\delta_{a_3a_6} + \delta_{a_2a_6}\delta_{a_3a_4})$
$+ \delta_{a_1a_6}(\delta_{a_2a_3}\delta_{a_4a_5} - \delta_{a_2a_4}\delta_{a_3a_5} + \delta_{a_2a_5}\delta_{a_3a_4})$
$= \delta_{a_1a_2}(\delta_{a_3a_4}\delta_{a_5a_6} - \delta_{a_3[a_5}\delta_{a_6]a_4}) - \delta_{a_1a_3}(\delta_{a_2a_4}\delta_{a_5a_6} - \delta_{a_2[a_5}\delta_{a_6]a_4})$
$+ \delta_{a_1a_4}(\delta_{a_2a_3}\delta_{a_5a_6} - \delta_{a_2[a_5}\delta_{a_6]a_3}) - \delta_{a_1a_5}(\delta_{a_2a_3}\delta_{a_4a_6} - \delta_{a_2[a_4}\delta_{a_6]a_3})$
$+ \delta_{a_1a_6}(\delta_{a_2a_3}\delta_{a_4a_5} - \delta_{a_2[a_4}\delta_{a_5]a_3})$

引理3.6.3. $\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5}\gamma_{a_6}\gamma_{a_7}\gamma_{a_8}$的常数项
$= \delta_{a_1a_2}(\delta_{a_3a_4}\delta_{a_5a_6} - \delta_{a_3a_5}\delta_{a_4a_6} + \delta_{a_3a_6}\delta_{a_4a_5})\delta_{a_7a_8} + \cdots - \delta_{a_1a_3}(\delta_{a_2a_4}\delta_{a_5a_6} - \delta_{a_2a_5}\delta_{a_4a_6} + \delta_{a_2a_6}\delta_{a_4a_5})\delta_{a_7a_8} + \cdots$
$+ \delta_{a_1a_4}(\delta_{a_2a_3}\delta_{a_5a_6} - \delta_{a_2a_5}\delta_{a_3a_6} + \delta_{a_2a_6}\delta_{a_3a_5})\delta_{a_7a_8} + \cdots - \delta_{a_1a_5}(\delta_{a_2a_3}\delta_{a_4a_6} - \delta_{a_2a_4}\delta_{a_3a_6} + \delta_{a_2a_6}\delta_{a_3a_4})\delta_{a_7a_8} + \cdots$
$+ \delta_{a_1a_6}(\delta_{a_2a_3}\delta_{a_4a_5} - \delta_{a_2a_4}\delta_{a_3a_5} + \delta_{a_2a_5}\delta_{a_3a_4})\delta_{a_7a_8} + \cdots - \delta_{a_1a_7}(\delta_{a_2a_3}\delta_{a_4a_5} - \delta_{a_2a_4}\delta_{a_3a_5} + \delta_{a_2a_5}\delta_{a_3a_4})\delta_{a_6a_8} + \cdots$
$+ \delta_{a_1a_8}(\delta_{a_2a_3}\delta_{a_4a_5} - \delta_{a_2a_4}\delta_{a_3a_5} + \delta_{a_2a_5}\delta_{a_3a_4})\delta_{a_6a_7} + \cdots$
$= \delta_{a_1a_2}[\delta_{a_3a_4}(\delta_{a_5a_6}\delta_{a_7a_8} - \delta_{a_5a_7}\delta_{a_6a_8} + \delta_{a_5a_8}\delta_{a_6a_7}) - \delta_{a_3a_5}(\delta_{a_4a_6}\delta_{a_7a_8} - \delta_{a_4a_7}\delta_{a_6a_8} + \delta_{a_4a_8}\delta_{a_6a_7})$
$+ \delta_{a_3a_6}(\delta_{a_4a_5}\delta_{a_7a_8} - \delta_{a_4a_7}\delta_{a_5a_8} + \delta_{a_4a_8}\delta_{a_5a_7})]$
$- \delta_{a_1a_3}[\delta_{a_2a_4}(\delta_{a_5a_6}\delta_{a_7a_8} - \delta_{a_5a_7}\delta_{a_6a_8} + \delta_{a_5a_8}\delta_{a_6a_7}) - \delta_{a_2a_5}(\delta_{a_4a_6}\delta_{a_7a_8} - \delta_{a_4a_7}\delta_{a_6a_8} + \delta_{a_4a_8}\delta_{a_6a_7})$
$+ \delta_{a_2a_6}(\delta_{a_4a_5}\delta_{a_7a_8} - \delta_{a_4a_7}\delta_{a_5a_8} + \delta_{a_4a_8}\delta_{a_5a_7})]$
$+ \delta_{a_1a_4}[\delta_{a_2a_3}(\delta_{a_5a_6}\delta_{a_7a_8} - \delta_{a_5a_7}\delta_{a_6a_8} + \delta_{a_5a_8}\delta_{a_6a_7}) - \delta_{a_2a_5}(\delta_{a_3a_6}\delta_{a_7a_8} - \delta_{a_3a_7}\delta_{a_6a_8} + \delta_{a_3a_8}\delta_{a_6a_7})$
$+ \delta_{a_2a_6}(\delta_{a_3a_5}\delta_{a_7a_8} - \delta_{a_3a_7}\delta_{a_5a_8} + \delta_{a_3a_8}\delta_{a_5a_7})]$
$- \delta_{a_1a_5}[\delta_{a_2a_3}(\delta_{a_4a_6}\delta_{a_7a_8} - \delta_{a_4a_7}\delta_{a_6a_8} + \delta_{a_4a_8}\delta_{a_6a_7}) - \delta_{a_2a_4}(\delta_{a_3a_6}\delta_{a_7a_8} - \delta_{a_3a_7}\delta_{a_6a_8} + \delta_{a_3a_8}\delta_{a_6a_7})$
$+ \delta_{a_2a_6}(\delta_{a_3a_4}\delta_{a_7a_8} - \delta_{a_3a_7}\delta_{a_4a_8} + \delta_{a_3a_8}\delta_{a_4a_7}]$
$+ \delta_{a_1a_6}[\delta_{a_2a_3}(\delta_{a_4a_5}\delta_{a_7a_8} - \delta_{a_4a_7}\delta_{a_5a_8} + \delta_{a_4a_8}\delta_{a_5a_7}) - \delta_{a_2a_4}(\delta_{a_3a_5}\delta_{a_7a_8} - \delta_{a_3a_7}\delta_{a_5a_8} + \delta_{a_3a_8}\delta_{a_5a_7})$
$+ \delta_{a_2a_5}(\delta_{a_3a_4}\delta_{a_7a_8} - \delta_{a_3a_7}\delta_{a_4a_8} + \delta_{a_3a_8}\delta_{a_4a_7})]$
$- \delta_{a_1a_7}[\delta_{a_2a_3}(\delta_{a_4a_5}\delta_{a_6a_8} - \delta_{a_4a_6}\delta_{a_5a_8} + \delta_{a_4a_8}\delta_{a_5a_6}) - \delta_{a_2a_4}(\delta_{a_3a_5}\delta_{a_6a_8} - \delta_{a_3a_6}\delta_{a_5a_8} + \delta_{a_3a_8}\delta_{a_5a_6})$
$+ \delta_{a_2a_5}(\delta_{a_3a_4}\delta_{a_6a_8} - \delta_{a_3a_6}\delta_{a_4a_8} + \delta_{a_3a_8}\delta_{a_4a_6}]$
$+ \delta_{a_1a_8}[\delta_{a_2a_3}(\delta_{a_4a_5}\delta_{a_6a_7} - \delta_{a_4a_6}\delta_{a_5a_7} + \delta_{a_4a_7}\delta_{a_5a_6}) - \delta_{a_2a_4}(\delta_{a_3a_5}\delta_{a_6a_7} - \delta_{a_3a_6}\delta_{a_5a_7} + \delta_{a_3a_7}\delta_{a_5a_6})$
$+ \delta_{a_2a_5}(\delta_{a_3a_4}\delta_{a_6a_7} - \delta_{a_3a_6}\delta_{a_4a_7} + \delta_{a_3a_7}\delta_{a_4a_6})]$

以上虽然也是可以一步步严格具体完整写出来，但写法也不够紧凑、简洁，无法方便运用，必须想一个好的写法表示出来，以便使用。

4 N+1=n维时空Dirac矩阵连乘积正交性和完备性的证明

4.1 N+1=n维时空Dirac矩阵连乘积正交性的证明

定义4.1.1. $\{\gamma_a,\gamma_b\}=2\delta_{ab};1\leq a,b\leq N+1$

引理4.1.1. $\Gamma_{a_1a_2\cdot\cdot a_l}:=\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}=\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l};a_1\neq a_2\neq\cdot\cdot\neq a_l$

定理4.1.1. $tr\{\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{2k+1}}\}=0,k\geq 0$

证明: $tr\{\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{2k+1}}\}=tr\{\gamma_0^2\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{2k+1}}\}$
$=\frac{1}{2}tr\{\gamma_0^2\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{2k+1}}\}+\frac{1}{2}tr\{\gamma_0^2\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{2k+1}}\}$
$=\frac{1}{2}tr\{\gamma_0^2\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{2k+1}}\}-\frac{1}{2}tr\{\gamma_0\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{2k+1}}\gamma_0\}=0$ □

定理4.1.2. $tr\{\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\}=0$

证明: 分情况证明：
$1:tr\{\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\}=0,a_i=a_j$
$2:a_1\neq a_2\neq\cdot\cdot\neq a_l,l=2k;$
$tr\{\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\}$
$=\frac{1}{2}tr\{\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\}-\frac{1}{2}tr\{\frac{1}{l!}\gamma_{[a_2}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\}$
$=\frac{1}{2}tr\{\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\}-\frac{1}{2}tr\{\frac{1}{l!}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l}\gamma_{a_1]}\}=0$
$3:a_1\neq a_2\neq\cdot\cdot\neq a_l,l=2k+1;$
$tr\{\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\}=tr\{\frac{1}{l!}\gamma_0^2\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\}$
$=\frac{1}{2}tr\{\frac{1}{l!}\gamma_0^2\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\}+\frac{1}{2}tr\{\frac{1}{l!}\gamma_0^2\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\}$
$=\frac{1}{2}tr\{\frac{1}{l!}\gamma_0^2\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\}-\frac{1}{2}tr\{\frac{1}{l!}\gamma_0\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\gamma_0\}=0$ □

推论4.1.1. $tr\{\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l}\}=0;a_1\neq a_2\neq\cdot\cdot\neq a_l$

证明: $a_1\neq a_2\neq\cdot\cdot\neq a_l$
$tr\{\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l}\}=tr\{\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\}=0$ □

定理4.1.3. $tr\{(\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_{l'}})\}=0;a_1\neq a_2\neq\cdot\cdot\neq a_l;b_1\neq b_2\neq\cdot\cdot\neq b_{l'};l\neq l'$

证明: 分情况证明：
$1:l+l'=2k+1;$
$tr\{(\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_{l'}})\}=0$
$2:l\neq l',l+l'=2k;$
必有两个γ_a或γ_b不同于其他所有γ矩阵，不妨设就是$\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}$，则有：
$tr\{(\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_{l'}})\}$
$=\frac{1}{2}tr\{(\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_{l'}})\}+\frac{1}{2}tr\{(\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_{l'}})\}$
$=\frac{1}{2}tr\{(\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_{l'}})\}+\frac{1}{2}tr\{(\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_{l'}})\gamma_{a_2}\}$
$=\frac{1}{2}tr\{(\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_{l'}})\}+\frac{1}{2}tr\{(\gamma_{a_2}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_{l'}})\}$
$=\frac{1}{2}tr\{(\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_{l'}})\}-\frac{1}{2}tr\{(\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_{l'}})\}$
$=0$ □

推论4.1.2. $tr\{\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\frac{1}{l'!}\gamma_{[b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_{l'}]}\}=0,l\neq l'$

定理4.1.4.
$tr\{(\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_l})\}=(-1)^{\frac{l(l-1)}{2}}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\cdot\cdot\delta_{a_lb_l};a_1\neq a_2\neq\cdot\cdot\neq a_l,b_1<b_2<\cdot\cdot<b_l,1\leq l\leq N+1$
$tr\{(\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma^{[b_1}\cdot\cdot\gamma^{b_l]})\}=(-1)^{\frac{l(l-1)}{2}}\delta_{a_1}^{[b_1}\delta_{a_2}^{b_2}\cdot\cdot\delta_{a_l}^{b_l]};a_1\neq a_2\neq\cdot\cdot\neq a_l,b_1<b_2<\cdot\cdot<b_l,1\leq l\leq N+1$
$tr\{\frac{1}{l!}(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})\frac{1}{l!}(\gamma^{[b_1}\cdot\cdot\gamma^{b_l]})\}=(-1)^{\frac{l(l-1)}{2}}\frac{1}{l!}\delta_{a_1}^{[b_1}\delta_{a_2}^{b_2}\cdot\cdot\delta_{a_l}^{b_l]};a_1\neq a_2\neq\cdot\cdot\neq a_l,b_1<b_2<\cdot\cdot<b_l,1\leq l\leq N+1$

证明：分情况证明：
$1:a_1<b_1$
$tr\{(\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_l})\}$
$=\frac{1}{2}tr\{(\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_l})\}+\frac{1}{2}tr\{(\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_l})\}$
$=\frac{1}{2}tr\{(\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_l})\}-\frac{1}{2}tr\{(\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_l})\gamma_{a_1}\}=0$
$2:b_1<a_1$
$tr\{(\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_l})\}$
$=\frac{1}{2}tr\{(\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_l})\}+\frac{1}{2}tr\{(\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_l})\}$
$=\frac{1}{2}tr\{(\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_l})\}-\frac{1}{2}tr\{(\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})\gamma_{b_1}(\gamma_{b_2}\cdot\cdot\gamma_{b_l})\}=0$
$3:a_1=b_1$
$tr\{(\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_l})\}$
$=i^{l-1}tr\{(\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l})\gamma_{a_1}\gamma_{b_1}(\gamma_{b_2}\cdot\cdot\gamma_{b_l})\}$
$=i^{l-1}tr\{(\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_2}\cdot\cdot\gamma_{b_l})\}$
$4:$反复进行以上三步推理，可得：$tr\{(\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l})(\gamma_{b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_l})\}=i^{\frac{l(l-1)}{2}}2^{[\frac{n}{2}]}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\cdot\cdot\delta_{a_lb_l}$ □

4.2 N+1=n维时空Dirac矩阵连乘积正交性汇总

定理4.2.1. $tr\{\frac{1}{l!}(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})\frac{1}{l'!}(\gamma^{[b_1}\cdot\cdot\gamma^{b_{l'}]})\}=(-1)^{\frac{l(l-1)}{2}}2^{[\frac{n}{2}]}\delta_{a_1}^{[b_1}\delta_{a_2}^{b_2}\cdot\cdot\delta_{a_l}^{b_l]}\delta_{ll'}=(-1)^{\frac{l(l-1)}{2}}2^{[\frac{n}{2}]}\delta_{[a_1}^{b_1}\delta_{a_2}^{b_2}\cdot\cdot\delta_{a_l]}^{b_l}\delta_{ll'}$

4.3 N+1=n维时空Dirac矩阵连乘积完备性的证明

定理4.3.1. $X=I_*\otimes C\begin{bmatrix}\Gamma_0\\\Gamma_1\\\cdots\\\Gamma_k\end{bmatrix},k=4^{[n/2]}-1,\forall X;(\Gamma_0,\cdot\cdot,\Gamma_k)=\{\Gamma_{a_1a_2\cdot\cdot a_l}|a_1\neq a_2\neq\cdot\cdot\neq a_l,0\leq l\leq n\}$

证明： $\begin{bmatrix}\Gamma_0\\\Gamma_1\\\cdots\\\Gamma_k\end{bmatrix}=I_*\otimes A\begin{bmatrix}\tilde\Gamma_0\\\tilde\Gamma_1\\\cdots\\\tilde\Gamma_k\end{bmatrix};(\tilde\Gamma_0,\cdot\cdot,\tilde\Gamma_k)=\{[\delta_{i*}\delta_{j*}]|0\leq i,j\leq n\}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}\Gamma_0\\\Gamma_1\\\cdots\\\Gamma_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Gamma_0\\\Gamma_1\\\cdots\\\Gamma_k\end{bmatrix}^+=I_*\otimes A\begin{bmatrix}\tilde\Gamma_0\\\tilde\Gamma_1\\\cdots\\\tilde\Gamma_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde\Gamma_0\\\tilde\Gamma_1\\\cdots\\\tilde\Gamma_k\end{bmatrix}^+I_*\otimes A^+$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\Gamma_0\Gamma_0^+&\Gamma_0\Gamma_1^+&\cdot\cdot&\Gamma_0\Gamma_k^+\\\Gamma_1\Gamma_0^+&\Gamma_1\Gamma_1^+&\cdot\cdot&\Gamma_1\Gamma_k^+\\\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot\\\Gamma_k\Gamma_0^+&\Gamma_k\Gamma_1^+&\cdot\cdot&\Gamma_k\Gamma_k^+\end{bmatrix}=I_*\otimes A\begin{bmatrix}\tilde\Gamma_0\tilde\Gamma_0^+&\tilde\Gamma_0\tilde\Gamma_1^+&\cdot\cdot&\tilde\Gamma_0\tilde\Gamma_k^+\\\tilde\Gamma_1\tilde\Gamma_0^+&\tilde\Gamma_1\tilde\Gamma_1^+&\cdot\cdot&\tilde\Gamma_1\tilde\Gamma_k^+\\\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot\\\tilde\Gamma_k\tilde\Gamma_0^+&\tilde\Gamma_k\tilde\Gamma_1^+&\cdot\cdot&\tilde\Gamma_k\tilde\Gamma_k^+\end{bmatrix}I_*\otimes A^+$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}tr(\Gamma_0\Gamma_0^+)&tr(\Gamma_0\Gamma_1^+)&\cdot\cdot&tr(\Gamma_0\Gamma_k^+)\\tr(\Gamma_1\Gamma_0^+)&tr(\Gamma_1\Gamma_1^+)&\cdot\cdot&tr(\Gamma_1\Gamma_k^+)\\\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot\\tr(\Gamma_k\Gamma_0^+)&tr(\Gamma_k\Gamma_1^+)&\cdot\cdot&tr(\Gamma_k\Gamma_k^+)\end{bmatrix}=I_*\otimes A\begin{bmatrix}tr(\tilde\Gamma_0\tilde\Gamma_0^+)&tr(\tilde\Gamma_0\tilde\Gamma_1^+)&\cdot\cdot&tr(\tilde\Gamma_0\tilde\Gamma_k^+)\\tr(\tilde\Gamma_1\tilde\Gamma_0^+)&tr(\tilde\Gamma_1\tilde\Gamma_1^+)&\cdot\cdot&tr(\tilde\Gamma_1\tilde\Gamma_k^+)\\\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot\\tr(\tilde\Gamma_k\tilde\Gamma_0^+)&tr(\tilde\Gamma_k\tilde\Gamma_1^+)&\cdot\cdot&tr(\tilde\Gamma_k\tilde\Gamma_k^+)\end{bmatrix}I_*\otimes A^+$

$\Rightarrow AA^+=I$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}\tilde\Gamma_0\\\tilde\Gamma_1\\\cdots\\\tilde\Gamma_k\end{bmatrix}=I_*\otimes A^+\begin{bmatrix}\Gamma_0\\\Gamma_1\\\cdots\\\Gamma_k\end{bmatrix}$

$\Rightarrow X=I_*\otimes\tilde C\begin{bmatrix}\tilde\Gamma_0\\\tilde\Gamma_1\\\cdots\\\tilde\Gamma_k\end{bmatrix}=(I_*\otimes\tilde C)(I_*\otimes A^+)\begin{bmatrix}\Gamma_0\\\Gamma_1\\\cdots\\\Gamma_k\end{bmatrix}=I_*\otimes C\begin{bmatrix}\Gamma_0\\\Gamma_1\\\cdots\\\Gamma_k\end{bmatrix},C=\tilde CA^+,\forall X$ □

推论4.3.1. $X=\sum_{l=0}^{[n/2](2-n\%2)}\frac{1}{(l!)^2}F_{a_1\cdot\cdot a_l}\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]}=\sum_{l=0}^{[n/2](2-n\%2)}\frac{2^{-[n/2]}i^{l(l-1)}}{(l!)^3}tr(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}X)\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]},\forall X$

定理4.3.2. $2^{-[n/2]}\sum_{l=0}^{[n/2](2-n\%2)}\frac{i^{l(l-1)}}{(l!)^3}(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})_{\lambda'}{}^{\mu'}(\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]})_{\lambda}{}^{\mu}=\delta_{\lambda}{}^{\mu'}\delta_{\lambda'}{}^{\mu}$

证明： $\delta_\lambda{}^{\mu'}\delta_{\lambda'}{}^{\mu}X_{\mu'}{}^{\lambda'}=X_\lambda{}^\mu,\forall X$

$$=\frac{2^{-k}}{(0!)^3}X_{\lambda'}{}^{\lambda'}\delta_\lambda{}^\mu+\sum_{l=1}^{[n/2](2-n\%2)}\frac{2^{-[n/2]}i^{l(l-1)}}{(l!)^3}tr(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}X)_{\lambda'}{}^{\lambda'}(\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]})_\lambda{}^\mu$$

$$=\frac{2^{-k}}{(0!)^3}\delta_{\lambda'}{}^{\mu'}X_{\mu'}{}^{\lambda'}\delta_\lambda{}^\mu+\sum_{l=1}^{[n/2](2-n\%2)}\frac{2^{-[n/2]}i^{l(l-1)}}{(l!)^3}(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})_{\lambda'}{}^{\mu'}X_{\mu'}{}^{\lambda'}(\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]})_\lambda{}^\mu$$

$$=[\frac{2^{-k}}{(0!)^3}\delta_{\lambda'}{}^{\mu'}\delta_\lambda{}^\mu+\sum_{l=1}^{[n/2](2-n\%2)}\frac{2^{-[n/2]}i^{l(l-1)}}{(l!)^3}(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})_{\lambda'}{}^{\mu'}(\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]})_\lambda{}^\mu]X_{\mu'}{}^{\lambda'}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2^{-k}}{(0!)^3}\delta_{\lambda'}{}^{\mu'}\delta_\lambda{}^\mu+\sum_{l=1}^{[n/2](2-n\%2)}\frac{2^{-[n/2]}i^{l(l-1)}}{(l!)^3}(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})_{\lambda'}{}^{\mu'}(\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]})_\lambda{}^\mu=\delta_\lambda{}^{\mu'}\delta_{\lambda'}{}^\mu$$

$$\Leftrightarrow 2^{-[n/2]}\sum_{l=0}^{[n/2](2-n\%2)}\frac{i^{l(l-1)}}{(l!)^3}(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})_{\lambda'}{}^{\mu'}(\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]})_\lambda{}^\mu=\delta_\lambda{}^{\mu'}\delta_{\lambda'}{}^\mu$$ □

推论4.3.2. $2^{-[\frac{n}{2}]}\sum_{l=0}^{[n/2](2-n\%2)}\frac{i^{l(l-1)}}{l!}\{(\frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}}\gamma^{a_l]})_\lambda{}^\mu(\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]})_\eta{}^\xi\}=\delta_\lambda{}^\xi\delta_\eta{}^\mu$

推论4.3.3. $2^{-[\frac{n}{2}]}\sum_{l=0}^{[n/2](2-n\%2)}\frac{1}{l!}\{(\frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}}\gamma^{a_l]})^+{}_\lambda{}^\mu(\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]})_\eta{}^\xi\}=\delta_\lambda{}^\xi\delta_\eta{}^\mu$

推论4.3.4. $2^{-[\frac{n}{2}]}\sum_{l=0}^{[n/2](2-n\%2)}\frac{1}{l!}\{(\frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}}\gamma^{a_l]})_\lambda{}^\mu(\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\cdot\cdot\gamma_{a_{l-1}}\gamma_{a_l]})^+{}_\eta{}^\xi\}=\delta_\lambda{}^\xi\delta_\eta{}^\mu$

推论4.3.5. $\delta_{\lambda'}{}^{\mu'}\delta_\lambda{}^\mu+\sigma^x{}_{\lambda'}{}^{\mu'}\sigma^x{}_\lambda{}^\mu+\sigma^y{}_{\lambda'}{}^{\mu'}\sigma^y{}_\lambda{}^\mu+\sigma^z{}_{\lambda'}{}^{\mu'}\sigma^z{}_\lambda{}^\mu=2\delta_\lambda{}^{\mu'}\delta_{\lambda'}{}^\mu$

证明： $\frac{2^{-1}}{(0!)^3}\delta_{\lambda'}{}^{\mu'}\delta_\lambda{}^\mu+\sum_{l=1}^{2}\frac{2^{-1}i^{l(l-1)}}{(l!)^3}(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})_{\lambda'}{}^{\mu'}(\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]})_\lambda{}^\mu=\delta_\lambda{}^{\mu'}\delta_{\lambda'}{}^\mu$

$$\Leftrightarrow\delta_{\lambda'}{}^{\mu'}\delta_\lambda{}^\mu+\gamma_{x\lambda'}{}^{\mu'}\gamma^x{}_\lambda{}^\mu+\gamma_{y\lambda'}{}^{\mu'}\gamma^y{}_\lambda{}^\mu-\frac{1}{4}[\gamma_x,\gamma_y]_{\lambda'}{}^{\mu'}[\gamma^x,\gamma^y]_\lambda{}^\mu=2\delta_\lambda{}^{\mu'}\delta_{\lambda'}{}^\mu$$

$$\Leftrightarrow\delta_{\lambda'}{}^{\mu'}\delta_\lambda{}^\mu+\sigma^x{}_{\lambda'}{}^{\mu'}\sigma^x{}_\lambda{}^\mu+\sigma^y{}_{\lambda'}{}^{\mu'}\sigma^y{}_\lambda{}^\mu+\sigma^z{}_{\lambda'}{}^{\mu'}\sigma^z{}_\lambda{}^\mu=2\delta_\lambda{}^{\mu'}\delta_{\lambda'}{}^\mu$$

$$\Leftrightarrow\sigma^x{}_{\lambda'}{}^{\mu'}\sigma^x{}_\lambda{}^\mu+\sigma^y{}_{\lambda'}{}^{\mu'}\sigma^y{}_\lambda{}^\mu+\sigma^z{}_{\lambda'}{}^{\mu'}\sigma^z{}_\lambda{}^\mu=2\delta_\lambda{}^{\mu'}\delta_{\lambda'}{}^\mu-\delta_{\lambda'}{}^{\mu'}\delta_\lambda{}^\mu=\delta_\lambda{}^{\mu'}\delta_{\lambda'}{}^\mu-\varepsilon_{\lambda\lambda'}\varepsilon^{\mu\mu'}$$ □

4.4 N+1=n维时空中Dirac矩阵连乘迹性质

推论4.4.1. $tr\{\frac{1}{1!}\gamma^{b_1}\frac{1}{1!}\gamma_{a_1}\}=2^{[\frac{n}{2}]}\delta_{a_1}^{b_1}$

$tr\{\frac{1}{2!}\gamma^{[b_1}\gamma^{b_2]}\frac{1}{2!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}\}=-2^{[\frac{n}{2}]}\delta_{[a_1}^{b_1}\delta_{a_2]}^{b_2},tr\{\frac{1}{3!}\gamma^{[b_1}\cdot\cdot\gamma^{b_3]}\frac{1}{3!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}\}=-2^{[\frac{n}{2}]}\delta_{[a_1}^{b_1}\cdot\cdot\delta_{a_3]}^{b_3}$

$tr\{\frac{1}{4!}\gamma^{[b_1}\cdot\cdot\gamma^{b_4]}\frac{1}{4!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_4]}\}=2^{[\frac{n}{2}]}\delta_{[a_1}^{b_1}\cdot\cdot\delta_{a_4]}^{b_4},tr\{\frac{1}{5!}\gamma^{[b_1}\cdot\cdot\gamma^{b_5]}\frac{1}{5!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}\}=2^{[\frac{n}{2}]}\delta_{[a_1}^{b_1}\cdot\cdot\delta_{a_5]}^{b_5}$

$\cdots$

$tr\{\frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}}\gamma^{a_l]}\frac{1}{l!}\gamma_{[b_1}\gamma_{b_2}\gamma_{b_3}\gamma_{b_4}\cdot\cdot\gamma_{b_{l-1}}\gamma_{b_l]}\}=i^{l(l-1)}\frac{2^{[\frac{n}{2}]}}{l!}\delta_{[b_1}^{[a_1}\delta_{b_2}^{a_2}\delta_{b_3}^{a_3}\delta_{b_4}^{a_4}\cdot\cdot\delta_{b_{l-1}}^{a_{l-1}}\delta_{b_l]}^{a_l]}$

$tr\{\frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}}\gamma^{a_l]}\gamma^0\frac{1}{l!}\gamma_{[b_1}\gamma_{b_2}\gamma_{b_3}\gamma_{b_4}\cdot\cdot\gamma_{b_{l-1}}\gamma_{b_l]}\gamma_0\}=i^{l(l+1)}\frac{2^{[\frac{n}{2}]}}{l!}\eta_{[b_1}^{[a_1}\eta_{b_2}^{a_2}\eta_{b_3}^{a_3}\eta_{b_4}^{a_4}\cdot\cdot\eta_{b_{l-1}}^{a_{l-1}}\eta_{b_l]}^{a_l]}$

推论4.4.2.

$tr\{(\frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}}\gamma^{a_l]})^+\frac{1}{l!}\gamma_{[b_1}\gamma_{b_2}\gamma_{b_3}\gamma_{b_4}\cdot\cdot\gamma_{b_{l-1}}\gamma_{b_l]}\}=\frac{2^{[\frac{n}{2}]}}{l!}\delta_{[b_1}^{[a_1}\delta_{b_2}^{a_2}\delta_{b_3}^{a_3}\delta_{b_4}^{a_4}\cdot\cdot\delta_{b_{l-1}}^{a_{l-1}}\delta_{b_l]}^{a_l]}$

$tr\{(\frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}}\gamma^{a_l]})^+\gamma^0\frac{1}{l!}\gamma_{[b_1}\gamma_{b_2}\gamma_{b_3}\gamma_{b_4}\cdot\cdot\gamma_{b_{l-1}}\gamma_{b_l]}\gamma_0\}=\frac{2^{[\frac{n}{2}]}}{l!}\eta_{[b_1}^{[a_1}\eta_{b_2}^{a_2}\eta_{b_3}^{a_3}\eta_{b_4}^{a_4}\cdot\cdot\eta_{b_{l-1}}^{a_{l-1}}\eta_{b_l]}^{a_l]}$

$tr\{(\frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}}\gamma^{a_l]}\gamma^0)^+\frac{1}{l!}\gamma_{[b_1}\gamma_{b_2}\gamma_{b_3}\gamma_{b_4}\cdot\cdot\gamma_{b_{l-1}}\gamma_{b_l]}\gamma_0\}=\frac{2^{[\frac{n}{2}]}}{l!}\delta_{[b_1}^{[a_1}\delta_{b_2}^{a_2}\delta_{b_3}^{a_3}\delta_{b_4}^{a_4}\cdot\cdot\delta_{b_{l-1}}^{a_{l-1}}\delta_{b_l]}^{a_l]}$

推论4.4.3.

$tr\{\frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}}\gamma^{a_l]}\frac{1}{l'!}\gamma_{[b_1}\gamma_{b_2}\gamma_{b_3}\gamma_{b_4}\cdot\cdot\gamma_{b_{l'-1}}\gamma_{b_{l'}]}\}=i^{l(l-1)}\frac{2^{[\frac{n}{2}]}}{l!}\delta_{[b_1}^{[a_1}\delta_{b_2}^{a_2}\delta_{b_3}^{a_3}\delta_{b_4}^{a_4}\cdot\cdot\delta_{b_{l-1}}^{a_{l-1}}\delta_{b_l]}^{a_l]}\delta_{ll'}$

$tr\{\frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}}\gamma^{a_l]}\gamma^0\frac{1}{l'!}\gamma_{[b_1}\gamma_{b_2}\gamma_{b_3}\gamma_{b_4}\cdot\cdot\gamma_{b_{l'-1}}\gamma_{b_{l'}]}\gamma_0\}=i^{l(l+1)}\frac{2^{[\frac{n}{2}]}}{l!}\eta_{[b_1}^{[a_1}\eta_{b_2}^{a_2}\eta_{b_3}^{a_3}\eta_{b_4}^{a_4}\cdot\cdot\eta_{b_{l-1}}^{a_{l-1}}\eta_{b_l]}^{a_l]}\delta_{ll'}$

4.5 N+1=n维时空中Dirac矩阵连乘迹有关定理的严格证明

定理4.5.1.

$tr\{\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}]}\gamma^{a_l}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\cdot\cdot\gamma_{a'_{l-1}]}\gamma_{a'_l}\}=i^{l(l-1)}2^{[\frac{n}{2}]}[(l-1)!]^2\{\frac{1}{l!}\delta_{[a'_1}^{[a_1}\delta_{a'_2}^{a_2}\cdot\cdot\delta_{a'_l]}^{a_l]}-\frac{1}{(l-2)!}\delta_{[a'_1}^{[a_1}\cdot\cdot\delta_{a'_{l-2}}^{a_{l-2}}\delta^{a_{l-1}]a_l}\delta_{a'_{l-1}]a'_l}\}$

$[\Leftrightarrow]$

$tr\{\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}]}\gamma^{a_l}\gamma^0\gamma_{[a'_1}\cdot\cdot\gamma_{a'_{l-1}]}\gamma_{a'_l}\gamma_0\}=i^{l(l+1)}2^{[\frac{n}{2}]}[(l-1)!]^2\{\frac{1}{l!}\eta_{[a'_1}^{[a_1}\eta_{a'_2}^{a_2}\cdot\cdot\eta_{a'_l]}^{a_l]}-\frac{1}{(l-2)!}\eta_{[a'_1}^{[a_1}\cdot\cdot\eta_{a'_{l-2}}^{a_{l-2}}\delta^{a_{l-1}]a_l}\delta_{a'_{l-1}]a'_l}\}$

证明： 分情况证明：

$1: a_i = a_j, i \neq j$

$tr\{\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}]}\gamma^{a_l}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\cdot\cdot\gamma_{a'_{l-1}]}\gamma_{a'_l}\} = i^{l(l-1)}2^{[\frac{n}{2}]}[(l-1)!]^2\{\frac{1}{l!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\delta^{a_l]}_{a'_l]} - \frac{1}{(l-2)!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\delta^{a_{l-2}}_{a'_{l-2}}\delta^{a_{l-1}]a_l}\delta_{a'_{l-1}]a'_l}\} = 0$

$2: b_i = b_j, i \neq j$

$tr\{\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}]}\gamma^{a_l}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\cdot\cdot\gamma_{a'_{l-1}]}\gamma_{a'_l}\} = i^{l(l-1)}2^{[\frac{n}{2}]}[(l-1)!]^2\{\frac{1}{l!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\delta^{a_l]}_{a'_l]} - \frac{1}{(l-2)!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\delta^{a_{l-2}}_{a'_{l-2}}\delta^{a_{l-1}]a_l}\delta_{a'_{l-1}]a'_l}\} = 0$

$3: a_1 \neq a_2 \neq \cdot\cdot \neq a_{l-1} \neq a_l, a'_1 \neq a'_2 \neq \cdot\cdot \neq a'_{l-1} \neq a'_l$

$tr\{\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}]}\gamma^{a_l}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\cdot\cdot\gamma_{a'_{l-1}]}\gamma_{a'_l}\} = tr\{\gamma^{a_1}\gamma^{a_2}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}}\gamma^{a_l}\gamma_{a'_1}\gamma_{a'_2}\cdot\cdot\gamma_{a'_{l-1}}\gamma_{a'_l}\} = i^{l(l-1)}2^{[\frac{n}{2}]}[(l-1)!]^2\frac{1}{l!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\delta^{a_l]}_{a'_l]}$

$= i^{l(l-1)}2^{[\frac{n}{2}]}[(l-1)!]^2\{\frac{1}{l!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\delta^{a_l]}_{a'_l]} - \frac{1}{(l-2)!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\delta^{a_{l-2}}_{a'_{l-2}}\delta^{a_{l-1}]a_l}\delta_{a'_{l-1}]a'_l}\}$

$4: a_1 \neq a_2 \neq \cdot\cdot \neq a_{l-1}, a_i = a_l; a'_1 \neq a'_2 \neq \cdot\cdot \neq a'_{l-1} \neq a'_l$

$tr\{\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}]}\gamma^{a_l}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\cdot\cdot\gamma_{a'_{l-1}]}\gamma_{a'_l}\} = i^{l(l-1)}2^{[\frac{n}{2}]}[(l-1)!]^2\{\frac{1}{l!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\delta^{a_l]}_{a'_l]} - \frac{1}{(l-2)!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\delta^{a_{l-2}}_{a'_{l-2}}\delta^{a_{l-1}]a_l}\delta_{a'_{l-1}]a'_l}\} = 0$

$5: a_1 \neq a_2 \neq \cdot\cdot \neq a_{l-1} \neq a_l; a'_1 \neq a'_2 \neq \cdot\cdot \neq a'_{l-1}, a_j = a'_l$

$tr\{\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}]}\gamma^{a_l}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\cdot\cdot\gamma_{a'_{l-1}]}\gamma_{a'_l}\} = i^{l(l-1)}2^{[\frac{n}{2}]}[(l-1)!]^2\{\frac{1}{l!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\delta^{a_l]}_{a'_l]} - \frac{1}{(l-2)!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\delta^{a_{l-2}}_{a'_{l-2}}\delta^{a_{l-1}]a_l}\delta_{a'_{l-1}]a'_l}\} = 0$

$6: a_1 \neq a_2 \neq \cdot\cdot \neq a_{l-1}, a_i = a_l; a'_1 \neq a'_2 \neq \cdot\cdot \neq a'_{l-1}, a_j = a'_l$

$tr\{\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}]}\gamma^{a_l}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\cdot\cdot\gamma_{a'_{l-1}]}\gamma_{a'_l}\} = i^{(l-2)(l-3)}2^{[\frac{n}{2}]}[(l-1)!]^2\frac{1}{(l-2)!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\delta^{a_{l-2}}_{a'_{l-2}}\delta^{a_{l-1}]a_l}\delta_{a'_{l-1}]a'_l}$

$= i^{l(l-1)}2^{[\frac{n}{2}]}[(l-1)!]^2\{\frac{1}{l!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\delta^{a_l]}_{a'_l]} - \frac{1}{(l-2)!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\delta^{a_{l-2}}_{a'_{l-2}}\delta^{a_{l-1}]a_l}\delta_{a'_{l-1}]a'_l}\} = 0$ □

推论4.5.1.

$tr\{\gamma^{a_1}\gamma^{[a_2}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}}\gamma^{a_l]}\gamma_{a'_1}\gamma_{[a'_2}\cdot\cdot\gamma_{a'_{l-1}}\gamma_{a'_l]}\} = i^{l(l-1)}2^{[\frac{n}{2}]}[(l-1)!]^2\{\frac{1}{l!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\delta^{a_l]}_{a'_l]} - \frac{1}{(l-2)!}\delta^{a_1[a_2}\delta_{a'_1[a'_2}\delta^{a_3}_{a'_3}\cdot\cdot\delta^{a_l]}_{a'_l]}\}$

$tr\{\gamma^0\gamma^{a_1}\gamma^{[a_2}\cdot\cdot\gamma^{a_l]}\gamma_0\gamma_{a'_1}\gamma_{[a'_2}\cdot\cdot\gamma_{a'_l]}\} = i^{l(l+1)}2^{[\frac{n}{2}]}[(l-1)!]^2\{\frac{1}{l!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\delta^{a_l]}_{a'_l]} - \frac{1}{(l-2)!}\delta^{a_1[a_2}\delta_{a'_1[a'_2}\delta^{a_3}_{a'_3}\cdot\cdot\delta^{a_l]}_{a'_l]}\}$

推论4.5.2.

$tr\{\gamma^{a_1}\gamma^{[a_2}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}}\gamma^{a_l]}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\cdot\cdot\gamma_{a'_{l-1}]}\gamma_{a'_l}\} = i^{l(l-1)}2^{[\frac{n}{2}]}[(l-1)!]^2\{\frac{1}{l!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\delta^{a_l]}_{a'_l]} - \frac{1}{(l-2)!}\delta^{a_1[a_2}\delta^{a_3}_{[a'_1}\cdot\cdot\delta^{a_l]}_{a'_{l-2}}\delta_{a'_{l-1}]a'_l}\}$

$tr\{\gamma^0\gamma^{a_1}\gamma^{[a_2}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}}\gamma^{a_l]}\gamma_0\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\cdot\cdot\gamma_{a'_{l-1}]}\gamma_{a'_l}\} = i^{l(l+1)}2^{[\frac{n}{2}]}[(l-1)!]^2\{\frac{1}{l!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\eta^{a_l]}_{a'_l]} - \frac{1}{(l-2)!}\delta^{a_1[a_2}\eta^{a_3}_{[a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_l]}_{a'_{l-2}}\delta_{a'_{l-1}]a'_l}\}$

推论4.5.3.

$tr\{\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}]}\gamma^{a_l}\gamma_{a'_1}\gamma_{[a'_2}\cdot\cdot\gamma_{a'_{l-1}}\gamma_{a'_l]}\} = i^{l(l-1)}2^{[\frac{n}{2}]}[(l-1)!]^2\{\frac{1}{l!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\delta^{a_l]}_{a'_l]} - \frac{1}{(l-2)!}\delta_{a'_1[a'_2}\delta^{[a_1}_{a'_3}\cdot\cdot\delta^{a_{l-2}}_{a'_l]}\delta^{a_{l-1}]a_l}\}$

$tr\{\gamma^0\gamma^{a_1}\gamma^{[a_2}\cdot\cdot\gamma^{a_{l-1}}\gamma^{a_l]}\gamma_0\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\cdot\cdot\gamma_{a'_{l-1}]}\gamma_{a'_l}\} = i^{l(l+1)}2^{[\frac{n}{2}]}[(l-1)!]^2\{\frac{1}{l!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_l]}_{a'_l]} - \frac{1}{(l-2)!}\delta_{a'_1[a'_2}\eta^{[a_1}_{a'_3}\cdot\cdot\eta^{a_{l-2}}_{a'_l]}\delta^{a_{l-1}]a_l}\}$

自我评述：以上Dirac矩阵连乘迹公式是可以通过前几节Dirac矩阵连乘积的相关定理证明出来的，但也可以采用以上直接的方法严格证明它。

5 N+1维时空中δ函数积和式的性质

5.1 N+1维时空中δ函数积和式的指标单调轮换求和规律

引理5.1.1.

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\sum\limits_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{[a_3}_{[b_1}\delta^{a_4]}_{b_2]}\delta_{b_3b_4}\} = \sum\limits_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{[a_3}_{b_1}\delta^{a_4]}_{b_2}\delta_{b_3b_4}\} = \sum\limits_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3}_{[b_1}\delta^{a_4}_{b_2]}\delta_{b_3b_4}\} \\ = \frac{1}{2}(\delta^{a_1[a_2}\delta^{a_3}_{[b_1}\delta^{a_4]}_{b_2}\delta_{b_3]b_4} + \delta^{a_1[a_2}\delta^{a_3}_{[b_1}\delta^{a_4]}_{b_4]}\delta_{b_2b_3} - \delta^{a_1[a_2}\delta^{a_3}_{[b_1}\delta^{a_4]}_{b_3]}\delta_{b_2b_4} + \delta^{a_1[a_2}\delta^{a_3}_{[b_3}\delta^{a_4]}_{b_4]}\delta_{b_1b_2}) \\ +\frac{1}{2}(\delta^{a_2a_3}\delta^{[a_1}_{[b_1}\delta^{a_4]}_{b_2}\delta_{b_3]b_4} + \delta^{a_2a_3}\delta^{[a_1}_{[b_1}\delta^{a_4]}_{b_4]}\delta_{b_2b_3} - \delta^{a_2a_3}\delta^{[a_1}_{[b_1}\delta^{a_4]}_{b_3]}\delta_{b_2b_4} + \delta^{a_2a_3}\delta^{[a_1}_{[b_3}\delta^{a_4]}_{b_4]}\delta_{b_1b_2}) \\ -\frac{1}{2}(\delta^{a_2a_4}\delta^{[a_1}_{[b_1}\delta^{a_3]}_{b_2}\delta_{b_3]b_4} + \delta^{a_2a_4}\delta^{[a_1}_{[b_1}\delta^{a_3]}_{b_4]}\delta_{b_2b_3} - \delta^{a_2a_4}\delta^{[a_1}_{[b_1}\delta^{a_3]}_{b_3]}\delta_{b_2b_4} + \delta^{a_2a_4}\delta^{[a_1}_{[b_3}\delta^{a_3]}_{b_4]}\delta_{b_1b_2}) \\ +\frac{1}{2}(\delta^{a_3a_4}\delta^{[a_1}_{[b_1}\delta^{a_2]}_{b_2}\delta_{b_3]b_4} + \delta^{a_3a_4}\delta^{[a_1}_{[b_1}\delta^{a_2]}_{b_4]}\delta_{b_2b_3} - \delta^{a_3a_4}\delta^{[a_1}_{[b_1}\delta^{a_2]}_{b_3]}\delta_{b_2b_4} + \delta^{a_3a_4}\delta^{[a_1}_{[b_3}\delta^{a_2]}_{b_4]}\delta_{b_1b_2})\end{cases}$$

引理5.1.2.

$$\begin{cases}\sum\limits_{ab}\{\delta^{a_1a_2}\delta_{b_1b_2}\} = \delta^{a_1a_2}\delta_{b_1b_2} - \delta^{a_1}_{[b_1}\delta^{a_2}_{b_2]}, \sum\limits_a\{\delta_{a_1a_2}\delta_{a_3a_4}\} = \delta_{a_1a_2}\delta_{a_3a_4} - \delta_{a_1[a_3}\delta_{a_4]a_2} \\ \sum\limits_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}\delta_{b_1b_2}\delta_{b_3b_4}\} = (\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4} - \delta^{a_1[a_3}\delta^{a_4]a_2})(\delta_{b_1b_2}\delta_{b_3b_4} - \delta_{b_1[b_3}\delta_{b_4]b_2}) \\ \sum\limits_{ab}\{\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}\delta_{b_1b_2}\delta_{b_3b_4}\} = \frac{1}{0!}\sum\limits_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}\delta_{b_1b_2}\delta_{b_3b_4}\} + \frac{1}{2!}\sum\limits_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{[a_3}_{[b_1}\delta^{a_4]}_{b_2]}\delta_{b_3b_4}\} + \frac{1}{4!}\delta^{[a_1}_{[b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\delta^{a_3}_{b_3}\delta^{a_4]}_{b_4]}\end{cases}$$

引理5.1.3. $\gamma^{a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4}\gamma^{a_5}\gamma^{a_6}\gamma^{a_7}\gamma^{a_8}\gamma_{b_1}\gamma_{b_2}\gamma_{b_3}\gamma_{b_4}\gamma_{b_5}\gamma_{b_6}\gamma_{b_7}\gamma_{b_8}$

$= \cdots + \frac{1}{0!}\sum_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}\delta^{a_5a_6}\delta^{a_7a_8}\delta_{b_1b_2}\delta_{b_3b_4}\delta_{b_5b_6}\delta_{b_7b_8}\} + \frac{1}{2!}\sum_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}\delta^{a_5a_6}\delta^{[a_7}_{[b_1}\delta^{a_8]}_{b_2]}\delta_{b_3b_4}\delta_{b_5b_6}\delta_{b_7b_8}\}$

$+ \frac{1}{4!}\sum_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}\delta^{[a_5}_{[b_1}\delta^{a_6}_{b_2}\delta^{a_7}_{b_3}\delta^{a_8]}_{b_4]}\delta_{b_5b_6}\delta_{b_7b_8}\} + \frac{1}{6!}\sum_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{[a_3}_{[b_1}\delta^{a_4}_{b_2}\delta^{a_5}_{b_3}\delta^{a_6}_{b_4}\delta^{a_7}_{b_5}\delta^{a_8]}_{b_6]}\delta_{b_7b_8}\} + \frac{1}{8!}\delta^{[a_1}_{[b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\delta^{a_3}_{b_3}\delta^{a_4}_{b_4}\delta^{a_5}_{b_5}\delta^{a_6}_{b_6}\delta^{a_7}_{b_7}\delta^{a_8]}_{b_8]}$

引理5.1.4. $\gamma^{a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4}\cdot\cdot\gamma^{a_{2l-3}}\gamma^{a_{2l-2}}\gamma^{a_{2l-1}}\gamma^{a_{2l}}\gamma_{b_1}\gamma_{b_2}\gamma_{b_3}\gamma_{b_4}\cdot\cdot\gamma_{b_{2l-3}}\gamma_{b_{2l-2}}\gamma_{b_{2l-1}}\gamma_{b_{2l}}$

$= \cdots$

$+ \frac{1}{0!}\sum_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}\cdot\cdot\delta^{a_{2l-3}a_{2l-2}}\delta^{a_{2l-1}a_{2l}}\delta_{b_1b_2}\delta_{b_3b_4}\cdot\cdot\delta_{b_{2l-3}b_{2l-2}}\delta_{b_{2l-1}b_{2l}}\}$

$+ \frac{1}{2!}\sum_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}\cdot\cdot\delta^{a_{2l-3}a_{2l-2}}\delta^{[a_{2l-1}}_{[b_1}\delta^{a_{2l}]}_{b_2]}\delta_{b_3b_4}\cdot\cdot\delta_{b_{2l-3}b_{2l-2}}\delta_{b_{2l-1}b_{2l}}\}$

$+ \frac{1}{4!}\sum_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}\cdot\cdot\delta^{[a_{2l-3}}_{[b_1}\delta^{a_{2l-2}}_{b_2}\delta^{a_{2l-1}}_{b_3}\delta^{a_{2l}]}_{b_4]}\cdot\cdot\delta_{b_{2l-3}b_{2l-2}}\delta_{b_{2l-1}b_{2l}}\} + \cdot\cdot$

$+ \frac{1}{(2l-2)!}\sum_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{[a_3}_{[b_1}\delta^{a_4}_{b_2}\delta^{a_5}_{b_3}\delta^{a_6}_{b_4}\cdot\cdot\delta^{a_{2l-3}}_{b_{2l-5}}\delta^{a_{2l-2}}_{b_{2l-4}}\delta^{a_{2l-1}}_{b_{2l-3}}\delta^{a_{2l}]}_{b_{2l-2}]}\delta_{b_{2l-1}b_{2l}}\}$

$+ \frac{1}{(2l)!}\delta^{[a_1}_{[b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\delta^{a_3}_{b_3}\delta^{a_4}_{b_4}\cdot\cdot\delta^{a_{2l-3}}_{b_{2l-3}}\delta^{a_{2l-2}}_{b_{2l-2}}\delta^{a_{2l-1}}_{b_{2l-1}}\delta^{a_{2l}]}_{b_{2l}]}$

引理5.1.5. $\gamma^{a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4}\cdot\cdot\gamma^{a_{2l-3}}\gamma^{a_{2l-2}}\gamma^{a_{2l-1}}\gamma^{a_{2l}}\gamma^{a_{2l+1}}\gamma_{b_1}\gamma_{b_2}\gamma_{b_3}\gamma_{b_4}\cdot\cdot\gamma_{b_{2l-3}}\gamma_{b_{2l-2}}\gamma_{b_{2l-1}}\gamma_{b_{2l}}\gamma^{b_{2l+1}}$

$= \cdots$

$+ \frac{1}{1!}\sum_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}\cdot\cdot\delta^{a_{2l-3}a_{2l-2}}\delta^{a_{2l-1}a_{2l}}\delta^{a_{2l+1}}_{b_1}\delta_{b_2b_3}\delta_{b_4b_5}\cdot\cdot\delta_{b_{2l-2}b_{2l-1}}\delta_{b_{2l}b_{2l+1}}\}$

$+ \frac{1}{3!}\sum_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}\cdot\cdot\delta^{a_{2l-3}a_{2l-2}}\delta^{[a_{2l-1}}_{[b_1}\delta^{a_{2l}}_{b_2}\delta^{a_{2l+1}]}_{b_3]}\delta_{b_4b_5}\cdot\cdot\delta_{b_{2l-2}b_{2l-1}}\delta_{b_{2l}b_{2l+1}}\}$

$+ \frac{1}{5!}\sum_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}\cdot\cdot\delta^{[a_{2l-3}}_{[b_1}\delta^{a_{2l-2}}_{b_2}\delta^{a_{2l-1}}_{b_3}\delta^{a_{2l}}_{b_4}\delta^{a_{2l+1}]}_{b_5]}\cdot\cdot\delta_{b_{2l-2}b_{2l-1}}\delta_{b_{2l}b_{2l+1}}\} + \cdot\cdot$

$+ \frac{1}{(2l-1)!}\sum_b^a\{\delta^{a_1a_2}\delta^{[a_3}_{[b_1}\delta^{a_4}_{b_2}\delta^{a_5}_{b_3}\delta^{a_6}_{b_4}\cdot\cdot\delta^{a_{2l-1}}_{b_{2l-3}}\delta^{a_{2l}}_{b_{2l-2}}\delta^{a_{2l+1}]}_{b_{2l-1}]}\delta_{b_{2l}b_{2l+1}}\}$

$+ \frac{1}{(2l+1)!}\delta^{[a_1}_{[b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\delta^{a_3}_{b_3}\delta^{a_4}_{b_4}\cdot\cdot\delta^{a_{2l-3}}_{b_{2l-3}}\delta^{a_{2l-2}}_{b_{2l-2}}\delta^{a_{2l-1}}_{b_{2l-1}}\delta^{a_{2l}}_{b_{2l}}\delta^{a_{2l+1}]}_{b_{2l+1}]}$

引理5.1.6. $\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\cdot\cdot\gamma_{a_{2l-3}}\gamma_{a_{2l-2}}\gamma_{a_{2l-1}}\gamma_{a_{2l}}\gamma_{b_1}\gamma_{b_2}\gamma_{b_3}\gamma_{b_4}\cdot\cdot\gamma_{b_{2l-3}}\gamma_{b_{2l-2}}\gamma_{b_{2l-1}}\gamma_{b_{2l}}$

$= \cdots$

$+ \frac{1}{0!}\sum_b^a\{\delta_{a_1a_2}\delta_{a_3a_4}\cdot\cdot\delta_{a_{2l-3}a_{2l-2}}\delta_{a_{2l-1}a_{2l}}\delta_{b_1b_2}\delta_{b_3b_4}\cdot\cdot\delta_{b_{2l-3}b_{2l-2}}\delta_{b_{2l-1}b_{2l}}\}$

$+ \frac{1}{2!}\sum_b^a\{\delta_{a_1a_2}\delta_{a_3a_4}\cdot\cdot\delta_{a_{2l-3}a_{2l-2}}\delta_{[a_{2l-1}\langle b_1}\delta_{a_{2l}]b_2\rangle}\delta_{b_3b_4}\cdot\cdot\delta_{b_{2l-3}b_{2l-2}}\delta_{b_{2l-1}b_{2l}}\}$

$+ \frac{1}{4!}\sum_b^a\{\delta_{a_1a_2}\delta_{a_3a_4}\cdot\cdot\delta_{[a_{2l-3}\langle b_1}\delta_{a_{2l-2}b_2}\delta_{a_{2l-1}b_3}\delta_{a_{2l}]b_4\rangle}\cdot\cdot\delta_{b_{2l-3}b_{2l-2}}\delta_{b_{2l-1}b_{2l}}\} + \cdot\cdot$

$+ \frac{1}{(2l-2)!}\sum_b^a\{\delta_{a_1a_2}\delta_{[a_3\langle b_1}\delta_{a_4b_2}\delta_{a_5b_3}\delta_{a_6b_4}\cdot\cdot\delta_{a_{2l-3}b_{2l-5}}\delta_{a_{2l-2}b_{2l-4}}\delta_{a_{2l-1}b_{2l-3}}\delta_{a_{2l}]b_{2l-2}\rangle}\delta_{b_{2l-1}b_{2l}}\}$

$+ \frac{1}{(2l)!}\delta_{[a_1\langle b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3}\delta_{a_4b_4}\cdot\cdot\delta_{a_{2l-3}b_{2l-3}}\delta_{a_{2l-2}b_{2l-2}}\delta_{a_{2l-1}b_{2l-1}}\delta_{a_{2l}]b_{2l}\rangle}$

引理5.1.7. $\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\cdot\cdot\gamma_{a_{2l-3}}\gamma_{a_{2l-2}}\gamma_{a_{2l-1}}\gamma_{a_{2l}}\gamma_{a_{2l+1}}\gamma_{b_1}\gamma_{b_2}\gamma_{b_3}\gamma_{b_4}\cdot\cdot\gamma_{b_{2l-3}}\gamma_{b_{2l-2}}\gamma_{b_{2l-1}}\gamma_{b_{2l}}\gamma_{b_{2l+1}}$

$= \cdots$

$+ \frac{1}{1!}\sum_b^a\{\delta_{a_1a_2}\delta_{a_3a_4}\cdot\cdot\delta_{a_{2l-3}a_{2l-2}}\delta_{a_{2l-1}a_{2l}}\delta_{a_{2l+1}b_1}\delta_{b_2b_3}\delta_{b_4b_5}\cdot\cdot\delta_{b_{2l-2}b_{2l-1}}\delta_{b_{2l}b_{2l+1}}\}$

$+ \frac{1}{3!}\sum_b^a\{\delta_{a_1a_2}\delta_{a_3a_4}\cdot\cdot\delta_{a_{2l-3}a_{2l-2}}\delta_{[a_{2l-1}\langle b_1}\delta_{a_{2l}b_2}\delta_{a_{2l+1}]b_3\rangle}\delta_{b_4b_5}\cdot\cdot\delta_{b_{2l-2}b_{2l-1}}\delta_{b_{2l}b_{2l+1}}\}$

$+ \frac{1}{5!}\sum_b^a\{\delta_{a_1a_2}\delta_{a_3a_4}\cdot\cdot\delta_{[a_{2l-3}\langle b_1}\delta_{a_{2l-2}b_2}\delta_{a_{2l-1}b_3}\delta_{a_{2l}b_4}\delta_{a_{2l+1}]b_5\rangle}\cdot\cdot\delta_{b_{2l-2}b_{2l-1}}\delta_{b_{2l}b_{2l+1}}\} + \cdot\cdot$

$+ \frac{1}{(2l-1)!}\sum_b^a\{\delta_{a_1a_2}\delta_{[a_3\langle b_1}\delta_{a_4b_2}\delta_{a_5b_3}\delta_{a_6b_4}\cdot\cdot\delta_{a_{2l-1}b_{2l-3}}\delta_{a_{2l}b_{2l-2}}\delta_{a_{2l+1}]b_{2l-1}\rangle}\delta_{b_{2l}b_{2l+1}}\}$

$+ \frac{1}{(2l+1)!}\delta_{[a_1\langle b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3}\delta_{a_4b_4}\cdot\cdot\delta_{a_{2l-3}b_{2l-3}}\delta_{a_{2l-2}b_{2l-2}}\delta_{a_{2l-1}b_{2l-1}}\delta_{a_{2l}b_{2l}}\delta_{a_{2l+1}]b_{2l+1}\rangle}$

以上写法虽然已经紧凑了些，也是可以一步步严格具体完整写出来，但还是不够简洁，仍无法方便运用，必须想一个更好的写法表示出来，以便使用。

5.2 $w+1$阶全对称张量的展开与缩并

性质5.2.1. $A_{(a_1a_2a_3a_4\cdot\cdot a_{2s})}=A_{a_1(a_2a_3a_4\cdot\cdot a_{2s})}+A_{a_2(a_1a_3a_4\cdot\cdot a_{2s})}+A_{a_3(a_1a_2a_4\cdot\cdot a_{2s})}+\cdot\cdot$

性质5.2.2. $A_{(a_1a_2a_3a_4\cdot\cdot a_{2s})}=\langle A_{(a_1\cdot\cdot a_l)\{a_{l+1}\cdot\cdot a_{2s}\}},\frac{(2s)!}{l!(2s-l)!}\rangle$
$$=\langle A_{(\underbrace{a_1\cdot\cdot a_{l_1}}_{l_1})(\underbrace{a_{l_1+1}\cdot\cdot a_{l_1+l_2}}_{l_2})\cdot\cdot(\underbrace{a_{l_1+\cdot\cdot+l_{n-1}+1}\cdot\cdot a_{l_1+\cdot\cdot+l_n}}_{l_n})},\frac{(2s)!}{l_1!l_2!\cdot\cdot l_n!}\rangle,l_1+l_2+\cdot\cdot+l_n=2s$$

性质5.2.3. $\Gamma^{k_\varsigma}_{A_{1\varsigma}A_{2\varsigma}\cdot\cdot A_{2s\varsigma}}(s;w)\Gamma^{B_{1\varsigma}B_{2\varsigma}\cdot\cdot B_{2s\varsigma}}_{k_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{(2s)!}\delta^{(B_{1\varsigma}}_{A_{1\varsigma}}\delta^{B_{2\varsigma}}_{A_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{B_{2s\varsigma})}_{A_{2s\varsigma}}=\frac{1}{(2s)!}\delta^{B_{1\varsigma}}_{(A_{1\varsigma}}\delta^{B_{2\varsigma}}_{A_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{B_{2s\varsigma}}_{A_{2s\varsigma})}$

性质5.2.4. $\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}=\delta^{b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{(a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}+\delta^{b_1}_{a_2}\delta^{b_2}_{(a_1}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}+\delta^{b_1}_{a_3}\delta^{b_2}_{(a_1}\delta^{b_3}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}+\cdot\cdot$

性质5.2.5. $\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}=(2s+w)\delta^{b_2}_{(a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}$

证明: $\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}$
$=\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{(a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}+\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{b_1}_{a_2}\delta^{b_2}_{(a_1}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}+\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{b_1}_{a_3}\delta^{b_2}_{(a_1}\delta^{b_3}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}+\cdot\cdot$
$=n\delta^{b_2}_{(a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}+\delta^{b_2}_{(a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}+\delta^{b_2}_{(a_3}\delta^{b_3}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}+\cdot\cdot$
$=(2s+w)\delta^{b_2}_{(a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}$ □

性质5.2.6.
$$\begin{cases}\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}=1!C^1_{2s+w}\delta^{b_2}_{(a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})},\quad\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}=2!C^2_{2s+w}\delta^{b_3}_{(a_3}\delta^{b_4}_{a_4}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}\\\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\delta^{a_3}_{b_3}\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}=3!C^3_{2s+w}\delta^{b_4}_{(a_4}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}\cdots\cdots\\\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\cdot\cdot\delta^{a_{2s-1}}_{b_{2s-1}}\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}=(2s-1)!C^{2s-1}_{2s+w}\delta^{b_{2s}}_{a_{2s}},\quad\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\cdot\cdot\delta^{a_{2s}}_{b_{2s}}\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}=(2s)!C^{2s}_{2s+w}\end{cases}$$

性质5.2.7.
$$\begin{cases}\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}\delta^{a_{2s}}_{b_{2s}}=1!C^1_{2s+w}\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_{2s-1}}_{a_{2s-1})},\quad\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}\delta^{a_{2s-1}}_{b_{2s-1}}\delta^{a_{2s}}_{b_{2s}}=2!C^2_{2s+w}\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_{2s-2}}_{a_{2s-2})}\\\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}\delta^{a_{2s-2}}_{b_{2s-2}}\cdot\cdot\delta^{a_{2s}}_{b_{2s}}=3!C^3_{2s+w}\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_{2s-3}}_{a_{2s-3})}\cdots\cdots\\\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}\delta^{a_{2s-1}}_{b_{2s-1}}\cdot\cdot\delta^{a_2}_{b_2}\delta^{a_1}_{b_1}=(2s-1)!C^{2s-1}_{2s+w}\delta^{b_{2s}}_{a_{2s}},\quad\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_{2s}}_{a_{2s})}\delta^{a_{2s}}_{b_{2s}}\cdot\cdot\delta^{a_2}_{b_2}\delta^{a_1}_{b_1}=(2s)!C^{2s}_{2s+w}\end{cases}$$

5.3 N+1=n维时空中反对称张量的展开与缩并

性质5.3.1. $A_{[a_1a_2a_3a_4\cdot\cdot a_n]}=A_{a_1[a_2a_3a_4\cdot\cdot a_n]}-A_{a_2[a_1a_3a_4\cdot\cdot a_n]}+A_{a_3[a_1a_2a_4\cdot\cdot a_n]}+\cdot\cdot$

性质5.3.2. $A_{[a_1a_2a_3a_4\cdot\cdot a_{2s}]}=\langle A_{[a_1\cdot\cdot a_l][a_{l+1}\cdot\cdot a_{2s}]},\frac{(2s)!}{l!(2s-l)!}\rangle$
$$=\langle A_{[\underbrace{a_1\cdot\cdot a_{l_1}}_{l_1}][\underbrace{a_{l_1+1}\cdot\cdot a_{l_1+l_2}}_{l_2}]\cdot\cdot[\underbrace{a_{l_1+\cdot\cdot+l_{n-1}+1}\cdot\cdot a_{l_1+\cdot\cdot+l_n}}_{l_n}]},\frac{(2s)!}{l_1!l_2!\cdot\cdot l_n!}\rangle,l_1+l_2+\cdot\cdot+l_n=2s$$

性质5.3.3. $\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}\varepsilon^{b_1b_2\cdot\cdot b_n}=\delta^{[b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_n]}_{a_n}=\delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}$

性质5.3.4. $\delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}=\delta^{b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{[a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}-\delta^{b_1}_{a_2}\delta^{b_2}_{[a_1}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}+\delta^{b_1}_{a_3}\delta^{b_2}_{[a_1}\delta^{b_3}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}+\cdot\cdot$

性质5.3.5. $\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}=\delta^{b_2}_{[a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}$

证明: $\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}$
$=\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{[a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}-\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{b_1}_{a_2}\delta^{b_2}_{[a_1}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}+\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{b_1}_{a_3}\delta^{b_2}_{[a_1}\delta^{b_3}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}+\cdot\cdot$
$=n\delta^{b_2}_{[a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}-\delta^{b_2}_{[a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}+\delta^{b_2}_{[a_3}\delta^{b_3}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}+\cdot\cdot$
$=\delta^{b_2}_{[a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}$ □

性质5.3.6.
$$\begin{cases}\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}=1!\delta^{b_2}_{[a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]},\quad\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}=2!\delta^{b_3}_{[a_3}\delta^{b_4}_{a_4}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}\\\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\delta^{a_3}_{b_3}\delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}=3!\delta^{b_4}_{[a_4}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}\cdots\cdots\\\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\cdot\cdot\delta^{a_{n-1}}_{b_{n-1}}\delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}=(n-1)!\delta^{b_n}_{a_n},\quad\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\cdot\cdot\delta^{a_n}_{b_n}\delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}=n!\end{cases}$$

性质5.3.7.

$$\begin{cases}\delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}\delta^{a_n}_{b_n}=1!\delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_{n-1}}_{a_{n-1}]},\quad \delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}\delta^{a_{n-1}}_{b_{n-1}}\delta^{a_n}_{b_n}=2!\delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_{n-2}}_{a_{n-2}]}\\ \delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}\delta^{a_{n-2}}_{b_{n-2}}\cdot\cdot\delta^{a_n}_{b_n}=3!\delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_{n-3}}_{a_{n-3}]}\cdots\cdots\\ \delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}\delta^{a_n}_{b_n}\cdot\cdot\delta^{a_2}_{b_2}=(n-1)!\delta^{b_1}_{a_1},\quad \delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\delta^{b_3}_{a_3}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}\delta^{a_n}_{b_n}\cdot\cdot\delta^{a_2}_{b_2}\delta^{a_1}_{b_1}=n!\end{cases}$$

6 N+1=n维时空中的Q积

6.1 N+1=n维时空中Q积的具体计算

定义6.1.1. $K:=(m-\gamma_a\partial^a)\gamma_0,\tilde{K}:=CK^T\bar{C}=-\gamma_0(m+\gamma_a\partial^a),Q:=(m-\gamma_a\partial^a),\tilde{Q}:=(m+\gamma_a\partial^a)$

性质6.1.1. $\Gamma_0Q=\tilde{Q}\Gamma_0,Q\Gamma_0=\Gamma_0\tilde{Q};\Gamma_0Q\Gamma_0=\tilde{Q},\Gamma_0\tilde{Q}\Gamma_0=Q$

性质6.1.2.
$$\begin{cases}\gamma_{a_1}Q\gamma_{a'_1}\tilde{Q}=-\Gamma_0\gamma_{a_1}\tilde{Q}\Gamma_0\gamma_{a'_1}\tilde{Q}=-\gamma_{a_1}\Gamma_0\tilde{Q}\gamma_{a'_1}\Gamma_0\tilde{Q}\\ \gamma_{a_1}Q\gamma_{a'_1}\tilde{Q}=-\gamma_{a_1}Q\Gamma_0\gamma_{a'_1}Q\Gamma_0=\gamma_{a_1}Q\gamma_{a'_1}\Gamma_0Q\Gamma_0\\ \gamma_{a_1}Q\gamma_{a'_1}\tilde{Q}\cdot\cdot\gamma_{a_l}Q\gamma_{a'_l}\tilde{Q}=(-1)^l\gamma_{a_1}\Gamma_0\tilde{Q}\gamma_{a'_1}\Gamma_0\tilde{Q}\cdot\cdot\gamma_{a_l}\Gamma_0\tilde{Q}\gamma_{a'_l}\Gamma_0\tilde{Q}\\ \gamma_{a_1}Q\gamma_{a'_1}\tilde{Q}\cdot\cdot\gamma_{a_l}Q\gamma_{a'_l}\tilde{Q}=(-1)^{l-1}\gamma_{a_1}Q\gamma_{a'_1}\Gamma_0Q\gamma_{a_2}\Gamma_0Q\gamma_{a'_2}\Gamma_0Q\cdot\cdot\gamma_{a_l}\Gamma_0Q\gamma_{a'_l}\Gamma_0Q\Gamma_0\end{cases}$$

性质6.1.3.
$$\begin{cases}tr(\gamma_{a_1}Q\gamma_{a'_1}\tilde{Q})=-tr(\Gamma_0\gamma_{a_1}\tilde{Q}\Gamma_0\gamma_{a'_1}\tilde{Q})=-tr(\gamma_{a_1}\Gamma_0\tilde{Q}\gamma_{a'_1}\Gamma_0\tilde{Q})\\ tr(\gamma_{a_1}Q\gamma_{a'_1}\tilde{Q})=-tr(\Gamma_0\gamma_{a_1}Q\Gamma_0\gamma_{a'_1}Q)=-tr(\gamma_{a_1}\Gamma_0Q\gamma_{a'_1}\Gamma_0Q)\\ tr(\gamma_{a_1}Q\gamma_{a'_1}\tilde{Q}\cdot\cdot\gamma_{a_l}Q\gamma_{a'_l}\tilde{Q})=(-1)^l tr(\gamma_{a_1}\Gamma_0\tilde{Q}\gamma_{a'_1}\Gamma_0\tilde{Q}\cdot\cdot\gamma_{a_l}\Gamma_0\tilde{Q}\gamma_{a'_l}\Gamma_0\tilde{Q})\\ tr(\gamma_{a_1}Q\gamma_{a'_1}\tilde{Q}\cdot\cdot\gamma_{a_l}Q\gamma_{a'_l}\tilde{Q})=(-1)^l tr(\gamma_{a_1}\Gamma_0Q\gamma_{a'_1}\Gamma_0Q\cdot\cdot\gamma_{a_l}\Gamma_0Q\gamma_{a'_l}\Gamma_0Q)\end{cases}$$

性质6.1.4.
$$\begin{cases}tr[\gamma_aQ\gamma_{a'}\tilde{Q}]=8(m^2\delta_{aa'}-\partial_a\partial_{a'})=8m^2(\delta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2})\\ tr[\gamma_a\Gamma_0\tilde{Q}\gamma_{a'}\Gamma_0\tilde{Q}]=-8(m^2\delta_{aa'}-\partial_a\partial_{a'})=-8m^2(\delta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2})\\ tr[\gamma_a\Gamma_0Q\gamma_{a'}\Gamma_0Q]=-8(m^2\delta_{aa'}-\partial_a\partial_{a'})=-8m^2(\delta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2})\end{cases}$$

性质6.1.5.
$$\begin{cases}tr[\gamma_a\tilde{Q}\gamma_{a'}\tilde{Q}]=tr[\gamma_aQ\gamma_{a'}Q]=8\partial_a\partial_{a'}\\ tr[\gamma_a\Gamma_0Q\gamma_{a'}\Gamma_0\tilde{Q}]=tr[\gamma_a\Gamma_0\tilde{Q}\gamma_{a'}\Gamma_0\tilde{Q}]=-8\partial_a\partial_{a'}\end{cases}$$

证明: $tr[\gamma_aQ\gamma_{a'}\tilde{Q}]=tr[\gamma_a(m-\gamma_{a_1}\partial^{a_1})\gamma_{a'}(m+\gamma_{a_2}\partial^{a_2})]$
$=m^2tr(\gamma_a\gamma_{a'})-tr(\gamma_a\gamma_{a_1}\gamma_{a'}\gamma_{a_2})\partial^{a_1}\partial^{a_2}$
$=4m^2\delta_{aa'}-4(\delta_{aa_1}\delta_{a'a_2}-\delta_{aa'}\delta_{a_1a_2}+\delta_{aa_2}\delta_{a_1a'})\partial^{a_1}\partial^{a_2}$
$=4m^2\delta_{aa'}-4(2\partial_a\partial_{a'}-\delta_{aa'}m^2)$
$=8(m^2\delta_{aa'}-\partial_a\partial_{a'})$ □

证明: $tr[\gamma_a\tilde{Q}\gamma_{a'}\tilde{Q}]=tr[\gamma_a(m+\gamma_{a_1}\partial^{a_1})\gamma_{a'}(m+\gamma_{a_2}\partial^{a_2})]$
$=m^2tr(\gamma_a\gamma_{a'})+tr(\gamma_a\gamma_{a_1}\gamma_{a'}\gamma_{a_2})\partial^{a_1}\partial^{a_2}$
$=4m^2\delta_{aa'}+4(\delta_{aa_1}\delta_{a'a_2}-\delta_{aa'}\delta_{a_1a_2}+\delta_{aa_2}\delta_{a_1a'})\partial^{a_1}\partial^{a_2}$
$=4m^2\delta_{aa'}+4(2\partial_a\partial_{a'}-\delta_{aa'}m^2)$
$=8\partial_a\partial_{a'}$ □

证明: $tr[\gamma_aQ\gamma_{a'}Q]=tr[\gamma_a(m-\gamma_{a_1}\partial^{a_1})\gamma_{a'}(m-\gamma_{a_2}\partial^{a_2})]$
$=m^2tr(\gamma_a\gamma_{a'})+tr(\gamma_a\gamma_{a_1}\gamma_{a'}\gamma_{a_2})\partial^{a_1}\partial^{a_2}$
$=4m^2\delta_{aa'}+4(\delta_{aa_1}\delta_{a'a_2}-\delta_{aa'}\delta_{a_1a_2}+\delta_{aa_2}\delta_{a_1a'})\partial^{a_1}\partial^{a_2}$
$=4m^2\delta_{aa'}+4(2\partial_a\partial_{a'}-\delta_{aa'}m^2)$
$=8\partial_a\partial_{a'}$ □

势对易规则可以从场对易规则通过Q积计算得到，原则上可以用来严格证明Behrends-Fronsdal猜想公式，但十分繁琐，难以使用，事实上还是很难证明Behrends-Fronsdal猜想公式。

第十九章　重要组合恒等式及其证明

自我评述：在本章我将梳理各种各样的组合恒等式，并进行了系统的整理和扩充，也给出了系统严格的分析和证明，从而为各种物理应用提供了坚实的数学基础。

1 广义牛顿二项式展开

1.1 牛顿二项式的泰勒展开

推论1.1.1. $(1+x)^\alpha=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_\alpha^k x^k, C_\alpha^k:=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!};\alpha\in C$

证明: $(1+x)^\alpha=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_\alpha^k x^k, C_\alpha^k:=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ □

1.2 $(1+x)^n$导出的组合恒等式

定理1.2.1. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k=0$

证明: $(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k x^k\Rightarrow(1-1)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k=0$ □

推论1.2.1. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-2)^k C_n^k=(-1)^n,\sum\limits_{k=0}^{n}(-3)^k C_n^k=(-2)^n,\sum\limits_{k=0}^{n}(-4)^k C_n^k=(-3)^n$

推论1.2.2. $\sum\limits_{k=0}^{n}2^k C_n^k=3^n,\sum\limits_{k=0}^{n}3^k C_n^k=4^n,\sum\limits_{k=0}^{n}4^k C_n^k=5^n$

定理1.2.2. $\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k}=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4},\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k+1}=(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}$

证明: $(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k x^k\Rightarrow(1+i)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k i^k$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}C_n^{2k}i^{2k}+\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}C_n^{2k+1}i^{2k+1}=(\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k}+i\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k+1}=(\sqrt{2})^n(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k}=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4},\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k+1}=(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}$ □

1.3 互逆组合恒等式及其证明

引理1.3.1. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k C_k^j=(-1)^n{\delta_n}^j$

定理1.3.1. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a_k=b_n\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k b_k=a_n$

证明: $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k b_k$

$=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\sum\limits_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j a_j=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}(-1)^{k+j}C_n^k C_k^j a_j$

$=\sum\limits_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_n^k C_k^j=\sum\limits_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k C_k^j$

$=\sum\limits_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j(-1)^n{\delta_n}^j=a_n$

反之亦然。 □

2 组合函数方法

2.1 组合函数定义

定义2.1.1.

$$\begin{cases}(x)^{(n)} := \prod_{k=0}^{n-1}(x+k) = (x)\cdot\cdot(x+k-1), (x)^{(0)} := 1; n\geq 1\\ (x)_{(n)} := \prod_{k=0}^{n-1}(x-k) = (x)\cdot\cdot(x-k+1), (x)_{(0)} := 1; n\geq 1\end{cases}$$

定义2.1.2. ${}_{(1+p)}F_q\left[{a_0^{(n)},\ a_1^{(n)},\ \cdots,\ a_p^{(n)} \atop b_1^{(n)},\ \cdots,\ b_q^{(n)}}|z\right] := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0^{(n)}a_1^{(n)}\cdot\cdot a_p^{(n)}}{b_1^{(n)}\cdot\cdot b_q^{(n)}}\frac{z^n}{n!}$

2.2 组合函数的基本性质

性质2.2.1.

$1.C_x^n = \frac{(x)_{(n)}}{n!}$

$2.(x)_{(n)} = (-1)^n(-x)^{(n)}$

$3.(x)_{(n-k)} = \frac{(x)_{(n)}}{(x-n+1)^{(k)}}$

$4.(x)^{(n)} = (x+n-1)_{(n)}$

$5.(x)^{(n)} = (x)^{(k)}(x+k)^{(n-k)}$

$6.(x)_{(n)} = (x)_{(k)}(x-k)_{(n-k)}$

$7.n! = (1)^{(n)} = (-1)^n(-1)_{(n)} = (n)_{(n)} = (-1)^{(n)}(-n)^{(n)}$

$8.(n)_m = \frac{n!}{(n-m)!}, (n)^m = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!}$

2.3 一些重要组合函数的性质及其证明

性质2.3.1. $C_{-1}^k = (-1)^k, C_{-1/2}^k = (-4)^{-k}C_{2k}^k, C_0^k = \delta_{0k}; k\geq 0$

性质2.3.2. $\frac{(-1)^k}{k+x}C_n^k = \frac{1}{xC_{n+x}^n}C_{-x}^kC_{n+x}^{n-k}; 0\leq k\leq n$

证明: $\frac{1}{xC_{n+x}^n}C_{-x}^kC_{n+x}^{n-k}$

$= \frac{(-x)(-x-1)\cdot\cdot(-x-k+1)}{k!}\frac{(n+x)(n+x-1)\cdot\cdot(n+x-n+k+1)}{(n-k)!}\frac{n!}{x(n+x)(n+x-1)\cdot\cdot(n+x-n+1)}$

$= \frac{(-1)^k(x+k-1)\cdot\cdot(x+1)x}{k!}\frac{(n+x)(n+x-1)\cdot\cdot(x+k+1)}{(n-k)!}\frac{n!}{x(n+x)(n+x-1)\cdot\cdot(x+1)}$

$= (-1)^k\frac{(n+x)(n+x-1)\cdot\cdot(x+k+1)}{(n-k)!}\frac{(x+k)(x+k-1)\cdot\cdot(x+1)}{(x+k)k!}\frac{n!}{(n+x)(n+x-1)\cdot\cdot(x+1)}$

$= (-1)^k\frac{n!}{(x+k)k!(n-k)!} = \frac{(-1)^k}{k+x}C_n^k$ □

下面利用简洁系统的超几何级数方法证明如下多个性质：

性质2.3.3. $C_n^{2k} = (-1)^kC_{[n/2]}^k\frac{(1/2-[n/2]-\delta_n)^{(k)}}{(1/2)^{(k)}}, \delta_n := n\%2; 0\leq k\leq [n/2]$

证明: $t_0 = C_n^0 = 1$

$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{C_n^{2k+2}}{C_n^{2k}} = \frac{(n)_{(2k+2)}(2k)!}{(n)_{(2k)}(2k+2)!} = \frac{(n-2k)(n-2k-1)}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{(-n/2+k)(1/2-n/2+k)}{(1+k)(1/2+k)}$

$\Rightarrow C_n^{2k} = t_k = \frac{(1/2-n/2)^{(k)}(-n/2)^{(k)}}{(1/2)^{(k)}(1)^{(k)}}t_0 = (-1)^kC_{[n/2]}^k\frac{(1/2-[(n+1)/2])^{(k)}}{(1/2)^{(k)}}$ □

性质2.3.4. $C_n^{2k+1} = (-1)^knC_{[(n-1)/2]}^k\frac{(1/2-[n/2])^{(k)}}{(3/2)^{(k)}}; 0\leq k\leq [(n-1)/2]$

证明: $t_0 = C_n^1 = n$

$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{C_n^{2k+3}}{C_n^{2k+1}} = \frac{(n)_{(2k+3)}(2k+1)!}{(n)_{(2k+1)}(2k+3)!} = \frac{(n-2k-1)(n-2k-2)}{(2k+3)(2k+2)} = \frac{(1/2-n/2+k)(1-n/2+k)}{(3/2+k)(1+k)}$

$\Rightarrow C_n^{2k} = t_k = \frac{(1/2-n/2)^{(k)}(1-n/2)^{(k)}}{(3/2)^{(k)}(1)^{(k)}}t_0 = (-1)^knC_{[(n-1)/2]}^k\frac{(1/2-[n/2])^{(k)}}{(3/2)^{(k)}}$ □

性质2.3.5. $C_{n+k}^{2k} = 4^{-k}C_n^k\frac{(n+1)^{(k)}}{(1/2)^{(k)}}; 0\leq k\leq n$

证明: $t_0 = C_n^0 = 1$

$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{C_{n+k+1}^{2k+2}}{C_{n+k}^{2k}} = \frac{(n+k+1)_{(2k+2)}(2k)!}{(n+k)_{(2k)}(2k+2)!} = \frac{(n+k+1)(n-k)}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{(n+1+k)(-n+k)}{(-4)(1+k)(1/2+k)}$

$\Rightarrow C_{n+k}^{2k} = t_k = \frac{(n+1)^{(k)}(-n)^{(k)}}{(-4)^k(1/2)^{(k)}(1)^{(k)}} t_0 = 4^{-k} C_n^k \frac{(n+1)^{(k)}}{(1/2)^{(k)}}$ □

性质2.3.6. $C_{n+k+1}^{2k+1} = 4^{-k}(n+1)C_n^k \frac{(n+2)^{(k)}}{(3/2)^{(k)}}; 0 \le k \le n$

证明: $t_0 = C_{n+1}^1 = n+1$

$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{C_{n+k+2}^{2k+3}}{C_{n+k+1}^{2k+1}} = \frac{(n+k+2)_{(2k+3)}(2k+1)!}{(n+k+1)_{(2k+1)}(2k+3)!} = \frac{(n+k+2)(n-k)}{(2k+3)(2k+2)} = \frac{(n+2+k)(-n+k)}{(-4)(3/2+k)(1+k)}$

$\Rightarrow C_{n+k+1}^{2k+1} = t_k = \frac{(n+2)^{(k)}(-n)^{(k)}}{(-4)^k(3/2)^{(k)}(1)^{(k)}} t_0 = 4^{-k}(n+1)C_n^k \frac{(n+2)^{(k)}}{(3/2)^{(k)}}$ □

性质2.3.7. $C_{n-k}^k = 4^k C_{[n/2]}^k \frac{(1/2-[n/2]-\delta_n)^{(k)}}{(-n)^{(k)}}; 0 \le k \le [n/2]$

证明: $t_0 = C_n^0 = 1$

$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{C_{n-k-1}^{k+1}}{C_{n-k}^k} = \frac{(n-k-1)_{(k+1)}k!}{(n-k)_{(k)}(k+1)!} = \frac{(n-2k)(n-2k-1)}{(n-k)(k+1)} = \frac{(-4)(-n/2+k)(1/2-n/2+k)}{(-n+k)(1+k)}$

$\Rightarrow C_{n+k}^{2k} = t_k = \frac{(-4)^k(1/2-n/2)^{(k)}(-n/2)^{(k)}}{(-n)^{(k)}(1)^{(k)}} t_0 = 4^k C_{[n/2]}^k \frac{(1/2-[n/2]-\delta_n)^{(k)}}{(-n)^{(k)}}$ □

证明: $t_0 = C_{2n}^n$

$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{C_{2n-2k-2}^n}{C_{2n-2k}^n} = \frac{(2n-2k-2)_{(n)}}{(2n-2k)_{(n)}} = \frac{(n-2k)(n-2k-1)}{(2n-2k)(2n-2k-1)} = \frac{(-n/2+k)(1/2-n/2+k)}{(-n+k)(1/2-n+k)}$

$\Rightarrow C_{2n-2k}^n = t_k = \frac{(1/2-n/2)^{(k)}(-n/2)^{(k)}}{(1/2-n)^{(k)}(-n)^{(k)}} t_0 = \frac{(1/2-[n/2]-\delta_n)^{(k)}}{(1/2-n)^{(k)}} \frac{([n/2])_{(k)}}{(n)_{(k)}} C_{2n}^n$ □

2.4 重要组合函数公式汇总

性质2.4.1. $C_{-n-1/2}^k = \frac{(-n-1/2)(-n-3/2)\cdots(-n+1/2-k)}{k!} = (-4)^{-k} \frac{C_{2n+2k}^{n+k} C_{n+k}^k}{C_{2n}^n}; k \ge 0, n \ge 0$

性质2.4.2. $C_{-n-1}^k = \frac{(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-k)}{k!} = (-1)^k C_{n+k}^k; k \ge 0, n \ge 0$

性质2.4.3. $\begin{cases} C_{n-1/2}^k = \frac{(n-1/2)(n-3/2)\cdots(n+1/2-k)}{k!} = 4^{-k} \frac{C_{2n}^n C_n^k}{C_{2n-2k}^{n-k}}, C_{n-1/2}^n = 4^{-n} C_{2n}^n; 0 \le k \le n, n \ge 1 \\ C_{n-1/2}^k = \frac{(n-1/2)\cdots(1/2)(-1/2)\cdots(n+1/2-k)}{k!} = (-1)^{k-n} 4^{-k} C_{2n}^n C_{2k-2n}^{k-n} C_k^n; k \ge n, n \ge 1 \end{cases}$

性质2.4.4. $C_{n-1/2}^k = 4^{-k} C_{2n}^n \{ \frac{C_n^k}{C_{2n-2k}^{n-k}} u(n-k) + (-1)^{k-n} C_{2k-2n}^{k-n} C_k^n [1-u(n-k)] \}; n \ge 1, k \ge 0$

性质2.4.5. $C_{-1}^k = (-1)^k, C_{-1/2}^k = (-4)^{-k} C_{2k}^k, C_0^k = \delta_{0k}; k \ge 0$

性质2.4.6. $C_n^k = (-1)^k \frac{x+k}{x C_{x+n}^n} C_{-x}^k C_{n+x}^{n-k}; 0 \le k \le n$

性质2.4.7. $C_n^{2k} = (-1)^k C_{[n/2]}^k \frac{(1/2-[(n+1)/2])^{(k)}}{(1/2)^{(k)}}; 0 \le k \le [n/2]$

性质2.4.8. $C_n^{2k+1} = (-1)^k n C_{[(n-1)/2]}^k \frac{(1/2-[n/2])^{(k)}}{(3/2)^{(k)}}; 0 \le k \le [(n-1)/2]$

性质2.4.9. $C_{n+k}^{2k} = 4^{-k} C_n^k \frac{(n+1)^{(k)}}{(1/2)^{(k)}}; 0 \le k \le n$

性质2.4.10. $C_{n+k}^{2k+1} = 4^{-k} n C_{n-1}^k \frac{(n+1)^{(k)}}{(3/2)^{(k)}}; 0 \le k \le n$

性质2.4.11. $C_{n-k}^k = 4^k C_{[n/2]}^k \frac{(1/2-[n/2]-\delta_n)^{(k)}}{(-n)^{(k)}}; 0 \le k \le [n/2]$

性质2.4.12. $C_{n+k}^k = (-1)^k C_{-n-1}^k; k \ge 0, n \ge 0$

3 范德蒙卷积恒等式

3.1 一般范德蒙卷积恒等式

定理3.1.1. $\sum_{i=0}^{k} C_\alpha^i C_\beta^{k-i} = C_{\alpha+\beta}^k; k \geq 0$

证明: $(1+x)^{\alpha+\beta} = (1+x)^\alpha (1+x)^\beta$
$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} C_{\alpha+\beta}^k x^k = \sum_{i=0}^{\infty} C_\alpha^i x^i \sum_{j=0}^{\infty} C_\beta^j x^j$
$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} C_{\alpha+\beta}^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} C_\alpha^i C_\beta^{k-i} x^k$
$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} C_\alpha^i C_\beta^{k-i} = C_{\alpha+\beta}^k$ □

3.2 范德蒙卷积恒等式的组合函数形式

引理3.2.1. $\sum_{k=0}^{n} C_x^k C_y^{n-k} = C_{x+y}^n \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}} = \frac{(y-x)^{(n)}}{(y)^{(n)}}$

证明: $\sum_{k=0}^{n} C_x^k C_y^{n-k} = C_{x+y}^n$
$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x)_{(k)} (y)_{(n-k)} = (x+y)_{(n)}$
$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x)_{(k)} \frac{(y)_{(n)}}{(y-n+1)^{(k)}} = (x+y)_{(n)}$
(变量代换；$x \to -x, y \to y+n-1)$
$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-x)_{(k)} \frac{(y+n-1)_{(n)}}{(y)^{(k)}} = (y-x+n-1)_{(n)}$
$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{(x)^{(k)}(y)^{(n)}}{(y)^{(k)}} = (y-x)^{(n)}$
$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}} = \frac{(y-x)^{(n)}}{(y)^{(n)}}$ □

推论3.2.1.
$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}} = \frac{(y-x)^{(n)}}{(y)^{(n)}}, \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(x)_{(k)}}{(y)^{(k)}} = (-1)^n \frac{(-x-y)_{(n)}}{(y)^{(n)}} \\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \frac{(x)_{(k)}}{(y)_{(k)}} = \frac{(y-x)_{(n)}}{(y)_{(n)}}, \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(x)^{(k)}}{(y)_{(k)}} = (-1)^n \frac{(-x-y)^{(n)}}{(y)_{(n)}} \end{cases}$$

3.3 $(\pm m, \pm n)$型范德蒙恒等式

3.3.1 (m,n)型范德蒙恒等式

定理3.3.1. $\sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i} = C_{m+n}^k; m,n,k \geq 0$

3.3.2 $(-m-1,-n-1)$型范德蒙恒等式

推论3.3.1. $\sum_{i=0}^{k} C_{-m-1}^i C_{-n-1}^{k-i} = C_{-m-n-2}^k [\Leftrightarrow] \sum_{i=0}^{k} C_{m+i}^i C_{n+k-i}^{k-i} = C_{m+n+1+k}^k; m,n,k \geq 0$

3.3.3 $(-m-1,n)$型范德蒙恒等式

推论3.3.2. $\sum_{i=0}^{k} C_{-m-1}^i C_n^{k-i} = C_{n-m-1}^k [\Leftrightarrow] \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_{m+i}^i C_n^{k-i} = C_{n-m-1}^k; n > m \geq 0, k \geq 0$

推论3.3.3. $\sum_{i=0}^{k} C_{-m-1}^i C_n^{k-i} = C_{n-m-1}^k [\Leftrightarrow] \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_{m+i}^i C_n^{k-i} = (-1)^k C_{m-n+k}^k; m \geq n \geq 0, k \geq 0$

3.3.4 推论

推论3.3.4. $\sum_{h'=n'}^{-n'} C_{n+h}^{n'+h'} C_{n-h}^{n'-h'} = C_{2n}^{2n'}; n \geq n' \geq 0$

推论3.3.5. $\sum_{h'=n'}^{-n'} C_{n+h'+h}^{n'+h'} C_{n-h'-h}^{n'-h'} = \sum_{h'=n'}^{-n'} C_{n+h'+h}^{n-n'+h} C_{n-h'-h}^{n-n'-h} = C_{2n+1}^{2n'}; n'-n \leq h \leq n-n', n \geq n'$

推论3.3.6. $\sum_{h'=s'}^{-s'} C_{s+h'+h}^{s'+h'} C_{s-h'-h}^{s'-h'} = \sum_{h'=s'}^{-s'} C_{s+h'+h}^{s-s'+h} C_{s-h'-h}^{s-s'-h} = C_{2s+1}^{2s'}; s'-s \leq h \leq s-s', s \geq s'$

推论3.3.7. $\sum_{h'=s'}^{-s'} C_{s+h'}^{s'+h'} C_{s-h'}^{s'-h'} = C_{2s+1}^{2s'}$

推论3.3.8.

$$\sum_{h'=s}^{-s} C_{s+h'}^{s+h'} C_{s-h'}^{s-h'} = C_{2s+1}^{2s} [\Leftrightarrow] \sum_{h'=s}^{-s} C_{s+h'}^{0} C_{s-h'}^{0} = C_{2s+1}^{1} [\Leftrightarrow] \sum_{k=0}^{2s} C_{k}^{0} C_{2s-k}^{0} = C_{2s+1}^{1}$$

$$\sum_{h'=s-1}^{1-s} C_{s+h'}^{s-1+h'} C_{s-h'}^{s-1-h'} = C_{2s+1}^{2s-2} [\Leftrightarrow] \sum_{h'=s-1}^{1-s} C_{s+h'}^{1} C_{s-h'}^{1} = C_{2s+1}^{3} [\Leftrightarrow] \sum_{k=1}^{2s-1} C_{k}^{1} C_{2s-k}^{1} = C_{2s+1}^{3}$$

$$\sum_{h'=s-2}^{2-s} C_{s+h'}^{s-2+h'} C_{s-h'}^{s-2-h'} = C_{2s+1}^{2s-4} [\Leftrightarrow] \sum_{h'=s-2}^{2-s} C_{s+h'}^{2} C_{s-h'}^{2} = C_{2s+1}^{5} [\Leftrightarrow] \sum_{k=2}^{2s-2} C_{k}^{2} C_{2s-k}^{2} = C_{2s+1}^{5}$$

$$\cdots$$

$$\sum_{h'=s-l}^{l-s} C_{s+h'}^{s-l+h'} C_{s-h'}^{s-l-h'} = C_{2s+1}^{2s-2l} [\Leftrightarrow] \sum_{h'=s-l}^{l-s} C_{s+h'}^{l} C_{s-h'}^{l} = C_{2s+1}^{2l+1} [\Leftrightarrow] \sum_{k=l}^{2s-l} C_{k}^{l} C_{2s-k}^{l} = C_{2s+1}^{2l+1}$$

推论3.3.9. $\sum_{a+b=n} C_a^c C_b^d = C_{n+1}^{c+d+1} \Rightarrow \sum_{k=l}^{n-l} C_k^l C_{n-k}^l = C_{n+1}^{2l+1}$

推论3.3.10.

$$\begin{cases} C_{n+h}^2 + C_{n+h-1}^1 C_{n-h+1}^1 + C_{n-h+2}^2 = \sum_{h'=1}^{-1} C_{(n+h')+(h-1)}^{1+h'} C_{(n-h')-(h-1)}^{1-h'} = C_{2n+1}^2 \\ C_{n+h}^{2n'} C_{n-h}^0 + C_{n+h-1}^{2n'-1} C_{n-h+1}^1 + C_{n+h-2}^{2n'-2} C_{n-h+2}^2 + \cdots + C_{n+h-2n'}^0 C_{n-h+2n'}^{2n'} = \sum_{h'=n'}^{-n'} C_{(n+h')+(h-n')}^{n'+h'} C_{(n-h')-(h-n')}^{n'-h'} = C_{2n+1}^{2n'} \end{cases}$$

推论3.3.11.

$$\begin{cases} \sum_{h'=1}^{-1} C_{(n+h')+h}^{1+h'} C_{(n-h')-h}^{1-h'} = C_{2n+1}^2, \sum_{h'=2}^{-2} C_{(n+h')+h}^{2+h'} C_{(n-h')-h}^{2-h'} = C_{2n+1}^4, \sum_{h'=n'}^{-n'} C_{(n+h')+h}^{n'+h'} C_{(n-h')-h}^{n'-h'} = C_{2n+1}^{2n'} \\ \sum_{h'=1}^{-1} C_{(n-h')+h}^{1-h'} C_{(n+h')-h}^{1+h'} = C_{2n+1}^2, \sum_{h'=2}^{-2} C_{(n-h')+h}^{2-h'} C_{(n+h')-h}^{2+h'} = C_{2n+1}^4, \sum_{h'=n'}^{-n'} C_{(n-h')+h}^{n'-h'} C_{(n+h')-h}^{n'+h'} = C_{2n+1}^{2n'} \end{cases}$$

3.4 $(\pm m-1/2, \pm n-1/2)$型范德蒙恒等式

3.4.1 $(-m-1/2, -n-1/2)$型范德蒙恒等式导出的多种组合恒等式

范德蒙卷积恒等式:

定理3.4.1. $\sum_{i=0}^{k} C_{-m-1/2}^{i} C_{-n-1/2}^{k-i} = C_{-m-n-1}^{k} [\Leftrightarrow] \sum_{i=0}^{k} C_{2m+2i}^{m+i} C_{2n+2k-2i}^{n+k-i} C_{m+i}^{i} C_{n+k-i}^{k-i} = 4^k C_{2m}^{m} C_{2n}^{n} C_{m+n+k}^{k}; m, n, k \geq 0$

推论3.4.1. $m, n, k \geq 0$

$$\sum_{i=0}^{k} C_{2m+2i}^{m+i} C_{2n+2k-2i}^{n+k-i} C_{m+i}^{i} C_{n+k-i}^{k-i} = 4^k C_{2m}^{m} C_{2n}^{n} C_{m+n+k}^{k} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} \frac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!} \frac{(2n+2k-2i)!}{(n+k-i)!(k-i)!} = 4^k \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!} C_{m+n+k}^{k}$$

定理3.4.2. $m \geq 0, n \geq 0, k \geq 0$

$$\sum_{i=0}^{k} C_{2m+2i}^{m+i} C_{2n+2k-2i}^{n+k-i} C_{m+i}^{m} C_{n+k-i}^{n} = 4^k C_{2m}^{m} C_{2n}^{n} C_{m+n+k}^{m+n} [\Leftrightarrow] \sum_{i=0}^{k} \frac{C_k^i C_{m+n+k}^{m+i}}{C_{2m+2n+2k}^{2m+2i}} = \frac{C_{2m}^{m} C_{2n}^{n}}{C_{m+n}^{m}} \frac{4^k}{C_{2m+2n+2k}^{m+n+k}}$$

范德蒙卷积恒等式导出的一系列推论:

推论3.4.2. $m, n, k \geq 0$

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!} \frac{(2n+2k-2i)!}{(n+k-i)!(k-i)!} = 4^k \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!} C_{m+n+k}^{k} \Rightarrow \sum_{i=0}^{k} \frac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!} \frac{(2m+2k-2i)!}{(m+k-i)!(k-i)!} = 4^k (2m)! C_{2m}^{m} C_{2m+k}^{k}$$

推论3.4.3. $m,n,k\ge 0$

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!}\frac{(2n+2k-2i)!}{(n+k-i)!(k-i)!}=4^k\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!}C_{m+n+k}^{k}\Rightarrow\sum_{i=0}^{k}\frac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!}\frac{(2k-2i)!}{(k-i)!(k-i)!}=4^k\frac{(2m)!}{m!}C_{m+k}^{k}$$

推论3.4.4. $m,n,k\ge 0$

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!}\frac{(2n+2k-2i)!}{(n+k-i)!(k-i)!}=4^k\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!}C_{m+n+k}^{k}\Rightarrow\sum_{i=0}^{k}\frac{(2i)!}{i!i!}\frac{(2n+2k-2i)!}{(n+k-i)!(k-i)!}=4^k\frac{(2n)!}{n!}C_{n+k}^{k}$$

推论3.4.5. $m,n,k\ge 0$

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!}\frac{(2n+2k-2i)!}{(n+k-i)!(k-i)!}=4^k\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!}C_{m+n+k}^{k}\Rightarrow\sum_{i=0}^{k}\frac{(2i)!}{i!i!}\frac{(2k-2i)!}{(k-i)!(k-i)!}=4^k$$

推论3.4.6. $m,n,k\ge 0$

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!}\frac{(2n+2k-2i)!}{(n+k-i)!(k-i)!}=4^k\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!}C_{m+n+k}^{k}\Rightarrow\sum_{i=0}^{k}\frac{(2i+1)!}{i!i!}\frac{(2k-2i+1)!}{(k-i)!(k-i)!}=4^kC_{k+2}^{2}$$

3.4.2 $(m-1/2,n-1/2)$型范德蒙恒等式(复杂略去)

定理3.4.3. $\sum\limits_{i=0}^{k}C_{m-1/2}^{i}C_{n-1/2}^{k-i}=C_{m+n-1}^{k}[\Leftrightarrow]???;m\ge 1,n\ge 1,k\ge 0$

3.4.3 $(-m-1/2,n-1/2)$型范德蒙恒等式(复杂略去)

定理3.4.4. $\sum\limits_{i=0}^{k}C_{-m-1/2}^{i}C_{n-1/2}^{k-i}=C_{n-m-1}^{k}[\Leftrightarrow]???;m\ge 1,n\ge 1,k\ge 0$

3.5 $(\pm m-1/2,\pm n)$型范德蒙恒等式

3.5.1 $(-m-1/2,-n-1)$型范德蒙恒等式

定理3.5.1. $\sum\limits_{i=0}^{k}C_{-m-1/2}^{i}C_{-n-1}^{k-i}=C_{-m-n-3/2}^{k}[\Leftrightarrow]\sum\limits_{i=0}^{k}4^{k-i}C_{2m+2i}^{m+i}C_{m+i}^{i}C_{n+k-i}^{k-i}=\frac{C_{2m}^{m}C_{2m+2n+2+2k}^{m+n+1+k}C_{m+n+1+k}^{k}}{C_{2m+2n+2}^{m+n+1}};m,n,k\ge 0$

3.5.2 $(-m-1/2,n)$型范德蒙恒等式

定理3.5.2. $\sum\limits_{i=0}^{k}C_{-m-1/2}^{i}C_{n}^{k-i}=C_{n-m-1/2}^{k}[\Leftrightarrow]\sum\limits_{i=0}^{k}(-4)^{k-i}C_{2m+2i}^{m+i}C_{m+i}^{i}C_{n}^{k-i}=\frac{C_{2m}^{m}C_{2m-2n+2k}^{m-n+k}C_{m-n+k}^{k}}{C_{2m-2n}^{m-n}};m\ge n\ge 0,k\ge 0$

3.5.3 $(m-1/2,n)$型范德蒙恒等式(复杂略去)

定理3.5.3. $\sum\limits_{i=0}^{k}C_{m-1/2}^{i}C_{n}^{k-i}=C_{m+n-1/2}^{k}[\Leftrightarrow]???;m\ge 1,n\ge 0,k\ge 0$

4 三阶范德蒙卷积恒等式

4.1 一般三阶范德蒙卷积恒等式

定理4.1.1. $\sum\limits_{i+j+k=r}C_{\alpha}^{i}C_{\beta}^{j}C_{\gamma}^{k}=C_{\alpha+\beta+\gamma}^{r};k\ge 0$

证明: $(1+x)^{\alpha+\beta+\gamma}=(1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(1+x)^{\gamma}$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{r=0}^{\infty}C_{\alpha+\beta+\gamma}^{r}x^r=\sum\limits_{i=0}^{\infty}C_{\alpha}^{i}x^i\sum\limits_{j=0}^{\infty}C_{\beta}^{j}x^j\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{\gamma}^{k}x^k$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{r=0}^{\infty}C_{\alpha+\beta+\gamma}^{r}x^r=\sum\limits_{r=0}^{\infty}\sum\limits_{i+j+k=r}C_{\alpha}^{i}C_{\beta}^{j}C_{\gamma}^{k}x^r$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{i+j+k=r}C_{\alpha}^{i}C_{\beta}^{j}C_{\gamma}^{k}=C_{\alpha+\beta+\gamma}^{r}$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{i=0}^{r}\sum\limits_{j=0}^{r-i}C_{\alpha}^{i}C_{\beta}^{j}C_{\gamma}^{r-i-j}=C_{\alpha+\beta+\gamma}^{r}$ □

4.2 三阶范德蒙卷积恒等式的组合函数形式

定理4.2.1. $\sum\limits_{i=0}^{n-j}\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{i+j}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\frac{(x)^{(i)}(y)^{(j)}}{(z)^{(i+j)}}=\frac{(z-x-y)^{(n)}}{(z)^{(n)}}$

证明: $\sum\limits_{i+j+k=n} C_x^i C_y^j C_z^k = \sum\limits_{i=0}^{n-j}\sum\limits_{j=0}^{n} C_x^i C_y^j C_z^{n-i-j} = C_{x+y+z}^n$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{n-j}\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}(x)_{(i)}(y)_{(j)}(z)_{(n-i-j)} = (x+y+z)_{(n)}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{n-j}\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}(x)_{(i)}(y)_{(j)}\frac{(z)_{(n)}}{(z-n+1)^{(i+j)}} = (x+y+z)_{(n)}$

(变量代换；$x \to -x, y \to y+n-1$)

$\Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{n-j}\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}(-x)_{(i)}(-y)_{(j)}\frac{(z+n-1)_{(n)}}{(z)^{(i+j)}} = (z-x-y+n-1)_{(n)}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{n-j}\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{i+j} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\frac{(x)^{(i)}(y)^{(j)}(z)^{(n)}}{(z)^{(i+j)}} = (z-x-y)^{(n)}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{n-j}\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{i+j} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\frac{(x)^{(i)}(y)^{(j)}}{(z)^{(i+j)}} = \frac{(z-x-y)^{(n)}}{(z)^{(n)}}$ □

推论4.2.1.

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{n-j}\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{i+j} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\frac{(x)^{(i)}(y)^{(j)}}{(z)^{(i+j)}} = \frac{(z-x-y)^{(n)}}{(z)^{(n)}}, \sum\limits_{i=0}^{n-j}\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\frac{(x)_{(i)}(y)_{(j)}}{(z)^{(i+j)}} = \frac{(-z-x-y)_{(n)}}{(z)^{(n)}} \\ \sum\limits_{i=0}^{n-j}\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{i+j} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\frac{(x)_{(i)}(y)_{(j)}}{(z)_{(i+j)}} = \frac{(z-x-y)_{(n)}}{(z)_{(n)}}, \sum\limits_{i=0}^{n-j}\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\frac{(x)^{(i)}(y)^{(j)}}{(z)_{(i+j)}} = \frac{(-z-x-y)^{(n)}}{(z)_{(n)}}\end{cases}$$

5 p阶范德蒙卷积恒等式

5.1 一般p阶范德蒙卷积恒等式

定理5.1.1. $\sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=r} C_{\alpha_1}^{k_1}\cdot\cdot C_{\alpha_p}^{k_p} = C_{\alpha_1+\cdot\cdot+\alpha_p}^r; k \ge 0$

证明: $(1+x)^{\alpha_1+\cdot\cdot+\alpha_p} = (1+x)^{\alpha_1}\cdot\cdot(1+x)^{\alpha_p}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{r=0}^{\infty} C_{\alpha_1+\cdot\cdot+\alpha_p}^r x^r = \sum\limits_{k_1=0}^{\infty} C_{\alpha_1}^{k_1}x^{k_1}\cdot\cdot\sum\limits_{k_p=0}^{\infty} C_{\alpha_p}^{k_p}x^{k_p}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{r=0}^{\infty} C_{\alpha_1+\cdot\cdot+\alpha_p}^r x^r = \sum\limits_{r=0}^{\infty}\sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=r} C_{\alpha_1}^{k_1}\cdot\cdot C_{\alpha_p}^{k_p}x^r$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=r} C_{\alpha_1}^{k_1}\cdot\cdot C_{\alpha_p}^{k_p} = C_{\alpha_1+\cdot\cdot+\alpha_p}^r$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k_1=0}^{r-k_2\cdot\cdot-k_p}\cdot\cdot\sum\limits_{k_{p-1}=0}^{r-k_p}\sum\limits_{k_p=0}^{r} C_{\alpha_1}^{k_1}\cdot\cdot C_{\alpha_p}^{k_p} = C_{\alpha_1+\cdot\cdot+\alpha_p}^r$ □

5.2 p阶范德蒙卷积恒等式的组合函数形式

定理5.2.1. $\sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n}(-1)^{n-k_1}\frac{n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!}\frac{(x_2)^{(k_2)}\cdot\cdot(x_p)^{(k_p)}}{(x_1)^{(n-k_1)}} = \frac{(x_1-x_2\cdot\cdot-x_p)^{(n)}}{(x_1)^{(n)}}$

证明: $\sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n} C_{x_1}^{k_1}\cdot\cdot C_{x_p}^{k_p} = C_{x_1+\cdot\cdot+x_p}^r$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n}\frac{n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!}(x_1)_{(k_1)}\cdot\cdot(x_p)_{(k_p)} = (x_1+\cdot\cdot+x_p)_{(n)}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n}\frac{n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!}(x_2)_{(k_2)}\cdot\cdot(x_p)_{(k_p)}\frac{(x_1)_{(n)}}{(x_1-n+1)^{(n-k_1)}} = (x_1+\cdot\cdot+x_p)_{(n)}$

(变量代换；$x_2 \to -x_2, \cdot\cdot, x_p \to -x_p, x_1 \to x_1+n-1$)

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n}\frac{n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!}(-x_2)_{(k_2)}\cdot\cdot(-x_p)_{(k_p)}\frac{(x_1+n-1)_{(n)}}{(x_1)^{(n-k_1)}} = (x_1-x_2\cdot\cdot-x_p+n-1)_{(n)}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n}(-1)^{n-k_1}\frac{n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!}(x_2)^{(k_2)}\cdot\cdot(x_p)^{(k_p)}\frac{(x_1)^{(n)}}{(x_1)^{(n-k_1)}} = (x_1-x_2\cdot\cdot-x_p)^{(n)}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n}(-1)^{n-k_1}\frac{n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!}\frac{(x_2)^{(k_2)}\cdot\cdot(x_p)^{(k_p)}}{(x_1)^{(n-k_1)}} = \frac{(x_1-x_2\cdot\cdot-x_p)^{(n)}}{(x_1)^{(n)}}$ □

推论5.2.1.

$$\begin{cases}\sum\limits_{k_1+\cdots+k_p=n}(-1)^{n-k_1}\frac{n!}{k_1!\cdots k_p!}\frac{(x_2)^{(k_2)}\cdots(x_p)^{(k_p)}}{(x_1)^{(n-k_1)}}=\frac{(x_1-x_2\cdots-x_p)^{(n)}}{(x_1)^{(n)}},\sum\limits_{k_1+\cdots+k_p=n}(-1)^{n}\frac{n!}{k_1!\cdots k_p!}\frac{(x_2)_{(k_2)}\cdots(x_p)_{(k_p)}}{(x_1)^{(n-k_1)}}=\frac{(-x_1-x_2\cdots-x_p)_{(n)}}{(x_1)^{(n)}}\\ \sum\limits_{k_1+\cdots+k_p=n}(-1)^{n-k_1}\frac{n!}{k_1!\cdots k_p!}\frac{(x_2)_{(k_2)}\cdots(x_p)_{(k_p)}}{(x_1)_{(n-k_1)}}=\frac{(x_1-x_2\cdots-x_p)_{(n)}}{(x_1)_{(n)}},\sum\limits_{k_1+\cdots+k_p=n}(-1)^{n}\frac{n!}{k_1!\cdots k_p!}\frac{(x_2)^{(k_2)}\cdots(x_p)^{(k_p)}}{(x_1)_{(n-k_1)}}=\frac{(-x_1-x_2\cdots-x_p)^{(n)}}{(x_1)_{(n)}}\end{cases}$$

6 推广的范德蒙卷积恒等式

6.1 二项式添项展开

推论6.1.1. $(1+x)^{\alpha-l}=\sum\limits_{k=l}^{\infty}\frac{C_k^l}{C_\alpha^l}C_\alpha^k x^{k-l},(1+x)^\alpha=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{C_{l+k}^l}{C_{l+\alpha}^l}C_{l+\alpha}^{l+k}x^k$

证明: $C_\alpha^l(1+x)^{\alpha-l}=\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}(1+x)^\alpha=\sum\limits_{k=l}^{\infty}C_\alpha^k C_k^l x^{k-l}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_\alpha^{l+k}C_{l+k}^l x^k$ □

推论6.1.2. $(1+x)^{\alpha-l_1-l_2}=\sum\limits_{k=l_1+l_2}^{\infty}\frac{C_k^{l_1}C_{k-l_1}^{l_2}}{C_\alpha^{l_1}C_{\alpha-l_1}^{l_2}}C_\alpha^k x^{k-l_1-l_2},(1+x)^{\alpha-l_1\cdots-l_m}=\sum\limits_{k=l_1+\cdots+l_m}^{\infty}\frac{C_k^{l_1}\cdots C_{k-l_1\cdots-l_{m-1}}^{l_m}}{C_\alpha^{l_1}\cdots C_{\alpha-l_1\cdots-l_{m-1}}^{l_m}}C_\alpha^k x^{k-l_1\cdots-l_m}$

推论6.1.3. $(1+x)^{\alpha-l}=\sum\limits_{k=l}^{\infty}C(k)C_\alpha^k x^{k-l},C(\alpha,k,\vec{l}):=\frac{C_k^{l_1}\cdots C_{k-l_1\cdots-l_{m-1}}^{l_m}}{C_\alpha^{l_1}\cdots C_{\alpha-l_1\cdots-l_{m-1}}^{l_m}},l=\sum\limits_{i=1}^{m}l_i,\vec{l}:=(l_1,\cdots,l_m);l_1,\cdots,l_m\geq 0$

推论6.1.4. $C(\alpha,k,\vec{0})=0$

推论6.1.5. $(1+x)^{\alpha-l}=\sum\limits_{k=l}^{\infty}\frac{C_k^l}{C_\alpha^l}C_\alpha^k x^{k-l}|_{x=-1}\Rightarrow\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_\alpha^k C_k^l=(-1)^l\delta_{\alpha l};\alpha\geq l$

推论6.1.6. $(1+x)^{\alpha-l}=\sum\limits_{k=l}^{\infty}\frac{C_k^l}{C_\alpha^l}C_\alpha^k x^{k-l}|_{x=1}\Rightarrow\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_\alpha^k C_k^l=2^{\alpha-l}C_\alpha^l;(\alpha\geq l)|(\alpha<0)|(0<\alpha<l,\alpha\notin N)$

6.2 二项式更一般添项展开

推论6.2.1. $(1+x)^{\alpha-l}=\sum\limits_{k=l}^{\infty}\frac{C_k^l}{C_\alpha^l}C_\alpha^k x^{k-l},(1+x)^\alpha=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{C_{l+k}^l}{C_{l+\alpha}^l}C_{l+\alpha}^{l+k}x^k$

证明: $\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}[x^\beta(1+x)^\alpha]=\sum\limits_{k=l}^{\infty}C_\alpha^k C_{\beta+k}^l x^{\beta+k-l}$

$=\frac{1}{l!}\sum\limits_{m=0}^{l}C_l^m[\frac{d^m}{dx^m}(1+x)^\alpha][\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}x^\beta]$

$=\frac{1}{l!}\sum\limits_{m=0}^{l}C_l^m(\alpha)_{(m)}(1+x)^{\alpha-m}(\beta)_{(l-m)}x^{\beta-l+m}$

$=\sum\limits_{m=0}^{l}C_\alpha^m C_\beta^{l-m}x^{\beta-l+m}(1+x)^{\alpha-m}$

$\Rightarrow\sum\limits_{k=l}^{\infty}C_\alpha^k C_{\beta+k}^l=\sum\limits_{m=0}^{l}2^{\alpha-m}C_\alpha^m C_\beta^{l-m}$ □

6.3 推广的范德蒙卷积恒等式

定理6.3.1. $\sum\limits_{i=l_1}^{l_1+k}C_{\alpha_1}^i C_{\alpha_2}^{k+l_1+l_2-i}C(\alpha_1,i,\vec{l_1})C(\alpha_2,k+l_1+l_2-i,\vec{l_2})=C_{\alpha_1+\alpha_2-l_1-l_2}^k;k\geq 0$

证明: $(1+x)^{\alpha_1+\alpha_2-l_1-l_2}=(1+x)^{\alpha_1-l_1}(1+x)^{\alpha_2-l_2}$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{\alpha_1+\alpha_2-l_1-l_2}^k x^k=\sum\limits_{i=l_1}^{\infty}C(\alpha_1,i,\vec{l_1})C_{\alpha_1}^i x^{i-l_1}\sum\limits_{j=l_2}^{\infty}C(\alpha_2,j,\vec{l_2})C_{\alpha_2}^j x^{j-l_2}$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{\alpha_1+\alpha_2-l_1-l_2}^k x^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{i=l_1}^{l_1+k}C(\alpha_1,i,\vec{l_1})C_{\alpha_1}^i x^{i-l_1}C(\alpha_2,k+l_1+l_2-i,\vec{l_2})C_{\alpha_2}^{k+l_1+l_2-i}x^{k+l_1+l_2-i-l_2}$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{\alpha_1+\alpha_2-l_1-l_2}^k x^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{i=l_1}^{l_1+k}C_{\alpha_1}^i C_{\alpha_2}^{k+l_1+l_2-i}C(\alpha_1,i,\vec{l_1})C(\alpha_2,k+l_1+l_2-i,\vec{l_2})x^k$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{i=l_1}^{l_1+k}C_{\alpha_1}^i C_{\alpha_2}^{k+l_1+l_2-i}C(\alpha_1,i,\vec{l_1})C(\alpha_2,k+l_1+l_2-i,\vec{l_2})=C_{\alpha_1+\alpha_2-l_1-l_2}^k$ □

推论6.3.1. $\sum\limits_{i=l_1}^{l_1+k}C_{\alpha_1}^i C_{\alpha_2}^{k+l_1-i}C(\alpha_1,i,\vec{l_1})=C_{\alpha_1+\alpha_2-l_1}^k,\sum\limits_{i=0}^{k}C_{\alpha_1}^i C_{\alpha_2}^{k-i}=C_{\alpha_1+\alpha_2}^k;k\geq 0$

6.4 $(1,1)$推广的范德蒙卷积恒等式

引理6.4.1. $(1+x)^\alpha=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{C_{i+l}^{l}}{C_{\alpha+l}^{l}}C_{\alpha+l}^{i+l}x^i,(1+x)^\beta=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{C_{j+r}^{r}}{C_{\beta+r}^{r}}C_{\beta+r}^{j+r}x^j$

定理6.4.1. $\sum\limits_{i=0}^{k}C_{\alpha+l}^{i+l}C_{\beta+r}^{k-i+r}(C_{i+l}^{l}C_{k-i+r}^{r})=C_{\alpha+\beta}^{k}(C_{\alpha+l}^{l}C_{\beta+r}^{r});k,l,m\ge 0$

证明: $(1+x)^{\alpha+\beta}=(1+x)^\alpha(1+x)^\beta$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{\alpha+\beta}^{k}x^k=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{C_{i+l}^{l}}{C_{\alpha+l}^{l}}C_{\alpha+l}^{i+l}x^i\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{C_{j+r}^{r}}{C_{\beta+r}^{r}}C_{\beta+r}^{j+r}x^j$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{\alpha+\beta}^{k}x^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{i=0}^{k}\frac{C_{i+l}^{l}}{C_{\alpha+l}^{l}}C_{\alpha+l}^{i+l}\frac{C_{k-i+r}^{r}}{C_{\beta+r}^{r}}C_{\beta+r}^{k-i+r}x^k$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{i=0}^{k}C_{\alpha+l}^{i+l}C_{\beta+r}^{k-i+r}\frac{C_{i+l}^{l}C_{k-i+r}^{r}}{C_{\alpha+l}^{l}C_{\beta+r}^{r}}=C_{\alpha+\beta}^{k}$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{i=0}^{k}C_{\alpha+l}^{i+l}C_{\beta+r}^{k-i+r}(C_{i+l}^{l}C_{k-i+r}^{r})=C_{\alpha+\beta}^{k}(C_{\alpha+l}^{l}C_{\beta+r}^{r})$ □

推论6.4.1. $\sum\limits_{i=0}^{k}C_{\alpha}^{i}C_{\beta}^{k-i}(C_{i}^{l}C_{k-i}^{r})=C_{\alpha+\beta-l-r}^{k-l-r}(C_{\alpha}^{l}C_{\beta}^{r});k\ge l+r,l,r\ge 0$

推论6.4.2. $\sum\limits_{i=0}^{k}C_{\alpha}^{i}C_{\beta}^{k-i}(C_{i}^{l})=C_{\alpha+\beta-l}^{k-l}(C_{\alpha}^{l}),k\ge l\ge 0;\sum\limits_{i=0}^{k}C_{\alpha}^{i}C_{\beta}^{k-i}(C_{k-i}^{r})=C_{\alpha+\beta-r}^{k-r}(C_{\beta}^{r}),k\ge r\ge 0$

推论6.4.3. $\sum\limits_{i=0}^{\infty}C_{\alpha+l}^{i+l}\frac{C_{i+l}^{l}}{C_{\alpha+l}^{l}}=2^\alpha[\Rightarrow]\sum\limits_{i=0}^{\infty}C_{\alpha}^{i}(C_{i}^{l})=2^{\alpha-l}(C_{\alpha}^{l});l\ge 0$

自我评述；结合上面的结论可知，对所有范德蒙恒等式左边添上$(C_i^lC_{k-i}^r)$，右边简单变形并添上$(C_\alpha^lC_\beta^r)$，恒等式依然成立，结果不再具体列出，直接应用即可。事实上，可以继续在两边无限添加类似的对应项，恒等式仍然可以成立，不再详细展开。若有实际需求时，可以按以上思路再详细推导其具体形式。通过以上的数学技巧，得到了很多有用的组合恒等式，若应用到物理研究中去，可以解决一些实际物理问题。

6.5 $(1,1)$推广的范德蒙恒等式的组合函数形式

推论6.5.1. $\sum\limits_{k=0}^{n}C_{x}^{k}C_{y}^{n-k}(C_{k}^{l}C_{n-k}^{r})=C_{x+y-l-r}^{n-l-r}(C_{x}^{l}C_{y}^{r});n\ge l+r,l,r\ge 0$

推论6.5.2. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_{n}^{k}\frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}}(C_{k}^{l}C_{n-k}^{r})=\frac{(y-x)^{(n-r-l)}(x)^{(l)}}{(y)^{(n-r)}}[(-1)^lC_{n}^{l+r}C_{l+r}^{r}];n\ge l+r,l,r\ge 0$

证明: $\sum\limits_{k=0}^{n}C_{x}^{k}C_{y}^{n-k}(C_{k}^{l}C_{n-k}^{r})=C_{x+y-l-r}^{n-l-r}(C_{x}^{l}C_{y}^{r})$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n}^{k}(x)_{(k)}(y)_{(n-k)}(C_{k}^{l}C_{n-k}^{r})=\frac{n!}{(n-l-r)!}(x+y-l-r)_{(n-l-r)}(C_{x}^{l}C_{y}^{r})$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n}^{k}(x)_{(k)}\frac{(y)_{(n)}}{(y-n+1)^{(k)}}(C_{k}^{l}C_{n-k}^{r})=\frac{n!}{(n-l-r)!}(x+y-l-r)_{(n-l-r)}(C_{x}^{l}C_{y}^{r})$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n}^{k}(-x)_{(k)}\frac{(y+n-1)_{(n)}}{(y)^{(k)}}(C_{k}^{l}C_{n-k}^{r})=\frac{n!}{(n-l-r)!}(-x+y+n-1-l-r)_{(n-l-r)}(C_{-x}^{l}C_{y+n-1}^{r})$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_{n}^{k}\frac{(x)^{(k)}(y)^{(n)}}{(y)^{(k)}}(C_{k}^{l}C_{n-k}^{r})=\frac{n!}{(n-l-r)!}(y-x)^{(n-l-r)}(C_{-x}^{l}C_{y+n-1}^{r})$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n}^{k}(-1)^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}}(C_{k}^{l}C_{n-k}^{r})=\frac{(y-x)^{(n-l-r)}}{(y)^{(n)}}[\frac{n!}{(n-l-r)!l!r!}(-1)^l(x)^{(l)}(y+n-r)^{(r)}]$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n}^{k}(-1)^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}}(C_{k}^{l}C_{n-k}^{r})=\frac{(y-x)^{(n-l-r)}(x)^{(l)}}{(y)^{(n-r)}}[\frac{(-1)^ln!}{(n-l-r)!l!r!}]$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_{n}^{k}\frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}}(C_{k}^{l}C_{n-k}^{r})=\frac{(y-x)^{(n-r-l)}(x)^{(l)}}{(y)^{(n-r)}}[(-1)^lC_{n}^{l+r}C_{l+r}^{r}]$ □

推论6.5.3.

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}}(C_k^lC_{n-k}^r)=\frac{(y-x)^{(n-r-l)}(x)^{(l)}}{(y)^{(n-r)}}[(-1)^lC_n^{l+r}C_{l+r}^r];n\ge l+r,l,r\ge 0\\ \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{(x)_{(k)}}{(y)_{(k)}}(C_k^lC_{n-k}^r)=\frac{(y-x)_{(n-r-l)}(x)_{(l)}}{(y)_{(n-r)}}[(-1)^lC_n^{l+r}C_{l+r}^r];n\ge l+r,l,r\ge 0\\ \sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)_{(k)}}(C_k^lC_{n-k}^r)=\frac{(-y-x)^{(n-r-l)}(x)^{(l)}}{(y)_{(n-r)}}[(-1)^{n-r-l}C_n^{l+r}C_{l+r}^r];n\ge l+r,l,r\ge 0\\ \sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(x)_{(k)}}{(y)^{(k)}}(C_k^lC_{n-k}^r)=\frac{(-y-x)_{(n-r-l)}(x)_{(l)}}{(y)^{(n-r)}}[(-1)^{n-r-l}C_n^{l+r}C_{l+r}^r];n\ge l+r,l,r\ge 0\end{cases}$$

推论6.5.4.

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}}(C_k^l)=\frac{(y-x)^{(n-l)}(x)^{(l)}}{(y)^{(n)}}[(-1)^lC_n^l];n\ge l\ge 0\\ \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{(x)_{(k)}}{(y)_{(k)}}(C_k^l)=\frac{(y-x)_{(n-l)}(x)_{(l)}}{(y)_{(n)}}[(-1)^lC_n^l];n\ge l\ge 0\\ \sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)_{(k)}}(C_k^l)=\frac{(-y-x)^{(n-l)}(x)^{(l)}}{(y)_{(n)}}[(-1)^{n-l}C_n^l];n\ge l\ge 0\\ \sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(x)_{(k)}}{(y)^{(k)}}(C_k^l)=\frac{(-y-x)_{(n-l)}(x)_{(l)}}{(y)^{(n)}}[(-1)^{n-l}C_n^l];n\ge l\ge 0\end{cases}\quad\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}}=\frac{(y-x)^{(n)}}{(y)^{(n)}};n\ge 0\\ \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{(x)_{(k)}}{(y)_{(k)}}=\frac{(y-x)_{(n)}}{(y)_{(n)}};n\ge 0\\ \sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)_{(k)}}=(-1)^n\frac{(-y-x)^{(n)}}{(y)_{(n)}};n\ge 0\\ \sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(x)_{(k)}}{(y)^{(k)}}=(-1)^n\frac{(-y-x)_{(n)}}{(y)^{(n)}};n\ge 0\end{cases}$$

推论6.5.5. $(-1)^kC_n^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}}(C_k^lC_{n-k}^r)=\frac{(x+l)^{(k-l)}(r+l-n)^{(k-l)}}{(y+l)^{(k-l)}(1)^{(k-l)}}(-1)^lC_n^l\frac{(x)^{(l)}}{(y)^{(l)}}(C_l^lC_{n-l}^r);n\ge l+r,l,r\ge 0,l\le k\le n-r$

证明: $t_l=(-1)^lC_n^l\frac{(x)^{(l)}}{(y)^{(l)}}(C_l^lC_{n-l}^r),l\le k\le n-r$

$\frac{t_{k+1}}{t_k}=\frac{(-1)^{k+1}C_n^{k+1}\frac{(x)^{(k+1)}}{(y)^{(k+1)}}(C_{k+1}^lC_{n-k-1}^r)}{(-1)^kC_n^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}}(C_k^lC_{n-k}^r)}$

$=\frac{(-1)(n-k)(x+k)(k+1)(n-k-r)}{(k+1)(y+k)(k-l+1)(n-k)}=\frac{(x+k)(r-n+k)}{(y+k)(1-l+k)}$

$\Rightarrow(-1)^kC_n^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}}(C_k^lC_{n-k}^r)=t_k=\frac{(x+l)^{(k-l)}(r+l-n)^{(k-l)}}{(y+l)^{(k-l)}(1)^{(k-l)}}t_l$

$=\frac{(x+l)^{(k-l)}(r+l-n)^{(k-l)}}{(y+l)^{(k-l)}(1)^{(k-l)}}(-1)^lC_n^l\frac{(x)^{(l)}}{(y)^{(l)}}(C_l^lC_{n-l}^r)$ □

7 推广的p阶范德蒙卷积恒等式

7.1 一般推广的p阶范德蒙卷积恒等式

定理7.1.1. $\sum\limits_{i_1+\cdot\cdot+i_p=}^{k+l_1\cdot\cdot+l_p}C(\alpha_1,i_1,\vec{l_1})C_{\alpha_1}^{i_1}\cdot\cdot C(\alpha_p,i_p,\vec{l_p})C_{\alpha_p}^{i_p}=C_{\alpha_1-l_1+\cdot\cdot+\alpha_p-l_p}^k;k\ge 0$

证明: $(1+x)^{\sum\limits_{r=1}^{p}(\alpha_r-l_r)}=(1+x)^{\alpha_1-l_1}\cdot\cdot(1+x)^{\alpha_p-l_p}$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{\alpha_1-l_1+\cdot\cdot+\alpha_p-l_p}^kx^k=\sum\limits_{i_1=l_1}^{\infty}C(\alpha_1,i_1,\vec{l_1})C_{\alpha_1}^{i_1}x^{i_1-l_1}\cdot\cdot\sum\limits_{i_p=l_2}^{\infty}C(\alpha_p,i_p,\vec{l_p})C_{\alpha_p}^{i_p}x^{i_p-l_p}$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{\alpha_1-l_1+\cdot\cdot+\alpha_p-l_p}^kx^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{i_1+\cdot\cdot+i_p=}^{k+l_1\cdot\cdot+l_p}C(\alpha_1,i_1,\vec{l_1})C_{\alpha_1}^{i_1}x^{i_1-l_1}\cdot\cdot C(\alpha_p,i_p,\vec{l_p})C_{\alpha_p}^{i_p}x^{i_p-l_p}$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{\alpha_1-l_1+\cdot\cdot+\alpha_p-l_p}^kx^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{i_1+\cdot\cdot+i_p=}^{k+l_1\cdot\cdot+l_p}C(\alpha_1,i_1,\vec{l_1})C_{\alpha_1}^{i_1}\cdot\cdot C(\alpha_p,i_p,\vec{l_p})C_{\alpha_p}^{i_p}x^k$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{i_1+\cdot\cdot+i_p=}^{k+l_1\cdot\cdot+l_p}C(\alpha_1,i_1,\vec{l_1})C_{\alpha_1}^{i_1}\cdot\cdot C(\alpha_p,i_p,\vec{l_p})C_{\alpha_p}^{i_p}=C_{\alpha_1-l_1+\cdot\cdot+\alpha_p-l_p}^k$ □

7.2 $(1,\cdot\cdot,1)$推广的p阶范德蒙卷积恒等式

引理7.2.1. $(1+x)^\alpha=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{C_{i+l}^l}{C_{\alpha+l}^l}C_{\alpha+l}^{i+l}x^i,(1+x)^\beta=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{C_{j+r}^r}{C_{\beta+r}^r}C_{\beta+r}^{j+r}x^j$

定理7.2.1. $\sum\limits_{i_1+\cdot\cdot+i_p=k}C_{\alpha_1+l_1}^{i_1+l_1}\cdot\cdot C_{\alpha_p+l_p}^{i_p+l_p}(C_{i_1+l_1}^{l_1}\cdot\cdot C_{i_p+l_p}^{l_p})=C_{\alpha_1+\cdot\cdot+\alpha_p}^k(C_{\alpha_1+l_1}^{l_1}\cdot\cdot C_{\alpha_p+l_p}^{l_p});k,l_r\ge 0$

证明: $(1+x)^{\alpha_1+\cdot\cdot+\alpha_p}=(1+x)^{\alpha_1}\cdot\cdot(1+x)^{\alpha_2}$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{\alpha_1+\cdot\cdot+\alpha_p}^kx^k=\sum\limits_{i_1=0}^{\infty}\frac{C_{i_1+l_1}^{l_1}}{C_{\alpha_1+l_1}^{l_1}}C_{\alpha_1+l_1}^{i_1+l_1}x^{i_1}\cdot\cdot\sum\limits_{i_p=0}^{\infty}\frac{C_{i_p+l_p}^{l_p}}{C_{\alpha_p+l_p}^{l_p}}C_{\alpha_p+l_p}^{i_p+l_p}x^{i_p}$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} C_{\alpha_1+\cdot\cdot+\alpha_p}^{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1+\cdot\cdot+i_p=k} \frac{C_{i_1+l_1}^{l_1}}{C_{\alpha_1+l_1}^{l_1}} C_{\alpha_1+l_1}^{i_1+l_1} \cdot\cdot \frac{C_{i_p+l_p}^{l_p}}{C_{\alpha_p+l_p}^{l_p}} C_{\alpha_p+l_p}^{i_p+l_p} x^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i_1+\cdot\cdot+i_p=k} \frac{C_{i_1+l_1}^{l_1}}{C_{\alpha_1+l_1}^{l_1}} C_{\alpha_1+l_1}^{i_1+l_1} \cdot\cdot \frac{C_{i_p+l_p}^{l_p}}{C_{\alpha_p+l_p}^{l_p}} C_{\alpha_p+l_p}^{i_p+l_p} = C_{\alpha_1+\cdot\cdot+\alpha_p}^{k}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i_1+\cdot\cdot+i_p=k} C_{\alpha_1+l_1}^{i_1+l_1} \cdot\cdot C_{\alpha_p+l_p}^{i_p+l_p} (C_{i_1+l_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{i_p+l_p}^{l_p}) = C_{\alpha_1+\cdot\cdot+\alpha_p}^{k} (C_{\alpha_1+l_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{\alpha_p+l_p}^{l_p}) \qquad \square$$

推论7.2.1. $\sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n} C_{x_1}^{k_1} \cdot\cdot C_{x_p}^{k_p} (C_{k_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{k_p}^{l_p}) = C_{x_1-l_1\cdot\cdot+x_p-l_p}^{n-l_1\cdot\cdot-l_p} (C_{x_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{x_p}^{l_p}); n, l_r \geq 0$

7.3 $(1,\cdot\cdot,1)$推广的p阶范德蒙恒等式的组合函数形式

推论7.3.1. $\sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n} (-1)^{n-k_1} \frac{n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!} \frac{(x_2)^{(k_2)}\cdot\cdot(x_p)^{(k_p)}}{(x_1)^{(n-k_1)}} (C_{k_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{k_p}^{l_p}) = \frac{(x_1-x_2\cdot\cdot-x_p)^{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)}(x_2)^{(l_2)}\cdot\cdot(x_p)^{(l_p)}}{(x_1)^{(n-l_1)}} [\frac{(-1)^{l_2+\cdot\cdot+l_p} n!}{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)! l_1! \cdot\cdot l_p!}]$

证明: $\sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n} C_{x_1}^{k_1} \cdot\cdot C_{x_p}^{k_p} (C_{k_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{k_p}^{l_p}) = C_{x_1-l_1\cdot\cdot+x_p-l_p}^{n-l_1\cdot\cdot-l_p} (C_{x_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{x_p}^{l_p})$

$$\Leftrightarrow \sum_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n} \frac{n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!} (x_1)_{(k_1)} \cdot\cdot (x_p)_{(k_p)} (C_{k_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{k_p}^{l_p}) = \frac{n!}{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)!} (x_1 - l_1 \cdot\cdot + x_p - l_p)_{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)} (C_{x_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{x_p}^{l_p})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n} \frac{n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!} \frac{(x_1)_{(n)}}{(x_1-n+1)^{(n-k_1)}} (x_2)_{(k_2)} \cdot\cdot (x_p)_{(k_p)} (C_{k_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{k_p}^{l_p}) = \frac{n!}{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)!} (x_1 - l_1 \cdot\cdot + x_p - l_p)_{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)} (C_{x_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{x_p}^{l_p})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n} \frac{n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!} \frac{(x_1+n-1)_{(n)}}{(x_1)^{(n-k_1)}} (-x_2)_{(k_2)} \cdot\cdot (-x_p)_{(k_p)} (C_{k_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{k_p}^{l_p})$$

$$= \frac{n!}{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)!} (x_1 - l_1 \cdot\cdot - x_p - l_p + n - 1)_{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)} (C_{x_1+n-1}^{l_1} \cdot\cdot C_{-x_p}^{l_p})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n} \frac{(-1)^{n-k_1} n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!} \frac{(x_1)^{(n)}}{(x_1)^{(n-k_1)}} (x_2)^{(k_2)} \cdot\cdot (x_p)^{(k_p)} (C_{k_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{k_p}^{l_p})$$

$$= \frac{n!}{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)! l_1! \cdot\cdot l_p!} (x_1 - x_2 \cdot\cdot - x_p)^{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)} (x_1 + n - 1)_{(l_1)} (-x_2)_{(l_2)} \cdot\cdot (-x_p)_{(l_p)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n} \frac{(-1)^{n-k_1} n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!} \frac{(x_2)^{(k_2)}\cdot\cdot(x_p)^{(k_p)}}{(x_1)^{(n-k_1)}} (C_{k_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{k_p}^{l_p})$$

$$= \frac{(-1)^{l_2+\cdot\cdot+l_p} n!}{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)! l_1! \cdot\cdot l_p!} \frac{(x_1-x_2\cdot\cdot-x_p)^{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)}(x_1+n-l_1)^{(l_1)}(x_2)^{(l_2)}\cdot\cdot(x_p)^{(l_p)}}{(x_1)^{(n)}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n} (-1)^{n-k_1} \frac{n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!} \frac{(x_2)^{(k_2)}\cdot\cdot(x_p)^{(k_p)}}{(x_1)^{(n-k_1)}} (C_{k_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{k_p}^{l_p}) = \frac{(x_1-x_2\cdot\cdot-x_p)^{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)}(x_2)^{(l_2)}\cdot\cdot(x_p)^{(l_p)}}{(x_1)^{(n-l_1)}} [\frac{(-1)^{l_2+\cdot\cdot+l_p} n!}{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)! l_1! \cdot\cdot l_p!}] \qquad \square$$

推论7.3.2.

$$\begin{cases} \sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n} (-1)^{n-k_1} \frac{n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!} \frac{(x_2)^{(k_2)}\cdot\cdot(x_p)^{(k_p)}}{(x_1)^{(n-k_1)}} (C_{k_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{k_p}^{l_p}) = \frac{(x_1-x_2\cdot\cdot-x_p)^{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)}(x_2)^{(l_2)}\cdot\cdot(x_p)^{(l_p)}}{(x_1)^{(n-l_1)}} [\frac{(-1)^{l_2+\cdot\cdot+l_p} n!}{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)! l_1! \cdot\cdot l_p!}] \\ \sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n} (-1)^{n-k_1} \frac{n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!} \frac{(x_2)_{(k_2)}\cdot\cdot(x_p)_{(k_p)}}{(x_1)_{(n-k_1)}} (C_{k_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{k_p}^{l_p}) = \frac{(x_1-x_2\cdot\cdot-x_p)_{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)}(x_2)_{(l_2)}\cdot\cdot(x_p)_{(l_p)}}{(x_1)_{(n-l_1)}} [\frac{(-1)^{l_2+\cdot\cdot+l_p} n!}{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)! l_1! \cdot\cdot l_p!}] \\ \sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n} \frac{n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!} \frac{(x_2)^{(k_2)}\cdot\cdot(x_p)^{(k_p)}}{(x_1)_{(n-k_1)}} (C_{k_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{k_p}^{l_p}) = \frac{(-x_1-x_2\cdot\cdot-x_p)^{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)}(x_2)^{(l_2)}\cdot\cdot(x_p)^{(l_p)}}{(x_1)_{(n-l_1)}} [\frac{(-1)^{n-l_1\cdot\cdot-l_p} n!}{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)! l_1! \cdot\cdot l_p!}] \\ \sum\limits_{k_1+\cdot\cdot+k_p=n} \frac{n!}{k_1!\cdot\cdot k_p!} \frac{(x_2)_{(k_2)}\cdot\cdot(x_p)_{(k_p)}}{(x_1)^{(n-k_1)}} (C_{k_1}^{l_1} \cdot\cdot C_{k_p}^{l_p}) = \frac{(-x_1-x_2\cdot\cdot-x_p)_{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)}(x_2)_{(l_2)}\cdot\cdot(x_p)_{(l_p)}}{(x_1)^{(n-l_1)}} [\frac{(-1)^{n-l_1\cdot\cdot-l_p} n!}{(n-l_1\cdot\cdot-l_p)! l_1! \cdot\cdot l_p!}] \end{cases}$$

8 类范德蒙恒等式

8.1 类范德蒙卷积恒等式

8.1.1 类范德蒙恒等式

定理8.1.1. $\sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i C_{\alpha}^{i} C_{\beta}^{k-i} = \sum\limits_{i=0}^{[k/2]} (-1)^i C_{\alpha}^{i} C_{\beta-\alpha}^{k-2i}; k \geq 0$

证明: $(1-x^2)^{\alpha}(1+x)^{\beta-\alpha} = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C_{\alpha}^{i} x^{2i} \sum_{j=0}^{\infty} C_{\beta-\alpha}^{j} x^j = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C_{\alpha}^{i} x^i \sum_{j=0}^{\infty} C_{\beta}^{j} x^j$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{[i/2]} (1 - i\%2) C_{\alpha}^{[i/2]} x^i \sum_{j=0}^{\infty} C_{\beta-\alpha}^{j} x^j = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C_{\alpha}^{i} x^i \sum_{j=0}^{\infty} C_{\beta}^{j} x^j$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{[i/2]} (1 - i\%2) C_{\alpha}^{[i/2]} C_{\beta-\alpha}^{k-i} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_{\alpha}^{i} C_{\beta}^{k-i} x^k$$

$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_\alpha^i C_\beta^{k-i} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{[i/2]}(1-i\%2)C_\alpha^{[i/2]}C_{\beta-\alpha}^{k-i}$

$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_\alpha^i C_\beta^{k-i} = \sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^i C_\alpha^i C_{\beta-\alpha}^{k-2i}$ □

推论8.1.1. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_\alpha^i C_\alpha^{k-i} = (-1)^{[k/2]}C_\alpha^{[k/2]}(1-k\%2); k \geq 0$

推论8.1.2. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_x^k C_y^{n-k} = \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_x^k C_{y-x}^{n-2k}; n \geq 0$

推论8.1.3. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}} = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_{n-k}^k \frac{(x)^{(k)}}{(y+x)^{(2k)}}[\frac{n!}{(n-k)!}\frac{(y+x)^{(n)}}{(y)^{(n)}}]; n \geq 0$

证明: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_x^k C_y^{n-k} = \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_x^k C_{y-x}^{n-2k}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{(x)_{(k)}(y)_{(n-k)}}{n!} = \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_{n-k}^k \frac{(x)_{(k)}(y-x)_{(n-2k)}}{(n-k)!}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n!} C_n^k (x)_{(k)}(y)_{(n-k)} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{(n-k)!} C_{n-k}^k (x)_{(k)}(y-x)_{(n-2k)}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n!} C_n^k (x)_{(k)} \frac{(y)_{(n)}}{(y-n+1)^{(k)}} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{(n-k)!} C_{n-k}^k (x)_{(k)} \frac{(y-x)_{(n)}}{(y-x-n+1)^{(2k)}}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n!} C_n^k (-x)_{(k)} \frac{(y+n-1)_{(n)}}{(y)^{(k)}} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{(n-k)!} C_{n-k}^k (-x)_{(k)} \frac{(y+n-1+x)_{(n)}}{(y+x)^{(2k)}}$

$\Leftrightarrow (y)^{(n)} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n!} \frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}} = (y+x)^{(n)} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{C_{n-k}^k}{(n-k)!} \frac{(x)^{(k)}}{(y+x)^{(2k)}}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}} = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_{n-k}^k \frac{(x)^{(k)}}{(y+x)^{(2k)}}[\frac{n!}{(n-k)!}\frac{(y+x)^{(n)}}{(y)^{(n)}}]$ □

8.2 $(\pm m, \pm n)$型类范德蒙恒等式

8.2.1 (n, n)型类范德蒙卷积恒等式

推论8.2.1. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_n^i C_n^{k-i} = (-1)^{[k/2]}C_n^{[k/2]}(1-k\%2); n \geq 0, k \geq 0$

8.2.2 (m, n)型类范德蒙卷积恒等式

推论8.2.2. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_m^i C_n^{k-i} = \sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^i C_n^i C_{n-m}^{k-2i}; n \geq m \geq 0, k \geq 0$

推论8.2.3. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_m^i C_n^{k-i} = (-1)^k \sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^i C_n^i C_{m-n-1+k-2i}^{k-2i}; m > n \geq 0, k \geq 0$

8.2.3 $(-n-1, -n-1)$型类范德蒙恒等式

推论8.2.4. $n, k \geq 0$

$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_{-n-1}^i C_{-n-1}^{k-i} = (-1)^{[k/2]}C_{-n-1}^{[k/2]}(1-k\%2)[\Leftrightarrow] \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_{n+i}^i C_{n+k-i}^{k-i} = C_{n+[k/2]}^{[k/2]}(1-k\%2)$

8.2.4 $(-m-1, -n-1)$型类范德蒙恒等式

推论8.2.5. $m \geq n \geq 0, k \geq 0$

$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_{-m-1}^i C_{-n-1}^{k-i} = \sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^i C_{-m-1}^i C_{m-n}^{k-2i}[\Leftrightarrow] \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_{m+i}^i C_{n+k-i}^{k-i} = \sum_{i=0}^{[k/2]} C_{m+i}^i C_{m-n}^{k-2i}$

推论8.2.6. $n > m \geq 0, k \geq 0$

$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_{-m-1}^i C_{-n-1}^{k-i} = \sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^i C_{-m-1}^i C_{m-n}^{k-2i}[\Leftrightarrow] \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_{m+i}^i C_{n+k-i}^{k-i} = \sum_{i=0}^{[k/2]} C_{m+i}^i C_{n-m-1+k-2i}^{k-2i}$

8.2.5 $(-m-1,n)$型类范德蒙恒等式

推论8.2.7. $m,n,k\geq 0$

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_{-m-1}^{i}C_{n}^{k-i}=\sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^iC_{-m-1}^{i}C_{m+n+1}^{k-2i};k\geq 0[\Leftrightarrow]\sum_{i=0}^{k}C_{m+i}^{i}C_{n}^{k-i}=\sum_{i=0}^{[k/2]}C_{m+i}^{i}C_{m+n+1}^{k-2i}$$

8.2.6 $(n,-m-1)$型类范德蒙恒等式

定理8.2.1. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_{n}^{i}C_{-m-1}^{k-i}=\sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^iC_{n}^{i}C_{-n-m-1}^{k-2i}[\Leftrightarrow]\sum_{i=0}^{k}C_{n}^{i}C_{m+k-i}^{k-i}=\sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^iC_{n}^{i}C_{n+m+k-2i}^{k-2i};m,n,k\geq 0$

推论8.2.8. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^rC_{n}^{r}C_{2n-2r}^{n+l}=\sum_{r=0}^{n-l}C_{n}^{r}C_{n-r}^{l}(=2^{n-l}C_{n}^{l}),n\geq 0,l\geq 0$

推论8.2.9. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^rC_{n}^{r}C_{2n-2r}^{n}=2^n,n\geq 0$

8.3 $(\pm m-1/2,\pm n-1/2)$型类范德蒙恒等式

8.3.1 $(-n-1/2,-n-1/2)$型类范德蒙卷积恒等式

定理8.3.1. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_{-n-1/2}^{i}C_{-n-1/2}^{k-i}=(-1)^{[k/2]}(1-k\%2)C_{-n-1/2}^{[k/2]}$

$$[\Leftrightarrow]\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_{2n+2i}^{n+i}C_{2n+2k-2i}^{n+k-i}C_{n+i}^{i}C_{n+k-i}^{k-i}=(-4)^k4^{-[k/2]}(1-k\%2)C_{2n}^{n}C_{2n+2[k/2]}^{n+[k/2]}C_{n+[k/2]}^{[k/2]};n,k\geq 0$$

8.3.2 $(-m-1/2,-n-1/2)$型类范德蒙卷积恒等式导出的多种组合恒等式

定理8.3.2. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_{-m-1/2}^{i}C_{-n-1/2}^{k-i}=\sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^iC_{-m-1/2}^{i}C_{m-n}^{k-2i}$

$$[\Leftrightarrow]\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_{2m+2i}^{m+i}C_{2n+2k-2i}^{n+k-i}C_{m+i}^{i}C_{n+k-i}^{k-i}=(-4)^kC_{2n}^{n}\sum_{i=0}^{[k/2]}4^{-i}C_{2m+2i}^{m+i}C_{m+i}^{i}C_{m-n}^{k-2i};m,n,k\geq 0$$

推论8.3.1. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_{2m+2i}^{m+i}C_{2n+2k-2i}^{n+k-i}C_{m+i}^{i}C_{n+k-i}^{k-i}=(-4)^kC_{2n}^{n}\sum_{i=0}^{[k/2]}4^{-i}C_{2m+2i}^{m+i}C_{m+i}^{i}C_{m-n}^{k-2i};m,n,k\geq 0$

$$[\Leftrightarrow]\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\tfrac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!}\tfrac{(2n+2k-2i)!}{(n+k-i)!(k-i)!}=\tfrac{(2n)!}{n!}\sum_{i=0}^{[k/2]}\tfrac{(-1)^k}{4^{i-k}}\tfrac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!}C_{m-n}^{k-2i}=\tfrac{(2m)!}{m!}\sum_{i=0}^{[k/2]}4^{k-i}\tfrac{(2n+2i)!}{(n+i)!i!}C_{n-m}^{k-2i}$$

$$[\Leftrightarrow]\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\tfrac{(2n+2i)!}{(n+i)!i!}\tfrac{(2m+2k-2i)!}{(m+k-i)!(k-i)!}=\tfrac{(2n)!}{n!}\sum_{i=0}^{[k/2]}4^{k-i}\tfrac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!}C_{m-n}^{k-2i}=\tfrac{(2m)!}{m!}\sum_{i=0}^{[k/2]}\tfrac{(-1)^k}{4^{i-k}}\tfrac{(2n+2i)!}{(n+i)!i!}C_{n-m}^{k-2i}$$

类范德蒙卷积恒等式导出的一系列推论:

推论8.3.2. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\tfrac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!}\tfrac{(2n+2k-2i)!}{(n+k-i)!(k-i)!}=\tfrac{(2n)!}{n!}\sum_{i=0}^{[k/2]}\tfrac{(-1)^k}{4^{i-k}}\tfrac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!}C_{m-n}^{k-2i}=\tfrac{(2m)!}{m!}\sum_{i=0}^{[k/2]}4^{k-i}\tfrac{(2n+2i)!}{(n+i)!i!}C_{n-m}^{k-2i}$

$$\Rightarrow\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\tfrac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!}\tfrac{(2k-2i)!}{(k-i)!(k-i)!}=\sum_{i=0}^{[k/2]}\tfrac{(-1)^k}{4^{i-k}}\tfrac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!}C_{m}^{k-2i}=\tfrac{(2m)!}{m!}\sum_{i=0}^{[k/2]}4^{k-i}\tfrac{(2i)!}{i!i!}C_{m-1+k-2i}^{k-2i}$$

推论8.3.3. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\tfrac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!}\tfrac{(2n+2k-2i)!}{(n+k-i)!(k-i)!}=\tfrac{(2m)!}{m!}\sum_{i=0}^{[k/2]}4^{k-i}\tfrac{(2n+2i)!}{(n+i)!i!}C_{n-m}^{k-2i}$

$$\Rightarrow\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\tfrac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!}\tfrac{(2m+2k-2i)!}{(m+k-i)!(k-i)!}=4^{[k/2]}\tfrac{(2m)!}{m!}\tfrac{(2m+2[k/2])!}{(m+[k/2])![k/2]!}(1-k\%2)$$

推论8.3.4. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\tfrac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!}\tfrac{(2n+2k-2i)!}{(n+k-i)!(k-i)!}=\tfrac{(2m)!}{m!}\sum_{i=0}^{[k/2]}4^{k-i}\tfrac{(2n+2i)!}{(n+i)!i!}C_{n-m}^{k-2i}$

$$\Rightarrow\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\tfrac{(2i)!}{i!i!}\tfrac{(2k-2i)!}{(k-i)!(k-i)!}=4^{[k/2]}\tfrac{(2[k/2])!}{[k/2]![k/2]!}(1-k\%2)$$

推论8.3.5. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\tfrac{(2m+2i)!}{(m+i)!i!}\tfrac{(2n+2k-2i)!}{(n+k-i)!(k-i)!}=\tfrac{(2m)!}{m!}\sum_{i=0}^{[k/2]}4^{k-i}\tfrac{(2n+2i)!}{(n+i)!i!}C_{n-m}^{k-2i}$

$$\Rightarrow\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\tfrac{(2i+1)!}{i!i!}\tfrac{(2k-2i+1)!}{(k-i)!(k-i)!}=4^{[k/2]}\tfrac{([k/2]+1)!}{[k/2]![k/2]!}(1-k\%2)$$

8.3.3 $(m-1/2,n-1/2)$型类范德蒙恒等式(复杂略去)

8.3.4 $(-m-1/2,n-1/2)$型类范德蒙恒等式(复杂略去)

8.3.5 $(m-1/2,-n-1/2)$型类范德蒙恒等式(复杂略去)

8.4 $(\pm m-1/2,\pm n)$型类范德蒙恒等式(复杂略去)

8.4.1 $(-m-1/2,-n-1)$型类范德蒙恒等式(复杂)

推论8.4.1. $m,n,k\geq 0$

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC^i_{-m-1/2}C^{k-i}_{-n-1}=\sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^iC^i_{-m-1/2}C^{k-2i}_{m-n-1/2}$$

$$[\Leftrightarrow]\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}4^{-i}C^{m+i}_{2m+2i}C^i_{m+i}C^{k-i}_{n+k-i}=\sum_{i=0}^{[k/2]}4^{-i}C^{m+i}_{2m+2i}C^i_{m+i}C^{k-2i}_{m-n-1/2}$$

8.4.2 $(-m-1/2,n)$型类范德蒙恒等式(复杂)

推论8.4.2. $m,n,k\geq 0$

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC^i_{-m-1/2}C^{k-i}_{n}=\sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^iC^i_{-m-1/2}C^{k-2i}_{m+n+1/2}[\Leftrightarrow]\sum_{i=0}^{k}4^{-i}C^{m+i}_{2m+2i}C^i_{m+i}C^{k-i}_{n}=\sum_{i=0}^{[k/2]}4^{-i}C^{m+i}_{2m+2i}C^i_{m+i}C^{k-2i}_{m+n+1/2}$$

8.4.3 $(m-1/2,n)$型类范德蒙恒等式(复杂略去)

8.4.4 $(m-1/2,-n-1)$型类范德蒙恒等式(复杂略去)

8.5 $(\pm n,\pm m-1/2)$型类范德蒙恒等式(复杂略去)

8.5.1 $(-n-1,-m-1/2)$型类范德蒙恒等式(复杂略去)

推论8.5.1. $m,n,k\geq 0$

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC^i_{-m-1/2}C^{k-i}_{-n-1}=\sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^iC^i_{-m-1/2}C^{k-2i}_{m-n-1/2}$$

$$[\Leftrightarrow]\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}4^{-i}C^{m+i}_{2m+2i}C^i_{m+i}C^{k-i}_{n+k-i}=\sum_{i=0}^{[k/2]}4^{-i}C^{m+i}_{2m+2i}C^i_{m+i}C^{k-2i}_{m-n-1/2}$$

8.5.2 $(n,-m-1/2)$型类范德蒙恒等式(复杂略去)

推论8.5.2. $m,n,k\geq 0$

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC^i_{-m-1/2}C^{k-i}_{n}=\sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^iC^i_{-m-1/2}C^{k-2i}_{m+n+1/2}[\Leftrightarrow]\sum_{i=0}^{k}4^{-i}C^{m+i}_{2m+2i}C^i_{m+i}C^{k-i}_{n}=\sum_{i=0}^{[k/2]}4^{-i}C^{m+i}_{2m+2i}C^i_{m+i}C^{k-2i}_{m+n+1/2}$$

8.5.3 $(n,m-1/2)$型类范德蒙恒等式(复杂略去)

8.5.4 $(-n-1,m-1/2)$型类范德蒙恒等式(复杂略去)

9 推广的类范德蒙恒等式

9.1 推广的类范德蒙卷积恒等式

9.1.1 $(1,1)$推广的类范德蒙恒等式

引理9.1.1. $(1+x)^\alpha=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{C^l_{i+l}}{C^l_{\alpha+l}}C^{i+l}_{\alpha+l}x^i,(1+x)^\beta=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C^r_{j+r}}{C^r_{\beta+r}}C^{j+r}_{\beta+r}x^j$

定理9.1.1. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC^{i+l}_{\alpha+l}C^{k-i+r}_{\beta+r}(C^l_{i+l}C^r_{k-i+r})=\sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^iC^i_\alpha C^{k-2i}_{\beta-\alpha}(C^l_{\alpha+l}C^r_{\beta+r});k,l,r\geq 0$

证明: $(1-x^2)^\alpha(1+x)^{\beta-\alpha}=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^iC^i_\alpha x^{2i}\sum_{j=0}^{\infty}C^j_{\beta-\alpha}x^j=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{C^l_{i+l}}{C^l_{\alpha+l}}C^{i+l}_{\alpha+l}x^i\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C^r_{j+r}}{C^r_{\beta+r}}C^{j+r}_{\beta+r}x^j$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{[i/2]}(1-i\%2)C^{[i/2]}_\alpha x^i\sum_{j=0}^{\infty}C^j_{\beta-\alpha}x^j=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{C^l_{i+l}}{C^l_{\alpha+l}}C^{i+l}_{\alpha+l}\frac{C^r_{k-i+r}}{C^r_{\beta+r}}C^{k-i+r}_{\beta+r}x^k$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{[i/2]}(1-i\%2)C^{[i/2]}_\alpha C^{k-i}_{\beta-\alpha}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC^{i+l}_{\alpha+l}C^{k-i+r}_{\beta+r}\frac{C^l_{i+l}}{C^l_{\alpha+l}}\frac{C^r_{k-i+r}}{C^r_{\beta+r}}x^k$$

$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_{\alpha+l}^{i+l} C_{\beta+r}^{k-i+r} \frac{C_{i+l}^l C_{k-i+r}^r}{C_{\alpha+l}^l C_{\beta+r}^r} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{[i/2]}(1-i\%2) C_\alpha^{[i/2]} C_{\beta-\alpha}^{k-i}$

$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_{\alpha+l}^{i+l} C_{\beta+r}^{k-i+r} \frac{C_{i+l}^l C_{k-i+r}^r}{C_{\alpha+l}^l C_{\beta+r}^r} = \sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^i C_\alpha^i C_{\beta-\alpha}^{k-2i}$

$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_{\alpha+l}^{i+l} C_{\beta+r}^{k-i+r} (C_{i+l}^l C_{k-i+r}^r) = \sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^i C_\alpha^i C_{\beta-\alpha}^{k-2i} (C_{\alpha+l}^l C_{\beta+r}^r)$ □

推论9.1.1. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i-l} C_\alpha^i C_\beta^{k-i} (C_i^l C_{k-i}^r) = \sum_{i=0}^{[(k-l-r)/2]}(-1)^i C_{\alpha-l}^i C_{\beta-\alpha+l-r}^{k-l-r-2i} (C_\alpha^l C_\beta^r); k \geq l+r, l, r \geq 0$

推论9.1.2. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i-l} C_\alpha^i C_\beta^{k-i} (C_i^l) = \sum_{i=0}^{[(k-l)/2]}(-1)^i C_{\alpha-l}^i C_{\beta-\alpha+l}^{k-l-2i} (C_\alpha^l); k \geq l \geq 0$

推论9.1.3. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_\alpha^i C_\beta^{k-i} (C_{k-i}^r) = \sum_{i=0}^{[(k-r)/2]}(-1)^i C_\alpha^i C_{\beta-\alpha-r}^{k-r-2i} (C_\beta^r); k \geq r \geq 0$

推论9.1.4. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i-l} C_\alpha^i C_\alpha^{k-i} (C_i^l C_{k-i}^r) = \sum_{i=0}^{[(k-l-r)/2]}(-1)^i C_{\alpha-l}^i C_{l-r}^{k-l-r-2i} (C_\alpha^l C_\alpha^r); k \geq l+r, l, r \geq 0$

自我评述；结合上面的结论可知，对所有类范德蒙恒等式左边添上$(C_i^l C_{k-i}^r)$，右边简单变形并添上$(C_\alpha^l C_\beta^r)$，恒等式也依然成立，结果不再具体列出，直接应用即可。事实上，可以继续在两边无限添加类似的对应项，恒等式仍然可以成立，不再详细展开。若有实际需求时，可以按以上思路再详细推导其具体形式。通过以上的数学技巧，得到了很多有用的组合恒等式，若应用到物理研究中去，可以解决一些实际物理问题。

9.2 $(1,1)$推广的类范德蒙恒等式的组合函数形式

引理9.2.1. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_x^k C_y^{n-k} (C_k^l C_{n-k}^r) = \sum_{k=0}^{[(n-l-r)/2]}(-1)^{k+l} C_{x-l}^k C_{y-x+l-r}^{n-l-r-2k} (C_x^l C_y^r); n \geq l+r, l, r \geq 0$

推论9.2.1. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}} (C_k^l C_{n-k}^r) = \sum_{k=0}^{[(n-l-r)/2]} C_{n-k-l-r}^k \frac{(x)^{(k+l)}}{(y+x+2l)^{(2k)}} [\frac{n!}{(n-k)!} C_{n-k}^{l+r} C_{l+r}^r \frac{(y+x+2l)^{(n-r-l)}}{(y)^{(n-r)}}]$

证明：$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_x^k C_y^{n-k} (C_k^l C_{n-k}^r) = \sum_{k=0}^{[(n-l-r)/2]}(-1)^{k+l} C_{x-l}^k C_{y-x+l-r}^{n-l-r-2k} (C_x^l C_y^r)$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{(x)_{(k)}(y)_{(n-k)}}{n!} (C_k^l C_{n-k}^r) = \sum_{k=0}^{[(n-l-r)/2]}(-1)^{k+l} C_{n-k-l-r}^k \frac{(x-l)_{(k)}(y-x+l-r)_{(n-l-r-2k)}}{(n-k-l-r)!} (C_x^l C_y^r)$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n!} C_n^k (x)_{(k)} (y)_{(n-k)} (C_k^l C_{n-k}^r) = \sum_{k=0}^{[(n-l-r)/2]} \frac{(-1)^{k+l} C_{n-k-l-r}^k}{(n-k-l-r)!} (x-l)_{(k)} (y-x+l-r)_{(n-l-r-2k)} (C_x^l C_y^r)$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n!} C_n^k (x)_{(k)} \frac{(y)_{(n)}}{(y-n+1)^{(k)}} (C_k^l C_{n-k}^r) = \sum_{k=0}^{[(n-l-r)/2]} \frac{(-1)^{k+l} C_{n-k-l-r}^k}{(n-k-l-r)!} (x-l)_{(k)} \frac{(y-x+l-r)_{(n-l-r)}}{(y-x+2l-n+1)^{(2k)}} (C_x^l C_y^r)$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n!} C_n^k (-x)_{(k)} \frac{(y+n-1)_{(n)}}{(y)^{(k)}} (C_k^l C_{n-k}^r) = \sum_{k=0}^{[(n-l-r)/2]} \frac{(-1)^{k+l} C_{n-k-l-r}^k}{(n-k-l-r)!} (-x-l)_{(k)} \frac{(y+x+l-r+n-1)_{(n-l-r)}}{(y+x+2l)^{(2k)}} (C_{-x}^l C_{y+n-1}^r)$

$\Leftrightarrow (y)^{(n)} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n!} \frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}} (C_k^l C_{n-k}^r) = (y+x+2l)^{(n-l-r)} \sum_{k=0}^{[(n-l-r)/2]} \frac{(-1)^l C_{n-k-l-r}^k}{(n-k-l-r)!} \frac{(x+l)^{(k)}}{(y+x+2l)^{(2k)}} (C_{-x}^l C_{y+n-1}^r)$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}} (C_k^l C_{n-k}^r) = \sum_{k=0}^{[(n-l-r)/2]} \frac{n! C_{n-k-l-r}^k}{l! r! (n-k-l-r)!} \frac{(x+l)^{(k)}(x)^{(l)}(y+n-1)_{(r)}}{(y+x+2l)^{(2k)}} \frac{(y+x+2l)^{(n-l-r)}}{(y)^{(n)}}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}} (C_k^l C_{n-k}^r) = \sum_{k=0}^{[(n-l-r)/2]} \frac{n! C_{n-k-l-r}^k}{l! r! (n-k-l-r)!} \frac{(x)^{(k+l)}(y+n-r)^{(r)}}{(y+x+2l)^{(2k)}} \frac{(y+x+2l)^{(n-l-r)}}{(y)^{(n)}}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}} (C_k^l C_{n-k}^r) = \sum_{k=0}^{[(n-l-r)/2]} C_{n-k-l-r}^k \frac{(x)^{(k+l)}}{(y+x+2l)^{(2k)}} [\frac{n!}{(n-k-l-r)! l! r!} \frac{(y+x+2l)^{(n-r-l)}}{(y)^{(n-r)}}]$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}} (C_k^l C_{n-k}^r) = \sum_{k=0}^{[(n-l-r)/2]} C_{n-k-l-r}^k \frac{(x)^{(k+l)}}{(y+x+2l)^{(2k)}} [\frac{n!}{(n-k)!} C_{n-k}^{l+r} C_{l+r}^r \frac{(y+x+2l)^{(n-r-l)}}{(y)^{(n-r)}}]$ □

推论9.2.2.

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}}(C_k^lC_{n-k}^r)=\sum\limits_{k=0}^{[(n-l-r)/2]}C_{n-k-l-r}^k\frac{(x)^{(k+l)}}{(y+x+2l)^{(2k)}}[\frac{n!}{(n-k)!}C_{n-k}^{l+r}C_{l+r}^r\frac{(y+x+2l)^{(n-r-l)}}{(y)^{(n-r)}}]\\ \sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(x)_{(k)}}{(y)_{(k)}}(C_k^lC_{n-k}^r)=\sum\limits_{k=0}^{[(n-l-r)/2]}C_{n-k-l-r}^k\frac{(x)_{(k+l)}}{(y+x-2l)_{(2k)}}[(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}C_{n-k}^{l+r}C_{l+r}^r\frac{(y+x-2l)_{(n-r-l)}}{(y)_{(n-r)}}]\\ \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{(x)_{(k)}}{(y)^{(k)}}(C_k^lC_{n-k}^r)=\sum\limits_{k=0}^{[(n-l-r)/2]}(-1)^kC_{n-k-l-r}^k\frac{(x)_{(k+l)}}{(y-x+2l)^{(2k)}}[(-1)^{n-r}\frac{n!}{(n-k)!}C_{n-k}^{l+r}C_{l+r}^r\frac{(-y+x-2l)_{(n-r-l)}}{(y)^{(n-r)}}]\\ \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)_{(k)}}(C_k^lC_{n-k}^r)=\sum\limits_{k=0}^{[(n-l-r)/2]}(-1)^kC_{n-k-l-r}^k\frac{(x)^{(k+l)}}{(y-x-2l)^{(2k)}}[(-1)^{n-k-r}\frac{n!}{(n-k)!}C_{n-k}^{l+r}C_{l+r}^r\frac{(-y+x+2l)^{(n-r-l)}}{(y)_{(n-r)}}]\end{cases}$$

推论9.2.3.

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}}(C_k^l)=\sum\limits_{k=0}^{[(n-l)/2]}C_{n-k-l}^k\frac{(x)^{(k+l)}}{(y+x+2l)^{(2k)}}[\frac{n!}{(n-k)!}C_{n-k}^l\frac{(y+x+2l)^{(n-l)}}{(y)^{(n)}}]\\ \sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(x)_{(k)}}{(y)_{(k)}}(C_k^l)=\sum\limits_{k=0}^{[(n-l)/2]}C_{n-k-l}^k\frac{(x)_{(k+l)}}{(y+x-2l)_{(2k)}}[(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}C_{n-k}^l\frac{(y+x-2l)_{(n-l)}}{(y)_{(n)}}]\\ \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{(x)_{(k)}}{(y)^{(k)}}(C_k^l)=\sum\limits_{k=0}^{[(n-l)/2]}(-1)^kC_{n-k-l}^k\frac{(x)_{(k+l)}}{(y-x+2l)^{(2k)}}[(-1)^n\frac{n!}{(n-k)!}C_{n-k}^l\frac{(-y+x-2l)_{(n-l)}}{(y)^{(n)}}]\\ \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)_{(k)}}(C_k^l)=\sum\limits_{k=0}^{[(n-l)/2]}(-1)^kC_{n-k-l}^k\frac{(x)^{(k+l)}}{(y-x-2l)^{(2k)}}[(-1)^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!}C_{n-k}^l\frac{(-y+x+2l)^{(n-l)}}{(y)_{(n)}}]\end{cases}$$

推论9.2.4.

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)^{(k)}}=\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}C_{n-k}^k\frac{(x)^{(k)}}{(y+x)^{(2k)}}[\frac{n!}{(n-k)!}\frac{(y+x)^{(n)}}{(y)^{(n)}}]\\ \sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(x)_{(k)}}{(y)_{(k)}}=\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}C_{n-k}^k\frac{(x)_{(k)}}{(y+x)_{(2k)}}[(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}\frac{(y+x)_{(n)}}{(y)_{(n)}}]\\ \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{(x)_{(k)}}{(y)^{(k)}}=\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^kC_{n-k}^k\frac{(x)_{(k)}}{(y-x)^{(2k)}}[(-1)^n\frac{n!}{(n-k)!}C_{n-k}^l\frac{(-y+x)_{(n)}}{(y)^{(n)}}]\\ \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{(x)^{(k)}}{(y)_{(k)}}=\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^kC_{n-k}^k\frac{(x)^{(k)}}{(y-x)^{(2k)}}[(-1)^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{(-y+x)^{(n)}}{(y)_{(n)}}]\end{cases}$$

10 投影算子猜想相关的组合恒等式

引理10.0.2. $\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2k}}{kC_{2k}^k}$

10.1 卡特兰数相关的广义牛顿二项式展开

引理10.1.1.

$$g(x):=\frac{1-(1-4x)^{1/2}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{2k}^k}{k+1}x^{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{k!(k+1)!}x^{k+1}$$

$$g'(x):=(1-4x)^{-1/2}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{2k}^kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{k!k!}x^k$$

$$g''(x):=2(1-4x)^{-3/2}=\sum_{k=0}^{\infty}kC_{2k}^kx^{k-1}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)!}{k!k!}x^k$$

$$g'^{(n)}(x):=\frac{(2n)!}{n!}(1-4x)^{-n-1/2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+2n)!}{(k+n)!k!}x^k$$

引理10.1.2. $(1-4x)^{n-1/2}=C_{2n}^n[\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{C_n^k}{C_{2n-2k}^{n-k}}x^k+\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^n\frac{C_{2k-2n}^{k-n}}{C_k^n}x^k]$

证明: $(1-4x)^{n-1/2}$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-4)^k(n-1/2)\cdots(n+1/2-k)}{k!}x^k+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-4)^{n+1+l}(n-1/2)\cdots(1/2)(-1/2)\cdots(-1/2-l)}{(n+1+l)!}x^{n+1+l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k(2n-1)!!}{(2n-1-2k)!!k!}x^k+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{n+l+1}(2n-1)!!(2l+1)!!}{(n+1+l)!}x^{n+1+l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k(2n)!!(2n-1)!!(2n-2k)!!}{(2n)!!(2n-2k)!!(2n-1-2k)!!k!}x^k+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{n+l+1}(2n)!!(2n-1)!!(2l+1)!!(2l)!!}{(2n)!!(2l)!!(n+1+l)!}x^{n+1+l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k(2n)!2^{n-k}(n-k)!}{2^nn!(2n-2k)!k!}x^k+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{n+l+1}(2n)!(2l+2)!}{2^{n+l+1}n!(l+1)!(n+1+l)!}x^{n+1+l}$$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(2n)!(n-k)!}{n!(2n-2k)!k!}x^k + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n)!(2k-2n)!}{n!(k-n)!k!}x^k$

$= C_{2n}^n[\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{C_n^k}{C_{2n-2k}^{n-k}}x^k + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^n \frac{C_{2k-2n}^{k-n}}{C_k^n}x^k]$ □

引理10.1.3. $1-(1-4xy)^{1/2} + \ln\frac{1+(1-4xy)^{1/2}}{2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k+1)!(k+1)!}x^{k+1}y^{k+1}$

证明: $\int_0^x dx(1-4xy)^{-1/2} = \int_0^x dx \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!k!}x^k y^k$

$\Leftrightarrow \frac{1-(1-4xy)^{1/2}}{2y} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!}x^{k+1}y^k$

$\Leftrightarrow \int_0^y dy\frac{1-(1-4xy)^{1/2}}{2y} = \int_0^y dy \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!}x^{k+1}y^k$

$\Leftrightarrow \int_0^{xy} d(xy)\frac{1-(1-4xy)^{1/2}}{2xy} = \int_0^y dy \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!}x^{k+1}y^k$

$\Leftrightarrow -\int_1^t dt\frac{(1-t)t}{1-t^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k+1)!(k+1)!}x^{k+1}y^{k+1}, t := (1-4xy)^{1/2}$

$\Leftrightarrow 1-t+\ln\frac{1+t}{2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k+1)!(k+1)!}x^{k+1}y^{k+1}, t := (1-4xy)^{1/2}$ □

推论10.1.1. $(1-4x)^{-1/2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!k!}x^k, (1-4x)^{-3/2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{k!k!}x^k, (1-4x)^{-n-1/2} = \frac{n!}{(2n)!}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2n)!}{(k+n)!k!}x^k$

10.2 $\sum\limits_{k_1+\cdots+k_l=n} C_{2k_1}^{k_1}\cdot\cdot C_{2k_l}^{k_l}$ 的严格求解

定理10.2.1. $\sum\limits_{k_1+k_2=n} C_{2k_1}^{k_1}C_{2k_2}^{k_2} = 2^{2n}, n \geq 0$

定理10.2.2. $\sum\limits_{k_1+k_2+k_3=n} C_{2k_1}^{k_1}C_{2k_2}^{k_2}C_{2k_3}^{k_3} = \frac{(2n+1)!}{n!n!}, n \geq 0$

证明: $(1-4x)^{-3/2} = (1-4x)^{-1/2}(1-4x)^{-1/2}(1-4x)^{-1/2}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n!n!}x^n = (\sum\limits_{k_1=0}^{\infty} C_{2k_1}^{k_1}x^{k_1})(\sum\limits_{k_2=0}^{\infty} C_{2k_2}^{k_2}x^{k_2})(\sum\limits_{k_3=0}^{\infty} C_{2k_3}^{k_3}x^{k_3})$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n!n!}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k_1+k_2+k_3=n} C_{2k_1}^{k_1}C_{2k_2}^{k_2}C_{2k_3}^{k_3}x^n$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k_1+k_2+k_3=n} C_{2k_1}^{k_1}C_{2k_2}^{k_2}C_{2k_3}^{k_3} = \frac{(2n+1)!}{n!n!}$ □

定理10.2.3. $\sum\limits_{k_1+\cdots+k_{2l}=n} C_{2k_1}^{k_{21}}\cdot\cdot C_{2k_{2l}}^{k_{2l}} = 2^{2n}C_{n+l-1}^n, n \geq 0$

证明: $(1-4x)^{-l} = [(1-4x)^{-1/2}]^{2l}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{l-1+n}^{l-1}(4x)^n = (\sum\limits_{k_1=0}^{\infty} C_{2k_1}^{k_1}x^{k_1})\cdot\cdot(\sum\limits_{k_l=0}^{\infty} C_{2k_{2l}}^{k_{2l}}x^{k_{2l}})$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{2n}C_{l-1+n}^{l-1}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k_1+\cdots+k_{2l}=n} C_{2k_1}^{k_1}\cdot\cdot C_{2k_{2l}}^{k_{2l}}x^n$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k_1+\cdots+k_{2l}=n} C_{2k_1}^{k_1}\cdot\cdot C_{2k_{2l}}^{k_{2l}} = 2^{2n}C_{n+l-1}^n$ □

定理10.2.4. $\sum\limits_{k_1+\cdots+k_{2l+1}=n} C_{2k_1}^{k_1}\cdot\cdot C_{2k_{2l+1}}^{k_{2l+1}} = \frac{C_{2n+2l}^{n+l}}{C_{2l}^l}C_{n+l}^n, n \geq 0$

证明: $(1-4x)^{-l-1/2} = [(1-4x)^{-1/2}]^{2l+1}$

$\Leftrightarrow \frac{l!}{(2l)!}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2l)!}{(n+l)!n!}x^n = (\sum\limits_{k_1=0}^{\infty} C_{2k_1}^{k_1}x^{k_1})\cdot\cdot(\sum\limits_{k_l=0}^{\infty} C_{2k_{2l+1}}^{k_{2l}}x^{k_{2l+1}})$

$\Leftrightarrow \frac{l!}{(2l)!}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2l)!}{(n+l)!n!}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k_1+\cdots+k_{2l+1}=n} C_{2k_1}^{k_1}\cdot\cdot C_{2k_{2l+1}}^{k_{2l+1}}x^n$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k_1+\cdots+k_{2l+1}=n} C_{2k_1}^{k_1}\cdot\cdot C_{2k_{2l+1}}^{k_{2l+1}} = \frac{l!}{(2l)!}\frac{(2n+2l)!}{(n+l)!n!} = \frac{C_{2n+2l}^{n+l}}{C_{2l}^l}C_{n+l}^n$ □

10.3 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k+2)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+2)!}{(n-k)!(n-k)!}$ 的严格求解

引理10.3.1. $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(xy)=f'(xy)+xyf''(xy)$

引理10.3.2. $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(1-4xy)^{-1/2}=2(1-4xy)^{-5/2}(1+2xy)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+2)!}{k!k!}(xy)^k$

证明： $(1-4xy)^{-1/2}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{k!k!}(xy)^k$

$\Rightarrow\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(1-4xy)^{-1/2}=2(1-4xy)^{-5/2}(1+2xy)$

$=\sum\limits_{k=0}^{\infty}k^2C_{2k}^{k}(xy)^{k-1}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{(k-1)!(k-1)!}(xy)^{k-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+2)!}{k!k!}(xy)^k$ □

定理10.3.1. $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k+2)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+2)!}{(n-k)!(n-k)!}=2^{2n}(4C_{n+4}^4+4C_{n+3}^4+C_{n+2}^4),n\geq0$

证明： $4(1-4xy)^{-5}(1+2xy)^2=[2(1-4xy)^{-5/2}(1+2xy)][2(1-4xy)^{-5/2}(1+2xy)]$

$\Leftrightarrow4(1+2xy)^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_{n+4}^4(4xy)^n=[\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+2)!}{k!k!}(xy)^k][\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{(2l+2)!}{l!l!}(xy)^l]$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}4C_{n+4}^4(4xy)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}4C_{n+4}^4(4xy)^{n+1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_{n+4}^4(4xy)^{n+2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k+2)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+2)!}{(n-k)!(n-k)!}(xy)^n$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}4C_{n+4}^4(4xy)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}4C_{n+3}^4(4xy)^n+\sum\limits_{n=2}^{\infty}C_{n+2}^4(4xy)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k+2)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+2)!}{(n-k)!(n-k)!}(xy)^n$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}4C_{n+4}^4(4xy)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}4C_{n+3}^4(4xy)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_{n+2}^4(4xy)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k+2)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+2)!}{(n-k)!(n-k)!}(xy)^n$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}(4C_{n+4}^4+4C_{n+3}^4+C_{n+2}^4)2^{2n}(xy)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k+2)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+2)!}{(n-k)!(n-k)!}(xy)^n$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k+2)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+2)!}{(n-k)!(n-k)!}=2^{2n}(4C_{n+4}^4+4C_{n+3}^4+C_{n+2}^4)$ □

10.4 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k+3)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+3)!}{(n-k)!(n-k)!}$ 的严格求解

引理10.4.1. $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(1-4xy)^{-3/2}=6(1-4xy)^{-7/2}(1+6xy)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+3)!}{k!k!}(xy)^k$

证明： $(1-4xy)^{-3/2}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)!}{k!k!}(xy)^k$

$\Rightarrow\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(1-4xy)^{-3/2}=6(1-4xy)^{-7/2}(1+6xy)$

$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!(k-1)!}(xy)^{k-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+3)!}{k!k!}(xy)^k$ □

定理10.4.1. $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k+3)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+3)!}{(n-k)!(n-k)!}=2^{2n}(36C_{n+6}^6+108C_{n+5}^6+81C_{n+4}^6),n\geq0$

证明： $36(1-4xy)^{-7}(1+6xy)^2=[6(1-4xy)^{-7/2}(1+6xy)][6(1-4xy)^{-7/2}(1+6xy)]$

$\Leftrightarrow36(1+6xy)^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_{n+6}^6(4xy)^n=[\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+3)!}{k!k!}(xy)^k][\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{(2l+3)!}{l!l!}(xy)^l]$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}36C_{n+6}^6(4xy)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}108C_{n+6}^6(4xy)^{n+1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}81C_{n+6}^6(4xy)^{n+2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k+3)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+3)!}{(n-k)!(n-k)!}(xy)^n$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}36C_{n+6}^6(4xy)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}108C_{n+5}^6(4xy)^n+\sum\limits_{n=2}^{\infty}81C_{n+4}^6(4xy)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k+3)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+3)!}{(n-k)!(n-k)!}(xy)^n$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}36C_{n+6}^6(4xy)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}108C_{n+5}^6(4xy)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}81C_{n+4}^6(4xy)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k+3)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+3)!}{(n-k)!(n-k)!}(xy)^n$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}(36C_{n+6}^6+108C_{n+5}^6+81C_{n+4}^6)2^{2n}(xy)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k+3)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+3)!}{(n-k)!(n-k)!}(xy)^n$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k+3)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+3)!}{(n-k)!(n-k)!}=2^{2n}(36C_{n+6}^6+108C_{n+5}^6+81C_{n+4}^6)$ □

10.5 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}$ 的严格求解

引理10.5.1. $\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}(1-4xy)^{-1/2}=i!j!(1-4xy)^{-(i+j+1/2)}\sum\limits_{r=0}^{i}\frac{(2i+2j-2r)!}{(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!r!}(1-4xy)^r y^{i-r}x^{j-r};n\geq 0,i\geq 0,j\geq 0$

证明: $\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}(1-4xy)^{-1/2}$
$=2^j(2j-1)!!\frac{\partial^i}{\partial x^i}[(1-4xy)^{-j-1/2}x^j]$
$=2^j(2j-1)!!\sum\limits_{r=0}^{i}C_i^r\frac{\partial^r}{\partial x^r}[(1-4xy)^{-j-1/2}]\frac{\partial^{i-r}}{\partial x^{i-r}}x^j$
$=2^j(2j-1)!!\sum\limits_{r=0}^{i}C_i^r 2^r\frac{(2j+2r-1)!!}{(2j-1)!!}(1-4xy)^{-j-1/2-r}y^r\frac{j!}{(j-i+r)!}x^{j-i+r}$
$=\sum\limits_{r=0}^{i}2^{j+r}(2j+2r-1)!!\frac{i!}{(i-r)!r!}\frac{j!}{(j-i+r)!}(1-4xy)^{-j-1/2-r}y^r x^{j-i+r}$
$=\sum\limits_{r=0}^{i}\frac{(2j+2r)!}{(j+r)!}\frac{i!}{(i-r)!r!}\frac{j!}{(j-i+r)!}(1-4xy)^{-j-1/2-r}y^r x^{j-i+r}$
$=\sum\limits_{r=0}^{i}\frac{(2j+2i-2r)!}{(j+i-r)!}\frac{i!}{(i-r)!r!}\frac{j!}{(j-r)!}(1-4xy)^{-j-1/2-i+r}y^{i-r}x^{j-r}$
$=(1-4xy)^{-(i+j+1/2)}\sum\limits_{r=0}^{i}\frac{(2i+2j-2r)!}{(i+j-r)!}\frac{i!j!}{(i-r)!(j-r)!r!}(1-4xy)^r y^{i-r}x^{j-r}$
$=i!j!(1-4xy)^{-(i+j+1/2)}\sum\limits_{r=0}^{i}\frac{(2i+2j-2r)!}{(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!r!}(1-4xy)^r x^{j-r}y^{i-r}$
$=x^jy^ii!j!(1-4xy)^{-(i+j+1/2)}\sum\limits_{r=0}^{i}\frac{(2i+2j-2r)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}(\frac{1-4xy}{xy})^r$ □

引理10.5.2. $n\geq 0,i\geq 0,j\geq 0$
$\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}(1-4xy)^{-1/2}=i!j!(1-4xy)^{-(i+j+1/2)}\sum\limits_{r=0}^{i}\sum\limits_{k=0}^{r}(-4)^k\frac{(2i+2j-2r)!}{(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!k!(r-k)!}y^{k+i-r}x^{k+j-r}$

引理10.5.3. $n\geq 0,i\geq 0,j\geq 0$
$\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}(1+4xy)^{-1/2}=(-1)^{i+j}i!j!(1+4xy)^{-(i+j+1/2)}\sum\limits_{r=0}^{i}(-1)^r\frac{(2i+2j-2r)!}{(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!r!}(1+4xy)^r y^{i-r}x^{j-r}$

引理10.5.4. $n\geq 0,i\geq 0,j\geq 0$
$\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}(1+4xy)^{-1/2}=(-1)^{i+j}i!j!(1+4xy)^{-(i+j+1/2)}\sum\limits_{r=0}^{i}\sum\limits_{k=0}^{r}(-1)^r4^k\frac{(2i+2j-2r)!}{(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!k!(r-k)!}y^{k+i-r}x^{k+j-r}$

定理10.5.1. $n\geq 0,i\geq 0,j\geq 0$
$\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}=4^{n-2i-2j}\sum\limits_{r=0}^{i}\sum\limits_{r'=0}^{j}4^{r+r'}\frac{(2i+2j-2r)!i!j!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r')!i!j!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}C_n^{2i+2j-r-r'}$

证明: $(1-4xy)^{-1/2}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{k!k!}x^ky^k$
$\Leftrightarrow\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}(1-4xy)^{-1/2}=\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{k!k!}x^ky^k$
$\Leftrightarrow\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}(1-4xy)^{-1/2}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}x^{k-i}y^{k-j}$
$\Leftrightarrow[\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}(1-4xy)^{-1/2}]^2=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}x^{k-i}y^{k-j}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{(2l)!}{(l-i)!(l-j)!}x^{l-i}y^{l-j}$
$\Leftrightarrow[\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}(1-4xy)^{-1/2}]^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}x^{n-2i}y^{n-2j}$
$\Leftrightarrow(x^jy^ii!j!)^2(1-4xy)^{-(2i+2j+1)}[\sum\limits_{r=0}^{i}\frac{(2i+2j-2r)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}(\frac{1-4xy}{xy})^r]^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}x^{n-2i}y^{n-2j}$
$\Leftrightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}x^{n-2i}y^{n-2j}$
$=(x^jy^ii!j!)^2(1-4xy)^{-(2i+2j+1)}[\sum\limits_{r=0}^{i}\sum\limits_{r'=0}^{j}\frac{(2i+2j-2r)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}(\frac{1-4xy}{xy})^r\frac{(2i+2j-2r')!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}(\frac{1-4xy}{xy})^{r'}]$
$=(x^jy^ii!j!)^2(1-4xy)^{-(2i+2j+1)}[\sum\limits_{r=0}^{i}\sum\limits_{r'=0}^{j}\frac{(2i+2j-2r)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r')!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}(\frac{1-4xy}{xy})^{r+r'}]$

$= (x^j y^i i!j!)^2[\sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j} \frac{(2i+2j-2r)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r')!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}(1-4xy)^{-(2i+2j-r-r'+1)}(xy)^{-(r+r')}]$

$= (x^j y^i i!j!)^2\sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j} \frac{(2i+2j-2r)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r')!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}[\sum_{n=0}^{\infty} C_{2i+2j-r-r'+n}^{2i+2j-r-r'}(4xy)^n](xy)^{-(r+r')}$

$= (x^j y^i i!j!)^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j} 2^{2n}\frac{(2i+2j-2r)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r')!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}C_{2i+2j-r-r'+n}^{2i+2j-r-r'}(xy)^{n-(r+r')}$

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}(xy)^n$

$= (i!j!)^2\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j} 2^{2n'}\frac{(2i+2j-2r)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r')!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}C_{2i+2j-r-r'+n'}^{2i+2j-r-r'}(xy)^{n'+2i+2j-(r+r')}$

$= (i!j!)^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j} 2^{2(n-2i-2j+r+r')}\frac{(2i+2j-2r)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r')!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}C_{n}^{2i+2j-r-r'}(xy)^n$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!} = \sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j} 2^{2(n-2i-2j+r+r')}\frac{(2i+2j-2r)!i!j!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r')!i!j!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}C_{n}^{2i+2j-r-r'}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!} = 4^{n-2i-2j}\sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j} 4^{r+r'}\frac{(2i+2j-2r)!i!j!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r')!i!j!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}C_{n}^{2i+2j-r-r'}$ □

10.6 $\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}$ 的严格求解

引理10.6.1. $\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}(1-4xy)^{-3/2} = x^j y^i i!j!(1-4xy)^{-(i+j+3/2)}\sum_{r=0}^{i}\frac{(2i+2j-2r+1)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}(\frac{1-4xy}{xy})^r; i\ge 0, j\ge 0$

证明: $\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}(1-4xy)^{-3/2}$

$= 2^j(2j+1)!!\frac{\partial^i}{\partial x^i}[(1-4xy)^{-j-3/2}x^j]$

$= 2^j(2j+1)!!\sum_{r=0}^{i}C_i^r\frac{\partial^r}{\partial x^r}[(1-4xy)^{-j-3/2}]\frac{\partial^{i-r}}{\partial x^{i-r}}x^j$

$= 2^j(2j+1)!!\sum_{r=0}^{i}C_i^r 2^r\frac{(2j+2r+1)!!}{(2j+1)!!}(1-4xy)^{-j-3/2-r}y^r\frac{j!}{(j-i+r)!}x^{j-i+r}$

$= \sum_{r=0}^{i}2^{j+r}(2j+2r+1)!!\frac{i!}{(i-r)!r!}\frac{j!}{(j-i+r)!}(1-4xy)^{-j-3/2-r}y^r x^{j-i+r}$

$= \sum_{r=0}^{i}\frac{(2j+2r+1)!}{(j+r)!}\frac{i!}{(i-r)!r!}\frac{j!}{(j-i+r)!}(1-4xy)^{-j-3/2-r}y^r x^{j-i+r}$

$= \sum_{r=0}^{i}\frac{(2j+2i-2r+1)!}{(j+i-r)!}\frac{i!}{(i-r)!r!}\frac{j!}{(j-r)!}(1-4xy)^{-j-3/2-i+r}y^{i-r}x^{j-r}$

$= (1-4xy)^{-(i+j+3/2)}\sum_{r=0}^{i}\frac{(2i+2j-2r+1)!}{(i+j-r)!}\frac{i!j!}{(i-r)!(j-r)!r!}(1-4xy)^r y^{i-r}x^{j-r}$

$= i!j!(1-4xy)^{-(i+j+3/2)}\sum_{r=0}^{i}\frac{(2i+2j-2r+1)!}{(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!r!}(1-4xy)^r x^{j-r}y^{i-r}$

$= x^j y^i i!j!(1-4xy)^{-(i+j+3/2)}\sum_{r=0}^{i}\frac{(2i+2j-2r+1)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}(\frac{1-4xy}{xy})^r$ □

定理10.6.1. $\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!} = 4^{n-2i-2j}\sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j}4^{r+r'}\frac{(2i+2j-2r+1)!i!j!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r'+1)!i!j!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}C_{n+2}^{2i+2j-r-r'}$
$n\ge 0, i\ge 0, j\ge 0$

证明: $(1-4xy)^{-3/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)!}{k!k!}x^k y^k$

$\Leftrightarrow \frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}(1-4xy)^{-3/2} = \frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)!}{k!k!}x^k y^k$

$\Leftrightarrow \frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}(1-4xy)^{-3/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}x^{k-i}y^{k-j}$

$\Leftrightarrow [\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}(1-4xy)^{-3/2}]^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}x^{k-i}y^{k-j}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l+1)!}{(l-i)!(l-j)!}x^{l-i}y^{l-j}$

$\Leftrightarrow [\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^j}{\partial y^j}(1-4xy)^{-3/2}]^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}x^{n-2i}y^{n-2j}$

$\Leftrightarrow (x^j y^i i!j!)^2(1-4xy)^{-(2i+2j+3)}[\sum_{r=0}^{i}\frac{(2i+2j-2r+1)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}(\frac{1-4xy}{xy})^r]^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}x^{n-2i}y^{n-2j}$

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}x^{n-2i}y^{n-2j}$

$= (x^jy^ii!j!)^2(1-4xy)^{-(2i+2j+3)}[\sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j}\frac{(2i+2j-2r+1)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}(\frac{1-4xy}{xy})^r\frac{(2i+2j-2r'+1)!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}(\frac{1-4xy}{xy})^{r'}]$

$= (x^jy^ii!j!)^2(1-4xy)^{-(2i+2j+3)}[\sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j}\frac{(2i+2j-2r+1)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r'+1)!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}(\frac{1-4xy}{xy})^{r+r'}]$

$= (x^jy^ii!j!)^2[\sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j}\frac{(2i+2j-2r+1)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r'+1)!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}(1-4xy)^{-(2i+2j-r-r'+3)}(xy)^{-(r+r')}]$

$= (x^jy^ii!j!)^2\sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j}\frac{(2i+2j-2r+1)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r'+1)!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}[\sum_{n=0}^{\infty}C_{2i+2j-r-r'+n}^{2i+2j-r-r'}(4xy)^n](xy)^{-(r+r')}$

$= (x^jy^ii!j!)^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j}2^{2n}\frac{(2i+2j-2r+1)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r'+1)!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}C_{2i+2j-r-r'+2+n}^{2i+2j-r-r'+2}(xy)^{n-(r+r')}$

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}(xy)^n$

$= (i!j!)^2\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j}2^{2n'}\frac{(2i+2j-2r+1)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r'+1)!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}C_{2i+2j-r-r'+2+n'}^{2i+2j-r-r'+2}(xy)^{n'+2i+2j-(r+r')}$

$= (i!j!)^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j}2^{2(n-2i-2j+r+r')}\frac{(2i+2j-2r+1)!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r'+1)!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}C_{n+2}^{2i+2j-r-r'+2}(xy)^n$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!} = \sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j}2^{2(n-2i-2j+r+r')}\frac{(2i+2j-2r+1)!i!j!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r'+1)!i!j!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}C_{n+2}^{2i+2j-r-r'}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!} = 4^{n-2i-2j}\sum_{r=0}^{i}\sum_{r'=0}^{j}4^{r+r'}\frac{(2i+2j-2r+1)!i!j!}{r!(i-r)!(j-r)!(i+j-r)!}\frac{(2i+2j-2r'+1)!i!j!}{r'!(i-r')!(j-r')!(i+j-r')!}C_{n+2}^{2i+2j-r-r'}$ □

10.7 以上求解组合恒等式方法的总结和推广

引理10.7.1. $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f_kx^k \Rightarrow \partial_1^{i_1}\partial_2^{i_2}\cdot\cdot\partial_m^{i_m}f(x_1x_2\cdot\cdot x_m)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^m}{i_1!i_2!\cdot\cdot_{1m}!}f_kx_1^{k-i_1}x_2^{k-i_2}\cdot\cdot x_m^{k-i_m}$

定理10.7.1. $\sum_{r=0}^{i}\frac{i!j!}{r!(i-r)!(j-r)!(k-i-j+r)!}=\frac{k!}{(k-i)!(k-j)!}[\Leftrightarrow]\sum_{r=0}^{i}C_i^rC_{k-i}^{j-r}=C_k^j; i\le i, j\le k$

证明: $(1+xy)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(xy)^k$

$\Rightarrow \partial_x^i\partial_y^j(1+xy)^n=\partial_x^i\partial_y^j\sum_{k=0}^{n}C_n^k(xy)^k$

$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-j)!}[\partial_x^i(1+xy)^{n-j}x^j]=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!k!}{(k-i)!(k-j)!}C_n^kx^{k-i}y^{k-j}$

$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-j)!}\sum_{r=0}^{i}C_i^r[\partial_x^{i-r}(1+xy)^{n-j}][\partial_x^rx^j]=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!k!}{(k-i)!(k-j)!}C_n^kx^{k-i}y^{k-j}$

$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-j)!}\sum_{r=0}^{i}C_i^r[\frac{(n-j)!}{(n-i-j+r)!}(1+xy)^{n-i-j+r}y^{i-r}](\frac{j!}{(j-r)!}x^{j-r})=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!k!}{(k-i)!(k-j)!}C_n^kx^{k-i}y^{k-j}$

$\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{i}\frac{n!i!j!}{r!(i-r)!(j-r)!(n-i-j+r)!}(1+xy)^{n-i-j+r}(xy)^{i+j-r}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!k!}{(k-i)!(k-j)!}C_n^k(xy)^k$

$\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{i}\frac{n!i!j!}{r!(i-r)!(j-r)!(n-i-j+r)!}\sum_{k=0}^{n-i-j+r}C_{n-i-j+r}^k(xy)^{i+j+k-r}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!k!}{(k-i)!(k-j)!}C_n^k(xy)^k$

$\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{i}\sum_{k=i+j-r}^{n}\frac{n!i!j!}{r!(i-r)!(j-r)!(n-i-j+r)!}C_{n-i-j+r}^{k-i-j+r}(xy)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!k!}{(k-i)!(k-j)!}C_n^k(xy)^k$

$\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{i}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!i!j!}{(n-k)!r!(i-r)!(j-r)!(k-i-j+r)!}(xy)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!k!}{(n-k)!(k-i)!(k-j)!}(xy)^k$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{i}\frac{n!i!j!}{(n-k)!r!(i-r)!(j-r)!(k-i-j+r)!}(xy)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!k!}{(n-k)!(k-i)!(k-j)!}(xy)^k$

$\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{i}\frac{i!j!}{r!(i-r)!(j-r)!(k-i-j+r)!}=\frac{k!}{(k-i)!(k-j)!}$ □

11 母函数导数相关的组合恒等式

11.1 基本母函数展开

引理11.1.1. $(\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i)(\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j x^j) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k \Rightarrow c_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}, k \geq 0$

引理11.1.2. $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k, (1-x)^{-n-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{n+k}^n x^k, (1-x)^{-n-1/2} = \frac{n!}{(2n)!} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2n)!}{(k+n)!k!} 4^{-k} x^k; n \geq 0$

11.2 $\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}(1+x)^n$导出的组合恒等式

定理11.2.1. $\sum\limits_{r=0}^{k} C_n^r C_{n-r}^{k-r} = 2^k C_n^k, \sum\limits_{r=m}^{n} C_n^r C_r^m = 2^{n-m} C_n^m; k \geq 0, n \geq m \geq 0$

证明： $\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}(1+x)^n = \frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}\sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r x^r$

$\Leftrightarrow \frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}(1+x)^n = \sum\limits_{r=l}^{n} C_n^r C_r^l x^{r-l} \Leftrightarrow C_n^l (1+x)^{n-l} = \sum\limits_{r=0}^{n-l} C_n^r C_{n-r}^l x^{n-l-r}$

$\Rightarrow C_n^l 2^{n-l} = \sum\limits_{r=0}^{n-l} C_n^r C_{n-r}^l \Leftrightarrow C_n^{n-l} 2^{n-l} = \sum\limits_{r=0}^{n-l} C_n^r C_{n-r}^{n-l-r} \Leftrightarrow \sum\limits_{r=0}^{n-l} C_n^r C_{n-r}^{n-l-r} = 2^{n-l} C_n^{n-l}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{r=0}^{k} C_n^r C_{n-r}^{k-r} = 2^k C_n^k \Leftrightarrow \sum\limits_{r=m}^{n} C_n^r C_r^m = 2^{n-m} C_n^m$ □

11.3 $\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}(1-x)^{-n}$导出的组合恒等式(不能得到额外的新东西)

证明： $\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}(1-x)^{-n} = \frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{n-1+k}^{n-1} x^k$

$\Leftrightarrow C_{n-1+l}^{n-1}(1-x)^{-n-l} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{n-1+k}^{n-1} C_k^l x^{k-l}$

$\Leftrightarrow C_{n-1+l}^{n-1} \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{n-1+l+k}^{n-1+l} x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{n-1+l+k}^{n-1} C_{k+l}^l x^k$

$\Leftrightarrow C_{n-1+l}^{n-1} C_{n-1+l+k}^{n-1+l} = C_{n-1+l+k}^{n-1} C_{k+l}^l$ □

11.4 $\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}[x^m(1+x)^n]$导出的组合恒等式

定理11.4.1. $\sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r C_{m+n-r}^l = \sum\limits_{k=0}^{l} 2^{n-k} C_m^{l-k} C_n^k, \sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r C_{l+k-r}^l = \sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r C_{(l+k-n)+n-r}^l = \sum\limits_{j=0}^{l} 2^{n-j} C_{l+k-n}^{l-j} C_n^j$
$k \geq 0, n \geq 0, l \geq 0$

证明： $\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}[x^m(1+x)^n] = \sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r C_{r+m}^l x^{r+m-l}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r C_{m+n-r}^l x^{m+n-r-l} = \frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}[x^m(1+x)^n]$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r C_{m+n-r}^l x^{m+n-r-l} = \frac{1}{l!}\sum\limits_{k=0}^{l} C_l^k \frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}} x^m \frac{d^k}{dx^k}(1+x)^n$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r C_{m+n-r}^l x^{m+n-r-l} = \frac{1}{l!}\sum\limits_{k=0}^{l} C_l^k \frac{m!}{(m-l+k)!} x^{m-l+k} \frac{n!}{(n-k)!}(1+x)^{n-k}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r C_{m+n-r}^l x^{m+n-r-l} = \sum\limits_{k=0}^{l} C_m^{l-k} C_n^k x^{m-l+k}(1+x)^{n-k}$

$\Rightarrow \sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r C_{m+n-r}^l = \sum\limits_{k=0}^{l} 2^{n-k} C_m^{l-k} C_n^k$ □

11.5 $\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}(1+x)^{m+n}$导出的组合恒等式(不能得到额外的新东西)

证明： $\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}(1+x)^{m+n} = \frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}[(1+x)^m(1+x)^n]$

$\Leftrightarrow C_{m+n}^l (1+x)^{m+n-l} = \frac{1}{l!}\sum\limits_{k=0}^{l} C_l^k \frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}}(1+x)^m \frac{d^k}{dx^k}(1+x)^n$

$\Leftrightarrow C_{m+n}^l (1+x)^{m+n-l} = \sum\limits_{k=0}^{l} C_m^{l-k}(1+x)^{m-l+k} C_n^k (1+x)^{n-k}$

$\Leftrightarrow C_{m+n}^{l}(1+x)^{m+n-l}=\sum\limits_{k=0}^{l}C_{m}^{l-k}C_{n}^{k}(1+x)^{m+n-l}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{l}C_{m}^{l-k}C_{n}^{k}=C_{m+n}^{l}$ □

证明：$\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}(1+x)^{m+n}=\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}[(1+x)^m(1+x)^n]$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{r=l}^{m+n}C_{m+n}^{r}C_{r}^{l}x^{r-l}=\frac{1}{l!}\sum\limits_{k=0}^{l}C_{l}^{k}\frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}}(1+x)^m\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^n$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{r=l}^{m+n}C_{m+n}^{r}C_{r}^{l}x^{r-l}=\frac{1}{l!}\sum\limits_{k=0}^{l}k!(l-k)!C_{l}^{k}\sum\limits_{i=l-k}^{m}C_{m}^{i}C_{i}^{l-k}x^{i-l+k}\sum\limits_{j=k}^{n}C_{n}^{j}C_{j}^{k}x^{j-k}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{r=l}^{m+n}C_{m+n}^{r}C_{r}^{l}x^{r-l}=\sum\limits_{k=0}^{l}\sum\limits_{i=l-k}^{m}\sum\limits_{j=k}^{n}C_{m}^{i}C_{i}^{l-k}C_{n}^{j}C_{j}^{k}x^{i+j-l}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{r=l}^{m+n}C_{m+n}^{r}C_{r}^{l}x^{r-l}=\sum\limits_{r=l}^{m+n}\sum\limits_{k=0}^{l}\sum\limits_{i=l-k}^{m}C_{m}^{i}C_{i}^{l-k}C_{n}^{r-i}C_{r-i}^{k}x^{r-l}$

$\Leftrightarrow C_{m+n}^{r}C_{r}^{l}=\sum\limits_{k=0}^{l}\sum\limits_{i=l-k}^{m}C_{m}^{i}C_{i}^{l-k}C_{n}^{r-i}C_{r-i}^{k}$

$\Leftrightarrow C_{m+n}^{r}C_{r}^{l}=\sum\limits_{k=0}^{l}\sum\limits_{i=0}^{m}C_{m}^{i}C_{n}^{r-i}C_{i}^{l-k}C_{r-i}^{k}$

$\Leftrightarrow C_{m+n}^{r}C_{r}^{l}=\sum\limits_{i=0}^{m}C_{m}^{i}C_{n}^{r-i}\sum\limits_{k=0}^{l}C_{i}^{l-k}C_{r-i}^{k}$

$\Leftrightarrow C_{m+n}^{r}C_{r}^{l}=\sum\limits_{i=0}^{m}C_{m}^{i}C_{n}^{r-i}C_{r}^{l}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{m}C_{m}^{i}C_{n}^{r-i}=C_{m+n}^{r}$ □

11.6 $\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}(1-x)^{-(m+n)}$导出的组合恒等式(不能得到额外的新东西)

证明：$\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}(1-x)^{-(m+n)}=\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}[(1-x)^{-m}(1-x)^{-n}]$

$\Leftrightarrow C_{m+n-1+l}^{m+n-1}(1-x)^{-m-n-l}=\frac{1}{l!}\sum\limits_{k=0}^{l}C_{l}^{k}\frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}}(1-x)^{-m}\frac{d^k}{dx^k}(1-x)^{-n}$

$\Leftrightarrow C_{m+n-1+l}^{m+n-1}(1-x)^{-m-n-l}=\sum\limits_{k=0}^{l}C_{m-1+l-k}^{m-1}(1-x)^{-m-l+k}C_{n-1+k}^{n-1}(1-x)^{-n-k}$

$\Leftrightarrow C_{m+n-1+l}^{m+n-1}(1-x)^{-m-n-l}=\sum\limits_{k=0}^{l}C_{m-1+l-k}^{m-1}C_{n-1+k}^{n-1}(1-x)^{-m-n-l}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{l}C_{m-1+l-k}^{m-1}C_{n-1+k}^{n-1}=C_{m+n-1+l}^{m+n-1}$ □

证明：$\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}(1-x)^{-(m+n)}=\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}[(1-x)^{-m}(1-x)^{-n}]$

$\Leftrightarrow \frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}\sum\limits_{r=0}^{\infty}C_{m+n-1+r}^{m+n-1}x^r=\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}[(\sum\limits_{i=0}^{\infty}C_{m-1+i}^{m-1}x^i)(\sum\limits_{j=0}^{\infty}C_{n-1+j}^{n-1}x^j)]$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{r=0}^{\infty}C_{m+n-1+r}^{m+n-1}C_{r}^{l}x^{r-l}=\frac{1}{l!}\sum\limits_{k=0}^{l}C_{l}^{k}[\frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}}(\sum\limits_{i=0}^{\infty}C_{m-1+i}^{m-1}x^i)\frac{d^k}{dx^k}(\sum\limits_{j=0}^{\infty}C_{n-1+j}^{n-1}x^j)]$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{r=0}^{\infty}C_{m+n-1+r}^{m+n-1}C_{r}^{l}x^{r-l}=\sum\limits_{k=0}^{l}(\sum\limits_{i=0}^{\infty}C_{m-1+i}^{m-1}C_{i}^{l-k}x^{i-l+k})(\sum\limits_{j=0}^{\infty}C_{n-1+j}^{n-1}C_{j}^{k}x^{j-k})]$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{r=0}^{\infty}C_{m+n-1+r}^{m+n-1}C_{r}^{l}x^{r-l}=\sum\limits_{r=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{l}\sum\limits_{i=0}^{\infty}C_{m-1+i}^{m-1}C_{n-1+r-i}^{n-1}C_{i}^{l-k}C_{r-i}^{k}x^{r-l}$

$\Leftrightarrow C_{m+n-1+r}^{m+n-1}C_{r}^{l}=\sum\limits_{k=0}^{l}\sum\limits_{i=0}^{\infty}C_{m-1+i}^{m-1}C_{n-1+r-i}^{n-1}C_{i}^{l-k}C_{r-i}^{k}$

$\Leftrightarrow C_{m+n-1+r}^{m+n-1}C_{r}^{l}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}C_{m-1+i}^{m-1}C_{n-1+r-i}^{n-1}\sum\limits_{k=0}^{l}C_{i}^{l-k}C_{r-i}^{k}$

$\Leftrightarrow C_{m+n-1+r}^{m+n-1}C_{r}^{l}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}C_{m-1+i}^{m-1}C_{n-1+r-i}^{n-1}C_{r}^{l}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{r}C_{m-1+i}^{m-1}C_{n-1+r-i}^{n-1}=C_{m+n-1+r}^{m+n-1}$ □

11.7 $\partial_x[(1+x)^n(1-x)^{-l-1}]$导出的组合恒等式

证明: $\partial_x[(1+x)^n(1-x)^{-l-1}]=\partial_x[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}C_n^rC_{l+k-r}^lx^k]$

$\Leftrightarrow n(1+x)^{n-1}(1-x)^{-l-1}+(l+1)(1+x)^n(1-x)^{-l-2}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}kC_n^rC_{l+k-r}^lx^{k-1}$

$\Leftrightarrow n\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}C_{n-1}^rC_{l+k-r}^lx^k+(l+1)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}C_n^rC_{l+k+1-r}^{l+1}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k+1}(k+1)C_n^rC_{l+k+1-r}^lx^k$

$\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{k}[nC_{n-1}^rC_{l+k-r}^l+(l+1)C_n^rC_{l+k+1-r}^{l+1}]=\sum_{r=0}^{k+1}(k+1)C_n^rC_{l+k+1-r}^l$

$\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{k}(n+l+1+k-2r)C_n^rC_{l+k-r}^l=(k+1)\sum_{r=0}^{k+1}C_n^rC_{l+k+1-r}^l$

$\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{k}(n+l-2r)C_n^rC_{l+k-r}^l=(k+1)\sum_{r=0}^{k+1}C_n^rC_{l+k+1-r}^l$

$\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{k}(n+l)C_n^rC_{l+k-r}^l=2n\sum_{r=0}^{k}C_{n-1}^rC_{l+k-r}^l+(k+1)\sum_{r=0}^{k+1}C_n^rC_{l+k+1-r}^l$ □

12 小结

定理12.0.1. $\sum_{i=0}^{k}C_m^iC_n^{k-i}=C_{m+n}^k$

定理12.0.2. $\sum_{i=0}^{k}C_{m+i}^mC_{n+k-i}^n=C_{m+n+1+k}^{m+n+1}$

定理12.0.3. $C_{m-n}^k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_m^iC_{n-1+k-i}^{n-1}$

定理12.0.4. $\sum_{i=0}^{k}4^{k-i}C_{n-1+k-i}^{n-1}\frac{C_{2m+2i}^{m+i}C_{m+i}^m}{C_{2m}^m}=\frac{C_{2m+2n+2k}^{m+n+k}C_{m+n+k}^{m+n}}{C_{2m+2n}^{m+n}}$

定理12.0.5. $\sum_{i=0}^{k}C_{2m+2i}^{m+i}C_{2n+2k-2i}^{n+k-i}C_{m+i}^mC_{n+k-i}^n=4^kC_{2m}^mC_{2n}^nC_{m+n+k}^{m+n}[\Leftrightarrow]\sum_{i=0}^{k}\frac{C_k^iC_{m+n+k}^{m+i}}{C_{2m+2n+2k}^{2m+2i}}=\frac{C_{2m}^mC_{2n}^n}{C_{m+n}^m}\frac{4^k}{C_{2m+2n+2k}^{m+n+k}}$

定理12.0.6. $\sum_{i=0}^{2k}(-1)^iC_n^iC_n^{2k-i}=(-1)^kC_n^k,\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^iC_n^iC_n^{2k+1-i}=0$

定理12.0.7. $\sum_{i=0}^{2k}(-1)^iC_{n-1+i}^{n-1}C_{n-1+2k-i}^{n-1}=C_{n-1+k}^{n-1},\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^iC_{n-1+i}^{n-1}C_{n+2k-i}^{n-1}=0$

定理12.0.8. $\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i\frac{(2n+2i)!}{(n+i)!i!}\frac{(2n+4k-2i)!}{(n+2k-i)!(2k-i)!}=4^k\frac{(2n+2k)!}{(n+k)!k!},\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^i\frac{(2n+2i)!}{(n+i)!i!}\frac{(2n+4k+2-2i)!}{(n+2k+1-i)!(2k+1-i)!}=0$

定理12.0.9. $\sum_{r=0}^{[k/2]}(-1)^rC_n^rC_{n+k-2r}^n=\sum_{r=0}^{k}C_n^r;\sum_{r=0}^{[k/2]}(-1)^rC_n^rC_{n+k-2r}^n=2^n,k\geq n;\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^rC_n^rC_{2n-2r}^n=2^n,n\geq 0$

定理12.0.10. $\sum_{r=0}^{k}C_n^rC_{n-r}^{k-r}=2^kC_n^k,\sum_{r=m}^{n}C_n^rC_r^m=2^{n-m}C_n^m$

13 $\partial_{x_l}\cdot\cdot\partial_{x_1}(x_1\cdot\cdot x_k+\alpha)^{2s}$相关的组合恒等式

13.1 $\partial_{x_l}\cdot\cdot\partial_{x_1}(x_1\cdot\cdot x_k+\alpha)^{2s}$的通项展开式

定理13.1.1. $\partial_{x_l}\cdot\cdot\partial_{x_1}(x_1\cdot\cdot x_k+\alpha)^{2s}=\sum_{i=1}^{l}\frac{(2s)!}{(2s-i)!}a(i,l;s)(x_1\cdot\cdot x_k+\alpha)^{2s-i}\frac{(x_1\cdot\cdot x_k)^i}{(x_1\cdot\cdot x_l)},1\leq l<k$
$a(i,l+1)=ia(i,l)+a(i-1,l),a(l,l)=1,a(1,l)=1,a(0,l\neq 0):=0,a(l+1,l):=0;1\leq i\leq l+1$

证明: $\partial_{x_l}\cdot\cdot\partial_{x_1}(x_1\cdot\cdot x_k+\alpha)^{2s}=\sum_{i=1}^{l}\frac{(2s)!}{(2s-i)!}a(i,l;s)(x_1\cdot\cdot x_k+\alpha)^{2s-i}\frac{(x_1\cdot\cdot x_k)^i}{(x_1\cdot\cdot x_l)},1\leq l<k$

$\Rightarrow\partial_{x_{l+1}}\partial_{x_l}\cdot\cdot\partial_{x_1}(x_1\cdot\cdot x_k+\alpha)^{2s}=\partial_{x_{l+1}}\sum_{i=1}^{l}\frac{(2s)!}{(2s-i)!}a(i,l;s)(x_1\cdot\cdot x_k+\alpha)^{2s-i}\frac{(x_1\cdot\cdot x_k)^i}{(x_1\cdot\cdot x_l)}$

$= \sum_{i=1}^{l} \frac{(2s)!}{(2s-i-1)!} a(i,l;s)(x_1 \cdot \cdot x_k + \alpha)^{2s-i-1} \frac{(x_1 \cdot\cdot x_k)^{i+1}}{(x_1 \cdot\cdot x_{l+1})} + \sum_{i=1}^{l} \frac{(2s)!}{(2s-i)!} ia(i,l;s)(x_1 \cdot \cdot x_k + \alpha)^{2s-i} \frac{(x_1 \cdot\cdot x_k)^{i}}{(x_1 \cdot\cdot x_{l+1})}$

$= \sum_{i=2}^{l+1} \frac{(2s)!}{(2s-i)!} a(i-1,l;s)(x_1 \cdot \cdot x_k + \alpha)^{2s-i} \frac{(x_1 \cdot\cdot x_k)^{i}}{(x_1 \cdot\cdot x_{l+1})} + \sum_{i=1}^{l} \frac{(2s)!}{(2s-i)!} ia(i,l;s)(x_1 \cdot \cdot x_k + \alpha)^{2s-i} \frac{(x_1 \cdot\cdot x_k)^{i}}{(x_1 \cdot\cdot x_{l+1})}$

$= \frac{(2s)!}{(2s-l-1)!} a(l,l;s)(x_1 \cdot \cdot x_k + \alpha)^{2s-l-1} \frac{(x_1 \cdot\cdot x_k)^{l+1}}{(x_1 \cdot\cdot x_{l+1})} + \frac{(2s)!}{(2s-1)!} a(1,l;s)(x_1 \cdot \cdot x_k + \alpha)^{2s-1} \frac{(x_1 \cdot\cdot x_k)}{(x_1 \cdot\cdot x_{l+1})}$

$+ \sum_{i=2}^{l} \frac{(2s)!}{(2s-i)!} a(i-1,l;s)(x_1 \cdot \cdot x_k + \alpha)^{2s-i} \frac{(x_1 \cdot\cdot x_k)^{i}}{(x_1 \cdot\cdot x_{l+1})} + \sum_{i=2}^{l} \frac{(2s)!}{(2s-i)!} ia(i,l;s)(x_1 \cdot \cdot x_k + \alpha)^{2s-i} \frac{(x_1 \cdot\cdot x_k)^{i}}{(x_1 \cdot\cdot x_{l+1})}$

$= \frac{(2s)!}{(2s-l-1)!} a(l,l;s)(x_1 \cdot \cdot x_k + \alpha)^{2s-l-1} \frac{(x_1 \cdot\cdot x_k)^{l+1}}{(x_1 \cdot\cdot x_{l+1})} + \frac{(2s)!}{(2s-1)!} a(1,l;s)(x_1 \cdot \cdot x_k + \alpha)^{2s-1} \frac{(x_1 \cdot\cdot x_k)}{(x_1 \cdot\cdot x_{l+1})}$

$+ \sum_{i=2}^{l} \frac{(2s)!}{(2s-i)!} [a(i-1,l;s) + ia(i,l;s)](x_1 \cdot \cdot x_k + \alpha)^{2s-i} \frac{(x_1 \cdot\cdot x_k)^{i}}{(x_1 \cdot\cdot x_{l+1})}$

$= \sum_{i=1}^{l+1} \frac{(2s)!}{(2s-i)!} a(i,l+1;s)(x_1 \cdot \cdot x_k + \alpha)^{2s-i} \frac{(x_1 \cdot\cdot x_k)^{i}}{(x_1 \cdot\cdot x_{l+1})}, 2 \le l+1 \le k$

$\Rightarrow a(l+1,l+1;s) = a(l,l;s) = 1, a(1,l+1;s) = a(1,l;s) = 1$

$a(i,l+1;s) = ia(i,l;s) + a(i-1,l;s), 2 \le i \le l$

$\Leftrightarrow a(i,l+1) = ia(i,l) + a(i-1,l), a(l,l) = 1, a(1,l) = 1, a(0,l \ne 0) := 0, a(l+1,l) := 0; 1 \le i \le l+1$ □

13.2 $\partial_{x_l} \cdot \cdot \partial_{x_1}(x_1 \cdot \cdot x_k + \alpha)^{2s}$展开系数的求解

推论13.2.1. $1 \le i \le l+1$

$$a(i,l+1) = a(0,l-i+1) + \sum_{j=1}^{i} ja(j,l-i+j), a(l,l) = 1, a(1,l) = 1, a(0,l \ne 0) := 0, a(l+1,l) := 0$$

证明: $a(i,l+1) = ia(i,l) + a(i-1,l), a(l,l) = 1, a(1,l) = 1, a(0,l \ne 0) := 0, a(l+1,l) := 0; 1 \le i \le l+1$

$\Leftrightarrow a(i,l+1) - a(i-1,l) = ia(i,l), a(l,l) = 1, a(1,l) = 1, a(0,l \ne 0) := 0, a(l+1,l) := 0; 1 \le i \le l+1$

$\Rightarrow a(i,l+1) - a(0,l-i+1) = \sum_{j=0}^{i-1}(i-j)a(i-j,l-j), a(l,l) = 1, a(1,l) = 1, a(0,l \ne 0) := 0, a(l+1,l) := 0; 1 \le i \le l+1$

$\Leftrightarrow a(i,l+1) = a(0,l-i+1) + \sum_{j=1}^{i} ja(j,l-i+j), a(l,l) = 1, a(1,l) = 1, a(0,l \ne 0) := 0, a(l+1,l) := 0; 1 \le i \le l+1$ □

推论13.2.2. $a(l,l+1) = C_{l+1}^2, a(l-1,l) = C_l^2$

证明: $a(l,l+1) = a(0,1) + \sum_{j=1}^{l} ja(j,j), a(l,l) = 1, a(1,l) = 1, a(0,l \ne 0) := 0, a(l+1,l) := 0; 1 \le i \le l+1$

$\Rightarrow a(l,l+1) = \sum_{j=1}^{l} j = C_{l+1}^2$ □

推论13.2.3. $a(l-1,l+1) = C_{l+1}^3 + 3C_{l+1}^4, a(l-2,l) = C_l^3 + 3C_l^4$

证明: $a(l-1,l+1) = a(0,2) + \sum_{j=1}^{l-1} ja(j,j+1), a(l,l) = 1, a(1,l) = 1, a(0,l \ne 0) := 0, a(l+1,l) := 0; 1 \le i \le l+1$

$\Rightarrow a(l-1,l+1) = \sum_{j=1}^{l-1} jC_{j+1}^2 = C_{l+1}^3 + 3C_{l+1}^4$ □

推论13.2.4. $a(l-2,l+1) = C_{l+1}^4 + 10C_{l+1}^5 + 15C_{l+1}^6$

证明: $a(l-2,l+1) = a(0,3) + \sum_{j=1}^{l-2} ja(j,j+2), a(l,l) = 1, a(1,l) = 1, a(0,l \ne 0) := 0, a(l+1,l) := 0; 1 \le i \le l+1$

$\Rightarrow a(l-2,l+1) = \sum_{j=1}^{l-2} j(C_{j+2}^3 + 3C_{j+2}^4) = \sum_{j=1}^{l-2}(4C_{j+2}^4 + C_{j+2}^3 + 15C_{j+2}^5 + 6C_{j+2}^4) = \sum_{j=1}^{l-2}(C_{j+2}^3 + 10C_{j+2}^4 + 15C_{j+2}^5)$

$\Rightarrow a(l-2,l+1) = C_{l+1}^4 + 10C_{l+1}^5 + 15C_{l+1}^6 = C_4^0 C_{l+1}^4 + C_5^2 C_{l+1}^5 + C_6^4 C_{l+1}^6$ □

13.3 $\partial_{x_l}\cdot\cdot\partial_{x_1}(x_1\cdot\cdot x_k-1)^{2s}$导出的一系列组合恒等式

推论13.3.1.
$$\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^l=0,0\le l\le 2s-1\\ \sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^{2s}=(-1)^{2s}(2s)!,l=2s\\ \sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^{2s+1}=(-1)^{2s}(2s)!C_{2s+1}^2,l=2s+1\\ \sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^{2s+2}=(-1)^{2s}(2s)!(C_{2s+2}^3+3C_{2s+2}^4),l=2s+2\\ \sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^{2s+3}=(-1)^{2s}(2s)!(C_{2s+3}^4+10C_{2s+3}^5+15C_{2s+3}^6),l=2s+3\end{cases}$$

证明: $(1-x_1\cdot\cdot x_k)^{2s}=\sum\limits_{i=0}^{2s}(-1)^iC_{2s}^i(x_1\cdot\cdot x_k)^i$

$\Rightarrow \partial_{x_1}\cdot\cdot\partial_{x_l}(1-x_1\cdot\cdot x_k)^{2s}=\partial_{x_1}\cdot\cdot\partial_{x_l}\sum\limits_{i=0}^{2s}(-1)^iC_{2s}^i(x_1\cdot\cdot x_k)^i$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{2s}(-1)^i i^l C_{2s}^i\frac{(x_1\cdot\cdot x_k)^i}{(x_1\cdot\cdot x_l)}=(-1)^{2s}\sum\limits_{i=1}^{l}\frac{(2s)!}{(2s-i)!}a(i,l;s)(x_1\cdot\cdot x_k-1)^{2s-i}\frac{(x_1\cdot\cdot x_k)^i}{(x_1\cdot\cdot x_l)}$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{2s}(-1)^i i^l C_{2s}^i\frac{(x_1\cdot\cdot x_k)^i}{(x_1\cdot\cdot x_l)}|_{x_1,\cdot\cdot,x_k=1}=(-1)^{2s}\sum\limits_{i=1}^{l}\frac{(2s)!}{(2s-i)!}a(i,l;s)(x_1\cdot\cdot x_k-1)^{2s-i}\frac{(x_1\cdot\cdot x_k)^i}{(x_1\cdot\cdot x_l)}|_{x_1,\cdot\cdot,x_k=1}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{2s}(-1)^i i^l C_{2s}^i=(-1)^{2s}\sum\limits_{i=1}^{l}\frac{(2s)!}{(2s-i)!}a(i,l;s)(x_1\cdot\cdot x_k-1)^{2s-i}\frac{(x_1\cdot\cdot x_k)^i}{(x_1\cdot\cdot x_l)}|_{x_1,\cdot\cdot,x_k=1}$

$\Rightarrow$
$$\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^l=0,0\le l\le 2s-1\\ \sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^{2s}=(-1)^{2s}(2s)!,l=2s\\ \sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^{2s+1}=(-1)^{2s}(2s)!C_{2s+1}^2,l=2s+1\\ \sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^{2s+2}=(-1)^{2s}(2s)!(C_{2s+2}^3+3C_{2s+2}^4),l=2s+2\\ \sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^{2s+3}=(-1)^{2s}(2s)!(C_{2s+3}^4+10C_{2s+3}^5+15C_{2s+3}^6),l=2s+3\end{cases}$$ □

推论13.3.2. $\sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n(s-n)^{2s}=(2s)!$

证明: $\sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n(s-n)^{2s}=\sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n\sum\limits_{k=0}^{2s}(-1)^kC_{2s}^k s^{2s-k}n^k$

$=\sum\limits_{k=0}^{2s}(-1)^kC_{2s}^k s^{2s-k}\sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^k$

$=\sum\limits_{k=2s}^{2s}(-1)^kC_{2s}^k s^{2s-k}\sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^k$

$=(-1)^{2s}C_{2s}^0\sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^{2s}$

$=(-1)^{2s}(-1)^{2s}(2s)!=(2s)!$ □

推论13.3.3. $\sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n(s-n)^{2s+1}=0$

证明: $\sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n(s-n)^{2s+1}=\sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n\sum\limits_{k=0}^{2s+1}(-1)^kC_{2s+1}^k s^{2s+1-k}n^k$

$=\sum\limits_{k=0}^{2s+1}(-1)^kC_{2s+1}^k s^{2s+1-k}\sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^k$

$=\sum\limits_{k=2s}^{2s+1}(-1)^kC_{2s+1}^k s^{2s+1-k}\sum\limits_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^k$

$= (-1)^{2s}s^1C_{2s+1}^1\sum_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^{2s} + (-1)^{2s+1}s^0C_{2s+1}^0\sum_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^{2s+1}$
$= (-1)^{2s}s^1C_{2s+1}^1(-1)^{2s}(2s)! + (-1)^{2s+1}(-1)^{2s}(2s)!C_{2s+1}^2$
$= s^1C_{2s+1}^1(2s)! - (2s)!C_{2s+1}^2 = 0$ □

推论13.3.4. $\sum_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n(s-n)^{2s+2} = \frac{(2s)!}{4}C_{2s+2}^3$

证明: $\sum_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n(s-n)^{2s+2} = \sum_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n\sum_{k=0}^{2s+2}(-1)^kC_{2s+2}^k s^{2s+2-k}n^k$
$= \sum_{k=0}^{2s+2}(-1)^kC_{2s+2}^k s^{2s+2-k}\sum_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^k$
$= \sum_{k=2s}^{2s+2}(-1)^kC_{2s+2}^k s^{2s+2-k}\sum_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^k$
$= (-1)^{2s}s^2C_{2s+2}^2\sum_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^{2s} + (-1)^{2s+1}s^1C_{2s+2}^1\sum_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^{2s+1} + (-1)^{2s+2}s^0C_{2s+2}^0\sum_{n=0}^{2s}(-1)^nC_{2s}^n n^{2s+2}$
$= (-1)^{2s}s^2C_{2s+2}^2(-1)^{2s}(2s)! + (-1)^{2s+1}sC_{2s+2}^1(-1)^{2s}(2s)!C_{2s+1}^2 + (-1)^{2s+2}(-1)^{2s}(2s)!(C_{2s+2}^3 + 3C_{2s+2}^4)$
$= s^2C_{2s+2}^2(2s)! - sC_{2s+2}^1(2s)!C_{2s+1}^2 + (2s)!(C_{2s+2}^3 + 3C_{2s+2}^4) = \frac{(2s)!}{4}C_{2s+2}^3$ □

推论13.3.5.

$$\begin{cases}\sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C_{2s}^{s+h}h^l = 0, 0 \le l \le 2s-1\\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C_{2s}^{s+h}h^{2s} = (-1)^{2s}(2s)!\\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C_{2s}^{s+h}h^{2s+1} = 0\\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C_{2s}^{s+h}h^{2s+2} = \frac{(-1)^{2s}(2s)!}{4}C_{2s+2}^3\\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C_{2s}^{s+h}h^{2s+2j+1} = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C_{2s}^{s+h}(s+h)^l = 0, 0 \le l \le 2s-1\\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C_{2s}^{s+h}(s+h)^{2s} = (-1)^{2s}(2s)!\\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C_{2s}^{s+h}(s+h)^{2s+1} = (-1)^{2s}(2s)!C_{2s+1}^2\\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C_{2s}^{s+h}(s+h)^{2s+2} = (-1)^{2s}(2s)!(C_{2s+2}^3 + 3C_{2s+2}^4)\\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C_{2s}^{s+h}(s+h)^{2s+3} = (-1)^{2s}(2s)!(C_{2s+3}^4 + 10C_{2s+3}^5 + 15C_{2s+3}^6)\end{cases}$$

推论13.3.6.

$$\begin{cases}\sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s-h}C_{2s}^{s-h}h^l = 0, 0 \le l \le 2s-1\\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s-h}C_{2s}^{s-h}h^{2s} = (2s)!\\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s-h}C_{2s}^{s-h}h^{2s+1} = 0\\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s-h}C_{2s}^{s-h}h^{2s+2} = \frac{(2s)!}{4}C_{2s+2}^3\\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s-h}C_{2s}^{s-h}h^{2s+2j+1} = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s-h}C_{2s}^{s-h}(s-h)^l = 0, 0 \le l \le 2s-1\\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s-h}C_{2s}^{s-h}(s-h)^{2s} = (-1)^{2s}(2s)!\\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s-h}C_{2s}^{s-h}(s-h)^{2s+1} = (-1)^{2s}(2s)!C_{2s+1}^2\\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s-h}C_{2s}^{s-h}(s-h)^{2s+2} = (-1)^{2s}(2s)!(C_{2s+2}^3 + 3C_{2s+2}^4)\\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s-h}C_{2s}^{s-h}(s-h)^{2s+3} = (-1)^{2s}(2s)!(C_{2s+3}^4 + 10C_{2s+3}^5 + 15C_{2s+3}^6)\end{cases}$$

13.4 $\partial_{x_l}\cdot\cdot\partial_{x_1}(x_1\cdot\cdot x_k+1)^{2s}$导出的一系列组合恒等式

证明: $(1+x_1\cdot\cdot x_k)^{2s} = \sum_{i=0}^{2s}C_{2s}^i(x_1\cdot\cdot x_k)^i$

$\Rightarrow \partial_{x_1}\cdot\cdot\partial_{x_l}(1+x_1\cdot\cdot x_k)^{2s} = \partial_{x_1}\cdot\cdot\partial_{x_l}\sum_{j=0}^{2s}C_{2s}^i(x_1\cdot\cdot x_k)^i$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2s}i^lC_{2s}^i\frac{(x_1\cdot\cdot x_k)^i}{(x_1\cdot\cdot x_l)} = \sum_{i=1}^{l}\frac{(2s)!}{(2s-i)!}a(i,l;s)(x_1\cdot\cdot x_k+1)^{2s-i}\frac{(x_1\cdot\cdot x_k)^i}{(x_1\cdot\cdot x_l)}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2s}i^lC_{2s}^i\frac{(x_1\cdot\cdot x_k)^i}{(x_1\cdot\cdot x_l)}|_{x_1,\cdot\cdot,x_k=1} = \sum_{i=1}^{l}\frac{(2s)!}{(2s-i)!}a(i,l;s)(x_1\cdot\cdot x_k+1)^{2s-i}\frac{(x_1\cdot\cdot x_k)^i}{(x_1\cdot\cdot x_l)}|_{x_1,\cdot\cdot,x_k=1}$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2s}i^lC_{2s}^i = \sum_{i=1}^{l}\frac{(2s)!}{(2s-i)!}a(i,l;s)2^{2s-i}$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{2s}n^lC_{2s}^n = \sum_{n=1}^{l}a(n,l;s)\frac{(2s)!}{(2s-n)!}2^{2s-n}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{2s} n^l C_{2s}^n = \sum\limits_{n=0}^{l} a(n,l;s)\frac{(2s)!}{(2s-n)!}2^{2s-n}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{2s} n^l C_{2s}^n = \sum\limits_{n=0}^{l} \frac{2^{2s-n}a(n,l;s)}{n!}C_{2s}^n$ □

14 几个简单的组合恒等式

14.1 基础准备

推论14.1.1.

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2!}n(n+1), \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = [\frac{1}{2!}n(n+1)]^2 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3!}n(n+1)(2n+1), \sum\limits_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5!}2n(2n+1)(2n+2)(3n^2+3n-1)\end{cases}$$

14.2 $\sum\limits_{l=r}^{n}(-1)^{n-l}C_{n+1}^l C_l^r, \sum\limits_{l=r}^{n}(-1)^{n-l}C_{n+1}^l C_{l+1}^{r+1}$ 组合恒等式及其证明(第十六章)

性质14.2.1. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$

定理14.2.1. $\sum\limits_{l=r}^{n}(-1)^{n-l}C_{n+1}^l C_l^r = C_{n+1}^r; n \geq r \geq 0$

证明: $\sum\limits_{l=r}^{n}(-1)^{n-l}C_{n+1}^l C_l^r = C_{n+1}^r$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{l=0}^{n-r}(-1)^l C_{n+1}^{n-l} C_{n-l}^r = C_{n+1}^r$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{l=0}^{n-r}(-1)^l \frac{1}{(l+1)!(n-l-r)!} = \frac{1}{(n+1-r)!}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{l=0}^{n-r}(-1)^l \frac{(n+1-r)!}{(l+1)!(n-l-r)!} = 1$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{l=0}^{n-r}(-1)^l C_{n+1-r}^{l+1} = 1$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{l=0}^{n+1-r}(-1)^l C_{n+1-r}^{l} = 0$

$\Leftrightarrow [1+(-1)]^{n+1-r} = 0$ □

定理14.2.2. $\sum\limits_{l=r}^{n}(-1)^{n-l}C_{n+1}^l C_{l+1}^{r+1} = C_{n+2}^{r+1} - \delta_{nr}; n \geq r \geq 0$

证明: $\sum\limits_{l=r}^{n}(-1)^{n-l}C_{n+1}^l C_{l+1}^{r+1} = C_{n+2}^{r+1}, r < n$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{l=0}^{n-r}(-1)^l C_{n+1}^{n-l} C_{n+1-l}^{r+1} = C_{n+2}^{r+1}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{l=0}^{n-r}(-1)^l \frac{n+1-l}{(l+1)!(n-l-r)!} = \frac{n+2}{(n+1-r)!}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{l=0}^{n-r}(-1)^l \frac{(n+1-l)(n+1-r)!}{(l+1)!(n-l-r)!} = n+2$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{l=0}^{n-r}(-1)^l (n+1-l) C_{n+1-r}^{l+1} = n+2$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{l=0}^{n-r}(-1)^{l+1}(l+1) C_{n+1-r}^{l+1} = -(n+2)\sum\limits_{l=0}^{n+1-r}(-1)^l C_{n+1-r}^l$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{l=0}^{n-r}(-1)^{l+1}(l+1) C_{n+1-r}^{l+1} = 0$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{l=1}^{n+1-r}(-1)^l l C_{n+1-r}^l = 0$

$\Leftrightarrow (n+1-r)\sum\limits_{l=1}^{n+1-r}(-1)^l C_{n-r}^{l-1} = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{l=0}^{n-r}(-1)^l C_{n-r}^l = 0$

$\Leftrightarrow [1+(-1)]^{n-r} = 0$ □

证明: $\sum_{l=r}^{n}(-1)^{n-l}C_{n+1}^{l}C_{l+1}^{r+1} = C_{n+1}^{n}, r=n \Leftrightarrow \sum_{l=r}^{n}(-1)^{n-l}C_{n+1}^{l}C_{l+1}^{r+1} = C_{n+2}^{r+1}-1, r=n$ □

推论14.2.1.

$$\begin{cases}\sum_{l=2k}^{n}(-1)^{n-l}C_{n+1}^{l}C_{l}^{2k} = C_{n+1}^{2k}, \sum_{l=2k+1}^{n}(-1)^{n-l}C_{n+1}^{l}C_{l}^{2k+1} = C_{n+1}^{2k+1} \\ \sum_{l=2k}^{n}(-1)^{n-l}C_{n+1}^{l}C_{l+1}^{2k+1} = C_{n+2}^{2k+1}-\delta_{n,2k}, \sum_{l=2k+1}^{n}(-1)^{n-l}c_{n+1}^{l}C_{l+1}^{2(k+1)} = C_{n+2}^{2(k+1)}-\delta_{n,2k+1}\end{cases}$$

推论14.2.2.

$$\begin{cases}\sum_{l=0}^{n-r}(-1)^{n-r-l}C_{n+1}^{l+r}C_{l+r}^{r} = C_{n+1}^{r}, \sum_{l=0}^{n-r}(-1)^{n-r-l}C_{n+1}^{l+r}C_{l+r+1}^{r+1} = C_{n+2}^{r+1}-\delta_{nr} \\ \sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}C_{n+1+r}^{l+r}C_{l+r}^{r} = C_{n+1+r}^{r}, \sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}C_{n+1+r}^{l+r}C_{l+r+1}^{r+1} = C_{n+1+r+1}^{r+1}-\delta_{n+r,r}\end{cases}$$

15 $C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{l}$的数学分析

15.1 $C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{l}$的定义

定义15.1.1. $C_{\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}}^{l}$:= 按组合规律选出l个x相乘，并把所有乘积项全部加起来, $C_{\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}}^{0} := 1$

15.2 $C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{l}$的基本性质

性质15.2.1. $\begin{cases}C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{0} = 1 \\ C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{n} = C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{n}\end{cases}$

性质15.2.2. $\begin{cases}C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{1} = C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{1} \\ C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{n-1} = C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{n}C_{\{x_1^{-1},\cdot\cdot,x_n^{-1}\}}^{1}\end{cases}$

性质15.2.3. $\begin{cases}2!C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{2} = (C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{1})^2 - C_{\{x_1^2,\cdot\cdot,x_n^2\}}^{1} \\ 2!C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{n-2} = C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{n}[(C_{\{x_1^{-1},\cdot\cdot,x_n^{-1}\}}^{1})^2 - C_{\{x_1^{-2},\cdot\cdot,x_n^{-2}\}}^{1}]\end{cases}$

性质15.2.4. $\begin{cases}3!C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{3} = (C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{1})^3 - 3C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{1}C_{\{x_1^2,\cdot\cdot,x_n^2\}}^{1} + 2C_{\{x_1^3,\cdot\cdot,x_n^3\}}^{1} \\ 3!C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{n-3} = C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{n}[(C_{\{x_1^{-1},\cdot\cdot,x_n^{-1}\}}^{1})^3 - 3C_{\{x_1^{-1},\cdot\cdot,x_n^{-1}\}}^{1}C_{\{x_1^{-2},\cdot\cdot,x_n^{-2}\}}^{1} + 2C_{\{x_1^{-3},\cdot\cdot,x_n^{-3}\}}^{1}]\end{cases}$

性质15.2.5. $4!C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{4} = (C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{1})^4 - 6C_{\{x_1^2,\cdot\cdot,x_n^2\}}^{1}(C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{1})^2 + 3(C_{\{x_1^2,\cdot\cdot,x_n^2\}}^{1})^2 + 8C_{\{x_1^3,\cdot\cdot,x_n^3\}}^{1}C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{1} - 6C_{\{x_1^4,\cdot\cdot,x_n^4\}}^{1}$

性质15.2.6. $5!C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{5} = (C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{1})^5 - 10C_{\{x_1^2,\cdot\cdot,x_n^2\}}^{1}(C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{1})^3 + 15(C_{\{x_1^2,\cdot\cdot,x_n^2\}}^{1})^2(C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{1})$
$+ 20C_{\{x_1^3,\cdot\cdot,x_n^3\}}^{1}(C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{1})^2 - 20C_{\{x_1^3,\cdot\cdot,x_n^3\}}^{1}(C_{\{x_1^2,\cdot\cdot,x_n^2\}}^{1}) - 30C_{\{x_1^4,\cdot\cdot,x_n^4\}}^{1}(C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{1}) + 24C_{\{x_1^5,\cdot\cdot,x_n^5\}}^{1}$

性质15.2.7. $< 1_l, 0_{n-l} > \equiv \frac{1}{C_n^l}C_{\{a_1,\cdot\cdot,a_n\}}^{l}, a_i^2 := 1$

15.3 $C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{l}$的递推性质

性质15.3.1.

$$\begin{cases}C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{1} = \sum_{k=1}^{n}x_kC_{\{x_{k+1},\cdot\cdot,x_n\}}^{0} = \sum_{k=1}^{n}C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_{k-1}\}}^{0}x_k \\ C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{2} = \sum_{k=1}^{n-1}x_kC_{\{x_{k+1},\cdot\cdot,x_n\}}^{1} = \sum_{k=2}^{n}C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_{k-1}\}}^{1}x_k \\ C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{3} = \sum_{k=1}^{n-2}x_kC_{\{x_{k+1},\cdot\cdot,x_n\}}^{2} = \sum_{k=3}^{n}C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_{k-1}\}}^{2}x_k\cdots \\ C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{l} = \sum_{k=1}^{n-l+1}x_kC_{\{x_{k+1},\cdot\cdot,x_n\}}^{l-1} = \sum_{k=l}^{n}C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_{k-1}\}}^{l-1}x_k\cdots \\ C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}^{n} = \sum_{k=1}^{1}x_kC_{\{x_{k+1},\cdot\cdot,x_n\}}^{n-1} = \sum_{k=n}^{n}C_{\{x_1,\cdot\cdot,x_{k-1}\}}^{n-1}x_k\end{cases}$$

证明：$C^3_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}$
$= \frac{1}{2}x_1[(C^1_{\{x_2,\cdot\cdot,x_n\}})^2 - C^1_{\{x_2^2,\cdot\cdot,x_n^2\}}] + \frac{1}{2}x_2[(C^1_{\{x_3,\cdot\cdot,x_n\}})^2 - C^1_{\{x_3^2,\cdot\cdot,x_n^2\}}]$
$+ \frac{1}{2}x_3[(C^1_{\{x_4,\cdot\cdot,x_n\}})^2 - C^1_{\{x_4^2,\cdot\cdot,x_n^2\}}] + \cdots + \frac{1}{2}x_{n-2}[(C^1_{\{x_{n-1},x_n\}})^2 - C^1_{\{x_{n-1}^2,x_n^2\}}]$
$= x_1C^2_{\{x_2,\cdot\cdot,x_n\}} + x_2C^2_{\{x_3,\cdot\cdot,x_n\}} + x_3C^2_{\{x_4,\cdot\cdot,x_n\}} + \cdots + x_{n-2}C^2_{\{x_{n-1},x_n\}}$
$= \sum\limits_{k=1}^{n-2} x_kC^2_{\{x_{k+1},\cdot\cdot,x_n\}} = \sum\limits_{k=3}^{n} C^2_{\{x_1,\cdot\cdot,x_{k-1}\}}x_k$ □

性质15.3.2. $C^3_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}} = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n-2} x_k[(C^1_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}} - C^1_{\{x_1,\cdot\cdot,x_k\}})^2 - (C^1_{\{x_1^2,\cdot\cdot,x_n^2\}} - C^1_{\{x_1^2,\cdot\cdot,x_k^2\}})]$

15.4 $C^k_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}$的缺补性质

性质15.4.1. $C^k_{\{x_1,\cdot\cdot,x_i\cdot\cdot,x_n\}} = C^k_{\{x_1,\cdot\cdot,\overline{x_i}\cdot\cdot,x_n\}} + x_iC^{k-1}_{\{x_1,\cdot\cdot,\overline{x_i}\cdot\cdot,x_n\}}$

性质15.4.2. $C^2_{\{(k+1)^2,\cdot\cdot,n^2\}} = \frac{1}{2}[(C^1_{\{1^2,\cdot\cdot,n^2\}} - C^1_{\{1^2,\cdot\cdot,k^2\}})^2 - (C^1_{\{1^4,\cdot\cdot,n^4\}} - C^1_{\{1^4,\cdot\cdot,k^4\}})]$

15.5 $C^k_{\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}}$的分解性质

性质15.5.1. $C^k_{\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}} = C^1_{\{x_1\}}C^{k-1}_{\{x_2,\cdots,x_n\}} + C^0_{\{x_1\}}C^k_{\{x_2,\cdots,x_n\}}$

性质15.5.2. $C^k_{\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}} = C^2_{\{x_1,x_2\}}C^{k-2}_{\{x_3,\cdots,x_n\}} + C^1_{\{x_1,x_2\}}C^{k-1}_{\{x_3,\cdots,x_n\}}) + C^0_{\{x_1,x_2\}}C^k_{\{x_3,\cdots,x_n\}}$

性质15.5.3. $C^k_{\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}} = \sum\limits_{i=0}^{l} C^i_{\{x_1,x_2,\cdots,x_l\}}C^{k-i}_{\{x_{l+1},\cdots,x_n\}}$

性质15.5.4. $C^{i_0}_{\{x_1,x_2,\cdots,x_{l_0}\}} = \sum\limits_{i_1=0}^{l_1}\sum\limits_{i_2=0}^{l_2} C^{i_2}_{\{x_1,x_2,\cdots,x_{l_2}\}}C^{i_1-i_2}_{\{x_{l_2+1},\cdots,x_{l_1}\}}C^{i_0-i_1}_{\{x_{l_1+1},\cdots,x_{l_0}\}}$

性质15.5.5. $C^{i_0}_{\{x_1,x_2,\cdots,x_{l_0}\}} = \sum\limits_{i_1=0}^{l_1}\sum\limits_{i_2=0}^{l_2}\cdots\sum\limits_{i_3=0}^{l_3} C^{i_3}_{\{x_1,x_2,\cdots,x_{l_3}\}}C^{i_2-i_3}_{\{x_{l_3+1},x_2,\cdots,x_{l_2}\}}C^{i_1-i_2}_{\{x_{l_2+1},\cdots,x_{l_1}\}}C^{i_0-i_1}_{\{x_{l_1+1},\cdots,x_{l_0}\}}$

性质15.5.6. $C^{i_0}_{\{x_1,x_2,\cdots,x_{l_0}\}} = \sum\limits_{i_1=0}^{l_1}\sum\limits_{i_2=0}^{l_2}\cdots\sum\limits_{i_r=0}^{l_r} C^{i_r}_{\{x_1,x_2,\cdots,x_{l_r}\}}\cdots C^{i_2-i_3}_{\{x_{l_3+1},x_2,\cdots,x_{l_2}\}}C^{i_1-i_2}_{\{x_{l_2+1},\cdots,x_{l_1}\}}C^{i_0-i_1}_{\{x_{l_1+1},\cdots,x_{l_0}\}}$

15.6 $\prod\limits_{k=1}^{n}(x-x_k)$的性质

推论15.6.1. $\prod\limits_{k=1}^{n}(x-x_k) \equiv \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C^{n-k}_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}x^k$

推论15.6.2. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C^{n-k}_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}x_i^k \equiv 0; i=1,\cdot\cdot,n$

推论15.6.3. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C^{n-k}_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}kx_i^{k-1} \equiv \prod\limits_{k=1(\neq i)}^{n}(x_i-x_k)$

推论15.6.4. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C^{n-k}_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}k(k-1)x_i^{k-2} \equiv 2[\sum\limits_{j=1(\neq i)}^{n}(x_i-x_j)^{-1}][\prod\limits_{k=1(\neq i)}^{n}(x_i-x_k)]$

16 自然数n方次连续和

16.1 伯努利数B_k

性质16.1.1.

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}k^p = \frac{1}{p+1}\sum\limits_{k=0}^{p}(-1)^kC^k_{p+1}B_kn^{p+1-k}, B_k = \delta_{k0} - \frac{1}{k+1}\sum\limits_{j=0}^{k-1}C^j_{k+1}B_j, \frac{z}{e^z-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}B_k\frac{z^k}{k!} \\ B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}, B_2=\frac{1}{6}, B_4=-\frac{1}{30}, B_6=\frac{1}{42}, B_8=-\frac{1}{30}, B_{10}=\frac{5}{66}, B_{2k+1}=0(k\geq 1)\end{cases}$$

16.2 自然数各种连续和

性质16.2.1.

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}k^0=\frac{1}{1}n^1\\ \sum\limits_{k=1}^{n}k^1=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n^1=\frac{1}{2}n(n+1)=C_{n+1}^2\\ \sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{4}C_{2n+2}^3\\ \sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2\\ \sum\limits_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n=\frac{1}{20}C_{2n+2}^3(3n^2+3n-1)\\ \sum\limits_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}k^6=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n\\ \sum\limits_{k=1}^{n}k^7=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2\\ \sum\limits_{k=1}^{n}k^8=\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n\\ \sum\limits_{k=1}^{n}k^9=\frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^9+\frac{3}{4}n^8-\frac{7}{10}n^6+\frac{1}{2}n^4-\frac{3}{20}n^2\\ \sum\limits_{k=1}^{n}k^{10}=\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^9-n^7+n^5-\frac{1}{2}n^3+\frac{5}{66}n\\ \sum\limits_{k=1}^{n}k^p=\frac{1}{p+1}k^{p+1}+\sum\limits_{k=1}^{p}C_p^{k-1}\frac{(-1)^kB_k}{k}n^{p+1-k}\end{cases}$$

证明: $\sum\limits_{k=0}^{n}k^8=\frac{1}{9}\sum\limits_{k=0}^{8}(-1)^kC_9^kB_kn^{9-k}$

$=\frac{1}{9}(C_9^0B_0n^9-C_9^1B_1n^8+C_9^2B_2n^7+C_9^4B_4n^5+C_9^6B_6n^3+C_9^8B_8n^1)$

$=\frac{1}{9}(C_9^0n^9+\frac{1}{2}C_9^1n^8+\frac{1}{6}C_9^2n^7-\frac{1}{30}C_9^4n^5+\frac{1}{42}C_9^6n^3-\frac{1}{30}C_9^8n^1)$

$=\frac{1}{9}(n^9+\frac{9}{2}n^8+6n^7-\frac{21}{5}n^5+2n^3-\frac{3}{10}n^1)$

$=\frac{1}{90}n(10n^8+45n^7+60n^6-42n^4+20n^2-3)$

$=\frac{1}{90}n(n+1)[10n^7+35n^6+25n^4(n-1)-17n^2(n-1)+3(n-1)]$

$=\frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$

$=\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n$ □

16.3 自然数各种连续间断和

推论16.3.1.

$$\begin{cases}2+4+\cdots+2n=n(n+1)=2C_{n+1}^2\\ 2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)=C_{2n+2}^3\\ 2^4+4^4+\cdots+(2n)^4=\frac{8}{15}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)=\frac{4}{5}C_{2n+2}^3(3n^2+3n-1)\end{cases}$$

推论16.3.2.

$$\begin{cases}2+4+\cdots+2n=n(n+1)=2C_{n+1}^2\\ 2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)=C_{2n+2}^3\\ 2^4+4^4+\cdots+(2n)^4=\frac{8}{15}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)=\frac{4}{5}C_{2n+2}^3(3n^2+3n-1)\end{cases}$$

推论16.3.3.

$$\begin{cases}1+3+\cdots+(2n-1)=n^2\\ 1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)=C_{2n+1}^3\\ 1^4+3^4+\cdots+(2n-1)^4=\frac{1}{15}n(2n-1)(2n+1)(12n^2-7)=\frac{1}{5}C_{2n+1}^3(12n^2-7)\end{cases}$$

17 $C_{\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}}^l$的数学分析

17.1 $C_{\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}}^l$的求解

性质17.1.1. $C_{\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}}^1=\frac{1}{4}C_{2n+2}^3$

性质17.1.2. $C_{\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}}^2=\frac{1}{4!}C_{2n+2}^5(5n+6)$

证明: $2C_{\{1^2,\cdots,n^2\}}^2$

$=(C_{\{1^2,\cdots,n^2\}}^1)^2-C_{\{1^4,\cdots,n^4\}}^1$

$=\frac{1}{16}(C_{2n+2}^3)^2-\frac{1}{20}C_{2n+2}^3(3n^2+3n-1)$

$=\frac{1}{16}(C_{2n+2}^3)^2-\frac{1}{20}C_{2n+2}^3(6C_{n+1}^2-1)$ □

引理17.1.1. $C^3_{\{1^2,\cdots,n^2\}}=\sum\limits_{k=3}^{n}C^2_{\{1^2,\cdots,(k-1)^2\}}k^2=\sum\limits_{k=3}^{n}\frac{1}{4!}C^5_{2k}(5k+1)k^2$

定理17.1.1. $C^3_{\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}}=\frac{1}{144}C^7_{2n+2}(35n^2+91n+60)$

证明: $C^3_{\{1^2,2^2,\cdots,(n+1)^2\}}=\sum\limits_{k=3}^{n+1}\frac{1}{4!}C^5_{2k}(5k+1)k^2$

$=\frac{1}{4!5!}\sum\limits_{k=3}^{n+1}2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)(2k-4)(5k+1)k^2$

$=\frac{1}{4!5!}\sum\limits_{k=2}^{n}(2k+2)(2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2)(5k+6)(k+1)^2$

$=\frac{1}{5!3}\sum\limits_{k=2}^{n}(k+1)(2k+1)k(2k-1)(k-1)(5k+6)(k+1)^2$

$=\frac{1}{5!3}\sum\limits_{k=2}^{n}k(4k^2-1)(k^2-1)(5k+6)(k+1)^2$

$=\frac{1}{5!3}\sum\limits_{k=2}^{n}k(4k^4-5k^2+1)(5k+6)(k+1)^2$

$=\frac{1}{5!3}\sum\limits_{k=2}^{n}k[(20k^5-25k^3+5k)+(24k^4-30k^2+6)](k+1)^2$

$=\frac{1}{5!3}\sum\limits_{k=2}^{n}(20k^5+24k^4-25k^3-30k^2+5k+6)(k^3+2k^2+k)$

$=\frac{1}{5!3}\sum\limits_{k=2}^{n}[(20k^8+24k^7-25k^6-30k^5+5k^4+6k^3)$

$+(40k^7+48k^6-50k^5-60k^4+10k^3+12k^2)$

$+(20k^6+24k^5-25k^4-30k^3+5k^2+6k)$

$=\frac{1}{5!3}\sum\limits_{k=2}^{n}(20k^8+64k^7+43k^6-56k^5-80k^4-14k^3+17k^2+6k)$

$=\frac{1}{5!3}\sum\limits_{k=1}^{n}(20k^8+64k^7+43k^6-56k^5-80k^4-14k^3+17k^2+6k)$

$=\frac{1}{5!3}\sum\limits_{k=1}^{n}(20k^8+64k^7+43k^6-56k^5-80k^4-14k^3+17k^2+6k)$

$=\frac{1}{5!3}$

$[+20(\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n)$

$+64(\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2)$

$+43(\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n)$

$-56(\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2)$

$-80(\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n)$

$-14(\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2)$

$+17(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n)$

$+6(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n^1)]$

$=\frac{1}{5!3}[\frac{20}{9}n^9+18n^8+\frac{1081}{21}n^7+\frac{99}{2}n^6-\frac{191}{6}n^5-\frac{171}{2}n^4-\frac{553}{18}n^3+18n^2+\frac{62}{7}n]$

$=\frac{1}{5!378}n(280n^8+2268n^7+6486n^6+6237n^5-4011n^4-10773n^3-3871n^2+2268n+1116)$

$=\frac{1}{5!378}n[280n^6(n^2-1)+2268n^5(n^2-1)+6766n^4(n^2-1)+8505n^3(n^2-1)+2755n^2(n^2-1)-2268n(n^2-1)$

$-1116(n^2-1)]$

$=\frac{1}{5!378}n(n^2-1)(280n^6+2268n^5+6766n^4+8505n^3+2755n^2-2268n-1116)$

$=\frac{1}{5!378}n(n^2-1)[280n^4(n^2-\frac{1}{4})+2268n^3(n^2-\frac{1}{4})+6836n^2(n^2-\frac{1}{4})+9072n(n^2-\frac{1}{4})+4464(n^2-\frac{1}{4})]$

$=\frac{1}{5!378}n(n^2-1)(n^2-\frac{1}{4})(280n^4+2268n^3+6836n^2+9072n+4464)$

$=\frac{1}{5!378}n(n^2-1)(n^2-\frac{1}{4})[280n^3(n+2)+1708n^2(n+2)+3420n(n+2)+2232(n+2)]$

$=\frac{1}{5!378}n(n^2-1)(n^2-\frac{1}{4})(n+2)(280n^3+1708n^2+3420n+2232)$

$=\frac{1}{5!378}n(n^2-1)(n^2-\frac{1}{4})(n+2)[280n^2(n+\frac{3}{2})+1288n(n+\frac{3}{2})+1488(n+\frac{3}{2})]$

$=\frac{1}{5!378}n(n^2-1)(n^2-\frac{1}{4})(n+2)(n+\frac{3}{2})(280n^2+1288n+1488)$

$=\frac{8}{5!378}n(n^2-1)(n^2-\frac{1}{4})(n+2)(n+\frac{3}{2})(35n^2+161n+186)$

$= \frac{1}{5!378(16)}(2n-2)(2n-1)2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)(35n^2+161n+186)$ □

推论17.1.1. $C^n_{\{1^2,2^2,\cdot\cdot,n^2\}} = (n!)^2$

17.2 $C^l_{\{2^2,4^2,\cdot\cdot,(2n)^2\}}$的求解

推论17.2.1. $C^0_{\{2^2,4^2,\cdot\cdot,(2n)^2\}} = 1$

推论17.2.2. $C^1_{\{2^2,4^2,\cdot\cdot,(2n)^2\}} = C^3_{2n+2}$

推论17.2.3. $C^2_{\{2^2,4^2,\cdot\cdot,(2n)^2\}} = \frac{1}{3}C^5_{2n+2}(10n+12)$

推论17.2.4. $C^3_{\{2^2,4^2\cdot\cdot,(2n)^2\}} = \frac{1}{9}C^7_{2n+2}(140n^2+364n+240)$

推论17.2.5. $C^n_{\{2^2,4^2,\cdot\cdot,(2n)^2\}} = [(2n)!!]^2 = 2^{2n}(n!)^2$

17.3 $C^l_{\{1^2,3^2,\cdot\cdot,(2n-1)^2\}}$的求解

推论17.3.1. $C^0_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}} = 1$

推论17.3.2. $C^1_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}} = C^3_{2n+1}$

定理17.3.1. $C^2_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}} = \frac{1}{3}C^5_{2n+1}(10n+7)$

证明： $C^2_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}}$
$= \frac{1}{2}\{[C^1_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}}]^2 - C^1_{\{1^4,3^4\cdot\cdot,(2n-1)^4\}}\}$
$= \frac{1}{2}[(C^3_{2n+1})^2 - \frac{1}{5}C^3_{2n+1}(12n^2-7)]$
$= \frac{1}{3}C^5_{2n+1}[5(2n+1)+2]$ □

定理17.3.2. $C^3_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}} = \frac{1}{9}C^7_{2n+1}(140n^2+224n+93)$

证明： $C^3_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}}$
$= \sum\limits_{k=3}^{n} C^2_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2k-3)^2\}}(2k-1)^2$
$= \sum\limits_{k=3}^{n} \frac{1}{3}C^5_{2k-1}(10k-3)(2k-1)^2$
$= \sum\limits_{k=3}^{n} (\frac{1}{5!3}(2k-1)^3(2k-2)(2k-3)(2k-4)(2k-5)(10k-3))$
$= \frac{8}{9}C^7_{2n+1}(17.5n^2+28n+11.625)$
$= \frac{1}{9}C^7_{2n+1}(140n^2+224n+93)$ □

推论17.3.3. $C^n_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}} = [(2n-1)!!]^2$

17.4 各种基本性质小结

性质17.4.1. $C^0_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}} = 1, C^0_{\{2^2,4^2,\cdot\cdot,(2n)^2\}} = 1, C^0_{\{1^2,2^2,\cdot\cdot,n^2\}} = 1$

性质17.4.2. $C^1_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}} = C^3_{2n+1}, C^1_{\{2^2,4^2,\cdot\cdot,(2n)^2\}} = C^3_{2n+2}, C^1_{\{1^2,2^2,\cdot\cdot,n^2\}} = \frac{1}{4}C^3_{2n+2}$

性质17.4.3. $C^2_{\{1^2,2^2,\cdot\cdot,n^2\}} = \frac{1}{4!}C^5_{2n+2}(5n+6), C^3_{\{1^2,2^2,\cdot\cdot,n^2\}} = \frac{1}{144}C^7_{2n+2}(35n^2+91n+60)$

性质17.4.4. $C^2_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}} = \frac{1}{3}C^5_{2n+1}[5(2n+1)+2], C^2_{\{2^2,4^2,\cdot\cdot,(2n)^2\}} = \frac{1}{3}C^5_{2n+2}[5(2n+2)+2]$

性质17.4.5. $C^3_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}} = \frac{1}{9}C^7_{2n+1}(140n^2+224n+93), C^3_{\{2^2,4^2\cdot\cdot,(2n)^2\}} = \frac{1}{9}C^7_{2n+2}(140n^2+364n+240)$

性质17.4.6. $C^n_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}} = [(2n-1)!!]^2, C^n_{\{2^2,4^2,\cdot\cdot,(2n)^2\}} = [(2n)!!]^2 = 2^{2n}(n!)^2, C^n_{\{1^2,2^2,\cdot\cdot,n^2\}} = (n!)^2$

性质17.4.7. $C^{n-k}_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}} = C^k_{\{1^{-2},3^{-2}\cdot\cdot,(2n-1)^{-2}\}}C^n_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}}$

性质17.4.8. $C^{n-k}_{\{2^2,4^2,\cdot\cdot,(2n)^2\}} = C^k_{\{2^{-2},4^{-2},\cdot\cdot,(2n)^{-2}\}}C^n_{\{2^2,4^2,\cdot\cdot,(2n)^2\}}$

性质17.4.9. $C^{n-k}_{\{1^2,2^2\cdot\cdot,n^2\}} = C^k_{\{1^{-2},2^{-2}\cdot\cdot,n^{-2}\}}C^n_{\{1^2,2^2\cdot\cdot,n^2\}}$

性质17.4.10. $C^k_{\{2^2,4^2,\cdot\cdot,(2n)^2\}} = 4^kC^k_{\{1^2,2^2,\cdot\cdot,n^2\}}$

17.5 $C^l_{\{1^2,2^2,\cdot\cdot,n^2\}}$的猜想(由局部得到全部)

猜想17.5.1. $C^l_{\{1^2,2^2,\cdot\cdot,n^2\}} = C^{2l+1}_{2n+2}[\sum_{k=0}^{l-1} a_k(l)n^k]$

引理17.5.1.

$$\begin{bmatrix} (l+0)^0 & (l+0)^1 & \cdot\cdot & (l+0)^{l-2} & (l+0)^{l-1} \\ (l+1)^0 & (l+1)^1 & \cdot\cdot & (l+1)^{l-2} & (l+1)^{l-1} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (2l-2)^0 & (2l-2)^1 & \cdot\cdot & (2l-2)^{l-2} & (2l-2)^{l-1} \\ (2l-1)^0 & (2l-1)^1 & \cdot\cdot & (2l-1)^{l-2} & (2l-1)^{l-1} \end{bmatrix}^{-1}_{ij} = \frac{C^{l-1-i}_{\{l,\cdot\cdot\overline{(l+j)}\cdot\cdot,2l-1\}} C^j_{l-1}}{(-1)^{i+j}(l-1)!}; i,j = 0,1,\cdot\cdot,l-1$$

推论17.5.1.

$$\begin{bmatrix} (l+0)^0 & (l+0)^1 & \cdot\cdot & (l+0)^{l-2} & (l+0)^{l-1} \\ (l+1)^0 & (l+1)^1 & \cdot\cdot & (l+1)^{l-2} & (l+1)^{l-1} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (2l-2)^0 & (2l-2)^1 & \cdot\cdot & (2l-2)^{l-2} & (2l-2)^{l-1} \\ (2l-1)^0 & (2l-1)^1 & \cdot\cdot & (2l-1)^{l-2} & (2l-1)^{l-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(l) \\ a_1(l) \\ \cdot\cdot \\ a_{l-2}(l) \\ a_{l-1}(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C^l_{\{1^2,\cdot\cdot,(l+0)^2\}}}{C^{2l+1}_{2l+2}} \\ \frac{C^l_{\{1^2,\cdot\cdot,(l+1)^2\}}}{C^{2l+1}_{2l+4}} \\ \cdot\cdot \\ \frac{C^l_{\{1^2,\cdot\cdot,(2l-2)^2\}}}{C^{2l+1}_{4l-2}} \\ \frac{C^l_{\{1^2,\cdot\cdot,(2l-1)^2\}}}{C^{2l+1}_{4l}} \end{bmatrix}$$

推论17.5.2.

$$\begin{bmatrix} a_0(l) \\ a_1(l) \\ \cdot\cdot \\ a_{l-2}(l) \\ a_{l-1}(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l+0)^0 & (l+0)^1 & \cdot\cdot & (l+0)^{l-2} & (l+0)^{l-1} \\ (l+1)^0 & (l+1)^1 & \cdot\cdot & (l+1)^{l-2} & (l+1)^{l-1} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (2l-2)^0 & (2l-2)^1 & \cdot\cdot & (2l-2)^{l-2} & (2l-2)^{l-1} \\ (2l-1)^0 & (2l-1)^1 & \cdot\cdot & (2l-1)^{l-2} & (2l-1)^{l-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{C^l_{\{1^2,\cdot\cdot,(l+0)^2\}}}{C^{2l+1}_{2l+2}} \\ \frac{C^l_{\{1^2,\cdot\cdot,(l+1)^2\}}}{C^{2l+1}_{2l+4}} \\ \cdot\cdot \\ \frac{C^l_{\{1^2,\cdot\cdot,(2l-2)^2\}}}{C^{2l+1}_{4l-2}} \\ \frac{C^l_{\{1^2,\cdot\cdot,(2l-1)^2\}}}{C^{2l+1}_{4l}} \end{bmatrix}$$

17.6 $C^l_{\{1^2,3^2,\cdot\cdot,(2n-1)^2\}}$的猜想(由局部得到全部)

猜想17.6.1. $C^l_{\{1^2,3^2,\cdot\cdot,(2n-1)^2\}} = C^{2l+1}_{2n+1}[\sum_{k=0}^{l-1} b_k(l)n^k]$

推论17.6.1.

$$\begin{bmatrix} (l+0)^0 & (l+0)^1 & \cdot\cdot & (l+0)^{l-2} & (l+0)^{l-1} \\ (l+1)^0 & (l+1)^1 & \cdot\cdot & (l+1)^{l-2} & (l+1)^{l-1} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (2l-2)^0 & (2l-2)^1 & \cdot\cdot & (2l-2)^{l-2} & (2l-2)^{l-1} \\ (2l-1)^0 & (2l-1)^1 & \cdot\cdot & (2l-1)^{l-2} & (2l-1)^{l-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0(l) \\ b_1(l) \\ \cdot\cdot \\ b_{l-2}(l) \\ b_{l-1}(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\{1^2,3^2,\cdot\cdot,(2l-1)^2\}}{C^{2l+1}_{2l+1}} \\ \frac{\{1^2,3^2,\cdot\cdot,(2l+1)^2\}}{C^{2l+1}_{2l+3}} \\ \cdot\cdot \\ \frac{\{1^2,3^2,\cdot\cdot,(4l-5)^2\}}{C^{2l+1}_{4l-3}} \\ \frac{C^l_{\{1^2,\cdot\cdot,(4l-3)^2\}}}{C^{2l+1}_{4l-1}} \end{bmatrix}$$

推论17.6.2.

$$\begin{bmatrix} b_0(l) \\ b_1(l) \\ \cdot\cdot \\ b_{l-2}(l) \\ b_{l-1}(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l+0)^0 & (l+0)^1 & \cdot\cdot & (l+0)^{l-2} & (l+0)^{l-1} \\ (l+1)^0 & (l+1)^1 & \cdot\cdot & (l+1)^{l-2} & (l+1)^{l-1} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ (2l-2)^0 & (2l-2)^1 & \cdot\cdot & (2l-2)^{l-2} & (2l-2)^{l-1} \\ (2l-1)^0 & (2l-1)^1 & \cdot\cdot & (2l-1)^{l-2} & (2l-1)^{l-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\{1^2,3^2,\cdot\cdot,(2l-1)^2\}}{C^{2l+1}_{2l+1}} \\ \frac{\{1^2,3^2,\cdot\cdot,(2l+1)^2\}}{C^{2l+1}_{2l+3}} \\ \cdot\cdot \\ \frac{\{1^2,3^2,\cdot\cdot,(4l-5)^2\}}{C^{2l+1}_{4l-3}} \\ \frac{C^l_{\{1^2,\cdot\cdot,(4l-3)^2\}}}{C^{2l+1}_{4l-1}} \end{bmatrix}$$

18 $C^l_{\{1,2,\cdot\cdot,n\}}$的数学分析

18.1 $C^l_{\{1,2,\cdot\cdot,n\}}$的求解

性质18.1.1. $C^1_{\{1,2,\cdot\cdot,n\}} = C^2_{n+1}$

性质18.1.2. $C^2_{\{1,2,\cdot\cdot,n\}} = \frac{1}{4}C^3_{n+1}(3n+2)$

证明: $C^2_{\{1,2,\cdot\cdot,n\}}$
$= \frac{1}{2}[(C^1_{\{1,2,\cdot\cdot,n\}})^2 - C^1_{\{1^2,2^2\cdot\cdot,n^2\}}]$
$= \frac{1}{2}[(C^2_{n+1})^2 - \frac{1}{4}C^3_{2n+2}]$
$= \frac{1}{4}C^3_{n+1}(3n+2)$ □

性质18.1.3. $C^3_{\{1,2,\cdot\cdot,n\}} = C^4_{n+1}C^2_{n+1}$

证明: $C^3_{\{1,2,\cdot\cdot,n\}} = \sum\limits_{k=3}^{n} C^2_{\{1,\cdot\cdot,k-1\}}k$
$= \sum\limits_{k=3}^{n} \frac{1}{4}C^3_k(3k-1)k$
$= \frac{1}{24}\sum\limits_{k=3}^{n}(3k-1)k^2(k-1)(k-2)$
$= \frac{1}{48}(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2$
$= \frac{1}{2}C^4_{n+1}(n^2+n) = C^4_{n+1}C^2_{n+1}$ □

性质18.1.4. $C^4_{\{1,2,\cdot\cdot,n\}} = \frac{1}{48}C^5_{n+1}(15n^3+15n^2-10n-8)$

证明: $C^4_{\{1,2,\cdot\cdot,n\}} = \sum\limits_{k=4}^{n} C^3_{\{1,\cdot\cdot,k-1\}}k = \sum\limits_{k=4}^{n} \frac{1}{2}C^4_k(k^2-k)k$
$= \frac{1}{48}\sum\limits_{k=4}^{n}(k^2-k)k^2(k-1)(k-2)(k-3)$
$= \frac{1}{5!48}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(15n^3+15n^2-10n-8)$
$= \frac{1}{48}C^5_{n+1}(15n^3+15n^2-10n-8)$ □

性质18.1.5. $C^5_{\{1,2,\cdot\cdot,n\}} = \frac{1}{8}C^6_{n+1}C^2_{n+1}(3n^2-n-6)$

证明: $C^5_{\{1,2,\cdot\cdot,n\}} = \sum\limits_{k=5}^{n} C^4_{\{1,\cdot\cdot,k-1\}}k$
$= \sum\limits_{k=5}^{n} \frac{1}{48}C^5_k(15(k-1)^3+15(k-1)^2-10(k-1)-8)k$
$= \frac{1}{5!48}\sum\limits_{k=5}^{n}(15(k-1)^3+15(k-1)^2-10(k-1)-8)k^2(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)$
$= \frac{1}{6!16}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2(3n^2-n-6)$
$= \frac{1}{16}C^6_{n+1}n(n+1)(3n^2-n-6)$
$= \frac{1}{8}C^6_{n+1}C^2_{n+1}(3n^2-n-6)$ □

性质18.1.6. $C^6_{\{1,2,\cdot\cdot,n\}} = \frac{1}{576}C^7_{n+1}(63n^5-315n^3-224n^2+140n+96)$

证明: $C^6_{\{1,2,\cdot\cdot,n\}} = \sum\limits_{k=6}^{n} C^5_{\{1,\cdot\cdot,k-1\}}k$
$= \sum\limits_{k=6}^{n} \frac{1}{8}C^6_kC^2_k(3(k-1)^2-(k-1)-6)k$
$= \frac{1}{6!16}\sum\limits_{k=6}^{n}(k-5)(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)^2(k)^2(3(k-1)^2-(k-1)-6)k$
$= \frac{1}{7!576}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(63n^5-315n^3-224n^2+140n+96)$
$= \frac{1}{576}C^7_{n+1}(63n^5-315n^3-224n^2+140n+96)$ □

18.2 $C^l_{\{-s,\cdot\cdot,s\}}$的性质

性质18.2.1. $C^l_{\{-n,\cdot\cdot,0,\cdot\cdot,n\}} = C^l_{\{-n,\cdot\cdot,\bar{0},\cdot\cdot,n\}}, C^l_{\{-n,\cdot\cdot,0,\cdot\cdot,n\}} = (-1)^lC^l_{\{-n,\cdot\cdot,0,\cdot\cdot,n\}}; 0 \le l \le 2n+1$

性质18.2.2. $C^0_{\{-s,\cdot\cdot,s\}} = 1, C^{2k+1}_{\{-s,\cdot\cdot,s\}} = 0; 0 \le k \le [s]$

性质18.2.3. $2!C^2_{\{-s,\cdot\cdot,s\}} = -C^1_{\{(-s)^2,\cdot\cdot,s^2\}} = -2C^1_{\{(1/2|1)^2,\cdot\cdot,s^2\}}$

性质18.2.4. $4!C^4_{\{-s,\cdot\cdot,s\}} = 3(C^1_{\{(-s)^2,\cdot\cdot,s^2\}})^2 - 6C^1_{\{(-s)^4,\cdot\cdot,s^4\}} = 12(C^1_{\{(1/2|1)^2,\cdot\cdot,s^2\}})^2 - 12C^1_{\{(1/2|1)^4,\cdot\cdot,s^4\}}$

18.3 $C^{l}_{\{-s,\cdot\cdot,s\}}$的求解

性质18.3.1. $C^{l}_{\{-s,\cdot\cdot,s\}}=(-1)^{l}C^{l}_{\{-s,\cdot\cdot,s\}},C^{2k+1}_{\{-s,\cdot\cdot,s\}}=0;0\le l\le 2s+1,0\le k\le [s]$

性质18.3.2. $C^{1}_{\{-s,\cdot\cdot,s\}}=0,C^{1}_{\{(-s)^2,(1-s)^2,\cdot\cdot,(s-1)^2,s^2\}}=\frac{1}{2}C^{3}_{2s+2}$

性质18.3.3. $C^{1}_{\{-s,\cdot\cdot,\overline{h},\cdot\cdot,s\}}=-h,C^{1}_{\{(-s)^2,(1-s)^2,\cdot\cdot,\overline{h^2},\cdot\cdot,(s-1)^2,s^2\}}=\frac{1}{2}C^{3}_{2s+2}-h^2$

性质18.3.4. $C^{2}_{\{-s,\cdot\cdot,s\}}=-\frac{1}{4}C^{3}_{2s+2}$

证明: $C^{2}_{\{-s,\cdot\cdot,s\}}$
$=\frac{1}{2}[(C^{1}_{\{-s,\cdot\cdot,s\}})^2-C^{1}_{\{(-s)^2,(1-s)^2,\cdot\cdot,(s-1)^2,s^2\}}]$
$=-\frac{1}{2}C^{1}_{\{(-s)^2,(1-s)^2,\cdot\cdot,(s-1)^2,s^2\}}$
$=-\frac{1}{4}C^{3}_{2s+2}$ □

性质18.3.5. $C^{2}_{\{-s,\cdot\cdot,\overline{h},\cdot\cdot,s\}}=h^2-\frac{1}{4}C^{3}_{2s+2}$

证明: $C^{2}_{\{-s,\cdot\cdot,\overline{h},\cdot\cdot,s\}}$
$=\frac{1}{2}[(C^{1}_{\{-s,\cdot\cdot,\overline{h},\cdot\cdot,s\}})^2-C^{1}_{\{(-s)^2,(1-s)^2,\cdot\cdot,\overline{h^2},\cdot\cdot,(s-1)^2,s^2\}}]$
$=h^2-\frac{1}{2}C^{1}_{\{(-s)^2,(1-s)^2,\cdot\cdot,(s-1)^2,s^2\}}$
$=h^2-\frac{1}{4}C^{3}_{2s+2}$ □

推论18.3.1. $C^{l}_{\{x_1,\cdot\cdot,x_n\}}=\sum\limits_{k=1}^{n-l+1}x_kC^{l-1}_{\{x_{k+1},\cdot\cdot,x_n\}}=\sum\limits_{k=l}^{n}C^{l-1}_{\{x_1,\cdot\cdot,x_{k-1}\}}x_k$

$\Rightarrow C^{l}_{\{x_s,\cdot\cdot,x_{-s}\}}=\sum\limits_{h=-s}^{s-l+1}x_hC^{l-1}_{\{x_{h+1},\cdot\cdot,x_s\}}=\sum\limits_{h=l-s-1}^{s}C^{l-1}_{\{x_{-s},\cdot\cdot,x_{h-1}\}}x_h$

$\Rightarrow C^{l}_{\{s,s-1,\cdot\cdot,1-s,-s\}}=\sum\limits_{h=-s}^{s-l+1}hC^{l-1}_{\{h+1,\cdot\cdot,s\}}=\sum\limits_{h=l-s-1}^{s}C^{l-1}_{\{-s,\cdot\cdot,h-1\}}h$

性质18.3.6. $C^{1}_{\{-s,\cdot\cdot,h-1\}}=-\frac{(s+h)(s-h+1)}{2}$

证明: $C^{1}_{\{-s,\cdot\cdot,h-1\}}$
$=-(s+h)(s+1)+\frac{(s+h)(s+h+1)}{2}$
$=-\frac{(s+h)(s-h+1)}{2}$ □

引理18.3.1. $C^{l}_{\{-s,\cdot\cdot,\overline{-h},\cdot\cdot,s\}}\equiv(-1)^{l}C^{l}_{\{-s,\cdot\cdot,\overline{h},\cdot\cdot,s\}},C^{2k-1}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}+hC^{2k-2}_{\{-s,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,s\}}=C^{2k-1}_{\{-s,\cdot\cdot,s\}}=0$

性质18.3.7. $C^{1}_{\{(-s)^2,\cdot\cdot,(h-1)^2\}}=[\frac{1}{6}(s+h+1)(2s+2h+1)-(s+1)h](s+h)$

证明: $C^{1}_{\{(-s)^2,\cdot\cdot,(h-1)^2\}}$
$=\sum\limits_{h'=-s}^{h-1}h'^2=\sum\limits_{k=1}^{s+h}(k-s-1)^2=\sum\limits_{k=1}^{s+h}[k^2+(s+1)^2-2(s+1)k]$
$=\frac{1}{6}(s+h)(s+h+1)(2s+2h+1)+(s+1)^2(s+h)-(s+1)(s+h)(s+h+1)$
$=[\frac{1}{6}(s+h+1)(2s+2h+1)-(s+1)h](s+h)$ □

性质18.3.8. $C^{2}_{\{-s,\cdot\cdot,h-1\}}=\frac{1}{4!}\{3(s+h)^4-(12s+10)(s+h)^3+(12s^2+24s+9)(s+h)^2-(12s^2+12s+2)(s+h)\}$

证明: $C^{2}_{\{-s,\cdot\cdot,h-1\}}$
$=\frac{1}{2}[(C^{1}_{\{-s,\cdot\cdot,h-1\}})^2-C^{1}_{\{(-s)^2,\cdot\cdot,(h-1)^2\}}]$
$=\frac{1}{2}[(-\frac{(s+h)(s-h+1)}{2})^2-[\frac{1}{6}(s+h+1)(2s+2h+1)-(s+1)h](s+h)]$
$=\frac{1}{24}(s+h)[3(s+h)(s-h+1)^2-(2s+2h+2)(2s+2h+1)+12(s+1)h]$
$=\frac{1}{24}(s+h)[3(s+h)(s+h-2s-1)^2-4(s+h)^2-6(s+h)-2+12(s+1)(s+h)-12s(s+1)]$
$=\frac{1}{24}(s+h)\{(s+h)[3(s+h-2s-1)^2-4(s+h)-6+12(s+1)]-12s(s+1)-2\}$
$=\frac{1}{24}(s+h)\{(s+h)[3(s+h)^2-(s+h)(12s+10)+3(4s^2+8s+3)]-12s(s+1)-2\}$
$=\frac{1}{24}(s+h)\{(s+h)[(s+h)[3(s+h)-(12s+10)]+3(4s^2+8s+3)]-12s(s+1)-2\}$
$=\frac{1}{4!}\{3(s+h)^4-(12s+10)(s+h)^3+(12s^2+24s+9)(s+h)^2-(12s^2+12s+2)(s+h)\}$ □

性质18.3.9. $C^3_{\{-s,\cdot\cdot,s\}}=0$

证明: $C^3_{\{-s,\cdot\cdot,s\}}=\sum\limits_{h=-s}^{s-2}hC^2_{\{h+1,\cdot\cdot,s\}}=\sum\limits_{h=2-s}^{s}C^2_{\{-s,\cdot\cdot,h-1\}}h$

$=\sum\limits_{h=2-s}^{s}\frac{1}{4!}\{3(s+h)^4-(12s+10)(s+h)^3+(12s^2+24s+9)(s+h)^2-(12s^2+12s+2)(s+h)\}h$

$=\sum\limits_{k=2}^{2s}\frac{1}{4!}\{3(k)^4-(12s+10)(k)^3+(12s^2+24s+9)(k)^2-(12s^2+12s+2)(k)\}(k-s)=0$ □

19 各种通项公式导出的恒等式(已被严格证明)

19.1 $m(s,n;n-2l)$导出的恒等式

推论19.1.1. $m(s,n;n-2[n/2]+2i)=\frac{2^{n-2[n/2]+2i}}{2^n}\frac{1}{2s}(2sC_n^{n-2[n/2]+2i}-C_n^{n-2[n/2]+2i-1})$

$\equiv\frac{1}{2s}\sum\limits_{j=0}^{[n/2]}(-1)^{k+i+j}C^j_{2s}C^{k-i}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-j)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}\frac{(2s-k-1-j)!(2s-2j)}{(2s)!(k-j)!(s-j)^{n-2[n/2]}}[(2s-j)(s-j-1/2)^n-j(s-j+1/2)^n]$

19.2 $n(s,n;n-2l)$导出的恒等式

推论19.2.1.

$$\begin{cases}c(s,2k;2i)=(-1)^{i+k}\sum\limits_{l=0}^{k}\sum\limits_{m=0}^{2k}\frac{(-1)^{l+m}2(s-l)C^m_{2k}C^{l-m}_{2s-2k}C^{k-i}_{\{\cdot\cdot\overline{(s-l)^2}\cdot\cdot\}}(2s-1-k-l)!}{2^{2k}(2s)!(k-l)!}\\c(s,2k+1;2i+1)=(-1)^{i+k}\sum\limits_{l=0}^{k}\sum\limits_{m=0}^{2k+1}\frac{(-1)^{l+m}2C^m_{2k+1}C^{l-m}_{2s-2k-1}C^{k-i}_{\{\cdot\cdot\overline{(s-l)^2}\cdot\cdot\}}(2s-1-k-l)!}{2^{2k+1}(2s)!(k-l)!}\end{cases}$$

推论19.2.2.

$$\begin{cases}c(s,n;i)=\sum\limits_{j=1}^{n}c(s-\frac{1}{2},n-1;j-1)n(s,j;i),n\geq1\\c(s,0;0)=1,n(s,n;i<0|i>n):=0,c(s,n;i<0|i>n):=0\end{cases}$$

推论19.2.3.

$n(s,n;n-2[n/2]+2i)=\frac{2^{n-2[n/2]+2i}}{2^n}\frac{1}{2s}(C_{n-1}^{n-2[n/2]+2i-1}-2sC_{n-1}^{n-2[n/2]+2i})$

$\equiv\frac{1}{4s}\sum\limits_{j=0}^{[n/2]}(-1)^{k+i+j}C^j_{2s}C^{k-i}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-j)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}\frac{(2s-k-1-j)!(2s-2j)}{(2s)!(k-j)!(s-j)^{n-2[n/2]}}[(2s-j)(s-j-1/2)^{n-1}-j(s-j+1/2)^{n-1}]$

19.3 $c(s,n;n)$导出的恒等式特例

推论19.3.1.

$$\begin{cases}c(s,2k;2k)=\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{2(s-l)(2s-1-k-l)!}{2^{2k}(2s)!(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k}(-1)^{l+h}C^h_{2k}C^{l-h}_{2s-2k}\equiv\frac{(2s-2k)!}{(2s)!},s>k\\c(s,2k+1;2k+1)=\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{2(2s-1-k-l)!}{2^{2k+1}(2s)!(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k+1}(-1)^{l+h}C^h_{2k+1}C^{l-h}_{2s-2k-1}\equiv\frac{(2s-2k-1)!}{(2s)!},s\geq k\end{cases}$$

推论19.3.2.

$$\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{(s-l)(2s-1-k-l)!}{(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k}(-1)^{l+h}C^h_{2k}C^{l-h}_{2s-2k}\equiv2^{2k-1}(2s-2k)!\\\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{(2s-1-k-l)!}{(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k+1}(-1)^{l+h}C^h_{2k+1}C^{l-h}_{2s-2k-1}\equiv2^{2k}(2s-2k-1)!\end{cases}$$

推论19.3.3.

$$\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{(s-l)[2(s-l)-(k-l)-1]!}{(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k}(-1)^{l+h}C^h_{2k}C^{l-h}_{2s-2k}\equiv2^{2k-1}(2s-2k)!\\\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{[2(s-l)-(k-l)-1]!}{(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k+1}(-1)^{l+h}C^h_{2k+1}C^{l-h}_{2s-2k-1}\equiv2^{2k}(2s-2k-1)!\end{cases}$$

19.4 $c(s,n;n-2)$导出的恒等式特例

引理19.4.1.

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{2s}k^2=\frac{8}{3}s(s+\frac{1}{2})(s+\frac{1}{4})=\frac{1}{4}C_{4s+2}^3\\ \sum\limits_{k=1}^{[s]}(2k)^2=C_{2[s]+2}^3,\ \sum\limits_{k=1}^{[s+1/2]}(2k-1)^2=C_{2[s+1/2]+1}^3\\ C^1_{\{s^2,\cdots,\overline{(s-l)^2},\cdots,(s-k)^2\}}=\frac{1}{4}C^1_{\{(2s)^2,\cdots,\overline{(2s-2l)^2},\cdots,(2s-2k)^2\}}=\frac{1}{4}(C_{2s+2}^3-C_{2s-2k}^3)\end{cases}$$

推论19.4.1.

$$\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{(s-l)^3(2s-1-k-l)!}{(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k}(-1)^{l+h}C_{2k}^hC_{2s-2k}^{l-h}\equiv 2^{2k-2}(2s-2k)![(C_{2k}^3-sC_{2k}^2)+\frac{1}{2}(C_{2s+2}^3-C_{2s-2k}^3)]\\ \sum\limits_{l=0}^{k}\frac{(s-l)^2(2s-1-k-l)!}{(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k+1}(-1)^{l+h}C_{2k+1}^hC_{2s-2k-1}^{l-h}\equiv 2^{2k-1}(2s-2k-1)![(C_{2k+1}^3-sC_{2k+1}^2)+\frac{1}{2}(C_{2s+2}^3-C_{2s-2k}^3)]\end{cases}$$

证明:

$$\begin{cases}c(s,2k;2k-2)=-\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{2(s-l)C^1_{\{s^2,\cdots,\overline{(s-l)^2},\cdots,(s-k)^2\}}(2s-1-k-l)!}{2^{2k}(2s)!(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k}(-1)^{l+h}C_{2k}^hC_{2s-2k}^{l-h}\\ c(s,2k+1;2k-1)=-\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{2C^1_{\{s^2,\cdots,\overline{(s-l)^2},\cdots,(s-k)^2\}}(2s-1-k-l)!}{2^{2k+1}(2s)!(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k+1}(-1)^{l+h}C_{2k+1}^hC_{2s-2k-1}^{l-h}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}c(s,2k;2k-2)=-\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{(s-l)[C_{2s+2}^3-C_{2s-2k}^3-(2s-2l)^2](2s-1-k-l)!}{2^{2k+1}(2s)!(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k}(-1)^{l+h}C_{2k}^hC_{2s-2k}^{l-h}\equiv\frac{(2s-2k)!}{(2s)!2}(C_{2k}^3-sC_{2k}^2)\\ c(s,2k+1;2k-1)=-\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{[C_{2s+2}^3-C_{2s-2k}^3-(2s-2l)^2](2s-1-k-l)!}{2^{2k+2}(2s)!(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k+1}(-1)^{l+h}C_{2k+1}^hC_{2s-2k-1}^{l-h}\equiv\frac{(2s-2k-1)!}{(2s)!2}(C_{2k+1}^3-sC_{2k+1}^2)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{(s-l)^3(2s-1-k-l)!}{(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k}(-1)^{l+h}C_{2k}^hC_{2s-2k}^{l-h}\equiv 2^{2k-2}(2s-2k)![(C_{2k}^3-sC_{2k}^2)+\frac{1}{2}(C_{2s+2}^3-C_{2s-2k}^3)]\\ \sum\limits_{l=0}^{k}\frac{(s-l)^2(2s-1-k-l)!}{(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k+1}(-1)^{l+h}C_{2k+1}^hC_{2s-2k-1}^{l-h}\equiv 2^{2k-1}(2s-2k-1)![(C_{2k+1}^3-sC_{2k+1}^2)+\frac{1}{2}(C_{2s+2}^3-C_{2s-2k}^3)]\end{cases}$$ □

推论19.4.2.

$$\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{(s-l)^3[2(s-l)-(k-l)-1]!}{(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k}(-1)^{l+h}C_{2k}^hC_{2s-2k}^{l-h}\equiv 2^{2k-2}(2s-2k)![(C_{2k}^3-sC_{2k}^2)+\frac{1}{2}(C_{2s+2}^3-C_{2s-2k}^3)]\\ \sum\limits_{l=0}^{k}\frac{(s-l)^2[2(s-l)-(k-l)-1]!}{(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k+1}(-1)^{l+h}C_{2k+1}^hC_{2s-2k-1}^{l-h}\equiv 2^{2k-1}(2s-2k-1)![(C_{2k+1}^3-sC_{2k+1}^2)+\frac{1}{2}(C_{2s+2}^3-C_{2s-2k}^3)]\end{cases}$$

19.5 $c(s,n;n-4)$导出的恒等式特例

引理19.5.1. $c(s,n;n-4)=\frac{(2s-n)!}{(2s)!2}[2s(s-1)C_n^4+(-5s+3)C_n^5+5C_n^6],n\geq 0$

推论19.5.1. $c(s,2k;2k-4)=\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{2(s-l)C^2_{\{s^2,\cdots,\overline{(s-l)^2},\cdots,(s-k)^2\}}(2s-1-k-l)!}{2^{2k}(2s)!(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k}(-1)^{l+h}C_{2k}^hC_{2s-2k}^{l-h}$

$\equiv\frac{(2s-2k)!}{(2s)!2}[2s(s-1)C_{2k}^4+(-5s+3)C_{2k}^5+5C_{2k}^6]$

推论19.5.2. $c(s,2k+1;2k-3)=\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{2C^2_{\{s^2,\cdots,\overline{(s-l)^2},\cdots,(s-k)^2\}}(2s-1-k-l)!}{2^{2k+1}(2s)!(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k+1}(-1)^{l+h}C_{2k+1}^hC_{2s-2k-1}^{l-h}$

$\equiv\frac{(2s-2k-1)!}{(2s)!2}[2s(s-1)C_{2k+1}^4+(-5s+3)C_{2k+1}^5+5C_{2k+1}^6]$

19.6 $c(s,n;n-2l)$导出的恒等式(来源于第三章)

推论19.6.1. $C^k_{\{\overline{s},s-1,\cdots,1-s,-s\}}\equiv\frac{(2s)!}{(-2)^k}\sum\limits_{l=0}^{[k/2]}C_{2s}^{k-2l}2^{2l}c(s,2s-k+2l;2s-k)$

20 各种通项公式导出恒等式的验证

20.1 $c(s,n;n-2l)$导出恒等式的验证

推论20.1.1.

$$\begin{cases}c(s,2k;2k)=(-1)^{k+k}\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{2(s-l)C^{k-k}_{\{s^2,\cdots,\overline{(s-l)^2},\cdots,(s-k)^2\}}(2s-1-k-l)!}{2^{2k}(2s)!(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k}(-1)^{l+h}C_{2k}^hC_{2s-2k}^{l-h}\\ c(s,2k+1;2k+1)=(-1)^{k+k}\sum\limits_{l=0}^{k}\frac{2C^{k-k}_{\{s^2,\cdots,\overline{(s-l)^2},\cdots,(s-k)^2\}}(2s-1-k-l)!}{2^{2k+1}(2s)!(k-l)!}\sum\limits_{h=0}^{2k+1}(-1)^{l+h}C_{2k+1}^hC_{2s-2k-1}^{l-h}\end{cases}$$

推论20.1.2.

$$c(s,2k+1;2k+1)=(-1)^{k+k}\sum_{l=0}^{k}\frac{2C^{k-k}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-l)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}(2s-1-k-l)!}{2^{2k+1}(2s)!(k-l)!}\sum_{h=0}^{2k+1}(-1)^{l+h}C^h_{2k+1}C^{l-h}_{2s-2k-1}$$
$$=\sum_{l=0}^{k}\frac{2(2s-1-k-l)!}{2^{2k+1}(2s)!(k-l)!}\sum_{h=0}^{2k+1}(-1)^{l+h}C^h_{2k+1}C^{l-h}_{2s-2k-1}$$
$$=\sum_{l=0}^{1}\frac{2(2s-1-1-l)!}{2^{2+1}(2s)!(1-l)!}\sum_{h=0}^{2+1}(-1)^{l+h}C^h_{2+1}C^{l-h}_{2s-2-1}$$
$$=\sum_{l=0}^{1}\frac{2(2s-2-l)!}{2^3(2s)!}\sum_{h=0}^{3}(-1)^{l+h}C^h_3C^{l-h}_{2s-3}$$
$$=\frac{(2s-2)!}{2^2(2s)!}\sum_{h=0}^{3}(-1)^hC^h_3C^{-h}_{2s-3}+\frac{(2s-3)!}{2^2(2s)!}\sum_{h=0}^{3}(-1)^{1+h}C^h_3C^{1-h}_{2s-3}$$

推论20.1.3.

$$c(s,2k;2k)=(-1)^{k+k}\sum_{l=0}^{k}\frac{2(s-l)C^{k-k}_{\{s^2,\cdot\cdot,\overline{(s-l)^2},\cdot\cdot,(s-k)^2\}}(2s-1-k-l)!}{2^{2k}(2s)!(k-l)!}\sum_{h=0}^{2k}(-1)^{l+h}C^h_{2k}C^{l-h}_{2s-2k}$$
$$=\sum_{l=0}^{k}\frac{2(s-l)(2s-1-k-l)!}{2^{2k}(2s)!(k-l)!}\sum_{h=0}^{2k}(-1)^{l+h}C^h_{2k}C^{l-h}_{2s-2k}$$
$$=\sum_{l=0}^{1}\frac{2(s-l)(2s-1-1-l)!}{2^2(2s)!(1-l)!}\sum_{h=0}^{2}(-1)^{l+h}C^h_2C^{l-h}_{2s-2}$$
$$=\sum_{l=0}^{1}\frac{2(s-l)(2s-1-1-l)!}{2^2(2s)!}\sum_{h=0}^{2}(-1)^{l+h}C^h_2C^{l-h}_{2s-2}$$
$$=\frac{2s(2s-2)!}{2^2(2s)!}\sum_{h=0}^{2}(-1)^hC^h_2C^{-h}_{2s-2}+\frac{2(s-1)(2s-3)!}{2^2(2s)!}\sum_{h=0}^{2}(-1)^{1+h}C^h_2C^{1-h}_{2s-2}$$

推论20.1.4.

$$c(s,2k;2k)=\sum_{l=0}^{k}\frac{2(s-l)(2s-1-k-l)!}{2^{2k}(2s)!(k-l)!}\sum_{h=0}^{2k}(-1)^{l+h}C^h_{2k}C^{l-h}_{2s-2k}=\frac{(2s-2k)!}{(2s)!}$$
$$c(s,2k+1;2k+1)=\sum_{l=0}^{k}\frac{2(2s-1-k-l)!}{2^{2k+1}(2s)!(k-l)!}\sum_{h=0}^{2k+1}(-1)^{l+h}C^h_{2k+1}C^{l-h}_{2s-2k-1}=\frac{(2s-2k-1)!}{(2s)!}$$

推论20.1.5.

$$c(s,2k;2k)=\sum_{l=0}^{k}\frac{2(s-l)(2s-1-k-l)!}{(k-l)!}\sum_{h=0}^{2k}(-1)^{l+h}C^h_{2k}C^{l-h}_{2s-2k}=2^{2k}(2s-2k)!$$
$$c(s,2k+1;2k+1)=\sum_{l=0}^{k}\frac{(2s-1-k-l)!}{(k-l)!}\sum_{h=0}^{2k+1}(-1)^{l+h}C^h_{2k+1}C^{l-h}_{2s-2k-1}=2^{2k}(2s-2k-1)!$$

21 各种隐含的恒等式(物理上可以使用，但数学上仍是猜想)

21.1 第一类恒等式

命题21.1.1. $B_i(n)=\frac{1}{(2n)!}\sum_{j=0}^{2n}(-1)^{i+j}C^{2n-i}_{\{\cdot\cdot\overline{n-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2n}(n-j)^{2n+1}\equiv-\frac{1}{2}[1-(-1)^{2n-i}](-1)^{[\frac{i}{2}]-n}[C^{n-[\frac{i}{2}]}_{\{1^2,2^2,\cdot\cdot,(n-1)^2,n^2\}}]$

命题21.1.2.

$$\begin{cases}B_{2k}(n)=\frac{1}{(2n)!}\sum_{j=0}^{2n}(-1)^jC^{2n-2k}_{\{n,\cdot\cdot\overline{n-j}\cdot\cdot,-n\}}C^j_{2n}(n-j)^{2n+1}\equiv 0\\ B_{2k+1}(n)=-\frac{1}{(2n)!}\sum_{j=0}^{2n}(-1)^jC^{2n-2k-1}_{\{n,\cdot\cdot\overline{n-j}\cdot\cdot,-n\}}C^j_{2n}(n-j)^{2n+1}\equiv-(-1)^{n-k}C^{n-k}_{\{1^2,2^2,\cdot\cdot,(n-1)^2,n^2\}}\end{cases}$$

命题21.1.3.

$$\begin{cases}C^{n-k}_{\{1^2,2^2,\cdot\cdot,(n-1)^2,n^2\}}\equiv\frac{(-1)^{n-k}}{(2n)!}\sum_{j=0}^{2n}(-1)^jC^j_{2n}C^{2n-2k-1}_{\{n,\cdot\cdot\overline{n-j}\cdot\cdot,-n\}}(n-j)^{2n+1}\\ C^{k}_{\{1^2,2^2,\cdot\cdot,(n-1)^2,n^2\}}\equiv\frac{(-1)^{k}}{(2n)!}\sum_{j=0}^{2n}(-1)^jC^j_{2n}C^{2k-1}_{\{n,\cdot\cdot\overline{n-j}\cdot\cdot,-n\}}(n-j)^{2n+1}\end{cases}$$

命题21.1.4.

$$\begin{cases}C^{k}_{\{1^2,2^2,\cdot\cdot,(n-1)^2,n^2\}}\equiv\frac{(-1)^{k}}{(2n)!}\sum_{h=n}^{-n}(-1)^{n-h}C^{n-h}_{2n}C^{2k-1}_{\{n,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,-n\}}h^{2n+1}\\ C^{k}_{\{2^2,4^2,\cdot\cdot,(2n-2)^2,(2n)^2\}}\equiv\frac{(-4)^{k}}{(2n)!}\sum_{h=n}^{-n}(-1)^{n-h}C^{n-h}_{2n}C^{2k-1}_{\{n,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,-n\}}h^{2n+1}\end{cases}$$

推论21.1.1. $X_k(s)=\frac{(-1)^{2s+1}}{(2s)!}\sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C^{2k-1}_{\{\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot\}}C^{s+h}_{2s}h^{2s+1}? \Rightarrow X_k(s)=X_k(s-1)-s^2X_{k-1}(s-1)$

21.2 第一类恒等式特例

推论21.2.1. $X_1(s)=\sum_{j=0}^{[s-1/2]}\frac{2(-1)^jC^j_{2s}(s-j)^{2[s+3/2]}}{(2s)!(s-j)^{(2s)\%2}}\equiv\frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}C^{s+h}_{2s}h^{2s+2}?=\frac{1}{4}C^3_{2s+2}$

21.3 第二类恒等式

命题21.3.1. $B_i(s)=\frac{(-1)^{2s}}{(2s)!}\sum_{j=0}^{2s}(-1)^{i+j}C^{2s-i}_{\{\cdot\cdot\overline{s-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2s}(s-j)^{2s+1}\equiv-\frac{1}{2}[1-(-1)^{2s-i}](-1)^{[\frac{i}{2}]-[s+\frac{1}{2}]}[C^{[s+\frac{1}{2}]-[\frac{i}{2}]}_{\{(1/2|1)^2,\cdot\cdot,(s-1)^2,s^2\}}]$

命题21.3.2.

$B_i(n-\frac{1}{2})=\frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)!}\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^{i+j}C^{2n-1-i}_{\{\cdot\cdot\overline{n-1/2-j}\cdot\cdot\}}C^j_{2n-1}(n-\frac{1}{2}-j)^{2n}\equiv-\frac{1}{2}[1-(-1)^{2n-1-i}](-1)^{[\frac{i}{2}]-n}[C^{n-[\frac{i}{2}]}_{\{(1/2)^2,\cdot\cdot,(n-1/2)^2\}}]$

命题21.3.3.

$$\begin{cases}B_{2k-1}(n-\frac{1}{2})=\frac{1}{(2n-1)!}\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^jC^j_{2n-1}C^{2n-2k}_{\{n-1/2,\cdot\cdot\overline{n-1/2-j}\cdot\cdot,1/2-n\}}(n-\frac{1}{2}-j)^{2n}\equiv 0\\ B_{2k}(n-\frac{1}{2})=-\frac{1}{(2n-1)!}\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^jC^j_{2n-1}C^{2n-1-2k}_{\{\cdot\cdot\overline{n-1/2-j}\cdot\cdot\}}(n-\frac{1}{2}-j)^{2n}\equiv-(-1)^{n-k}[C^{n-k}_{\{(1/2)^2,\cdot\cdot,(n-1/2)^2\}}]\end{cases}$$

命题21.3.4.

$$\begin{cases}C^{n-k}_{\{(1/2)^2,\cdot\cdot,(n-1/2)^2\}}\equiv\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-1)!}\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^jC^j_{2n-1}C^{2n-1-2k}_{\{n-1/2,\cdot\cdot\overline{n-1/2-j}\cdot\cdot,1/2-n\}}(n-\frac{1}{2}-j)^{2n}\\ C^{k}_{\{(1/2)^2,\cdot\cdot,(n-1/2)^2\}}\equiv\frac{(-1)^{k}}{(2n-1)!}\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^jC^j_{2n-1}C^{2k-1}_{\{n-1/2,\cdot\cdot\overline{n-1/2-j}\cdot\cdot,1/2-n\}}(n-\frac{1}{2}-j)^{2n}\end{cases}$$

命题21.3.5.

$$\begin{cases}C^{k}_{\{(1/2)^2,\cdot\cdot,(n-1/2)^2\}}\equiv\frac{(-1)^{k}}{(2n-1)!}\sum_{h=n-1/2}^{-(n-1/2)}(-1)^{n-1/2-h}C^{n-1/2-h}_{2n-1}C^{2k-1}_{\{n-1/2,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,1/2-n\}}h^{2n}\\ C^{k}_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}}\equiv\frac{(-4)^{k}}{(2n-1)!}\sum_{h=n-1/2}^{-(n-1/2)}(-1)^{n-1/2-h}C^{n-1/2-h}_{2n-1}C^{2k-1}_{\{n-1/2,\cdot\cdot\overline{h}\cdot\cdot,1/2-n\}}h^{2n}\end{cases}$$

21.4 两类恒等式小结

命题21.4.1.

$$\begin{cases}C^{k}_{\{1^2,3^2\cdot\cdot,(2n-1)^2\}}\equiv\frac{2(-1)^{k}}{(2n-1)!}\sum_{h=n-1/2}^{-(n-1/2)}(-1)^{n-1/2-h}C^{n-1/2-h}_{2n-1}C^{2k-1}_{\{2n-1,\cdot\cdot\overline{2h}\cdot\cdot,1-2n\}}h^{2n}\\ C^{k}_{\{2^2,4^2,\cdot\cdot,(2n-2)^2,(2n)^2\}}\equiv\frac{2(-1)^{k}}{(2n)!}\sum_{h=n}^{-n}(-1)^{n-h}C^{n-h}_{2n}C^{2k-1}_{\{2n,\cdot\cdot\overline{2h}\cdot\cdot,-2n\}}h^{2n+1}\end{cases}$$

22 投影算子猜想相关组合学恒等式的严格证明试探

22.1 利用范德蒙恒等式严格证明$[i=0,j=0]$情形(成功证明)

推论22.1.1.

$\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2k)!}{k!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!},\ \sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r+1)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2k+1)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k)!(n-k)!}$

证明：$k\le n-k,\sum_{r=0}^{k}(-4)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}$

$=\sum_{r=0}^{k}(-1)^rC^r_k4^r\frac{(2n-2r)!}{k!(n-r)!(n-k-r)!}=\sum_{r=0}^{k}(-1)^rC^r_k4^rC^{n-r}_{2n-2r}C^k_{n-r}$

$\Rightarrow$ 令$t_r=4^r\frac{(2n-2r)!}{k!(n-r)!(n-k-r)!},t_0=C^n_{2n}C^k_n$

$\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{4^{r+1}\frac{(2n-2r-2)!}{k!(n-r-1)!(n-k-r-1)!}}{4^r\frac{(2n-2r)!}{k!(n-r)!(n-k-r)!}}=\frac{4(n-r)(n-k-r)}{(2n-2r)(2n-2r-1)}=\frac{k-n+r}{1/2-n+r}$

$\Rightarrow t_r=\frac{(k-n)^{(r)}}{(1/2-n)^{(r)}}C^n_{2n}C^k_n$

$\Rightarrow \sum\limits_{r=0}^{k}(-4)^r \frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!} = \sum\limits_{r=0}^{k}(-1)^r C_k^r \frac{(k-n)^{(r)}}{(1/2-n)^{(r)}} C_{2n}^n C_n^k$

$= \frac{(1/2-k)^{(k)}}{(1/2-n)^{(k)}} C_{2n}^n C_n^k = \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!}$ □

证明：$k \geq n-k, \sum\limits_{r=0}^{k}(-4)^r \frac{(2n-2r+1)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}$

$= \sum\limits_{r=0}^{k}(-1)^r C_k^r 4^r \frac{(2n-2r+1)!}{k!(n-r)!(n-k-r)!} = \sum\limits_{r=0}^{k}(-1)^r C_k^r 4^r C_{2n-2r+1}^{n-r} C_{n-r}^k$

$\Rightarrow$ 令$t_r = 4^r \frac{(2n-2r+1)!}{k!(n-r)!(n-k-r)!}, t_0 = \frac{(2n+1)!}{k!n!(n-k)!}$

$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{4^{r+1}\frac{(2n-2r-1)!}{k!(n-r-1)!(n-k-r-1)!}}{4^r \frac{(2n-2r+1)!}{k!(n-r)!(n-k-r)!}} = \frac{4(n-r)(n-k-r)}{(2n-2r+1)(2n-2r)} = \frac{k-n+r}{-1/2-n+r}$

$\Rightarrow t_r = \frac{(k-n)^{(r)}}{(-1/2-n)^{(r)}} \frac{(2n+1)!}{k!n!(n-k)!}$

$\Rightarrow \sum\limits_{r=0}^{k}(-4)^r \frac{(2n-2r+1)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!} = \sum\limits_{r=0}^{k}(-1)^r C_k^r \frac{(k-n)^{(r)}}{(-1/2-n)^{(r)}} \frac{(2n+1)!}{k!n!(n-k)!}$

$= \frac{(-1/2-k)^{(k)}}{(-1/2-n)^{(k)}} \frac{(2n+1)!}{k!n!(n-k)!} = \frac{(2k+1)!}{k!k!} \frac{(2n-2k+1)!}{(n-k)!(n-k)!}$ □

22.2 利用范德蒙恒等式严格证明$[i=1,j=0]|[i=0,j=1]$情形(成功证明)

推论22.2.1. $\sum\limits_{r=1}^{k|(n-k)}(-1)^{r+1}2^{2r-1}\frac{(2n-2r)!}{(r-1)!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!} = \frac{(2k)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-1-k)!(n-k)!}$

$[\Leftrightarrow] \sum\limits_{r=0}^{k-1|(n-k-1)}(-1)^r 2^{2r+1}\frac{(2n-2r-2)!}{r!(n-r-1)!(k-r-1)!(n-k-r-1)!} = \frac{(2k)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-1-k)!(n-k)!}$

证明：$k \leq n-k, \sum\limits_{r=0}^{k-1|(n-k-1)}(-1)^r 2^{2r+1}\frac{(2n-2r-2)!}{r!(n-r-1)!(k-r-1)!(n-k-r-1)!}$

$= \sum\limits_{r=0}^{k-1|(n-k-1)}(-1)^r C_{k-1}^r 2^{2r+1}\frac{(2n-2r-2)!}{(k-1)!(n-r-1)!(n-k-r-1)!}$

$\Rightarrow$ 令$t_r = 2^{2r+1}\frac{(2n-2r-2)!}{(k-1)!(n-r-1)!(n-k-r-1)!}, t_0 = 2\frac{(2n-2)!}{(k-1)!(n-1)!(n-k-1)!}$

$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{2^{2r+3}\frac{(2n-2r-4)!}{k!(n-r-2)!(n-k-r-2)!}}{2^{2r+1}\frac{(2n-2r-2)!}{k!(n-r-1)!(n-k-r-1)!}} = \frac{4(n-r-1)(n-k-r-1)}{(2n-2r-2)(2n-2r-3)} = \frac{k+1-n+r}{3/2-n+r}$

$\Rightarrow t_r = \frac{(k+1-n)^{(r)}}{(3/2-n)^{(r)}} 2\frac{(2n-2)!}{(k-1)!(n-1)!(n-k-1)!}$

$\Rightarrow \sum\limits_{r=0}^{k-1|(n-k-1)}(-1)^r 2^{2r+1}\frac{(2n-2r-2)!}{r!(n-r-1)!(k-r-1)!(n-k-r-1)!}$

$= \sum\limits_{r=0}^{k-1|(n-k-1)}(-1)^r C_{k-1}^r \frac{(k+1-n)^{(r)}}{(3/2-n)^{(r)}} 2\frac{(2n-2)!}{(k-1)!(n-1)!(n-k-1)!}$

$= \frac{(1/2-k)^{(k-1)}}{(3/2-n)^{(k-1)}} 2\frac{(2n-2)!}{(k-1)!(n-1)!(n-k-1)!} = \frac{(2k)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-1-k)!(n-k)!}$ □

推论22.2.2. $\sum\limits_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r \frac{(2n-2r+1)!}{(r-1)!(n-r)!(n-k-r)!(k-r)!} = -\frac{2}{3}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-1)!(n-k)!}$

$[\Leftrightarrow] \sum\limits_{r=0}^{k-1|(n-k-1)}(-1)^{r+1}2^{2r+2}\frac{(2n-2r-1)!}{r!(n-r-1)!(k-r-1)!(n-k-r-1)!} = -\frac{2}{3}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-1)!(n-k)!}$

证明：$k \geq n-k, \sum\limits_{r=0}^{k-1|(n-k-1)}(-1)^{r+1}2^{2r+2}\frac{(2n-2r-1)!}{r!(n-r-1)!(k-r-1)!(n-k-r-1)!}$

$= \sum\limits_{r=0}^{k-1}(-1)^{r+1}C_{k-1}^r 2^{2r+2}\frac{(2n-2r-1)!}{(k-1)!(n-r-1)!(n-k-r-1)!}$

$\Rightarrow$ 令$t_r = 2^{2r+2}\frac{(2n-2r-1)!}{(k-1)!(n-r-1)!(n-k-r-1)!}, t_0 = -4\frac{(2n-1)!}{(k-1)!(n-1)!(n-k-1)!}$

$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{2^{2r+3}\frac{(2n-2r-3)!}{k!(n-r-2)!(n-k-r-2)!}}{2^{2r+1}\frac{(2n-2r-1)!}{k!(n-r-1)!(n-k-r-1)!}} = \frac{4(n-r-1)(n-k-r-1)}{(2n-2r-1)(2n-2r-2)} = \frac{k+1-n+r}{1/2-n+r}$

$\Rightarrow t_r = -\frac{(k+1-n)^{(r)}}{(1/2-n)^{(r)}} 4\frac{(2n-1)!}{(k-1)!(n-1)!(n-k-1)!}$

$\Rightarrow \sum\limits_{r=0}^{k-1}(-1)^r 2^{2r+1}\frac{(2n-2r-2)!}{r!(n-r-1)!(k-r-1)!(n-k-r-1)!}$

$$= -\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_{k-1}^r \frac{(k+1-n)^{(r)}}{(1/2-n)^{(r)}} 4\frac{(2n-1)!}{(k-1)!(n-1)!(n-k-1)!}$$

$$= -\frac{(-1/2-k)^{(k-1)}}{(1/2-n)^{(k-1)}} 4\frac{(2n-1)!}{(k-1)!(n-1)!(n-k-1)!} = -\frac{2}{3}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-1)!(n-k)!} \quad \square$$

第二十章　非相对论性粒子的量子化

自我评述：在本章我充分运用四维傅里叶变换技巧，汇聚讨论了非相对论性粒子的二次量子化细节。

1 傅里叶分析技巧和平面波解展开 [42]

1.1 波函数的傅里叶展开

基本思想：将波函数按傅里叶分析完备唯一展开，将方程和约束看作对波函数的选取条件，最后得到的是符合方程和约束的完备平面波解。

定义1.1.1. $k \equiv (\vec{k}, iE), x \equiv (\vec{r}, it), d^4x \equiv d^3\vec{r}dt, \omega_k \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} > 0, p_a(\omega_k) \equiv (\vec{k}, i\omega_k)_a$

定义1.1.2. $\int\limits_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty} \equiv \int\limits_{r_x=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{r_y=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{r_z=-\infty}^{+\infty}, \quad \int\limits_{x=-\infty}^{+\infty} \equiv \int\limits_{r_x=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{r_y=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{r_z=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{t=-\infty}^{+\infty}$

定义1.1.3. $\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \equiv \int\limits_{p_x=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{p_y=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{p_z=-\infty}^{+\infty}, \quad \int\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \equiv \int\limits_{p_x=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{p_y=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{p_z=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{E=-\infty}^{+\infty}$

波函数的傅里叶展开:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{E=-\infty}^{+\infty} \Phi(\vec{k}, E) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)} d^3\vec{k}dE, \Phi(\vec{k}, E) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{t=-\infty}^{+\infty} \phi(\vec{r}, t) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)} d^3\vec{r}dt$$

波函数的傅里叶展开紧凑形式:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(k) e^{ik\cdot x} d^4k \Leftrightarrow \Phi(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{x=-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-ik\cdot x} d^4x \tag{20.1}$$

1.2 波函数的傅里叶展开与洛仑兹协变性

定义1.2.1. $\Phi(k) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{x=-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-ik\cdot x} d^4x, \Phi'(k') \equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{x'=-\infty}^{+\infty} \phi'(x') e^{-ik'\cdot x'} d^4x'$

对于以上两式数学上只是随意的两个定义，可以有随意的数学含义，但可以赋予其明确的物理意义，将前式看作在参考系O中的表达，后式看作在参考系O'中的表达。详细地说，将x看作时空坐标在参考系O中的表达，将k看作四维动量在参考系O中的表达，将$\phi(x)$看作时空波函数在参考系O中的表达，将$\Phi(k)$看作动量相空间波函数在参考系O中的表达；将x'看作时空坐标在参考系O'中的表达，将k'看作四维动量在参考系O'中的表达，将$\phi'(x')$看作时空波函数在参考系O'中的表达，将$\Phi'(k')$ 看作动量相空间波函数在参考系O'中的表达。参考系O'中的物理量与参考系O中的对应物理量由洛伦兹变换相联系。在这个联系中$k \cdot x, d^4x$表现为标量，$\phi(x), \Phi(k)$表现为协变量。

定理1.2.1. $\phi'(e^\varepsilon x) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}} \phi(x) \Leftrightarrow \Phi'(e^\varepsilon k) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}} \Phi(k)$

证明: $\phi'(e^\varepsilon x) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}} \phi(x)$

$\Leftrightarrow \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{x=-\infty}^{+\infty} \phi'(e^\varepsilon x) e^{-ik\cdot x} d^4x = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{x=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}} \phi(x) e^{-ik\cdot x} d^4x$

$\Leftrightarrow \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{e^{-\varepsilon}x'=-\infty}^{+\infty} \phi'(x') e^{-ike^{-\varepsilon}\cdot x'} d^4x' = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}} \Phi(k)$

$\Leftrightarrow \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{x'=-\infty}^{+\infty} \phi'(x') e^{-ike^{-\varepsilon}\cdot x'} d^4x' = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}} \Phi(k)$

$\Leftrightarrow \Phi'(e^\varepsilon k) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}} \Phi(k)$ □

以上定理表明，如果时空波函数是个协变量，那么其傅里叶展开系数全是同类型的协变量，反之亦然。以上结论从数学上看，等价于作一个变量代换$x' = e^\varepsilon x, k' = e^\varepsilon k$，且满足$\Phi'(e^\varepsilon x) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}} \Phi(x)$，这个变换就是洛伦兹变换。

1.3 特殊函数的洛伦兹协变性

推论1.3.1. $\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega}d^3\vec{k}=\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int_{E=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega}[\delta(E-\omega)+\delta(E+\omega)]d^3\vec{k}dE=\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int_{E=-\infty}^{+\infty}\delta(E^2-\omega^2)d^3\vec{k}dE$(为标量)

得到一个重要的数学技巧：$\frac{1}{\omega}d^3\vec{k}=\delta(E^2-\omega^2)d^3\vec{k}dE$，它是一个标量。有没有一个更直观的证法？

推论1.3.2. $\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega}d^3\vec{k}=\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int_{E=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega}\delta(E-\omega)d^3\vec{k}dE=\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int_{E=0}^{+\infty}\delta(E^2-\omega^2)d^3\vec{k}dE$(为标量)

推论1.3.3. $\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega}d^3\vec{k}=\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int_{E=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega}\delta(E+\omega)d^3\vec{k}dE=\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int_{E=-\infty}^{0}\delta(E^2-\omega^2)d^3\vec{k}dE$(为标量)

推论1.3.4. $\delta(E^2-\omega^2)=\frac{1}{2\omega}[\delta(E-\omega)+\delta(E+\omega)]$

推论1.3.5. $\delta(E^2-\omega^2)U(E)=\frac{1}{2\omega}\delta(E-\omega),\delta(E^2-\omega^2)U(-E)=\frac{1}{2\omega}\delta(E+\omega)$

推论1.3.6. $\delta(E^2-\omega^2)U(E-\omega)=\frac{1}{2\omega}\delta(E-\omega),\delta(E^2-\omega^2)U(-E-\omega)=\frac{1}{2\omega}\delta(E+\omega)$

推论1.3.7. $\delta(-k_ak^a-m^2)$为标量。

推论1.3.8. $\frac{1}{\omega}\delta(E-\omega),\frac{1}{\omega}\delta(E+\omega)$为标量。

推论1.3.9. $\delta^4(k'-k),\delta^4(x'-x)$为标量。

推论1.3.10. $d^4k,d^4x,\frac{1}{\omega}d^3\vec{k}$为标量。

2 粒子守恒协变量

2.1 电流源守恒方程和守恒协变量

推论2.1.1. $Q=\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\rho(\vec{r},t_0)d^3\vec{r},\quad \partial_aJ^a(\vec{r},t)=0\Rightarrow Q=\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty}\partial_a[J^a(\vec{r},t)U(t-t_0)]d^3\vec{r}dt$

证明: $Q=\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\rho(\vec{r},t_0)d^3\vec{r}=\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty}\rho(\vec{r},t)\delta(t-t_0)d^3\vec{r}dt$

$=\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty}\rho(\vec{r},t)\partial_tU(t-t_0)d^3\vec{r}dt=\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty}J^a(\vec{r},t)\partial_aU(t-t_0)d^3\vec{r}dt$

$\overset{\partial_aJ^a(\vec{r},t)=0}{=}\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty}\partial_a[J^a(\vec{r},t)U(t-t_0)]d^3\vec{r}dt$ □

推论2.1.2. $P^a=\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}T^{a0}(\vec{r},t_0)d^3\vec{r},\quad \partial_bT^{ab}(\vec{r},t)=0\Rightarrow P^a=\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty}\partial_b[T^{ab}(\vec{r},t)U(t-t_0)]d^3\vec{r}dt,$

证明: $P^a=\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}T^{a0}(\vec{r},t_0)d^3\vec{r}=\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty}T^{a0}(\vec{r},t)\delta(t-t_0)d^3\vec{r}dt$

$=\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty}T^{a0}(\vec{r},t)\partial_tU(t-t_0)d^3\vec{r}dt=\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty}T^{ab}(\vec{r},t)\partial_bU(t-t_0)d^3\vec{r}dt$

$\overset{\partial_bT^{ab}(\vec{r},t)=0}{=}\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty}\partial_b[T^{ab}(\vec{r},t)U(t-t_0)]d^3\vec{r}dt,$ □

推论2.1.3. $M^{ab}=\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}J^{ab0}(\vec{r},t_0)d^3\vec{r},\quad \partial_cJ^{abc}(\vec{r},t)=0\Rightarrow M^{ab}=\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty}\partial_c[J^{abc}(\vec{r},t)U(t-t_0)]d^3\vec{r}dt$

证明: $M^{ab}=\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}J^{ab0}(\vec{r},t_0)d^3\vec{r}=\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty}J^{ab0}(\vec{r},t)\delta(t-t_0)d^3\vec{r}dt$

$$= \int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty} J^{ab0}(\vec{r},t)\partial_t U(t-t_0)d^3\vec{r}dt = \int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty} J^{abc}(\vec{r},t)\partial_c U(t-t_0)d^3\vec{r}dt$$

$$\overset{\partial_c J^{abc}(\vec{r},t)=0}{=} \int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty} \partial_c[J^{abc}(\vec{r},t)U(t-t_0)]d^3\vec{r}dt \qquad \square$$

数学技巧：我这里只提供关键的技巧，并没有给出完整的证明。温伯格书中利用电流源守恒方程、物理函数在空间无穷远处为零和洛仑兹变换下物理时间前后不变的特性，从上面命题就可以证明Q, P^a, M^{ab} 的洛伦兹协变性。

3 非相对论性粒子

3.1 复标量场方程的平面波解

复标量场方程: $(\partial_a\partial^a - m^2)\phi(\vec{r},t) = 0 \Leftrightarrow (\nabla^2 - \partial_t^2 - m^2)\phi(\vec{r},t) = 0$ (20.2)

定理3.1.1. $(\partial_a\partial^a - m^2)\phi(\vec{r},t) = 0 \Leftrightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\omega_k}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + a(-\vec{k},-\omega_k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}]d^3\vec{k}$

证明: $(\partial_a\partial^a - m^2)\phi(\vec{r},t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int_{E=-\infty}^{+\infty} \phi(\vec{k},E)(-\vec{k}^2 + E^2 - m^2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{k}dE = 0$

$$\Leftrightarrow \phi(\vec{k},E)(E^2-\vec{k}^2-m^2) = 0 \Leftrightarrow \phi(\vec{k},E) = a(\vec{k},E)\delta(E^2-\vec{k}^2-m^2) + \phi_0(\vec{k},E)\delta_{E^2,\vec{k}^2+m^2}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int_{E=-\infty}^{+\infty} [a(\vec{k},E)\delta(E^2-\vec{k}^2-m^2) + \phi_0(\vec{k},E)\delta_{E^2,\vec{k}^2+m^2}]e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{k}dE$$

$$\Leftrightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int_{E=-\infty}^{+\infty} a(\vec{k},E)\delta(E^2-\vec{k}^2-m^2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{k}dE, \text{明显洛伦兹协变}$$

$$\Leftrightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int_{E=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\omega_k}a(\vec{k},E)[\delta(E-\omega_k)+\delta(E+\omega_k)]e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{k}dE$$

$$\Leftrightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int_{E=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\omega_k}a(\vec{k},E)[\delta(E-\omega_k)+\delta(E+\omega_k)]e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{k}dE$$

$$\Leftrightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\omega_k}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + a(\vec{k},-\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega_k t)}]d^3\vec{k}$$

$$\Leftrightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\omega_k}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + a(-\vec{k},-\omega_k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}]d^3\vec{k} \qquad \square$$

这里用了一种与一般书中不同的方法，采用了四维而非三维的傅里叶展开，清晰地展现出粒子离壳和在壳的物理概念，洛伦兹协变性也明显表现于其中，并且包含了狄拉克函数解的代数新解法。在证明的过程也看到了正能解和负能解的分解，并且负能解可以按两种含义进行理解，一是将负能解理解为一种负质量粒子，二是将负能解还是理解为正质量粒子，不过要理解为反射波，正能解理解为入射波。

推论3.1.1. $a'(e^\varepsilon[\vec{k},E])\delta(E^2-\vec{k}^2-m^2) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}}a(\vec{k},E)\delta(E^2-\vec{k}^2-m^2)$
$\Rightarrow a'(e^\varepsilon[\vec{k},\omega_k]) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}}a(\vec{k},\omega_k), a'(e^\varepsilon[\vec{k},-\omega_k]) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}}a(\vec{k},-\omega_k)$

推论3.1.2. $a(\vec{k},E)\delta(E^2-\vec{k}^2-m^2) = \frac{1}{2\omega_k}a(\vec{k},E)[\delta(E-\omega_k)+\delta(E+\omega_k)], |\vec{k}| << m$
$\approx \frac{1}{2(m+\frac{\vec{k}^2}{2m})}[a(\vec{k},m+\frac{\vec{k}^2}{2m})\delta(E-m-\frac{\vec{k}^2}{2m}) + a(\vec{k},-m-\frac{\vec{k}^2}{2m})\delta(E+m+\frac{\vec{k}^2}{2m})]$

推论3.1.3. $\phi(\vec{r},t) \approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2(m+\frac{\vec{k}^2}{2m})}[a(\vec{k},m+\frac{\vec{k}^2}{2m})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}^2}{2m}t)}e^{-imt} + a(-\vec{k},-m-\frac{\vec{k}^2}{2m})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}^2}{2m}t)}e^{imt}]d^3\vec{k}$

从上可知，在非相对论极限下，复标量场平面波解分成两个非相对论性的正反粒子，可以同时存在。这可以继续分析下去，是否可以证明正、负能解独自守恒？

3.2 复标量场方程的两个非相对论性分支

定理3.2.1. $(\partial_a\partial^a - m^2)\phi(\vec{r},t) = 0 \Rightarrow$ 两个分支：$\begin{cases} \text{正能解：} (i\partial_t + \frac{1}{2m}\nabla^2)\phi_+(\vec{r},t) = 0 \\ \text{负能解：} (-i\partial_t + \frac{1}{2m}\nabla^2)\phi_-(\vec{r},t) = 0 \end{cases}$

定理3.2.2. 正能解：$(i\partial_t + \frac{1}{2m}\nabla^2)\phi(\vec{r},t) = 0 \Leftrightarrow$ 负能解：$(-i\partial_t + \frac{1}{2m}\nabla^2)\phi^*(\vec{r},t) = 0$

3.3 正能解薛定谔方程的作用量及其泊松括号

推论3.3.1. 拉氏密度：$\mathscr{L} = \frac{1}{2}[i\phi^*(\vec{r},t)\partial_t\phi(\vec{r},t) - i\phi(\vec{r},t)\partial_t\phi^*(\vec{r},t) - \frac{1}{m}\nabla\phi^*(\vec{r},t)\cdot\nabla\phi(\vec{r},t)]$
拉氏密度：$\mathscr{L} = i\phi^*(\vec{r},t)\partial_t\phi(\vec{r},t) + \frac{1}{2m}\phi^*(\vec{r},t)\nabla^2\phi(\vec{r},t)$
运动方程：$(i\partial_t + \frac{1}{2m}\nabla^2)\phi(\vec{r},t) = 0$

推论3.3.2. 正则变量：$\pi(\vec{r},t) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}} = i\phi^*(\vec{r},t)$

推论3.3.3. 哈密顿密度：$\mathscr{H} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi} - \mathscr{L} = -\frac{1}{2m}\phi^*(\vec{r},t)\nabla^2\phi(\vec{r},t) = \frac{i}{2m}\pi(\vec{r},t)\nabla^2\phi(\vec{r},t)$

推论3.3.4. 动量密度：$\mathscr{P} = -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\nabla\phi = -i\phi^*(\vec{r},t)\nabla\phi(\vec{r},t) = -\pi(\vec{r},t)\nabla\phi(\vec{r},t)$

推论3.3.5. 拉氏密度：$\mathscr{L}_H = \pi(\vec{r},t)\partial_t\phi(\vec{r},t) - \frac{i}{2m}\pi(\vec{r},t)\nabla^2\phi(\vec{r},t)$

正则变量之间的基本关系：

推论3.3.6. $\{\phi(\vec{r'},t),\phi(\vec{r},t)\}_p = 0, \{\pi(\vec{r'},t),\pi(\vec{r},t)\}_p = 0, \{\phi(\vec{r'},t),\pi(\vec{r},t)\}_p = \delta^3(\vec{r'}-\vec{r})$

哈密顿运动方程：

推论3.3.7. $\begin{cases} \dot{\phi}(\vec{r},t) = \frac{i}{2m}\nabla^2\phi(\vec{r},t) = \{\phi(\vec{r},t),H\}_p \\ \dot{\pi}(\vec{r},t) = -\frac{i}{2m}\nabla^2\pi(\vec{r},t) = \{\pi(\vec{r},t),H\}_p \end{cases}$

几率流守恒方程和守恒荷：

推论3.3.8. $i\partial_t[\phi^*(\vec{r},t)\phi(\vec{r},t)] + \frac{1}{2m}\nabla\cdot[\phi^*(\vec{r},t)\nabla\phi(\vec{r},t) - \phi(\vec{r},t)\nabla\phi^*(\vec{r},t)] = 0$

$$\Rightarrow \dot{Q} = 0, Q = \int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\phi^*(\vec{r},t)\phi(\vec{r},t)d^3\vec{r} \in R$$

以上守恒量的存在，说明总几率守恒，几率解释有数学基础，但其实也可以有另外的解释，比如电荷。这就是数学和物理的联系与区别，一个明确的数学结论可以有几种合理的物理解释。

3.4 正能解薛定谔方程的平面波解

薛定谔方程正能解分支：

定理3.4.1. $(i\partial_t + \frac{1}{2m}\nabla^2)\phi(\vec{r},t) = 0 \Leftrightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} a(\vec{k},\frac{\vec{k}^2}{2m})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}^2}{2m}t)}d^3\vec{k}$

证明： $(i\partial_t + \frac{1}{2m}\nabla^2)\phi(\vec{r},t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int_{E=-\infty}^{+\infty}\phi(\vec{k},E)(E-\frac{\vec{k}^2}{2m})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{k}dE = 0$

$$\Leftrightarrow \phi(\vec{k},E)(E-\frac{\vec{k}^2}{2m}) = 0 \Leftrightarrow \phi(\vec{k},E) = a(\vec{k},E)\delta(E-\frac{\vec{k}^2}{2m}) + \phi_0(\vec{k},E)\delta_{E,\frac{\vec{k}^2}{2m}}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int_{E=-\infty}^{+\infty}[a(\vec{k},E)\delta(E-\frac{\vec{k}^2}{2m}) + \phi_0(\vec{k},E)\delta_{E,\frac{\vec{k}^2}{2m}}]e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{k}dE$$

$$\Leftrightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int_{E=-\infty}^{+\infty}a(\vec{k},E)\delta(E-\frac{\vec{k}^2}{2m})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{k}dE$$

$$\Leftrightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}a(\vec{k},\frac{\vec{k}^2}{2m})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}^2}{2m}t)}d^3\vec{k}$$

$$\Leftrightarrow a(\vec{k}) \equiv a(\vec{k},\frac{\vec{k}^2}{2m}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\phi(\vec{r},t)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}^2}{2m}t)}d^3\vec{r}$$ □

推论3.4.1. $\phi(-\vec{r},-t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}a(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}^2}{2m}t)}d^3\vec{k}$

推论3.4.2. $H=\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{k}^2}{2m}a^*(\vec{k})a(\vec{k})d^3\vec{k},\vec{P}=\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\vec{k}a^*(\vec{k})a(\vec{k})d^3\vec{k},Q=\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}a^*(\vec{k})a(\vec{k})d^3\vec{k}$

3.5 负能解薛定谔方程的作用量及其泊松括号

推论3.5.1. 拉氏密度：$\mathscr{L}=\frac{1}{2}[-i\phi^*(\vec{r},t)\partial_t\phi(\vec{r},t)+i\phi(\vec{r},t)\partial_t\phi^*(\vec{r},t)-\frac{1}{m}\nabla\phi^*(\vec{r},t)\cdot\nabla\phi(\vec{r},t)]$
拉氏密度：$\mathscr{L}=-i\phi^*(\vec{r},t)\partial_t\phi(\vec{r},t)+\frac{1}{2m}\phi^*(\vec{r},t)\nabla^2\phi(\vec{r},t)$
运动方程：$(-i\partial_t+\frac{1}{2m}\nabla^2)\phi(\vec{r},t)=0$

推论3.5.2. 正则变量：$\pi(\vec{r},t)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}=-i\phi^*(\vec{r},t)$

推论3.5.3. 哈密顿密度：$\mathscr{H}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi}-\mathscr{L}=-\frac{1}{2m}\phi^*(\vec{r},t)\nabla^2\phi(\vec{r},t)=-\frac{i}{2m}\pi(\vec{r},t)\nabla^2\phi(\vec{r},t)$

推论3.5.4. 动量密度：$\mathscr{P}=-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\nabla\phi=i\phi^*(\vec{r},t)\nabla\phi(\vec{r},t)=-\pi(\vec{r},t)\nabla\phi(\vec{r},t)$

推论3.5.5. 拉氏密度：$\mathscr{L}_H=\pi(\vec{r},t)\partial_t\phi(\vec{r},t)+\frac{i}{2m}\pi(\vec{r},t)\nabla^2\phi(\vec{r},t)$

正则变量之间的基本关系：

推论3.5.6. $\{\phi(\vec{r'},t),\phi(\vec{r},t)\}_p=0,\{\pi(\vec{r'},t),\pi(\vec{r},t)\}_p=0,\{\phi(\vec{r'},t),\pi(\vec{r},t)\}_p=\delta^3(\vec{r'}-\vec{r})$

哈密顿运动方程：

推论3.5.7. $\begin{cases}\dot{\phi}(\vec{r},t)=-\frac{i}{2m}\nabla^2\phi(\vec{r},t)=\{\phi(\vec{r},t),H\}_p\\ \dot{\pi}(\vec{r},t)=\frac{i}{2m}\nabla^2\pi(\vec{r},t)=\{\pi(\vec{r},t),H\}_p\end{cases}$

几率流守恒方程和守恒荷：

推论3.5.8. $-i\partial_t[\phi^*(\vec{r},t)\phi(\vec{r},t)]+\frac{1}{2m}\nabla\cdot[\phi^*(\vec{r},t)\nabla\phi(\vec{r},t)-\phi(\vec{r},t)\nabla\phi^*(\vec{r},t)]=0$
$\Rightarrow\dot{Q}=0,Q=\int\limits_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\phi^*(\vec{r},t)\phi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\in R$

以上守恒量的存在，说明总几率守恒，几率解释有数学基础，但其实也可以有另外的解释，比如电荷。这就是数学和物理的联系与区别，一个明确的数学结论可以有几种合理的物理解释。

3.6 负能解薛定谔方程的平面波解

薛定谔方程负能解分支：

定理3.6.1. $(-i\partial_t+\frac{1}{2m}\nabla^2)\phi(\vec{r},t)=0\Leftrightarrow\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}a(-\vec{k},-\frac{\vec{k}^2}{2m})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}^2}{2m}t)}d^3\vec{k}$

证明: $(-i\partial_t+\frac{1}{2m}\nabla^2)\phi(\vec{r},t)=0\Rightarrow\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{E=-\infty}^{+\infty}\phi(\vec{k},E)(E+\frac{\vec{k}^2}{2m})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{k}dE=0$

$\Leftrightarrow\phi(\vec{k},E)(E+\frac{\vec{k}^2}{2m})=0\Leftrightarrow\phi(\vec{k},E)=a(\vec{k},E)\delta(E+\frac{\vec{k}^2}{2m})+\phi_0(\vec{k},E)\delta_{E,-\frac{\vec{k}^2}{2m}}$

$\Rightarrow\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{E=-\infty}^{+\infty}[a(\vec{k},E)\delta(E+\frac{\vec{k}^2}{2m})+\phi_0(\vec{k},E)\delta_{E,-\frac{\vec{k}^2}{2m}}]e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{k}dE$

$\Leftrightarrow\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{E=-\infty}^{+\infty}a(\vec{k},E)\delta(E+\frac{\vec{k}^2}{2m})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{k}dE$

$\Leftrightarrow\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}a(\vec{k},-\frac{\vec{k}^2}{2m})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\frac{\vec{k}^2}{2m}t)}d^3\vec{k}$

$\Leftrightarrow\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}a(-\vec{k},-\frac{\vec{k}^2}{2m})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}^2}{2m}t)}d^3\vec{k}$

$\Leftrightarrow a(\vec{k})\equiv a(-\vec{k},-\frac{\vec{k}^2}{2m})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\phi(\vec{r},t)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}^2}{2m}t)}d^3\vec{r}$ □

推论3.6.1. $H = \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{k}^2}{2m} a^*(\vec{k})a(\vec{k})d^3\vec{k}, \vec{P} = \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \vec{k}a^*(\vec{k})a(\vec{k})d^3\vec{k}, Q = \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} a^*(\vec{k})a(\vec{k})d^3\vec{k}$

从上可知，在非相对论极限下，正能量分支和负能量分支薛定谔方程各自描述一个非相对论性粒子，不能同时描述两个正反粒子，若出现在同一个方程中就变为零，无意义。并且正能量分支的解共轭就是负能量分支的解，反之亦然，即正粒子的共轭就表征反粒子。另外从上面两个定理的证明可以看出，只有认为m可以取正负就可以统一表述两个分支，形式上与正能量分支一样。$m > 0$描述正分支，$m < 0$描述反分支。对于负能解有两种理解，一种是描述负质量的粒子，另一种仍是描述正质量的粒子，量子化后与正能解是等价的。

4 正、负能解薛定谔方程的二次量子化

4.1 正、负能解薛定谔方程的二次量子化讨论

推论4.1.1. $H = \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{k}^2}{2m} a^+(\vec{k})a(\vec{k})d^3\vec{k}, \vec{P} = \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \vec{k}a^+(\vec{k})a(\vec{k})d^3\vec{k}, Q = \hat{N} = \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} a^+(\vec{k})a(\vec{k})d^3\vec{k}$

以上关系不依赖于对易或反对易关系，也不依赖于正能解或负能解。

定义4.1.1. 量子方程：$i\partial_t|\Psi >= H|\Psi >, |\Psi >$ 为量子波函数。

推论4.1.2. $-i\nabla|\Psi >= \vec{P}|\Psi >$

按对易子理解：描述非相对论性玻色子

推论4.1.3. $\begin{cases} [\phi(\vec{r}', t), \phi(\vec{r}, t)] = 0 \\ [\phi^+(\vec{r}', t), \phi^+(\vec{r}, t)] = 0 \\ [\phi(\vec{r}', t), \phi^+(\vec{r}, t)] = \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [a(\vec{k}'), a(\vec{k})] = 0 \\ [a^+(\vec{k}'), a^+(\vec{k})] = 0 \\ [a(\vec{k}'), a^+(\vec{k})] = \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) \end{cases}$

按反对易子理解：描述非相对论性费米子

推论4.1.4. $\begin{cases} \{\phi(\vec{r}', t), \phi(\vec{r}, t)\} = 0 \\ \{\phi^+(\vec{r}', t), \phi^+(\vec{r}, t)\} = 0 \\ \{\phi(\vec{r}', t), \phi^+(\vec{r}, t)\} = \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \{a(\vec{k}'), a(\vec{k})\} = 0 \\ \{a^+(\vec{k}'), a^+(\vec{k})\} = 0 \\ \{a(\vec{k}'), a^+(\vec{k})\} = \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) \end{cases}$

4.2 粒子的量子描述

定义4.2.1. $\hat{N} = \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} a^+(\vec{k})a(\vec{k})d^3\vec{k}, P^a = \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} k^a a^+(\vec{k})a(\vec{k})d^3\vec{k}$

定义4.2.2. 若$|0 >\neq 0$, 且$a(\vec{k})|0 >= 0, \forall\vec{k}$, 则$|0 >$ 为真空态或基态。

推论4.2.1. $\hat{N}|0 >= 0$

证明: $a(\vec{k})|0 >= 0, \forall\vec{k} \Rightarrow a^+(\vec{k})a(\vec{k})|0 >= 0, \forall\vec{k} \Rightarrow \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} a^+(\vec{k})a(\vec{k})|0 > d^3\vec{k} = 0$

$\Rightarrow \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} a^+(\vec{k})a(\vec{k})d^3\vec{k}|0 >= 0 \Rightarrow \hat{N}|0 >= 0$ □

推论4.2.2. $[< 0|0 >] > 0$, 归一化：$< 0|0 >= 1$

5 玻色子的量子描述

5.1 玻色子的基本对易关系

定义5.1.1. $[a(\vec{k}'), a(\vec{k})] = 0, [a^+(\vec{k}'), a^+(\vec{k})] = 0, [a(\vec{k}'), a^+(\vec{k})] = \delta^3(\vec{k}' - \vec{k})$

定义5.1.2. $\hat{N}(k) \equiv a^+(\vec{k})a(\vec{k}), k^a \equiv (\vec{k}, i\omega_k), \omega_k \equiv \frac{\vec{k}^2}{2m}$

5.2 玻色子的粒子数算符性质

推论5.2.1. $[\hat{N}, a(\vec{k})] = -a(\vec{k})$

证明: $[\hat{N}, a(\vec{k})] = \int\limits_{\vec{k}'=-\infty}^{+\infty} [a^+(\vec{k}')a(\vec{k}')a(\vec{k}) - a(\vec{k})a^+(\vec{k}')a(\vec{k}')]d^3\vec{k}'$

$= \int\limits_{\vec{k}'=-\infty}^{+\infty} [a^+(\vec{k}')a(\vec{k})a(\vec{k}') - a(\vec{k})a^+(\vec{k}')a(\vec{k}')]d^3\vec{k}'$

$= \int\limits_{\vec{k}'=-\infty}^{+\infty} [a^+(\vec{k}'), a(\vec{k})]a(\vec{k}')d^3\vec{k}'$

$= \int\limits_{\vec{k}'=-\infty}^{+\infty} -\delta^3(\vec{k}' - \vec{k})a(\vec{k}')d^3\vec{k}' = -a(\vec{k})$ □

推论5.2.2. $[\hat{N}, a(\vec{k})] = -a(\vec{k}) \Leftrightarrow [\hat{N}, a^+(\vec{k})] = a^+(\vec{k})$

推论5.2.3. $[\hat{N}, a^+(\vec{k})a(\vec{k})] = 0, \forall\vec{k}$

证明: $[\hat{N}, a^+(\vec{k})a(\vec{k})] = \hat{N}a^+(\vec{k})a(\vec{k}) - a^+(\vec{k})a(\vec{k})\hat{N}$

$= \hat{N}a^+(\vec{k})a(\vec{k}) - a^+(\vec{k})\hat{N}a(\vec{k}) + a^+(\vec{k})\hat{N}a(\vec{k}) - a^+(\vec{k})a(\vec{k})\hat{N}$

$= [\hat{N}, a^+(\vec{k})]a(\vec{k}) + a^+(\vec{k})[\hat{N}, a(\vec{k})] = a^+(\vec{k})a(\vec{k}) - a^+(\vec{k})a(\vec{k}) = 0$ □

可以用数学归纳法证明如下结论。

推论5.2.4. $[\hat{N}, a^n(\vec{k})] = -na^n(\vec{k}), [\hat{N}, a^{+n}(\vec{k})] = na^{+n}(\vec{k})$

推论5.2.5. $[\hat{N}, \prod\limits_{i=1}^{\infty} a^{+n_i}(\vec{k}_i)] = (\sum\limits_{i=1}^{\infty} n_i) \prod\limits_{i=1}^{\infty} a^{+n_i}(\vec{k}_i)$

推论5.2.6. $[\hat{N}, a^{+n}(\vec{k})a^n(\vec{k})] = 0, [\hat{N}, a^n(\vec{k})a^{+n}(\vec{k})] = 0, [\hat{N}, \hat{N}^n(k)] = 0, [\hat{N}, [a(\vec{k})a^+(\vec{k})]^n] = 0$

5.3 玻色子的能量动量算符性质

推论5.3.1. $[P^a, a(\vec{k})] = -k^a a(\vec{k})$

证明: $[P^a, a(\vec{k})] = \int\limits_{\vec{k}'=-\infty}^{+\infty} k'^a[a^+(\vec{k}')a(\vec{k}')a(\vec{k}) - a(\vec{k})a^+(\vec{k}')a(\vec{k}')]d^3\vec{k}'$

$= \int\limits_{\vec{k}'=-\infty}^{+\infty} k'^a[a^+(\vec{k}')a(\vec{k})a(\vec{k}') - a(\vec{k})a^+(\vec{k}')a(\vec{k}')]d^3\vec{k}'$

$= \int\limits_{\vec{k}'=-\infty}^{+\infty} k'^a[a^+(\vec{k}'), a(\vec{k})]a(\vec{k}')d^3\vec{k}'$

$= \int\limits_{\vec{k}'=-\infty}^{+\infty} -k'^a\delta^3(\vec{k}' - \vec{k})a(\vec{k}')d^3\vec{k}' = -\vec{k}^a a(\vec{k})$ □

推论5.3.2. $[P^a, a(\vec{k})] = -k^a a(\vec{k}) \Leftrightarrow [P^a, a^+(\vec{k})] = \vec{k}^a a^+(\vec{k})$

推论5.3.3. $[P^a, a^+(\vec{k})a(\vec{k})] = 0, \forall\vec{k}$

证明: $[P^a, a^+(\vec{k})a(\vec{k})] = P^a a^+(\vec{k})a(\vec{k}) - a^+(\vec{k})a(\vec{k})P^a$

$= P^a a^+(\vec{k})a(\vec{k}) - a^+(\vec{k})P^a a(\vec{k}) + a^+(\vec{k})P^a a(\vec{k}) - a^+(\vec{k})a(\vec{k})P^a$

$= [P^a, a^+(\vec{k})]a(\vec{k}) + a^+(\vec{k})[P^a, a(\vec{k})] = k^a a^+(\vec{k})a(\vec{k}) - k^a a^+(\vec{k})a(\vec{k}) = 0$ □

可以用数学归纳法证明如下结论。

推论5.3.4. $[P^a, a^n(\vec{k})] = -nk^a a(\vec{k}) \Leftrightarrow [P^a, a^{+n}(\vec{k})] = nk^a a^{+n}(\vec{k})$

推论5.3.5. $[P^a, \prod\limits_{i=1}^{\infty} a^{+n_i}(\vec{k}_i)] = (\sum\limits_{i=1}^{\infty} n_i k_i^a) \prod\limits_{i=1}^{\infty} a^{+n_i}(\vec{k}_i)$

推论5.3.6. $[P^a, \hat{N}] = 0$

5.4 玻色子解的一般构造

定义5.4.1. $a(\vec{k},t) \equiv a(k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}^2}{2m}t)}, a^+(k,t) \equiv a^+(k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}^2}{2m}t)}$

推论5.4.1. $\dot{a}(\vec{k},t) = i[H, a(\vec{k},t)], \dot{a}^+(\vec{k},t) = i[H, a^+(\vec{k},t)]$

定理5.4.1. $i\partial_t|\Psi>= H|\Psi>\Rightarrow i\partial_t[a(\vec{k},t)|\Psi>] = Ha(\vec{k},t)|\Psi>$

定理5.4.2. $i\partial_t|\Psi>= H|\Psi>\Rightarrow i\partial_t[a^+(\vec{k},t)|\Psi>] = Ha^+(\vec{k},t)|\Psi>$

5.5 玻色子量子态的构造一

推论5.5.1. $i\partial_t|0>= H|0>\Rightarrow i\partial_t[\prod_{i=1}^{\infty} a^{+n_i}(\vec{k}_i,t)|0>] = H\prod_{i=1}^{\infty} a^{+n_i}(\vec{k}_i,t)|0>, n_i = 0,1,2,\cdots,\infty$

定义5.5.1. $|n_1,n_2,\cdots,n_\infty>\equiv \prod_{i=1}^{\infty} a^{+n_i}(\vec{k}_i)|0>, n_i = 0,1,2,\cdots,\infty$

定义5.5.2. $|n_1,n_2,\cdots,n_\infty,t>\equiv \prod_{i=1}^{\infty} a^{+n_i}(\vec{k}_i,t)|0>= exp\{i\sum_{i=1}^{\infty} n_i(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}_i^2}{2m}t)\}|n_1,n_2,\cdots,n_\infty>$

此量子态含义如下：动量空间的每一个数学点$\vec{k}_i$对应一个能级，这个能级上填充了n_i个质量为m,动量为$\vec{k}_i$的粒子，这样类似的能级的有无穷个。由于物理粒子总数是有限的，所以很多个能级上粒子数为零。这个量子态表示多个粒子在动量空间的一个分布，每个量子态粒子总数是可变的。它是粒子数算符、能量动量算符的共同本征态。

推论5.5.2.
$$\begin{cases}\hat{N}|n_1,n_2,\cdots,n_\infty,t>= \sum_{i=1}^{\infty} n_i|n_1,n_2,\cdots,n_\infty,t> \\ H|n_1,n_2,\cdots,n_\infty,t>= \sum_{i=1}^{\infty} n_i\frac{\vec{k}_i^2}{2m}|n_1,n_2,\cdots,n_\infty,t> \\ \vec{P}|n_1,n_2,\cdots,n_\infty,t>= \sum_{i=1}^{\infty} n_i\vec{k}_i|n_1,n_2,\cdots,n_\infty,t>\end{cases}$$

推论5.5.3. $\phi(-\vec{r},-t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} a(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}^2}{2m}t)}d^3\vec{k}, \phi^+(-\vec{r},-t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} a^+(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}^2}{2m}t)}d^3\vec{k}$

推论5.5.4. $i\partial_t|\Psi>= H|\Psi>\Rightarrow i\partial_t[\hat{\phi}(-\vec{r},-t)|\Psi>] = H[\hat{\phi}(-\vec{r},-t)|\Psi>]$

推论5.5.5. $i\partial_t|\Psi>= H|\Psi>\Rightarrow i\partial_t[\hat{\phi}^+(-\vec{r},-t)|\Psi>] = H[\hat{\phi}^+(-\vec{r},-t)|\Psi>]$

5.6 玻色子量子态的构造二

定义5.6.1.

$$|n>= [n!\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}|F(\vec{k}_1,\vec{k}_2,\cdots,\vec{k}_n)|^2d^n\vec{k}]^{-\frac{1}{2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} d^n\vec{k}F(\vec{k}_1,\vec{k}_2,\cdots,\vec{k}_n)a^+(\vec{k}_1)a^+(\vec{k}_2)\cdots a^+(\vec{k}_n)|0>$$

$F(\vec{k}_1,\vec{k}_2,\cdots,\vec{k}_n)$对玻色子全对称，对费米子全反对称。

定义5.6.2. $|n,t>= exp\{i\sum_{i=1}^{n}(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}_i^2}{2m}t)\}|n>$

此量子态含义如下：n个粒子填充在动量空间中所有可能分布的一个混合动量态，这个量子态粒子总数是固定的。每个粒子的动量可能取任何值，它是粒子数算符的本征态，但不是能量动量算符的本征态。

推论5.6.1. $i\partial_t|0>= H|0>\Rightarrow i\partial_t|n,t>= H|n,t>$

推论5.6.2. $\hat{N}|n>= n|n>, \hat{N}|n,t>= n|n,t>, <n|n>= 1$

5.7 玻色子坐标空间和动量空间的对应

推论5.7.1. $[P^a, a(\vec{k})] = -k^a a(\vec{k}) \Leftrightarrow [P^a, \phi(\vec{r},t)] = i\partial^a\phi(\vec{r},t)$

推论5.7.2. $[P^a, a^+(\vec{k})] = k^a a^+(\vec{k}) \Leftrightarrow [P^a, \phi^+(\vec{r},t)] = -i\partial^a\phi^+(\vec{r},t)$

5.8 玻色子量子态的存在性

推论5.8.1. $<0|0>=1 \Rightarrow |0>\neq 0$

推论5.8.2. $a^n(\vec{k})a^{+n}(\vec{k}) = a^{+n}(\vec{k})a^n(\vec{k}) + n!\delta^n(0), n \geq 1$

推论5.8.3. $\prod\limits_{i=1}^{\infty} a^{n_i}(\vec{k}_i) \prod\limits_{i=1}^{\infty} a^{+n_i}(\vec{k}_i) = \prod\limits_{i=1,n_i\geq 1}^{\infty} [a^{+n_i}(\vec{k})a^{n_i}(\vec{k}) + n_i!\delta^{n_i}(0)]$

推论5.8.4. $\prod\limits_{i=1}^{\infty} a^{n_i}(\vec{k}_i) \prod\limits_{i=1}^{\infty} a^{+n_i}(\vec{k}_i)|0>= \prod\limits_{i=1,n_i\geq 1}^{\infty} n_i!\delta^{n_i}(0)|0>\neq 0, \forall \vec{k}_1 \neq \vec{k}_2 \neq \cdots \neq \vec{k}_n$

6 费米子的量子描述

6.1 费米子的基本对易关系

定义6.1.1. $\{a(\vec{k}'), a(\vec{k})\} = 0, \{a^+(\vec{k}'), a^+(\vec{k})\} = 0, \{a(\vec{k}'), a^+(\vec{k})\} = \delta^3(\vec{k}'-\vec{k})$

推论6.1.1. $a(\vec{k}')a(\vec{k}) = 0, a^+(\vec{k}')a^+(\vec{k}) = 0$

6.2 费米子的粒子数算符性质

推论6.2.1. $[\hat{N}, a(\vec{k})] = -a(\vec{k})$

证明: $[\hat{N}, a(\vec{k})] = \int\limits_{\vec{k}'=-\infty}^{+\infty} [a^+(\vec{k}')a(\vec{k}')a(\vec{k}) - a(\vec{k})a^+(\vec{k}')a(\vec{k}')]d^3\vec{k}'$
$= \int\limits_{\vec{k}'=-\infty}^{+\infty} [-a^+(\vec{k}')a(\vec{k})a(\vec{k}') - a(\vec{k})a^+(\vec{k}')a(\vec{k}')]d^3\vec{k}'$
$= \int\limits_{\vec{k}'=-\infty}^{+\infty} -\{a^+(\vec{k}'), a(\vec{k})\}a(\vec{k}')d^3\vec{k}'$
$= \int\limits_{\vec{k}'=-\infty}^{+\infty} -\delta^3(\vec{k}'-\vec{k})a(\vec{k}')d^3\vec{k}' = -a(\vec{k})$ □

推论6.2.2. $[\hat{N}, a(\vec{k})] = -a(\vec{k}) \Leftrightarrow [\hat{N}, a^+(\vec{k})] = a^+(\vec{k})$

推论6.2.3. $[\hat{N}, a^+(\vec{k})a(\vec{k})] = 0, \forall \vec{k}$

证明: $[\hat{N}, a^+(\vec{k})a(\vec{k})] = \hat{N}a^+(\vec{k})a(\vec{k}) - a^+(\vec{k})a(\vec{k})\hat{N}$
$= \hat{N}a^+(\vec{k})a(\vec{k}) - a^+(\vec{k})\hat{N}a(\vec{k}) + a^+(\vec{k})\hat{N}a(\vec{k}) - a^+(\vec{k})a(\vec{k})\hat{N}$
$= [\hat{N}, a^+(\vec{k})]a(\vec{k}) + a^+(\vec{k})[\hat{N}, a(\vec{k})] = a^+(\vec{k})a(\vec{k}) - a^+(\vec{k})a(\vec{k}) = 0$ □

可以用数学归纳法证明如下结论。

推论6.2.4. $\hat{N}a^+(\vec{k}_1)a^+(\vec{k}_2)\cdots a^+(\vec{k}_n)|0>= na^+(\vec{k}_1)a^+(\vec{k}_2)\cdots a^+(\vec{k}_n)|0>, \forall \vec{k}_1 \neq \vec{k}_2 \neq \cdots \neq \vec{k}_n$

推论6.2.5. $\hat{N}a^+(\vec{k}_1)a^+(\vec{k}_2)\cdots a^+(\vec{k}_n)|0>= na^+(\vec{k}_1)a^+(\vec{k}_2)\cdots a^+(\vec{k}_n)|0>, \forall \vec{k}_1\vec{k}_2\cdots\vec{k}_n$

推论6.2.6. $[\hat{N}, a^n(\vec{k})] = -na^n(\vec{k}), [\hat{N}, a^{+n}(\vec{k})] = na^{+n}(\vec{k}), n = 0, 1$

推论6.2.7. $[\hat{N}, \prod\limits_{i=1}^{\infty} a^{+n_i}(\vec{k}_i)] = (\sum\limits_{i=1}^{\infty} n_i) \prod\limits_{i=1}^{\infty} a^{+n_i}(\vec{k}_i), n_i = 0, 1$

推论6.2.8. $[\hat{N}, a^{+n}(\vec{k})a^n(\vec{k})] = 0, [\hat{N}, a^n(\vec{k})a^{+n}(\vec{k})] = 0, [\hat{N}, \hat{N}^n(k)] = 0, [\hat{N}, [a(\vec{k})a^+(\vec{k})]^n] = 0$

6.3 费米子量子态的存在性

推论6.3.1. $< 0|0 >= 1 \Rightarrow |0 >\neq 0$

推论6.3.2. $a(\vec{k})a^+(\vec{k}) = -a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + \delta(0), n = 0, 1$

推论6.3.3. $\prod\limits_{i=1}^{\infty} a^{n_i}(\vec{k}_i) \prod\limits_{i=1}^{\infty} a^{+n_i}(\vec{k}_i) = \prod\limits_{i=1,n_i=1}^{\infty} [a^{+n_i}(\vec{k})a^{n_i}(\vec{k}) + n_i!\delta^{n_i}(0)]$

推论6.3.4. $\prod\limits_{i=1}^{\infty} a^{n_i}(\vec{k}_i) \prod\limits_{i=1}^{\infty} a^{+n_i}(\vec{k}_i)|0 >= \pm \prod\limits_{i=1,n_i=1}^{\infty} n_i!\delta^{n_i}(0)|0 >\neq 0, \forall\vec{k}_1 \neq \vec{k}_2 \neq \cdots \neq \vec{k}_n$

推论6.3.5. $a^+(\vec{k}_1)a^+(\vec{k}_2)\cdots a^+(\vec{k}_n)|0 >\neq 0, \forall\vec{k}_1 \neq \vec{k}_2 \neq \cdots \neq \vec{k}_n$

6.4 占有数表象

定义6.4.1. $|n_1n_2\cdots n_k\cdots >= |n_1 > \otimes|n_2 > \otimes\cdots\otimes|n_k > \otimes\cdots, < n_1n_2\cdots n_k\cdots| = |n_1n_2\cdots n_k\cdots >^+$

推论6.4.1. $|n_1n_2\cdots n_k\cdots >= \frac{1}{n_1!n_2!\cdots n_k!\cdots}(a_1^+)^{n_1} \otimes (a_2^+)^{n_2}\cdots\otimes(a_k^+)^{n_k}\cdots|0_10_2\cdots 0_k\cdots >$

推论6.4.2. 正交性：$< n'_1n'_2\cdots n'_k\cdots|n_1n_2\cdots n_k\cdots >= \delta n'_1, n_1\delta n'_2, n_2\cdots\delta n'_k, n_k\cdots$

推论6.4.3. 完备性：$\sum|n_1n_2\cdots n_k\cdots >< n_1n_2\cdots n_k\cdots| = 1, \sum|n_k >< n_k| = 1$

第二十一章　Majorana粒子和中微子的量子化

自我评述：由于大多量子场论的书均没有详细论述Majorana粒子和中微子的量子化，我也一直没找到相应内容，为了弥补这个缺憾，决定自己动手推导演算，在本章中我应用洛伦兹推动变换先给出了Dirac粒子的量子化，然后在此基础上采用类似的技巧又给出了Majorana粒子和中微子的详细量子化细节。

1 洛伦兹推动变换应用–Dirac方程平面波的求解 [27, 28]

1.1 一般表象下Dirac旋量的洛伦兹推动变换

Dirac方程:

定义1.1.1. $(\gamma^a\partial_a + m)\psi = 0, \gamma^a p_a = \gamma\cdot\vec{p} + \gamma_4 iE, E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0$

Dirac旋量推动变换:

推论1.1.1. $D_{\vec{v}} = e^{-ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot(\frac{i}{2}\vec{\gamma}\gamma_4)} = \frac{1+\gamma_v - i\gamma_v\vec{v}\cdot\vec{\gamma}\gamma_4}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}} = \frac{E+m-i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_4}{\sqrt{2m(E+m)}} = \frac{m-i\gamma^a p_a\gamma_4}{\sqrt{2m(E+m)}}$

Dirac旋量洛伦兹推动变换因子的性质

性质1.1.1. $(m - i\gamma^a p_a\gamma_4)^+ = (m - i\gamma^a p_a\gamma_4)$

性质1.1.2. $(m - i\gamma^a p_a\gamma_4)^+\gamma_4(m - i\gamma^a p_a\gamma_4) = 2m(E+m)\gamma_4$

性质1.1.3. $(E + m + i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_4)(E + m - i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_4) = 2m(E+m)$

性质1.1.4. $(m - i\gamma^a p_a\gamma_4)^+(m - i\gamma^a p_a\gamma_4) = 2(E+m)(E - i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_4)$

性质1.1.5. $(m + i\gamma^a p_a\gamma_4)^+(m - i\gamma^a p_a\gamma_4) = 2m^2 - 2E(E - i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_4)$

1.2 一般表象下Dirac方程的静止解和运动解

静止电子解

推论1.2.1. $\partial_{t_0}\psi(\vec{0}) = -im\gamma_4\psi(\vec{0}) \Leftrightarrow \psi(\vec{0}) = e^{-i\gamma_4 m t_0}\psi_0, \forall\psi_0$

动量$\vec{p}$电子解

推论1.2.2. $\psi(\vec{p}) = \frac{m-i\gamma^a p_a\gamma_4}{\sqrt{2m(E+m)}}e^{i\gamma_4(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\psi_p = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1 - \frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_4}{E+m})e^{i\gamma_4(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\psi_p, \bar{\psi}(\vec{p})\psi(\vec{p}) = \bar{\psi}_p\psi_p$

1.3 特殊表象下Dirac方程的洛伦兹推动变换和平面波解

1.3.1 特殊表象下Dirac方程的洛伦兹推动变换

特殊表象: $(\gamma_a, \gamma_5) := [(\sigma\otimes\sigma_y, \varsigma I\otimes\sigma_z), -\varsigma I\otimes\sigma_x]$

推论1.3.1. $\gamma^a p_a = i\begin{bmatrix}\varsigma E & -\sigma\cdot\vec{p}\\ \sigma\cdot\vec{p} & -\varsigma E\end{bmatrix}, E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0$

推论1.3.2. $S_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$
$S_y(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)S_y^+ = (-\sigma_z, \sigma_y, \sigma_x), S_y^+(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)S_y = (\sigma_z, \sigma_y, -\sigma_x)$
$I\otimes S_y[(\sigma\otimes\sigma_y, \varsigma I\otimes\sigma_z), -\varsigma I\otimes\sigma_x]I\otimes S_y^+ = [(\sigma\otimes\sigma_y, \varsigma I\otimes\sigma_x), \varsigma I\otimes\sigma_z]$
$I\otimes S_y^+[(\sigma\otimes\sigma_y, \varsigma I\otimes\sigma_x), \varsigma I\otimes\sigma_x]I\otimes S_y = [(\sigma\otimes\sigma_y, \varsigma I\otimes\sigma_z), -\varsigma I\otimes\sigma_x]$

Dirac旋量推动变换

推论1.3.3. $D_{\vec{v}} = \frac{m-i\gamma^a p_a\gamma_4}{\sqrt{2m(E+m)}} = \frac{E+m+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma\otimes\sigma_x}{\sqrt{2m(E+m)}} = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}E+m & \varsigma\sigma\cdot\vec{p}\\ \varsigma\sigma\cdot\vec{p} & E+m\end{bmatrix}$

1.3.2 特殊表象下Dirac方程的静止解和运动解

Dirac方程:

定义1.3.1. $(\gamma^a\partial_a + m)\psi = 0, \gamma^a = (\sigma\otimes\sigma_y, \varsigma I\otimes\sigma_z)$

静止电子解:

推论1.3.4. $\partial_{t_0}\psi(\vec{0}) = -im\gamma_4\psi(\vec{0}) \Leftrightarrow \psi(\vec{0}) = e^{-i\gamma_4 mt_0}\psi_0 = \begin{bmatrix}\xi_0 e^{-i\varsigma mt_0}\\ \eta_0 e^{i\varsigma mt_0}\end{bmatrix}, \forall\xi_0,\eta_0$

动量$\vec{p}$电子解:

推论1.3.5.
$\psi(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_4}{E+m})e^{i\gamma_4(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\psi_p = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}[\begin{bmatrix}\xi(\vec{p})\\ \frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m}\xi(\vec{p})\end{bmatrix}e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + \begin{bmatrix}\frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m}\eta(\vec{p})\\ \eta(\vec{p})\end{bmatrix}e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}], \forall\xi(\vec{p}),\eta(\vec{p})$

1.3.3 特殊表象下Dirac方程按z-自旋本征态展开的$\vec{p}$动量平面波解

按z-自旋本征态展开的动量$\vec{p}$电子平面波解:

推论1.3.6.
$\psi(\vec{p}) = \frac{E+m+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma\otimes\sigma_x}{\sqrt{2m(E+m)}}\{[a_\varsigma(\vec{p},\frac{1}{2})\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + a_\varsigma(\vec{p},-\frac{1}{2})\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}]e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + [b_\varsigma^+(\vec{p},\frac{1}{2})\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + b_\varsigma^+(\vec{p},-\frac{1}{2})\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\}$

推论1.3.7. $\psi(\vec{p}) = \sum_h[a_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b_\varsigma^+(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$*(在一般表象下也成立)*

1.3.4 特殊表象下Dirac方程自旋基

定义1.3.2. $\xi_+ = \eta_+ := \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \xi_- = \eta_- := \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

四个自旋基：

定义1.3.3. $u_\varsigma(\vec{p},\frac{1}{2}) \equiv \frac{E+m+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma\otimes\sigma_x}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \frac{m-i\varsigma\gamma^a p_a}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{bmatrix}\xi_+\\ \frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m}\xi_+\end{bmatrix}$

定义1.3.4. $u_\varsigma(\vec{p},-\frac{1}{2}) = \frac{E+m+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma\otimes\sigma_x}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \frac{m-i\varsigma\gamma^a p_a}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{bmatrix}\xi_-\\ \frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m}\xi_-\end{bmatrix}$

定义1.3.5. $v_\varsigma(\vec{p},\frac{1}{2}) = \frac{E+m+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma\otimes\sigma_x}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{m+i\varsigma\gamma^a p_a}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{bmatrix}\frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m}\eta_+\\ \eta_+\end{bmatrix}$

定义1.3.6. $v_\varsigma(\vec{p},-\frac{1}{2}) = \frac{E+m+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma\otimes\sigma_x}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{m+i\varsigma\gamma^a p_a}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{bmatrix}\frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m}\eta_-\\ \eta_-\end{bmatrix}$

推论1.3.8. $u_\varsigma(\vec{p},h) \equiv -\varsigma\gamma_5 v_\varsigma(\vec{p},h), u_\varsigma(\vec{p},h) \equiv i\gamma_2\gamma_4\gamma_5 u_\varsigma(\vec{p},-h), v_\varsigma(\vec{p},h) \equiv i\gamma_2\gamma_4\gamma_5 v_\varsigma(\vec{p},-h)$

推论1.3.9. $(E+m+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma\otimes\sigma_x)\begin{bmatrix}I&0\\0&0\end{bmatrix}(E+m+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma\otimes\sigma_x)^+\varsigma I\otimes\sigma_z = (E+m)(\varsigma m - i\gamma^a p_a)$

推论1.3.10. $(E+m+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma\otimes\sigma_x)\begin{bmatrix}0&0\\0&I\end{bmatrix}(E+m+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma\otimes\sigma_x)^+\varsigma I\otimes\sigma_z = (E+m)(-\varsigma m - i\gamma^a p_a)$

1.3.5 一般表象下Dirac方程自旋基性质

推论1.3.11. $u_\varsigma(\vec{p},h) = -\varsigma\gamma_5 v_\varsigma(\vec{p},h), v_\varsigma(\vec{p},h) = -\varsigma\gamma_5 u_\varsigma(\vec{p},h), h = -\frac{1}{2},\frac{1}{2}$

推论1.3.12. $\bar{u}_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') = \varsigma\delta_{hh'}, \bar{v}_\varsigma(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h') = -\varsigma\delta_{hh'}, \bar{u}_\varsigma(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h') = 0, \bar{v}_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') = 0$

推论1.3.13. $u_\varsigma^+(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') = \frac{E}{m}\delta_{hh'}, v_\varsigma^+(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h') = \frac{E}{m}\delta_{hh'}, u_\varsigma^+(\vec{p},h)v_\varsigma(-\vec{p},h') = 0, v_\varsigma^+(\vec{p},h)u_\varsigma(-\vec{p},h') = 0$

推论1.3.14. $\sum\limits_h u_\varsigma(\vec{p},h)\bar{u}_\varsigma(\vec{p},h)=\frac{\varsigma m-i\gamma^a p_a}{2m},\sum\limits_h v_\varsigma(\vec{p},h)\bar{v}_\varsigma(\vec{p},h)=\frac{-\varsigma m-i\gamma^a p_a}{2m}$

推论1.3.15. $\begin{cases}\sum\limits_h u_\varsigma(\vec{p},h)\bar{u}_\varsigma(\vec{p},h)-v_\varsigma(\vec{p},h)\bar{v}_\varsigma(\vec{p},h)]=\varsigma\\ \sum\limits_h u_\varsigma(\vec{p},h)\bar{u}_\varsigma(\vec{p},h)+v_\varsigma(\vec{p},h)\bar{v}_\varsigma(\vec{p},h)]=\frac{-i\gamma^a p_a}{m}\\ \sum\limits_h u_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma^+(\vec{p},h)+v_\varsigma(-\vec{p},h)v_\varsigma^+(-\vec{p},h)]=\frac{E}{m}\end{cases}$

1.4 一般表象下Dirac方程的平面波解

推论1.4.1. $\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_h[a_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u_\varsigma(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b_\varsigma^+(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}v_\varsigma(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

推论1.4.2. $\psi^+(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_h[a_\varsigma^+(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u_\varsigma^+(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}v_\varsigma^+(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

推论1.4.3.

$$\begin{cases}a_\varsigma(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}u_\varsigma^+(\vec{p},h)\psi(\vec{r},t)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}u^{+\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)\psi_{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\\ b_\varsigma^+(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}v_\varsigma^+(\vec{p},h)\psi(\vec{r},t)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}v^{+\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)\psi_{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\end{cases}$$

推论1.4.4.

$$\begin{cases}a_\varsigma^+(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}u^{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)\psi_{\lambda'_\varsigma}^+(\vec{r},t)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\\ b_\varsigma(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}v^{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)\psi_{\lambda'_\varsigma}^+(\vec{r},t)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\end{cases}$$

1.5 一般表象下Dirac方程的自旋基及其性质

定义1.5.1. $\tilde{a}_(\vec{p},h):=\begin{cases}a_\varsigma(\vec{p},h),\varsigma=1\\ b_\varsigma^+(\vec{p},h),\varsigma=-1\end{cases},\tilde{b}_(\vec{p},h):=\begin{cases}b_\varsigma(\vec{p},h),\varsigma=1\\ a_\varsigma^+(\vec{p},h),\varsigma=-1\end{cases}$

定义1.5.2. $u_(\vec{p},h):=\begin{cases}u_+(\vec{p},h),\varsigma=1\\ v_-(\vec{p},h),\varsigma=-1\end{cases},v_(\vec{p},h):=\begin{cases}v_+(\vec{p},h),\varsigma=1\\ u_-(\vec{p},h),\varsigma=-1\end{cases}$

推论1.5.1.

$$\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_h[\tilde{a}(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+\tilde{b}^+(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}v(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$\begin{cases}\tilde{a}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}u^+(\vec{p},h)\psi(\vec{r},t)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\\ \tilde{b}^+(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}v^+(\vec{p},h)\psi(\vec{r},t)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\end{cases}$$

自旋基之间的性质(在一般表象下也成立):

推论1.5.2. $\bar{u}(\vec{p},h)u(\vec{p},h')=\delta_{hh'},\bar{v}(\vec{p},h)v(\vec{p},h')=-\delta_{hh'},\bar{u}(\vec{p},h)v(\vec{p},h')=0,\bar{v}(\vec{p},h)u(\vec{p},h')=0$

推论1.5.3. $u^+(\vec{p},h)u(\vec{p},h')=\frac{E}{m}\delta_{hh'},v^+(\vec{p},h)v(\vec{p},h')=\frac{E}{m}\delta_{hh'},u^+(\vec{p},h)v(-\vec{p},h')=0,v^+(\vec{p},h)u(-\vec{p},h')=0$

推论1.5.4. $\sum\limits_h u(\vec{p},h)\bar{u}(\vec{p},h)=\frac{m-i\gamma^a p_a}{2m},\sum\limits_h v(\vec{p},h)\bar{v}(\vec{p},h)=\frac{-m-i\gamma^a p_a}{2m}$

推论1.5.5. $\begin{cases}\sum\limits_h u(\vec{p},h)\bar{u}(\vec{p},h)-v(\vec{p},h)\bar{v}(\vec{p},h)]=1\\ \sum\limits_h u(\vec{p},h)\bar{u}(\vec{p},h)+v(\vec{p},h)\bar{v}(\vec{p},h)]=\frac{-i\gamma^a p_a}{m}\\ \sum\limits_h u(\vec{p},h)u^+(\vec{p},h)+v(-\vec{p},h)v^+(-\vec{p},h)]=\frac{E}{m}\end{cases}$

1.6 一般表象下Dirac方程的等时量子化

推论1.6.1. $\begin{cases}\{\psi_{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ \{\psi_{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t),\psi_{\lambda'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\\ \{\psi^+_{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\{a_\varsigma(\vec{p},h),a^+_\varsigma(\vec{p}',h')\}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ \{a_\varsigma(\vec{p},h),a_\varsigma(\vec{p}',h')\}=0\\ \{a^+_\varsigma(\vec{p},h),a^+_\varsigma(\vec{p}',h')\}=0\end{cases}$

证明: $\{\psi_{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p},\vec{p}'=-\infty}^{+\infty}\frac{m}{E}\sum_{h,h'}[u_{\varsigma\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u^*_{\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et-\vec{p}'\cdot\vec{r}'+E't)}\{a_\varsigma(\vec{p},h),a^+_\varsigma(\vec{p}',h')\}$$
$$+v_{\varsigma\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v^*_{\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et-\vec{p}'\cdot\vec{r}'+E't)}\{b^+_\varsigma(\vec{p},h),b_\varsigma(\vec{p}',h')\}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p},\vec{p}'=-\infty}^{+\infty}\frac{m}{E}\sum_{h,h'}[u_{\varsigma\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u^*_{\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et-\vec{p}'\cdot\vec{r}'+E't)}\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$
$$+v_{\varsigma\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v^*_{\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et-\vec{p}'\cdot\vec{r}'+E't)}\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\frac{m}{E}\sum_{h}[u_{\varsigma\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u^*_{\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+v_{\varsigma\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v^*_{\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\frac{m}{E}\sum_{h}[u_{\varsigma\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u^*_{\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)+v_{\varsigma\lambda_\varsigma}(-\vec{p},h)v^*_{\varsigma\lambda'_\varsigma}(-\vec{p},h)]e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}$$
$$=\delta_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}$$
$$=\delta_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$$ □

证明: $\{a_\varsigma(\vec{p},h),a^+_\varsigma(\vec{p}',h')\}$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\int\limits_{\vec{r},\vec{r}'=-\infty}^{+\infty}u^*_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u^{\lambda'_\varsigma}(\vec{p}',h')\{\psi^{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\int\limits_{\vec{r},\vec{r}'=-\infty}^{+\infty}u^*_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u^{\lambda'_\varsigma}(\vec{p}',h')\delta^{\lambda_\varsigma}_{\lambda'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$=\frac{m}{E}u^*_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u^{\lambda_\varsigma}(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(E't-Et)}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}e^{i\varsigma(\vec{p}'-\vec{p})\cdot\vec{r}'}d^3\vec{r}$$
$$=\frac{m}{E}u^+_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(E't-Et)}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$
$$=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$ □

推论1.6.2. $\begin{cases}:P_u:=:\int-i\psi^+\partial_u\psi dr^3:\overset{\varsigma\equiv1}{=}\int\sum\limits_h p_u[a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)+b^+_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma(\vec{p},h)]d^3\vec{p}\\ :Q:=:\int\psi^+\psi dr^3:=\int\sum\limits_h[a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)-b^+_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma(\vec{p},h)]d^3\vec{p}\overset{\varsigma\equiv1}{=}0\end{cases}$

1.7 一般表象下Dirac方程的协变反对易规则

推论1.7.1. $\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_h[a_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u_{\varsigma\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{i\varsigma px}+b^+_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}v_{\varsigma\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-i\varsigma px}]d^3\vec{p}\\ \bar{\psi}_{\lambda'_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_h[a^+_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}\bar{u}_{\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-i\varsigma px}+b_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}\bar{v}_{\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)e^{i\varsigma px}]d^3\vec{p}\end{cases}$

推论1.7.2. $\{\psi_{\lambda_\varsigma}(x),\bar{\psi}_{\lambda'_\varsigma}(x')\}=i(m-\gamma^a\partial_a)_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\Delta(x-x')$

证明: $\{\psi_{\lambda_\varsigma}(x),\bar{\psi}_{\lambda'_\varsigma}(x')\}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum\limits_{h,h'}\sqrt{\frac{m}{E}}\sqrt{\frac{m}{E'}}$

$$[\{a_\varsigma(\vec{p},h),a^+_\varsigma(\vec{p}',h')\}u_{\varsigma\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)\bar{u}_{\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(px-p'x')}+\{b^+_\varsigma(\vec{p},h),b_\varsigma(\vec{p}',h')\}v_{\varsigma\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)\bar{v}_{\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(px-p'x')}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{h,h'}\sqrt{\frac{m}{E}}\sqrt{\frac{m}{E'}}\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')[u_{\varsigma\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)\bar{u}_{\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(px-p'x')}+v_{\varsigma\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)\bar{v}_{\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(px-p'x')}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_h\frac{m}{E}[u_{\varsigma\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)\bar{u}_{\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)e^{i\varsigma p(x-x')}+v_{\varsigma\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)\bar{v}_{\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-i\varsigma p(x-x')}]d^3\vec{p}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{E}[\frac{(\varsigma m-i\gamma^a p_a)_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}}{2m}e^{i\varsigma p(x-x')}+\frac{(-\varsigma m-i\gamma^a p_a)_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}}{2m}e^{-i\varsigma p(x-x')}]d^3\vec{p}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2E}[(\varsigma m-i\gamma^a p_a)_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}e^{i\varsigma p(x-x')}+(-\varsigma m-i\gamma^a p_a)_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}e^{-i\varsigma p(x-x')}]d^3\vec{p}$$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{2E}[\varsigma(m-\gamma^a\partial_a)_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}e^{i\varsigma p(x-x')} - \varsigma(m-\gamma^a\partial_a)_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}e^{-i\varsigma p(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= i(m-\gamma^a\partial_a)_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\Delta(x-x')$ □

推论1.7.3. $\{\psi_{\lambda_\varsigma}(x), \bar{\psi}_{\lambda'_\varsigma}(x')\} = i(m-\gamma^a\partial_a)_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\Delta(x-x') \Leftrightarrow \{\psi_{\lambda_\varsigma}(x), \psi^+_{\lambda'_\varsigma}(x')\} = i[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\Delta(x-x')$

推论1.7.4. $\{\psi_{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t), \bar{\psi}_{\lambda'_\varsigma}(\vec{r}',t)\} = \gamma^4_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \Leftrightarrow \{\psi_{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{r}',t)\} = \delta_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

1.8 一般表象下Dirac方程的守恒荷

推论1.8.1. $Q = \int \psi^+\psi dr^3 = \int \sum_h [a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h) + b_\varsigma(\vec{p},h)b^+_\varsigma(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$

证明: $Q = \int \psi^+\psi dr^3$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \sum_{h,h'}[a^+_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u^+_\varsigma(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}v^+_\varsigma(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$
$[a_\varsigma(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}u_\varsigma(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)} + b^+_\varsigma(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}v_\varsigma(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^3\vec{p}'d^3\vec{p}dr^3$
$= \int \sum_{h,h'}\frac{m}{E}[a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u^+_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') + b_\varsigma(\vec{p},h)b^+_\varsigma(\vec{p},h')v^+_\varsigma(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h')]\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$
$= \int \sum_{h,h'}\frac{m}{E}[a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u^+_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') + b_\varsigma(\vec{p},h)b^+_\varsigma(\vec{p},h')v^+_\varsigma(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h')]d^3\vec{p}$
$= \int \sum_h [a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h) + b_\varsigma(\vec{p},h)b^+_\varsigma(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$ □

推论1.8.2. $H = i\int \psi^+\partial_t\psi dr^3 = \varsigma\int \sum_h E(\vec{p})[a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h) - b_\varsigma(\vec{p},h)b^+_\varsigma(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$

证明: $H = i\int \psi^+\partial_t\psi dr^3$
$= i\frac{1}{(2\pi)^3}\int \sum_{h,h'}[a^+_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u^+_\varsigma(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}v^+_\varsigma(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$
$(-i\varsigma E')[a_\varsigma(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}u_\varsigma(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)} - b^+_\varsigma(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}v_\varsigma(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^3\vec{p}'d^3\vec{p}dr^3$
$= -i\int \sum_{h,h'}\frac{m}{E}(-i\varsigma E')[a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u^+_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') - b_\varsigma(\vec{p},h)b^+_\varsigma(\vec{p},h')v^+_\varsigma(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h')]\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$
$= -i\int \sum_{h,h'}\frac{m}{E}(-i\varsigma E')[a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u^+_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') - b_\varsigma(\vec{p},h)b^+_\varsigma(\vec{p},h')v^+_\varsigma(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h')]d^3\vec{p}$
$= \varsigma\int \sum_h E(\vec{p})[a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h) - b_\varsigma(\vec{p},h)b^+_\varsigma(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$ □

推论1.8.3. $\vec{P} = -i\int \psi^+\nabla\psi dr^3 = \varsigma\int \sum_h \vec{p}[a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h) - b_\varsigma(\vec{p},h)b^+_\varsigma(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$

证明: $\vec{P} = -i\int \psi^+\nabla\psi dr^3$
$= -i\frac{1}{(2\pi)^3}\int \sum_{h,h'}[a^+_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u^+_\varsigma(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}v^+_\varsigma(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$
$(i\varsigma\vec{p}')[a_\varsigma(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}u_\varsigma(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)} - b^+_\varsigma(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}v_\varsigma(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^3\vec{p}'d^3\vec{p}dr^3$
$= -i\int \sum_{h,h'}\frac{m}{E}(i\varsigma\vec{p}')[a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u^+_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') - b_\varsigma(\vec{p},h)b^+_\varsigma(\vec{p},h')v^+_\varsigma(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h')]\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$
$= -i\int \sum_{h,h'}\frac{m}{E}(i\varsigma\vec{p})[a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u^+_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') - b_\varsigma(\vec{p},h)b^+_\varsigma(\vec{p},h')v^+_\varsigma(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h')]d^3\vec{p}$
$= \varsigma\int \sum_h \vec{p}[a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h) - b_\varsigma(\vec{p},h)b^+_\varsigma(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$ □

推论1.8.4. $P_u = -i\int \psi^+\partial_u\psi dr^3 = \varsigma\int \sum_h p_u[a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h) - b_\varsigma(\vec{p},h)b^+_\varsigma(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$

证明: $P_u = -i\int \psi^+\partial_u\psi dr^3$
$= i\frac{1}{(2\pi)^3}\int \sum_{h,h'}[a^+_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u^+_\varsigma(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}v^+_\varsigma(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$
$(i\varsigma p'_u)[a_\varsigma(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}u_\varsigma(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)} - b^+_\varsigma(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}v_\varsigma(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^3\vec{p}'d^3\vec{p}dr^3$
$= -i\int \sum_{h,h'}\frac{m}{E}(i\varsigma p'_u)[a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u^+_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') - b_\varsigma(\vec{p},h)b^+_\varsigma(\vec{p},h')v^+_\varsigma(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h')]\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$
$= -i\int \sum_{h,h'}\frac{m}{E}(i\varsigma p'_u)[a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u^+_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') - b_\varsigma(\vec{p},h)b^+_\varsigma(\vec{p},h')v^+_\varsigma(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h')]d^3\vec{p}$
$= \varsigma\int \sum_h p_u[a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h) - b_\varsigma(\vec{p},h)b^+_\varsigma(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$ □

2 实表象下Majorana方程的平面波解和量子化

2.1 严格求解Majorana方程的平面波解 [27]

2.1.1 两种表象下Majorana方程单动量平面波解之间的关系

实表象和Dirac表象下的Majorana方程:

定义2.1.1. $\begin{cases}(\gamma_s^a\partial_a+m)\psi_s=0,\gamma_s^a=(\sigma_{-\varsigma}\sigma_{\varsigma y},\varsigma\sigma_{\varsigma z}),\psi_s^*=\psi_s\\(\gamma^a\partial_a+m)\psi=0,\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_z),\psi^*=-e^{2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_y\psi,S_{em}^T(\varsigma)S_{em}(\varsigma)=-\sigma_y\otimes\sigma_y\end{cases}$

推论2.1.1. $\begin{cases}\psi_s(\vec{p}):=e^{i\theta}S_{em}(\varsigma)\psi(\vec{p}),\psi_s(\vec{p})=\psi_s^*(\vec{p})\\\psi_s(\vec{0}):=e^{i\theta}S_{em}(\varsigma)\psi(\vec{0}),\psi_s(\vec{0})=\psi_s^*(\vec{0})\end{cases}\quad S_{em}(\varsigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i&0&0&-i\\-1&0&0&-1\\0&-i&-i&0\\0&-\varsigma&\varsigma&0\end{bmatrix}$

推论2.1.2. $\psi_s(\vec{p})=\psi_s^*(\vec{p})\Leftrightarrow\psi^*(\vec{p})=-e^{2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_y\psi(\vec{p})$

推论2.1.3. $\psi(\vec{0})=\begin{bmatrix}\xi_0e^{-i\varsigma mt_0}\\\eta_0e^{i\varsigma mt_0}\end{bmatrix};\psi^*(\vec{0})=-e^{2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_y\psi(\vec{0})\Leftrightarrow\eta_0=-ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi_0^*\Leftrightarrow\psi(\vec{0})=\begin{bmatrix}\xi_0e^{-i\varsigma mt_0}\\-ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi_0^*e^{i\varsigma mt_0}\end{bmatrix}$

推论2.1.4. $\psi(\vec{0})=\begin{bmatrix}\xi e^{-i\varsigma mt_0}\\-ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi^*e^{i\varsigma mt_0}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\psi_s(\vec{0})=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i(e^{i\theta}\xi_1e^{-i\varsigma mt_0}-e^{-i\theta}\xi_1^*e^{i\varsigma mt_0})\\-(e^{i\theta}\xi_1e^{-i\varsigma mt_0}+e^{-i\theta}\xi_1^*e^{i\varsigma mt_0})\\-i(e^{i\theta}\xi_2e^{-i\varsigma mt_0}-e^{-i\theta}\xi_2^*e^{i\varsigma mt_0})\\-\varsigma(e^{i\theta}\xi_2e^{-i\varsigma mt_0}+e^{-i\theta}\xi_2^*e^{i\varsigma mt_0})\end{bmatrix}\in R;\xi=\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{bmatrix}$

推论2.1.5. $\begin{cases}\psi(\vec{p})=\frac{E+m+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma\otimes\sigma_x}{\sqrt{2m(E+m)}}\psi(\vec{0})=\frac{E+m+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma\otimes\sigma_x}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}\xi_0e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\\-ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi_0^*e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\end{bmatrix}\\\psi_s(\vec{p})=\frac{m-i\gamma_s^ap_a\gamma_{s4}}{\sqrt{2m(E+m)}}\psi_s(\vec{0})=\frac{m-i\gamma_s^ap_a\gamma_{s4}}{\sqrt{2m(E+m)}}e^{i\gamma_{s4}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\psi_{s0}=\psi_s^*(\vec{p}),\psi_{s0}=e^{i\theta}S_{em}(\varsigma)\psi_0\end{cases}$

2.1.2 Dirac表象下Majorana方程的具体单动量平面波解

推论2.1.6. $\psi(\vec{p})=\sum_h[a_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}-e^{-2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_ya_\varsigma^+(\vec{p},h)u_\varsigma^*(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$

证明: $\psi(\vec{p})=\frac{E+m+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma\otimes\sigma_x}{\sqrt{2m(E+m)}}\psi(\vec{0})=\frac{E+m+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma\otimes\sigma_x}{\sqrt{2m(E+m)}}$

$\{[a_\varsigma(\vec{p},\tfrac12)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+a_\varsigma(\vec{p},-\tfrac12)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}]e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+[-e^{-2i\theta}a_\varsigma^+(\vec{p},-\tfrac12)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+e^{-2i\theta}a_\varsigma^+(\vec{p},\tfrac12)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\}$

$=[a_\varsigma(\vec{p},\tfrac12)u_\varsigma(\vec{p},\tfrac12)+a_\varsigma(\vec{p},-\tfrac12)u_\varsigma(\vec{p},-\tfrac12)]e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+e^{-2i\theta}[-a_\varsigma^+(\vec{p},-\tfrac12)v_\varsigma(\vec{p},\tfrac12)+a_\varsigma^+(\vec{p},\tfrac12)v_\varsigma(\vec{p},-\tfrac12)]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$

$=\sum_h[a_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}-e^{-2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_ya_\varsigma^+(\vec{p},h)u^*(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$

$=\sum_h[a_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+[e^{i\theta}S_{em}(\varsigma)]^+[e^{i\theta}S_{em}(\varsigma)]^*a_\varsigma^+(\vec{p},h)u^*(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$ □

推论2.1.7. $\begin{cases}u^*(\vec{p},h)=(-1)^{s+\frac12}\sigma_y\otimes\sigma_yv_\varsigma(\vec{p},-h)\\v^*(\vec{p},h)=(-1)^{h-\frac12}\sigma_y\otimes\sigma_yu_\varsigma(\vec{p},-h)\end{cases}$

推论2.1.8. $\psi^+(\vec{p})=$
$[a_\varsigma^+(\vec{p},\tfrac12)u_\varsigma^+(\vec{p},\tfrac12)+a_\varsigma^+(\vec{p},-\tfrac12)u_\varsigma^+(\vec{p},-\tfrac12)]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+e^{2i\theta}[-a_\varsigma(\vec{p},-\tfrac12)v_\varsigma^+(\vec{p},\tfrac12)+a_\varsigma(\vec{p},\tfrac12)v_\varsigma^+(\vec{p},-\tfrac12)]e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$

2.1.3 实表象下Majorana方程的具体单动量平面波解

推论2.1.9. $\psi_s(\vec{p})=\sum_h[a_\varsigma(\vec{p},h)u_s(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+a_\varsigma^+(\vec{p},h)u_s^*(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$

证明: $\psi_s(\vec{p})=\frac{m-i\gamma_s^ap_a\gamma_{s4}}{\sqrt{2m(E+m)}}\psi_s(\vec{0})=e^{i\theta}S_{em}(\varsigma)\psi(\vec{p})$

$=e^{i\theta}S_{em}(\varsigma)[a_\varsigma(\vec{p},\tfrac12)u_\varsigma(\vec{p},\tfrac12)+a_\varsigma(\vec{p},-\tfrac12)u_\varsigma(\vec{p},-\tfrac12)]e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+e^{-2i\theta}[-a_\varsigma^+(\vec{p},-\tfrac12)v_\varsigma(\vec{p},\tfrac12)+a_\varsigma^+(\vec{p},\tfrac12)v_\varsigma(\vec{p},-\tfrac12)]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$

$=[a_\varsigma(\vec{p},\tfrac12)u_s(\vec{p},\tfrac12)+a_\varsigma(\vec{p},-\tfrac12)u_s(\vec{p},-\tfrac12)]e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+e^{-2i\theta}[-a_\varsigma^+(\vec{p},-\tfrac12)v_s(\vec{p},\tfrac12)+a_\varsigma^+(\vec{p},\tfrac12)v_s(\vec{p},-\tfrac12)]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$

$=\frac{m-i\gamma_s^ap_a\gamma_{s4}}{\sqrt{2m(E+m)}}\{[a_\varsigma(\vec{p},\tfrac12)e^{i\theta}\begin{bmatrix}i\\-1\\0\\0\end{bmatrix}+a_\varsigma(\vec{p},-\tfrac12)e^{i\theta}\begin{bmatrix}0\\0\\-i\\-\varsigma\end{bmatrix}]e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+e^{-i\theta}[-a_\varsigma^+(\vec{p},-\tfrac12)\begin{bmatrix}0\\0\\-i\\\varsigma\end{bmatrix}+a_\varsigma^+(\vec{p},\tfrac12)\begin{bmatrix}-i\\-1\\0\\0\end{bmatrix}]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\}$

$=\sum_h[a_\varsigma(\vec{p},h)u_s(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+a_\varsigma^+(\vec{p},h)u_s^*(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$ □

推论2.1.10. $\psi_s^+(\vec{p})=\sum_h[a_\varsigma^+(\vec{p},h)u_s^+(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+a_\varsigma(\vec{p},h)u_s^T(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$

推论2.1.11. $\bar{\psi}_s(\vec{p})=\sum_h[a_\varsigma^+(\vec{p},h)\bar{u}_s(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}-a_\varsigma(\vec{p},h)\bar{u}_s^*(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$

推论2.1.12. $$\begin{cases}u_s(\vec{p},\frac{1}{2})=e^{i\theta}S_{em}(\varsigma)u_\varsigma(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{m-i\gamma_s^a p_a\gamma_{s4}}{\sqrt{2m(E+m)}}e^{i\theta}\begin{bmatrix}i\\-1\\0\\0\end{bmatrix}=e^{2i\theta}v_s^*(\vec{p},-\frac{1}{2})\\ u_s(\vec{p},-\frac{1}{2})=e^{i\theta}S_{em}(\varsigma)u_\varsigma(\vec{p},-\frac{1}{2})=\frac{m-i\gamma_s^a p_a\gamma_{s4}}{\sqrt{2m(E+m)}}e^{i\theta}\begin{bmatrix}0\\0\\-i\\-\varsigma\end{bmatrix}=-e^{2i\theta}v_s^*(\vec{p},\frac{1}{2})\\ v_s(\vec{p},\frac{1}{2})=e^{i\theta}S_{em}(\varsigma)v_\varsigma(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{m-i\gamma_s^a p_a\gamma_{s4}}{\sqrt{2m(E+m)}}e^{i\theta}\begin{bmatrix}0\\0\\-i\\\varsigma\end{bmatrix}=-e^{2i\theta}u_s^*(\vec{p},-\frac{1}{2})\\ v_s(\vec{p},-\frac{1}{2})=e^{i\theta}S_{em}(\varsigma)v_\varsigma(\vec{p},-\frac{1}{2})=\frac{m-i\gamma_s^a p_a\gamma_{s4}}{\sqrt{2m(E+m)}}e^{i\theta}\begin{bmatrix}0\\0\\-i\\\varsigma\end{bmatrix}=e^{2i\theta}u_s^*(\vec{p},\frac{1}{2})\end{cases}$$

推论2.1.13. $$\begin{cases}u_s^*(\vec{p},h)=(-1)^{h-\frac{1}{2}}e^{-2i\theta}v_s(\vec{p},-h)\\ v_s^*(\vec{p},h)=(-1)^{h+\frac{1}{2}}e^{2i\theta}u_s(\vec{p},-h)\end{cases}$$

2.1.4 Majorana方程和中微子方程单动量平面波解之间的等价变换关系

推论2.1.14.

$(\gamma^a\partial_a+m)\psi(\vec{p})=0,\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_z),\psi^*(\vec{p})=-e^{2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_y\psi(\vec{p})$

$$\psi(\vec{p})=\frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}(E+m)\xi_0 e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}-\varsigma\vec{p}\cdot\sigma(ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi_0^*)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\\-(E+m)(ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi_0^*)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma\xi_0 e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda(\vec{p})\\-ie^{-2i\theta}\sigma_y\lambda^*(\vec{p})\end{bmatrix}$$

$[\Updownarrow]$

推论2.1.15.

$(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\nu(\vec{p})-me^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{p})=0$

$\nu(\vec{p})=\frac{1}{\sqrt{2}}[\lambda(\vec{p})+ie^{-2i\theta}\sigma_y\lambda^*(\vec{p})]=\frac{E+m-\varsigma\vec{p}\cdot\sigma}{\sqrt{2m(E+m)}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_0 e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi_0^* e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)})$

$[\Updownarrow]$

推论2.1.16.

$(\sigma,i\varsigma)_a\partial^a[-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{p})]-me^{-2i\theta}\sigma_y[-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{p})]^*=0$

$-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{p})=\frac{1}{\sqrt{2}}[\lambda(\vec{p})-ie^{-2i\theta}\sigma_y\lambda^*(\vec{p})]=\frac{E+m+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma}{\sqrt{2m(E+m)}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_0 e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}-ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi_0^* e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)})$

按螺旋度展开的平面波解：

推论2.1.17. $$\psi(\vec{p})=[a(p,+)\begin{bmatrix}\lambda(p,+)\\\varsigma\sqrt{\frac{E-m}{E+m}}\lambda(p,+)\end{bmatrix}+a(p,-)\begin{bmatrix}\lambda(p,-)\\-\varsigma\sqrt{\frac{E-m}{E+m}}\lambda(p,-)\end{bmatrix}]e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$$
$$+[b(p,+)\begin{bmatrix}\varsigma\sqrt{\frac{E-m}{E+m}}\lambda(p,+)\\\lambda(p,+)\end{bmatrix}+b(p,-)\begin{bmatrix}-\varsigma\sqrt{\frac{E-m}{E+m}}\lambda(p,-)\\\lambda(p,-)\end{bmatrix}]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)},\frac{\sigma\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\lambda(+)=\lambda(+),\frac{\sigma\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\lambda(-)=-\lambda(-)$$

2.1.5 从特殊表象Dirac方程出发构造平面波解 [27]

推论2.1.18. $(\gamma^a\partial_a+m)\psi(\vec{p})=0,\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_z),\psi^*(\vec{p})=-e^{2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_y\psi(\vec{p})$

推论2.1.19. $\lambda(\vec{p})=\psi_1(\vec{p})=\frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}[(E+m)\xi_0 e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}-i\varsigma e^{-2i\theta}\sigma\cdot\vec{p}\sigma_y\xi_0^* e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$

推论2.1.20. $\psi(\vec{p})=\begin{bmatrix}\lambda(\vec{p})\\-i\sigma_y e^{-2i\theta}\lambda^*(\vec{p})\end{bmatrix},\psi_s(\vec{p})=S_{em}(\varsigma)\begin{bmatrix}e^{i\theta}\lambda(\vec{p})\\-i\sigma_y[e^{i\theta}\lambda(\vec{p})]^*\end{bmatrix},\nu(\vec{p})=\frac{1}{\sqrt{2}}[\lambda(\vec{p})+ie^{-2i\theta}\sigma_y\lambda^*(\vec{p})]$

2.1.6 从中微子方程出发构造平面波解

推论2.1.21. $(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\nu(\vec{p})-me^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{p})=0$

推论2.1.22. $\nu(\vec{p})=\frac{E+m-\varsigma\vec{p}\cdot\sigma}{\sqrt{2m(E+m)}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_0e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi_0^*e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)})$

推论2.1.23. $\psi(\vec{p})=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\nu(\vec{p})-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{p})\\-\nu(\vec{p})-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{p})\end{bmatrix},\psi_s(\vec{p})=\frac{1}{\sqrt{2}}S_{em}(\varsigma)\begin{bmatrix}e^{i\theta}\nu(\vec{p})-i\sigma_y[e^{i\theta}\nu(\vec{p})]^*\\-e^{i\theta}\nu(\vec{p})-i\sigma_y[e^{i\theta}\nu(\vec{p})]^*\end{bmatrix}$

2.2 实表象下Majorana方程自旋基的性质

Majorana方程： $(\gamma_s^a\partial_a+m)\psi=0,\gamma_s^a=(\sigma_{-\varsigma}\sigma_{\varsigma y},\varsigma\sigma_{\varsigma z}),\psi_s^*=\psi_s$

实表象下两个自旋基之间的性质

性质2.2.1. $\bar{u}_s(\vec{p},h)u_s(\vec{p},h')=\varsigma\delta_{hh'},\bar{u}_s(\vec{p},h)u_s^*(\vec{p},h')=0$

性质2.2.2. $\sum\limits_h u_s(\vec{p},h)\bar{u}_s(\vec{p},h)=\frac{\varsigma m-i\gamma_s^ap_a}{2m}$

性质2.2.3. $\begin{cases}\sum\limits_h u_s(\vec{p},h)\bar{u}_s(\vec{p},h)-[\sum\limits_h u_s(\vec{p},h)\bar{u}_s(\vec{p},h)]^*=\varsigma\\\sum\limits_h u_s(\vec{p},h)\bar{u}_s(\vec{p},h)+[\sum\limits_h u_s(\vec{p},h)\bar{u}_s(\vec{p},h)]^*=\frac{-i\gamma^ap_a}{m}\end{cases}$

性质2.2.4. $u_s^+(\vec{p},h)u_s(\vec{p},h')=\frac{E}{m}\delta_{hh'},u_s^+(\vec{p},h)u_s^*(-\vec{p},h')=0$

性质2.2.5. $\sum\limits_h u_s(\vec{p},h)u_s^+(\vec{p},h)+[\sum\limits_h u_s(-\vec{p},h)u_s^+(-\vec{p},h)]^*=\frac{E}{m}$

2.3 实表象下Majorana方程的平面波解

推论2.3.1. $\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_h[a_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u_s(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+a_\varsigma^+(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u_s^*(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

推论2.3.2. $\nabla\psi(\vec{r},t)=i\varsigma\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\vec{p}\sum\limits_h[a_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u_s(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}-a_\varsigma^+(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u_s^*(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

推论2.3.3. $\psi^*(\vec{r},t)=\psi(\vec{r},t)$

推论2.3.4.

$$\begin{cases}a_\varsigma(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}u_s^+(\vec{p},h)\psi(\vec{r},t)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}u_{s\lambda_\varsigma}^*(\vec{p},h)\psi^{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\\a_\varsigma^+(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}u_s^T(\vec{p},h)\psi(\vec{r},t)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}u_{s\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)\psi^{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\end{cases}$$

2.4 实表象下Majorana方程的守恒荷

Majorana作用量： $L=-\frac{1}{2}\int\bar{\psi}(\gamma_s^a\partial_a+m)\psi dr^3$ **，Majorana哈密顿量：** $H=\frac{1}{2}\int\bar{\psi}(\gamma_s\cdot\nabla+m)\psi dr^3$

推论2.4.1. $\bar{\psi}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_h[a_\varsigma^+(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}\bar{u}_s(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}-a_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}\bar{u}_s^*(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

推论2.4.2. $H=i\int\psi^+\partial_t\psi dr^3=\int\sum\limits_h\varsigma E[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)-a_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$

证明：$H=\int[\bar{\psi}(\gamma_s\cdot\nabla)+m]\psi]dr^3=i\int\psi^+\partial_t\psi dr^3$

$=\int\sum\limits_{h,h'}\frac{m}{E}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')\bar{u}_s(\vec{p},h)(m+i\varsigma\gamma_s\cdot\vec{p})u_s(\vec{p},h')-a_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma^+(\vec{p},h')\bar{u}_s^*(\vec{p},h)(m-i\varsigma\gamma_s\cdot\vec{p})u_s^*(\vec{p},h')]d^3\vec{p}$

$=\int\sum\limits_{h,h'}\frac{m}{E}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')\bar{u}_s(\vec{p},h)\{2m\varsigma[\sum\limits_{s''}u^*(\vec{p},s'')\bar{u}^*(\vec{p},s'')]+\varsigma E\gamma_s^4\}u_s(\vec{p},h')$

$-a_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma^+(\vec{p},h')\bar{u}_s^*(\vec{p},h)\{2m\varsigma[\sum\limits_{s''}u_\varsigma(\vec{p},s'')\bar{u}_\varsigma(\vec{p},s'')]-\varsigma E\gamma_s^4\}u_s^*(\vec{p},h')]d^3\vec{p}$

$=\int\sum\limits_{h,h'}\frac{m}{E}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u_s^+(\vec{p},h)\varsigma Eu_s(\vec{p},h')-a_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma^+(\vec{p},h')u_s^T(\vec{p},h)\varsigma Eu_s^*(\vec{p},h')]d^3\vec{p}$

$=\int\sum\limits_h\varsigma E[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)-a_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$ □

推论2.4.3. $\vec{P}=\int -i\psi^+\nabla\psi dr^3=\int\sum_h \varsigma\vec{p}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)-a_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$

证明: $\vec{P}=\int -i\psi^+\nabla\psi dr^3$

$=-i\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{h,h'}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u_s^+(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+a_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u_s^T(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}](i\varsigma\vec{p})$

$[a_\varsigma(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}u_{s'}(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}-a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E}}u_{s'}^*(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^3\vec{p}'d^3\vec{p}dr^3$

$=-i\int\sum_{h,h'}\frac{m}{E}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u_s^+(\vec{p},h)(i\varsigma\vec{p})u_s(\vec{p},h')-a_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma^+(\vec{p},h')u_s^T(\vec{p},h)(i\varsigma\vec{p})u_s^*(\vec{p},h')]\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$

$=-i\int\sum_{h,h'}\frac{m}{E}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u_s^+(\vec{p},h)(i\varsigma\vec{p})u_s(\vec{p},h')-a_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma^+(\vec{p},h')u_s^T(\vec{p},h)(i\varsigma\vec{p})u_s^*(\vec{p},h')]d^3\vec{p}$

$=\int\sum_h\varsigma\vec{p}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)-a_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$ □

推论2.4.4. $Q=\int\psi^+\psi dr^3=\int\sum_h[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)+a_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$

证明: $Q=\int\psi^+\psi dr^3$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{h,h'}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u_s^+(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+a_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u_s^T(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$

$[a_\varsigma(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}u_{s'}(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E}}u_{s'}^*(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^3\vec{p}'d^3\vec{p}dr^3$

$=\int\sum_{h,h'}\frac{m}{E}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u_s^+(\vec{p},h)u_s(\vec{p},h')+a_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma^+(\vec{p},h')u_s^T(\vec{p},h)u_s^*(\vec{p},h')]\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$

$=\int\sum_{h,h'}\frac{m}{E}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u_s^+(\vec{p},h)u_s(\vec{p},h')+a_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma^+(\vec{p},h')u_s^T(\vec{p},h)(i\varsigma\vec{p})u_s^*(\vec{p},h')]d^3\vec{p}$

$=\int\sum_h[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)+a_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$ □

推论2.4.5. $L=-\frac{1}{2}\int\bar{\psi}(\gamma_s^a\partial_a+m)\psi dr^3=0$

2.5 实表象下Majorana方程的量子化

运用以上结论和性质，可以得到如下对易关系：

推论2.5.1. $\begin{cases}\{\psi_{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t),\psi_{\mu_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ \psi^*(\vec{r},t)=\psi(\vec{r},t)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\{a_\varsigma(\vec{p},h),a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ \{a_\varsigma(\vec{p},h),a_\varsigma(\vec{p}',h')\}=0\\ \{a_\varsigma^+(\vec{p},h),a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\}=0\end{cases}$

推论2.5.2. $\begin{cases}:H:=:\frac{1}{2}\int i\psi^+\partial_t\psi dr^3:=:\frac{1}{2}\int[\bar{\psi}(\gamma_s\cdot\nabla)+m]\psi]dr^3:\overset{\varsigma=1}{=}\int\sum_h E(p)a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)d^3\vec{p}\\ :\vec{P}:=:\frac{1}{2}\int -i\psi^+\nabla\psi dr^3:\overset{\varsigma=1}{=}\int\sum_h\vec{p}a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)d^3\vec{p}\end{cases}$

推论2.5.3. $\begin{cases}:P_u:=:\frac{1}{2}\int -i\psi^+\partial_u\psi dr^3:\overset{\varsigma=1}{=}\int\sum_h p_u a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)d^3\vec{p}\\ :Q:=:\int\psi^+\psi dr^3:=\int\sum_h 0a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)d^3\vec{p}\overset{\varsigma=1}{=}0\end{cases}$

推论2.5.4. $[P_u,P_v]=0,[Q,P_u]=0$

3 任意表象下Majorana方程的平面波解和量子化

3.1 任意表象下Majorana方程自旋基的性质

任意表象下Majorana方程: $(\gamma^a\partial_a+m)\psi=0,\psi_s=S\psi,\psi^*=S^TS\psi,\gamma^a=S^+(\sigma_{-\varsigma}\sigma_{+\varsigma y},\varsigma\sigma_{+\varsigma z})S$

任意表象下两个自旋基之间的性质

性质3.1.1. $\bar{u}_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h')=\varsigma\delta_{hh'},\bar{u}_\varsigma(\vec{p},h)(S^+S^*)u^*(\vec{p},h')=0$

性质3.1.2. $\sum_h u_\varsigma(\vec{p},h)\bar{u}_\varsigma(\vec{p},h)=\frac{\varsigma m-i\gamma^a p_a}{2m}$

性质3.1.3. $\begin{cases}\sum\limits_h u_\varsigma(\vec{p},h)\bar{u}_\varsigma(\vec{p},h)-[\sum\limits_h u_\varsigma(\vec{p},h)\bar{u}_\varsigma(\vec{p},h)]^*=\varsigma\\ \sum\limits_h u_\varsigma(\vec{p},h)\bar{u}_\varsigma(\vec{p},h)+[\sum\limits_h u_\varsigma(\vec{p},h)\bar{u}_\varsigma(\vec{p},h)]^*=\frac{-i\gamma^a p_a}{m}\end{cases}$

性质3.1.4. $u^+_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h')=\frac{E}{m}\delta_{hh'},u^+_\varsigma(\vec{p},h)(S^+S^*)u^*(-\vec{p},h')=0$

性质3.1.5. $\sum\limits_h u_\varsigma(\vec{p},h)u^+_\varsigma(\vec{p},h)+[\sum\limits_h u_\varsigma(-\vec{p},h)u^+_\varsigma(-\vec{p},h)]^*=\frac{E}{m}$

3.2 任意表象下Majorana方程的平面波解

推论3.2.1.

$$\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_h[a_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\tfrac{m}{E}}u_\varsigma(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+S^+S^*a^+_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\tfrac{m}{E}}u^*(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

推论3.2.2.

$$\nabla\psi(\vec{r},t)=i\varsigma\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\vec{p}\sum_h[a_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\tfrac{m}{E}}u_\varsigma(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}-S^+S^*a^+_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\tfrac{m}{E}}u^*(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

推论3.2.3. $\psi^*(\vec{r},t)=S^TS\psi(\vec{r},t)$

推论3.2.4.

$$\begin{cases}a_\varsigma(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\tfrac{m}{E}}u^+_\varsigma(\vec{p},h)\psi(\vec{r},t)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\tfrac{m}{E}}u^{+\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)\psi_{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\\ a^+_\varsigma(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\tfrac{m}{E}}u^T_\varsigma(\vec{p},h)\psi^*(\vec{r},t)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\tfrac{m}{E}}u^{\lambda'_\varsigma}_\varsigma(\vec{p},h)\psi^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\end{cases}$$

3.3 任意表象下Majorana方程的量子化

推论3.3.1. $\begin{cases}\{\psi_{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ \psi^*(\vec{r},t)=S^TS\psi(\vec{r},t)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\{a_\varsigma(\vec{p},h),a^+_\varsigma(\vec{p}',h')\}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ \{a_\varsigma(\vec{p},h),a_\varsigma(\vec{p}',h')\}=0\\ \{a^+_\varsigma(\vec{p},h),a^+_\varsigma(\vec{p}',h')\}=0\end{cases}$

推论3.3.2. $L=-\frac{1}{2}\int\bar{\psi}(\gamma^a_s\partial_a+m)\psi dr^3=0$

推论3.3.3. $\begin{cases}:H:=:\frac{1}{2}\int i\psi^+\partial_t\psi dr^3:=:\frac{1}{2}\int[\bar{\psi}(\gamma_s\cdot\nabla)+m]\psi]dr^3:\overset{\varsigma=1}{=}\int\sum\limits_h E(p)a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)d^3\vec{p}\\ :\vec{P}:=:\frac{1}{2}\int-i\psi^+\nabla\psi dr^3:\overset{\varsigma=1}{=}\int\sum\limits_h\vec{p}a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)d^3\vec{p}\end{cases}$

推论3.3.4. $\begin{cases}:P_u:=:\frac{1}{2}\int-i\psi^+\partial_u\psi dr^3:\overset{\varsigma=1}{=}\int\sum\limits_h p_u a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)d^3\vec{p}\\ :Q:=:\int\psi^+\psi dr^3:=\int\sum\limits_h 0a^+_\varsigma(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)d^3\vec{p}\overset{\varsigma=1}{=}0\end{cases}$

推论3.3.5. $[P_u,P_v]=0,[Q,P_u]=0$

在表象变换下，湮灭产生算符和其对易关系是标量、不变量。系统能量动量算符、守恒荷也是标量、不变量。波函数算符和其对易关系是表象协变量。

4 Majorana方程和有质量中微子方程的等价关系

4.1 Majorana方程和有质量中微子方程等价的正则反对易关系

Dirac表象下Majorana方程反对易关系

推论4.1.1. $\begin{cases}\{\psi_{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ \psi^*(\vec{r},t)=-e^{2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_y\psi(\vec{r},t)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\{a_\varsigma(\vec{p},h),a^+_\varsigma(\vec{p}',h')\}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ \{a_\varsigma(\vec{p},h),a_\varsigma(\vec{p}',h')\}=0\\ \{a^+_\varsigma(\vec{p},h),a^+_\varsigma(\vec{p}',h')\}=0\end{cases}$

推论4.1.2. $\psi^*(\vec{r},t)=-e^{2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_y\psi(\vec{r},t)\Leftrightarrow\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\nu(\vec{r},t)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\\-\nu(\vec{r},t)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\end{bmatrix}$

Majorana方程和中微子方程正则反对易关系的等价变换：

推论4.1.3. $\begin{cases}\{\psi_{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\nu(\vec{r},t)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\\-\nu(\vec{r},t)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\end{bmatrix}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu_{B_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\\\{\nu^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t),\nu^+_{B'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\end{cases}$

证明:

$$\begin{cases}\{\psi_{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\nu(\vec{r},t)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\\-\nu(\vec{r},t)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t)-e^{-2i\theta}(\varepsilon\nu)^*_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu^*_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)-e^{2i\theta}(\varepsilon\nu)_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\\frac{1}{2}\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t)-e^{-2i\theta}(\varepsilon\nu)^*_{A_\varsigma}(\vec{r},t),-\nu^*_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)-e^{2i\theta}(\varepsilon\nu)_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\\\frac{1}{2}\{-\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t)-e^{-2i\theta}(\varepsilon\nu)^*_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu^*_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)-e^{2i\theta}(\varepsilon\nu)_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\\\frac{1}{2}\{-\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t)-e^{-2i\theta}(\varepsilon\nu)^*_{A_\varsigma}(\vec{r},t),-\nu^*_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)-e^{2i\theta}(\varepsilon\nu)_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t)-e^{-2i\theta}(\varepsilon\nu)^*_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu^*_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t)-e^{-2i\theta}(\varepsilon\nu)^*_{A_\varsigma}(\vec{r},t),-e^{2i\theta}(\varepsilon\nu)_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\\{-\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t)-e^{-2i\theta}(\varepsilon\nu)^*_{A_\varsigma}(\vec{r},t),-e^{2i\theta}(\varepsilon\nu)_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t)+e^{-2i\theta}(\varepsilon\nu)^*_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu^*_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu^*_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t),(\varepsilon\nu)_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\\\{(\varepsilon\nu)^*_{A_\varsigma}(\vec{r},t),(\varepsilon\nu)_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\\{(\varepsilon\nu)^*_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu^*_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu_{B_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\\\{\nu^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t),\nu^+_{B'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\end{cases}$$ □

推论4.1.4. $\begin{cases}\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu_{B_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\\\{\nu^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t),\nu^+_{B'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\{a_\varsigma(\vec{p},h),a^+_\varsigma(\vec{p}',h')\}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\\{a_\varsigma(\vec{p},h),a_\varsigma(\vec{p}',h')\}=0\\\{a^+_\varsigma(\vec{p},h),a^+_\varsigma(\vec{p}',h')\}=0\end{cases}$

4.2 Dirac表象下Majorana作用量和中微子作用量

Majorana拉氏量: $L=-\frac{1}{2}\int\bar{\psi}(\gamma^a\partial_a+m)\psi dr^3$ ，**Majorana哈密顿量:** $H=\frac{1}{2}\int\bar{\psi}(\gamma\cdot\nabla+m)\psi dr^3$

推论4.2.1. $\gamma^a\partial_a=\begin{bmatrix}\varsigma\partial_\pi & -i\sigma\cdot\nabla\\ i\sigma\cdot\nabla & -\varsigma\partial_\pi\end{bmatrix},\gamma^4\gamma^a\partial_a=\begin{bmatrix}\partial_\pi & -i\varsigma\sigma\cdot\nabla\\ -i\varsigma\sigma\cdot\nabla & \partial_\pi\end{bmatrix},\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_z)$

推论4.2.2. $\bar{\psi}(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)=\varsigma\{\nu^+(\vec{r},t)[-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]+[ie^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y]\nu(\vec{r},t)\}$

证明: $\bar{\psi}(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)=\psi^+(\vec{r},t)\gamma^4\psi(\vec{r},t)$

$$=\frac{1}{2}\varsigma\left[\nu^+(\vec{r},t)+ie^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y,-\nu^+(\vec{r},t)+ie^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y\right]\begin{bmatrix}\nu(\vec{r},t)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\\\nu(\vec{r},t)+ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\end{bmatrix}$$

$= \frac{1}{2}\varsigma\{[\nu^+(\vec{r},t)+ie^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y][\nu(\vec{r},t)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]-[\nu^+(\vec{r},t)-ie^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y][\nu(\vec{r},t)+ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]\}$
$= \varsigma\{\nu^+(\vec{r},t)[-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]+[ie^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y]\nu(\vec{r},t)\}$ □

推论4.2.3. $\bar{\psi}(\vec{r},t)\gamma^a\partial_a\psi(\vec{r},t)=i\varsigma[\nu^+(\vec{r},t)(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\nu(\vec{r},t)-\nu^T(\vec{r},t)(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a\nu^*(\vec{r},t)]$

证明： $\bar{\psi}(\vec{r},t)\gamma^a\partial_a\psi(\vec{r},t)=\psi^+(\vec{r},t)\gamma^4\gamma^a\partial_a\psi(\vec{r},t)$
$= \frac{1}{2}\left[\nu^+(\vec{r},t)+ie^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y,-\nu^+(\vec{r},t)+ie^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y\right]\begin{bmatrix}\partial_\pi & -i\varsigma\sigma\cdot\nabla\\ -i\varsigma\sigma\cdot\nabla & \partial_\pi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu(\vec{r},t)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\\ -\nu(\vec{r},t)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\end{bmatrix}$
$= \frac{1}{2}\left[\nu^+(\vec{r},t)+ie^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y,-\nu^+(\vec{r},t)+ie^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y\right]\partial_\pi\begin{bmatrix}\nu(\vec{r},t)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\\ -\nu(\vec{r},t)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\end{bmatrix}$
$+ \frac{1}{2}\left[\nu^+(\vec{r},t)+ie^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y,-\nu^+(\vec{r},t)+ie^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y\right](-i\varsigma\sigma\cdot\nabla)\begin{bmatrix}-\nu(\vec{r},t)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\\ \nu(\vec{r},t)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\end{bmatrix}$
$= \frac{1}{2}\{[\nu^+(\vec{r},t)+ie^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y]\partial_\pi[\nu(\vec{r},t)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]$
$+ [\nu^+(\vec{r},t)-ie^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y]\partial_\pi[\nu(\vec{r},t)+ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]\}$
$+ \frac{1}{2}\{[\nu^+(\vec{r},t)+ie^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y](i\varsigma\sigma\cdot\nabla)[\nu(\vec{r},t)+ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]$
$+ [\nu^+(\vec{r},t)-ie^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y](i\varsigma\sigma\cdot\nabla)[\nu(\vec{r},t)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]\}$
$= [\nu^+(\vec{r},t)\partial_\pi\nu(\vec{r},t)+\nu^T(\vec{r},t)\partial_\pi\nu^*(\vec{r},t)]+[\nu^+(\vec{r},t)(i\varsigma\sigma\cdot\nabla)\nu(\vec{r},t)-\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y(i\varsigma\sigma\cdot\nabla)\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]$
$= i\varsigma[\nu^+(\vec{r},t)(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\nu(\vec{r},t)-\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]$ □

中微子拉氏量：

推论4.2.4. $L=-\frac{1}{2}\int\bar{\psi}(\vec{r},t)(\gamma^a\partial_a+m)\psi(\vec{r},t)$
$= -\frac{1}{2}i\varsigma\int\nu^+(\vec{r},t)[(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\nu(\vec{r},t)-me^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]-\nu^T(\vec{r},t)[(-\sigma^*,i\varsigma)^a\partial_a\nu^*(\vec{r},t)-me^{2i\theta}\sigma_y\nu(\vec{r},t)]$

证明： $L=-\frac{1}{2}\int\bar{\psi}(\vec{r},t)(\gamma^a\partial_a+m)\psi(\vec{r},t)$
$= -\frac{1}{2}\int i\varsigma[\nu^+(\vec{r},t)(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\nu(\vec{r},t)-\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]$
$+ mi\varsigma\{\nu^+(\vec{r},t)[-e^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]+[e^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y]\nu(\vec{r},t)\}$
$= -\frac{1}{2}i\varsigma\int\nu^+(\vec{r},t)[(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\nu(\vec{r},t)-me^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]-\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y[(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)+me^{2i\theta}\sigma_y[\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]^*]$
$= -\frac{1}{2}i\varsigma\int\nu^+(\vec{r},t)[(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\nu(\vec{r},t)-me^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]-\nu^T(\vec{r},t)[(-\sigma^*,i\varsigma)^a\partial_a\nu^*(\vec{r},t)-me^{2i\theta}\sigma_y\nu(\vec{r},t)]$ □

中微子哈密顿量：

推论4.2.5. $H=\frac{1}{2}\int\bar{\psi}(\gamma\cdot\nabla+m)\psi dr^3$
$= i\varsigma\frac{1}{2}\int[\nu^+(\vec{r},t)\sigma\cdot\nabla\nu(\vec{r},t)+\nu^T(\vec{r},t)\sigma^*\cdot\nabla\nu^*(\vec{r},t)]-m[e^{-2i\theta}\nu^+(\vec{r},t)\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)-e^{2i\theta}\nu^T(\vec{r},t)\sigma_y\nu(\vec{r},t)]dr^3$

中微子的电荷：

推论4.2.6. $Q=\int\psi^+\psi dr^3=\int\nu^+(\vec{r},t)\nu(\vec{r},t)+\nu^T(\vec{r},t)\nu^*(\vec{r},t)dr^3\simeq\int\nu^+(\vec{r},t)\nu(\vec{r},t)+\nu^T(\vec{r},t)\nu^*(\vec{r},t)dr^3$

中微子的能量动量：

推论4.2.7. $P_u=-i\int\psi^+\partial_u\psi dr^3=-i\int\nu^+(\vec{r},t)\partial_u\nu(\vec{r},t)+\nu^T(\vec{r},t)\partial_u\nu^*(\vec{r},t)dr^3$

推论4.2.8. $[P_u,P_v]=0,[Q,P_u]=0$

5 有质量中微子方程的平面波解和直接量子化 [43]

5.1 有质量中微子方程自旋基的性质

推论5.1.1. $(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\nu(x)-me^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(x)=0$

推论5.1.2. $\begin{cases}\eta(\vec{p},\frac{1}{2}) := \frac{E+m-\varsigma\vec{p}\cdot\sigma}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = u_1(\vec{p},\frac{1}{2}) - u_2(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \eta(\vec{p},-\frac{1}{2}) := \frac{E+m-\varsigma\vec{p}\cdot\sigma}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = u_1(\vec{p},-\frac{1}{2}) - u_2(\vec{p},-\frac{1}{2})\end{cases}$

推论5.1.3. $\eta(\vec{p},h) = u_1(\vec{p},h) - u_2(\vec{p},h), \eta^+(\vec{p},h)\eta(-\vec{p},h') = \delta_{hh'}, \eta^T(\vec{p},h)\eta^*(-\vec{p},h') = \delta_{hh'}$

推论5.1.4. $\begin{cases}\sum\limits_h \eta(\vec{p},h)\eta^+(\vec{p},h) = \frac{E-\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{m} = \frac{-\varsigma(\sigma,i\varsigma)^a p_a}{m}\\ \sum\limits_h (-1)^{h-\frac{1}{2}}\eta(\vec{p},h)\eta^+(\vec{p},h) = i\sigma_y\end{cases}$

推论5.1.5. $\begin{cases}\sum\limits_h [\eta(\vec{p},h)\eta^+(\vec{p},h) + \eta(-\vec{p},h)\eta^+(-\vec{p},h)] = \frac{2E}{m}\\ \sum\limits_h [\eta^*(\vec{p},h)\eta^T(\vec{p},h) + \eta^*(-\vec{p},h)\eta^T(-\vec{p},h)] = \frac{2E}{m}\\ \sum\limits_h (-1)^{h-\frac{1}{2}}[\eta(\vec{p},h)\eta^T(\vec{p},-h) + \eta(-\vec{p},-h)\eta^T(-\vec{p},h)] = 0\\ \sum\limits_h (-1)^{h-\frac{1}{2}}[\eta^*(\vec{p},h)\eta^+(\vec{p},-h) + \eta^*(-\vec{p},-h)\eta^+(-\vec{p},h)] = 0\end{cases}$

推论5.1.6. $\eta^+(\vec{p},h)\eta(\vec{p}',h') = -(-1)^{h+h'}\eta^T(-\vec{p},-h)\eta^*(-\vec{p}',-h')$

推论5.1.7. $\begin{cases}\eta^+(\vec{p},h)\eta(\vec{p},h') - (-1)^{h+h'}\eta^T(\vec{p},-h)\eta^*(\vec{p},-h') = \frac{2E}{m}\delta_{hh'}\\ \eta^+(\vec{p},h)\eta(\vec{p},h') + \eta^+(-\vec{p},h)\eta(-\vec{p},h') = \frac{2E}{m}\delta_{hh'}\end{cases}$

推论5.1.8. $\begin{cases}\eta^+(\vec{p},h)\eta(-\vec{p},h') - (-1)^{h+h'}\eta^T(\vec{p},-h)\eta^*(-\vec{p},-h') = 0\\ \eta^+(\vec{p},h)\eta(-\vec{p},h') - \eta^+(-\vec{p},h)\eta(\vec{p},h') = 0\end{cases}$

推论5.1.9. $\begin{cases}\eta^+(\vec{p},h)\eta(-\vec{p},-h') - (-1)^{h'-h}\eta^T(\vec{p},-h)\eta^*(-\vec{p},h') = 0\\ \eta^+(\vec{p},h)\eta(-\vec{p},-h') - \eta^+(-\vec{p},h)\eta(\vec{p},-h') = 0\end{cases}$

5.2 从Dirac表象下Majorana方程变换得到有质量中微子方程平面波解

推论5.2.1. $\nu(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sqrt{\frac{m}{2E}}\sum\limits_h \frac{E+m-\varsigma\vec{p}\cdot\sigma}{\sqrt{2m(E+m)}}[a_\varsigma(\vec{p},h)\xi(h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + a_\varsigma^+(\vec{p},h)ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi(h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

推论5.2.2. $\nu(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sqrt{\frac{m}{2E}}\sum\limits_h [a_\varsigma(\vec{p},h)\eta(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + (-1)^{h-\frac{1}{2}}e^{-2i\theta}a_\varsigma^+(\vec{p},h)\eta(\vec{p},-h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

推论5.2.3. $a_\varsigma(\vec{p},h) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}u_\varsigma^+(\vec{p},h)\psi(\vec{r},t)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}$

$\Leftrightarrow a_\varsigma(\vec{p},h) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{E}{2m}}\int[\eta^+(\vec{p},h)\nu(\vec{r},t) - (-1)^{h-\frac{1}{2}}e^{-2i\theta}\eta^T(\vec{p},-h)\nu^*(\vec{r},t)]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}$

证明： $a_\varsigma(\vec{p},h) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}u_\varsigma^+(\vec{p},h)\psi(\vec{r},t)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}$

$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}\left[u_1^+(\vec{p},h), u_2^+(\vec{p},h)\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\nu(\vec{r},t) - ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\\ -\nu(\vec{r},t) - ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\end{bmatrix}e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}$

$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sqrt{\frac{m}{2E}}[\eta^+(\vec{p},h)\nu(\vec{r},t) - ie^{-2i\theta}\eta^+(-\vec{p},h)\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}$

$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sqrt{\frac{m}{2E}}[\eta^+(\vec{p},h)\nu(\vec{r},t) - (-1)^{h-\frac{1}{2}}e^{-2i\theta}\eta^T(\vec{p},-h)\nu^*(\vec{r},t)]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}$ □

5.3 有质量中微子方程平面波解系数和量子化条件的直接验证

推论5.3.1. $a_\varsigma(\vec{p},h) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{E}{2m}}\int[\eta^+(\vec{p},h)\nu(\vec{r},t) - (-1)^{h-\frac{1}{2}}e^{-2i\theta}\eta^T(\vec{p},-h)\nu^*(\vec{r},t)]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}$

证明： $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{2E}}\int[\eta^+(\vec{p},h)\nu(\vec{r},t)-(-1)^{h-\frac{1}{2}}e^{-2i\theta}\eta^+(-\vec{p},-h)\nu^*(\vec{r},t)]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{m}{2E}}\int d^3\vec{r}d^3\vec{p}'\sqrt{\frac{m}{2E'}}$

$\sum_{h'}\eta^+(\vec{p},h)[a_\varsigma(\vec{p}',h')\eta(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+(-1)^{h'-\frac{1}{2}}e^{-2i\theta}a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\eta(\vec{p}',-h')e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$

$-(-1)^{h-\frac{1}{2}}e^{-2i\theta}\eta^T(\vec{p},-h)[a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\eta^*(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+(-1)^{h'-\frac{1}{2}}e^{2i\theta}a_\varsigma(\vec{p}',h')\eta^*(\vec{p}',-h')e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$

$=\sqrt{\frac{m}{2E}}\int\sqrt{\frac{m}{2E'}}\sum_{h'}[a_\varsigma(\vec{p}',h')\eta^+(\vec{p},h)\eta(\vec{p}',h')\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')+(-1)^{h-\frac{1}{2}}e^{-2i\theta}a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\eta^+(\vec{p},h)\eta(\vec{p}',-h')\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')e^{2i\varsigma Et}]$

$-(-1)^{h'-\frac{1}{2}}e^{-2i\theta}a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\eta^T(\vec{p},-h)\eta^*(\vec{p}',h')\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')e^{2i\varsigma Et}-(-1)^{h+h'}a_\varsigma(\vec{p}',h')\eta^T(\vec{p},-h)\eta^*(\vec{p}',-h')\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')]d^3\vec{p}'$

$=\frac{m}{2E}\sum_{h'}[a_\varsigma(\vec{p},h')\eta^+(\vec{p},h)\eta(\vec{p},h')+(-1)^{h-\frac{1}{2}}e^{-2i\theta}a^+(-\vec{p},h')\eta^+(\vec{p},h)\eta(-\vec{p},-h')e^{2i\varsigma Et}]$

$-(-1)^{h'-\frac{1}{2}}e^{-2i\theta}a^+(-\vec{p},h')\eta^T(\vec{p},-h)\eta^*(-\vec{p},h')e^{2i\varsigma Et}-(-1)^{h+h'}a_\varsigma(\vec{p},h')\eta^T(\vec{p},-h)\eta^*(\vec{p},-h')]$

$=\frac{m}{2E}\sum_{h'}[a_\varsigma(\vec{p},h')[\eta^+(\vec{p},h)\eta(\vec{p},h')-(-1)^{h+h'}\eta^T(\vec{p},-h)\eta^*(\vec{p},-h')]$

$+(-1)^{h-\frac{1}{2}}e^{2i\varsigma Et}e^{-2i\theta}a^+(-\vec{p},h')[\eta^+(\vec{p},h)\eta(-\vec{p},-h')-(-1)^{h'-h}\eta^T(\vec{p},-h)\eta^*(-\vec{p},h')]$

$=a_\varsigma(\vec{p},h)$ □

推论5.3.2. $a_\varsigma^+(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{E}{2m}}\int[\eta^T(\vec{p},h)\nu^*(\vec{r},t)-(-1)^{h-\frac{1}{2}}e^{2i\theta}\eta^+(\vec{p},-h)\nu(\vec{r},t)]e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}$

很容易利用以上两个系数展开式可直接推得如下正则对易关系：

推论5.3.3.
$$\begin{cases}\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ \{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\\ \{\nu^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t),\nu^+_{B'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\{a_\varsigma(\vec{p},h),a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ \{a_\varsigma(\vec{p},h),a_\varsigma(\vec{p}',h')\}=0\\ \{a_\varsigma^+(\vec{p},h),a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\}=0\end{cases}$$

现在反过来可利用波函数展开式直接推得如下正则对易关系：

推论5.3.4.
$$\begin{cases}\{a_\varsigma(\vec{p},h),a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ \{a_\varsigma(\vec{p},h),a_\varsigma(\vec{p}',h')\}=0\\ \{a_\varsigma^+(\vec{p},h),a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\{\nu_{A_\varsigma}(x),\nu^+_{A'_\varsigma}(x')\}=-\varsigma(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a\Delta(x-x')\\ \{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\end{cases}$$

证明：

$\{\nu_{A_\varsigma}(x),\nu^+_{A'_\varsigma}(x')\}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_{h,h'}\{[a_\varsigma(\vec{p},h)\eta_{A_\varsigma}(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+e^{-2i\theta}a_\varsigma^+(\vec{p},h)(-1)^{h-\frac{1}{2}}\eta_{A_\varsigma}(\vec{p},-h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}],$

$[a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't')}+e^{2i\theta}a_\varsigma(\vec{p}',h')(-1)^{h'-\frac{1}{2}}\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec{p}',-h')e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't')}]\}d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_{h,h'}[\eta_{A_\varsigma}(\vec{p},h)\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec{p}',h')]\{a_\varsigma(\vec{p},h),a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\}[e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't')}]$

$+\eta_{A_\varsigma}(\vec{p},-h)\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec{p}',-h')(-1)^{h-\frac{1}{2}}\{a_\varsigma^+(\vec{p},h),a_\varsigma(\vec{p}',h)\}(-1)^{h'-\frac{1}{2}}[e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't')}]d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_{h,h'}[\eta_{A_\varsigma}(\vec{p},h)\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec{p}',h')]\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')[e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't')}]$

$+\eta_{A_\varsigma}(\vec{p},-h)\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec{p}',-h')(-1)^{h-\frac{1}{2}}\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')(-1)^{h'-\frac{1}{2}}[e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't')}]d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_h\eta_{A_\varsigma}(\vec{p},h)\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec{p},h)e^{i\varsigma p\cdot(x-x')}+\eta_{A_\varsigma}(\vec{p},-h)\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec{p},-h)e^{-i\varsigma p\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_h\eta_{A_\varsigma}(\vec{p},h)\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec{p},h)[e^{i\varsigma p\cdot(x-x')}+e^{-i\varsigma p\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\frac{-\varsigma(\sigma,i\varsigma)^a p_a}{m}[e^{i\varsigma p\cdot(x-x')}+e^{-i\varsigma p\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$

$=-(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2E}[e^{i\varsigma p\cdot(x-x')}-e^{-i\varsigma p\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}=-\varsigma(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a\Delta(x-x')$ □

证明：

$\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_{h,h'}\{[a_\varsigma(\vec{p},h)\eta_{A_\varsigma}(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+e^{-2i\theta}a_\varsigma^+(\vec{p},h)(-1)^{h-\frac{1}{2}}\eta_{A_\varsigma}(\vec{p},-h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}],$

$$[a_\varsigma^+(\vec p',h')\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec p',h')e^{-i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}+e^{2i\theta}a_\varsigma(\vec p',h')(-1)^{h'-\frac12}\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec p',-h')e^{i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}]\}d^3\vec p' d^3\vec p$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_{h,h'}[\eta_{A_\varsigma}(\vec p,h)\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec p',h')]\{a_\varsigma(\vec p,h),a_\varsigma^+(\vec p',h')\}[e^{i\varsigma(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{-i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}]$$
$$+\eta_{A_\varsigma}(\vec p,-h)\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec p',-h')(-1)^{h-\frac12}\{a_\varsigma^+(\vec p,h),a_\varsigma(\vec p',h)\}(-1)^{h'-\frac12}[e^{-i\varsigma(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}]d^3\vec p' d^3\vec p$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_{h,h'}[\eta_{A_\varsigma}(\vec p,h)\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec p',h')]\delta_{hh'}\delta^3(\vec p-\vec p')[e^{i\varsigma(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{-i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}]$$
$$+\eta_{A_\varsigma}(\vec p,-h)\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec p',-h')(-1)^{h-\frac12}\delta_{hh'}\delta^3(\vec p-\vec p')(-1)^{h'-\frac12}[e^{-i\varsigma(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}]d^3\vec p' d^3\vec p$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_{h}\eta_{A_\varsigma}(\vec p,h)\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec p,h)e^{i\varsigma\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}+\eta_{A_\varsigma}(\vec p,-h)\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec p,-h)e^{-i\varsigma\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}d^3\vec p$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_{h}\eta_{A_\varsigma}(\vec p,h)\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec p,h)e^{i\varsigma\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}+\eta_{A_\varsigma}(-\vec p,h)\eta^+_{A'_\varsigma}(-\vec p,h)e^{i\varsigma\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}d^3\vec p$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_{h}[\eta_{A_\varsigma}(\vec p,h)\eta^+_{A'_\varsigma}(\vec p,h)+\eta_{A_\varsigma}(-\vec p,h)\eta^+_{A'_\varsigma}(-\vec p,h)]e^{i\varsigma\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}d^3\vec p$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_{h}[\eta(\vec p,h)\eta^+(\vec p,h)+\eta(-\vec p,h)\eta^+(-\vec p,h)]_{A_\varsigma A'_\varsigma}e^{i\varsigma\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}d^3\vec p$$
$$=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')$$
□

推论5.3.5. $\begin{cases}\{a_\varsigma(\vec p,h),a_\varsigma^+(\vec p',h')\}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec p-\vec p')\\ \{a_\varsigma(\vec p,h),a_\varsigma(\vec p',h')\}=0\\ \{a_\varsigma^+(\vec p,h),a_\varsigma^+(\vec p',h')\}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\{\nu_{A_\varsigma}(x),\nu_{B_\varsigma}(x')\}=i\varsigma me^{-2i\theta}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\Delta(x-x')\\ \{\nu^+_{A'_\varsigma}(x),\nu^+_{B'_\varsigma}(x')\}=-i\varsigma me^{2i\theta}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\Delta(x-x')\\ \{\nu_{A_\varsigma}(\vec r,t),\nu_{B_\varsigma}(\vec r',t)\}=0\\ \{\nu^+_{A'_\varsigma}(\vec r,t),\nu^+_{B'_\varsigma}(\vec r',t)\}=0\end{cases}$

证明:

$$\{\nu_{A_\varsigma}(x),\nu_{B_\varsigma}(x')\}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_{h,h'}\{[a_\varsigma(\vec p,h)\eta_{A_\varsigma}(\vec p,h)e^{i\varsigma(\vec p\cdot\vec r-Et)}+e^{-2i\theta}a_\varsigma^+(\vec p,h)(-1)^{h-\frac12}\eta_{A_\varsigma}(\vec p,-h)e^{-i\varsigma(\vec p\cdot\vec r-Et)}],$$
$$[a_\varsigma(\vec p',h')\eta_{B_\varsigma}(\vec p',h')e^{i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't')}+e^{-2i\theta}a_\varsigma^+(\vec p',h')(-1)^{h'-\frac12}\eta_{B_\varsigma}(\vec p',-h')e^{-i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't')}]\}d^3\vec p' d^3\vec p$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_{h,h'}(-1)^{h'-\frac12}e^{-2i\theta}[\eta_{A_\varsigma}(\vec p,h)\eta_{B_\varsigma}(\vec p',-h')]\{a_\varsigma(\vec p,h),a_\varsigma^+(\vec p',h')\}[e^{i\varsigma(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{-i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't')}]$$
$$+(-1)^{h-\frac12}e^{-2i\theta}\eta_{A_\varsigma}(\vec p,-h)\eta_{B_\varsigma}(\vec p',h')\{a_\varsigma^+(\vec p,h),a_\varsigma(\vec p',h)\}[e^{-i\varsigma(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't')}]d^3\vec p' d^3\vec p$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_{h,h'}(-1)^{h'-\frac12}e^{-2i\theta}[\eta_{A_\varsigma}(\vec p,h)\eta_{B_\varsigma}(\vec p',-h')]\delta_{hh'}\delta^3(\vec p-\vec p')[e^{i\varsigma(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{-i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't')}]$$
$$+(-1)^{h-\frac12}e^{-2i\theta}\eta_{A_\varsigma}(\vec p,-h)\eta_{B_\varsigma}(\vec p',h')\delta_{hh'}\delta^3(\vec p-\vec p')[e^{-i\varsigma(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't')}]d^3\vec p' d^3\vec p$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}e^{-2i\theta}\sum_{h}(-1)^{h-\frac12}[\eta_{A_\varsigma}(\vec p,h)\eta_{B_\varsigma}(\vec p,-h)]e^{i\varsigma p\cdot(x-x')}+(-1)^{h-\frac12}\eta_{A_\varsigma}(\vec p,-h)\eta_{B_\varsigma}(\vec p,h)e^{-i\varsigma p\cdot(x-x')}d^3\vec p$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{E}e^{-2i\theta}\sum_{h}[h\eta_{A_\varsigma}(\vec p,h)\eta_{B_\varsigma}(\vec p,-h)][e^{i\varsigma p\cdot(x-x')}-e^{-i\varsigma p\cdot(x-x')}]d^3\vec p$$
$$=i\varsigma m\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}e^{-2i\theta}\frac{-i\varsigma}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2E}[e^{i\varsigma p\cdot(x-x')}-e^{-i\varsigma p\cdot(x-x')}]d^3\vec p$$
$$=i\varsigma me^{-2i\theta}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\Delta(x-x')$$
□

证明:

$$\{\nu_{A_\varsigma}(\vec r,t),\nu_{B_\varsigma}(\vec r',t)\}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_{h,h'}\{[a_\varsigma(\vec p,h)\eta_{A_\varsigma}(\vec p,h)e^{i\varsigma(\vec p\cdot\vec r-Et)}+e^{-2i\theta}a_\varsigma^+(\vec p,h)(-1)^{h-\frac12}\eta_{A_\varsigma}(\vec p,-h)e^{-i\varsigma(\vec p\cdot\vec r-Et)}],$$
$$[a_\varsigma(\vec p',h')\eta_{B_\varsigma}(\vec p',h')e^{i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}+e^{-2i\theta}a_\varsigma^+(\vec p',h')(-1)^{h'-\frac12}\eta_{B_\varsigma}(\vec p',-h')e^{-i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}]\}d^3\vec p' d^3\vec p$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_{h,h'}(-1)^{h'-\frac12}e^{-2i\theta}[\eta_{A_\varsigma}(\vec p,h)\eta_{B_\varsigma}(\vec p',-h')]\{a_\varsigma(\vec p,h),a_\varsigma^+(\vec p',h')\}[e^{i\varsigma(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{-i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}]$$
$$+(-1)^{h-\frac12}e^{-2i\theta}\eta_{A_\varsigma}(\vec p,-h)\eta_{B_\varsigma}(\vec p',h')\{a_\varsigma^+(\vec p,h),a_\varsigma(\vec p',h)\}[e^{-i\varsigma(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}]d^3\vec p' d^3\vec p$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}\sum_{h,h'}(-1)^{h'-\frac12}e^{-2i\theta}[\eta_{A_\varsigma}(\vec p,h)\eta_{B_\varsigma}(\vec p',-h')]\delta_{hh'}\delta^3(\vec p-\vec p')[e^{i\varsigma(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{-i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}]$$
$$+(-1)^{h-\frac12}e^{-2i\theta}\eta_{A_\varsigma}(\vec p,-h)\eta_{B_\varsigma}(\vec p',h')\delta_{hh'}\delta^3(\vec p-\vec p')[e^{-i\varsigma(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{i\varsigma(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}]d^3\vec p' d^3\vec p$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m}{2E}e^{-2i\theta}\sum_{h}(-1)^{h-\frac12}[\eta_{A_\varsigma}(\vec p,h)\eta_{B_\varsigma}(\vec p,-h)]e^{i\varsigma\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}+(-1)^{h-\frac12}\eta_{A_\varsigma}(\vec p,-h)\eta_{B_\varsigma}(\vec p,h)e^{-i\varsigma\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}d^3\vec p$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{m}{2E} e^{-2i\theta} e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \sum_h (-1)^{h-\frac{1}{2}} [\eta_{A_\varsigma}(\vec{p},h)\eta_{B_\varsigma}(\vec{p},-h) + \eta_{A_\varsigma}(-\vec{p},-h)\eta_{B_\varsigma}(-\vec{p},h)] d^3\vec{p}$$
$$= 0$$ □

5.4 有质量中微子方程反对易规则小结

推论5.4.1.

$$\begin{cases}\{a_\varsigma(\vec{p},h), a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\} = \delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \\ \{a_\varsigma(\vec{p},h), a_\varsigma(\vec{p}',h')\} = 0 \\ \{a_\varsigma^+(\vec{p},h), a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\{\psi_{s\lambda_\varsigma}(x), \psi_{s\lambda'_\varsigma}(x')\} = i[(m-\gamma_s^a\partial_a)\gamma_s^4]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\Delta(x-x') \\ \{\psi_{s\lambda_\varsigma}(\vec{r},t), \psi_{s\lambda'_\varsigma}(\vec{r}',t)\} = \delta_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \\ \psi_s^*(\vec{r},t) = \psi_s(\vec{r},t)\end{cases}$$

推论5.4.2.

$$\begin{cases}\{a_\varsigma(\vec{p},h), a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\} = \delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \\ \{a_\varsigma(\vec{p},h), a_\varsigma(\vec{p}',h')\} = 0 \\ \{a_\varsigma^+(\vec{p},h), a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\{\psi_{\lambda_\varsigma}(x), \psi^+_{\lambda'_\varsigma}(x')\} = i[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\Delta(x-x') \\ \{\psi_{\lambda_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{r}',t)\} = \delta_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \\ \psi^*(\vec{r},t) = -e^{2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_y\psi(\vec{r},t)\end{cases}$$

推论5.4.3.

$$\begin{cases}\{a_\varsigma(\vec{p},h), a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\} = \delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \\ \{a_\varsigma(\vec{p},h), a_\varsigma(\vec{p}',h')\} = 0 \\ \{a_\varsigma^+(\vec{p},h), a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\{\nu_{A_\varsigma}(x), \nu^+_{A'_\varsigma}(x')\} = -\varsigma(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta(x-x') \\ \{\nu_{A_\varsigma}(x), \nu_{B_\varsigma}(x')\} = i\varsigma m e^{-2i\theta}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\Delta(x-x') \\ \{\nu^+_{A'_\varsigma}(x), \nu^+_{B'_\varsigma}(x')\} = -i\varsigma m e^{2i\theta}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\Delta(x-x')\end{cases}$$

推论5.4.4.

$$\begin{cases}\{a_\varsigma(\vec{p},h), a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\} = \delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \\ \{a_\varsigma(\vec{p},h), a_\varsigma(\vec{p}',h')\} = 0 \\ \{a_\varsigma^+(\vec{p},h), a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t), \nu^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\} = \delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \\ \{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t), \nu_{B_\varsigma}(\vec{r}',t)\} = 0 \\ \{\nu^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t), \nu^+_{B'_\varsigma}(\vec{r}',t)\} = 0\end{cases}$$

5.5 有质量中微子方程的三种等价描述小结

5.5.1 从有质量中微子方程出发构造平面波解

推论5.5.1.

$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\nu(x) - me^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(x) = 0 \\ \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\nu(x)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(x) \\ -\nu(x)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(x)\end{bmatrix}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)\psi(x) = 0, \gamma^a = (\sigma\otimes\sigma_y, \varsigma I\otimes\sigma_z) \\ \psi^*(x) = -e^{2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_y\psi(x) \\ \nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x) + ie^{-2i\theta}\sigma_y\psi_1^*(x)]\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{E+m-\varsigma\vec{p}\cdot\sigma}{\sqrt{2m(E+m)}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_0 e^{i\varsigma p\cdot x} + ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi_0^* e^{-i\varsigma p\cdot x})d^3\vec{p} \\ \psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{E+m+\varsigma\vec{p}\cdot\sigma\otimes\sigma_x}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}\xi_0 e^{i\varsigma p\cdot x} \\ -ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi_0^* e^{-i\varsigma p\cdot x}\end{bmatrix}d^3\vec{p} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\begin{bmatrix}\frac{(E+m)\xi_0 e^{i\varsigma p\cdot x} - \varsigma\vec{p}\cdot\sigma(ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi_0^*)e^{-i\varsigma p\cdot x}}{\sqrt{2m(E+m)}} \\ \frac{-(E+m)(ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi_0^*)e^{-i\varsigma p\cdot x} + \varsigma\vec{p}\cdot\sigma\xi_0 e^{i\varsigma p\cdot x}}{\sqrt{2m(E+m)}}\end{bmatrix}d^3\vec{p}\end{cases}$$

$\xi_0 = a(\vec{p},\frac{1}{2})\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a(\vec{p},-\frac{1}{2})\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 或 $\xi_0 = a(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2}) + a(\vec{p},\frac{\varsigma}{2})\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})$

6 无质量中微子方程的平面波解和量子化初步(后面章节会详细展开)

6.1 无质量中微子方程的平面波解

推论6.1.1. $(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\nu(\vec{r},t) = 0$

推论6.1.2. $\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t) = \int\limits_{\vec{p}\neq 0}\frac{1}{2}(1-\varsigma\frac{\sigma\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|})[\xi(\vec{p})e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + \eta(\vec{p})e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

$= \int\limits_{\vec{p}\neq 0}\lambda(p,-\varsigma)[a_+(\vec{p})e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + a_-^+(\vec{p})e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$, $\frac{\sigma\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\lambda(p,-\varsigma) = -\varsigma\lambda(p,-\varsigma)$

推论6.1.3. $\nabla\nu(\vec{r},t) = \int\limits_{\vec{p}\neq 0} i\varsigma\vec{p}\lambda(p,-\varsigma)[a_+(\vec{p})e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} - a_-^+(\vec{p})e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

推论6.1.4. $\nu^+(\vec{r},t)=\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\lambda^+(p,-\varsigma)[a_+^+(\vec{p})e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+a_-(\vec{p})e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

推论6.1.5. $a_+(\vec{p})=\int\lambda^+(p,-\varsigma)\nu(\vec{r},t)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r},a_-^+(\vec{p})=\int\lambda^+(p,-\varsigma)\nu(\vec{r},t)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}$

推论6.1.6.

$$\begin{cases}L=-i\varsigma\int\nu^+(\vec{r},t)(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\nu(\vec{r},t)d^3\vec{r}=0\\ H=i\int\nu^+(\vec{r},t)\partial_t\nu(\vec{r},t)d^3\vec{r}=i\varsigma\int\nu^+(\vec{r},t)\sigma\cdot\nabla\nu(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\varsigma\int E(\vec{p})[a_+^+(\vec{p})a_+(\vec{p})-a_-(\vec{p})a_-^+(\vec{p})]d^3\vec{p}\\ \vec{P}=-i\int\nu^+(\vec{r},t)\nabla\nu(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\varsigma\int\vec{p}[a_+^+(\vec{p})a_+(\vec{p})-a_-(\vec{p})a_-^+(\vec{p})]d^3\vec{p}\\ Q=\varsigma\int\nu^+(\vec{r},t)\nu(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\varsigma\int[a_+^+(\vec{p})a_+(\vec{p})+a_-(\vec{p})a_-^+(\vec{p})]d^3\vec{p}\end{cases}$$

证明:

$H=i\varsigma\int\nu^+(\vec{r},t)\sigma\cdot\nabla\nu(\vec{r},t)d^3\vec{r}=i\int\nu^+(\vec{r},t)\partial_t\nu(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=i\varsigma\int d^3\vec{r}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$i\varsigma\lambda^+(\vec{p},-\varsigma)[a_+^+(\vec{p})e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+a_-(\vec{p})e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]\sigma\cdot\vec{p}'\lambda(\vec{p}',-\varsigma)[a_+(\vec{p}')e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}-a_-^+(\vec{p}')e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]$

$=\varsigma\int E(\vec{p})[a_+^+(\vec{p})a_+(\vec{p})-a_-(\vec{p})a_-^+(\vec{p})]d^3\vec{p}$ □

证明:

$\vec{P}=-i\int\nu^+(\vec{r},t)\nabla\nu(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=-i\int d^3\vec{r}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$i\varsigma\vec{p}'\lambda^+(\vec{p},-\varsigma)\lambda(\vec{p}',-\varsigma)[a_+^+(\vec{p})e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+a_-(\vec{p})e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}][a_+(\vec{p}')e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}-a_-^+(\vec{p}')e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]$

$=\varsigma\int\vec{p}[a_+^+(\vec{p})a_+(\vec{p})-a_-(\vec{p})a_-^+(\vec{p})]d^3\vec{p}$ □

证明:

$Q=\varsigma\int\nu^+(\vec{r},t)\nu(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\varsigma\int\lambda^+(\vec{p},-\varsigma)\lambda(\vec{p}',-\varsigma)[a_+^+(\vec{p})e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+a_-(\vec{p})e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}][a_+(\vec{p}')e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+a_-^+(\vec{p}')e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^3\vec{r}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$=\varsigma\int[a_+^+(\vec{p})a_+(\vec{p})+a_-(\vec{p})a_-^+(\vec{p})]d^3\vec{p}$ □

6.2 无质量中微子方程的量子化

推论6.2.1. $\begin{cases}\{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu_{A'_\varsigma}^+(\vec{r}',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ \{\nu_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\nu_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\\ \{\nu_{A_\varsigma}^+(\vec{r},t),\nu_{A'_\varsigma}^+(\vec{r}',t)\}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\{a_s(\vec{p}),a_{s'}^+(\vec{p}')\}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ \{a_s(\vec{p}),a_{s'}(\vec{p}')\}=0\\ \{a_s^+(\vec{p}),a_{s'}^+(\vec{p}')\}=0\end{cases}$

推论6.2.2. $\begin{cases}:P_u:\overset{\varsigma\equiv 1}{=}\int p_u[a_+^+(\vec{p})a_+(\vec{p})+a_-^+(\vec{p})a_-(\vec{p})]d^3\vec{p}\\ :Q:\overset{\varsigma\equiv 1}{=}\int[a_+^+(\vec{p})a_+(\vec{p})-a_-^+(\vec{p})a_-(\vec{p})]d^3\vec{p}\end{cases}$

推论6.2.3. $S_a=\varepsilon_{abcd}S_{bc}P_d=\varsigma P_a$

6.3 中微子Weyl方程出发回到Dirac表象

推论6.3.1.

$(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\nu(\vec{r},t)-me^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)=0\Leftrightarrow(\gamma^a\partial_a+m)\begin{bmatrix}\nu(\vec{r},t)\\-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\end{bmatrix}=0,\gamma_a:=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x)$

推论6.3.2. $(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\nu(\vec{r},t)=0\Leftrightarrow\gamma^a\partial_a\begin{bmatrix}\nu(\vec{r},t)\\-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\end{bmatrix}=0,(\gamma_a,\gamma_5):=[(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x),\varsigma I\otimes\sigma_z]$

推论6.3.3. $\sigma_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\sigma_z\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix},\sigma_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\sigma_y\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$

推论6.3.4. $\gamma^a\partial_a\begin{bmatrix}\nu(\vec{r},t)\\0\end{bmatrix}=0,(\gamma_a,\gamma_5):=[(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x),\varsigma I\otimes\sigma_z],$

推论6.3.5. $\begin{cases}\gamma^a\partial_a\psi_M(\vec{r},t)=0,\psi_M(\vec{r},t)=-e^{-2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_y\psi_M^*(\vec{r},t)=\begin{bmatrix}\nu(\vec{r},t)\\-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(\vec{r},t)\end{bmatrix}\\ \gamma^a\partial_a\psi_W(\vec{r},t)=0,\psi_W(\vec{r},t)=\varsigma\gamma_5\psi_W(\vec{r},t)=\begin{bmatrix}\nu(\vec{r},t)\\0\end{bmatrix};(\gamma_a,\gamma_5):=[(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x),\varsigma I\otimes\sigma_z]\end{cases}$

7 s-自旋方程的平面波解和另类量子化方案

7.1 s-自旋方程的平面波解

定理7.1.1. $[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(\vec{r},t)=0,S_{ab}(s,\varsigma)=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)$

推论7.1.1.
$\psi(\vec{r},t)=\int\limits_{\vec{p}\neq0}\lambda(p,-s\varsigma)[\eta(\vec{p},-s\varsigma)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+d^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p},\frac{\sigma(s)\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\lambda(p,-s\varsigma)=-s\varsigma\lambda(p,-s\varsigma)$

7.2 s-自旋方程的能量动量算符

定义7.2.1. $H:=\frac{i\varsigma}{s}\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma(s)\cdot\nabla\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\qquad\vec{P}:=-i\int\psi^+(\vec{r},t)\nabla\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

7.3 s-自旋方程的量子洛伦兹不变性

推论7.3.1. $[\psi_A(\vec{r},t),H]=i\frac{\varsigma}{s}\sigma(s)\cdot\nabla\psi_A(\vec{r},t)$

证明: $[\psi_A(\vec{r},t),H]$
$=[\psi_A(\vec{r},t),i\int\psi_B^+(\vec{r}',t)\frac{\varsigma}{s}\sigma(s)\cdot\nabla'\delta^{BC}\psi_C(\vec{r}',t)d^3\vec{r}']$
$=i\int[\psi_A(\vec{r},t),\psi_B^+(\vec{r}',t)\frac{\varsigma}{s}\sigma(s)\cdot\nabla'\delta^{BC}\psi_C(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}'$
$=i\int\{\psi_A(\vec{r},t),\psi_B^+(\vec{r}',t)\}\frac{\varsigma}{s}\sigma(s)\cdot\nabla'\delta^{BC}\psi_C(\vec{r}',t)d^3\vec{r}'|=i\int[\psi_A(\vec{r},t),\psi_B^+(\vec{r}',t)]\frac{\varsigma}{s}\sigma(s)\cdot\nabla'\delta^{BC}\psi_C(\vec{r}',t)d^3\vec{r}'$
$=i\int\delta_{AB}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\frac{\varsigma}{s}\sigma(s)\cdot\nabla'\delta^{BC}\psi_C(\vec{r}',t)d^3\vec{r}'$
$=i\frac{\varsigma}{s}\sigma(s)\cdot\nabla\psi_A(\vec{r},t)$ □

推论7.3.2. $[\psi_A(\vec{r},t),\vec{P}]=-i\nabla\psi_A(\vec{r},t)$

证明: $[\psi_A(\vec{r},t),\vec{P}]$
$=[\psi_A(\vec{r},t),-i\int\psi_B^+(\vec{r}',t)\nabla\delta^{BC}\psi_C(\vec{r}',t)d^3\vec{r}']$
$=-i\int[\psi_A(\vec{r},t),\psi_B^+(\vec{r}',t)\nabla\delta^{BC}\psi_C(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}'$
$=-i\int\{\psi_A(\vec{r},t),\psi_B^+(\vec{r}',t)\}\nabla\delta^{BC}\psi_C(\vec{r}',t)d^3\vec{r}'|=-i\int[\psi_A(\vec{r},t),\psi_B^+(\vec{r}',t)]\nabla\delta^{BC}\psi_C(\vec{r}',t)d^3\vec{r}'$
$=-i\int\delta_{AB}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\nabla\delta^{BC}\psi_C(\vec{r}',t)d^3\vec{r}'$
$=-i\nabla\psi_A(\vec{r},t)$ □

推论7.3.3. $[\sigma(s),-is\varsigma]^a\partial_a\psi(\vec{r},t)=0\Leftrightarrow-i\partial_a\psi(\vec{r},t)=[\psi(\vec{r},t),P_a];\begin{cases}[\psi_A(\vec{r},t),\psi_B^+(\vec{r}',t)]_\pm=\delta_{AB}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\psi_A(\vec{r},t),\psi_B(\vec{r}',t)]_\pm=0\\ [\psi_A^+(\vec{r},t),\psi_B^+(\vec{r}',t)]_\pm=0\end{cases}$

7.4 s-自旋方程与量子洛伦兹不变性的自洽性

推论7.4.1. $[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(\vec{r},t)=0\overset{s=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow}-i\partial_a\psi(\vec{r},t)=[\psi(\vec{r},t),P_a];\begin{cases}\{\psi_A(\vec{r},t),\psi_B^+(\vec{r}',t)\}=\delta_{AB}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ \{\psi_A(\vec{r},t),\psi_B(\vec{r}',t)\}=0\\ \{\psi_A^+(\vec{r},t),\psi_B^+(\vec{r}',t)\}=0\end{cases}$

只有自旋为$\frac{1}{2}$时，此方案才是自洽的。所以只有中微子才可以按此方案量子化，其它自旋粒子不能按此量子化，所以被排除。

第二十二章　标量场协变量子化方案

自我评述：在本章特别对标量场单独一章进行了详细讨论，对比经典结果印证了新量子化程式的合理性和正确性。特别说明一点，本章结论对高维时空标量场同样成立，只需将4维替换为N+1维即可，不再详述。

1 标量场的经典正则量子化方案 [27,28,42,43]

1.1 实标量场的经典描述

1.1.1 实标量场的拉氏密度和哈密顿密度

性质1.1.1. 拉氏密度：$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\partial_a\phi\partial^a\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2$

性质1.1.2. 能量动量张量密度：$T^{ab}=i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_b\phi)}\partial^a\phi-ig^{ab}\mathscr{L},T^{a\pi}=(\mathscr{P},i\mathscr{H})^a,\partial_bT^{ab}=0$

性质1.1.3. 哈密顿密度：$\mathscr{H}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi}-\mathscr{L}=\frac{1}{2}[\dot{\phi}^2(\vec{r},t)+\nabla\phi(\vec{r},t)\cdot\nabla\phi(\vec{r},t)+m^2\phi^2(\vec{r},t)]$

性质1.1.4. 动量密度：$\mathscr{P}=-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\nabla\phi=-\dot{\phi}\nabla\phi$

1.1.2 实标量场的拉氏密度和运动方程

性质1.1.5. 拉氏密度：$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\partial_a\phi(\vec{r},t)\partial^a\phi(\vec{r},t)-\frac{1}{2}m^2\phi^2(\vec{r},t),\phi(\vec{r},t)=\phi^*(\vec{r},t)$

性质1.1.6. 运动方程：$(\partial_a\partial^a-m^2)\phi(\vec{r},t)=0,\phi(\vec{r},t)=\phi^*(\vec{r},t)$

1.1.3 实标量场的哈密顿描述

性质1.1.7. $\mathscr{H}=\frac{1}{2}[\pi^2(\vec{r},t)+\partial_i\phi(\vec{r},t)\partial^i\phi(\vec{r},t)+m^2\phi^2(\vec{r},t)],\pi(\vec{r},t)=\dot{\phi}(\vec{r},t),\phi(\vec{r},t)=\phi^*(\vec{r},t)$

性质1.1.8. $\mathscr{L}=\pi(\vec{r},t)\dot{\phi}(\vec{r},t)-\frac{1}{2}[\pi^2(\vec{r},t)+\partial_i\phi(\vec{r},t)\partial^i\phi(\vec{r},t)+m^2\phi^2(\vec{r},t)],\pi(\vec{r},t)=\dot{\phi}(\vec{r},t),\phi(\vec{r},t)=\phi^*(\vec{r},t)$

性质1.1.9. 对易关系：$\begin{cases}\{\phi(\vec{r},t),\pi(\vec{r},t)\}_p\\ \dot{\pi}(\vec{r},t)=\nabla^2\phi(\vec{r},t)-m^2\phi(\vec{r},t)=\{\pi(\vec{r},t),H\}_p\end{cases}$

性质1.1.10. $\phi(\vec{k},E)(E^2-\vec{k}^2-m^2)=0\Leftrightarrow\phi(\vec{k},E)=a(\vec{k},E)\delta(E^2-\vec{k}^2-m^2)+\phi_0(\vec{k},E)\delta_{E^2,\vec{k}^2+m^2}$

性质1.1.11. 运动方程：$\begin{cases}\dot{\phi}(\vec{r},t)=\pi(\vec{r},t)=\{\phi(\vec{r},t),H\}_p\\ \dot{\pi}(\vec{r},t)=\nabla^2\phi(\vec{r},t)-m^2\phi(\vec{r},t)=\{\pi(\vec{r},t),H\}_p\end{cases}$

1.1.4 实标量场方程的平面波解 [42]

实标量场方程: $(\partial_a\partial^a-m^2)\phi(\vec{r},t)=0,\phi(\vec{r},t)=\phi^*(\vec{r},t)$ (22.1)

定理1.1.1. $(\partial_a\partial^a-m^2)\phi(\vec{r},t)=0,\phi(\vec{r},t)=\phi^*(\vec{r},t)$

$$\Leftrightarrow\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega_k}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_kt)}+a^*(\vec{k},\omega_k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_kt)}]d^3\vec{k}$$

证明: $(\partial_a\partial^a-m^2)\phi(\vec{r},t)=0,\phi(\vec{r},t)=\phi^*(\vec{r},t)$

$$\Leftrightarrow\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega_k}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_kt)}+a(-\vec{k},-\omega_k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_kt)}]d^3\vec{k},\phi(\vec{r},t)=\phi^*(\vec{r},t)$$

$$\Leftrightarrow\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega_k}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_kt)}+a^*(\vec{k},\omega_k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_kt)}]d^3\vec{k},a(-\vec{k},-\omega_k)=a^*(\vec{k},\omega_k)$$ □

推论1.1.1. $\phi_+(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega_k}a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_kt)}d^3\vec{k},\phi_-(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega_k}a^*(\vec{k},\omega_k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_kt)}d^3\vec{k}$

1.2 实标量场的量子描述

1.2.1 实标量场的正则对易关系

定理1.2.1. $\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega_k}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}+a^+(\vec{k},\omega_k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}]d^3\vec{k}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a(\vec{k},\omega_k)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{p=-\infty}^{+\infty}[i\dot{\phi}(\vec{r},t)+\omega_k\phi(\vec{r},t)]e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}d^3\vec{r}\\a^+(\vec{k},\omega_k)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{p=-\infty}^{+\infty}[-i\dot{\phi}(\vec{r},t)+\omega_k\phi(\vec{r},t)]e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}d^3\vec{r}\end{cases}$$

证明： $\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega_k}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}+a^+(\vec{k},\omega_k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}]d^3\vec{k}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega_k}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}+a^+(\vec{k},\omega_k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}]d^3\vec{k}\\\dot{\phi}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{-i}{2}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}-a^+(\vec{k},\omega_k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}]d^3\vec{k}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{p=-\infty}^{+\infty}\phi(\vec{r},t)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}d^3\vec{r}=\frac{1}{2\omega_k}[a(\vec{k},\omega_k)+a^+(-\vec{k},\omega_k)e^{2i\omega_k t}]\\\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{p=-\infty}^{+\infty}\dot{\phi}(\vec{r},t)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}d^3\vec{r}=\frac{-i}{2}[a(\vec{k},\omega_k)-a^+(-\vec{k},\omega_k)e^{2i\omega_k t}]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a(\vec{k},\omega_k)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{p=-\infty}^{+\infty}[i\dot{\phi}(\vec{r},t)+\omega_k\phi(\vec{r},t)]e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}d^3\vec{r}\\a^+(\vec{k},\omega_k)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{p=-\infty}^{+\infty}[-i\dot{\phi}(\vec{r},t)+\omega_k\phi(\vec{r},t)]e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}d^3\vec{r}\end{cases}$$ □

从以上定理可以证明得到以下实标量粒子的正则对易关系

推论1.2.1. $\begin{cases}[\phi(\vec{r}',t),\phi(\vec{r},t)]=0\\[\dot{\phi}(\vec{r}',t),\dot{\phi}(\vec{r},t)]=0\\[\phi(\vec{r}',t),\dot{\phi}(\vec{r},t)]=i\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[a(\vec{k}',\omega_k'),a(\vec{k},\omega_k)]=0\\[a^+(\vec{k}',\omega_k'),a^+(\vec{k},\omega_k)]=0\\[a(\vec{k}',\omega_k'),a^+(\vec{k},\omega_k)]=2\omega_k\delta^3(\vec{k}'-\vec{k})\end{cases}$

定义1.2.1. $a(k)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}a(\vec{k},\omega_k),a^+(k)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}a^+(\vec{k},\omega_k)$

推论1.2.2. $[a(k'),a(k)]=0,[a^+(k'),a^+(k)]=0,[a(k'),a^+(k)]=\delta^3(\vec{k}'-\vec{k})$

1.2.2 实标量场的能量算符和动量算符

推论1.2.3. $H=\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\omega_k\hat{N}(k)d^3\vec{k}+E(0),H^+=H$

证明： $H=\int\limits_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}[\dot{\phi}^2(\vec{r},t)+\nabla\phi(\vec{r},t)\cdot\nabla\phi(\vec{r},t)+m^2\phi^2(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}[a(\vec{k},\omega_k)a^+(\vec{k},\omega_k)+a^+(\vec{k},\omega_k)a(\vec{k},\omega_k)]d^3\vec{k}$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\omega_k[a(k)a^+(k)+a^+(k)a(k)]d^3\vec{k}=\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\omega_k[a^+(k)a(k)+\frac{1}{2}\delta^3(0)]d^3\vec{k}$$

$$=\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\omega_k\hat{N}(k)d^3\vec{k}+E(0)$$ □

推论1.2.4. $P=\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\vec{k}\hat{N}(k)d^3\vec{k},P^+=P$

证明: $P = \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} -\dot{\phi}(\vec{r},t)\nabla\phi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$= \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\omega_k}\vec{k}[a(\vec{k},\omega_k)a^+(\vec{k},\omega_k) + a^+(\vec{k},\omega_k)a(\vec{k},\omega_k)]d^3\vec{k}$

$= \frac{1}{2}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \vec{k}[a(k)a^+(k) + a^+(k)a(k)]d^3\vec{k} = \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \vec{k}[a^+(k)a(k) + \frac{1}{2}\delta^3(0)]d^3\vec{k}$

$= \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \vec{k}a^+(k)a(k)d^3\vec{k} = \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \vec{k}\hat{N}(k)d^3\vec{k}$ □

推论1.2.5. $L(t) = -\frac{1}{4}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} [a(\vec{k},\omega_k)a(-\vec{k},\omega_k)e^{-2i\omega_k t} + a^+(\vec{k},\omega_k)a^+(-\vec{k},\omega_k)e^{2i\omega_k t}]d^3\vec{k}$

1.2.3 实标量粒子的量子理论小结

推论1.2.6.
$$\begin{cases} \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\omega_k}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + a^+(\vec{k},\omega_k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}]d^3\vec{k} \\ \dot{\phi}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{2}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - a^+(\vec{k},\omega_k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}]d^3\vec{k} \\ \nabla\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2\omega_k}\vec{k}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - a^+(\vec{k},\omega_k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}]d^3\vec{k} \end{cases}$$

推论1.2.7. $H = \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \omega_k\hat{N}(k)d^3\vec{k} + E(0), \vec{P} = \int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \vec{k}\hat{N}(k)d^3\vec{k}, P^a = (\vec{P}, iH)^a, \dot{P}^a = 0$

推论1.2.8. $[P_a, \phi(\vec{r},t)] = i\partial_a\phi(\vec{r},t) \Leftrightarrow \partial_a\phi(\vec{r},t) = i[\phi(\vec{r},t), P_a]$

推论1.2.9. $\dot{\phi}(\vec{r},t) = -i[\phi(\vec{r},t), H], \dddot{\phi}(\vec{r},t) = -i[\dot{\phi}(\vec{r},t), H]$

推论1.2.10. $\dot{\phi}(\vec{r},t) = -i[\phi(\vec{r},t), H] \Leftrightarrow \omega_k a(\vec{k},\omega_k) = [a(\vec{k},\omega_k), H] \Leftrightarrow \omega_k a^+(\vec{k},\omega_k) = -[a^+(\vec{k},\omega_k), H]$

证明: $\dot{\phi}(\vec{r},t) = -i[\phi(\vec{r},t), H]$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{2}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - a^+(\vec{k},\omega_k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}]d^3\vec{k}$

$= \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\omega_k}\{[a(\vec{k},\omega_k), H]e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + [a^+(\vec{k},\omega_k), H]e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}\}d^3\vec{k}$

$\Leftrightarrow \omega_k a(\vec{k},\omega_k) = [a(\vec{k},\omega_k), H] \Leftrightarrow \omega_k a^+(\vec{k},\omega_k) = -[a^+(\vec{k},\omega_k), H]$ □

推论1.2.11. $\dot{\phi}(\vec{r},t) = -i[\phi(\vec{r},t), H] \Leftrightarrow a(\vec{k},\omega_k) = [a(\vec{k},\omega_k), H] \Leftrightarrow \omega_k a^+(\vec{k},\omega_k) = -[a^+(\vec{k},\omega_k), H]$

定义1.2.2. $a(k,t) \equiv a(k)e^{-i\omega_k t}$

推论1.2.12. $\dot{\phi}(\vec{r},t) = -i[\phi(\vec{r},t), H] \Leftrightarrow \dot{a}(k,t) = -i[a(k,t), H], \dot{a}^+(k,t) = -i[a^+(k,t), H]$

推论1.2.13.
$$\begin{cases} \dot{\phi}(\vec{r},t) = \pi(\vec{r},t) = \{\phi(\vec{r},t), H\}_{\hat{p}} = -i[\phi(\vec{r},t), H] \\ \dot{\pi}(\vec{r},t) = \nabla^2\phi(\vec{r},t) - m^2\phi(\vec{r},t) = \{\pi(\vec{r},t), H\}_{\hat{p}} = -i[\dot{\phi}(\vec{r},t), H] \end{cases}$$

对于玻色子场，经典理论的运动方程和量子理论的算符方程形式上完全一样，但物理含义不同，可以将前者看作后者的经典极限或量子平均。经典理论的运动方程可以写成泊松括号形式，但无法写成对易子形式(实际上为零，与运动方程不符)；量子理论的算符方程既可以写成泊松括号形式，也可以写成对易子形式，即算符形式的泊松括号就等于对易子。

1.3 复标量粒子的量子理论

1.3.1 复标量场方程的平面波解 [42]

复标量场方程：$(\partial_a\partial^a - m^2)\phi(\vec{r},t) = 0 \Leftrightarrow (\nabla^2 - \partial_t^2 - m^2)\phi(\vec{r},t) = 0$ (22.2)

定理1.3.1. $(\partial_a\partial^a - m^2)\phi(\vec{r},t) = 0 \Leftrightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega_k}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + a(-\vec{k},-\omega_k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}]d^3\vec{k}$

证明： $(\partial_a\partial^a - m^2)\phi(\vec{r},t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{E=-\infty}^{+\infty}\phi(\vec{k},E)(-\vec{k}^2 + E^2 - m^2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{k}dE = 0$

$\Leftrightarrow \phi(\vec{k},E)(E^2 - \vec{k}^2 - m^2) = 0 \Leftrightarrow \phi(\vec{k},E) = a(\vec{k},E)\delta(E^2 - \vec{k}^2 - m^2) + \phi_0(\vec{k},E)\delta_{E^2,\vec{k}^2+m^2}$

$\Rightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{E=-\infty}^{+\infty}[a(\vec{k},E)\delta(E^2 - \vec{k}^2 - m^2) + \phi_0(\vec{k},E)\delta_{E^2,\vec{k}^2+m^2}]e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{k}dE$

$\Leftrightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{E=-\infty}^{+\infty}a(\vec{k},E)\delta(E^2 - \vec{k}^2 - m^2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{k}dE$, 明显洛伦兹协变

$\Leftrightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{E=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega_k}a(\vec{k},E)[\delta(E-\omega_k) + \delta(E+\omega_k)]e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{k}dE$

$\Leftrightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{E=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega_k}a(\vec{k},E)[\delta(E-\omega_k) + \delta(E+\omega_k)]e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{k}dE$

$\Leftrightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega_k}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + a(\vec{k},-\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega_k t)}]d^3\vec{k}$

$\Leftrightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega_k}[a(\vec{k},\omega_k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + a(-\vec{k},-\omega_k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}]d^3\vec{k}$ □

这里用了一种与一般书中不同的方法，采用了四维而非三维的傅里叶展开，清晰地展现出粒子离壳和在壳的物理概念，洛伦兹协变性也明显表现于其中，并且包含了狄拉克函数解的代数新解法。在证明的过程也看到了正能解和负能解的分解，并且负能解可以按两种含义进行理解，一是将负能解理解为一种负质量粒子，二是将负能解还是理解为正质量粒子，不过要理解为反射波，正能解理解为入射波。

推论1.3.1. $a'(e^{\varepsilon}[\vec{k},E])\delta(E^2 - \vec{k}^2 - m^2) = e^{\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}}a(\vec{k},E)\delta(E^2 - \vec{k}^2 - m^2)$
$\Rightarrow a'(e^{\varepsilon}[\vec{k},\omega_k]) = e^{\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}}a(\vec{k},\omega_k), a'(e^{\varepsilon}[\vec{k},-\omega_k]) = e^{\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}}a(\vec{k},-\omega_k)$

推论1.3.2. $a(\vec{k},E)\delta(E^2 - \vec{k}^2 - m^2) = \frac{1}{2\omega_k}a(\vec{k},E)[\delta(E-\omega_k) + \delta(E+\omega_k)], |\vec{k}| << m$
$\approx \frac{1}{2(m+\frac{\vec{k}^2}{2m})}[a(\vec{k},m+\frac{\vec{k}^2}{2m})\delta(E-m-\frac{\vec{k}^2}{2m}) + a(\vec{k},-m-\frac{\vec{k}^2}{2m})\delta(E+m+\frac{\vec{k}^2}{2m})]$

推论1.3.3. $\phi(\vec{r},t) \approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{k}=-K}^{+K}\frac{1}{2(m+\frac{\vec{k}^2}{2m})}[a(\vec{k},m+\frac{\vec{k}^2}{2m})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}^2}{2m}t)}e^{-imt} + a(-\vec{k},-m-\frac{\vec{k}^2}{2m})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\frac{\vec{k}^2}{2m}t)}e^{imt}]d^3\vec{k}$

从上可知，在非相对论极限下，复标量场平面波解分成两个非相对论性的正反粒子，可以同时存在。这可以继续分析下去，是否可以证明正、负能解独自守恒？

1.3.2 复标量场坐标空间基本对易关系

复标量场可以看作两个实标量场的相加，不同的是这时有内部**SO(2)**对称性，所以可以带守恒荷。

定义1.3.1. $\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(\vec{r},t) + i\phi_2(\vec{r},t)], \phi^+(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(\vec{r},t) - i\phi_2(\vec{r},t)]$

推论1.3.4. $\begin{cases}[\phi_1(\vec{r}',t),\phi_1(\vec{r},t)] = 0\\ [\dot\phi_1(\vec{r}',t),\dot\phi_1(\vec{r},t)] = 0\\ [\phi_1(\vec{r}',t),\dot\phi_1(\vec{r},t)] = i\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})\end{cases}, \begin{cases}[\phi_2(\vec{r}',t),\phi_2(\vec{r},t)] = 0\\ [\dot\phi_2(\vec{r}',t),\dot\phi_2(\vec{r},t)] = 0\\ [\phi_2(\vec{r}',t),\dot\phi_2(\vec{r},t)] = i\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})\end{cases}, \begin{cases}[\phi_1(\vec{r}',t),\phi_2(\vec{r},t)] = 0\\ [\dot\phi_1(\vec{r}',t),\dot\phi_2(\vec{r},t)] = 0\\ [\phi_1(\vec{r}',t),\dot\phi_2(\vec{r},t)] = 0\end{cases}$

推论1.3.5. $\begin{cases}[\phi(\vec{r}',t),\phi(\vec{r},t)]=0\\ [\dot\phi(\vec{r}',t),\dot\phi(\vec{r},t)]=0\\ [\phi(\vec{r}',t),\dot\phi(\vec{r},t)]=0\end{cases}, \begin{cases}[\phi^+(\vec{r}',t),\phi^+(\vec{r},t)]=0\\ [\dot\phi^+(\vec{r}',t),\dot\phi^+(\vec{r},t)]=0\\ [\phi^+(\vec{r}',t),\dot\phi^+(\vec{r},t)]=0\end{cases}, \begin{cases}[\phi(\vec{r}',t),\phi^+(\vec{r},t)]=0\\ [\dot\phi(\vec{r}',t),\dot\phi^+(\vec{r},t)]=0\\ [\phi(\vec{r}',t),\dot\phi^+(\vec{r},t)]=i\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})\end{cases}$

1.3.3 复标量场动量空间基本对易关系

定义1.3.2. $a(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}[a_1(k)+ia_2(k)], b(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}[a_1(k)-ia_2(k)],$

推论1.3.6. $\begin{cases}[a_1(k'),a_1(k)]=0,[a_1^+(k'),a_1^+(k)]=0,[a_1(k'),a_1^+(k)]=\delta^3(\vec{k}'-\vec{k})\\ [a_2(k'),a_2(k)]=0,[a_2^+(k'),a_2^+(k)]=0,[a_2(k'),a_2^+(k)]=\delta^3(\vec{k}'-\vec{k})\\ [a_1(k'),a_2(k)]=0,[a_1^+(k'),a_2^+(k)]=0,[a_1(k'),a_2^+(k)]=0\end{cases}$

推论1.3.7. $\begin{cases}[a(k'),a(k)]=0,[a^+(k'),a^+(k)]=0,[a(k'),a^+(k)]=\delta^3(\vec{k}'-\vec{k})\\ [b(k'),b(k)]=0,[b^+(k'),b^+(k)]=0,[b(k'),b^+(k)]=\delta^3(\vec{k}'-\vec{k})\\ [a(k'),b(k)]=0,[a^+(k'),b^+(k)]=0,[a(k'),b^+(k)]=0\end{cases}$

1.3.4 复标量场守恒荷

推论1.3.8. $Q=\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}[a^+(k)a(k)-b^+(k)b(k)]d^3\vec{k}=\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}[\hat{N}_+(k)-\hat{N}_-(k)]d^3\vec{k}$

证明: $Q=\int\limits_{\vec{r}=-\infty}^{+\infty}[\phi_1(\vec{r},t)\dot\phi_2(\vec{r},t)-\phi_2(\vec{r},t)\dot\phi_1(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$\Leftrightarrow Q=\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}\frac{i}{2\omega_k}[a_1(\vec{k},\omega_k)a_2^+(\vec{k},\omega_k)-a_2(\vec{k},\omega_k)a_1^+(\vec{k},\omega_k)]d^3\vec{k}$

$\Leftrightarrow Q=\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}i[a_1(k)a_2^+(k)-a_2(k)a_1^+(k)]d^3\vec{k}$

$\Leftrightarrow Q=\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}[a^+(k)a(k)-b^+(k)b(k)]d^3\vec{k}=\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}[\hat{N}_+(k)-\hat{N}_-(k)]d^3\vec{k}$ □

推论1.3.9. $[Q,\phi(\vec{r},t)]=-\phi(\vec{r},t),[Q,\phi^+(\vec{r},t)]=\phi^+(\vec{r},t),$

1.3.5 复标量场能量动量算符

推论1.3.10. $P^a=\int\limits_{\vec{k}=-\infty}^{+\infty}k^a[\hat{N}_+(k)+\hat{N}_-(k)]d^3\vec{k},[P^a,\phi(\vec{r},t)]=i\partial^a\phi(\vec{r},t)$

推论1.3.11. $[Q,P^a]=0,[\hat{N},P^a]=0,[\hat{N},Q]=0$

2 标量场的协变量子化方案 [27,28,42,43]

2.1 标量场的守恒量

推论2.1.1.

$H=\int\frac{1}{2}[\dot\phi^+(\vec{r},t)\dot\phi(\vec{r},t)+\partial_i\phi^+(\vec{r},t)\partial^i\phi(\vec{r},t)+m^2\phi^+(\vec{r},t)\phi(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$=\int\frac{1}{2}[\dot\phi(\vec{r},t)\dot\phi(\vec{r},t)+\partial_i\phi(\vec{r},t)\partial^i\phi(\vec{r},t)+m^2\phi(\vec{r},t)\phi(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$=\int\frac{1}{2}[\dot\phi(\vec{r},t)\dot\phi(\vec{r},t)-\phi(\vec{r},t)\partial_i\partial^i\phi(\vec{r},t)+m^2\phi(\vec{r},t)\phi(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$=\int\frac{1}{2}[\dot\phi(\vec{r},t)\dot\phi(\vec{r},t)-\phi(\vec{r},t)\partial_t^2\phi(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$=\int\{\dot\phi(\vec{r},t)\dot\phi(\vec{r},t)-\partial_t[\dot\phi(\vec{r},t)\phi(\vec{r},t)]\}d^3\vec{r}$

推论2.1.2. $P=-\int\dot\phi(\vec{r},t)\nabla\phi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

推论2.1.3. $M_{ij}=-\int\dot\phi(\vec{r},t)(x_i\partial_j-x_j\partial_i)\phi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

2.2 标量场方程及其平面波解

定义2.2.1. $(\partial_a\partial^a - m^2)\phi_\sigma(\vec{r},t) = 0, \phi_\sigma(\vec{r},t) = \phi_\sigma^+(\vec{r},t)$

推论2.2.1. $\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2E}}[a_\sigma(\vec{p},0)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + a_\sigma^+(\vec{p},0)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2E}a_\sigma(\vec{p},0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{p=-\infty}^{+\infty} [E\phi_\sigma(\vec{r},t) + i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r} \\ \sqrt{2E}a_\sigma^+(\vec{p},0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{p=-\infty}^{+\infty} [E\phi_\sigma(\vec{r},t) - i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r} \end{cases}$$

推论2.2.2. $\partial_t\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty} \frac{-iE}{\sqrt{2E}}[a_\sigma(\vec{p},0)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} - a_\sigma^+(\vec{p},0)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

推论2.2.3. $\partial_i\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty} \frac{ip_i}{\sqrt{2E}}[a_\sigma(\vec{p},0)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} - a_\sigma^+(\vec{p},0)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

2.3 标量场数学上一般的协变对易规则

定理2.3.1.

$$\begin{cases} [a_\sigma(\vec{p},0), a_{\sigma'}^+(\vec{p}',0)]_\pm = \delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \\ [a_\sigma(\vec{p},0), a_{\sigma'}(\vec{p}',0)]_\pm = 0, [a_\sigma^+(\vec{p},0), a_{\sigma'}^+(\vec{p}',0)]_\pm = 0 \end{cases} \Rightarrow [\phi_\sigma(x), \phi_{\sigma'}(x')]_\pm = i\delta_{\sigma\sigma'}\Delta(x-x')$$

证明: $[\phi_\sigma^{(+)}(x), \phi_{\sigma'}^{+(+)}(x')]_\pm = [\phi_\sigma^{(+)}(x), \phi_{\sigma'}^{(-)}(x')]_\pm$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int[\frac{1}{\sqrt{2E}}a_\sigma(\vec{p},0)e^{ipx}, \frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}a_{\sigma'}^+(\vec{p}',0)e^{-ip'x'}]_\pm d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}[a_\sigma(\vec{p},0), a_{\sigma'}^+(\vec{p}',0)]_\pm e^{ipx}e^{-ip'x'}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}\delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{ipx}e^{-ip'x'}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= i\delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2E}e^{ip(x-x')}d^3\vec{p}$
$= i\delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\Delta^{(+)}(x-x')$ □

证明: $[\phi_\sigma^{(-)}(x), \phi_{\sigma'}^{+(-)}(x')]_\pm = [\phi_\sigma^{(-)}(x), \phi_{\sigma'}^{(+)}(x')]_\pm$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int[\frac{1}{\sqrt{2E}}a_\sigma^+(\vec{p},0)e^{-ipx}, \frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}a_{\sigma'}(\vec{p}',0)e^{ip'x'}]_\pm d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}[a_\sigma^+(\vec{p},0), a_{\sigma'}(\vec{p}',0)]_\pm e^{-ipx}e^{ip'x'}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}\delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-ipx}e^{ip'x'}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= -\pm i\delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2E}e^{-ip(x-x')}d^3\vec{p}$
$= -\pm i\delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\Delta^{(-)}(x-x')$ □

证明:
$[\phi_\sigma(x), \phi_{\sigma'}(x')]_\pm = \frac{1}{(2\pi)^3}\int[\frac{1}{\sqrt{2E}}[a_\sigma(\vec{p},0)e^{ipx} + a_\sigma^+(\vec{p},0)e^{-ipx}, \frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}[a_{\sigma'}(\vec{p}',0)e^{ip'x'} + a_{\sigma'}^+(\vec{p}',0)e^{-ip'x'}]_\pm d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}\{[a_\sigma(\vec{p},0), a_{\sigma'}^+(\vec{p}',0)]_\pm e^{ipx}e^{-ip'x'} + [a_\sigma^+(\vec{p},0), a_{\sigma'}(\vec{p}',0)]_\pm e^{-ipx}e^{ip'x'}\}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}[\delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{ipx}e^{-ip'x'} \pm \delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-ipx}e^{ip'x'}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= i\delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2E}[e^{ip(x-x')} \pm e^{-ip(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= i\delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}[\Delta^{(+)}(x-x') - \pm\Delta^{(-)}(x-x')]$
$= i\delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}[(1\pm1)\Delta^{(+)}(x-x') - \pm\Delta(x-x')]$ □

从上式可知，只有$1\pm1=0$时，才满足微观因果性，同时只有$\delta_\sigma \geq 0$时，才满足几率非负性。所以数学上多种协变对易或反对易方案中，物理上合理的只有一种：即$\delta_\sigma = 1$(如果要求各标量场间平等，不是1就可以统一归一化)，且满足对易关系。其实还有两种，即$\delta_\sigma = 0$，且满足对易或反对易关系，就是经典情形。

2.4 标量场物理的协变对易规则

定理2.4.1. $\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},0),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',0)]=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},0),a_{\sigma'}(\vec{p}',0)]=0,[a^+_\sigma(\vec{p},0),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',0)]=0\end{cases}\Rightarrow[\phi_\sigma(x),\phi_{\sigma'}(x')]=i\delta_{\sigma\sigma'}\Delta(x-x')$

证明:

$$[\phi_\sigma(x),\phi_{\sigma'}(x')]=\frac{1}{(2\pi)^3}\int[\frac{1}{\sqrt{2E}}[a_\sigma(\vec{p},0)e^{ipx}+a^+_\sigma(\vec{p},0)e^{-ipx},\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}[a_{\sigma'}(\vec{p}',0)e^{ip'x'}+a^+_{\sigma'}(\vec{p}',0)e^{-ip'x'}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}\{[a_\sigma(\vec{p},0),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',0)]e^{ipx}e^{-ip'x'}+[a^+_\sigma(\vec{p},0),a_{\sigma'}(\vec{p}',0)]e^{-ipx}e^{ip'x'}\}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}\{\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{ipx}e^{-ip'x'}-\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-ipx}e^{ip'x'}\}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$$
$$=i\delta_{\sigma\sigma'}\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2E}[e^{ip(x-x')}-e^{-ip(x-x')}]d^3\vec{p}$$
$$=i\delta_{\sigma\sigma'}\Delta(x-x')$$
□

2.5 标量场的等时对易规则

推论2.5.1. $[\phi_\sigma(x),\phi_{\sigma'}(x')]=i\delta_{\sigma\sigma'}\Delta(x-x')\Rightarrow\begin{cases}[\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]=i\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\phi_\sigma(\vec{r},t),\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]=0,[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]=0\end{cases}$

推论2.5.2.
$\begin{cases}[\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]=i\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\phi_\sigma(\vec{r},t),\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]=0,[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},0),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',0)]=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},0),a_{\sigma'}(\vec{p}',0)]=0,[a^+_\sigma(\vec{p},0),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',0)]=0\end{cases}$

证明: $[a_\sigma(\vec{p},0),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',0)]$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}\{[E\phi_\sigma(\vec{r},t),-i\dot{\phi}(\vec{r}',t)]+[i\dot{\phi}(\vec{r},t),E'_{p'}\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\}e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E'_{p'}t)}e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E'_{p'}t)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}\{E\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')+E'_{p'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\}e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E'_{p'}t)}e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E'_{p'}t)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\delta_{\sigma\sigma'}\frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}(E+E'_{p'})e^{-i(\vec{p}-\vec{p}'\cdot\vec{r}}e^{iE'_{p'}t}e^{-iE'_{p'}t}d^3\vec{r}$$
$$=\delta_{\sigma\sigma'}\frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}(E+E'_{p'})\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{iE'_{p'}t}e^{-iE'_{p'}t}$$
$$=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$
□

证明: $[a_\sigma(\vec{p},0),a_{\sigma'}(\vec{p}',0)]$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}\{[E\phi_\sigma(\vec{r},t),-i\dot{\phi}(\vec{r}',t)]+[-i\dot{\phi}(\vec{r},t),E'_{p'}\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\}e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E'_{p'}t)}e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E'_{p'}t)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}\{E\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')-E'_{p'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\}e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E'_{p'}t)}e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E'_{p'}t)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\delta_{\sigma\sigma'}\frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}(E-E'_{p'})e^{-i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{r}}e^{iE'_{p'}t}e^{-iE'_{p'}t}d^3\vec{r}$$
$$=\delta_{\sigma\sigma'}\frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{1}{\sqrt{2E'_{p'}}}(E-E'_{p'})\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')e^{iE'_{p'}t}e^{iE'_{p'}t}$$
$$=0$$
□

2.6 标量场对易规则小结

以上几个小节的证明正好形成一个逻辑闭环，故有如下性质：

推论2.6.1. $\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},0),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',0)]=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},0),a_{\sigma'}(\vec{p}',0)]=0,[a^+_\sigma(\vec{p},0),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',0)]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p}),a^+_{\sigma'}(\vec{p}')]=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p}),a_{\sigma'}(\vec{p}')]=0,[a^+_\sigma(\vec{p}),a^+_{\sigma'}(\vec{p}')]=0\end{cases}$

$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$

推论2.6.2. $\begin{cases}[\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]=i\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\phi_\sigma(\vec{r},t),\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]=0,[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]=0\end{cases}\Leftrightarrow[\phi_\sigma(x),\phi_{\sigma'}(x')]=i\delta_{\sigma\sigma'}\Delta(x-x')$

2.7 单复标量场方程及其平面波解

定义2.7.1. $(\partial_a\partial^a - m^2)\phi(\vec{r},t) = 0$

推论2.7.1. $\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2E}}[b_1(\vec{p},0)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b_2^+(\vec{p},0)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2E}b_1(\vec{p},0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{p=-\infty}^{+\infty}[E\phi(\vec{r},t) + i\dot{\phi}(\vec{r},t)]e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r} \\ \sqrt{2E}b_2^+(\vec{p},0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{p=-\infty}^{+\infty}[E\phi(\vec{r},t) - i\dot{\phi}(\vec{r},t)]e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r} \end{cases}$$

2.8 单个复标量场对易规则

推论2.8.1.
$$\begin{cases} [b_\sigma(\vec{p},0), b_\sigma^+(\vec{p}',0)] = \delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \\ [b_\sigma(\vec{p},0), b_\sigma(\vec{p}',0)] = 0, [b_\sigma^+(\vec{p},0), b_\sigma^+(\vec{p}',0)] = 0 \\ b_1(\vec{p},0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1(\vec{p},0) + ia_2(\vec{p},0)] \\ b_2(\vec{p},0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1(\vec{p},0) - ia_2(\vec{p},0)] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [b_\sigma(\vec{p}), b_{\sigma'}^+(\vec{p}')] = \delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \\ [b_\sigma(\vec{p}), b_\sigma(\vec{p}')] = 0, [b_\sigma^+(\vec{p}), b_\sigma^+(\vec{p}')] = 0 \\ b_1(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1(\vec{p}) + ia_2(\vec{p})] \\ b_2(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1(\vec{p}) - ia_2(\vec{p})] \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

推论2.8.2.
$$\begin{cases} [a_\sigma(\vec{p},0), a_{\sigma'}^+(\vec{p}',0)] = \delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \\ [a_\sigma(\vec{p},0), a_{\sigma'}(\vec{p}',0)] = 0 \\ [a_\sigma^+(\vec{p},0), a_{\sigma'}^+(\vec{p}',0)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [a_\sigma(\vec{p}), a_{\sigma'}^+(\vec{p}')] = \delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \\ [a_\sigma(\vec{p}), a_{\sigma'}(\vec{p}')] = 0 \\ [a_\sigma^+(\vec{p}), a_{\sigma'}^+(\vec{p}')] = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

推论2.8.3.
$$\begin{cases} [\phi_\sigma(\vec{r},t), \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)] = i\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \\ [\phi_\sigma(\vec{r},t), \phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)] = 0 \\ [\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\phi_\sigma(x), \phi_{\sigma'}(x')] = i\delta_{\sigma\sigma'}\Delta(x-x') \\ \phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi(x) + \phi^+(x)] \\ \phi_2(x) = \frac{1}{i\sqrt{2}}[\phi(x) - \phi^+(x)] \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

推论2.8.4.
$$\begin{cases} [\phi(\vec{r},t), \dot{\phi}^+(\vec{r}',t)] = i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \\ [\phi(\vec{r},t), \phi(\vec{r}',t)] = 0, [\phi^+(\vec{r},t), \phi^+(\vec{r}',t)] = 0 \\ [\dot{\phi}(\vec{r},t), \dot{\phi}(\vec{r}',t)] = 0, [\dot{\phi}^+(\vec{r},t), \dot{\phi}^+(\vec{r}',t)] = 0 \\ [\phi(\vec{r},t), \phi^+(\vec{r}',t)] = 0, [\dot{\phi}(\vec{r},t), \dot{\phi}^+(\vec{r}',t)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\phi(x), \phi^+(x')] = i\Delta(x-x') \\ [\phi(x), \phi(x')] = 0, [\phi^+(x), \phi^+(x')] = 0 \\ \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(x) + i\phi_2(x)] \\ \phi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(x) - i\phi_2(x)] \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

推论2.8.5.
$$\begin{cases} [\psi(\vec{r},t), \dot{\psi}^+(\vec{r}',t)] = 2i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \\ [\psi(\vec{r},t), \psi(\vec{r}',t)] = 0, [\psi^+(\vec{r},t), \psi^+(\vec{r}',t)] = 0 \\ [\dot{\psi}(\vec{r},t), \dot{\psi}(\vec{r}',t)] = 0, [\dot{\psi}^+(\vec{r},t), \dot{\psi}^+(\vec{r}',t)] = 0 \\ [\psi(\vec{r},t), \psi^+(\vec{r}',t)] = 0, [\dot{\psi}(\vec{r},t), \dot{\psi}^+(\vec{r}',t)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\psi(x), \psi^+(x')] = 2i\Delta(x-x') \\ [\psi(x), \psi(x')] = 0, [\psi^+(x), \psi^+(x')] = 0 \\ \psi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x) \\ \psi^+(x) = \phi_1(x) - i\phi_2(x) \end{cases}$$

2.9 无质量标量场的因果函数

定义2.9.1.
$$\begin{cases} \Delta^{(+)}(x) := \frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}e^{ip\cdot x}d^3\vec{p}, i\Delta^{(+)}(\vec{r},0) \leftrightarrow \frac{1}{2|\vec{p}|} \\ \Delta^{(-)}(x) := -\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}e^{-ip\cdot x}d^3\vec{p}, \Delta^{(-)}(x) = -\Delta^{(+)}(-x) \\ \Delta(x) := \frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}[e^{ip\cdot x} - e^{-ip\cdot x}\}d^3\vec{p}, \Delta(x) = \Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(x) \end{cases}$$

性质2.9.1. $\begin{cases}\Delta^*(x)=\Delta(x),\Delta(-x)=-\Delta(x),(\nabla^2-\partial_t^2)\Delta(x)=0\\ \partial_t\Delta(x)|_{t=0}=-\delta^3(\vec{r}),\partial_k\partial_t\Delta(x)|_{t=0}=\partial_t\partial_k\Delta(x)|_{t=0}=-\partial_k\delta^3(\vec{r})\\ \partial_k\Delta(x)|_{t=0}=0,\partial_k\partial_l\Delta(x)|_{t=0}=0,\partial_t^2\Delta(x)|_{t=0}=0\end{cases}$

性质2.9.2. $\Delta(x-x'):=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}[e^{ip\cdot(x-x')}-e^{-ip\cdot(x-x')}\}d^3\vec{p}$

$$\begin{cases}\partial_u\Delta(x-x')=-\partial'_u\Delta(x-x')\\ \nabla\Delta(x-x')=-\nabla'\Delta(x-x')\\ \partial_\pi\Delta(x-x')=-\partial'_\pi\Delta(x-x')\end{cases}\quad\begin{cases}(\sqrt{-\nabla^2})^n\Delta(x-x')=(\sqrt{-\nabla'^2})^n\Delta(x-x')\\ \frac{1}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\Delta(x-x')=\frac{1}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\Delta(x-x')\\ \partial_\pi^{2n}\Delta(x-x')=\partial_\pi'^{2n}\Delta(x-x')\end{cases}$$

2.10 标量场的对易函数、因果函数和费曼传播子

定义2.10.1.

$$\begin{cases}\Delta(x)=\Delta^{(+)}(x)+\Delta^{(-)}(x)=\Delta^{ret}(x)-\Delta^{adv}(x)\\ \Delta^{(l)}(x)=i[\Delta^{(-)}(x)-\Delta^{(+)}(x)]\\ \Delta_F(x)=\langle T\varphi(x)\varphi(x')\rangle_0=i\Delta^{(c)}(x-x')\end{cases}\quad\begin{cases}\Delta^{(c)}(x)=\theta(t)\Delta^{(+)}(x)-\theta(-t)\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{ret}(x)=\theta(t)\Delta(x)=\Delta^{(c)}(x)+\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{adv}(x)=-\theta(-t)\Delta(x)=\Delta^{(c)}(x)-\Delta^{(+)}(x)\end{cases}$$

推论2.10.1.

$$\begin{cases}(\partial_a\partial^a-m^2)\Delta(x)=0\\ (\partial_a\partial^a-m^2)\Delta^{(+)}(x)=0\\ (\partial_a\partial^a-m^2)\Delta^{(-)}(x)=0\\ (\partial_a\partial^a-m^2)\Delta^{(l)}(x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}(\partial_a\partial^a-m^2)\Delta^{(c)}(x)=\delta^4(x)\\ (\partial_a\partial^a-m^2)\Delta^{ret}(x)=\delta^4(x)\\ (\partial_a\partial^a-m^2)\Delta^{adv}(x)=\delta^4(x)\\ (\partial_a\partial^a-m^2)\Delta_F(x)=i\delta^4(x)\end{cases}$$

3 标量场各种算符的提取

3.1 标量场能量动量算符的提取

推论3.1.1.

$$H=\frac{1}{2}\int\sum_\sigma E[a^+(\vec{p},0)a(\vec{p},0)+a(\vec{p},0)a^+(\vec{p},0)]d^3\vec{p}=\frac{1}{2}\int\sum_\sigma[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2+\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t)+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$$

$$\vec{P}=\frac{1}{2}\int\sum_\sigma\vec{p}[a_\sigma^+(\vec{p},0)a_\sigma(\vec{p},0)+a_\sigma(\vec{p},0)a_\sigma^+(\vec{p},0)]d^3\vec{p}=\int\sum_\sigma-\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

证明: $H=\frac{1}{2}\int\sum_\sigma E[a_\sigma^+(\vec{p},0)a_\sigma(\vec{p},0)+a_\sigma(\vec{p},0)a_\sigma^+(\vec{p},0)]d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_\sigma\frac{1}{2}\{[E\phi_\sigma(\vec{r},t)-i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)][E\phi_\sigma(\vec{r}',t)+i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)]e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}$

$+[E\phi_\sigma(\vec{r},t)+i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)][E\phi_\sigma(\vec{r}',t)-i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)]e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_\sigma\{[E_p^2\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)+\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)][e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]$

$+iE[\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)-\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)][e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]\}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_\sigma\{[m^2\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)+\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)][e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]$

$-\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)\nabla^2[e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]+0\}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_\sigma\{[m^2\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)+\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)]\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')-\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)\nabla^2\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\frac{1}{2}\int\sum_\sigma[-\nabla^2\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t)+\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t)+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{2}\int\sum_\sigma[-\partial^i[\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t)]+[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2+\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t)+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{2}\int\sum_\sigma[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2+\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t)+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$ □

证明: $\vec{P}=\frac{1}{2}\int\sum_\sigma\vec{p}[a_\sigma^+(\vec{p},0)a_\sigma(\vec{p},0)+a_\sigma(\vec{p},0)a_\sigma^+(\vec{p},0)]d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_\sigma\frac{\vec{p}}{2E}\{[E\phi_\sigma(\vec{r},t)-i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)][E\phi_\sigma(\vec{r}',t)+i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)]e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}$

$+[E\phi_\sigma(\vec{r},t)+i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)][E\phi_\sigma(\vec{r}',t)-i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)]e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_\sigma \frac{\vec{p}}{E}\{[E_p^2\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)+\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)][e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]$

$+iE[\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)-\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)][e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]\}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_\sigma i\vec{p}[\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)-\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)][e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_\sigma i\vec{p}[\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)-\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)]e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_\sigma[\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)-\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)]\nabla e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{2}\int\sum_\sigma[\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)-\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)]\nabla\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{2}\int\sum_\sigma[-\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)+\nabla\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$= \int\sum_\sigma -\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}+\frac{1}{2}\int\sum_\sigma\nabla[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$= \int\sum_\sigma -\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

3.2 标量场自旋算符和粒子数算符的提取

推论3.2.1. $\hat{S}=\frac{1}{2}\int\sum_\sigma E[a_\sigma^+(\vec{p},0)a_\sigma(\vec{p},0)-a_\sigma(\vec{p},0)a_\sigma^+(\vec{p},0)]d^3\vec{p}=\frac{i}{2}\int\sum_\sigma[\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

证明: $\hat{S}=\frac{1}{2}\int\sum_\sigma E[a_\sigma^+(\vec{p},0)a_\sigma(\vec{p},0)-a_\sigma(\vec{p},0)a_\sigma^+(\vec{p},0)]d^3\vec{p}$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_\sigma\frac{1}{2E}\{[E\phi_\sigma(\vec{r},t)-i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)][E\phi_\sigma(\vec{r}',t)+i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)]e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}$

$-[E\phi_\sigma(\vec{r},t)+i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)][E\phi_\sigma(\vec{r}',t)-i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)]e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_\sigma\frac{1}{E}\{[E_p^2\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)+\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)][e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]$

$+iE[\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)-\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)][e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]\}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_\sigma i[\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)-\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)][e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{2}\int\sum_\sigma i[\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)-\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)]\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{i}{2}\int\sum_\sigma[\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$ □

推论3.2.2. $\hat{N}=\frac{1}{2}\int\sum_\sigma E[a_\sigma^+(\vec{p},0)a_\sigma(\vec{p},0)+a_\sigma(\vec{p},0)a_\sigma^+(\vec{p},0)]d^3\vec{p}$

$= \frac{1}{2}\int\sum_\sigma\frac{1}{\sqrt{m^2-\nabla^2}}[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2+\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t)+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

证明: $\hat{N}=\frac{1}{2}\int\sum_\sigma E[a_\sigma^+(\vec{p},0)a_\sigma(\vec{p},0)+a_\sigma(\vec{p},0)a_\sigma^+(\vec{p},0)]d^3\vec{p}$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_\sigma\frac{1}{2E}\{[E\phi_\sigma(\vec{r},t)-i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)][E\phi_\sigma(\vec{r}',t)+i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)]e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}$

$+[E\phi_\sigma(\vec{r},t)+i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)][E\phi_\sigma(\vec{r}',t)-i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)]e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_\sigma\frac{1}{E}\{[E_p^2\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)+\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)][e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]$

$+iE[\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)-\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)][e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]\}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_\sigma\frac{1}{E}\{[m^2\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)+\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)][e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]$

$-\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)\nabla^2[e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]+0\}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_\sigma\frac{1}{\sqrt{m^2-\nabla^2}}\{[m^2\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)+\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)]\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')-\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r}',t)\nabla^2\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{2}\int\sum_\sigma\frac{1}{\sqrt{m^2-\nabla^2}}[-\nabla^2\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t)+\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t)+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$= \frac{1}{2}\int\sum_\sigma\frac{1}{\sqrt{m^2-\nabla^2}}[-\partial^i[\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t)]+[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2+\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t)+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$= \frac{1}{2}\int\sum_\sigma\frac{1}{\sqrt{m^2-\nabla^2}}[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2+\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t)+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$ □

3.3 标量场空间角动量算符的提取

定理3.3.1. $M_{ij}=-\int\sum_\sigma\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$= -\frac{i}{2}\int\sum_\sigma[a_\sigma^+(\vec{p},0)(p_i\tilde{\partial}_j-p_j\tilde{\partial}_i)a_\sigma(\vec{p},0)-a_\sigma(\vec{p},0)(p_i\tilde{\partial}_j-p_j\tilde{\partial}_i)a_\sigma^+(\vec{p},0)]d^3\vec{p}$

证明： M_{ij}
$= -\int\sum\limits_{\sigma}\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= -\int\sum\limits_{\sigma}\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\sum\limits_{\sigma}$
$\frac{-iE'}{\sqrt{2E'}}\frac{i(r_ip_j-r_jp_i)}{\sqrt{2E}}[a_\sigma(\vec{p}',0)e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)} - a^+_\sigma(\vec{p}',0)e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}][a_\sigma(\vec{p},0)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} - a^+_\sigma(\vec{p},0)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$
$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\sum\limits_{\sigma}$
$\frac{E'(r_ip_j-r_jp_i)}{2\sqrt{E'E}}[a_\sigma(\vec{p}',0)a_\sigma(\vec{p},0)e^{i[(\vec{p}'+\vec{p})\cdot\vec{r}-(E'+E)t]} + a^+_\sigma(\vec{p}',0)a^+_\sigma(\vec{p},0)e^{-i[(\vec{p}'+\vec{p})\cdot\vec{r}-(E'+E)t]}]$
$-$
$\frac{E'(r_ip_j-r_jp_i)}{2\sqrt{E'E}}[a_\sigma(\vec{p}',0)a^+_\sigma(\vec{p},0)e^{i[(\vec{p}'-\vec{p})\cdot\vec{r}-(E'-E)t]} + a^+_\sigma(\vec{p}',0)a_\sigma(\vec{p},0)e^{-i[(\vec{p}'-\vec{p})\cdot\vec{r}-(E'-E)t]}]$
$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\sum\limits_{\sigma}\frac{-iE'}{2\sqrt{E'E}}$
$\{[a_\sigma(\vec{p}',0)a_\sigma(\vec{p},0)e^{-i(E'+E)t}(p_j\tilde{\partial}_i - p_i\tilde{\partial}_j)e^{i(\vec{p}'+\vec{p})\cdot\vec{r}} - a^+_\sigma(\vec{p}',0)a^+_\sigma(\vec{p},0)e^{i(E'+E)t}(p_j\tilde{\partial}_i - p_i\tilde{\partial}_j)e^{-i(\vec{p}'+\vec{p})\cdot\vec{r}}]$
$+$
$[a_\sigma(\vec{p}',0)a^+_\sigma(\vec{p},0)e^{-i(E'-E)t}(p_j\tilde{\partial}_i - p_i\tilde{\partial}_j)e^{i(\vec{p}'-\vec{p})\cdot\vec{r}} - a^+_\sigma(\vec{p}',0)a_\sigma(\vec{p},0)e^{i(E'-E)t}(p_j\tilde{\partial}_i - p_i\tilde{\partial}_j)e^{-i(\vec{p}'-\vec{p})\cdot\vec{r}}]\}$
$= i\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\sum\limits_{\sigma}\frac{E'}{2\sqrt{E'E}}$
$\{[a_\sigma(\vec{p}',0)a_\sigma(\vec{p},0)e^{-i(E'+E)t}(p_j\tilde{\partial}_i - p_i\tilde{\partial}_j)\delta^3(\vec{p}+\vec{p}') - a^+_\sigma(\vec{p}',0)a^+_\sigma(\vec{p},0)e^{i(E'+E)t}(p_j\tilde{\partial}_i - p_i\tilde{\partial}_j)\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')]$
$+$
$[a_\sigma(\vec{p}',0)a^+_\sigma(\vec{p},0)e^{-i(E'-E)t}(p_j\tilde{\partial}_i - p_i\tilde{\partial}_j)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') - a^+_\sigma(\vec{p}',0)a_\sigma(\vec{p},0)e^{i(E'-E)t}(p_j\tilde{\partial}_i - p_i\tilde{\partial}_j)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')]\}$
$= \frac{i}{2}\int d^3\vec{p}\sum\limits_{\sigma}$
$\{-a_\sigma(\vec{p},0)\sqrt{E}e^{-iEt}(\tilde{\partial}_i[p_ja_\sigma(-\vec{p},0)\frac{1}{\sqrt{E}}e^{-iEt}] - \tilde{\partial}_j[p_ia_\sigma(-\vec{p},0)\frac{1}{\sqrt{E}}e^{-iEt}])$
$+$
$a^+_\sigma(\vec{p},0)\sqrt{E}e^{iEt}(\tilde{\partial}_i[p_ja^+_\sigma(-\vec{p},0)\frac{1}{\sqrt{E}}e^{iEt}] - \tilde{\partial}_j[p_ia^+_\sigma(-\vec{p},0)\frac{1}{\sqrt{E}}e^{iEt}])$
$-$
$a_\sigma(\vec{p},0)\sqrt{E}e^{-iEt}(\tilde{\partial}_i[p_ja^+_\sigma(\vec{p},0)\frac{1}{\sqrt{E}}e^{iEt}] - \tilde{\partial}_j[p_ia^+_\sigma(\vec{p},0)\frac{1}{\sqrt{E}}e^{iEt}])$
$+$
$a^+_\sigma(\vec{p},0)\sqrt{E}e^{iEt}(\tilde{\partial}_i[p_ja_\sigma(\vec{p},0)\frac{1}{\sqrt{E}}e^{-iEt}] - \tilde{\partial}_j[p_ia_\sigma(\vec{p},0)\frac{1}{\sqrt{E}}e^{-iEt}])\}$
$= \frac{i}{2}\int d^3\vec{p}\sum\limits_{\sigma}$
$\{-a_\sigma(\vec{p},0)\sqrt{E}e^{-iEt}(p_j\tilde{\partial}_i - p_i\tilde{\partial}_j)[a_\sigma(-\vec{p},0)\frac{1}{\sqrt{E}}e^{-iEt}]) + a^+_\sigma(\vec{p},0)\sqrt{E}e^{iEt}(p_j\tilde{\partial}_i - p_i\tilde{\partial}_j)[a^+_\sigma(-\vec{p},0)\frac{1}{\sqrt{E}}e^{iEt}])$
$- a_\sigma(\vec{p},0)\sqrt{E}e^{-iEt}(p_j\tilde{\partial}_i - p_i\tilde{\partial}_j)[a^+_\sigma(\vec{p},0)\frac{1}{\sqrt{E}}e^{iEt}]) + a^+_\sigma(\vec{p},0)\sqrt{E}e^{iEt}(p_j\tilde{\partial}_i - p_i\tilde{\partial}_j)[a_\sigma(\vec{p},0)\frac{1}{\sqrt{E}}e^{-iEt}])\}$
$= \frac{i}{2}\int d^3\vec{p}\sum\limits_{\sigma}$
$\{-a_\sigma(\vec{p},0)e^{-2iEt}(p_j\tilde{\partial}_i - p_i\tilde{\partial}_j)a_\sigma(-\vec{p},0) + a^+_\sigma(\vec{p},0)e^{2iEt}(p_j\tilde{\partial}_i - p_i\tilde{\partial}_j)a^+_\sigma(-\vec{p},0)$
$- a_\sigma(\vec{p},0)(p_j\tilde{\partial}_i - p_i\tilde{\partial}_j)a^+_\sigma(\vec{p},0) + a^+_\sigma(\vec{p},0)(p_j\tilde{\partial}_i - p_i\tilde{\partial}_j)a_\sigma(\vec{p},0)\}$
$= -\frac{i}{2}\int d^3\vec{p}\sum\limits_{\sigma}[a^+_\sigma(\vec{p},0)(p_i\tilde{\partial}_j - p_j\tilde{\partial}_i)a_\sigma(\vec{p},0) - a_\sigma(\vec{p},0)(p_i\tilde{\partial}_j - p_j\tilde{\partial}_i)a^+_\sigma(\vec{p},0)]$ □

推论3.3.1. $\partial_t\phi_\sigma(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\frac{-iE}{\sqrt{2E}}[a_\sigma(\vec{p},0)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} - a^+_\sigma(\vec{p},0)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

推论3.3.2. $(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\frac{i(r_ip_j-r_jp_i)}{\sqrt{2E}}[a_\sigma(\vec{p},0)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} - a^+_\sigma(\vec{p},0)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

推论3.3.3.
$H = \frac{1}{2}\int\sum\limits_{\sigma}E[a^+(\vec{p},0)a(\vec{p},0) + a(\vec{p},0)a^+(\vec{p},0)]d^3\vec{p} = \frac{1}{2}\int\sum\limits_{\sigma}[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2 + \dot{\phi}^2_\sigma(\vec{r},t) + m^2\phi^2_\sigma(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$
$\vec{P} = \frac{1}{2}\int\sum\limits_{\sigma}\vec{p}[a^+_\sigma(\vec{p},0)a_\sigma(\vec{p},0) + a_\sigma(\vec{p},0)a^+_\sigma(\vec{p},0)]d^3\vec{p} = \int\sum\limits_{\sigma} -\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

定理3.3.2. $M_{i\pi} = i\int\sum\limits_{\sigma}\{\frac{1}{2}r_i[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2 + \dot{\phi}^2_\sigma(\vec{r},t) + m^2\phi^2_\sigma(\vec{r},t)] + t\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

3.4 对易和反对易公式

推论3.4.1. $\begin{cases}[A,BC]=[A,B]C+B[A,C],[A,CB]=[A,C]B+C[A,B]\\ [A,BC]=\{A,B\}C-B\{A,C\},[A,CB]=\{A,C\}B-C\{A,B\}\end{cases}$

推论3.4.2. $\begin{cases}[A,\{B,C\}]=\{[A,B],C\}+\{B,[A,C]\}\\ [A,[B,C]]=\{\{A,B\},C\}-\{B,\{A,C\}\}\end{cases}$

3.5 标量场的彭加莱代数

推论3.5.1.

$H=\frac{1}{2}\int\sum_{\sigma}[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2+\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t)+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{2}\int\sum_{\sigma}[\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t)-\phi_\sigma(\vec{r},t)\partial_t^2\phi_\sigma(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$\vec{P}=\int\sum_{\sigma}-\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

证明: $[P_i(t),P_\pi(t)]$

$=\int\sum_{\sigma,\sigma'}[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\partial_\pi\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\int\sum_{\sigma,\sigma'}[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\partial_\pi\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]+\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t),\partial_\pi\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\int\sum_{\sigma,\sigma'}\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\partial_\pi\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]+\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t),\partial_\pi\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\int\sum_{\sigma}\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)]+\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=-\int\sum_{\sigma}[\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)+\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$=-\int\sum_{\sigma}\partial_i[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}=0$ □

证明:

$=\int\sum_{\sigma,\sigma'}[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t),\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\partial_t^2\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\int\sum_{\sigma,\sigma'}[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t),\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\partial_t^2\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]+\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t),\partial_t^2\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\int\sum_{\sigma,\sigma'}[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)\partial_t^2\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]+\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),\partial_t^2\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\int\sum_{\sigma,\sigma'}-\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)\partial_t^2\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]-\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)(m^2-\nabla^2)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\int\sum_{\sigma,\sigma'}-\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)\partial_t^2\phi_{\sigma'}(\vec{r},t)-\phi_{\sigma'}(\vec{r},t)(m^2-\nabla^2)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\int\sum_{\sigma,\sigma'}-\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)\partial_t^2\phi_{\sigma'}(\vec{r},t)-\phi_{\sigma'}(\vec{r},t)\partial_t^2\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=-\int\sum_{\sigma,\sigma'}\partial_i[\phi_\sigma(\vec{r},t)\partial_t^2\phi_{\sigma'}(\vec{r},t)]d^3\vec{r}=0$ □

推论3.5.2. $[P_a(t),P_b(t)]=0$

证明: $[M_{ij}(t),P_\pi(t)]$

$=\int\sum_{\sigma,\sigma'}[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\partial_\pi\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\int\sum_{\sigma,\sigma'}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\partial_\pi\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)+\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t),\partial_\pi\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]$

$=\int\sum_{\sigma,\sigma'}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\partial_\pi\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)+\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t),\partial_\pi\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]$

$=-i\int\sum_{\sigma,\sigma'}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)+\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]$

$= -i\int\sum_\sigma \dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t) + \dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}$
$= i\int\sum_\sigma\{\partial_j[r_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)] - \partial_i[r_j\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]\}\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t) + \dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\{\partial_j[r_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)] - \partial_i[r_j\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]\}d^3\vec{r}$
$= i\int\sum_\sigma\{\partial_j[r_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)] - \partial_i[r_j\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]\}\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t) + \dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[r_i\partial_j - r_j\partial_i]\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$
$= i\int\sum_\sigma\{\partial_j[r_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)] - \partial_i[r_j\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]\}d^3\vec{r} = 0$ □

证明： $[M_{ij}(t), P_k(t)]$
$= \int\sum_{\sigma,\sigma'}[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\partial'_k\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \int\sum_{\sigma,\sigma'} d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\partial'_j\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t) + \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), \partial'_k\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]$
$= \int\sum_{\sigma,\sigma'} d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\partial'_k\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t) + \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t), \partial'_k\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)](r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)$
$= i\int\sum_{\sigma,\sigma'}\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_k\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t) - \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\partial'_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -i\int\sum_\sigma\{\partial_j[r_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)] - \partial_i[r_j\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]\}\partial_k\phi_\sigma(\vec{r},t) - \partial_k\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= i\int\sum_\sigma r_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_j\partial_k\phi_\sigma(\vec{r},t) - r_j\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\partial_k\phi_\sigma(\vec{r},t) - \dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_k(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= i\int\sum_\sigma\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\partial_k\phi_\sigma(\vec{r},t) - \dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_k(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= -i\int\sum_\sigma\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[-i(r_i\partial_j - r_j\partial_i), -i\partial_k]\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= -i\int\sum_\sigma\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(\delta_{ik}\partial_j - \delta_{jk}\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= -i[P_i(t)\delta_{jk} - P_j(t)\delta_{ik}]$ □

证明： $[M_{i\pi}(t), P_\pi(t)]$
$= \int\sum_{\sigma,\sigma'}[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_\pi - it\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\partial_\pi\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \int\sum_{\sigma,\sigma'} d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_\pi - it\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\partial_\pi\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t) + \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_\pi - it\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), \partial_\pi\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]$
$= -\int\sum_{\sigma,\sigma'}[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_t + t\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t) + \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_t + t\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -\int\sum_{\sigma,\sigma'}\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[(r_i\partial_t + t\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t) + \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[(r_i\partial_t + t\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -\int\sum_{\sigma,\sigma'}\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)t[\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t), \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t) + \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)t[\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t), \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$ □

3.6 标量场的彭加莱代数严格证明

推论3.6.1.
$$\begin{cases}[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]\\ [BC,A] = [B,A]C + B[C,A]\\ [\phi_\sigma(\vec{r},t), \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)] = i\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\end{cases}$$

推论3.6.2.
$P_i = \int\sum_\sigma -\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$P_\pi = \frac{i}{2}\int\sum_\sigma[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2 + \dot{\phi}^2_\sigma(\vec{r},t) + m^2\phi^2_\sigma(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

定理3.6.1.
$M_{ij} = -\int\sum_\sigma\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$M_{i\pi} = i\int\sum_\sigma\{\frac{1}{2}r_i[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2 + \dot{\phi}^2_\sigma(\vec{r},t) + m^2\phi^2_\sigma(\vec{r},t)] + t\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$= i\int\sum_{\sigma}\{\frac{1}{2}[-r_i\nabla^2\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t) - \partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t) + r_i\dot{\phi}^2_\sigma(\vec{r},t) + m^2r_i\phi^2_\sigma(\vec{r},t)] + t\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$= i\int\sum_{\sigma}\{\frac{1}{2}[-r_i\nabla^2\phi_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t) + r_i\dot{\phi}^2_\sigma(\vec{r},t) + m^2r_i\phi^2_\sigma(\vec{r},t)] + t\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

3.6.1 引理-数学准备

引理3.6.1. $[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2] = -2i\delta_{\sigma\sigma'}\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\cdot\nabla'\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

证明: $[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2]$

$= 2\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]$

$= -2i\delta_{\sigma\sigma'}\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\cdot\nabla'\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$ □

引理3.6.2. $[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}^2_{\sigma'}(\vec{r}',t)] = 0$

引理3.6.3. $[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),m^2\phi^2_{\sigma'}(\vec{r}',t)] = -2im^2\delta_{\sigma\sigma'}\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

证明: $[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),\phi^2_{\sigma'}(\vec{r}',t)]$

$= 2\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]$

$= -2i\delta_{\sigma\sigma'}\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$ □

引理3.6.4. $[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2 + \dot{\phi}^2_{\sigma'}(\vec{r}',t) + m^2\phi^2_{\sigma'}(\vec{r}',t)] = -2i\delta_{\sigma\sigma'}[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\cdot\nabla' + m^2\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

引理3.6.5. $[\phi_\sigma(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2 + \dot{\phi}^2_{\sigma'}(\vec{r}',t) + m^2\phi^2_{\sigma'}(\vec{r}',t)] = 2i\delta_{\sigma\sigma'}\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

引理3.6.6. $[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2 + \dot{\phi}^2_{\sigma'}(\vec{r}',t) + m^2\phi^2_{\sigma'}(\vec{r}',t)] = 2i\delta_{\sigma\sigma'}\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\nabla\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

3.6.2 标量场动量对易规则

定理3.6.2. $[P_a(t),P_b(t)] = 0$

证明: $[P_i(t),P_j(t)]$

$= \int\sum_{\sigma,\sigma'}[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\partial'_j\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \int\sum_{\sigma}[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\partial'_j\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)] + \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t),\partial'_j\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \int\sum_{\sigma}\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\partial'_j\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)] + \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),\partial'_j\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= i\int\sum_{\sigma}\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_j\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t) - \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\partial'_j\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= -i\int\sum_{\sigma}\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial'_i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_j\phi_\sigma(\vec{r}',t) - \dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)\partial_j\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= i\int\sum_{\sigma}\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\partial_j\phi_\sigma(\vec{r},t) - \dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_j\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r} = 0$ □

证明: $[P_i(t),P_\pi(t)]$

$= -\frac{i}{2}\int\sum_{\sigma,\sigma'}[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2 + \dot{\phi}^2_{\sigma'}(\vec{r}',t) + m^2\phi^2_{\sigma'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= -\frac{i}{2}\int\sum_{\sigma,\sigma'}\{[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2 + \dot{\phi}^2_{\sigma'}(\vec{r}',t) + m^2\phi^2_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)$

$+ \dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2 + \dot{\phi}^2_{\sigma'}(\vec{r}',t) + m^2\phi^2_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= -\frac{i}{2}\int\sum_{\sigma,\sigma'}\{[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2 + m^2\phi^2_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t) + \dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}^2_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= -i\int\sum_{\sigma,\sigma'}\{[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\cdot\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t) + [\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]m^2\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)$

$+ \dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= -i\int\sum_{\sigma,\sigma'}\{-i\delta_{\sigma\sigma'}\nabla'\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t) - i\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')m^2\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)$

$+ \dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)i\delta_{\sigma\sigma'}\partial_i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \int\{\nabla^2\phi_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t) - m^2\phi_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t) - \partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$= \int\{\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\cdot\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t) - m^2\phi_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t) - \partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$= \frac{1}{2}\int\{-\partial_i[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)\cdot\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)] - m^2\partial_i\phi^2_\sigma(\vec{r},t) - \partial_i\dot{\phi}^2_\sigma(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$= -\frac{1}{2}\int\partial_i\{[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2 + m^2\phi^2_\sigma(\vec{r},t) + \dot{\phi}^2_\sigma(\vec{r},t)\}d^3\vec{r} = 0$ □

3.6.3 标量场角动量对易规则

证明： $[M_{ij}(t), M_{kl}(t)]$

$= \int \sum_{\sigma,\sigma'} [\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)(r'_k\partial'_l - r'_l\partial'_k)\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \int \sum_{\sigma,\sigma'} d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\{[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)](r'_k\partial'_l - r'_l\partial'_k)\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)$

$+ \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), (r'_k\partial'_l - r'_l\partial'_k)\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\}$

$= \int \sum_{\sigma,\sigma'} d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\{\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)](r'_k\partial'_l - r'_l\partial'_k)\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)$

$+ \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t), (r'_k\partial'_l - r'_l\partial'_k)\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)](r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)\}$

$= i\int \sum_{\sigma,\sigma'} d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\{\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r'_k\partial'_l - r'_l\partial'_k)\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t) - \dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)(r'_k\partial'_l - r'_l\partial'_k)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)\}$

$= -i\int \sum_{\sigma} d^3\vec{r}$

$\{\{\partial_j[r_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)] - \partial_i[r_j\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]\}(r_k\partial_l - r_l\partial_k)\phi_\sigma(\vec{r},t) - \{\partial_l[r_k\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)] - \partial_k[r_l\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]\}(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)\}$

$= -i\int \sum_{\sigma} \dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[-i(r_i\partial_j - r_j\partial_i), -i(r_k\partial_l - r_l\partial_k)]\phi_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$= -i[\delta_{il}M_{jk}(t) - \delta_{ik}M_{jl}(t) + \delta_{jk}M_{il}(t) - \delta_{jl}M_{ik}(t)]$ □

证明： $[M_{ij}(t), M_{k\pi}(t)]$

$= i\int \sum_{\sigma,\sigma'} [\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), \{\frac{1}{2}r'_k[[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2 + \dot{\phi}^2_{\sigma'}(\vec{r}',t) + m^2\phi^2_{\sigma'}(\vec{r}',t)] + t\partial'_k\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= i\int \sum_{\sigma,\sigma'} [\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t), \frac{1}{2}r'_k[[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2 + m^2\phi^2_{\sigma'}(\vec{r}',t)] + t\partial'_k\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\}](r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)$

$+ \dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t), \{\frac{1}{2}r'_k\dot{\phi}^2_{\sigma'}(\vec{r}',t) + t\partial'_k\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \int \sum_{\sigma,\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'}[r'_k\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\cdot\nabla' + m^2r'_k\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t) + t\partial'_k\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)$

$- \delta_{\sigma\sigma'}[r'_k\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t) + t\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\partial'_k](r_i\partial_j - r_j\partial_i)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \int[-\partial_k\phi_\sigma(\vec{r},t) - r_k\nabla^2\phi_\sigma(\vec{r},t) + m^2r_k\phi_\sigma(\vec{r},t) + t\partial_k\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)](r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)$

$+ [r_k(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t) - t(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_k\phi_\sigma(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$= \int[-\partial_k\phi_\sigma(\vec{r},t) - r_k\nabla^2\phi_\sigma(\vec{r},t) + m^2r_k\phi_\sigma(\vec{r},t)](r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)$

$+ r_k(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$= \int[-\partial_k\phi_\sigma(\vec{r},t) - r_k\dot{\phi}^2_\sigma(\vec{r},t)](r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)$

$+ r_k(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=$

$= \int \sum_{\sigma} g_{jk}\{\frac{1}{2}r_i[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2 + \dot{\phi}^2_\sigma(\vec{r},t) + m^2\phi^2_\sigma(\vec{r},t)] + t\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t)\}$

$- g_{ik}\{\frac{1}{2}r_j[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2 + \dot{\phi}^2_\sigma(\vec{r},t) + m^2\phi^2_\sigma(\vec{r},t)] + t\partial_j\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$ □

$$M_{ab} = L_{ab} + S_{ab}, L_{ab} = x_ap_b - x_bp_a, g_{ab} = \delta_{ab} \tag{22.3}$$

$$\begin{cases} [M_{ab}, M_{cd}] = -i(g_{ad}M_{bc} - g_{ac}M_{bd} + g_{bc}M_{ad} - g_{bd}M_{ac}) \\ [M_{ij}, M_{k\pi}] = -i(g_{jk}M_{i\pi} - g_{ik}M_{j\pi}) \\ [M_{ab}, p_c] = -i(g_{bc}p_a - g_{ac}p_b), [p_a, p_b] = 0 \end{cases} \tag{22.4}$$

证明： $[M_{i\pi}(t), M_{j\pi}(t)]$

$= -\int \sum_{\sigma\sigma'} [\{\frac{1}{2}r_i[[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2 + \dot{\phi}^2_\sigma(\vec{r},t) + m^2\phi^2_\sigma(\vec{r},t)] + t\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t)\}$

$, \{\frac{1}{2}r'_j[[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2 + \dot{\phi}^2_{\sigma'}(\vec{r}',t) + m^2\phi^2_{\sigma'}(\vec{r}',t)] + t\partial'_j\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= -\int \sum_{\sigma\sigma'} \{\frac{1}{4}r_ir'_j[[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2 + \dot{\phi}^2_\sigma(\vec{r},t) + m^2\phi^2_\sigma(\vec{r},t), [\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2 + \dot{\phi}^2_{\sigma'}(\vec{r}',t) + m^2\phi^2_{\sigma'}(\vec{r}',t)]$

$+ t^2[\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t), \partial'_j\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]$

$$+\frac{1}{2}r_it[[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2+\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t)+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t),\partial_j'\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]$$
$$+\frac{1}{2}r_j't[\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_\sigma(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2+\dot{\phi}_{\sigma'}^2(\vec{r}',t)+m^2\phi_{\sigma'}^2(\vec{r}',t)]\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$=-\int\sum_{\sigma\sigma'}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$\{\frac{1}{4}r_ir_j'[[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}^2(\vec{r}',t)]]+\frac{1}{4}r_ir_j'[\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2+m^2\phi_{\sigma'}^2(\vec{r}',t)]$$
$$+t^2\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[\phi_\sigma(\vec{r},t),\partial_j'\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)+t^2\partial_j'\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\phi_\sigma(\vec{r},t)$$
$$+\frac{1}{2}r_it[[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t),\partial_j'\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)+\frac{1}{2}r_it\partial_j'\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)[\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t),\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]$$
$$+\frac{1}{2}r_j't\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)[\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}^2(\vec{r}',t)]+\frac{1}{2}r_j't[\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2+m^2\phi_{\sigma'}^2(\vec{r}',t)]\phi_\sigma(\vec{r},t)\}$$
$$=-\int\sum_{\sigma\sigma'}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$\{\frac{1}{4}r_ir_j'[[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}^2(\vec{r}',t)]]+\frac{1}{4}r_ir_j'[\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2+m^2\phi_{\sigma'}^2(\vec{r}',t)]$$
$$+t^2\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)i\delta_{\sigma\sigma'}\partial_j'\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)-t^2\partial_j'\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)i\delta_{\sigma\sigma'}\partial_i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\phi_\sigma(\vec{r},t)$$
$$+r_it[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)\cdot\nabla+m^2\phi_\sigma(\vec{r},t)]i\delta_{\sigma\sigma'}\partial_j'\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)-r_it\partial_j'\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)i\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$$
$$+r_j't\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)i\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')-r_j't[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\cdot\nabla'+m^2\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]i\delta_{\sigma\sigma'}\partial_i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\phi_\sigma(\vec{r},t)\}$$
$$=-\int\sum_{\sigma\sigma'}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$\{\frac{1}{4}r_ir_j'[[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}^2(\vec{r}',t)]]+\frac{1}{4}r_ir_j'[\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2+m^2\phi_{\sigma'}^2(\vec{r}',t)]$$
$$-it^2\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_j\phi_\sigma(\vec{r},t)+it^2\partial_j\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)$$
$$-ir_it[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)\cdot\nabla+m^2\phi_\sigma(\vec{r},t)]\partial_j\phi_\sigma(\vec{r},t)-ir_it\partial_j\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)$$
$$+ir_jt\partial_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)+ir_jt[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)\cdot\nabla+m^2\phi_\sigma(\vec{r},t)]\partial_i\phi_\sigma(\vec{r},t)\}$$
$$=-\int\sum_{\sigma\sigma'}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\frac{1}{4}r_ir_j'$$
$$\{[[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}^2(\vec{r}',t)]]+[\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2+m^2\phi_{\sigma'}^2(\vec{r}',t)]$$
$$=-\int\sum_{\sigma\sigma'}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\frac{1}{4}r_ir_j'$$
$$\{\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)[[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]+[[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)]^2+m^2\phi_\sigma^2(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)$$
$$+[\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2+m^2\phi_{\sigma'}^2(\vec{r}',t)]$$
$$=-\int\sum_{\sigma\sigma'}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\frac{1}{4}r_ir_j'$$
$$\{2\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)\cdot[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]+2m^2\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\phi_\sigma(\vec{r},t)[\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]$$
$$+2[\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\cdot\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)+2m^2[\phi_\sigma(\vec{r},t),\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)]\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)$$
$$+[\dot{\phi}_\sigma^2(\vec{r},t),[\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)]^2+m^2\phi_{\sigma'}^2(\vec{r}',t)]$$
$$=-\int\sum_{\sigma\sigma'}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\frac{1}{4}r_ir_j'$$
$$\{2\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)\cdot i\delta_{\sigma\sigma'}\nabla\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')+2m^2\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\phi_\sigma(\vec{r},t)i\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$$
$$+2i\delta_{\sigma\sigma'}\nabla\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)+2m^2i\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)$$
$$-2\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\cdot i\delta_{\sigma'\sigma}\nabla'\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})-2m^2\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)i\delta_{\sigma'\sigma}\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})$$
$$-2i\delta_{\sigma'\sigma}\nabla'\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})\cdot\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)-2m^2i\delta_{\sigma'\sigma}\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)$$
$$=-\int\sum_{\sigma\sigma'}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\frac{1}{4}r_ir_j'$$
$$\{2\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)\cdot i\delta_{\sigma\sigma'}\nabla\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')+2i\delta_{\sigma\sigma'}\nabla\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_{\sigma'}(\vec{r}',t)$$
$$-2\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\cdot i\delta_{\sigma'\sigma}\nabla'\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})-2i\delta_{\sigma'\sigma}\nabla'\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})\cdot\nabla'\phi_{\sigma'}(\vec{r}',t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)$$
$$=-\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\frac{1}{2}$$
$$\{r_j'\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)r_i\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)\cdot i\nabla\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')+i\nabla\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\cdot r_i\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)r_j'\dot{\phi}_\sigma(\vec{r}',t)$$
$$-r_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)r_j'\nabla'\phi_\sigma(\vec{r}',t)\cdot i\nabla'\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})-i\nabla'\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})\cdot r_j'\nabla'\phi_\sigma(\vec{r}',t)r_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)$$
$$=-\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\frac{i}{2}$$
$$\{\nabla[r_j\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]r_i\cdot\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)+r_i\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)\cdot\nabla[r_j\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]$$
$$-\nabla[r_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]r_j\cdot\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)-r_j\nabla\phi_\sigma(\vec{r},t)\cdot\nabla[r_i\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)]$$
$$=-\int d^3\vec{r}\frac{i}{2}$$
$$\{\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)+(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)$$

$$= -i\int d^3\vec{r}\dot{\phi}_\sigma(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\phi_\sigma(\vec{r},t)$$
$$= iM_{ij}(t)$$ □

第二十三章　电磁场协变量子化新方案

本章主要从传统电磁场势量子化方案出发导出电磁场场强协变量子化新方案，主要体现其导出过程，没有体现其完整性，主要是为了验证新协变量子化程式的正确性。后面章节会在两种表象下分别直接给出其完整的场强协变量子化方案。

1 电磁场方程的规范势分析 [24,26]

1.1 有质量电磁场方程的规范势描述

定理1.1.1. $\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=m^2\phi-\rho,\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0,\nabla\times\vec{B}=m^2\vec{A}-\vec{J}+\partial_t\vec{E}\\ \nabla\cdot\vec{J}+\partial_t\rho=0\\ \vec{E}=-\partial_t\vec{A}-\nabla\phi,\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\nabla^2-\partial_t^2-m^2)\phi=\rho\\ (\nabla^2-\partial_t^2-m^2)\vec{A}=\vec{J}\\ \nabla\cdot\vec{A}+\partial_t\phi=0\\ \vec{E}=-\partial_t\vec{A}-\nabla\phi,\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{cases}$

1.2 电磁场方程的一般规范势描述

引理1.2.1. $\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$

引理1.2.2. $\nabla\cdot\vec{B}=0,\vec{A}=\frac{\nabla\times\vec{B}}{-\nabla^2}+\nabla\theta\Leftrightarrow\vec{B}=\nabla\times\vec{A},\nabla\cdot\vec{A}=\nabla^2\theta$

正向证明：

证明: $\nabla\cdot\vec{B}=0,\vec{A}=\frac{\nabla\times\vec{B}}{-\nabla^2}+\nabla\theta$
$\Rightarrow\nabla\times\vec{A}=\frac{\nabla\times(\nabla\times\vec{B})}{-\nabla^2}+\nabla\times\nabla\theta,\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})}{-\nabla^2}+\nabla\cdot\nabla\theta$
$\Rightarrow\nabla\times\vec{A}=\frac{\nabla(\nabla\cdot\vec{B})-\nabla^2\vec{B}}{-\nabla^2},\nabla\cdot\vec{A}=\nabla^2\theta$
$\Rightarrow\vec{B}=\nabla\times\vec{A},\nabla\cdot\vec{A}=\nabla^2\theta$ □

反向证明：

证明: $\vec{B}=\nabla\times\vec{A},\nabla\cdot\vec{A}=\nabla^2\theta$
$\Rightarrow\nabla\times\vec{B}=\nabla\times(\nabla\times\vec{A}),\nabla\cdot\vec{B}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})$
$\Rightarrow\nabla\times\vec{B}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A},\nabla\cdot\vec{B}=0$
$\Rightarrow\nabla\cdot\vec{B}=0,\vec{A}=\frac{\nabla\times\vec{B}}{-\nabla^2}+\nabla\theta$ □

定理1.2.1. $\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=-\rho,\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0,\nabla\times\vec{B}=-\vec{J}+\partial_t\vec{E}\\ \vec{A}=\frac{\nabla\times\vec{B}}{-\nabla^2}+\nabla\theta,\phi=\frac{\nabla\cdot\vec{E}}{-\nabla^2}-\partial_t\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla^2\phi=\rho-\partial_t\nabla^2\theta,\nabla\cdot\vec{A}=\nabla^2\theta\\ \nabla^2\vec{A}-\partial_t^2\vec{A}=\vec{J}+\nabla(\partial_t\phi+\nabla^2\theta)\\ \vec{E}=-\partial_t\vec{A}-\nabla\phi,\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{cases}$

正向证明：

证明: $\nabla^2\phi=\nabla^2\frac{\nabla\cdot\vec{E}}{-\nabla^2}-\nabla^2\partial_t\theta=-\nabla\cdot\vec{E}-\nabla^2\partial_t\theta=\rho-\partial_t\nabla^2\theta$ □

证明: $\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\nabla\cdot\nabla\times\vec{B}}{-\nabla^2}+\nabla\cdot\nabla\theta=\nabla^2\theta$ □

证明: $\nabla^2\vec{A}-\partial_t^2\vec{A}=(\nabla^2-\partial_t^2)\frac{\nabla\times\vec{B}}{-\nabla^2}+(\nabla^2-\partial_t^2)\nabla\theta$
$=-\nabla\times\vec{B}+\partial_t\frac{\nabla\times\partial_t\vec{B}}{\nabla^2}+(\nabla^2-\partial_t^2)\nabla\theta$
$=-\nabla\times\vec{B}-\partial_t\frac{\nabla\times\nabla\times\vec{E}}{\nabla^2}+(\nabla^2-\partial_t^2)\nabla\theta$
$=-\nabla\times\vec{B}-\partial_t\frac{\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}}{\nabla^2}+(\nabla^2-\partial_t^2)\nabla\theta$
$=-\nabla\times\vec{B}+\partial_t\vec{E}-\partial_t\frac{\nabla(\nabla\cdot\vec{E})}{\nabla^2}+(\nabla^2-\partial_t^2)\nabla\theta$

$= \vec{J} + \partial_t\nabla(\phi + \partial_t\theta) + (\nabla^2 - \partial_t^2)\nabla\theta$
$= \vec{J} + \nabla(\partial_t\phi + \nabla^2\theta)$ □

证明：$\nabla \times \vec{A} = \frac{\nabla\times\nabla\times\vec{B}}{-\nabla^2} + \nabla \times \nabla\theta = \frac{\nabla(\nabla\cdot\vec{B})-\nabla^2\vec{B}}{-\nabla^2} = \frac{0-\nabla^2\vec{B}}{-\nabla^2} = \vec{B}$ □

证明：$-\partial_t\vec{A} - \nabla\phi = \partial_t\frac{\nabla\times\vec{B}}{\nabla^2} - \partial_t\nabla\theta + \nabla\frac{\nabla\cdot\vec{E}}{\nabla^2} + \nabla\partial_t\theta$
$= \frac{\nabla\times\partial_t\vec{B}}{\nabla^2} + \nabla\frac{\nabla\cdot\vec{E}}{\nabla^2} = -\frac{\nabla\times\nabla\times\vec{E}}{\nabla^2} + \nabla\frac{\nabla\cdot\vec{E}}{\nabla^2}$
$= -\frac{\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}}{\nabla^2} + \frac{\nabla(\nabla\cdot\vec{E})}{\nabla^2} = \vec{E}$ □

反向证明：

证明：$\nabla\cdot\vec{E} = -\nabla\cdot\partial_t\vec{A} - \nabla\cdot\nabla\phi = -\partial_t(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\phi = -\partial_t\nabla^2\theta - \rho + \partial_t\nabla^2\theta = -\rho$ □

证明：$\nabla\times\vec{E} = -\nabla\times\partial_t\vec{A} - \nabla\times\nabla\phi = -\partial_t\nabla\times\vec{A} - 0 = -\partial_t\vec{B}$ □

证明：$\nabla\cdot\vec{B} = \nabla\cdot\nabla\times\vec{A} = 0$ □

证明：$\nabla\times\vec{B} - \partial_t\vec{E}$
$= \nabla\times\nabla\times\vec{A} + \partial_t^2\vec{A} + \partial_t\nabla\phi = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} + \partial_t^2\vec{A} + \partial_t\nabla\phi$
$= \nabla(\nabla^2\theta) - \nabla^2\vec{A} + \partial_t^2\vec{A} + \nabla\partial_t\phi = -\nabla^2\vec{A} + \partial_t^2\vec{A} + \nabla(\partial_t\phi + \nabla^2\theta)$
$= -\vec{J}$ □

证明：$\frac{\nabla\times\vec{B}}{-\nabla^2} + \nabla\theta = \frac{\nabla\times\nabla\times\vec{A}}{-\nabla^2} + \nabla\theta = \frac{\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}}{-\nabla^2} + \nabla\theta = \vec{A} + \frac{\nabla(\nabla^2\theta)}{-\nabla^2} + \nabla\theta = \vec{A}$ □

证明：$\frac{\nabla\cdot\vec{E}}{-\nabla^2} - \partial_t\theta = \frac{\nabla\cdot(\partial_t\vec{A}+\nabla\phi)}{\nabla^2} - \partial_t\theta = \frac{\partial_t(\nabla\cdot\vec{A})+\nabla^2\phi)}{\nabla^2} - \partial_t\theta = \phi + \frac{\partial_t\nabla^2\theta}{\nabla^2} - \partial_t\theta = \phi$ □

证明完毕。

推论1.2.1. $\begin{cases}[\partial_a + iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Psi = -i\sigma_{\varsigma ab}^{[\beta_\varsigma]}J^b \\ \vec{A} = \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\times(\Psi-\Psi^*)}{\nabla^2} + \nabla\theta \\ \phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\cdot(\Psi+\Psi^*)}{\nabla^2} - \partial_t\theta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\nabla^2\phi = \rho - \partial_t\nabla^2\theta, \nabla\cdot\vec{A} = \nabla^2\theta \\ \nabla^2\vec{A} - \partial_t^2\vec{A} = \vec{J} + \nabla(\partial_t\phi + \nabla^2\theta) \\ \Psi = -\partial_t\vec{A} - \nabla\phi - i\varsigma\nabla\times\vec{A}\end{cases}$

推论1.2.2. $\vec{A} = \tilde{A} - \nabla\theta, \phi = \tilde{\phi} + \partial_t\theta, \tilde{A} := \frac{\nabla\times\vec{B}}{-\nabla^2}, \tilde{\phi} := \frac{\nabla\cdot\vec{E}}{-\nabla^2}$

当$\theta = 0$时，便是辐射规范；当$\theta = \frac{\partial_t\phi}{-\nabla^2}$时，便是洛伦兹规范。

1.3 电磁场方程的辐射规范势描述($\theta = 0$)

定理1.3.1. $\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E} = -\rho, \nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0, \nabla\times\vec{B} = -\vec{J} + \partial_t\vec{E} \\ \tilde{A} = \frac{\nabla\times\vec{B}}{-\nabla^2}, \tilde{\phi} = \frac{\nabla\cdot\vec{E}}{-\nabla^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\nabla^2\tilde{A} - \partial_t^2\tilde{A} = \vec{J} + \partial_t\nabla\tilde{\phi} \\ \nabla^2\tilde{\phi} = \rho, \nabla\cdot\tilde{A} = 0 \\ \vec{E} = -\partial_t\tilde{A} - \nabla\tilde{\phi}, \vec{B} = \nabla\times\tilde{A}\end{cases}$

推论1.3.1. $\begin{cases}[\partial_a + iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Psi = -i\sigma_{\varsigma ab}^{[\beta_\varsigma]}J^b \\ \tilde{A} = \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\times(\Psi-\Psi^*)}{\nabla^2}, \tilde{\phi} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\cdot(\Psi+\Psi^*)}{\nabla^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\nabla^2\tilde{A} - \partial_t^2\tilde{A} = \vec{J} + \partial_t\nabla\tilde{\phi} \\ \nabla^2\tilde{\phi} = \rho, \nabla\cdot\tilde{A} = 0 \\ \sqrt{2}\Psi = -\partial_t\tilde{A} - \nabla\tilde{\phi} - i\varsigma\nabla\times\tilde{A}\end{cases}$

推论1.3.2.

$$[\tilde{A}_i(x), \tilde{A}_j(x')] = i(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x') \Rightarrow \begin{cases}[\tilde{A}_i(x), \partial_{t'}\tilde{A}_j(x')] = -i(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\partial_t\Delta(x-x') \\ [\partial_t\tilde{A}_i(x), \tilde{A}_j(x')] = i(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\partial_t\Delta(x-x') \\ [\tilde{A}_i(x), (\nabla'\times\tilde{A})_j(x')] = -i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\Delta(x-x') \\ [(\nabla\times\tilde{A})_i(x), \tilde{A}_j(x')] = -i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\Delta(x-x')\end{cases}$$

推论1.3.3.

$$[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')]=i(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')\Rightarrow\begin{cases}[\partial_t\tilde{A}_i(x),\partial_{t'}\tilde{A}_j(x')]=-i(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\Delta(x-x')\\ [(\nabla\times\tilde{A})_i(x),(\nabla'\times\tilde{A})_j(x')]=-i(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\Delta(x-x')\\ [\partial_t\tilde{A}_i(x),(\nabla'\times\tilde{A})_j(x')]=-i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t\Delta(x-x')\\ [(\nabla\times\tilde{A})_i(x),\partial_{t'}\tilde{A}_j(x')]=i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t\Delta(x-x')\end{cases}$$

定理1.3.2.

$$\begin{cases}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi_{\beta_\varsigma}(x')]=0,[\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\\ [\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Psi=-i\sigma^{[\beta_\varsigma]}_{\varsigma ab}J^b\\ \tilde{A}=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\times(\Psi-\Psi^*)}{\nabla^2},\tilde{\phi}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\cdot(\Psi+\Psi^*)}{\nabla^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')]=i(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')\\ [\tilde{A}_i(x),\tilde{\phi}(x')]=0,[\tilde{\phi}(x),\tilde{\phi}(x')]=0\\ \nabla^2\tilde{A}-\partial_t^2\tilde{A}=\vec{J}+\partial_t\nabla\tilde{\phi},\nabla^2\tilde{\phi}=\rho,\nabla\cdot\tilde{A}=0\\ \sqrt{2}\Psi=-\partial_t\tilde{A}-\nabla\tilde{\phi}-i\varsigma\nabla\times\tilde{A}\end{cases}$$

原始详细证明:(只给一个)

证明: $[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')]$
$=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{1}{\nabla^2}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{1}{\nabla'^2}[\varepsilon_i{}^{kl}\partial_k[\Psi_l(x)-\Psi_l^+(x)],\varepsilon_j{}^{mn}\partial'_m[\Psi_n(x')-\Psi_n^+(x')]]$
$=\frac{-1}{2}\frac{1}{\nabla^2\nabla'^2}\varepsilon_i{}^{kl}\varepsilon_j{}^{mn}\partial_k\partial'_m[\Psi_l(x)-\Psi_l^+(x),\Psi_n(x')-\Psi_n^+(x')]$
$=\frac{1}{2}\frac{1}{\nabla^2\nabla'^2}\varepsilon_i{}^{kl}\varepsilon_j{}^{mn}\partial_k\partial'_m\{[\Psi_l(x),\Psi_n^+(x')]+[\Psi_l^+(x),\Psi_n(x')]\}$
$=\frac{1}{2}\frac{1}{\nabla^2\nabla'^2}\varepsilon_i{}^{kl}\varepsilon_j{}^{mn}\partial_k\partial'_m[i\sigma^{ab}_{ln}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')-i\sigma^{ab}_{nl}\partial'_a\partial'_b\Delta(x'-x)]$
$=-\frac{1}{2}\frac{1}{\nabla^4}\varepsilon_i{}^{kl}\varepsilon_j{}^{mn}\partial_k\partial_m[i\sigma^{ab}_{ln}\partial_a\partial_b+i\sigma^{ab}_{nl}\partial_a\partial_b]\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{2}\frac{1}{\nabla^4}\varepsilon_i{}^{kl}\varepsilon_j{}^{mn}\partial_k\partial_m[(\nabla^2-\partial_\pi^2)\delta_{ln}-2\partial_l\partial_n]\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{2}\frac{1}{\nabla^4}\varepsilon_i{}^{kl}\delta_{ln}\varepsilon_j{}^{mn}\partial_k\partial_m(\nabla^2-\partial_\pi^2)\Delta(x-x')$
$=i\frac{1}{\nabla^4}\varepsilon_i{}^{kl}\delta_{ln}\varepsilon_j{}^{mn}\partial_k\partial_m\nabla^2\Delta(x-x')$
$=i\frac{1}{\nabla^2}\varepsilon_i{}^{kl}\delta_{ln}\varepsilon_j{}^{mn}\partial_k\partial_m\Delta(x-x')$
$=i\frac{1}{\nabla^2}(\delta_{ij}\delta_{km}-\delta_i^k\delta_j^m)\partial_k\partial_m\Delta(x-x')$
$=i\frac{1}{\nabla^2}(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\Delta(x-x')$
$=i(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')$ □

简洁证明:

证明: $[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')]$
$=[\frac{(\nabla\times\vec{B})_i}{-\nabla^2}(x),\frac{(\nabla'\times\vec{B})_j}{-\nabla'^2}(x')]=\frac{1}{\nabla^2\nabla'^2}[(\nabla\times\vec{B})_i(x),(\nabla'\times\vec{B})_j(x')]$
$=\frac{1}{\nabla^4}i(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\nabla^2\Delta(x-x')=i(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')$ □

证明: $[\tilde{A}_i(x),\tilde{\phi}(x')]=[\frac{(\nabla\times\vec{B})_i}{-\nabla^2}(x),\frac{\nabla'\cdot\vec{E}}{-\nabla'^2}(x')]=\frac{1}{\nabla^2\nabla'^2}[(\nabla\times\vec{B})_i(x),\nabla'\cdot\vec{E}(x')]$
$=\frac{1}{\nabla^4}[\varepsilon_i{}^{jk}\partial_jB_k(x),\nabla'\cdot\vec{E}(x')]=\frac{1}{\nabla^4}\varepsilon_i{}^{jk}\partial_j[B_k(x),\nabla'\cdot\vec{E}(x')]=0$ □

证明: $[\tilde{\phi}(x),\tilde{\phi}(x')]=[\frac{\nabla\cdot\vec{E}}{-\nabla^2}(x),\frac{\nabla'\cdot\vec{E}}{-\nabla'^2}(x')]=\frac{1}{\nabla^2\nabla'^2}[\nabla\cdot\vec{E}(x),\nabla'\cdot\vec{E}(x')]=0$ □

反向证明:

证明: $[\Psi_i(x),\Psi_j^+(x')]$
$=\frac{1}{2}[-\partial_t\tilde{A}_i(x)-\partial_i\tilde{\phi}(x)-i\varsigma(\nabla\times\tilde{A})_i(x),-\partial_{t'}\tilde{A}_j(x')-\partial'_j\tilde{\phi}(x')+i\varsigma(\nabla'\times\tilde{A})_j(x')]$
$=\frac{1}{2}[-\partial_t\tilde{A}_i(x)-i\varsigma(\nabla\times\tilde{A})_i(x),-\partial_{t'}\tilde{A}_j(x')+i\varsigma(\nabla'\times\tilde{A})_j(x')]$
$=\frac{1}{2}\{[\partial_t\tilde{A}_i(x),\partial_{t'}\tilde{A}_j(x')]+[(\nabla\times\tilde{A})_i(x),(\nabla'\times\tilde{A})_j(x')]-i\varsigma[\partial_t\tilde{A}_i(x),(\nabla'\times\tilde{A})_j(x')]+i\varsigma[(\nabla\times\tilde{A})_i(x),\partial_{t'}\tilde{A}_j(x')]\}$
$=-i(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\Delta(x-x')-\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t\Delta(x-x')$
$=i\sigma^{ab}_{ij}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$ □

证明：$[\Psi_i(x), \Psi_j(x')]$
$= \frac{1}{2}[-\partial_t \tilde{A}_i(x) - \partial_i \tilde{\phi}(x) - i\varsigma(\nabla \times \tilde{A})_i(x), -\partial_{t'} \tilde{A}_j(x') - \partial'_j \tilde{\phi}(x') - i\varsigma(\nabla' \times \tilde{A})_j(x')]$
$= \frac{1}{2}[-\partial_t \tilde{A}_i(x) - i\varsigma(\nabla \times \tilde{A})_i(x), -\partial_{t'} \tilde{A}_j(x') - i\varsigma(\nabla' \times \tilde{A})_j(x')]$
$= \frac{1}{2}\{[\partial_t \tilde{A}_i(x), \partial_{t'} \tilde{A}_j(x')] - [(\nabla \times \tilde{A})_i(x), (\nabla' \times \tilde{A})_j(x')] + i\varsigma[\partial_t \tilde{A}_i(x), (\nabla' \times \tilde{A})_j(x')] + i\varsigma[(\nabla \times \tilde{A})_i(x), \partial_{t'} \tilde{A}_j(x')]\}$
$= 0$ □

证明：$[\Psi_i^+(x), \Psi_j^+(x')]$
$= \frac{1}{2}[-\partial_t \tilde{A}_i(x) - \partial_i \tilde{\phi}(x) + i\varsigma(\nabla \times \tilde{A})_i(x), -\partial_{t'} \tilde{A}_j(x') - \partial'_j \tilde{\phi}(x') + i\varsigma(\nabla' \times \tilde{A})_j(x')]$
$= \frac{1}{2}[-\partial_t \tilde{A}_i(x) + i\varsigma(\nabla \times \tilde{A})_i(x), -\partial_{t'} \tilde{A}_j(x') + i\varsigma(\nabla' \times \tilde{A})_j(x')]$
$= \frac{1}{2}\{[\partial_t \tilde{A}_i(x), \partial_{t'} \tilde{A}_j(x')] - [(\nabla \times \tilde{A})_i(x), (\nabla' \times \tilde{A})_j(x')] - i\varsigma[\partial_t \tilde{A}_i(x), (\nabla' \times \tilde{A})_j(x')] - i\varsigma[(\nabla \times \tilde{A})_i(x), \partial_{t'} \tilde{A}_j(x')]\}$
$= 0$ □

推论1.3.4.

$$\begin{cases} [\tilde{A}_i(x), \tilde{A}_j(x')] = i(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x') \\ [\tilde{A}_i(x), \tilde{\phi}(x')] = 0, [\tilde{\phi}(x), \tilde{\phi}(x')] = 0 \\ \sqrt{2}\Psi = -\partial_t \tilde{A} - \nabla\tilde{\phi} - i\varsigma\nabla \times \tilde{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\tilde{A}_i(x), E_j(x')] = i(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2})\partial_t \Delta(x-x') \\ [E_i(x), \tilde{A}_j(x')] = -i(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2})\partial_t \Delta(x-x') \\ [\tilde{A}_i(x), B_j(x')] = -i\varepsilon_{ij}{}^k \partial_k \Delta(x-x') \\ [B_i(x), \tilde{A}_j(x')] = -i\varepsilon_{ij}{}^k \partial_k \Delta(x-x') \end{cases}$$

证明：$[B_i(x), \tilde{A}_j(x')]$
$= [\varepsilon_i{}^{kl} \partial_k \tilde{A}_l(x), \tilde{A}_j(x')]$
$= i\varepsilon_i{}^{kl} \partial_k (\delta_{lj} - \frac{\partial_l \partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')$
$= i\varepsilon_i{}^{kl} \partial_k \delta_{lj} \Delta(x-x')$
$= -i\varepsilon_{ij}{}^k \partial_k \Delta(x-x')$ □

证明：$[E_i(x) - i\varsigma B_i(x), \tilde{A}_j(x')]$
$= [-i(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2})\partial_t - \varsigma\varepsilon_{ij}{}^k \partial_k]\Delta(x-x')$
$= i\frac{\partial_t}{\nabla^2}(\partial_i \partial_j - \delta_{ij}\nabla^2 + i\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k \partial_k \partial_t)\Delta(x-x')$
$= i\sigma_{ij}^{ab} \partial_a \partial_b \frac{\partial_t}{\nabla^2}\Delta(x-x')$ □

推论1.3.5. $\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma \alpha'_\varsigma} \partial_a \partial_b = \partial_{\alpha_\varsigma} \partial_{\alpha'_\varsigma} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha_\varsigma \alpha'_\varsigma}(\nabla^2 + \partial_t^2) + i\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma \alpha'_\varsigma} \partial_k \partial_t$

推论1.3.6.

$$\begin{cases} [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x), \Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')] = i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma \alpha'_\varsigma} \partial_a \partial_b \Delta(x-x') \\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x), \Psi_{\beta_\varsigma}(x')] = 0, [\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x), \Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')] = 0 \\ \tilde{A} = \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}} \frac{\nabla \times (\Psi - \Psi^*)}{\nabla^2}, \tilde{\phi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\nabla \cdot (\Psi + \Psi^*)}{\nabla^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\Psi_i(x), \tilde{A}_j(x')] = \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{ij} \partial_a \partial_b \frac{\partial_t}{\nabla^2}\Delta(x-x') \\ [\tilde{A}_i(x), \Psi_j(x')] = -\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{ji} \partial_a \partial_b \frac{\partial_t}{\nabla^2}\Delta(x-x') \end{cases}$$

推论1.3.7.

$$\begin{cases} [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x), \Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')] = i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma \alpha'_\varsigma} \partial_a \partial_b \Delta(x-x') \\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x), \Psi_{\beta_\varsigma}(x')] = 0, [\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x), \Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')] = 0 \\ [\partial_a + iS_{ab}(\gamma, \varsigma)\partial^b]\Psi = -i\sigma^{[\beta_\varsigma]}_{\varsigma ab} J^b \\ \tilde{A} = \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}} \frac{\nabla \times (\Psi - \Psi^*)}{\nabla^2}, \tilde{\phi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\nabla \cdot (\Psi + \Psi^*)}{\nabla^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\tilde{\phi}(x), \tilde{A}(x')] = 0, [\tilde{\phi}(x), \tilde{\phi}(x')] = 0 \\ [\tilde{\phi}(x), \Psi(x')] = 0, [\tilde{\phi}(x), \Psi^+(x')] = 0 \\ [J_a(x), \tilde{A}(x')] = 0, [J_a(x), \tilde{\phi}(x')] = 0 \\ [J_a(x), \Psi(x')] = 0, [J_a(x), \Psi^+(x')] = 0 \\ [J_a(x), J_b(x')] = 0 \end{cases}$$

从上可知，电磁场方程和辐射规范势方程、约束条件与协变对易关系是相容的，且标势$\tilde{\phi}(x)$和源$J_a(x)$相对于电磁场是c-数，不是算子。从这个意义上知标势即静电场不可量子化，因为它连算子都不是。

1.4 一般电磁场场强协变对易关系分析

定理1.4.1.

$$\begin{cases}[\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Psi(x)=-i\sigma^{[\beta_\varsigma]}_{\varsigma ab}J^b(x)\\ \Psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{E}(x)-i\varsigma\vec{B}(x)]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}(x)=-\rho(x),\nabla\times\vec{E}(x)=-\partial_t\vec{B}(x)\\ \nabla\cdot\vec{B}(x)=0,\nabla\times\vec{B}(x)=-\vec{J}(x)+\partial_t\vec{E}(x)\end{cases}$$

定理1.4.2.

$$\begin{cases}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi_{\beta_\varsigma}(x')]=0,[\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\\ \Psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{E}(x)-i\varsigma\vec{B}(x)]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[E_i(x),E_j(x')]=-i(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\Delta(x-x')\\ [B_i(x),B_j(x')]=-i(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\Delta(x-x')\\ [E_i(x),B_j(x')]=i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t\Delta(x-x')\\ [B_i(x),E_j(x')]=-i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t\Delta(x-x')\end{cases}$$

推论1.4.1.
$$\begin{cases}[\nabla\cdot\vec{E}(x),\vec{E}(x')]=0\\ [\nabla\cdot\vec{B}(x),\vec{B}(x')]=0\\ [\nabla\cdot\vec{E}(x),\vec{B}(x')]=0\\ [\nabla\cdot\vec{B}(x),\vec{E}(x')]=0\end{cases}\quad\begin{cases}[\nabla\cdot\vec{E}(x),\nabla'\cdot\vec{E}(x')]=0\\ [\nabla\cdot\vec{B}(x),\nabla'\cdot\vec{B}(x')]=0\\ [\nabla\cdot\vec{E}(x),\nabla'\cdot\vec{B}(x')]=0\\ [\nabla\cdot\vec{B}(x),\nabla'\cdot\vec{E}(x')]=0\end{cases}$$

推论1.4.2.
$$\begin{cases}[\partial_tE_i(x)-(\nabla\times\vec{B})_i(x),\vec{E}(x')]=0\\ [\partial_tE_i(x)-(\nabla\times\vec{B})_i(x),\vec{B}(x')]=0\\ [\partial_tB_i(x)+(\nabla\times\vec{E})_i(x),\vec{E}(x')]=0\\ [\partial_tB_i(x)+(\nabla\times\vec{E})_i(x),\vec{B}(x')]=0\end{cases}$$

推论1.4.3.
$$\begin{cases}[J_i(x),\vec{E}(x')]=0,[J_i(x),\vec{B}(x')]=0\\ [\rho(x),\vec{E}(x')]=0,[\rho(x),\vec{B}(x')]=0\\ [J_a(x),\vec{E}(x')]=0,[J_a(x),\vec{B}(x')]=0\\ [J_a(x),J_b(x')]=0\end{cases}$$

推论1.4.4.
$$\begin{cases}[(\nabla\times\vec{E})_i(x),(\nabla'\times\vec{E})_j(x')]=i(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\nabla^2\Delta(x-x')\\ [(\nabla\times\vec{B})_i(x),(\nabla'\times\vec{B})_j(x')]=i(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\nabla^2\Delta(x-x')\\ [(\nabla\times\vec{E})_i(x),(\nabla'\times\vec{B})_j(x')]=-i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t\nabla^2\Delta(x-x')\\ [(\nabla\times\vec{B})_i(x),(\nabla'\times\vec{E})_j(x')]=i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t\nabla^2\Delta(x-x')\end{cases}$$

推论1.4.5.
$$\begin{cases}[\partial_tE_i(x),\partial_{t'}E_j(x')]=i(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\nabla^2\Delta(x-x')\\ [\partial_tB_i(x),\partial_{t'}B_j(x')]=i(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\nabla^2\Delta(x-x')\\ [\partial_tE_i(x),\partial_{t'}B_j(x')]=-i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t\nabla^2\Delta(x-x')\\ [\partial_tB_i(x),\partial_{t'}E_j(x')]=i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t\nabla^2\Delta(x-x')\end{cases}$$

推论1.4.6.
$$\begin{cases}[\partial_tE_i(x),(\nabla'\times\vec{B})_j(x')]=i(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\nabla^2\Delta(x-x')\\ [(\nabla\times\vec{B})_i(x),\partial_{t'}E_j(x')]=i(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\nabla^2\Delta(x-x')\\ [\partial_tB_i(x),(\nabla'\times\vec{E})_j(x')]=-i(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\nabla^2\Delta(x-x')\\ [(\nabla\times\vec{E})_i(x),\partial_{t'}B_j(x')]=-i(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\nabla^2\Delta(x-x')\end{cases}$$

推论1.4.7. $\begin{cases}[\partial_t E_i(x),(\nabla'\times\vec{E})_j(x')]=i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t\Delta(x-x')\\ [(\nabla\times\vec{E})_i(x),\partial_{t'}E_j(x')]=-i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t\Delta(x-x')\\ [\partial_t B_i(x),(\nabla'\times\vec{B})_j(x')]=i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t\Delta(x-x')\\ [(\nabla\times\vec{B})_i(x),\partial_{t'}B_j(x')]=-i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t\Delta(x-x')\end{cases}$

从上可知，一般电磁场方程和约束条件与协变对易关系是相容的，且源$J_a(x)$相对于电磁场是c-数。

1.5 电磁场方程的洛伦兹λ-规范势描述($\theta=\frac{\partial_t\phi}{-\nabla^2}$)有内在矛盾

定理1.5.1. $\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=-\rho,\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0,\nabla\times\vec{B}=-\vec{J}+\partial_t\vec{E}\\ \vec{A}=\frac{\nabla\times\vec{B}+\nabla\partial_t\phi}{-\nabla^2},\phi=\frac{\nabla\cdot\vec{E}-\partial_t^2\phi}{-\nabla^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\partial_t^2\vec{A}=\vec{J},\nabla^2\phi-\partial_t^2\phi=\rho\\ \nabla\cdot\vec{A}+\partial_t\phi=0\\ \vec{E}=-\partial_t\vec{A}-\nabla\phi,\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{cases}$

定理1.5.2. ??? $\begin{cases}\langle|\nabla\cdot\vec{E}=-\rho|\rangle,\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0,\langle|\nabla\times\vec{B}=-\vec{J}+\partial_t\vec{E}|\rangle\\ \vec{A}=\frac{\nabla\times\vec{B}+\nabla\partial_t\phi}{-\nabla^2},\phi=\frac{\nabla\cdot\vec{E}-\partial_t^2\phi}{-\nabla^2}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=-\rho-\partial_t(\nabla\cdot\vec{A}+\partial_t\phi),\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0,\nabla\times\vec{B}=-\vec{J}+\partial_t\vec{E}+\nabla(\nabla\cdot\vec{A}+\partial_t\phi)\\ \langle|\vec{A}=\frac{\nabla\times\vec{B}+\nabla\partial_t\phi}{-\nabla^2}|\rangle,\phi=\frac{\nabla\cdot\vec{E}-\partial_t^2\phi}{-\nabla^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\partial_t^2\vec{A}=\vec{J},\nabla^2\phi-\partial_t^2\phi=\rho\\ \langle|\nabla\cdot\vec{A}+\partial_t\phi|\rangle=0\\ \vec{E}=-\partial_t\vec{A}-\nabla\phi,\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{cases}$$

推论1.5.1. $\begin{cases}[\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Psi=-i\sigma_{\varsigma ab}^{[\beta_\varsigma]}J^b\\ \vec{A}=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\times(\Psi-\Psi^*)}{\nabla^2}-\frac{\nabla\partial_t}{\nabla^2}\phi\\ \phi=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\cdot(\Psi+\Psi^*)}{\nabla^2}+\frac{\partial_t^2}{\nabla^2}\phi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\partial_t^2\vec{A}=\vec{J},\nabla^2\phi-\partial_t^2\phi=\rho\\ \nabla\cdot\vec{A}+\partial_t\phi=0\\ \sqrt{2}\Psi=-\partial_t\vec{A}-\nabla\phi-i\varsigma\nabla\times\vec{A}\end{cases}$

推论1.5.2.

$$\begin{cases}[A_a(x),A_b(x')]=i(\delta_{ab}-\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_a\partial_b}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')\\ \phi=-iA_0,\sqrt{2}\Psi=-\partial_t\vec{A}-\nabla\phi-i\varsigma\nabla\times\vec{A}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi_{\beta_\varsigma}(x')]=0,[\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\\ [\Psi_i(x),\phi(x')]=[\Psi^+_i(x),\phi(x')]=\frac{i}{\sqrt{2}}\partial_i\Delta(x-x')\\ [\phi(x),\phi(x')]=-i(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')\end{cases}$$

证明: $[\Psi_i(x),\Psi_j(x')]$
$=\frac{1}{2}\{[-\partial_tA_i(x)-\partial_i\phi(x)-i\varsigma(\nabla\times\vec{A})_i(x),-\partial_{t'}A_j(x')-\partial'_j\phi(x')-i\varsigma(\nabla'\times\vec{A})_j(x')]$
$=\frac{1}{2}[-\partial_tA_i(x)-i\varsigma(\nabla\times\vec{A})_i(x),-\partial_{t'}A_j(x')-i\varsigma(\nabla'\times\vec{A})_j(x')]$
$+[\partial_i\phi(x),\partial'_j\phi(x')]+[\partial_i\phi(x),\partial_{t'}A_j(x')]+[\partial_tA_i(x),\partial'_j\phi(x')]\}$
$=\frac{1}{2}\{[\partial_tA_i(x),\partial_{t'}A_j(x')]-[(\nabla\times\vec{A})_i(x),(\nabla'\times\vec{A})_j(x')]+i\varsigma[\partial_tA_i(x),(\nabla'\times\vec{A})_j(x')]+i\varsigma[(\nabla\times\vec{A})_i(x),\partial_{t'}A_j(x')]$
$+[\partial_i\phi(x),\partial'_j\phi(x')]+[\partial_i\phi(x),\partial_{t'}A_j(x')]+[\partial_tA_i(x),\partial'_j\phi(x')]\}$
$=\frac{1}{2}\{[\partial_tA_i(x),\partial_{t'}A_j(x')]-[(\nabla\times\vec{A})_i(x),(\nabla'\times\vec{A})_j(x')]+[\partial_i\phi(x),\partial'_j\phi(x')]+[\partial_i\phi(x),\partial_{t'}A_j(x')]+[\partial_tA_i(x),\partial'_j\phi(x')]\}$
$=\frac{1}{2}\{i\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_i\partial_j\nabla^2}{\Box+i\varepsilon}-i\partial_i\partial_j+i(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\partial_i\partial_j-i\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_i\partial_j\nabla^2}{\Box+i\varepsilon}-i\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_i\partial_j\nabla^2}{\Box+i\varepsilon}\}\Delta(x-x')$
$=0$ □

证明: $[\Psi^+_i(x),\Psi^+_j(x')]$
$=\frac{1}{2}\{[-\partial_tA_i(x)-\partial_i\phi(x)+i\varsigma(\nabla\times\vec{A})_i(x),-\partial_{t'}A_j(x')-\partial'_j\phi(x')+i\varsigma(\nabla'\times\vec{A})_j(x')]$
$=\frac{1}{2}[-\partial_tA_i(x)+i\varsigma(\nabla\times\vec{A})_i(x),-\partial_{t'}A_j(x')+i\varsigma(\nabla'\times\vec{A})_j(x')]$
$+[\partial_i\phi(x),\partial'_j\phi(x')]+[\partial_i\phi(x),\partial_{t'}A_j(x')]+[\partial_tA_i(x),\partial'_j\phi(x')]\}$
$=\frac{1}{2}\{[\partial_tA_i(x),\partial_{t'}A_j(x')]-[(\nabla\times\vec{A})_i(x),(\nabla'\times\vec{A})_j(x')]-i\varsigma[\partial_tA_i(x),(\nabla'\times\vec{A})_j(x')]-i\varsigma[(\nabla\times\vec{A})_i(x),\partial_{t'}A_j(x')]$
$+[\partial_i\phi(x),\partial'_j\phi(x')]+[\partial_i\phi(x),\partial_{t'}A_j(x')]+[\partial_tA_i(x),\partial'_j\phi(x')]\}$

$= \frac{1}{2}\{[\partial_t A_i(x), \partial_{t'} A_j(x')] - [(\nabla\times\vec{A})_i(x), (\nabla'\times\vec{A})_j(x')] + [\partial_i\phi(x), \partial'_j\phi(x')] + [\partial_i\phi(x), \partial_{t'}A_j(x')] + [\partial_t A_i(x), \partial'_j\phi(x')]\}$
$= \frac{1}{2}\{i\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_i\partial_j\nabla^2}{\square+i\varepsilon} - i\partial_i\partial_j + i(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\square+i\varepsilon})\partial_i\partial_j - i\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_i\partial_j\nabla^2}{\square+i\varepsilon} - i\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_i\partial_j\nabla^2}{\square+i\varepsilon}\}\Delta(x-x')$
$= 0$ □

证明： $[\Psi_i(x), \Psi_j^+(x')]$
$= \frac{1}{2}\{[-\partial_t A_i(x) - \partial_i\phi(x) - i\varsigma(\nabla\times\vec{A})_i(x), -\partial_{t'}A_j(x') - \partial'_j\phi(x') + i\varsigma(\nabla'\times\vec{A})_j(x')]$
$= \frac{1}{2}[-\partial_t A_i(x) - i\varsigma(\nabla\times\vec{A})_i(x), -\partial_{t'}A_j(x') + i\varsigma(\nabla'\times\vec{A})_j(x')]$
$+ [\partial_i\phi(x), \partial'_j\phi(x')] + [\partial_i\phi(x), \partial_{t'}A_j(x')] + [\partial_t A_i(x), \partial'_j\phi(x')]\}$
$= \frac{1}{2}\{[\partial_t A_i(x), \partial_{t'}A_j(x')] + [(\nabla\times\vec{A})_i(x), (\nabla'\times\vec{A})_j(x')] - i\varsigma[\partial_t A_i(x), (\nabla'\times\vec{A})_j(x')] + i\varsigma[(\nabla\times\vec{A})_i(x), \partial_{t'}A_j(x')]$
$+ [\partial_i\phi(x), \partial'_j\phi(x')] + [\partial_i\phi(x), \partial_{t'}A_j(x')] + [\partial_t A_i(x), \partial'_j\phi(x')]\}$
$= [(\nabla\times\vec{A})_i(x), (\nabla'\times\vec{A})_j(x')] - i\varsigma[\partial_t A_i(x), (\nabla'\times\vec{A})_j(x')]$
$+ \frac{1}{2}\{[\partial_t A_i(x), \partial_{t'}A_j(x')] - [(\nabla\times\vec{A})_i(x), (\nabla'\times\vec{A})_j(x')] + i\varsigma[\partial_t A_i(x), (\nabla'\times\vec{A})_j(x')] + i\varsigma[(\nabla\times\vec{A})_i(x), \partial_{t'}A_j(x')]$
$+ [\partial_i\phi(x), \partial'_j\phi(x')] + [\partial_i\phi(x), \partial_{t'}A_j(x')] + [\partial_t A_i(x), \partial'_j\phi(x')]\}$
$= [(\nabla\times\vec{A})_i(x), (\nabla'\times\vec{A})_j(x')] - i\varsigma[\partial_t A_i(x), (\nabla'\times\vec{A})_j(x')]$
$+ \frac{1}{2}\{[\partial_t A_i(x), \partial_{t'}A_j(x')] - [(\nabla\times\vec{A})_i(x), (\nabla'\times\vec{A})_j(x')] + [\partial_i\phi(x), \partial'_j\phi(x')] + [\partial_i\phi(x), \partial_{t'}A_j(x')] + [\partial_t A_i(x), \partial'_j\phi(x')]\}$
$= [(\nabla\times\vec{A})_i(x), (\nabla'\times\vec{A})_j(x')] - i\varsigma[\partial_t A_i(x), (\nabla'\times\vec{A})_j(x')]$
$= -i(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\nabla^2\Delta(x-x') - \varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t\Delta(x-x')$
$= i\sigma_{ij}^{ab}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$ □

证明： $[\phi(x), \phi(x')] = -[A_0(x), A_0(x')] = -i(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\square+i\varepsilon})\Delta(x-x')$ □

证明： $[\Psi_i(x), \phi(x')]$
$= \frac{1}{\sqrt{2}}[-\partial_t A_i(x) - \partial_i\phi(x) - i\varsigma(\nabla\times\vec{A})_i(x), \phi(x')]$
$= -\frac{1}{\sqrt{2}}[\partial_t A_i(x) + \partial_i\phi(x), \phi(x')]$
$= -\frac{1}{\sqrt{2}}[i\partial_t\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_i\partial_t}{\square+i\varepsilon}\Delta(x-x') - i\partial_i(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\square+i\varepsilon})\Delta(x-x')]$
$= -\frac{i}{\sqrt{2}}[\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_i\nabla^2}{\square+i\varepsilon} - \partial_i(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\square+i\varepsilon})]\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_i\Delta(x-x')$ □

证明： $[\Psi_i^+(x), \phi(x')]$
$= \frac{1}{\sqrt{2}}[-\partial_t A_i(x) - \partial_i\phi(x) + i\varsigma(\nabla\times\vec{A})_i(x), \phi(x')]$
$= -\frac{1}{\sqrt{2}}[\partial_t A_i(x) + \partial_i\phi(x), \phi(x')]$
$= -\frac{1}{\sqrt{2}}[i\partial_t\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_i\partial_t}{\square+i\varepsilon}\Delta(x-x') - i\partial_i(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\square+i\varepsilon})\Delta(x-x')]$
$= -\frac{i}{\sqrt{2}}[\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_i\nabla^2}{\square+i\varepsilon} - \partial_i(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\square+i\varepsilon})]\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_i\Delta(x-x')$ □

推论1.5.3.

$$\begin{cases}[A_a(x), A_b(x')] = i(\delta_{ab} - \frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_a\partial_b}{\square+i\varepsilon})\Delta(x-x') \\ \nabla^2\vec{A} - \partial_t^2\vec{A} = \vec{J}, \nabla^2\phi - \partial_t^2\phi = \rho \\ ?\nabla\cdot\vec{A} + \partial_t\phi = 0?, \phi = -iA_0 \\ \sqrt{2}\Psi = -\partial_t\vec{A} - \nabla\phi - i\varsigma\nabla\times\vec{A}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x), \Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')] = i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x') \\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x), \Psi_{\beta_\varsigma}(x')] = 0, [\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x), \Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')] = 0 \\ [\Psi_i(x), \phi(x')] = [\Psi_i^+(x), \phi(x')] = \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_i\Delta(x-x') \\ [\phi(x), \phi(x')] = -i(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\square+i\varepsilon})\Delta(x-x') \\ [\partial_a + iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Psi = -i\sigma^{[\beta_\varsigma]}_{\varsigma ab}J^b, A_0(x) = i\phi(x) \\ \vec{A} = \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\times(\Psi-\Psi^*)}{\nabla^2} - \frac{\nabla\partial_t}{\nabla^2}\phi, \phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\cdot(\Psi+\Psi^*)}{\nabla^2} + \frac{\partial_t^2}{\nabla^2}\phi\end{cases}$$

推论1.5.4.

$$\begin{cases}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi_{\beta_\varsigma}(x')]=0,[\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\\ [\Psi_i(x),\phi(x')]=[\Psi^+_i(x),\phi(x')]=\frac{i}{\sqrt{2}}\partial_i\Delta(x-x')\\ [\phi(x),\phi(x')]=-i(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')\\ \vec{A}=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\times(\Psi-\Psi^*)}{\nabla^2}-\frac{\nabla\partial_t}{\nabla^2}\phi,\phi=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\cdot(\Psi+\Psi^*)}{\nabla^2}+\frac{\partial_t^2}{\nabla^2}\phi\end{cases}!\Rightarrow\begin{cases}[A_a(x),A_b(x')]=i(\delta_{ab}-\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_a\partial_b}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')\\ \phi=-iA_0\end{cases}$$

证明：$[A_i(x),A_j(x')]$

$=[\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{(\nabla\times[\Psi(x)-\Psi^*(x)])_i}{\nabla^2}-\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{(\nabla'\times[\Psi(x')-\Psi^*(x')])_j}{\nabla'^2}-\frac{\partial'_j\partial_{t'}}{\nabla'^2}\phi(x')]$

$=[\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{(\nabla\times[\Psi(x)-\Psi^*(x)])_i}{\nabla^2},\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{(\nabla'\times[\Psi(x')-\Psi^*(x')])_j}{\nabla'^2}]+[\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),\frac{\partial'_j\partial_{t'}}{\nabla'^2}\phi(x')]$

$+[\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{(\nabla\times[\Psi(x)-\Psi^*(x)])_i}{\nabla^2},-\frac{\partial'_j\partial_{t'}}{\nabla'^2}\phi(x')]+[-\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{(\nabla'\times[\Psi(x')-\Psi^*(x')])_j}{\nabla'^2}]$

$=[\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{(\nabla\times[\Psi(x)-\Psi^*(x)])_i}{\nabla^2},\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{(\nabla'\times[\Psi(x')-\Psi^*(x')])_j}{\nabla'^2}]+[\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),\frac{\partial'_j\partial_{t'}}{\nabla'^2}\phi(x')]$

$=[\frac{(\nabla\times\vec{B})_i}{-\nabla^2},\frac{(\nabla'\times\vec{B})_j}{-\nabla'^2}]+[\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),\frac{\partial'_j\partial_{t'}}{\nabla'^2}\phi(x')]$

$=\frac{1}{\nabla^2\nabla'^2}[(\nabla\times\vec{B})_i,(\nabla'\times\vec{B})_j]+\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\frac{\partial'_j\partial_{t'}}{\nabla'^2}[\phi(x),\phi(x')]$

$=\frac{1}{\nabla^2\nabla'^2}i(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\nabla^2\Delta(x-x')-i\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\frac{\partial'_j\partial_{t'}}{\nabla'^2}(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')$

$=\frac{1}{\nabla^2}i(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\Delta(x-x')-i\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')$

$=\frac{1}{\nabla^2}i\delta_{ij}\nabla^2\Delta(x-x')-i\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}(2+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')$

$=i(\delta_{ij}-\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_i\partial_j}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')-2i\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\Delta(x-x')$ □

证明：$[A_i(x),\phi(x')]$

$=[\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{(\nabla\times[\Psi(x)-\Psi^*(x)])_i}{\nabla^2}-\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),\phi(x')]$

$=-[\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),\phi(x')]$

$=i\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')$

$=i\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_i\partial_t}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')+i\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\Delta(x-x')$ □

推论1.5.5. $[\tilde{A}_i(x),\phi(x')]=-i\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\Delta(x-x')\Leftrightarrow\begin{cases}[\Psi_i(x),\phi(x')]=\frac{i}{\sqrt{2}}\partial_i\Delta(x-x')\\ [\Psi^+_i(x),\phi(x')]=\frac{i}{\sqrt{2}}\partial_i\Delta(x-x')\end{cases}$

从上可知，电磁场方程约束条件与协变对易关系不相容的，如何合理重新选择额外引入的ϕ的对易关系去解决这个问题？虽然传统是把约束条件不看作算符方程，作为对物理态的挑选，但这样做不自然，所以有必要寻求更合理的势协变方案。

1.6 洛伦兹规范势和辐射规范势两种描述的等价转换

1.6.1 两种规范势方程的等价性

定理1.6.1.

$$\begin{cases}\nabla^2\tilde{A}-\partial_t^2\tilde{A}=\vec{J}+\partial_t\nabla\tilde{\phi},\nabla^2\tilde{\phi}=\rho\\ \vec{A}=\tilde{A}-\nabla\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi,\phi=\tilde{\phi}+\partial_t\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi\\ \vec{E}=-\partial_t\tilde{A}-\nabla\tilde{\phi},\vec{B}=\nabla\times\tilde{A}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\partial_t^2\vec{A}=\vec{J},\nabla^2\phi-\partial_t^2\phi=\rho\\ \tilde{A}=\vec{A}+\nabla\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi,\tilde{\phi}=\phi-\partial_t\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi\\ \vec{E}=-\partial_t\vec{A}-\nabla\phi,\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{cases}$$

定理1.6.2.

$$\begin{cases}\nabla^2\tilde{A}-\partial_t^2\tilde{A}=\vec{J}+\partial_t\nabla\tilde{\phi},\nabla^2\tilde{\phi}=\rho\\ \nabla\cdot\tilde{A}=0\\ \vec{A}=\tilde{A}-\nabla\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi,\phi=\tilde{\phi}+\partial_t\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi\\ \vec{E}=-\partial_t\tilde{A}-\nabla\tilde{\phi},\vec{B}=\nabla\times\tilde{A}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\partial_t^2\vec{A}=\vec{J},\nabla^2\phi-\partial_t^2\phi=\rho\\ \nabla\cdot\vec{A}+\partial_t\phi=0\\ \tilde{A}=\vec{A}+\nabla\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi,\tilde{\phi}=\phi-\partial_t\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi\\ \vec{E}=-\partial_t\vec{A}-\nabla\phi,\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{cases}$$

定理1.6.3.

$$\begin{cases}\nabla^2\tilde{A}-\partial_t^2\tilde{A}=\vec{J}+\partial_t\nabla\tilde{\phi},\nabla^2\tilde{\phi}=\rho\\ \langle|\nabla\cdot\tilde{A}|\rangle=0\\ \vec{A}=\tilde{A}-\nabla\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi,\phi=\tilde{\phi}+\partial_t\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi\\ \vec{E}=-\partial_t\tilde{A}-\nabla\tilde{\phi},\vec{B}=\nabla\times\tilde{A}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\partial_t^2\vec{A}=\vec{J},\nabla^2\phi-\partial_t^2\phi=\rho\\ \langle|\nabla\cdot\vec{A}+\partial_t\phi|\rangle=0\\ \tilde{A}=\vec{A}+\nabla\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi,\tilde{\phi}=\phi-\partial_t\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi\\ \vec{E}=-\partial_t\vec{A}-\nabla\phi,\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{cases}$$

1.6.2 两种规范势对易关系的等价性

定理1.6.4.

$$\begin{cases}\begin{cases}[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')]=i(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')\\ [\tilde{A}_i(x),\tilde{\phi}(x')]=[\tilde{\phi}(x),\tilde{\phi}(x')]=0\\ \phi(x)=\tilde{\phi}(x)+\partial_t\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi(x)\\ A_i(x)=\tilde{A}_i(x)-\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),A_0(x)=i\phi(x)\end{cases}\\ \begin{cases}[\phi(x),\phi(x')]=-i(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')\\ [\tilde{A}_i(x),\phi(x')]=-i\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\Delta(x-x'),[\tilde{\phi}(x),\phi(x')]=0\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[A_a(x),A_b(x')]=i(\delta_{ab}-\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_a\partial_b}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')\\ \tilde{A}_i(x)=A_i(x)+\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x)\\ \tilde{\phi}(x)=\phi(x)-\partial_t\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi(x)\\ \phi(x)=-iA_0(x)\end{cases}$$

证明： $[A_i(x),A_j(x')]$

$=[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')]+[\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),\frac{\partial'_j\partial'_t}{\nabla'^2}\phi(x')]-[\tilde{A}_i(x),\frac{\partial'_j\partial'_t}{\nabla'^2}\phi(x')]-[\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),\tilde{A}_j(x')]$

$=[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')]+\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\frac{\partial'_j\partial'_t}{\nabla'^2}[\phi(x),\phi(x')]-\frac{\partial'_j\partial'_t}{\nabla'^2}[\tilde{A}_i(x),\phi(x')]-\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}[\phi(x),\tilde{A}_j(x')]$

$=[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')]-i\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\frac{\partial'_j\partial'_t}{\nabla'^2}(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')+i\frac{\partial'_j\partial'_t}{\nabla'^2}\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\Delta(x-x')-i\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\frac{\partial'_j\partial'_t}{\nabla'^2}\Delta(x'-x)$

$=[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')]+i\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\frac{\partial_j\partial_t}{\nabla^2}(1-\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')$

$=[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')]+i\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}(1-\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')$

$=i(\delta_{ij}-\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_i\partial_j}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')$ □

证明： $[A_0(x),A_0(x')]=-[\phi(x),\phi(x')]=i(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')$ □

证明： $[A_i(x),A_0(x')]=i[A_i(x),\phi(x')]=i[\tilde{A}_i(x),\phi(x')]+i[-\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),\phi(x')]$

$=\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\Delta(x-x')-\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')$

$=-\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_i\partial_t}{\Box+i\varepsilon}\Delta(x-x')=i(\delta_{i\pi}-\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_i\partial_\pi}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')$ □

反向证明：

证明： $[\phi(x),\phi(x')]=-[A_0(x),A_0(x')]=-i(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')$ □

证明： $[\tilde{A}_i(x),\phi(x')]=[A_i(x),\phi(x')]+[\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),\phi(x')]=-i\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\Delta(x-x')$ □

证明： $[\phi(x),\tilde{A}_i(x')]=[\phi(x),A_i(x')]+[\phi(x),\frac{\partial'_i\partial_{t'}}{\nabla^2}\phi(x')]=-i\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\Delta(x-x')$ □

证明： $[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')]$

$=[A_i(x),A_j(x')]+[\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),\frac{\partial'_j\partial'_t}{\nabla'^2}\phi(x')]+[A_i(x),\frac{\partial'_j\partial'_t}{\nabla'^2}\phi(x')]+[\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),A_j(x')]$

$=[A_i(x),A_j(x')]+\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\frac{\partial'_j\partial'_t}{\nabla'^2}[\phi(x),\phi(x')]+\frac{\partial'_j\partial'_t}{\nabla'^2}[A_i(x),\phi(x')]+\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}[\phi(x),A_j(x')]$

$=[A_i(x),A_j(x')]-i\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\frac{\partial'_j\partial'_t}{\nabla'^2}(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')+i\frac{\partial'_j\partial_{t'}}{\nabla'^2}\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_i\partial_t}{\Box+i\varepsilon}\Delta(x-x')-i\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial'_j\partial_{t'}}{\Box'+i\varepsilon}\Delta(x'-x)$

$=[A_i(x),A_j(x')]-i\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}(1-\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')$

$=[A_i(x),A_j(x')]-i\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\frac{\partial_j\partial_t}{\nabla^2}(1-\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')$

$=[A_i(x),A_j(x')]-i\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}(1-\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')$

$=i(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')$ □

1.6.3 两种规范势方程和对易关系联立后的等价性

推论1.6.1.

$$\begin{cases}\begin{cases}\nabla^2\tilde{A}-\partial_t^2\tilde{A}=\vec{J}+\partial_t\nabla\tilde{\phi},\nabla^2\tilde{\phi}=\rho\\ \vec{E}=-\partial_t\tilde{A}-\nabla\tilde{\phi},\vec{B}=\nabla\times\tilde{A}\end{cases}\\ \begin{cases}[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')]=i(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')\\ [\tilde{A}_i(x),\tilde{\phi}(x')]=[\tilde{\phi}(x),\tilde{\phi}(x')]=0\\ \phi(x)=\tilde{\phi}(x)+\partial_t\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi(x)\\ A_i(x)=\tilde{A}_i(x)-\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),A_0(x)=i\phi(x)\end{cases}\\ \begin{cases}[\phi(x),\phi(x')]=-i(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')\\ [\tilde{A}_i(x),\phi(x')]=-i\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\Delta(x-x'),[\tilde{\phi}(x),\phi(x')]=0\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\partial_t^2\vec{A}=\vec{J},\nabla^2\phi-\partial_t^2\phi=\rho\\ \vec{E}=-\partial_t\vec{A}-\nabla\phi,\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{cases}\\ \begin{cases}[A_a(x),A_b(x')]=i(\delta_{ab}-\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_a\partial_b}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')\\ \tilde{A}_i(x)=A_i(x)+\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x)\\ \tilde{\phi}(x)=\phi(x)-\partial_t\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi(x)\\ \phi(x)=-iA_0(x)\end{cases}\end{cases}$$

1.6.4 规范条件与对易关系的不相容性

推论1.6.2.

$$\begin{cases}\nabla\cdot\tilde{A}(x)=0\\ [\tilde{A}_i(x),\phi(x')]=-i\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\Delta(x-x')\\ A_i(x)=\tilde{A}_i(x)-\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x)\\ A_0(x)=i\phi(x)\end{cases}\text{不相容。}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^aA_a(x)=0\\ [A_i(x)+\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),\phi(x')]=-i\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\Delta(x-x')\\ \tilde{A}_i(x)=A_i(x)+\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x)\\ \phi(x)=-iA_0(x)\end{cases}\text{不相容。}$$

从上可知，规范条件与某个对易关系的不相容。不相容性本质上来源于非物理引入的ϕ。

1.6.5 规范条件与对易关系不相容性的解决

推论1.6.3.

$$\begin{cases}\begin{cases}\nabla^2\tilde{A}-\partial_t^2\tilde{A}=\vec{J}+\partial_t\nabla\tilde{\phi},\nabla^2\tilde{\phi}=\rho\\ \vec{E}=-\partial_t\tilde{A}-\nabla\tilde{\phi},\vec{B}=\nabla\times\tilde{A}\\ \langle|\nabla\cdot\tilde{A}|\rangle=0\end{cases}\\ \begin{cases}[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')]=i(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')\\ [\tilde{A}_i(x),\tilde{\phi}(x')]=[\tilde{\phi}(x),\tilde{\phi}(x')]=0\\ \phi(x)=\tilde{\phi}(x)+\partial_t\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi(x)\\ A_i(x)=\tilde{A}_i(x)-\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x),A_0(x)=i\phi(x)\end{cases}\\ \begin{cases}[\phi(x),\phi(x')]=-i(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')\\ [\tilde{A}_i(x),\phi(x')]=-i\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\Delta(x-x'),[\tilde{\phi}(x),\phi(x')]=0\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\partial_t^2\vec{A}=\vec{J},\nabla^2\phi-\partial_t^2\phi=\rho\\ \vec{E}=-\partial_t\vec{A}-\nabla\phi,\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\\ \langle|\nabla\cdot\vec{A}+\partial_t\phi|\rangle=0\end{cases}\\ \begin{cases}[A_a(x),A_b(x')]=i(\delta_{ab}-\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_a\partial_b}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')\\ \tilde{A}_i(x)=A_i(x)+\frac{\partial_i\partial_t}{\nabla^2}\phi(x)\\ \tilde{\phi}(x)=\phi(x)-\partial_t\frac{\partial_t}{\nabla^2}\phi(x)\\ \phi(x)=-iA_0(x)\end{cases}\end{cases}$$

只要将规范条件不再看作算符方程，而是看作对物理态的选择，则方程和对易关系就完全相容，不再出现矛盾，其中$\lambda=1$是费曼规范，$\lambda=\infty$ 是朗道规范。

2 辐射规范下的电磁场方程

2.1 无源电磁场方程的辐射规范势描述

推论2.1.1.

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=0,\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0,\nabla\times\vec{B}=\partial_t\vec{E}\\ \tilde{A}=\frac{\nabla\times\vec{B}}{-\nabla^2}=\frac{\partial_t\vec{E}}{-\nabla^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla^2\tilde{A}-\partial_t^2\tilde{A}=0,\nabla\cdot\tilde{A}=0\\ \vec{E}=-\partial_t\tilde{A},\vec{B}=\nabla\times\tilde{A}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^aF_{ab}=0,F_{ab}=\partial_a\tilde{A}_b-\partial_b\tilde{A}_a\\ \nabla\cdot\tilde{A}=0,\tilde{A}_0=0\end{cases}$$

性质2.1.1. $\tilde{A}(\vec{r},t)=\frac{\partial_t}{-\nabla^2}\vec{E}(\vec{r},t)\Leftrightarrow\vec{E}(\vec{r},t)=-\partial_t\tilde{A}(\vec{r},t)$

性质2.1.2. $\tilde{A}(\vec{r},t)=\frac{\nabla\times\vec{B}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\Leftrightarrow\vec{B}(\vec{r},t)=\nabla\times\tilde{A}(\vec{r},t)$

2.2 辐射规范势的洛伦兹变换性质

定义2.2.1. $\begin{cases}\nabla' = \nabla - \gamma_v \vec{v}\partial_t + (\gamma_v - 1)\vec{v}/v^2(\vec{v}\cdot\nabla) \\ \partial_{t'} = \gamma_v(\partial_t - \vec{v}\cdot\nabla), \gamma_v \equiv (1-v^2)^{-\frac{1}{2}}\end{cases}$

推论2.2.1. $\vec{E}' = \gamma_v(\vec{E} - \vec{v}\times\vec{B}) - (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{E})\vec{v}/v^2, \vec{B}' = \gamma_v(\vec{B} + \vec{v}\times\vec{E}) - (\gamma_v - 1)(\vec{v}\cdot\vec{B})\vec{v}/v^2$

推论2.2.2. $\tilde{A}' = \frac{\nabla'\times\vec{B}'}{-\nabla'^2} = -\frac{[\nabla-\gamma_v\vec{v}\partial_t+(\gamma_v-1)\vec{v}/v^2(\vec{v}\cdot\nabla)]\times[\gamma_v(\vec{B}+\vec{v}\times\vec{E})-(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\vec{B})\vec{v}/v^2]}{[\nabla-\gamma_v\vec{v}\partial_t+(\gamma_v-1)\vec{v}/v^2(\vec{v}\cdot\nabla)]^2} = ?$

2.3 电磁场方程势解的分析与探讨

定义2.3.1. $\partial^a F_{ab} = 0, F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$

如果得到一个解A_a，那么$A_a + \partial_a\theta$也是它的另一个解。由于θ的任意性，电磁场方程有无穷多组的势解。但是这无穷多的势解只对应F_{ab} 的同一个解。如果固定规范则相当于从无穷多势解中选取一组解A_a，这样势解就没有冗余解了，并且这时它与场强解F_{ab}可以一一对应。考虑解的完备性，对于完备场强解F_{ab}，可以由一个不完备的势解A_a 完全得到，而且这个不完备的势解A_a也可以由完备场强解F_{ab}完全确定得到。这时完备场强解F_{ab}与不完备的势解A_a 一一对应，并且这时电磁场自旋方程与带规范条件的电磁场势方程完全等价。

2.4 辐射规范下电磁场方程z-方向的势与场平面波解

推论2.4.1. $\partial^a\partial_a\tilde{A} = 0, \nabla\cdot\tilde{A} = 0$

$\Rightarrow \tilde{A}(|\vec{p}|\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{-i}{\sqrt{2|\vec{p}|}}\{\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-1)[a_1(\vec{p})e^{ip\cdot x} - a_2^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}] + \lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},1)[a_2(\vec{p})e^{ip\cdot x} - a_1^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}]\}$

推论2.4.2.

$\vec{E}(|\vec{p}|\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|}}\{|\vec{p}|\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-1)[a_1(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}] + |\vec{p}|\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},1)[a_2(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a_1^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}]\}$

证明: $\vec{E}(|\vec{p}|\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) = -\partial_t\tilde{A}(|\vec{p}|\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})$

$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|}}\{|\vec{p}|\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-1)[a_1(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}] + |\vec{p}|\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},1)[a_2(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a_1^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}]\}$ □

推论2.4.3.

$\vec{B}(|\vec{p}|\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{-i}{\sqrt{2|\vec{p}|}}\{-|\vec{p}|\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-1)[a_1(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}] + |\vec{p}|\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},1)[a_2(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a_1^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}]\}$

证明: $\vec{B}(|\vec{p}|\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) = \nabla\times\tilde{A}(|\vec{p}|\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})$

$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{-i}{\sqrt{2|\vec{p}|}}\{i\vec{p}\times\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-1)[a_1(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}] + i\vec{p}\times\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},1)[a_2(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a_1^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}]\}$

$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{-i}{\sqrt{2|\vec{p}|}}\{i|\vec{p}|\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\times\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-1)[a_1(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}] + i|\vec{p}|\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\times\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},1)[a_2(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a_1^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}]\}$

$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{-i}{\sqrt{2|\vec{p}|}}\{-|\vec{p}|\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-1)[a_1(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}] + |\vec{p}|\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},1)[a_2(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a_1^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}]\}$ □

推论2.4.4. $\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{E}(|\vec{p}|\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) - i\vec{B}(|\vec{p}|\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{|\vec{p}|}\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-1)[a_1(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}] \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{E}(|\vec{p}|\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) + i\vec{B}(|\vec{p}|\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{|\vec{p}|}\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},1)[a_2(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a_1^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}]\end{cases}$

2.5 辐射规范下电磁场方程的势与场平面波通解

定义2.5.1. $\begin{cases}a_1(\vec{p},-1) := a_1(\vec{p}) \\ a_1(\vec{p},1) := a_1^+(\vec{p})\end{cases}\quad \begin{cases}a_2(\vec{p},-1) := a_2(\vec{p}) \\ a_2(\vec{p},1) := a_2^+(\vec{p})\end{cases}\quad \begin{cases}a_1(\vec{p},-1) = a_1^+(\vec{p},1) = a_1(\vec{p}) \\ a_2(\vec{p},-1) = a_2^+(\vec{p},1) = a_2(\vec{p})\end{cases}$

推论2.5.1. $\partial^a\partial_a\tilde{A}(\vec{r},t) = 0, \nabla\cdot\tilde{A}(\vec{r},t) = 0$

$\Rightarrow \tilde{A}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{-i}{\sqrt{2|\vec{p}|}}\{\lambda_m(\hat{p},-1)[a_1(\vec{p})e^{ip\cdot x} - a_2^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}] + \lambda_m(\hat{p},1)[a_2(\vec{p})e^{ip\cdot x} - a_1^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}]\}$

推论2.5.2.

$\begin{cases}\Psi(\vec{p},1) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{E}(\vec{p}) - i\vec{B}(\vec{p})] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{|\vec{p}|}\lambda_m(\hat{p},-1)[a_1(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}] \\ \Psi(\vec{p},-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{E}(\vec{p}) + i\vec{B}(\vec{p})] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{|\vec{p}|}\lambda_m(\hat{p},1)[a_2(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a_1^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}]\end{cases}\quad \Psi(\vec{p},-1) = \Psi^*(\vec{p},1)$

推论2.5.3.

$$\begin{cases}\tilde{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\frac{-i}{\sqrt{2|\vec{p}|}}\{\lambda_m(\hat{p},-1)[a_1(\vec{p})e^{ip\cdot x}-a_2^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}]+\lambda_m(\hat{p},1)[a_2(\vec{p})e^{ip\cdot x}-a_1^+(\vec{p})e^{-ip\cdot x}]\}d^3\vec{p}\\ \Psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\sqrt{|\vec{p}|}\lambda_m(\vec{p},-\varsigma)[a_1(\vec{p},-\varsigma)e^{i\varsigma p\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-\varsigma)e^{-i\varsigma p\cdot x}]d^3\vec{p}\\ \tilde{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\frac{\partial_t[\Psi(\vec{r},t)+\Psi^+(\vec{r},t)]}{-\nabla^2},\Psi(\vec{r},t)=-\partial_t\tilde{A}(\vec{r},t)-i\varsigma\nabla\times\tilde{A}(\vec{r},t)\end{cases}$$

2.6 辐射规范势解的详细分析

推论2.6.1.

$$\begin{cases}\dot{\tilde{A}}(\vec{r},t)\\ =\frac{-1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\sqrt{|\vec{p}|}\{[\lambda_m(\hat{p},-1)a_1(\vec{p})+\lambda_m(\hat{p},1)a_2(\vec{p})]e^{ip\cdot x}+[\lambda_m(\hat{p},1)a_1^+(\vec{p})+\lambda_m(\hat{p},-1)a_2^+(\vec{p})]e^{-ip\cdot x}\}d^3\vec{p}\\ \nabla\times\tilde{A}(\vec{r},t)\\ =\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\frac{\vec{p}}{\sqrt{|\vec{p}|}}\times\{[\lambda_m(\hat{p},-1)a_1(\vec{p})+\lambda_m(\hat{p},1)a_2(\vec{p})]e^{ip\cdot x}+[\lambda_m(\hat{p},1)a_1^+(\vec{p})+\lambda_m(\hat{p},-1)a_2^+(\vec{p})]e^{-ip\cdot x}\}d^3\vec{p}\end{cases}$$

推论2.6.2.

$$\tilde{A}(\vec{r},t)=\frac{-i}{\sqrt{2}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}|}}\{[\lambda_m(\hat{p},-1)a_1(\vec{p})+\lambda_m(\hat{p},1)a_2(\vec{p})]e^{ip\cdot x}-[\lambda_m(\hat{p},1)a_1^+(\vec{p})+\lambda_m(\hat{p},-1)a_2^+(\vec{p})]e^{-ip\cdot x}\}d^3\vec{p}$$

$$\Leftrightarrow\lambda_m(\hat{p},-1)a_1(\vec{p})+\lambda_m(\hat{p},1)a_2(\vec{p})=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\{i\tilde{A}(\vec{r},t)\sqrt{|\vec{p}|}-\dot{\tilde{A}}(\vec{r},t)\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}|}}\}e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1(\vec{p})=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda_m^+(\hat{p},-1)\{i\tilde{A}(\vec{r},t)\sqrt{|\vec{p}|}-\dot{\tilde{A}}(\vec{r},t)\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}|}}\}e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}\\ a_2(\vec{p})=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda_m^+(\hat{p},1)\{i\tilde{A}(\vec{r},t)\sqrt{|\vec{p}|}-\dot{\tilde{A}}(\vec{r},t)\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}|}}\}e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$$

推论2.6.3.
$$\begin{cases}a_1^+(\vec{p})=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda_m^T(\hat{p},-1)\{-i\tilde{A}(\vec{r},t)\sqrt{|\vec{p}|}-\dot{\tilde{A}}(\vec{r},t)\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}|}}\}e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}\\ a_2^+(\vec{p})=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda_m^T(\hat{p},1)\{-i\tilde{A}(\vec{r},t)\sqrt{|\vec{p}|}-\dot{\tilde{A}}(\vec{r},t)\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}|}}\}e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$$

3 从传统辐射规范量子化方案导出新方案 [27, 28, 42, 43]

3.1 从传统辐射规范势等时对易关系得到复场强的等时对易关系

推论3.1.1. $\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^{uv}F_{uv}\Rightarrow\pi_i=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_i}=\partial_t\tilde{A}_i+\partial_i\phi=-E_i,\pi_4=0$

从$(\tilde{A}_i,E_i)$为正则变量的等时对易关系推得以(Ψ_i,Ψ_i^+) 为基本变量的等时对易关系。

推论3.1.2.
$$\begin{cases}[\tilde{A}_i(\vec{r},t),E_j(\vec{r}',t)]=-i(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [E_i(\vec{r},t),\tilde{A}_j(\vec{r}',t)]=i(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\tilde{A}_i(\vec{r},t),\tilde{A}_j(\vec{r}',t)]=0\\ [E_i(\vec{r},t),E_j(\vec{r}',t)]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r}',t)]=\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j(\vec{r}',t)]=0\\ [\Psi_i^+(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r}',t)]=0\end{cases}$$

证明: $[\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r}',t)]$

$=-\frac{1}{2}i\varsigma\varepsilon_i{}^{kl}\partial_{x_k}[\tilde{A}_l(\vec{r},t),E_j(\vec{r}',t)]+\frac{1}{2}i\varsigma\varepsilon_j{}^{kl}\partial_{x'_k}[E_i(\vec{r},t),\tilde{A}_l(\vec{r}',t)]$

$=\frac{1}{2}\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k(\partial_{x_k}-\partial_{x'_k})\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

$=\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\partial_{(x_k-x'_k)}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

$=i\varsigma\gamma_{ij}{}^k\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

$=i\varsigma\gamma^k{}_{ij}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$ □

证明: $[\Psi_i^+(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r}',t)]$

$=\frac{1}{2}i\varsigma\varepsilon_i{}^{kl}\partial_{x_k}[\tilde{A}_l(\vec{r},t),E_j(\vec{r}',t)]+\frac{1}{2}i\varsigma\varepsilon_j{}^{kl}\partial_{x'_k}[E_i(\vec{r},t),\tilde{A}_l(\vec{r}',t)]$

$=-\frac{1}{2}\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k(\partial_{x_k}+\partial_{x'_k})\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

$=0$ □

证明： $[\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j(\vec{r}',t)]$
$= -\frac{1}{2}i\varsigma\varepsilon_i{}^{kl}\partial_{x_k}[\tilde{A}_l(\vec{r},t),E_j(\vec{r}',t)] - \frac{1}{2}i\varsigma\varepsilon_j{}^{kl}\partial_{x'_k}[E_i(\vec{r},t),\tilde{A}_l(\vec{r}',t)]$
$= \frac{1}{2}\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k(\partial_{x_k}+\partial_{x'_k})\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$
$= 0$ □

3.2 在辐射规范下势对易关系与复场强协变对易关系的等价性

推论3.2.1. $\begin{cases}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')] = i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x') \\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi_{\beta_\varsigma}(x')]=0, [\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\end{cases} \Leftrightarrow [\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')] = i(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')$

证明： $[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')]$
$= \frac{1}{2}\frac{\partial_t}{-\nabla^2}\frac{\partial_{t'}}{-\nabla'^2}[\psi_i(x)+\psi_i^+(x),\psi_j(x')+\psi_j^+(x')]$
$= \frac{1}{2}\frac{\partial_t}{-\nabla^2}\frac{\partial_{t'}}{-\nabla'^2}\{[\psi_i(x),\psi_j^+(x')]+[\psi_i^+(x),\psi_j(x')]\}$
$= \frac{1}{2}\frac{\partial_t}{-\nabla^2}\frac{\partial_{t'}}{-\nabla'^2}\{[\psi_i(x),\psi_j^+(x')]-[\psi_j(x'),\psi_i^+(x)]\}$
$= \frac{1}{2}\frac{\partial_t}{-\nabla^2}\frac{\partial_{t'}}{-\nabla'^2}\{i\sigma^{ab}_{ij}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')-[i\sigma^{ab}_{ji}\partial'_a\partial'_b\Delta(x'-x)]\}$
$= \frac{1}{2}\frac{\partial_t}{-\nabla^2}\frac{-\partial_t}{-\nabla^2}\{i\sigma^{ab}_{ij}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')+[i\sigma^{ab}_{ji}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')]\}$
$= -\frac{1}{2}\frac{\partial_t^2}{\nabla^4}\{-i[\frac{1}{2}(\nabla^2-\partial_\pi^2)\delta_{ij}-\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_\pi-\partial_i\partial_j]-i[\frac{1}{2}(\nabla^2-\partial_\pi^2)\delta_{ji}-\varsigma\varepsilon_{ji}{}^k\partial_k\partial_\pi-\partial_j\partial_i]\}\Delta(x-x')$
$= i\frac{1}{\nabla^2}[\frac{1}{2}(\nabla^2-\partial_\pi^2)\delta_{ij}-\partial_i\partial_j]\Delta(x-x')$
$= i\frac{1}{\nabla^2}[\nabla^2\delta_{ij}-\partial_i\partial_j]\Delta(x-x')$
$= i(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')$ □

反向证明：

证明： $[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')] = i(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')$
$\Rightarrow i[\Psi_i(x),\Psi_j^+(x')]$
$= \frac{i}{2}[-i\partial_\pi\tilde{A}_i(x)+i\varsigma\varepsilon_i{}^{kl}\partial_k\tilde{A}_l(x),-i\partial'_\pi\tilde{A}_j(x')-i\varsigma\varepsilon_j{}^{mn}\partial'_m\tilde{A}_n(x')]$
$= \frac{1}{2}[-\partial_\pi^2(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')-\varsigma\varepsilon_j{}^{mn}(\delta_{in}-\frac{\partial_i\partial_n}{\nabla^2})\partial_\pi\partial_m\Delta(x-x')+\varsigma\varepsilon_i{}^{kl}(\delta_{lj}-\frac{\partial_l\partial_j}{\nabla^2})\partial_k\partial_\pi\Delta(x-x')$
$+\varepsilon_i{}^{kl}(\delta_{ln}-\frac{\partial_l\partial_n}{\nabla^2})\varepsilon_j{}^{mn}\partial_k\partial_m\Delta(x-x')]$
$= \frac{1}{2}[-\partial_\pi^2(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')-2\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_\pi\Delta(x-x')+(\delta_{ij}\delta^{km}-\delta_i^m\delta_j^k)\partial_k\partial_m\Delta(x-x')]$
$= \frac{1}{2}[(-\partial_\pi^2\delta_{ij}-\partial_i\partial_j)\Delta(x-x')-2\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_\pi\Delta(x-x')+(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\Delta(x-x')]$
$= [\frac{1}{2}(\nabla^2-\partial_\pi^2)\delta_{ij}-\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_\pi-\partial_i\partial_j]\Delta(x-x')$
$= -\sigma^{ab}_{ij}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$ □

证明： $[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')] = -i(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')$
$\Rightarrow i[\Psi_i(x),\Psi_j(x')]$
$= \frac{i}{2}[-i\partial_\pi\tilde{A}_i(x)+i\varsigma\varepsilon_i{}^{kl}\partial_k\tilde{A}_l(x),-i\partial'_\pi\tilde{A}_j(x')+i\varsigma\varepsilon_j{}^{mn}\partial'_m\tilde{A}_n(x')]$
$= \frac{1}{2}[-\partial_\pi^2(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')+\varsigma\varepsilon_j{}^{mn}(\delta_{in}-\frac{\partial_i\partial_n}{\nabla^2})\partial_\pi\partial_m\Delta(x-x')+\varsigma\varepsilon_i{}^{kl}(\delta_{lj}-\frac{\partial_l\partial_j}{\nabla^2})\partial_k\partial_\pi\Delta(x-x')$
$-\varepsilon_i{}^{kl}(\delta_{ln}-\frac{\partial_l\partial_n}{\nabla^2})\varepsilon_j{}^{mn}\partial_k\partial_m\Delta(x-x')]$
$= \frac{1}{2}[-\partial_\pi^2(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')-(\delta_{ij}\delta^{km}-\delta_i^m\delta_j^k)\partial_k\partial_m\Delta(x-x')]$
$= \frac{1}{2}[(-\partial_\pi^2\delta_{ij}-\partial_i\partial_j)\Delta(x-x')-(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j)\Delta(x-x')]$
$= -\frac{1}{2}\delta_{ij}(\nabla^2+\partial_\pi^2)\Delta(x-x')$
$= 0$ □

证明： $[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')] = -i(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')$
$\Rightarrow i[\Psi_i^+(x),\Psi_j^+(x')]$
$= \frac{i}{2}[-i\partial_\pi\tilde{A}_i(x)-i\varsigma\varepsilon_i{}^{kl}\partial_k\tilde{A}_l(x),-i\partial'_\pi\tilde{A}_j(x')-i\varsigma\varepsilon_j{}^{mn}\partial'_m\tilde{A}_n(x')]$
$= \frac{1}{2}[-\partial_\pi^2(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')-\varsigma\varepsilon_j{}^{mn}(\delta_{in}-\frac{\partial_i\partial_n}{\nabla^2})\partial_\pi\partial_m\Delta(x-x')-\varsigma\varepsilon_i{}^{kl}(\delta_{lj}-\frac{\partial_l\partial_j}{\nabla^2})\partial_k\partial_\pi\Delta(x-x')$
$-\varepsilon_i{}^{kl}(\delta_{ln}-\frac{\partial_l\partial_n}{\nabla^2})\varepsilon_j{}^{mn}\partial_k\partial_m\Delta(x-x')]$

$= \frac{1}{2}[-\partial_\pi^2(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x') - (\delta_{ij}\delta^{km} - \delta_i^m\delta_j^k)\partial_k\partial_m\Delta(x-x')]$
$= \frac{1}{2}[(-\partial_\pi^2\delta_{ij} - \partial_i\partial_j)\Delta(x-x') - (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)\Delta(x-x')]$
$= -\frac{1}{2}\delta_{ij}(\nabla^2 + \partial_\pi^2)\Delta(x-x')$
$= 0$ □

推论3.2.2. $[\tilde{A}_i(x), \tilde{A}_j(x')] = i(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x') \Rightarrow [\tilde{A}_i(\vec{r},t), \dot{\tilde{A}}_j(\vec{r}',t)] = i(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\delta^3(x-x')$

3.3 从传统量子化方案得到复场强$\Psi(\vec{r},t)$表达的能量动量算符

以(Ψ_i, Ψ_i^+)为基本变量表达的能量动量算符。

推论3.3.1.

$$\begin{cases} \mathscr{H} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \frac{1}{2}[\Psi^+(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t) + \Psi^T(\vec{r},t)\Psi^*(\vec{r},t)] = \frac{1}{2}\delta^{ij}\{\Psi_i(\vec{r},t), \Psi_j^+(\vec{r},t)\} = \Psi^+(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t) \\ \vec{\mathscr{P}} = \vec{E}\times\vec{B} = -\frac{1}{2}\varsigma[\Psi^+(\vec{r},t)\gamma\Psi(\vec{r},t) - \Psi^T(\vec{r},t)\gamma\Psi^*(\vec{r},t)] = \frac{\varsigma}{2}\gamma^{ij}\{\Psi_i(\vec{r},t), \Psi_j^+(\vec{r},t)\} \\ \vec{\mathscr{M}} = \vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{1}{2}i\varsigma[\{\Psi_k(\vec{r},t), x^j\Psi_j^+(\vec{r},t)\} - \{x^i\Psi_i(\vec{r},t), \Psi_k^+(\vec{r},t)\}] \end{cases}$$

证明: $\vec{\mathscr{M}} = \vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{B})$
$= \frac{1}{2}i\varsigma\varepsilon_k{}^{lm}x_l\varepsilon_m{}^{ij}\{\Psi_i(\vec{r},t), \Psi_j^+(\vec{r},t)\}$
$= \frac{1}{2}i\varsigma(\delta_k{}^i\delta^{lj} - \delta_k{}^j\delta^{li})x_l\{\Psi_i(\vec{r},t), \Psi_j^+(\vec{r},t)\}$
$= \frac{1}{2}i\varsigma[\{\Psi_k(\vec{r},t), x^j\Psi_j^+(\vec{r},t)\} - \{x^i\Psi_i(\vec{r},t), \Psi_k^+(\vec{r},t)\}]$ □

证明: $\vec{\mathscr{M}} = \vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{E}(\vec{r}\cdot\vec{B}) - (\vec{r}\cdot\vec{E})\vec{B}$
$= -i\varsigma\varepsilon_k{}^{lm}x_l\varepsilon_m{}^{ij}\Psi_i^+(\vec{r},t)\Psi_j(\vec{r},t)$
$= -i\varsigma(\delta_k{}^i\delta^{lj} - \delta_k{}^j\delta^{li})x_l\Psi_i^+(\vec{r},t)\Psi_j(\vec{r},t)$
$= -i\varsigma[\Psi_k^+(\vec{r},t)x^j\Psi_j(\vec{r},t) - x^i\Psi_i^+(\vec{r},t)\Psi_k(\vec{r},t)]$ □

推论3.3.2. $\begin{cases} H = \frac{1}{2}\delta^{ij}\int\{\Psi_i(\vec{r},t), \Psi_j^+(\vec{r},t)\}d^3\vec{r} = \int\Psi^+(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} \\ \vec{P} = \frac{\varsigma}{2}\gamma^{ij}\int\{\Psi_i(\vec{r},t), \Psi_j^+(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}, P_a = \frac{\varsigma}{2}(\gamma, -i\varsigma)_a^{ij}\int\{\Psi_i(\vec{r},t), \Psi_j^+(\vec{r},t)\}d^3\vec{r} \end{cases}$

3.4 从传统量子化方案得到复场强$\Psi(\vec{r},t)$算符的运动方程

从$(\tilde{A}_i, E_i)$为正则变量的算符运动方程推得以(Ψ_i, Ψ_i^+) 为基本变量的算符运动方程。

推论3.4.1. $\begin{cases} \dot{\tilde{A}}(\vec{r},t) = -i[\tilde{A}(\vec{r},t), H] \\ \dot{E}(\vec{r},t) = -i[E(\vec{r},t), H] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Psi}(\vec{r},t) = -i[\Psi(\vec{r},t), H] \\ \dot{\Psi}^+(\vec{r},t) = -i[\Psi^+(\vec{r},t), H] \end{cases}$

3.5 复场强$\Psi(\vec{r},t)$算符演化方程和约束方程

推论3.5.1.

$$\begin{cases} [\Psi_i(\vec{r},t), \Psi_j^+(\vec{r}',t)] = i\varsigma\gamma^k{}_{ij}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \\ [\Psi_i(\vec{r},t), \Psi_j(\vec{r}',t)] = 0, [\Psi_i^+(\vec{r},t), \Psi_j^+(\vec{r}',t)] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\Psi(\vec{r},t), H] = i\varsigma\gamma^k\partial_k\Psi(\vec{r},t) \\ [\Psi_i(\vec{r},t), P_j] = -i\partial_j\Psi_i(\vec{r},t) + i\delta_{ij}\nabla\cdot\Psi(\vec{r},t) \end{cases}$$

证明: $[\Psi_i(\vec{r},t), H]$
$= [\Psi_i(\vec{r},t), \frac{1}{2}\delta^{jl}\int\{\Psi_j(\vec{r}',t), \Psi_l^+(\vec{r}',t)\}d^3\vec{r}']$
$= \frac{1}{2}\delta^{jl}\int[\Psi_i(\vec{r},t), \{\Psi_j(\vec{r}',t), \Psi_l^+(\vec{r}',t)\}]d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{2}\delta^{jl}\int\{\Psi_j(\vec{r}',t), [\Psi_i(\vec{r},t), \Psi_l^+(\vec{r}',t)]\} + \{\Psi_l^+(\vec{r}',t), [\Psi_i(\vec{r},t), \Psi_j(\vec{r}',t)]\}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{2}\delta^{jl}\int[\{\Psi_j(\vec{r}',t), i\varsigma\gamma^k{}_{il}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\} + 0]d^3\vec{r}'$
$= i\varsigma\gamma^k{}_i{}^j\partial_k\Psi_j(\vec{r},t)$
$\succ i\varsigma\gamma^k\partial_k\Psi(\vec{r},t)$ □

证明: $[\Psi_i(\vec{r},t),\vec{P}]$
$= [\Psi_i(\vec{r},t),\frac{\varsigma}{2}\gamma^{jl}\int\{\Psi_j(\vec{r}',t),\Psi_l^+(\vec{r}',t)\}d^3\vec{r}']$
$= \frac{\varsigma}{2}\gamma^{jl}\int[\Psi_i(\vec{r},t),\{\Psi_j(\vec{r}',t),\Psi_l^+(\vec{r}',t)\}]d^3\vec{r}'$
$= \frac{\varsigma}{2}\gamma^{jl}\int\{\Psi_j(\vec{r}',t),[\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_l^+(\vec{r}',t)]\}+\{\Psi_l^+(\vec{r}',t),[\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j(\vec{r}',t)]\}d^3\vec{r}'$
$= \frac{\varsigma}{2}\gamma^{jl}\int[\{\Psi_j(\vec{r}',t),i\varsigma\gamma^k{}_{il}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\}+0]d^3\vec{r}'$
$= i\gamma^{jl}\gamma^k{}_{il}\partial_k\Psi_j(\vec{r},t) \succ -i(\gamma\cdot\nabla)\gamma\psi(\vec{r},t)$
$\prec -i(\delta_n{}^k\delta^j{}_i-\delta_{ni}\delta^{jk})\partial_k\Psi_j(\vec{r},t)$
$= -i\partial_n\Psi_i(\vec{r},t)+i\delta_{ni}\nabla\cdot\Psi(\vec{r},t)$ □

推论3.5.2. $[\psi_i(\vec{r},t),P_j]=-i\partial_j\psi_i(\vec{r},t)+iS_m^+(1)_{ij}\nabla\cdot[S_m(1)\psi(\vec{r},t)]$

推论3.5.3. 由此可以唯一确定能量动量算符的系数

$$\begin{cases}(\gamma,-i\varsigma)^a\partial_a\Psi(\vec{r},t)=0\\ \nabla\cdot\Psi(\vec{r},t)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dot{\Psi}(\vec{r},t)=-i[\Psi(\vec{r},t),H]\\ \partial_i\Psi(\vec{r},t)=i[\Psi(\vec{r},t),P_i]\\ [P_a,\Psi(\vec{r},t)]=i\partial_a\Psi(\vec{r},t)\end{cases};\begin{cases}[\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r}',t)]=i\varsigma\gamma^k{}_{ij}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j(\vec{r}',t)]=0\\ [\Psi_i^+(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r}',t)]=0\end{cases}$$

推论3.5.4.

$$[\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Psi=0\Leftrightarrow[P_a,\Psi(\vec{r},t)]=i\partial_a\Psi(\vec{r},t);\begin{cases}[\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r}',t)]=i\varsigma\gamma^k{}_{ij}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j(\vec{r}',t)]=0,[\Psi_i^+(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r}',t)]=0\end{cases}$$

推论3.5.5. 电磁场约束与对易关系自洽:

$$\begin{cases}[\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r}',t)]=i\varsigma\gamma^k{}_{ij}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j(\vec{r}',t)]=0,[\Psi_i^+(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r}',t)]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\nabla\cdot\Psi(\vec{r},t)=0\\ \nabla\cdot\Psi^+(\vec{r},t)=0\end{cases}$$

推论3.5.6. $[P_a,\Psi(\vec{r},t)]=S_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b\Psi(\vec{r},t)$

3.6 复场强$\Psi(\vec{r},t)$算符的量子标积方程(是否最基本?)

定义3.6.1. $\langle\eta|\dot{\Psi}(\vec{r},t)+i[\Psi(\vec{r},t),H]|\varphi\rangle=0,\langle\eta|\nabla\cdot\Psi(\vec{r},t)|\varphi\rangle=0$

定义3.6.2. $\langle\eta|\partial_a\Psi(\vec{r},t)-i[\Psi(\vec{r},t),P_a]|\varphi\rangle=0\Leftrightarrow\langle\eta|[P_a,\Psi(\vec{r},t)]-i\partial_a\Psi(\vec{r},t)|\varphi\rangle=0$

它有两个解，一解个是算符方程$\dot{\Psi}(\vec{r},t)=-i[\Psi(\vec{r},t),H],\nabla\cdot\Psi(\vec{r},t)|=0$决定的解。另一个解是对所有物理态都是它的真空态的解：$\langle\eta|\Psi(\vec{r},t)|\varphi\rangle=0$，所以合起来就是完整的傅里叶展开解。

3.7 复场强能量动量算符的Fock表示

能量动量算符：

推论3.7.1.
$$\begin{cases}H=\frac{1}{2}\delta^{ij}\int\{\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}=\frac{1}{2}\int\limits_{\vec{p}\neq0}|\vec{p}|[\{a_1(\vec{p},-\varsigma),a_1^+(\vec{p},-\varsigma)\}+\{a_2(\vec{p},-\varsigma),a_2^+(\vec{p},-\varsigma)\}]d^3\vec{p}\\ \vec{P}=\frac{\varsigma}{2}\gamma^{ij}\int\{\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}=\frac{1}{2}\int\limits_{\vec{p}\neq0}\vec{p}[\{a_1(\vec{p},-\varsigma),a_1^+(\vec{p},-\varsigma)\}+\{a_2(\vec{p},-\varsigma),a_2^+(\vec{p},-\varsigma)\}]d^3\vec{p}\end{cases}$$

证明:
$H=\frac{1}{2}\delta^{ij}\int\{\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\delta^{ij}\int\limits_{\vec{p},\vec{p}'\neq0}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\lambda_{mi}(\vec{p},-\varsigma)\lambda_{mj}^+(\vec{p}',-\varsigma)$
$\{\sqrt{|\vec{p}|}[a_1(\vec{p},-\varsigma)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+a_2^+(\vec{p},-\varsigma)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}],\sqrt{|\vec{p}'|}[a_1^+(\vec{p}',-\varsigma)e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+a_2(\vec{p}',-\varsigma)e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]\}$
$=\frac{1}{2}\int\limits_{\vec{p},\vec{p}'\neq0}\lambda_m^+(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m(\vec{p},-\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')|\vec{p}|[\{a_1(\vec{p},-\varsigma),a_1^+(\vec{p},-\varsigma)\}+\{a_2^+(\vec{p},-\varsigma),a_2(\vec{p},-\varsigma)\}]+$
$\lambda_m^+(-\vec{p},-\varsigma)\lambda_m(\vec{p},-\varsigma)\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')|\vec{p}|[\{a_1(\vec{p},-\varsigma),d(-\vec{p},-\varsigma)\}e^{-2i\varsigma Et}+\{a_2^+(\vec{p},-\varsigma),c^+(-\vec{p},-\varsigma)\}e^{2i\varsigma Et}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$=\frac{1}{2}\int\limits_{\vec{p}\neq0}|\vec{p}|[\{a_1(\vec{p},-\varsigma),a_1^+(\vec{p},-\varsigma)\}+\{a_2^+(\vec{p},-\varsigma),a_2(\vec{p},-\varsigma)\}+0]d^3\vec{p}$
$=\frac{1}{2}\int\limits_{\vec{p}\neq0}|\vec{p}|[\{a_1(\vec{p},-\varsigma),a_1^+(\vec{p},-\varsigma)\}+\{a_2(\vec{p},-\varsigma),a_2^+(\vec{p},-\varsigma)\}]d^3\vec{p}$ □

证明:

$P_k = \frac{\varsigma}{2}\gamma_k{}^{ij}\int\{\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\varsigma}{2}\gamma_k{}^{ij}\int\limits_{\vec{p},\vec{p}'\neq 0} d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\lambda_{mi}(\vec{p},-\varsigma)\lambda_{mj}^+(\vec{p}',-\varsigma)$

$\{\{\sqrt{|\vec{p}|}[a_1(\vec{p},-\varsigma)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+a_2^+(\vec{p},-\varsigma)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}],\{\sqrt{|\vec{p}'|}[a_1^+(\vec{p}',-\varsigma)e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+a_2(\vec{p}',-\varsigma)e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]\}$

$= -\frac{\varsigma}{2}\int\limits_{\vec{p},\vec{p}'\neq 0}\lambda_m^+(\vec{p},-\varsigma)\gamma_k\lambda_m(\vec{p},-\varsigma)|\vec{p}|\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')[\{a_1(\vec{p},-\varsigma),a_1^+(\vec{p},-\varsigma)\}+\{a_2^+(\vec{p},-\varsigma),a_2(\vec{p},-\varsigma)\}]+$

$\lambda_m^+(-\vec{p},-\varsigma)\gamma_k\lambda_m(\vec{p},-\varsigma)|\vec{p}|\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')[\{a_1(\vec{p},-\varsigma),d(-\vec{p},-\varsigma)\}e^{-2i\varsigma Et}+\{a_2^+(\vec{p},-\varsigma),c^+(-\vec{p},-\varsigma)\}e^{2i\varsigma Et}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$= -\frac{\varsigma}{2}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}-\varsigma\vec{p}_k[\{a_1(\vec{p},-\varsigma),a_1^+(\vec{p},-\varsigma)\}+\{a_2^+(\vec{p},-\varsigma),a_2(\vec{p},-\varsigma)\}]+0d^3\vec{p}$

$= \frac{1}{2}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\vec{p}_k[\{a_1(\vec{p},-\varsigma),a_1^+(\vec{p},-\varsigma)\}+\{a_2(\vec{p},-\varsigma),a_2^+(\vec{p},-\varsigma)\}]d^3\vec{p}$ □

3.8 复场强$\Psi(\vec{r},t)$算符的Fock对易关系

推论3.8.1.

$$\begin{cases}[\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r}',t)]=i\varsigma\gamma^k{}_{ij}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j(\vec{r}',t)]=0\\ [\Psi_i^+(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r}',t)]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[a_1(\vec{p},-\varsigma),a_1^+(\vec{p}',-\varsigma)]=\varsigma\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_2(\vec{p},-\varsigma),a_2^+(\vec{p}',-\varsigma)]=\varsigma\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_1(\vec{p},-\varsigma),a_1(\vec{p}',-\varsigma)]=0,[a_2(\vec{p},-\varsigma),a_2(\vec{p}',-\varsigma)]=0\\ [a_1(\vec{p},-\varsigma),a_2(\vec{p}',-\varsigma)]=0,[a_1(\vec{p},-\varsigma),a_2^+(\vec{p}',-\varsigma)]=0\end{cases}$$

推论3.8.2. $[a_1(\vec{p},-\varsigma),a_1^+(\vec{p}',-\varsigma)]=\varsigma\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

证明: $[a_1(\vec{p},-\varsigma),a_1^+(\vec{p}',-\varsigma)]$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int[\lambda_m^{+i}(\vec{p},-\varsigma)\Psi_i(\vec{r},t)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)},\lambda_m^j(\vec{p}',-\varsigma)\Psi_j^+(\vec{r}',t)e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda_m^{+i}(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^j(\vec{p}',-\varsigma)[\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r}',t)]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= i\varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda_m^{+i}(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^j(\vec{p}',-\varsigma)\gamma^k{}_{ij}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= i\varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda_m^{+i}(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^j(\vec{p}',-\varsigma)\gamma^k{}_{ij}i\varsigma p'_k e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}d^3\vec{r}$

$= -\frac{1}{|\vec{p}|}\lambda_m^{+i}(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^j(\vec{p},h')\gamma^k{}_{ij}p_k\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

$= -\lambda_m^+(\vec{p},-\varsigma)\frac{\gamma^k p_k}{|\vec{p}|}\lambda_m(\vec{p},-\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

$= \varsigma\lambda_m^+(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m(\vec{p},-\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

$= \varsigma\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$ □

推论3.8.3. $[a_2^+(\vec{p},-\varsigma),a_2(\vec{p}',-\varsigma)]=-\varsigma\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

证明: $[a_2^+(\vec{p},-\varsigma),a_2(\vec{p}',-\varsigma)]$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int[\lambda_m^{+i}(\vec{p},-\varsigma)\Psi_i(\vec{r},t)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)},\lambda_m^j(\vec{p}',-\varsigma)\Psi_j^+(\vec{r}',t)e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda_m^{+i}(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^j(\vec{p}',-\varsigma)[\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r}',t)]e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= i\varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda_m^{+i}(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^j(\vec{p}',-\varsigma)\gamma^k{}_{ij}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= i\varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda_m^{+i}(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^j(\vec{p}',-\varsigma)\gamma^k{}_{ij}(-i\varsigma p'_k)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}d^3\vec{r}$

$= \frac{1}{|\vec{p}|}\lambda_m^{+i}(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^j(\vec{p},h')\gamma^k{}_{ij}p_k\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

$= \lambda_m^+(\vec{p},-\varsigma)\frac{\gamma^k p_k}{|\vec{p}|}\lambda_m(\vec{p},h')\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

$= -\varsigma\lambda_m^+(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m(\vec{p},h')\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

$= -\varsigma\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$ □

推论3.8.4. $[\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r}',t)]=i\varsigma\gamma^k{}_{ij}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

证明: $[\Psi_i(\vec{r},t),\Psi_j^+(\vec{r}',t)]$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\lambda_{mi}(\vec{p},-\varsigma)\lambda_{mj}^+(\vec{p}',-\varsigma)\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}$

$\{[a_1(\vec{p},-\varsigma),a_1^+(\vec{p}',-\varsigma)]e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}+[a_2^+(\vec{p},-\varsigma),a_2(\vec{p}',-\varsigma)]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}\}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{mi}(\vec{p},-\varsigma)\lambda_{mj}^+(\vec{p}',-\varsigma)[\varsigma\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-\varsigma\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]\}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{mi}(\vec{p},-\varsigma)\lambda_{mj}^+(\vec{p},-\varsigma)\varsigma|\vec{p}|[e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]\}d^3\vec{p}$
$=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int[(-\varsigma|\vec{p}|)\lambda_{mi}(\vec{p},-\varsigma)\lambda_{mj}^+(\vec{p},-\varsigma)+(\varsigma|\vec{p}|)\lambda_{mi}(-\vec{p},-\varsigma)\lambda_{mj}^+(-\vec{p},-\varsigma)]e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\}d^3\vec{p}$
$=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int[(-\varsigma|\vec{p}|)\lambda_{mi}(\vec{p},-\varsigma)\lambda_{mj}^+(\vec{p},-\varsigma)+(0|\vec{p}|)\lambda_{mi}(\vec{p},\varsigma)\lambda_{mj}^+(\vec{p},\varsigma)+(\varsigma|\vec{p}|)\lambda_{mi}(\vec{p},\varsigma)\lambda_{mj}^+(\vec{p},\varsigma)]e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\}d^3\vec{p}$
$=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int\gamma^k{}_i{}^l p_k\sum_h\lambda_{ml}(\vec{p},h)\lambda_{mj}^+(\vec{p},h)e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int i\varsigma\gamma^k{}_i{}^l i\varsigma p_k\delta_{lj}e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}$
$=i\varsigma\gamma^k{}_{ij}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$ □

3.9 正规化能量动量算符的Fock表示

推论3.9.1. $:H:=\int\sum_\sigma|\vec{p}|a_\sigma^+(\vec{p})a_\sigma(\vec{p})d^3\vec{p},:\vec{P}:=\int\sum_\sigma\vec{p}a_\sigma^+(\vec{p})a_\sigma(\vec{p})d^3\vec{p},:P_a:=\int\sum_\sigma p_a a_\sigma^+(\vec{p})a_\sigma(\vec{p})d^3\vec{p}$

推论3.9.2. $a_\sigma(\vec{p},\varsigma)|\varphi\rangle=0,a_\sigma(\vec{p},0)|\varphi\rangle=0,\forall\varphi\in Phys$

4 量子电动力学之场方案

4.1 电磁相互作用之场表述方案

定理4.1.1.

$$\begin{cases}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi_{\alpha'_\varsigma}^+(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi_{\beta_\varsigma}(x')]=0,[\Psi_{\alpha'_\varsigma}^+(x),\Psi_{\beta'_\varsigma}^+(x')]=0\\ [\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Psi=-i\sigma^{[\beta_\varsigma]}_{\varsigma ab}J^b\\ \tilde{A}=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\times(\Psi-\Psi^*)}{\nabla^2},\tilde{\phi}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\cdot(\Psi+\Psi^*)}{\nabla^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\tilde{A}_i(x),\tilde{A}_j(x')]=i(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')\\ [\tilde{A}_i(x),\tilde{\phi}(x')]=0,[\tilde{\phi}(x),\tilde{\phi}(x')]=0\\ \nabla^2\tilde{A}-\partial_t^2\tilde{A}=\vec{J}+\partial_t\nabla\tilde{\phi},\nabla^2\tilde{\phi}=\rho,\nabla\cdot\tilde{A}=0\\ \sqrt{2}\Psi=-\partial_t\tilde{A}-\nabla\tilde{\phi}-i\varsigma\nabla\times\tilde{A}\end{cases}$$

推论4.1.1. $L=-\int\bar{\psi}(\gamma^a\partial_a+m)\psi dr^3,H=\int\bar{\psi}(\gamma\cdot\nabla+m)\psi dr^3$

推论4.1.2. $L=-\int\bar{\psi}[\gamma^a(\partial_a-ieA_a)+m]\psi dr^3=-\int\bar{\psi}(\gamma^a\partial_a+m)\psi dr^3+\int ie\bar{\psi}\gamma^aA_a\psi dr^3$

推论4.1.3. $H=\int\bar{\psi}[\gamma\cdot(\nabla-ie\tilde{A})+\gamma^4e\tilde{\phi}+m]\psi dr^3=\int\bar{\psi}(\gamma\cdot\nabla+m)\psi dr^3-\int ie\bar{\psi}\gamma^aA_a\psi dr^3$

推论4.1.4. $H_i=-L_i=-\int ie\bar{\psi}\gamma^aA_a\psi dr^3$
$=-\frac{e\varsigma}{\sqrt{2}}\int\bar{\psi}\frac{\gamma\cdot[\nabla\times(\Psi-\Psi^*)]}{\nabla^2}\psi dr^3-\frac{e}{\sqrt{2}}\int\bar{\psi}\frac{\gamma^4[\nabla\cdot(\Psi+\Psi^*)]}{\nabla^2}\psi dr^3+\int ie\bar{\psi}\frac{\gamma^a\partial_a\partial_t\phi}{\nabla^2}\psi dr^3$

定理4.1.2. $H_i=-L_i=-\int ie\bar{\psi}\gamma^aA_a\psi dr^3$
$=-ie\int\frac{\bar{\psi}}{\sqrt{-\nabla^2}}(\vec{\gamma}\cdot\partial_t\vec{E})\frac{\psi}{\sqrt{-\nabla^2}}dr^3+e^2\int\frac{\bar{\psi}\gamma^a\psi}{\sqrt{-\nabla^2}}\frac{\bar{\psi}\gamma_a\psi}{\sqrt{-\nabla^2}}dr^3+\int\partial_a[ie\bar{\psi}\gamma^a\psi(\frac{\partial_t\phi}{\nabla^2})]dr^3$

证明: $H_i=-L_i=-\int ie\bar{\psi}\gamma^aA_a\psi dr^3$
$=-\frac{e\varsigma}{\sqrt{2}}\int\bar{\psi}\frac{\vec{\gamma}\cdot[\nabla\times(\Psi-\Psi^*)]}{\nabla^2}\psi dr^3-\frac{e}{\sqrt{2}}\int\bar{\psi}\frac{\gamma^4[\nabla\cdot(\Psi+\Psi^*)]}{\nabla^2}\psi dr^3+\int ie\bar{\psi}\frac{\gamma^a\partial_a\partial_t\phi}{\nabla^2}\psi dr^3$
$=\frac{ie}{\sqrt{2}}\int\bar{\psi}\frac{\vec{\gamma}\cdot[\partial_t(\Psi+\Psi^*)-\sqrt{2}\vec{J}]}{\nabla^2}\psi dr^3+e\int\bar{\psi}\frac{\gamma^4\rho}{\nabla^2}\psi dr^3+\int ie\bar{\psi}\frac{\gamma^a\partial_a\partial_t\phi}{\nabla^2}\psi dr^3$
$=\frac{ie}{\sqrt{2}}\int\bar{\psi}\frac{\vec{\gamma}\cdot[\partial_t(\Psi+\Psi^*)]}{\nabla^2}\psi dr^3-ie\int\bar{\psi}\gamma^a\psi(\frac{J_a}{\nabla^2})dr^3+\int ie\bar{\psi}\gamma^a\psi\partial_a(\frac{\partial_t\phi}{\nabla^2})dr^3$
$=\frac{ie}{\sqrt{2}}\int\bar{\psi}\frac{\vec{\gamma}\cdot[\partial_t(\Psi+\Psi^*)]}{\nabla^2}\psi dr^3+\int J^a\frac{1}{\nabla^2}J_adr^3-\int\partial_a[J^a(\frac{\partial_t\phi}{\nabla^2})]dr^3$
$=\frac{ie}{\sqrt{2}}\int\bar{\psi}\frac{\vec{\gamma}\cdot[\partial_t(\Psi+\Psi^*)]}{\nabla^2}\psi dr^3-\int\frac{J^a}{\sqrt{-\nabla^2}}\frac{J_a}{\sqrt{-\nabla^2}}dr^3-\int\partial_a[J^a(\frac{\partial_t\phi}{\nabla^2})]dr^3$
$=\frac{ie}{\sqrt{2}}\int\bar{\psi}\frac{\vec{\gamma}\cdot[\partial_t(\Psi+\Psi^*)]}{\nabla^2}\psi dr^3+e^2\int\frac{\bar{\psi}\gamma^a\psi}{\sqrt{-\nabla^2}}\frac{\bar{\psi}\gamma_a\psi}{\sqrt{-\nabla^2}}dr^3+\int\partial_a[ie\bar{\psi}\gamma^a\psi(\frac{\partial_t\phi}{\nabla^2})]dr^3$
$=ie\int\bar{\psi}\frac{\partial_t(\vec{\gamma}\cdot\vec{E})}{\nabla^2}\psi dr^3+e^2\int\frac{\bar{\psi}\gamma^a\psi}{\sqrt{-\nabla^2}}\frac{\bar{\psi}\gamma_a\psi}{\sqrt{-\nabla^2}}dr^3+\int\partial_a[ie\bar{\psi}\gamma^a\psi(\frac{\partial_t\phi}{\nabla^2})]dr^3$
$=-ie\int\frac{\bar{\psi}}{\sqrt{-\nabla^2}}(\vec{\gamma}\cdot\partial_t\vec{E})\frac{\bar{\psi}}{\sqrt{-\nabla^2}}dr^3+e^2\int\frac{\bar{\psi}\gamma^a\psi}{\sqrt{-\nabla^2}}\frac{\bar{\psi}\gamma_a\psi}{\sqrt{-\nabla^2}}dr^3+\int\partial_a[ie\bar{\psi}\gamma^a\psi(\frac{\partial_t\phi}{\nabla^2})]dr^3$ □

以上定理把协变性和非协变性、辐射规范和洛仑兹规范统一表述在一起了，十分美妙。尤其第二项明显描述电子之间的排斥自作用能，大于零。同时完全可以按场量进行微扰展开，而无须用电磁势展开，这样整个展开过程都是物理的，没有非物理因素，且规范无关。是否这样可以避开无穷大？无须再重整化？还需进一步探索。第三项是全微分项，可以去掉(?)，此项十分微妙、美妙，它是洛仑兹协变性的保障，也是统一描述的关键之所在。

4.2 电磁相互作用之场表述的S矩阵

推论4.2.1. $U(t,t_0)=1-i\int_{t_0}^{t}H_i(t_1)U(t_1,t_0)dt_1, S=U(+\infty,-\infty)=Texp\{-i\int_{-\infty}^{+\infty}H_i(t)dt\}$

推论4.2.2. $S=U(+\infty,-\infty)=Texp\{-i\int_{-\infty}^{+\infty}H_i(t)dt\}$

$=Texp\{-i\int_{-\infty}^{+\infty}[-ie\frac{\bar{\psi}}{\sqrt{-\nabla^2}}(\vec{\gamma}\cdot\partial_t\vec{E})\frac{\psi}{\sqrt{-\nabla^2}}+e^2\frac{\bar{\psi}\gamma^a\psi}{\sqrt{-\nabla^2}}\frac{\bar{\psi}\gamma_a\psi}{\sqrt{-\nabla^2}}]dx^4\}$

第二十四章　无质量粒子的协变量子化方案

自我评述：在本章我应用前面章节创立的数学工具和常数不变张量分析，对各种无质量自旋粒子按相同、统一的新协变量子化程式成功进行了量子化。

1 全新的协变量子化程式

1.1 新量子化程式

1、首先根据常数不变张量分析，合理猜测得到协变对易规则。

2、根据微观因果性原理和排除负模态负几率的反常粒子，进一步确定合理的协变对易规则。

3、根据得到的协变对易规则，进一步得到福克表象的对易规则。

4、根据量子场论中能量动量的普遍福克表示，反推出能量动量算符，并验证它们是否是真正的能量动量，进一步确定自旋表示，角动量表示。

5、根据能量算符，重新得到与经典方程形式一样的量子算符方程，并验证量子彭加莱代数是否成立。

6、考虑相互作用，进行散射矩阵计算等，并与实验对比。

7、向高维空间推广，向弦理论推广

8、如何用场传播子代替势传播子

9、把弦理论看作势理论，那么其对应的场理论是什么？

10、能解决无穷大问题不？

11、经典平面波解与量子平面波解的区别，模不存在与模没激发的重大区别，可能隐含物理大发现？

2 无质量复标量场协变量子化方案 [27,28,42,43]

2.1 复标量场方程及其平面波解

定义2.1.1. $\partial_a\partial^a\psi(\vec{r},t)=0$

推论2.1.1. $\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}|\vec{p}|^{-\frac{1}{2}}\lambda(\hat{p},0)[a_1(\vec{p},0)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},0)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|\vec{p}|^{-\frac{1}{2}}a_1(\vec{p},0)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{p=-\infty}^{+\infty}\lambda^+(\hat{p},0)[\phi(\vec{r},t)+\frac{i}{|\vec{p}|}\dot{\phi}(\vec{r},t)]e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}\\|\vec{p}|^{-\frac{1}{2}}a_2^+(\vec{p},0)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{p=-\infty}^{+\infty}\lambda^+(\hat{p},0)[\phi(\vec{r},t)-\frac{i}{|\vec{p}|}\dot{\phi}(\vec{r},t)]e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}\\\lambda(\hat{p},0):=\frac{1}{\sqrt{2}},\Gamma(0):=\lambda(\hat{p},0)\lambda^+(\hat{p},0)=\frac{1}{2},\lambda^+(\hat{p},0)\lambda(\hat{p},0)=\frac{1}{2}\end{cases}$$

定义2.1.2. *定义投影算子*:$\hat{P}(0):=2\lambda(\hat{p},0)\lambda^+(\hat{p},0)=1$

2.2 复标量场协变常数不变张量$\Gamma(0)$的性质

定义2.2.1. $\lambda(\hat{p},0):=\frac{1}{\sqrt{2}},\Gamma(0):=\lambda(\hat{p},0)\lambda^+(\hat{p},0)=\frac{1}{2},\lambda^+(\hat{p},0)\lambda(\hat{p},0)=\frac{1}{2}$

2.3 复标量场数学上一般的协变对易规则

定理2.3.1.

$$\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},0),a_{\sigma'}^+(\vec{p}',0)]_\pm=\delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\[a_\sigma(\vec{p},0),a_{\sigma'}(\vec{p}',0)]_\pm=0\\[a_\sigma^+(\vec{p},0),a_{\sigma'}^+(\vec{p}',0)]_\pm=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\psi(x),\psi^+(x')]_\pm\\=i2\Gamma(0)[(\delta_1\pm\delta_2)\Delta^{(+)}(x-x')-\pm\delta_2\Delta(x-x')]\\[\psi(x),\psi(x')]_\pm=0\\[\psi^+(x),\psi^+(x')]_\pm=0\end{cases}$$

证明: $[\psi^{(+)}(x),\psi^{(+)+}(x')]_\pm$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|^{-\frac{1}{2}}|\vec{p}'|^{-\frac{1}{2}}\lambda(\hat{p},0)\lambda^+(\hat{p}',0)[a_1(\vec{p},0),a_1^+(\vec{p}',0)]_\pm e^{i\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int |\vec{p}|^{-1}\delta_1\lambda(\hat{p},0)\lambda^+(\hat{p},0)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{i\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int |\vec{p}|^{-1}\delta_1\lambda(\hat{p},0)\lambda^+(\hat{p},0)e^{i\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= i\frac{1}{(2\pi)^3}\int \delta_1\frac{-i}{2|\vec{p}|}2\Gamma(0)e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= i\delta_1 2\Gamma(0)\Delta^{(+)}(x-x')$ □

证明：$[\psi^{(-)}(x),\psi^{(-)+}(x')]_\pm$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int |\vec{p}|^{-\frac{1}{2}}|\vec{p}'|^{-\frac{1}{2}}\lambda(\hat{p},0)\lambda^+(\hat{p},0)[a_2^+(\vec{p},0),a_2(\vec{p}',0)]_\pm e^{-i\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int |\vec{p}|^{-1}\delta_2\lambda(\hat{p},0)\lambda^+(\hat{p},0)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-i\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int |\vec{p}|^{-1}\delta_2\lambda(\hat{p},0)\lambda^+(\hat{p},0)e^{-i\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= -\pm i\frac{1}{(2\pi)^3}\int \delta_2\frac{i}{2|\vec{p}|}2\Gamma(0)e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= -\pm i\delta_2 2\Gamma(0)\Delta^{(-)}(x-x')$ □

证明：$[\psi(x),\psi^+(x')]_\pm$
$= [\psi^{(+)}(x),\psi^{(+)+}(x')]_\pm + [\psi^{(-)}(x),\psi^{(-)+}(x')]_\pm$
$= i\delta_1 2\Gamma(0)\Delta^{(+)}(x-x') - \pm i\delta_2 2\Gamma(0)\Delta^{(-)}(x-x')$
$= i2\Gamma(0)[\delta_1\Delta^{(+)}(x-x') - \pm\delta_2\Delta^{(-)}(x-x')]$
$= i2\Gamma(0)[(\delta_1\pm\delta_2)\Delta^{(+)}(x-x') - \pm\delta_2\Delta(x-x')]$ □

从上式可知，只有$\delta_1\pm\delta_2=0$时，才满足微观因果性，同时只有$\delta_1,\delta_2\geq 0$时，才满足几率非负性。所以数学上八种协变对易或反对易方案中，物理上合理的只有一种：即$\delta_1=\delta_2=1$，且满足对易关系。其实还有两种，即$\delta_1=\delta_2=0$，且满足对易或反对易关系，就是经典情形。

2.4 复标量场物理的协变对易规则

定理2.4.1.

$$\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},0),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',0)]=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},0),a_{\sigma'}(\vec{p}',0)]=0\\ [a^+_\sigma(\vec{p},0),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',0)]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\psi(x),\psi^+(x')]=i2\Gamma(0)\Delta(x-x')\\ [\psi(x),\psi(x')]=0\\ [\psi^+(x),\psi^+(x')]=0\end{cases}$$

推论2.4.1.

$$\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},0),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',0)]=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},0),a_{\sigma'}(\vec{p}',0)]=0\\ [a^+_\sigma(\vec{p},0),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',0)]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\psi^{(+)}(x),\psi^{(+)+}(x')]=i2\Gamma(0)\Delta^{(+)}(x-x')\\ [\psi^{(-)}(x),\psi^{(-)+}(x')]=i2\Gamma(0)\Delta^{(-)}(x-x')\\ [\psi^{(+)}(x),\psi^{(-)+}(x')]=0\end{cases}$$

推论2.4.2.

$$\begin{cases}[\psi(x),\psi^+(x')]=i2\Gamma(0)\Delta(x-x')\\ [\psi(x),\psi(x')]=0\\ [\psi^+(x),\psi^+(x')]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\psi(\vec{r},t),\psi^+(\vec{r}',t)]=0\\ [\psi(\vec{r},t),\psi(\vec{r}',t)]=0\\ [\psi^+(x),\psi^+(\vec{r}',t)]=0\end{cases}$$

2.5 复标量场的对易函数、因果函数和费曼传播子

定义2.5.1.
$$\begin{cases}\Delta^{(+)}(x):=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}e^{ip\cdot x}d^3\vec{p}, i\Delta^{(+)}(\vec{r},0)\leftrightarrow\frac{1}{2|\vec{p}|}\\ \Delta^{(-)}(x):=-\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}e^{-ip\cdot x}d^3\vec{p},\Delta^{(-)}(x)=-\Delta^{(+)}(-x)\\ \Delta(x):=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}[e^{ip\cdot x}-e^{-ip\cdot x}\}d^3\vec{p},\Delta(x)=\Delta^{(+)}(x)+\Delta^{(-)}(x)\end{cases}$$

性质2.5.1.
$$\begin{cases}\Delta^*(x)=\Delta(x),\Delta(-x)=-\Delta(x),(\nabla^2-\partial_t^2)\Delta(x)=0\\ \partial_t\Delta(x)|_{t=0}=-\delta^3(\vec{r}),\partial_k\partial_t\Delta(x)|_{t=0}=\partial_t\partial_k\Delta(x)|_{t=0}=-\partial_k\delta^3(\vec{r})\\ \partial_k\Delta(x)|_{t=0}=0,\partial_k\partial_l\Delta(x)|_{t=0}=0,\partial_t^2\Delta(x)|_{t=0}=0\end{cases}$$

性质2.5.2. $\Delta(x-x') := \frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{2|\vec{p}|}[e^{ip\cdot(x-x')} - e^{-ip\cdot(x-x')}\}d^3\vec{p}$

$$\begin{cases}\partial_u\Delta(x-x') = -\partial'_u\Delta(x-x') \\ \nabla\Delta(x-x') = -\nabla'\Delta(x-x') \\ \partial_\pi\Delta(x-x') = -\partial'_\pi\Delta(x-x')\end{cases} \quad \begin{cases}(\sqrt{-\nabla^2})^n\Delta(x-x') = (\sqrt{-\nabla'^2})^n\Delta(x-x') \\ \frac{1}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\Delta(x-x') = \frac{1}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\Delta(x-x') \\ \partial_\pi^{2n}\Delta(x-x') = \partial_\pi'^{2n}\Delta(x-x')\end{cases}$$

定义2.5.2.

$$\begin{cases}\Delta(x) = \Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(x) = \Delta^{ret}(x) - \Delta^{adv}(x) \\ \Delta^{(l)}(x) = i[\Delta^{(-)}(x) - \Delta^{(+)}(x)] \\ \Delta_F(x) = \langle T\varphi(x)\varphi(x')\rangle_0 = i\Delta^{(c)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \Delta_F(p)e^{ipx}d^4p \\ \Delta_F(p) = \frac{-i}{p^2-i\varepsilon}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}(x) = \theta(t)\Delta^{(+)}(x) - \theta(-t)\Delta^{(-)}(x) \\ \Delta^{ret}(x) = \theta(t)\Delta(x) = \Delta^{(c)}(x) + \Delta^{(-)}(x) \\ \Delta^{adv}(x) = -\theta(-t)\Delta(x) = \Delta^{(c)}(x) - \Delta^{(+)}(x)\end{cases}$$

推论2.5.1.

$$\begin{cases}\partial_a\partial^a\Delta(x) = 0 \\ \partial_a\partial^a\Delta^{(+)}(x) = 0 \\ \partial_a\partial^a\Delta^{(-)}(x) = 0 \\ \partial_a\partial^a\Delta^{(l)}(x) = 0\end{cases} \quad \begin{cases}\partial_a\partial^a\Delta^{(c)}(x) = \delta^4(x) \\ \partial_a\partial^a\Delta^{ret}(x) = \delta^4(x) \\ \partial_a\partial^a\Delta^{adv}(x) = \delta^4(x) \\ \partial_a\partial^a\Delta_F(x) = i\delta^4(x)\end{cases}$$

推论2.5.2. $\Delta(x)\partial_t\delta(t) = -\partial_t\Delta(x)\delta(t) = \delta^4(x)$

证明: $\int f(t)\Delta(x)\partial_t\delta(t)dt = -\partial_t[f(t)\Delta(x)]|_{t=0} = f(0)\delta^3(\vec{r})$ □

证明: $\int f(t)\partial_t\Delta(x)\delta(t)dt = f(t)\partial_t\Delta(x)|_{t=0} = -f(0)\delta^3(\vec{r})$ □

推论2.5.3. $\partial_t^2[\theta(t)\Delta(x)] = -\delta^4(x) + \theta(t)\partial_t^2\Delta(x)$

证明: $\partial_t^2[\theta(t)\Delta(x)]$

$= \partial_t[\partial_t\theta(t)\Delta(x) + \theta(t)\partial_t\Delta(x)]$

$= \partial_t^2\theta(t)\Delta(x) + 2\partial_t\theta(t)\partial_t\Delta(x) + \theta(t)\partial_t^2\Delta(x)$

$= \partial_t\delta(t)\Delta(x) + 2\delta(t)\partial_t\Delta(x) + \theta(t)\partial_t^2\Delta(x)$

$= \delta(t)\partial_t\Delta(x) + \theta(t)\partial_t^2\Delta(x)$

$= -\delta^4(x) + \theta(t)\partial_t^2\Delta(x)$ □

推论2.5.4. $\Delta(x)\partial_t^n\delta(t) = \sum\limits_{l=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2l+1}\nabla^{2l}\partial_t^{n-2l-1}\delta^4(x)$

证明: $\int f(t)\Delta(x)\partial_t^n\delta(t)dt$

$= (-1)^n\partial_t^n[f(t)\Delta(x)]_{t=0} = f(0)\delta^3(\vec{r})$

$= (-1)^n\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\partial_t^{n-k}f(t)\partial_t^k\Delta(x)|_{t=0} = f(0)\delta^3(\vec{r})$

$= (-1)^n\sum\limits_{l=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2l+1}\partial_t^{n-2l-1}f(t)\partial_t^{2l+1}\Delta(x)|_{t=0}$

$= (-1)^{n+1}\sum\limits_{l=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2l+1}\partial_t^{n-2l-1}f(t)|_{t=0}\nabla^{2l}\delta^3(\vec{r})$

$= (-1)^{n+1}\sum\limits_{l=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2l+1}\nabla^{2l}\delta^3(\vec{r})\int\partial_t^{n-2l-1}f(t)\delta(t)dt$

$= \sum_{l=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2l+1}\nabla^{2l}\delta^3(\vec{r})\int f(t)\partial_t^{n-2l-1}\delta(t)dt$

$= \int f(t)\sum_{l=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2l+1}\nabla^{2l}\partial_t^{n-2l-1}\delta^4(x)dt$ □

推论2.5.5. $\Delta(x)\partial_t^2\delta(t) = 2\partial_t\delta^4(x)$

推论2.5.6. $\Delta(x)\partial_t^3\delta(t) = 3\partial_t^2\delta^4(x) + \nabla^2\delta^4(x)$

2.6 复标量场能量动量算符的提取

推论2.6.1. $H = \int|\vec{p}|[a_1^+(\vec{p},0)a_1(\vec{p},0) + a_2(\vec{p},0)a_2^+(\vec{p},0)]d^3\vec{p} = i\int\psi^+(\vec{r},t)\partial_t\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

证明: $H = \int|\vec{p}|[a_1^+(\vec{p},0)a_1(\vec{p},0) + a_2(\vec{p},0)a_2^+(\vec{p},0)]d^3\vec{p}$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int[\lambda(\hat{p},0)\psi^+(\vec{r}',t)e^{ip\cdot x'}\lambda^+(\hat{p},0)\psi(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x} + \lambda(\hat{p},0)\psi^+(\vec{r}',t)e^{-ip\cdot x'}\lambda^+(\hat{p},0)\psi(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda^+(\hat{p},0)\lambda(\hat{p},0)\psi^+(\vec{r}',t)\psi(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} + e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^+(\vec{r}',t)\psi(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} + e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$ □

2.7 复标量场的彭加莱对称性

推论2.7.1. $\hat{P}_a(0) = \int\psi^+(\vec{r},t)\hat{P}_a i\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r}, M_{ab}(n) = \int\psi^+(\vec{r},t)\hat{M}_{ab}i\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

引理2.7.1. $[\dot{\psi}_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{l_\varsigma}(\vec{r}',t)] = -i\delta_{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

定理2.7.1. $\begin{cases}[L_{ab}, L_{cd}] = -i(g_{ad}L_{bc} - g_{ac}L_{bd} + g_{bc}L_{ad} - g_{bd}L_{ac})\\ [L_{ab}, P_c] = -i(g_{bc}P_a - g_{ac}P_b), [P_a, P_b] = 0\end{cases}$

证明: $[L_{ab}, L_{cd}]$

$= -\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\psi^+(\vec{r},t)(r_a\partial_b - r_b\partial_a)i\dot{\psi}(\vec{r},t), \psi^+(\vec{r}',t)(r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)i\dot{\psi}(\vec{r}',t)]$

$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)(r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)]$

$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)[(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)](r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)$

$+ \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)[\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t), (r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)](r_a\partial_b - r_b\partial_a)\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)\}$

$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)(r_a\partial_b - r_b\partial_a)(-i)\delta_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)$

$- \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)(r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)(-i)\delta_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)\}$

$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)(r_a\partial'_b - r_b\partial'_a)(-i)\delta_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)$

$- \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)(r'_c\partial_d - r'_d\partial_c)(-i)\delta_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)\}$

$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}$

$\{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)(r_a\partial_b - r_b\partial_a)(-i)\delta_{l_\varsigma k'_\varsigma}(r_c\partial_d - r_d\partial_c)\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r},t)$

$- \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)(r_c\partial_d - r_d\partial_c)(-i)\delta_{l'_\varsigma k_\varsigma}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)\}$

$= -\int\psi^+(\vec{r},t)[-i(r_a\partial_b - r_b\partial_a), -i(r_c\partial_d - r_d\partial_c)](-i)\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$= \int\psi^+(\vec{r},t)[\hat{L}_{ab}, \hat{L}_{cd}]i\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$= -i(g_{ad}L_{bc} - g_{ac}L_{bd} + g_{bc}L_{ad} - g_{bd}L_{ac})$ □

证明: $[L_{ab}, P_c]$

$= -\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\psi^+(\vec{r},t)(r_a\partial_b - r_b\partial_a)i\dot{\psi}(\vec{r},t), \psi^+(\vec{r}',t)\partial'_c i\dot{\psi}(\vec{r}',t)]$

$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\partial'_c\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)]$

$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)[(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]\partial'_c\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t) + \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)[\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \partial'_c\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)](r_a\partial_b - r_b\partial_a)\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)\}$

$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)(r_a\partial_b - r_b\partial_a)(-i)\delta_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_c\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)$
$-\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\partial'_c(-i)\delta_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)\}$
$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)(r_a\partial'_b - r_b\partial'_a)(-i)\delta_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_c\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)$
$-\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\partial_c(-i)\delta_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)\}$
$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}$
$\{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)(r_a\partial_b - r_b\partial_a)(-i)\delta_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial_c\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r},t) - \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\partial_c(-i)\delta_{l'_\varsigma k_\varsigma}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)\}$
$= -\int\psi^+(\vec{r},t)[-i(r_a\partial_b - r_b\partial_a), -i\partial'_c](-i)\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= \int\psi^+(\vec{r},t)[\hat{L}_{ab},\hat{P}_c]i\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= -i(g_{bc}P_a - g_{ac}P_b)$ □

证明: $[P_a, P_b]$
$= -\int[\psi^+(\vec{r},t)\partial_a i\dot{\psi}(\vec{r},t), \psi^+(\vec{r}',t)\partial'_b i\dot{\psi}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int[\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\partial_a\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\partial'_b\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)[\partial_a\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]\partial'_b\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t) + \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)[\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \partial'_b\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)]\partial_a\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)\}$
$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)(-i)\delta_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_b\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t) - \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)(-i)\delta_{l'_\varsigma k_\varsigma}\partial'_b\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})\partial_a\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)\}$
$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)(-i)\delta_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial'_a\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_b\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t) - \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)(-i)\delta_{l'_\varsigma k_\varsigma}\partial_b\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial_a\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)\}$
$= \int\{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)(-i)\delta^{k_\varsigma l'_\varsigma}\partial_a\partial_b\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r},t) - \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)(-i)\delta^{k'_\varsigma l_\varsigma}\partial_b\partial_a\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}d^3\vec{r}$
$= \int\psi^+(\vec{r},t)(\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a)(-i)\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= -\int\psi^+(\vec{r},t)(\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a)i\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= \int\psi^+(\vec{r},t)[\hat{P}_a,\hat{P}_b]i\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r} = 0$ □

3 中微子场协变量子化方案

3.1 中微子自旋算符方程及其平面波解

定理3.1.1. $[\frac{1}{2}\partial_a + iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\psi(x) = 0 \Leftrightarrow (\sigma, -i\varsigma)^a\partial_a\psi(x) = 0$

推论3.1.1. $\begin{cases}\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})[a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{i}{|\vec{p}|}\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\dot{\psi}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}\\ a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{-i}{|\vec{p}|}\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\dot{\psi}(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$

定义3.1.1. 投影算子: $\hat{P}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2},\varsigma) := \lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2}), \hat{P}^2(\frac{1}{2},\varsigma) = \hat{P}(\frac{1}{2},\varsigma), \hat{P}^+(\frac{1}{2},\varsigma) = \hat{P}(\frac{1}{2},\varsigma)$

3.2 中微子自旋算符方程平面波解的洛伦兹变换

推论3.2.1. $\Lambda_{\vec{v}} = e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\sigma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma_v)}}[1+\gamma_v - \gamma_v v\hat{v}\cdot\sigma] = \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma_v)}}\begin{bmatrix}1+\gamma_v(1-v_z) & -\gamma_v v_x + i\gamma_v v_y\\ -\gamma_v v_x - i\gamma_v v_y & 1+\gamma_v(1+v_z)\end{bmatrix}$

推论3.2.2. $L_{\vec{v}} = e^{-ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot L} = 1 - \gamma_v(\vec{v}\cdot L) + \frac{\gamma_v - 1}{v^2}(\vec{v}\cdot L)^2 = \gamma_v(1 - \vec{v}\cdot L) - \frac{\gamma_v - 1}{v^2}(\vec{v}\cdot R)^2$

推论3.2.3. $\psi'(L_{\vec{v}}x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\Lambda_{\vec{v}}\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})[a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{iL_{\vec{v}}p\cdot L_{\vec{v}}x} + a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-iL_{\vec{v}}p\cdot L_{\vec{v}}x}]d^3\vec{p}$

推论3.2.4. $L_{\vec{v}}p =, \Lambda_{\vec{v}}\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2}) = \lambda(L_{\vec{v}}\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})$

推论3.2.5. $\begin{bmatrix}\gamma_{u'}\vec{u}'\\ i\gamma_{u'}\end{bmatrix} = L_{\vec{v}}\begin{bmatrix}\gamma_u\vec{u}\\ i\gamma_u\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\vec{p}'\\ iE'\end{bmatrix} = L_{\vec{v}}\begin{bmatrix}\vec{p}\\ iE\end{bmatrix}$

推论3.2.6. $\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}1+\hat{p}_z\\ \hat{p}_x+i\hat{p}_y\end{bmatrix},\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\hat{p}_z}}\begin{bmatrix}-\hat{p}_x+i\hat{p}_y\\ 1+\hat{p}_z\end{bmatrix}$

证明: $\Lambda_{-\vec{v}}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})$

$=\frac{1}{\sqrt{2(1+\hat{p}_z)}}\Lambda_{-\vec{v}}\begin{bmatrix}1+\hat{p}_z\\ \hat{p}_x+i\hat{p}_y\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2(1+\hat{u}_z)}}\Lambda_{-\vec{v}}\begin{bmatrix}1+\hat{u}_z\\ \hat{u}_x+i\hat{u}_y\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{\sqrt{2(1+\hat{u}_z)}}\frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma_v)}}\begin{bmatrix}1+\gamma_v(1+v_z) & \gamma_v v_x-i\gamma_v v_y\\ \gamma_v v_x+i\gamma_v v_y & 1+\gamma_v(1-v_z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+\hat{u}_z\\ \hat{u}_x+i\hat{u}_y\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2\sqrt{(1+\hat{u}_z)(1+\gamma_v)}}\begin{bmatrix}[1+\gamma_v(1+v_z)](1+\hat{u}_z)+(\gamma_v v_x-i\gamma_v v_y)(\hat{u}_x+i\hat{u}_y)\\ (\gamma_v v_x+i\gamma_v v_y)(1+\hat{u}_z)+[1+\gamma_v(1-v_z)](\hat{u}_x+i\hat{u}_y)\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2\sqrt{(1+\hat{u}_z)(1+\gamma_v)}}\begin{bmatrix}(1+\gamma_v)(1+\hat{u}_z)+\gamma_v[v_z+i(\vec{v}\times\hat{u})_z+\vec{v}\cdot\hat{u}]\\ (1+\gamma_v)(\hat{u}_x+i\hat{u}_y)+\gamma_v\{(v_x+iv_y)+i[(\vec{v}\times\hat{u})_x+i(\vec{v}\times\hat{u})_y]\}\end{bmatrix}$ □

推论3.2.7. $\hat{u}'=[\hat{u}+\gamma_v\vec{v}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\hat{u})\vec{v}/v^2]/[\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\hat{u})]$

推论3.2.8. $\hat{p}'=[\hat{p}+\gamma_v\vec{v}+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\hat{p})\vec{v}/v^2]/[\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\hat{p})]$

推论3.2.9. $1+\hat{u}'_z=1+[\hat{u}_z+\gamma_v\vec{v}_z+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\hat{u})\vec{v}_z/v^2]/[\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\hat{u})]$

推论3.2.10. $\hat{u}'_x+i\hat{u}'_y=\{(\hat{u}_x+i\hat{u}_y)+\gamma_v(v_x+iv_y)+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\hat{u})(v_x+iv_y)/v^2\}/[\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\hat{u})]$

推论3.2.11.

$\{(1+\gamma_v)(\hat{u}_x+i\hat{u}_y)+\gamma_v\{(v_x+iv_y)+i[(\vec{v}\times\hat{u})_x+i(\vec{v}\times\hat{u})_y]\}\}$
$\{\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\hat{u})+[\hat{u}_z+\gamma_v\vec{v}_z+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\hat{u})\vec{v}_z/v^2]\}$
$=\{(1+\gamma_v)(\hat{u}_x+i\hat{u}_y)+\gamma_v\{(v_x+iv_y)+i[(\vec{v}\times\hat{u})_x+i(\vec{v}\times\hat{u})_y]\}\}$
$\{\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\hat{u})+[\hat{u}_z+\gamma_v\vec{v}_z+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\hat{u})\vec{v}_z/v^2]\}$
$=\{(1+\gamma_v)(\hat{u}_x+i\hat{u}_y)+\gamma_v\{(v_x+iv_y)+i[(\vec{v}\times\hat{u})_x+i(\vec{v}\times\hat{u})_y]\}\}$
$\{1+\hat{u}_z+\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\hat{u})-1+\gamma_v\vec{v}_z+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\hat{u})\vec{v}_z/v^2\}$
$=\{(1+\gamma_v)(\hat{u}_x+i\hat{u}_y)+\gamma_v v\{(\hat{v}_x+i\hat{v}_y)+i[(\hat{v}\times\hat{u})_x+i(\hat{v}\times\hat{u})_y]\}\}$
$\{1+\hat{u}_z+\gamma_v(1+\vec{v}\cdot\hat{u})-1+\gamma_v v\hat{v}_z+(\gamma_v-1)(\hat{v}\cdot\hat{u})\hat{v}_z\}$

推论3.2.12. $\{(1+\gamma_v)(1+\hat{u}_z)+\gamma_v[v_z+i(\vec{v}\times\hat{u})_z+\vec{v}\cdot\hat{u}]\}$
$\{(\hat{u}_x+i\hat{u}_y)+\gamma_v(v_x+iv_y)+(\gamma_v-1)(\vec{v}\cdot\hat{u})(v_x+iv_y)/v^2\}$
$=\{(1+\gamma_v)(1+\hat{u}_z)+\gamma_v v[\hat{v}_z+i(\hat{v}\times\hat{u})_z+\hat{v}\cdot\hat{u}]\}$
$\{(\hat{u}_x+i\hat{u}_y)+\gamma_v v(\hat{v}_x+i\hat{v}_y)+(\gamma_v-1)(\hat{v}\cdot\hat{u})(\hat{v}_x+i\hat{v}_y)\}$
$=$

推论3.2.13.

$[(1+\gamma_v)(\hat{u}_x+i\hat{u}_y)-\gamma_v v(\hat{u}_x+i\hat{u}_y)]\{\gamma_v(1+v\hat{u}_z)+[\hat{u}_z+\gamma_v v+(\gamma_v-1)\hat{u}_z)]\}$
$=(1+\gamma_v-\gamma_v v)(\hat{u}_x+i\hat{u}_y)[\gamma_v(1+v\hat{u}_z)+\gamma_v(v+\hat{u}_z)]$
$=(1+\gamma_v-\gamma_v v)(\hat{u}_x+i\hat{u}_y)\gamma_v(1+v)(1+\hat{u}_z)$
$=(1+\gamma_v+\gamma_v v)(1+\hat{u}_z)(\hat{u}_x+i\hat{u}_y)$

推论3.2.14. $[(1+\gamma_v)(1+\hat{u}_z)+\gamma_v v(1+\hat{u}_z)](\hat{u}_x+i\hat{u}_y)$
$=(1+\gamma_v+\gamma_v v)(1+\hat{u}_z)(\hat{u}_x+i\hat{u}_y)$

3.3 中微子场协变常数不变张量的性质

推论3.3.1.

$\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2}):=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}$
$\Gamma^\pi_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2})=(\frac{1}{\sqrt{2}})^1\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}$
$\Gamma^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2})=-i\varsigma(\frac{1}{\sqrt{2}})^1 2\sigma^i(\frac{1}{2})_{A_\varsigma A'_\varsigma}$

引理3.3.1. $\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma} p_a = i\sqrt{2}|\vec{p}|\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2}), \lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2}) = -\frac{\varsigma}{2}(\sigma, i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\hat{p}_a$

证明: $\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma} p_a$
$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^1 i\{-2\varsigma[\sigma(\frac{1}{2}) \cdot \vec{p}]_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}[\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2}) + \lambda_{B_\varsigma}(\hat{p}, \varsigma)\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, \varsigma)] + |\vec{p}|[\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})$
$+ \lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, \varsigma)\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, \varsigma)]\}$
$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^1 i\{[|\vec{p}|\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2}) - |\vec{p}|\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, \varsigma)\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, \varsigma)] + |\vec{p}|[\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2}) + \lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, \varsigma)\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, \varsigma)]\}$
$= i\sqrt{2}|\vec{p}|\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})$ □

推论3.3.2. $|\vec{p}|\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2}) = \frac{-\varsigma}{2}(\sigma, i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\vec{p}_a$

推论3.3.3. 投影算子:$\hat{P}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2}, \varsigma) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\hat{p}_a \to -\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\hat{\partial}_a$

3.4 中微子场数学上一般的协变对易规则

定理3.4.1.

$$\begin{cases} [a_\sigma(\vec{p}, -\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}', -\varsigma)]_\pm = \delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \\ [a_\sigma(\vec{p}, -\varsigma), a_{\sigma'}(\vec{p}', -\varsigma)]_\pm = 0 \\ [a^+_\sigma(\vec{p}, -\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}', -\varsigma)]_\pm = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\psi_{A_\varsigma}(x), \psi^+_{A'_\varsigma}(x')]_\pm \\ = -i\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a[(\delta_1 - \pm\delta_2)\Delta^{(+\varsigma)}(x - x') \pm \delta_2\Delta(x - x')] \\ [\psi_{A_\varsigma}(x), \psi_{B_\varsigma}(x')]_\pm = 0 \\ [\psi^+_{A'_\varsigma}(x), \psi^+_{B'_\varsigma}(x')]_\pm = 0 \end{cases}$$

证明: $[\psi^{(+)}_{A_\varsigma}(x), \psi^{(+)+}_{A'_\varsigma}(x')]_\pm$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}', -\frac{\varsigma}{2})[a_1(\vec{p}, -\frac{\varsigma}{2}), a^+_1(\vec{p}', -\frac{\varsigma}{2})]_\pm e^{i(p\cdot x - p'\cdot x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \delta_1\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\delta^3(\vec{p} - \vec{p}')e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \delta_1\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= -i\frac{1}{(2\pi)^3}\int \delta_1\frac{1}{2|\vec{p}|}\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}p_a e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \delta_1\frac{1}{2|\vec{p}|}\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= -i\sqrt{2}\delta_1\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{2|\vec{p}|}e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= -i\sqrt{2}\delta_1\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta^{(+)}(x - x')$ □

证明: $[\psi^{(-)}_{A_\varsigma}(x), \psi^{(-)+}_{A'_\varsigma}(x')]_\pm$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})[a^+_2(\vec{p}, -\frac{\varsigma}{2}), a_2(\vec{p}', -\frac{\varsigma}{2})]_\pm e^{-i(p\cdot x - p'\cdot x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int \delta_2\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\delta^3(\vec{p} - \vec{p}')e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int \delta_2\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= - \pm i\frac{1}{(2\pi)^3}\int \delta_2\frac{1}{2|\vec{p}|}\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}p_a e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int \delta_2\frac{1}{2|\vec{p}|}\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= \pm i\sqrt{2}\delta_2\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{2|\vec{p}|}e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= - \pm i\sqrt{2}\delta_2\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta^{(-)}(x - x')$ □

证明: $[\psi_{A_\varsigma}(x), \psi^+_{A'_\varsigma}(x')]_\pm$
$= [\psi^{(+)}_{A_\varsigma}(x), \psi^{(+)+}_{A'_\varsigma}(x')]_\pm + [\psi^{(-)}_{A_\varsigma}(x), \psi^{(-)+}_{A'_\varsigma}(x')]_\pm$
$= -i\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a[\delta_1\Delta^{(+\varsigma)}(x - x') \pm \delta_2\Delta^{(-\varsigma)}(x - x')]$
$= -i\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a[(\delta_1 - \pm\delta_2)\Delta^{(+\varsigma)}(x - x') \pm \delta_2\Delta(x - x')]$ □

从上式可知，只有$\delta_1 - \pm\delta_2 = 0$时，才满足微观因果性，同时只有$\delta_1, \delta_2 \geq 0$时，才满足几率非负性。所以数学上八种协变对易或反对易方案中，物理上合理的只有一种：即$\delta_1 = \delta_2 = 1$，且满足反对易关系。其实还有两种，即$\delta_1 = \delta_2 = 0$，且满足对易或反对易关系，就是经典情形。

3.5 中微子场物理的协变反对易规则

定理3.5.1.

$$\begin{cases}\{a_\sigma(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})\}=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ \{a_\sigma(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}),a_{\sigma'}(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})\}=0\\ \{a^+_\sigma(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\{\psi_{A_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma}(x')\}=-i\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta(x-x')\\ \{\psi_{A_\varsigma}(x),\psi_{B_\varsigma}(x')\}=0\\ \{\psi^+_{A'_\varsigma}(x),\psi^+_{B'_\varsigma}(x')\}=0\end{cases}$$

证明： $\{\psi_{A_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma}(x')\}$

$$\begin{aligned}&=\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\{\{a_1(\vec{p},-\tfrac{\varsigma}{2}),a^+_1(\vec{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}+\{a^+_2(\vec{p},-\tfrac{\varsigma}{2}),a_2(\vec{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\}e^{-ip\cdot(x-x')}\}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\\
&=\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})[\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{ip\cdot(x-x')}+\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-ip\cdot(x-x')}]\}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\\
&=\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})[e^{ip\cdot(x-x')}+e^{-ip\cdot(x-x')}\}d^3\vec{p}\\
&=-i\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\tfrac{1}{2|\vec{p}|}\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}p_a[e^{ip\cdot(x-x')}+e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}\\
&=-\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\tfrac{1}{2|\vec{p}|}\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a[e^{ip\cdot(x-x')}-e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}\\
&=-i\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\tfrac{-i}{(2\pi)^3}\int\tfrac{1}{2|\vec{p}|}[e^{ip\cdot(x-x')}-e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}\\
&=-i\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta(x-x')\end{aligned}$$

□

定理3.5.2.

$$\begin{cases}\{a_\sigma(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})\}=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ \{a_\sigma(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}),a_{\sigma'}(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})\}=0\\ \{a^+_\sigma(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\{\psi^{(\tau)}_{A_\varsigma}(x),\psi^{(\kappa)+}_{A'_\varsigma}(x')\}=-i\sqrt{2}\delta^{\tau\kappa}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta^{(\tau)}(x-x')\\ \{\psi^{(\tau)}_{A_\varsigma}(x),\psi^{(\kappa)}_{B_\varsigma}(x')\}=0\\ \{\psi^{(\tau)+}_{A'_\varsigma}(x),\psi^{(\kappa)+}_{B'_\varsigma}(x')\}=0\end{cases}$$

证明： $\{\psi^{(+)}_{A_\varsigma}(x),\psi^{(+)+}_{A'_\varsigma}(x')\}$

$$\begin{aligned}&=\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\{a_1(\vec{p},-\tfrac{\varsigma}{2}),a^+_1(\vec{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\\
&=\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\\
&=\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}\\
&=-i\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\tfrac{1}{2|\vec{p}|}\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}p_ae^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}\\
&=-\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\tfrac{1}{2|\vec{p}|}\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_ae^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}\\
&=-i\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\tfrac{-i}{(2\pi)^3}\int\tfrac{1}{2|\vec{p}|}e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}\\
&=-i\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta^{(+)}(x-x')\end{aligned}$$

□

证明： $\{\psi^{(-)}_{A_\varsigma}(x),\psi^{(-)+}_{A'_\varsigma}(x')\}$

$$\begin{aligned}&=\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\{a^+_2(\vec{p},-\tfrac{\varsigma}{2}),a_2(\vec{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\\
&=\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\\
&=\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}\\
&=-i\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\tfrac{1}{2|\vec{p}|}\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}p_ae^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}\\
&=\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\tfrac{1}{2|\vec{p}|}\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_ae^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}\\
&=i\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\tfrac{-i}{(2\pi)^3}\int\tfrac{1}{2|\vec{p}|}e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}\\
&=-i\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta^{(-)}(x-x')\end{aligned}$$

□

3.6 中微子场的等时反对易规则

推论3.6.1.

$$\begin{cases}\{\psi_{A_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma}(x')\}=-i\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta(x-x')\\ \{\psi_{A_\varsigma}(x),\psi_{B_\varsigma}(x')\}=0\\ \{\psi^+_{A'_\varsigma}(x),\psi^+_{B'_\varsigma}(x')\}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\{\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ \{\dot{\psi}_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=(\sigma\cdot\nabla)_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ \{\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\psi_{B_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\\ \{\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{B'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\end{cases}$$

证明：$\{\psi_{A_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma}(x')\}=-i\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta(x-x')$

$\Rightarrow\{\psi_{A_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec r',t)\}=-i\sqrt{2}\Gamma^\pi_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}$

$\Leftrightarrow\{\psi_{A_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec r',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')$ □

推论3.6.2.

$$\begin{cases}\{\psi_{A_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec r',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')\\ \{\psi_{A_\varsigma}(\vec r,t),\psi_{B_\varsigma}(\vec r',t)\}=0\\ \{\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{B'_\varsigma}(\vec r',t)\}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\{a_\sigma(\vec p,-\frac{\varsigma}{2}),a^+_{\sigma'}(\vec p',-\frac{\varsigma}{2})\}=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec p-\vec p')\\ \{a_\sigma(\vec p,-\frac{\varsigma}{2}),a_{\sigma'}(\vec p',-\frac{\varsigma}{2})\}=0\\ \{a^+_\sigma(\vec p,-\frac{\varsigma}{2}),a^+_{\sigma'}(\vec p',-\frac{\varsigma}{2})]=0\end{cases}$$

证明：$\{a_1(\vec p,-\frac{\varsigma}{2}),a^+_1(\vec p',-\frac{\varsigma}{2})\}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\psi_{A_\varsigma}(\vec r,t)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)},\lambda^{A'_\varsigma}(\hat p',-\frac{\varsigma}{2})\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec r',t)e^{i(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}\}d^3\vec r d^3\vec r'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda^{+A_\varsigma}(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\lambda^{A'_\varsigma}(\hat p',-\frac{\varsigma}{2})\{\psi_{A_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec r',t)\}e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{i(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}d^3\vec r d^3\vec r'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda^{+A_\varsigma}(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\lambda^{A'_\varsigma}(\hat p',-\frac{\varsigma}{2})\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{i(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}d^3\vec r d^3\vec r'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda^{+}(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\lambda(\hat p',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{i(\vec p'\cdot\vec r-E't)}d^3\vec r$

$=\lambda^+(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\delta^3(\vec p-\vec p')$

$=\delta^3(\vec p-\vec p')$ □

证明：$\{a^+_2(\vec p,-\frac{\varsigma}{2}),a_2(\vec p',-\frac{\varsigma}{2})\}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\psi_{A_\varsigma}(\vec r,t)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)},\lambda^{A'_\varsigma}(\hat p',-\frac{\varsigma}{2})\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec r',t)e^{-i(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}\}d^3\vec r d^3\vec r'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda^{+A_\varsigma}(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\lambda^{A'_\varsigma}(\hat p',-\frac{\varsigma}{2})\{\psi_{A_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec r',t)\}e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{-i(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}d^3\vec r d^3\vec r'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda^{+A_\varsigma}(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\lambda^{A'_\varsigma}(\hat p',-\frac{\varsigma}{2})\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{-i(\vec p'\cdot\vec r'-E't)}d^3\vec r d^3\vec r'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda^{+}(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\lambda(\hat p',-\frac{\varsigma}{2})e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}e^{-i(\vec p'\cdot\vec r-E't)}d^3\vec r$

$=\lambda^+(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})\delta^3(\vec p-\vec p')$

$=\delta^3(\vec p-\vec p')$ □

3.7 中微子场反对易规则小结

以上几个小节的证明正好形成一个逻辑闭环，故有如下性质：

推论3.7.1.
$$\begin{cases}\{a_\sigma(\vec p,-\frac{\varsigma}{2}),a^+_{\sigma'}(\vec p',-\frac{\varsigma}{2})\}=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec p-\vec p')\\ \{a_\sigma(\vec p,-\frac{\varsigma}{2}),a_{\sigma'}(\vec p',-\frac{\varsigma}{2})\}=0\\ \{a^+_\sigma(\vec p,-\frac{\varsigma}{2}),a^+_{\sigma'}(\vec p',-\frac{\varsigma}{2})]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\{a_\sigma(\vec p),a^+_{\sigma'}(\vec p')\}=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec p-\vec p')\\ \{a_\sigma(\vec p),a_{\sigma'}(\vec p')\}=0\\ \{a^+_\sigma(\vec p),a^+_{\sigma'}(\vec p')]=0\end{cases}$$

$$\Updownarrow\qquad\qquad\qquad\qquad\Updownarrow$$

推论3.7.2.
$$\begin{cases}\{\psi_{A_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma}(x')\}=-i\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta(x-x')\\ \{\psi_{A_\varsigma}(x),\psi_{B_\varsigma}(x')\}=0\\ \{\psi^+_{A'_\varsigma}(x),\psi^+_{B'_\varsigma}(x')\}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\{\psi_{A_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec r',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')\\ \{\psi_{A_\varsigma}(\vec r,t),\psi_{B_\varsigma}(\vec r',t)\}=0\\ \{\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{B'_\varsigma}(\vec r',t)\}=0\end{cases}$$

3.8 中微子场的对易函数、因果函数和费曼传播子

推论3.8.1.

$$\begin{cases}\Delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x):=-\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta(x)\\ \Delta^{(+)}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x):=-\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta^{(-)}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x):=-\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{(l)}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x):=-\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta^{(l)}(x)\end{cases}$$

推论3.8.2.

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x):=-\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta^{(c)}(x)-i\sqrt{2}\Gamma^\pi_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta(t)\Delta(x)=-\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta^{(c)}(x)\\ \Delta^{ret}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x):=-\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta^{ret}(x)-i\sqrt{2}\Gamma^\pi_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta(t)\Delta(x)=-\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta^{ret}(x)\\ \Delta^{adv}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x):=-\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta^{adv}(x)-i\sqrt{2}\Gamma^\pi_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta(t)\Delta(x)=-\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta^{adv}(x)\\ \Delta_{FA_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x):=-\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta_F(x)+\sqrt{2}\Gamma^\pi_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta(t)\Delta(x)=-\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta_F(x)\\ =i\Delta^{(c)}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\Delta_{FA_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};p)e^{ipx}d^4p,\Delta_{FA_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};p)=\frac{-\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}p_a}{p^2-i\varepsilon}=\frac{i\varsigma(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}p_a}{p^2-i\varepsilon}\end{cases}$$

推论3.8.3.

$$\begin{cases}[\frac{1}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta(\frac{1}{2};x)=0\\ [\frac{1}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{(+)}(\frac{1}{2};x)=0\\ [\frac{1}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{(-)}(\frac{1}{2};x)=0\\ [\frac{1}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{(l)}(\frac{1}{2};x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}[\frac{1}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{(c)}(\frac{1}{2};x)=-\varsigma[\sigma(\frac{1}{2}),i\frac{1}{2}\varsigma]_a\delta(t)\Delta(\frac{1}{2};x)|_{t=0}\\ [\frac{1}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{ret}(\frac{1}{2};x)=-\varsigma[\sigma(\frac{1}{2}),i\frac{1}{2}\varsigma]_a\delta(t)\Delta(\frac{1}{2};x)|_{t=0}\\ [\frac{1}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{adv}(\frac{1}{2};x)=-\varsigma[\sigma(\frac{1}{2}),i\frac{1}{2}\varsigma]_a\delta(t)\Delta(\frac{1}{2};x)|_{t=0}\\ [\frac{1}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta_F(\frac{1}{2};x)=-i\varsigma[\sigma(\frac{1}{2}),i\frac{1}{2}\varsigma]_a\delta(t)\Delta(\frac{1}{2};x)|_{t=0}\end{cases}$$

$$\Updownarrow\qquad\qquad\qquad\Updownarrow$$

推论3.8.4.

$$\begin{cases}[\frac{1}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta(\frac{1}{2};x)=0\\ [\frac{1}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{(+)}(\frac{1}{2};x)=0\\ [\frac{1}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{(-)}(\frac{1}{2};x)=0\\ [\frac{1}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{(l)}(\frac{1}{2};x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}[\frac{1}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{(c)}(\frac{1}{2};x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma_a\delta^4(x)\\ [\frac{1}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{ret}(\frac{1}{2};x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma_a\delta^4(x)\\ [\frac{1}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{adv}(\frac{1}{2};x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma_a\delta^4(x)\\ [\frac{1}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta_F(\frac{1}{2};x)=-i\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma_a\delta^4(x)\end{cases}$$

$$\Updownarrow\qquad\qquad\qquad\Updownarrow$$

推论3.8.5.

$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\Delta(\frac{1}{2};x)=0\\ (\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\Delta^{(+)}(\frac{1}{2};x)=0\\ (\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\Delta^{(-)}(\frac{1}{2};x)=0\\ (\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\Delta^{(l)}(\frac{1}{2};x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\Delta^{(c)}(\frac{1}{2};x)=i\varsigma\delta^4(x)\\ (\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\Delta^{ret}(\frac{1}{2};x)=i\varsigma\delta^4(x)\\ (\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\Delta^{adv}(\frac{1}{2};x)=i\varsigma\delta^4(x)\\ (\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\Delta_F(\frac{1}{2};x)=-\varsigma\delta^4(x)\end{cases}$$

3.9 中微子场能量动量算符的提取

推论3.9.1. $H=\int|\vec{p}|[a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})-a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p}$
$=i\varsigma\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma\cdot\nabla\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=i\int\psi^+(\vec{r},t)\partial_t\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

证明： $H=\int|\vec{p}|[a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})-a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|[\lambda_m^{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{ip\cdot x'}\lambda_m^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}$
$-\lambda_m^{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{-ip\cdot x'}\lambda_m^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|\lambda_m^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_m^{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int(i\sqrt{2})^{-1}(\Gamma_a)^{A'_\varsigma A_\varsigma}p^a\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=i\varsigma\int\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t)(\sigma\cdot\nabla)^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=i\varsigma\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma\cdot\nabla\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=i\int\psi^+(\vec{r},t)\partial_t\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

推论3.9.2. $\vec{P}=\int\vec{p}[a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})-a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p}=-i\int\psi^+(\vec{r},t)\nabla\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

证明： $\vec{P}=\int\vec{p}[a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})-a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\vec{p}[\lambda_m^{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{ip\cdot x'}\lambda_m^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}$
$-\lambda_m^{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{-ip\cdot x'}\lambda_m^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \vec{p}\lambda_m^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_m^{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\hat{p}}{|\vec{p}|}(i\sqrt{2})^{-1}(\Gamma_a)^{A'_\varsigma A_\varsigma}p^a\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\int \vec{p}\delta^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \vec{p}\delta^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= i\frac{1}{(2\pi)^3}\int \delta^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)\nabla e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= i\int \delta^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)\nabla\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -i\int \psi^+(\vec{r},t)\nabla\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

推论3.9.3. $P^a = \int p^a[a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})-a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p} = -i\int \psi^+(\vec{r},t)\partial^a\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

3.10 中微子场轻子数算符的提取

推论3.10.1. $Q = \int [a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})+a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p} = \int \psi^+(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

证明: $Q = \int [a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})+a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \lambda^{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{i\sqrt{2}}\int (\Gamma^a)^{A'_\varsigma A_\varsigma}\hat{p}_a\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{i\sqrt{2}}\int (\frac{i}{\sqrt{2}})^1\delta^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \int \psi^+(\vec{r}',t)\psi(\vec{r},t)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \int \psi^+(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

3.11 中微子场粒子数算符的提取

推论3.11.1. $N = \int [a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})-a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p} = \int \psi^+(\vec{r},t)\frac{i\partial_t}{\sqrt{-\nabla^2}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

证明: $N = \int [a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})-a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \lambda^{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-ip\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{ip\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{i\sqrt{2}}\int (\Gamma^a)^{A'_\varsigma A_\varsigma}\hat{p}_a\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-ip\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{ip\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{i\sqrt{2}}\int [-i\varsigma(\frac{1}{\sqrt{2}})^1(\sigma^i)^{A'_\varsigma A_\varsigma}\hat{p}_i]\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-ip\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{ip\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -\varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\int \psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)(\sigma\cdot\hat{p})^{A'_\varsigma A_\varsigma}e^{-ip\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -i\frac{1}{(2\pi)^3}\int \psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{(\sigma\cdot\nabla)^{A'_\varsigma A_\varsigma}}{\sqrt{-\nabla^2}}e^{-ip\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -i\varsigma\int \psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{(\sigma\cdot\nabla)^{A'_\varsigma A_\varsigma}}{\sqrt{-\nabla^2}}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= i\varsigma\int \psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{(\sigma\cdot\nabla)^{A'_\varsigma A_\varsigma}}{\sqrt{-\nabla^2}}\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= i\varsigma\int \psi^+(\vec{r},t)\frac{\sigma\cdot\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= \int \psi^+(\vec{r},t)\frac{i\partial_t}{\sqrt{-\nabla^2}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

3.12 中微子场角动量算符的提取

3.12.1 中微子场空间轨道角动量算符

定理3.12.1. $L_{ij} = -i\int \psi^+(\vec{r},t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= i\int \{a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})(p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})+a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})(p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\}d^3\vec{p}$

证明: $L_{ij}^{(+\varsigma)} = -i\int \psi^{(+\varsigma)+}(\vec{r},t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\psi^{(+\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= -i\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int [\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}'|t}][\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}][(r_i\partial_j-r_j\partial_i)e^{i\varsigma(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$
$= -i\int [\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}'|t}][\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}](p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})e^{i\varsigma(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= -i\int [\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}'|t}][\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}](p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= i\int [\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}](p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})[\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}]d^3\vec{p}$
$= i\int [\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}]\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}(p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$
$= i\int a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})(p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}+i\int a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})p_i\frac{-ip_y\delta_{jx}+ip_x\delta_{jy}}{2p(1+\hat{p}_z)}d^3\vec{p}$ □

证明: $L_{ij}^{(-\varsigma)}=-i\int\psi^{(-\varsigma)+}(\vec{r},t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\psi^{(-\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=-i\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}'|t}][\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}][(r_i\partial_j-r_j\partial_i)e^{-i\varsigma(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$
$=-i\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}'|t}][\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}][(r_i\partial_j-r_j\partial_i)e^{-i\varsigma(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$
$=-i\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}'|t}][\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}](p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})e^{-i\varsigma(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$=-i\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}'|t}][\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}](p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$=i\int[\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}](p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})[\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}]d^3\vec{p}$
$=i\int[\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}]\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}(p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$
$=i\int a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})(p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$ □

证明: $L_{ij}^{(+-\varsigma)}=-i\int\psi^{(+\varsigma)+}(\vec{r},t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\psi^{(-\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=-i\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}'|t}][\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}][(r_i\partial_j-r_j\partial_i)e^{-i\varsigma(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{r}}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$
$=-i\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}'|t}][\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}][(r_i\partial_j-r_j\partial_i)e^{-i\varsigma(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{r}}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$
$=-i\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}'|t}][\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}](p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})e^{-i\varsigma(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$=-i\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}'|t}][\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}](p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$=i\int[\lambda^+(-\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(-\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}](p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})[\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}]d^3\vec{p}$
$=i\int[\lambda^+(-\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(-\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}]\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}(p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$
$=0$ □

证明: $L_{ij}^{(-+\varsigma)}=-i\int\psi^{(-\varsigma)+}(\vec{r},t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\psi^{(+\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=-i\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}'|t}][\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}][(r_i\partial_j-r_j\partial_i)e^{i\varsigma(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{r}}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$
$=-i\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}'|t}][\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}][(r_i\partial_j-r_j\partial_i)e^{i\varsigma(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{r}}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$
$=-i\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}'|t}][\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}](p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})e^{i\varsigma(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$=-i\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}'|t}][\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}](p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$=i\int[\lambda^+(-\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2(-\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}](p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})[\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}]d^3\vec{p}$
$=i\int[\lambda^+(-\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2(-\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}]\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}(p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$
$=0$ □

证明: $L_{ij}=-i\int\psi^+(\vec{r},t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=-i\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$
$\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})[a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma p'\cdot x}+a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma p'\cdot x}](r_i\partial_j-r_j\partial_i)[a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma p\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma p\cdot x}]$
$=L_{ij}^{(+\varsigma)}+L_{ij}^{(-\varsigma)}+L_{ij}^{(+-\varsigma)}+L_{ij}^{(-+\varsigma)}$
$=i\int\{a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})(p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})+a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})(p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\}d^3\vec{p}$ □

推论3.12.1. $\int(p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})[a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p}=0,\int(p_j\partial_{p^i}-p_i\partial_{p^j})[a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p}=0$

3.12.2 中微子场时间轨道角动量算符

定理3.12.2. $L_{i\pi}=-i\int\psi^+(\vec{r},t)[r_i\partial_\pi-it\partial_i]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=-\int a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\partial_{p^i}\{|\vec{p}|a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\}+a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\partial_{p^i}\{|\vec{p}|a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\}d^3\vec{p}$

证明: $L_{i\pi}^{(+\varsigma)}=-i\int\psi^{(+\varsigma)+}(\vec{r},t)[r_i\partial_\pi-it\partial_i]\psi^{(+\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}'|t}][|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}][i\varsigma r_ie^{i\varsigma(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$
$-i\varsigma t\int p^ia_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$
$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}'|t}][|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}][i\varsigma r_ie^{i\varsigma(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$
$-i\varsigma t\int p^ia_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$
$=\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}'|t}][|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}]\partial_{p^i}e^{i\varsigma(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'-i\varsigma t\int p^ia_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$
$=\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}'|t}][|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}]\partial_{p^i}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')d^3\vec{p}d^3\vec{p}'-i\varsigma t\int p^ia_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$
$=-\int[\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}]\partial_{p^i}[|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}]d^3\vec{p}-i\varsigma t\int p^ia_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$

$= -\int a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})(\partial_{p^i}|\vec{p}| - i\varsigma tp^i)a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p} - i\varsigma t\int p^i a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$

$= -\int a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\partial_{p^i}\{|\vec{p}|a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\}d^3\vec{p}$ □

证明: $L_{i\pi}^{(-\varsigma)} = -i\int \psi^{(-\varsigma)+}(\vec{r},t)[r_i\partial_\pi - it\partial_i]\psi^{(-\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$= i\int \psi^{(-\varsigma)+}(\vec{r},t)r_i i\partial_t\psi^{(-\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r} - it[-i\int \psi^{(-\varsigma)+}(\vec{r},t)\partial_i\psi^{(-\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r}]$

$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}'|t}][|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}][-i\varsigma r_i e^{-i\varsigma(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$

$+ i\varsigma t\int p^i a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$

$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}'|t}][|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}][-i\varsigma r_i e^{-i\varsigma(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$

$+ i\varsigma t\int p^i a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$

$= \int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}'|t}][|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}]\partial_{p^i}e^{i\varsigma(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}d^3\vec{p}' + i\varsigma t\int p^i a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$

$= \int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}'|t}][|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}]\partial_{p^i}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')d^3\vec{p}d^3\vec{p}' + i\varsigma t\int p^i a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$

$= -\int[\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}]\partial_{p^i}[|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}]d^3\vec{p} + i\varsigma t\int p^i a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$

$= -\int a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})(\partial_{p^i}|\vec{p}| + i\varsigma tp^i)a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p} + i\varsigma t\int p^i a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$

$= -\int a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\partial_{p^i}\{|\vec{p}|a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\}d^3\vec{p}$ □

证明: $L_{i\pi}^{(+-\varsigma)} = -i\int \psi^{(+\varsigma)+}(\vec{r},t)[r_i\partial_\pi - it\partial_i]\psi^{(-\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$= i\int \psi^{(+\varsigma)+}(\vec{r},t)r_i i\partial_t\psi^{(-\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r} - it[-i\int \psi^{(+\varsigma)+}(\vec{r},t)\partial_i\psi^{(-\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r}]$

$= i\int \psi^{(+\varsigma)+}(\vec{r},t)r_i i\partial_t\psi^{(-\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r} + 0$

$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}'|t}][|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}][-i\varsigma r_i e^{-i\varsigma(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{r}}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$

$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}'|t}][|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}][-i\varsigma r_i e^{-i\varsigma(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{r}}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$

$= \int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}'|t}][|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}]\partial_{p^i}e^{i\varsigma(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$= \int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}'|t}][|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}]\partial_{p^i}\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$= -\int[\lambda^+(-\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(-\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}]\partial_{p^i}[|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma|\vec{p}|t}]d^3\vec{p}$

$= 0$ □

证明: $L_{i\pi}^{(-+\varsigma)} = -i\int \psi^{(-\varsigma)+}(\vec{r},t)[r_i\partial_\pi - it\partial_i]\psi^{(+\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$= i\int \psi^{(-\varsigma)+}(\vec{r},t)r_i i\partial_t\psi^{(+\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r} - it[-i\int \psi^{(-\varsigma)+}(\vec{r},t)\partial_i\psi^{(+\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r}]$

$= i\int \psi^{(+\varsigma)+}(\vec{r},t)r_i i\partial_t\psi^{(-\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r} + 0$

$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}'|t}][|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}][i\varsigma r_i e^{i\varsigma(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{r}}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$

$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}'|t}][|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}][i\varsigma r_i e^{i\varsigma(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{r}}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$

$= \int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}'|t}][|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}]\partial_{p^i}e^{-i\varsigma(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$= \int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}'|t}][|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}]\partial_{p^i}\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$= -\int[\lambda^+(-\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2(-\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}]\partial_{p^i}[|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma|\vec{p}|t}]d^3\vec{p}$

$= 0$ □

证明: $L_{i\pi} = -i\int \psi^+(\vec{r},t)[r_i\partial_\pi - it\partial_i]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$= i\int \psi^+(\vec{r},t)r_i i\partial_t\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} - it[-i\int \psi^{(+\varsigma)+}(\vec{r},t)\partial_i\psi^{(+\varsigma)}(\vec{r},t)d^3\vec{r}]$

$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int|\vec{p}|\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})[a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma p'\cdot x} + a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma p'\cdot x}]i\varsigma r_i[a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i\varsigma p\cdot x} - a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i\varsigma p\cdot x}]$

$d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r} - i\varsigma t\int p^i a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$

$= L_{i\pi}^{(+\varsigma)} + L_{i\pi}^{(-\varsigma)} + L_{i\pi}^{(+-\varsigma)} + L_{i\pi}^{(-+\varsigma)}$

$= -\int a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\partial_{p^i}\{|\vec{p}|a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\} + a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\partial_{p^i}\{|\vec{p}|a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\}d^3\vec{p}$ □

3.12.3 中微子场自旋角动量算符

定理3.12.3. $S_{ab} = \int \psi^+(\vec{r},t)S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\int \psi^+(\vec{r},t)\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$= \frac{-i\varsigma}{2}\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\int \hat{p}_{\alpha_\varsigma}[a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}) + a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p}$

定理3.12.4. $\hat{s}_{\alpha_\varsigma} = \int \psi^+(\vec{r},t)\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = -\frac{\varsigma}{2}\int \hat{p}_{\alpha_\varsigma}[a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}) + a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p}$

证明： $\hat{s}^{(+)}_{\alpha_\varsigma}=\int\psi^{(+)+}(\vec{r},t)\sigma_{\alpha_\varsigma}\psi^{(+)}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i|\vec{p}'|t}]\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})[\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i|\vec{p}|t}]e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$
$=\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i|\vec{p}'|t}]\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})[\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$=\int[\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i|\vec{p}|t}]\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})[\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i|\vec{p}|t}]d^3\vec{p}$
$=-\frac{\varsigma}{2}\int a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\hat{p}_{\alpha_\varsigma}a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$ □

证明： $\hat{s}^{(-)}_{\alpha_\varsigma}=\int\psi^{(-)+}(\vec{r},t)\sigma_{\alpha_\varsigma}\psi^{(-)}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i|\vec{p}'|t}]\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})[\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i|\vec{p}|t}]e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$
$=\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i|\vec{p}'|t}]\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})[\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$=\int[\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i|\vec{p}|t}]\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})[\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i|\vec{p}|t}]d^3\vec{p}$
$=-\frac{\varsigma}{2}\int a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\hat{p}_{\alpha_\varsigma}a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$ □

证明： $\hat{s}^{(+-)}_{\alpha_\varsigma}=\int\psi^{(+)+}(\vec{r},t)\sigma_{\alpha_\varsigma}\psi^{(-)}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i|\vec{p}'|t}]\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})[\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i|\vec{p}|t}]e^{-i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$
$=\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{i|\vec{p}'|t}]\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})[\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$=\int[\lambda^+(-\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1^+(-\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i|\vec{p}|t}]\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})[\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{i|\vec{p}|t}]d^3\vec{p}$
$\neq 0$ □

证明： $\hat{s}^{(-+)}_{\alpha_\varsigma}=\int\psi^{(-)+}(\vec{r},t)\sigma_{\alpha_\varsigma}\psi^{(-)}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i|\vec{p}'|t}]\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})[\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i|\vec{p}|t}]e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$
$=\int[\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-i|\vec{p}'|t}]\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})[\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$=\int[\lambda^+(-\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2(-\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i|\vec{p}|t}]\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})[\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-i|\vec{p}|t}]d^3\vec{p}$
$\neq 0$ □

证明： $\hat{s}_{\alpha_\varsigma}=\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}$
$\lambda^+(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})[a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{-ip'\cdot x}+a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})e^{ip'\cdot x}][a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-ip\cdot x}]$
$=\hat{s}^{(+)}_{\alpha_\varsigma}+\hat{s}^{(-)}_{\alpha_\varsigma}+\hat{s}^{(+-)}_{\alpha_\varsigma}+\hat{s}^{(-+)}_{\alpha_\varsigma}$
$=-\frac{\varsigma}{2}\int\hat{p}_{\alpha_\varsigma}[a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})+a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p}$ □

证明： $[\hat{s}_{\alpha_\varsigma},\hat{s}_{\beta_\varsigma}]$
$=\int\hat{p}_{\alpha_\varsigma}\hat{p}'_{\beta_\varsigma}[[a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})+a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})],[a_1^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})+a_2(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p}',-\frac{\varsigma}{2})]]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$\neq 0$ □

推论3.12.2. $[\hat{s}_{\alpha_\varsigma},\hat{s}_{\beta_\varsigma}]=i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\hat{s}_{\gamma_\varsigma}$

证明： $[\hat{s}_{\alpha_\varsigma},\hat{s}_{\beta_\varsigma}]=\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma}(\frac{1}{2})^{B'_\varsigma B_\varsigma}[\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{B'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{B_\varsigma}(\vec{r}',t)]$
$=\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})^{A'_\varsigma A_\varsigma}(\sigma_{\beta_\varsigma})^{B'_\varsigma B_\varsigma}$
$\{-[\psi^+_{B'_\varsigma}(\vec{r}',t),\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)]\psi_{B_\varsigma}(\vec{r}',t)-\psi^+_{B'_\varsigma}(\vec{r}',t)[\psi_{B_\varsigma}(\vec{r}',t),\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)]\}$
$=\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma}(\frac{1}{2})^{B'_\varsigma B_\varsigma}$
$\{\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t)\{\psi^+_{B'_\varsigma}(\vec{r}',t),\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)\}\psi_{B_\varsigma}(\vec{r}',t)-\psi^+_{B'_\varsigma}(\vec{r}',t)\{\psi_{B_\varsigma}(\vec{r}',t),\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t)\}\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)\}$
$=\int d^3\vec{r}\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma}(\frac{1}{2})^{B'_\varsigma B_\varsigma}\{\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t)\delta_{A_\varsigma B'_\varsigma}\psi_{B_\varsigma}(\vec{r}',t)-\psi^+_{B'_\varsigma}(\vec{r}',t)\delta_{A'_\varsigma B_\varsigma}\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)\}$
$=\int d^3\vec{r}\{\psi^+(\vec{r},t)\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma_{\beta_\varsigma}(\frac{1}{2})\psi(\vec{r}',t)-\psi^+(\vec{r}',t)\sigma_{\beta_\varsigma}(\frac{1}{2})\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})\psi(\vec{r},t)\}$
$=\int d^3\vec{r}\psi^+(\vec{r},t)[\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2}),\sigma_{\beta_\varsigma}(\frac{1}{2})]\psi(\vec{r}',t)$
$=i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\hat{s}_{\gamma_\varsigma}$ □

综合以上两点，得到自由场以下有点奇怪的结论，物理意义是正反粒子必须成对产生、湮灭。

推论3.12.3. $\hat{s}_{\alpha_\varsigma}\neq 0$

3.13 中微子场角动量算符小结

定义3.13.1. $\tilde{\partial}_a := \partial_{p^a}, \tilde{\partial}_\pi \equiv \frac{1}{i|\vec{p}|}$

推论3.13.1. $L_{ij} = -i\int \psi^+(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= -i\int\{a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})(p_i\partial_{p^j} - p_j\partial_{p^i})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}) + a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})(p_i\partial_{p^j} - p_j\partial_{p^i})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\}d^3\vec{p}$

推论3.13.2. $L_{i\pi} = -i\int \psi^+(\vec{r},t)[r_i\partial_\pi - it\partial_i]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= -i\int a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})(\frac{p_i}{i|\vec{p}|} - i|\vec{p}|\partial_{p_i})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}) + a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})(\frac{p_i}{i|\vec{p}|} - i|\vec{p}|\partial_{p_i})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})d^3\vec{p}$

推论3.13.3. $S_{ab} = \int \psi^+(\vec{r},t)S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\int \psi^+(\vec{r},t)\sigma_{\alpha_\varsigma}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= -i\int[a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\frac{\varsigma}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\hat{p}_{\alpha_\varsigma}a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}) + a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\frac{\varsigma}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\hat{p}_{\alpha_\varsigma}a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p}$

推论3.13.4. $\hat{M}_{ab} = -i(x_a\partial_b - x_b\partial_a) + \hat{S}_{ab}, \tilde{M}_{ab} = -i(p_a\tilde{\partial}_b - p_b\tilde{\partial}_a) + \frac{-i\varsigma}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\hat{p}_{\alpha_\varsigma}$

得到以下重要定理。

定理3.13.1. $M_{ab} = \int \psi^+(\vec{r},t)\hat{M}_{ab}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int\{a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\tilde{M}_{ab}a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}) + a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\tilde{M}_{ab}a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})\}d^3\vec{p}$

3.14 中微子场正规化能量动量算符

推论3.14.1. $H_0 = \varsigma\int |\vec{p}|[a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}) + a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p}$
$= \frac{i\varsigma}{2}\int[\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t),(\sigma\cdot\nabla)^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)]d^3\vec{r} + \frac{\varsigma}{2}\int\{\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t),\delta^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sqrt{-\nabla^2}\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

证明： $H_0 = \varsigma\int |\vec{p}|[a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}) + a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\varsigma\int |\vec{p}|[\lambda_m^{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{i\varsigma p\cdot x'}\lambda_m^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i\varsigma p\cdot x}$
$+ \lambda_m^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i\varsigma p\cdot x}\lambda_m^{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{-i\varsigma p\cdot x'}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\varsigma\int |\vec{p}|\lambda_m^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_m^{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})[\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} + \psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\varsigma\int(i\sqrt{2})^{-1}(\Gamma_a)^{A'_\varsigma A_\varsigma}p^a[\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} + \psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{i\varsigma}{2}\int[\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t),(\sigma\cdot\nabla)^{A'_\varsigma A_\varsigma}\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)]d^3\vec{r} + \frac{\varsigma}{2}\int\{\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t),\delta^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sqrt{-\nabla^2}\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$= i\varsigma\int \psi^+(\vec{r},t)\sigma\cdot\nabla\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} + \frac{\varsigma}{2}\int\{\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec{r},t),\delta^{A'_\varsigma A_\varsigma}\sqrt{-\nabla^2}\psi_{A_\varsigma}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$ □

3.15 中微子场的量子方程

推论3.15.1.

$$[\partial_a + iS_{ab}(\tfrac{1}{2},\varsigma)\partial^b]\psi = 0 \Leftrightarrow [P_a,\psi(\vec{r},t)] = i\partial_a\psi(\vec{r},t);\begin{cases}\{\psi_A(\vec{r},t),\psi_B^+(\vec{r}',t)\} = \delta_{AB}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ \{\psi_A(\vec{r},t),\psi_B(\vec{r}',t)\} = 0,\{\psi_A^+(\vec{r},t),\psi_B^+(\vec{r}',t)\} = 0\end{cases}$$

推论3.15.2.

$$\begin{cases}[A,BC] = [A,B]C + B[A,C],[A,CB] = [A,C]B + C[A,B]\\ [A,BC] = \{A,B\}C - B\{A,C\},[A,CB] = \{A,C\}B - C\{A,B\}\end{cases}$$

$$\begin{cases}[BC,A] = [B,A]C + B[C,A]\\ [BC,A] = -\{B,A\}C + B\{C,A\}\end{cases}$$

3.16 数学引理

引理3.16.1.

$$\begin{cases}[AB,A'B'] = [AB,A']B' + A'[AB,B'],[AB,B'A'] = [AB,B']A' + B'[AB,A']\\ [AB,A'B'] = \{AB,A'\}B' - A'\{AB,B'\},[AB,B'A'] = \{AB,B'\}A' - B'\{AB,A'\}\end{cases}$$

$$\begin{cases}[A'B',AB] = [A',AB]B' + A'[B',AB]\\ [A'B',AB] = -\{A',AB\}B' + A'\{B',AB\}\end{cases}$$

推论3.16.1.

$$\begin{cases}[A,BC]=[A,B]C+B[A,C]\\ [A,BC]=\{A,B\}C-B\{A,C\}\end{cases}\quad \begin{cases}[BC,A]=[B,A]C+B[C,A]\\ [BC,A]=-\{B,A\}C+B\{C,A\}\end{cases}$$

引理3.16.2. $[AB,A'B']=[AB,A']B'+A'[AB,B']=[A,A']BB'+A[B,A']B'+A'A[B,B']+A'[A,B']B$

引理3.16.3. $[AB,A'B']=[AB,A']B'+A'[AB,B']=-\{A,A'\}BB'+A\{B,A'\}B'-A'\{A,B'\}B+A'A\{B,B'\}$

引理3.16.4. $[A,A']=[B,B']=0\Rightarrow[AB,A'B']=A[B,A']B'+A'[A,B']B$

引理3.16.5. $\{A,A'\}=\{B,B'\}=0\Rightarrow[AB,A'B']=A\{B,A'\}B'-A'\{A,B'\}B$

推论3.16.2.

$$\begin{cases}\{\psi_{A_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma}(x')\}=-i\sqrt{2}\Gamma^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a\Delta(x-x')\\ \{\psi_{A_\varsigma}(x),\psi_{B_\varsigma}(x')\}=0\\ \{\psi^+_{A'_\varsigma}(x),\psi^+_{B'_\varsigma}(x')\}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\{\psi_{A_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec r',t)\}=\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')\\ \{\dot\psi_{A_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec r',t)\}=(\sigma\cdot\nabla)_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')\\ \{\psi_{A_\varsigma}(\vec r,t),\psi_{B_\varsigma}(\vec r',t)\}=0\\ \{\psi^+_{A'_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{B'_\varsigma}(\vec r',t)\}=0\end{cases}$$

3.17 中微子场的彭加莱对称性

引理3.17.1.

$$\begin{cases}P_a=-i\int\psi^+(\vec r,t)\partial_a\psi(\vec r,t)d^3\vec r=\int\psi^+(\vec r,t)\hat P_a\psi(\vec r,t)d^3\vec r\\ L_{ab}=-i\int\psi^+(\vec r,t)(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\psi(\vec r,t)d^3\vec r=\int\psi^+(\vec r,t)\hat L_{ab}\psi(\vec r,t)d^3\vec r\\ M_{ab}=\int\psi^+(\vec r,t)[-i(r_a\partial_b-r_b\partial_a)+\hat S_{ab}]\psi(\vec r,t)d^3\vec r=\int\psi^+(\vec r,t)\hat M_{ab}\psi(\vec r,t)d^3\vec r\\ \tilde M_{ab}=-i\int\psi^+(\vec r,t)(r_a\sigma_b-r_b\sigma_a)\dot\psi(\vec r,t)d^3\vec r\\ \bar M_{ab}=-i\int\psi^+(\vec r,t)(r_a\sigma_b-r_b\sigma_a)\psi(\vec r,t)d^3\vec r\end{cases}$$

定理3.17.1.

$$\begin{cases}[L_{ab},L_{cd}]=-i(g_{ad}L_{bc}-g_{ac}L_{bd}+g_{bc}L_{ad}-g_{bd}L_{ac})\\ [S_{ab},S_{cd}]=-i(g_{ad}S_{bc}-g_{ac}S_{bd}+g_{bc}S_{ad}-g_{bd}S_{ac})\\ [L_{ab},P_c]=-i(g_{bc}P_a-g_{ac}P_b),[S_{ab},L_{cd}]=0,[S_{ab},P_c]=0,[P_a,P_b]=0\end{cases}$$

$$[\Rightarrow]\begin{cases}[M_{ab},M_{cd}]=-i(g_{ad}M_{bc}-g_{ac}M_{bd}+g_{bc}M_{ad}-g_{bd}M_{ac})\\ [M_{ab},P_c]=-i(g_{bc}P_a-g_{ac}P_b),[P_a,P_b]=0\end{cases}$$

证明: $[L_{ab},L_{cd}]$

$=-\int[\psi^+(\vec r,t)(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\psi(\vec r,t),\psi^+(\vec r',t)(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\psi(\vec r',t)]d^3\vec r d^3\vec r'$

$=-\delta^{AB}\delta^{A'B'}\int[\psi^+_A(\vec r,t)(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\psi_B(\vec r,t),\psi^+_{A'}(\vec r',t)(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\psi_{B'}(\vec r',t)]d^3\vec r d^3\vec r'$

$=-\delta^{AB}\delta^{A'B'}\int d^3\vec r d^3\vec r'$

$\{\psi^+_A(\vec r,t)\{(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\psi_B(\vec r,t),\psi^+_{A'}(\vec r',t)\}(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\psi_{B'}(\vec r',t)$

$-\psi^+_{A'}(\vec r',t)\{\psi^+_A(\vec r,t),(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\psi_{B'}(\vec r',t)\}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\psi_B(\vec r,t)\}$

$=-\delta^{AB}\delta^{A'B'}\int d^3\vec r d^3\vec r'$

$\{\psi^+_A(\vec r,t)\delta_{A'B}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\delta^3(\vec r-\vec r')(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\psi_{B'}(\vec r',t)-\psi^+_{A'}(\vec r',t)\delta_{AB'}(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\delta^3(\vec r-\vec r')(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\psi_B(\vec r,t)\}$

$=-\int d^3\vec r d^3\vec r'$

$\{\psi^+(\vec r,t)(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\delta^3(\vec r-\vec r')(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\psi(\vec r',t)-\psi^+(\vec r',t)(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\delta^3(\vec r-\vec r')(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\psi(\vec r,t)\}$

$=\int d^3\vec r d^3\vec r'$

$\{\psi^+(\vec r,t)(r_a\partial'_b-r_b\partial'_a)\delta^3(\vec r-\vec r')(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\psi(\vec r',t)-\psi^+(\vec r',t)(r'_c\partial_d-r'_d\partial_c)\delta^3(\vec r-\vec r')(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\psi(\vec r,t)\}$

$=-\int d^3\vec r\{\psi^+(\vec r,t)(r_a\partial_b-r_b\partial_a)(r_c\partial_d-r_d\partial_c)\psi(\vec r,t)-\psi^+(\vec r,t)(r'_c\partial_d-r_d\partial_c)(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\psi(\vec r,t)\}$

$=\int\psi^+(\vec r,t)[-i(r_a\partial_b-r_b\partial_a),-i(r_c\partial_d-r_d\partial_c)]\psi(\vec r,t)d^3\vec r$

$=\int\psi^+(\vec r,t)[\hat L_{ab},\hat L_{cd}]\psi(\vec r,t)d^3\vec r$

$=-i(g_{ad}L_{bc}-g_{ac}L_{bd}+g_{bc}L_{ad}-g_{bd}L_{ac})$ □

证明： $[L_{ab}, P_c]$
$= -\delta^{AB}\delta^{A'B'}\int[\psi^+(\vec{r},t)(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\psi(\vec{r},t), \psi^+(\vec{r}',t)\partial'_c\psi(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -\delta^{AB}\delta^{A'B'}\int[\psi^+_A(\vec{r},t)(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\psi_B(\vec{r},t), \psi^+_{A'}(\vec{r}',t)\partial'_c\psi_{B'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -\delta^{AB}\delta^{A'B'}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\psi^+_A(\vec{r},t)[(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\psi_B(\vec{r},t), \psi^+_{A'}(\vec{r}',t)]\partial'_c\psi_{B'}(\vec{r}',t) - \psi^+_{A'}(\vec{r}',t)[\psi^+_A(\vec{r},t), \partial'_c\psi_{B'}(\vec{r}',t)](r_a\partial_b - r_b\partial_a)\psi_B(\vec{r},t)\}$
$= -\delta^{AB}\delta^{A'B'}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\psi^+_A(\vec{r},t)\delta_{A'B}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_c\psi_{B'}(\vec{r}',t) - \psi^+_{A'}(\vec{r}',t)\delta_{AB'}\partial'_c\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\psi_{B'}(\vec{r}',t)](r_a\partial_b - r_b\partial_a)\psi_B(\vec{r},t)\}$
$= \int\{\psi^+_A(\vec{r},t)\delta^{AB'}(r_a\partial'_b - r_b\partial'_a)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_c\psi_{B'}(\vec{r}',t) - \psi^+_{A'}(\vec{r}',t)\delta^{A'B}\partial_c\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\psi_B(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -\int\{\psi^+_A(\vec{r},t)\delta^{AB'}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\partial_c\psi_{B'}(\vec{r},t) - \psi^+_{A'}(\vec{r},t)\delta^{A'B}\partial_c(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\psi_B(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$= \int\psi^+(\vec{r},t)[\hat{L}_{ab}, \hat{P}_c]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= -i(g_{bc}P_a - g_{ac}P_b)$ □

证明： $[P_a, P_b]$
$= -\int[\psi^+(\vec{r},t)\partial_a\psi(\vec{r},t), \psi^+(\vec{r}',t)\partial'_b\psi(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -\delta^{AB}\delta^{A'B'}\int[\psi^+_A(\vec{r},t)\partial_a\psi_B(\vec{r},t), \psi^+_{A'}(\vec{r}',t)\partial'_b\psi_{B'}(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -\delta^{AB}\delta^{A'B'}\int\{\psi^+_A(\vec{r},t)\{\partial_a\psi_B(\vec{r},t), \psi^+_{A'}(\vec{r}',t)\}\partial'_b\psi_{B'}(\vec{r}',t) - \psi^+_{A'}(\vec{r}',t)\{\psi^+_A(\vec{r},t), \partial'_b\psi_{B'}(\vec{r}',t)\}\partial_a\psi_B(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -\delta^{AB}\delta^{A'B'}\int\{\psi^+_A(\vec{r},t)\delta_{A'B}\partial_a\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_b\psi_{B'}(\vec{r}',t) - \psi^+_{A'}(\vec{r}',t)\delta_{AB'}\partial'_b\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial_a\psi_B(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \delta^{AB}\delta^{A'B'}\int\{\psi^+_A(\vec{r},t)\delta_{A'B}\partial'_a\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_b\psi_{B'}(\vec{r}',t) - \psi^+_{A'}(\vec{r}',t)\delta_{AB'}\partial_b\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial_a\psi_B(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -\int\{\psi^+_A(\vec{r},t)\delta^{AB'}\partial_a\partial_b\psi_{B'}(\vec{r},t) - \psi^+_{A'}(\vec{r},t)\delta^{A'B}\partial_b\partial_a\psi_B(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$= \int\psi^+(\vec{r},t)[\hat{P}_a, \hat{P}_b]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = 0$ □

证明： $[S_{ab}(t), S_{cd}(t)]$
$= \int[\psi^{+A}(\vec{r},t)S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t), \psi^{+C}(\vec{r},t)S_{cdC}{}^D\psi_D(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \int[\psi^{+A}(\vec{r},t)S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t), \psi^{+C}(\vec{r},t)]S_{cdC}{}^D\psi_D(\vec{r}',t) + \psi^{+C}(\vec{r},t)[\psi^{+A}(\vec{r},t)S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t), S_{cdC}{}^D\psi_D(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \int\psi^{+A}(\vec{r},t)\{S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t), \psi^{+C}(\vec{r},t)\}S_{cdC}{}^D\psi_D(\vec{r}',t) - \psi^{+C}(\vec{r},t)\{\psi^{+A}(\vec{r},t), S_{cdC}{}^D\psi_D(\vec{r}',t)\}S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t)d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \int\psi^{+A}(\vec{r},t)S_{abA}{}^C\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')S_{cdC}{}^D\psi_D(\vec{r}',t) - \psi^{+C}(\vec{r},t)S_{cdC}{}^A\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t)d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \int\psi^+(\vec{r},t)[S_{ab}, S_{cd}]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$= -i(g_{ad}S_{bc} - g_{ac}S_{bd} + g_{bc}S_{ad} - g_{bd}S_{ac})$ □

证明： $[S_{ab}(t), L_{cd}]$
$= -i\int[\psi^{+A}(\vec{r},t)S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t), \psi^{+C}(\vec{r}',t)(r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\psi_C(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -i\int\{\{\psi^{+A}(\vec{r},t)S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t), \psi^{+C}(\vec{r}',t)\}(r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\psi_C(\vec{r}',t)$
$- \psi^{+C}(\vec{r}',t)\{\psi^{+A}(\vec{r},t), (r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\psi_C(\vec{r}',t)\}S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -i\int\psi^{+A}(\vec{r},t)S_{abA}{}^B\delta^C_B\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\psi_C(\vec{r}',t) - \psi^{+C}(\vec{r}',t)\delta^A_C(r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t)d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -i\int\psi^{+A}(\vec{r},t)S_{abA}{}^B\delta^C_B\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\psi_C(\vec{r}',t) + \psi^{+C}(\vec{r}',t)\delta^A_C(r'_c\partial_d - r'_d\partial_c)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t)d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -i\int\psi^{+A}(\vec{r},t)S_{abA}{}^B(r_c\partial_d - r_d\partial_c)\psi_B(\vec{r},t) - \psi^{+A}(\vec{r},t)(r_c\partial_d - r_d\partial_c)S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t)d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \int\psi^+(\vec{r},t)[S_{ab}, \hat{L}_{cd}]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = 0$ □

证明： $[S_{ab}(t), P_c]$
$= -i\int[\psi^{+A}(\vec{r},t)S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t), \psi^{+C}(\vec{r}',t)\partial'_c\psi_C(\vec{r}',t)]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -i\int\{\psi^{+A}(\vec{r},t)S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t), \psi^{+C}(\vec{r}',t)\}\partial'_c\psi_C(\vec{r}',t) - \psi^{+C}(\vec{r}',t)\{\psi^{+A}(\vec{r},t), \partial'_c\psi_C(\vec{r}',t)\}S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t)d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -i\int\psi^{+A}(\vec{r},t)S_{abA}{}^B\delta^C_B\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_c\psi_C(\vec{r}',t) - \psi^{+C}(\vec{r}',t)\delta^A_C\partial'_c\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t)d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -i\int\psi^{+A}(\vec{r},t)S_{abA}{}^B\delta^C_B\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_c\psi_C(\vec{r}',t) + \psi^{+C}(\vec{r}',t)\delta^A_C(r'_c\partial_d - r'_d\partial_c)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t)d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -i\int\psi^{+A}(\vec{r},t)S_{abA}{}^B\partial_c\psi_B(\vec{r},t) - \psi^{+A}(\vec{r},t)\partial_c S_{abA}{}^B\psi_B(\vec{r},t)d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \int\psi^+(\vec{r},t)[S_{ab}, \hat{P}_c]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = 0$ □

4 光子旋量场协变量子化方案

4.1 光子旋量自旋算符方程及其平面波解

定理4.1.1. $[\partial_a + iS_{ab}(1,\varsigma)\partial^b]\psi(x) = 0$

推论4.1.1. $$\begin{cases}\psi(\vec{r},t) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sqrt{|\vec{p}|}\lambda(\hat{p},-\varsigma)[a_1(\vec{p},-\varsigma)e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec{p},-\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ \sqrt{|\vec{p}|}a_1(\vec{p},-\varsigma) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda^+(\hat{p},-\varsigma)\psi(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{i}{|\vec{p}|}\lambda^+(\hat{p},-\varsigma)\dot{\psi}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}\\ \sqrt{|\vec{p}|}a_2^+(\vec{p},-\varsigma) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda^+(\hat{p},-\varsigma)\psi(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{-i}{|\vec{p}|}\lambda^+(\hat{p},-\varsigma)\dot{\psi}(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$$

定义4.1.1. 投影算子:$\hat{P}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1,\varsigma) := \lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma), \hat{P}^2(1,\varsigma) = \hat{P}(1,\varsigma), \hat{P}^+(1,\varsigma) = \hat{P}(1,\varsigma)$

4.2 光子旋量场协变常数不变张量的性质

推论4.2.1.

$\Gamma^{\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1) = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2\delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

$\Gamma^{i\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1) = -i\varsigma(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\sigma^i(1)_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

$\Gamma^{ij}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1) = -(\frac{1}{\sqrt{2}})^2[\sigma^{\{i}(1)\sigma^{j\}}(1) - \delta^{ij}]_{k_\varsigma k'_\varsigma} = -(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 2\frac{1}{2!}[\sigma^{\{i}(1)\sigma^{j\}}(1) - \frac{1}{2}\delta^{\{ij\}}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

引理4.2.1. $\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_a p_b = -2|\vec{p}|^2\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)$

证明: $\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_a p_b$

$= C_2^2\Gamma^{\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1)p_\pi^2 + C_2^1\Gamma^{i\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1)p_i p_\pi + C_2^0\Gamma^{ij}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1)p_i p_j$

$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2\{-|\vec{p}|^2 + 2|\vec{p}|\varsigma[\sigma^i(1)\cdot\vec{p}] - 2[\sigma^i(1)\cdot\vec{p}]^2 + |\vec{p}|^2\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2|\vec{p}|^2\{2\varsigma[\sigma^i(1)\cdot\hat{p}] - 2[\sigma^i(1)\cdot\hat{p}]^2\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2|\vec{p}|^2\{2\varsigma[\sigma^i(1)\cdot\hat{p}] - 2[\sigma^i(1)\cdot\hat{p}]^2\}\sum_{h=1}^{-1}\lambda(\hat{p},h)\lambda^+(\hat{p},h)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

$= -2|\vec{p}|^2\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)$ □

推论4.2.2. 投影算子:$\hat{P}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1,\varsigma) = -\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\hat{p}_a\hat{p}_b \to \Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b$

4.3 光子旋量场数学上一般的协变对易规则

定理4.3.1.

$$\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]_\pm = \delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},-\varsigma), a_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]_\pm = 0\\ [a^+_\sigma(\vec{p},-\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]_\pm = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}[\Psi_{k_\varsigma}(x), \Psi^+_{k'_\varsigma}(x')]_\pm\\ = i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b[\delta_1\Delta(x-x') - (\delta_1\pm\delta_2)\Delta^{(-)}(x-x')]\\ [\Psi_{k_\varsigma}(x), \Psi_{\beta_\varsigma}(x')]_\pm = 0\\ [\Psi^+_{k'_\varsigma}(x), \Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]_\pm = 0\end{cases}$$

证明: $[\Psi^{(+)}_{k_\varsigma}(x), \Psi^{(+)+}_{k'_\varsigma}(x')]_\pm$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p}',-\varsigma)\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}[a_1(\vec{p},-\varsigma), a_1^+(\vec{p}',-\varsigma)]_\pm e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)|\vec{p}|\delta_1\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\delta_1|\vec{p}|e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$= \frac{-\delta_1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_a p_b e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$= i\delta_1\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(+)}(x-x')$ □

证明: $[\Psi^{(-)}_{k_\varsigma}(x), \Psi^{(-)+}_{k'_\varsigma}(x')]_\pm$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}[a_2^+(\vec{p},-\varsigma), a_2(\vec{p}',-\varsigma)]_\pm e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)|\vec{p}|\delta_2\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\delta_2|\vec{p}|e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$= \pm\frac{-\delta_2}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_a p_b e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$= -\pm i\delta_2\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(-)}(x-x')$ □

证明：$[\Psi_{k_\varsigma}(x), \Psi^+_{k'_\varsigma}(x')]_\pm$
$= [\Psi^{(+)}_{k_\varsigma}(x), \Psi^{(+)+}_{k'_\varsigma}(x')]_\pm + [\Psi^{(-)}_{k_\varsigma}(x), \Psi^{(-)+}_{k'_\varsigma}(x')]_\pm$
$= i\delta_1\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(+)}(x-x') - \pm i\delta_2\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(-)}(x-x')$
$= i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b[\delta_1\Delta^{(+)}(x-x') - \pm\delta_2\Delta^{(-)}(x-x')]$
$= i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b[(\delta_1\pm\delta_2)\Delta^{(+)}(x-x') - \pm\delta_2\Delta(x-x')]$
$= i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b[\delta_1\Delta(x-x') - (\delta_1\pm\delta_2)\Delta^{(-)}(x-x')]$ □

从上式可知，只有$\delta_1 \pm \delta_2 = 0$时，才满足微观因果性，同时只有$\delta_1, \delta_2 \geq 0$时，才满足几率非负性。所以数学上八种协变对易或反对易方案中，物理上合理的只有一种：即$\delta_1 = \delta_2 = 1$，且满足对易关系。其实还有两种，即$\delta_1 = \delta_2 = 0$，且满足对易或反对易关系，就是经典情形。

4.4 光子旋量场的协变对易规则

从上节可知，有物理意义的对易规则如下：（为了相互印证，重新作了证明）

定理4.4.1. $\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)] = \delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},-\varsigma), a_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)] = 0\\ [a^+_\sigma(\vec{p},-\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)] = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x), \psi^+_{k'_\varsigma}(x')] = i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{k_\varsigma}(x), \psi_{l_\varsigma}(x')] = 0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(x), \psi^+_{l'_\varsigma}(x')] = 0\end{cases}$

证明：$\{\psi_{k_\varsigma}(x), \psi^+_{k'_\varsigma}(x')\}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)|\vec{p}|^{1/2}|\vec{p}'|^{1/2}\{[a_1(\vec{p},-\varsigma), a^+_1(\vec{p}',-\varsigma)]e^{ip\cdot(x-x')} + [a^+_2(\vec{p},-\varsigma), a_2(\vec{p}',-\varsigma)]e^{-ip\cdot(x-x')}\}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)[\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{ip\cdot(x-x')} - \delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)[e^{ip\cdot(x-x')} - e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_ap_b[e^{ip\cdot(x-x')} - e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b[e^{ip\cdot(x-x')} - e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}[e^{ip\cdot(x-x')} - e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$ □

4.5 光子旋量场的等时对易规则

推论4.5.1. $\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x), \psi^+_{k'_\varsigma}(x')] = i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{k_\varsigma}(x), \psi_{l_\varsigma}(x')] = 0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(x), \psi^+_{l'_\varsigma}(x')] = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)] = i\varsigma[\sigma(1)\cdot\nabla]_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t)] = 0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)] = 0\end{cases}$

推论4.5.2. $\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)] = i\varsigma[\sigma(1)\cdot\nabla]_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t)] = 0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)] = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)] = \delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},-\varsigma), a_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)] = 0\\ [a^+_\sigma(\vec{p},-\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)] = 0\end{cases}$

证明：$[a_1(\vec{p},-\varsigma), a^+_1(\vec{p}',-\varsigma)]$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int[\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}, \lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)\Psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)[\Psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \Psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= i\varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)[\sigma(1)\cdot\nabla]_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= i\varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)[\sigma(1)\cdot\vec{p}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}ie^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}d^3\vec{r}$
$= -\varsigma\frac{1}{|\vec{p}|}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)[\sigma(1)\cdot\vec{p}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= -\varsigma\lambda^+(\hat{p},-\varsigma)\frac{\sigma(1)\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\lambda(\hat{p},-\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= \lambda^+(\hat{p},-\varsigma)\lambda(\hat{p},-\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= \delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$ □

证明：$[a_2^+(\vec{p},-\varsigma),a_2(\vec{p}',-\varsigma)]$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int[\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)},\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)\Psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)[\Psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= i\varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)[\sigma(1)\cdot\nabla]_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= i\varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)[\sigma(1)\cdot\vec{p}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}(-i)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}$
$= \varsigma\frac{1}{|\vec{p}|}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)[\sigma(1)\cdot\vec{p}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= \varsigma\lambda^+(\hat{p},-\varsigma)\frac{\sigma(1)\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\lambda(\hat{p},-\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= -\lambda^+(\hat{p},-\varsigma)\lambda(\hat{p},-\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= -\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$ □

4.6 光子旋量场的对易规则小结

以上几个小节的证明正好形成一个逻辑闭环，故有如下性质：

推论4.6.1.
$$\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]=0\\ [a^+_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p}),a^+_{\sigma'}(\vec{p}')]=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p}),a_{\sigma'}(\vec{p}')]=0\\ [a^+_\sigma(\vec{p}),a^+_{\sigma'}(\vec{p}')]=0\end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

推论4.6.2.
$$\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]=i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{k_\varsigma}(x),\psi_{l_\varsigma}(x')]=0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(x),\psi^+_{l'_\varsigma}(x')]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]=i\varsigma[\sigma(1)\cdot\nabla]_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t)]=0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)]=0\end{cases}$$

推论4.6.3. $\sigma_{-\varsigma}=S_{em}(\varsigma)(\sigma\otimes I)S^+_{em}(\varsigma),\sigma_{+\varsigma}=S_{em}(\varsigma)(I\otimes\sigma)S^+_{em}(\varsigma),\gamma=S_m(1)\sigma(1)S^-_m(1)$

4.7 电磁场多种旋量形式的等价对易规则

定理4.7.1.
$$\begin{cases}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi_{\beta_\varsigma}(x')]=0\\ [\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\Psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\Psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]\\ =-\frac{i}{2}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\Psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\Psi_{C_\varsigma D_\varsigma}(x')]=0\\ [\Psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x),\Psi^+_{C'_\varsigma D'_\varsigma}(x')]=0\end{cases}$$

证明：$[\Psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\Psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]$
$=[\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\Psi_{\alpha'_\varsigma}(x')]$
$=\frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi_{\alpha'_\varsigma}(x')]$
$=\frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{C_\varsigma C'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{D_\varsigma D'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{C'_\varsigma D'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$=-\frac{i}{8}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\sigma^{C'_\varsigma D'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{C_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{D_\varsigma D'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$=-\frac{i}{8}\delta^{C_\varsigma}_{\{A_\varsigma}\delta^{D_\varsigma}_{B_\varsigma\}}\delta^{C'_\varsigma}_{(A'_\varsigma}\delta^{D'_\varsigma}_{B'_\varsigma)}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{C_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{D_\varsigma D'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$=-\frac{i}{8}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma\}B'_\varsigma)}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$=-\frac{i}{2}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$ □

证明：$[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]$
$=[\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\Psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\Psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]$
$=\frac{1}{2}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}[\Psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\Psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]$

$$= -\frac{i}{4}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}(\sigma, i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma, i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$$
$$= i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$$
□

定理4.7.2.

$$\begin{cases}[\Psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x), \Psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')] \\ = -\frac{i}{2}(\sigma, i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma, i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x') \\ [\Psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x), \Psi_{C_\varsigma D_\varsigma}(x')] = 0 \\ [\Psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x), \Psi^+_{C'_\varsigma D'_\varsigma}(x')] = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x), \psi^+_{k'_\varsigma}(x')] = i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x') \\ [\psi_{k_\varsigma}(x), \psi_{l_\varsigma}(x')] = 0 \\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(x), \psi^+_{l'_\varsigma}(x')] = 0\end{cases}$$

证明： $[\Psi_{k_\varsigma}(x), \Psi^+_{k'_\varsigma}(x')]$
$$= [\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x), \Gamma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)\Psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]$$
$$= \Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Gamma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)[\Psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x), \Psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]$$
$$= -\frac{i}{2}\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Gamma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)(\sigma, i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma, i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$$
$$= i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$$
□

证明： $[\Psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x), \Psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]$
$$= [\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi_{k_\varsigma}(x), \Gamma^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(1)\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]$$
$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\Gamma^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(1)[\psi_{k_\varsigma}(x), \psi^+_{k'_\varsigma}(x')]$$
$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\Gamma^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(1)i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$$
$$= -\frac{i}{2}\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\Gamma^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(1)\Gamma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Gamma^{C'_\varsigma D'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)(\sigma, i\varsigma)^a{}_{C_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma, i\varsigma)^b{}_{D_\varsigma D'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$$
$$= -\frac{i}{8}\delta^{\{C_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{D_\varsigma\}}_{B_\varsigma}\delta^{(C'_\varsigma}_{A'_\varsigma}\delta^{D'_\varsigma)}_{B'_\varsigma}(\sigma, i\varsigma)^a{}_{C_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma, i\varsigma)^b{}_{D_\varsigma D'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$$
$$= -\frac{i}{8}(\sigma, i\varsigma)^a{}_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma, i\varsigma)^b{}_{B\}_\varsigma B'_\varsigma)}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$$
$$= -\frac{i}{2}(\sigma, i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma, i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$$
□

引理4.7.1. $\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma} = \Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\Gamma^{k'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}(1)\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}, \Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma} = \Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Gamma^{\alpha'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}$

定理4.7.3.

$$\begin{cases}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x), \Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')] = i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x') \\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x), \Psi_{\beta_\varsigma}(x')] = 0 \\ [\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x), \Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')] = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x), \psi^+_{k'_\varsigma}(x')] = i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x') \\ [\psi_{k_\varsigma}(x), \psi_{l_\varsigma}(x')] = 0 \\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(x), \psi^+_{l'_\varsigma}(x')] = 0\end{cases}$$

证明： $[\Psi_{k_\varsigma}(x), \Psi^+_{k'_\varsigma}(x')]$
$$= [\Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Psi_{\alpha_\varsigma}(x), \Gamma^{\alpha'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]$$
$$= \Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Gamma^{\alpha'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)[\Psi_{k_\varsigma}(x), \Psi^+_{k'_\varsigma}(x')]$$
$$= \Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Gamma^{\alpha'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$$
$$= i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$$
□

证明： $[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x), \Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]$
$$= [\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\Psi_{k_\varsigma}(x), \Gamma^{k'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}(1)\Psi^+_{k'_\varsigma}(x')]$$
$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\Gamma^{k'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}(1)[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x), \Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]$$
$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\Gamma^{k'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}(1)i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$$
$$= i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$$
□

4.8 光子旋量场的对易函数、因果函数和费曼传播子

推论4.8.1.

$$\begin{cases}\Delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1;x):=\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x)\\ \Delta^{(+)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1;x):=\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta^{(-)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1;x):=\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{(l)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1;x):=\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(l)}(x)\end{cases}$$

推论4.8.2.

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1;x):=\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(c)}(x)+\{\Gamma^{\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}[\partial_t\delta(t)+\delta(t)\partial_t]+2i\Gamma^{i\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta(t)\partial_i\}\Delta(x)=\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(c)}(x)-\Gamma^{\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^4(x)\\ \Delta^{ret}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1;x):=\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{ret}(x)+\{\Gamma^{\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}[\partial_t\delta(t)+\delta(t)\partial_t]+2i\Gamma^{i\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta(t)\partial_i\}\Delta(x)=\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{ret}(x)-\Gamma^{\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^4(x)\\ \Delta^{adv}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1;x):=\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{adv}(x)+\{\Gamma^{\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}[\partial_t\delta(t)+\delta(t)\partial_t]+2i\Gamma^{i\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta(t)\partial_i\}\Delta(x)=\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{adv}(x)-\Gamma^{\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^4(x)\\ \Delta_{Fk_\varsigma k'_\varsigma}(1;x):=\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta_F(x)+i\{\Gamma^{\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}[\partial_t\delta(t)+\delta(t)\partial_t]+2i\Gamma^{i\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta(t)\partial_i\}\Delta(x)=\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta_F(x)-i\Gamma^{\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^4(x)\\ =i\Delta^{(c)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1;x),\Delta_{Fk_\varsigma k'_\varsigma}(1;p)=\frac{i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_ap_b}{p^2-i\varepsilon}+\cdots\end{cases}$$

推论4.8.3.

$$\begin{cases}[\partial_a+iS_{ab}(1,\varsigma)\partial^b]\Delta(1;x)=0\\ [\partial_a+iS_{ab}(1,\varsigma)\partial^b]\Delta^{(+)}(1;x)=0\\ [\partial_a+iS_{ab}(1,\varsigma)\partial^b]\Delta^{(-)}(1;x)=0\\ [\partial_a+iS_{ab}(1,\varsigma)\partial^b]\Delta^{(l)}(1;x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}[\partial^a+iS^{ab}(1,\varsigma)\partial_b]\Delta^{(c)}(1;x)=-\varsigma[\sigma(1),i\varsigma]_a\delta(t)\Delta(1;x)|_{t=0}\\ [\partial^a+iS^{ab}(1,\varsigma)\partial_b]\Delta^{ret}(1;x)=-\varsigma[\sigma(1),i\varsigma]_a\delta(t)\Delta(1;x)|_{t=0}\\ [\partial^a+iS^{ab}(1,\varsigma)\partial_b]\Delta^{adv}(1;x)=-\varsigma[\sigma(1),i\varsigma]_a\delta(t)\Delta(1;x)|_{t=0}\\ [\partial^a+iS^{ab}(1,\varsigma)\partial_b]\Delta_F(1;x)=-i\varsigma[\sigma(1),i\varsigma]_a\delta(t)\Delta(1;x)|_{t=0}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]$$

推论4.8.4.

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^aN(1)\Delta(1;x)=0\\ (\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^aN(1)\Delta^{(+)}(1;x)=0\\ (\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^aN(1)\Delta^{(-)}(1;x)=0\\ (\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^aN(1)\Delta^{(l)}(1;x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}(\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^aN(1)\Delta^{(c)}(1;x)=-\varsigma\delta(t)N(1)\Delta(1;x)|_{t=0}\\ (\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^aN(1)\Delta^{ret}(1;x)=-\varsigma\delta(t)N(1)\Delta(1;x)|_{t=0}\\ (\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^aN(1)\Delta^{adv}(1;x)=-\varsigma\delta(t)N(1)\Delta(1;x)|_{t=0}\\ (\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^aN(1)\Delta_F(1;x)=-i\varsigma\delta(t)N(1)\Delta(1;x)|_{t=0}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]$$

推论4.8.5.

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^aN(1)\Delta(1;x)\bar N(1)=0\\ (\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^aN(1)\Delta^{(+)}(1;x)\bar N(1)=0\\ (\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^aN(1)\Delta^{(-)}(1;x)\bar N(1)=0\\ (\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^aN(1)\Delta^{(l)}(1;x)\bar N(1)=0\end{cases}\quad\begin{cases}(\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^aN(1)\Delta^{(c)}(1;x)\bar N(1)=-\varsigma\delta(t)N(1)\Delta(1;x)|_{t=0}\bar N(1)\\ (\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^aN(1)\Delta^{ret}(1;x)\bar N(1)=-\varsigma\delta(t)N(1)\Delta(1;x)|_{t=0}\bar N(1)\\ (\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^aN(1)\Delta^{adv}(1;x)\bar N(1)=-\varsigma\delta(t)N(1)\Delta(1;x)|_{t=0}\bar N(1)\\ (\sigma\otimes I,-i\varsigma)_a\partial^aN(1)\Delta_F(1;x)\bar N(1)=-i\varsigma\delta(t)N(1)\Delta(1;x)|_{t=0}\bar N(1)\end{cases}$$

$$[\Downarrow]\qquad\qquad[\Downarrow]$$

推论4.8.6.

$$\begin{cases}[\sigma(1),-i\varsigma]_a\partial^a\Delta(1;x)=0\\ [\sigma(1),-i\varsigma]_a\partial^a\Delta^{(+)}(1;x)=0\\ [\sigma(1),-i\varsigma]_a\partial^a\Delta^{(-)}(1;x)=0\\ [\sigma(1),-i\varsigma]_a\partial^a\Delta^{(l)}(1;x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}[\sigma(1),-i\varsigma]_a\partial^a\Delta^{(c)}(1;x)=-\varsigma\delta(t)\Delta(1;x)|_{t=0}\\ [\sigma(1),-i\varsigma]_a\partial^a\Delta^{ret}(1;x)=-\varsigma\delta(t)\Delta(1;x)|_{t=0}\\ [\sigma(1),-i\varsigma]_a\partial^a\Delta^{adv}(1;x)=-\varsigma\delta(t)\Delta(1;x)|_{t=0}\\ [\sigma(1),-i\varsigma]_a\partial^a\Delta_F(1;x)=-i\varsigma\delta(t)\Delta(1;x)|_{t=0}\end{cases}$$

4.9 光子旋量场的量子方程

推论4.9.1.

$$[\partial_a+iS_{ab}(1,\varsigma)\partial^b]\psi=0\Leftrightarrow[P_a,\psi(\vec r,t)]=i\partial_a\psi(\vec r,t);\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)]=i\varsigma\sigma^i(1)_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_i\delta^3(\vec r-\vec r')\\ [\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t),\psi_{l_\varsigma}(\vec r',t)]=0,[\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{l'_\varsigma}(\vec r',t)]=0\end{cases}$$

4.10 光子旋量场的彭加莱对称性

推论4.10.1.

$$\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}=i\sum_{l=0}^{[s]}(-1)^lC^{2l}_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2l}}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{2s-2l}\nabla^{2l}\delta^3(\vec r-\vec r')\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdots}^{2s}\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}=i\sum_{l=0}^{[s]}(-1)^lC^{2l}_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2l}}(s)\overbrace{\hat\partial_i\hat\partial_j\cdots}^{2s-2l}\delta^3(\vec r-\vec r')\end{cases}$$

推论4.10.2.

$\Gamma^{\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1)=(\frac{1}{\sqrt2})^2\delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

$\Gamma^{i\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1)=-i\varsigma(\frac{1}{\sqrt2})^2\sigma^i(1)_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

$\Gamma^{ij}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1)=-(\frac{1}{\sqrt2})^2[\sigma^{\{i}(1)\sigma^{j\}}(1)-\delta^{ij}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}=-(\frac{1}{\sqrt2})^2 2\frac{1}{2!}[\sigma^{\{i}(1)\sigma^{j\}}(1)-\frac12\delta^{\{ij\}}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

推论4.10.3. $\Gamma^{ab}(1)\partial_a\partial_b\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}=i\{\Gamma^{ij}(1)\partial_i\partial_j\delta^3(\vec r-\vec r')-\Gamma^{\pi\pi}(1)\nabla^2\delta^3(\vec r-\vec r')\}=-i[\sigma(1)\cdot\nabla]^2\delta^3(\vec r-\vec r')$

推论4.10.4.

$$\begin{cases}[\dot\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]=-\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b|\partial_\pi\Delta(x-x')\\ [\psi_{k_\varsigma}(x),\psi_{l_\varsigma}(x')]=0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(x),\psi^+_{l'_\varsigma}(x')]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\frac{\dot\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{(-\nabla^2)}},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{(-\nabla'^2)}}]=-i[\sigma(1)\cdot\hat\nabla]^2\delta^3(\vec r-\vec r')\\ [\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t),\psi_{l_\varsigma}(\vec r',t)]=0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{l'_\varsigma}(\vec r',t)]=0\end{cases}$$

推论4.10.5.

$\hat P_a(n)=\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat P_a\frac{i\dot\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r=-i\int\frac{\dot\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat P_a\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r$

$M_{ab}(n)=\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat M_{ab}\frac{i\dot\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r=-i\int\frac{\dot\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat M_{ab}\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r$

定理4.10.1. $\begin{cases}[L_{ab},L_{cd}]=-i(g_{ad}L_{bc}-g_{ac}L_{bd}+g_{bc}L_{ad}-g_{bd}L_{ac})\\ [L_{ab},P_c]=-i(g_{bc}P_a-g_{ac}P_b),[P_a,P_b]=0\end{cases}$

证明： $[L_{ab},L_{cd}]$

$=-\int d^3\vec r d^3\vec r'[\frac{\psi^+(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{i\dot\psi(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{i\dot\psi(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}]$

$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r d^3\vec r'[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}]$

$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r d^3\vec r'$

$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}[(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}](r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}$

$+\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}},(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}](r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$

$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r d^3\vec r'$

$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\{-i[\sigma(1)\cdot\hat\nabla]^2\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}$

$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\{-i[\sigma(1)\cdot\hat\nabla']^2\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec r'-\vec r)(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$

$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r d^3\vec r'$

$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial'_b-r_b\partial'_a)\{-i[\sigma(1)\cdot\hat\nabla']^2\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}$

$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}(r'_c\partial_d-r'_d\partial_c)\{-i[\sigma(1)\cdot\hat\nabla]^2\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$

$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r$

$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\{-i[\sigma(1)\cdot\hat\nabla]^2\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}(r_c\partial_d-r_d\partial_c)\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}$

$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_c\partial_d-r_d\partial_c)\{-i[\sigma(1)\cdot\hat{\nabla}]^2\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$
$=-\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}[-i(r_a\partial_b-r_b\partial_a),-i(r_c\partial_d-r_d\partial_c)]\{-i[\sigma(1)\cdot\hat{\nabla}]^2\}\frac{\dot\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec{r}$
$=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}[\hat{L}_{ab},\hat{L}_{cd}]\frac{i\dot\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec{r}$
$=-i(g_{ad}L_{bc}-g_{ac}L_{bd}+g_{bc}L_{ad}-g_{bd}L_{ac})$ □

证明： $[L_{ab},P_c]$
$=-\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{i\dot\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\partial'_c\frac{i\dot\psi(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}]$
$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\partial'_c\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}]$
$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}[(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}]\partial'_c\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}+\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\partial'_c\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}](r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$
$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\{-i[\sigma(1)\cdot\hat{\nabla}]^2\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_c\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}$
$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\partial'_c\{-i[\sigma(1)\cdot\hat{\nabla}']^2\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$
$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial'_b-r_b\partial'_a)\{-i[\sigma(1)\cdot\hat{\nabla}']^2\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_c\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}$
$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\partial_c\{-i[\sigma(1)\cdot\hat{\nabla}]^2\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$
$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\{-i[\sigma(1)\cdot\hat{\nabla}]^2\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial_c\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\partial_c\{-i[\sigma(1)\cdot\hat{\nabla}]^2\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$
$=-\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}[-i(r_a\partial_b-r_b\partial_a),-i\partial'_c]\{-i[\sigma(1)\cdot\hat{\nabla}]^2\}\frac{\dot\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec{r}$
$=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}[\hat{L}_{ab},\hat{P}_c]\frac{i\dot\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec{r}$
$=-i(g_{bc}P_a-g_{ac}P_b)$ □

证明： $[P_a,P_b]$
$=-\int[\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\partial_a\frac{i\dot\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\partial'_b\frac{i\dot\psi(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\partial_a\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\partial'_b\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}[\partial_a\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}]\partial'_b\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}+\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\partial'_b\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}]\partial_a\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$
$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\{-i[\sigma(1)\cdot\hat{\nabla}]^2\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_b\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\{-i[\sigma(1)\cdot\hat{\nabla}']^2\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\partial'_b\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})\partial_a\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$
$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\{-i[\sigma(1)\cdot\hat{\nabla}']^2\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial'_a\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_b\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\{-i[\sigma(1)\cdot\hat{\nabla}]^2\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\partial_b\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial_a\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$
$=\int\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\{-i[\sigma(1)\cdot\hat{\nabla}]^2\}^{k_\varsigma l'_\varsigma}\partial_a\partial_b\frac{\dot\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\{-i[\sigma(1)\cdot\hat{\nabla}]^2\}^{k'_\varsigma l_\varsigma}\partial_b\partial_a\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}d^3\vec{r}$
$=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(\partial_a\partial_b-\partial_b\partial_a)\{-i[\sigma(1)\cdot\hat{\nabla}]^2\}\frac{\dot\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec{r}$
$=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(\partial_a\partial_b-\partial_b\partial_a)\frac{-i\dot\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec{r}$
$=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}[\hat{P}_a,\hat{P}_b]\frac{i\dot\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec{r}=0$ □

4.11 光子自旋的彭加莱对称性

定理4.11.1. $\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=-\rho,\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0,\nabla\times\vec{B}=-\vec{J}+\partial_t\vec{E}\\ \tilde{A}=\frac{\nabla\times\vec{B}}{-\nabla^2},\tilde{\phi}=\frac{\nabla\cdot\vec{E}}{-\nabla^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla^2\tilde{A}-\partial_t^2\tilde{A}=\vec{J}+\partial_t\nabla\tilde{\phi}\\ \nabla^2\tilde{\phi}=\rho,\nabla\cdot\tilde{A}=0\\ \vec{E}=-\partial_t\tilde{A}-\nabla\tilde{\phi},\vec{B}=\nabla\times\tilde{A}\end{cases}$

推论4.11.1. $\begin{cases}[\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Psi=-i\sigma^{[\beta_\varsigma]}_{\varsigma ab}J^b\\ \tilde{A}=\frac{-i}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\times(\Psi-\Psi^*)}{\nabla^2},i\tilde{\phi}=\frac{-i}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\cdot(\Psi+\Psi^*)}{\nabla^2}\\ F_{ab}=\frac{i}{2}(\sigma^{\alpha'}_{-ab}\psi_{\alpha'}+\sigma^{\alpha}_{+ab}\psi_\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla^2\tilde{A}-\partial_t^2\tilde{A}=\vec{J}+\partial_t\nabla\tilde{\phi}\\ \nabla^2\tilde{\phi}=\rho,\nabla\cdot\tilde{A}=0\\ \sqrt{2}\Psi=-\partial_t\tilde{A}-\nabla\tilde{\phi}-i\varsigma\nabla\times\tilde{A}\end{cases}$

定义4.11.1. 电磁场复矢量$\psi_{\alpha_\varsigma}:=\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}=i\varsigma(E-i\varsigma B)_{\alpha_\varsigma}=(i\varsigma E+B)_{\alpha_\varsigma}$

定义4.11.2. $\psi_\alpha=i(E-iB)_\alpha,\psi^*_\alpha=\psi_{\alpha'}=-i(E+iB)_{\alpha'}$

$SO(4)$群生成元矩阵的正分支：

$$\sigma_+=R+L=\{\begin{bmatrix}0&0&0&i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&i\\-i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{bmatrix}\}\tag{24.1a}$$

$SO(4)$群生成元矩阵的负分支：

$$\sigma_-=R-L=\{\begin{bmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&-i\\-i&0&0&0\\0&i&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{bmatrix}\}\tag{24.2a}$$

定理4.11.2. $\Sigma_{ij\pi}=F_{i\pi}A_j-F_{j\pi}A_i=-i(E_iA_j-E_jA_i)$
$=\frac{i}{2}(\sigma^\alpha_{-i\pi}\psi^*_\alpha+\sigma^\alpha_{+i\pi}\psi_\alpha)\frac{-i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{jlm}\frac{\partial^l(\Psi-\Psi^*)^m}{\nabla^2}-\frac{i}{2}(\sigma^\alpha_{-j\pi}\psi^*_\alpha+\sigma^\alpha_{+j\pi}\psi_\alpha)\frac{-i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ilm}\frac{\partial^l(\Psi-\Psi^*)^m}{\nabla^2}$
$=\frac{1}{2\sqrt{2}}[(-i\psi^*_i+i\psi_i)\varepsilon_{jlm}-(-i\psi^*_j+i\psi_j)\varepsilon_{ilm}]\frac{\partial^l(\Psi-\Psi^*)^m}{\nabla^2}$
$=\frac{1}{4}[(\psi_i-\psi^*_i)\varepsilon_{jlm}-(\psi_j-\psi^*_j)\varepsilon_{ilm}]\frac{\partial^l(\psi+\psi^*)^m}{\nabla^2}$
$=i(E_i\varepsilon_{jlm}-E_j\varepsilon_{ilm})\frac{\partial^lB^m}{\nabla^2}$

定理4.11.3. $\varepsilon^{kij}\Sigma_{ij\pi}=\varepsilon^{kij}i(E_i\varepsilon_{jlm}-E_j\varepsilon_{ilm})\frac{\partial^lB^m}{\nabla^2}=-2i[\frac{\vec{E}}{\sqrt{-\nabla^2}}\cdot\partial^k\frac{\vec{B}}{\sqrt{-\nabla^2}}-(\frac{\vec{E}}{\sqrt{-\nabla^2}}\cdot\nabla)\frac{B^k}{\sqrt{-\nabla^2}}]$
$\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\gamma_\varsigma}\varepsilon^{\gamma_\varsigma}{}_{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}=\delta_{\alpha_\varsigma\rho_\varsigma}\delta_{\beta_\varsigma\sigma_\varsigma}-\delta_{\alpha_\varsigma\sigma_\varsigma}\delta_{\beta_\varsigma\rho_\varsigma}$

定理4.11.4. $L_{ij\pi}=x_iF_{k\pi}\partial_jA^k-x_jF_{k\pi}\partial_iA^k=-iE_k(x_i\partial_j-x_j\partial_i)A^k=-iE_k(x_i\partial_j-x_j\partial_i)\varepsilon^{klm}\frac{\partial_lB_m}{-\nabla^2}$

定理4.11.5. $\varepsilon^{kij}L_{ij\pi}=-iE_n(x_i\partial_j-x_j\partial_i)\varepsilon^{kij}\varepsilon^{nlm}\frac{\partial_lB_m}{-\nabla^2}$

定理4.11.6. $\Sigma_{i\pi\pi}=F_{i\pi}A_\pi-F_{\pi\pi}A_i=E_i\phi$

定理4.11.7. $L_{i\pi\pi}=x_iF_{k\pi}\partial_\pi A^k-x_\pi F_{k\pi}\partial_iA^k-\frac{1}{2}x_i\vec{E}^2+\frac{1}{2}x_i\vec{B}^2=-iE_k(x_i\partial_\pi-x_\pi\partial_i)A^k-\frac{1}{2}x_i\vec{E}^2+\frac{1}{2}x_i\vec{B}^2$

5 电磁场复场强协变量子化新方案

本节换成电磁表象再次对光子协变量子化方案重新进行了一次完整的描述，方便后面章节使用。

5.1 电磁场方程各种等价形式 [24, 26]

定义5.1.1. $\Psi_{\alpha_\varsigma}:=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\psi_{\alpha_\varsigma}=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}i\varsigma(E-i\varsigma B)_{\alpha_\varsigma}$

定义5.1.2. $\Psi:=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{E}-i\varsigma\vec{B})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{E}-i\varsigma\nabla\times\vec{A}),\Psi_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(E_i-i\varsigma\varepsilon_i{}^{jk}\partial_jA_k),p\cdot x:=\vec{p}\cdot\vec{r}-Et$

定理5.1.1.

$$\begin{cases}\partial^aF_{ab}=0\\ \partial^a*F_{ab}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=0,\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0,\nabla\times\vec{B}=\partial_t\vec{E}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\gamma,-i\varsigma)^a\partial_a\Psi=0\\ \nabla\cdot\Psi=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Psi=0\\ S_{ab}(\gamma,\varsigma)=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}(s)\end{cases}$$

5.2 电磁场复场强自旋方程及其平面波解

定理5.2.1. $[\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Psi(x)=0$

推论5.2.1. $\begin{cases}\Psi(\vec{r},t):=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq0}\sqrt{|\vec{p}|}\lambda_m(\hat{p},-\varsigma)[a_1(\vec{p},-\varsigma)e^{i\varsigma p\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-\varsigma)e^{-i\varsigma p\cdot x}]d^3\vec{p}\\ \sqrt{|\vec{p}|}a_1(\vec{p},-\varsigma)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma)\Psi(\vec{r},t)e^{-i\varsigma p\cdot x}d^3\vec{r}\\ \sqrt{|\vec{p}|}a_2^+(\vec{p},-\varsigma)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma)\Psi(\vec{r},t)e^{i\varsigma p\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$

推论5.2.2. $(\gamma,-i\varsigma)^a\partial_a\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec p\neq 0}\sum\limits_{h=1}^{-1}\sqrt{|\vec p|}\lambda_m(\hat p,h)[a_1(\vec p,-\varsigma)e^{i\varsigma p\cdot x}+a_2^+(\vec p,-\varsigma)e^{-i\varsigma p\cdot x}]d^3\vec p=0$

$\int\limits_{\vec p\neq 0}\sum\limits_{h=1}^{-1}\sqrt{|\vec p|}(\gamma,-i\varsigma)^a p_a\lambda_m(\hat p,h)[a_1(\vec p,-\varsigma)e^{i\varsigma p\cdot x}-a_2^+(\vec p,-\varsigma)e^{-i\varsigma p\cdot x}]d^3\vec p=0$

5.3 电磁场常数不变张量$\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}$的性质

从常数不变张量分析可知：

推论5.3.1.
$\sigma^{\pi\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}=\frac{1}{2}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}$
$\sigma^{k\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}=\sigma^{\pi k}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}=-\frac{\varsigma}{2}\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}$
$\sigma^{kl}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}=\frac{1}{2}(\delta^k_{\alpha_\varsigma}\delta^l_{\alpha'_\varsigma}+\delta^k_{\alpha'_\varsigma}\delta^l_{\alpha_\varsigma}-\delta^{kl}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma})$

推论5.3.2. $\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b=\partial_{\alpha_\varsigma}\partial_{\alpha'_\varsigma}-\frac{1}{2}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\nabla^2+\partial_t^2)+i\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\partial_t$

证明: $\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b=\sigma^{kl}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\partial_l+2\sigma^{k\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\partial_\pi+\sigma^{\pi\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_\pi\partial_\pi$
$=\partial_{\alpha_\varsigma}\partial_{\alpha'_\varsigma}-\frac{1}{2}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\nabla^2-\partial_\pi^2)-\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\partial_\pi$
$=\partial_{\alpha_\varsigma}\partial_{\alpha'_\varsigma}-\frac{1}{2}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\nabla^2+\partial_t^2)+i\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\partial_t$ □

推论5.3.3. $\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_b=p_{\alpha_\varsigma}p_{\alpha'_\varsigma}-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}|\vec p|^2-i\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_k|\vec p|$

推论5.3.4. $\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x)=(\partial_{\alpha_\varsigma}\partial_{\alpha'_\varsigma}-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\nabla^2+i\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\partial_t)\Delta(x)=-\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_b\Delta(x)$

推论5.3.5.
$\begin{cases}\sigma^{ab}_{\{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma\}}\partial_a\partial_b=2\partial_{\alpha_\varsigma}\partial_{\alpha'_\varsigma}-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\nabla^2+\partial_t^2)\\ \sigma^{ab}_{[\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma]}\partial_a\partial_b=2i\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\partial_t=-2\varsigma(\gamma\cdot\nabla)_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_t\end{cases}$ $\begin{cases}\sigma^{ab}_{\{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma\}}\partial_a\partial_b\Delta(x)=2(\partial_{\alpha_\varsigma}\partial_{\alpha'_\varsigma}-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\nabla^2)\Delta(x)\\ \sigma^{ab}_{[\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma]}\partial_a\partial_b\Delta(x)=2i\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\partial_t\Delta(x)\end{cases}$

推论5.3.6.
$\begin{cases}\sigma^{ab}_{\{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma\}}p_ap_b=2(p_{\alpha_\varsigma}p_{\alpha'_\varsigma}-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}|\vec p|^2)\\ \sigma^{ab}_{[\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma]}p_ap_b=-2i\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_k|\vec p|=2\varsigma\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_k|\vec p|\end{cases}$ $\begin{cases}\sigma^{ab}_{\{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma\}}\hat p_a\hat p_b=2(\hat p_{\alpha_\varsigma}\hat p_{\alpha'_\varsigma}-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma})\\ \sigma^{ab}_{[\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma]}\hat p_a\hat p_b=-2i\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\hat p_k=2\varsigma\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\hat p_k\end{cases}$

引理5.3.1. $\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_b=-2|\vec p|^2\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)$

证明: $\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_b$
$=p_{\alpha_\varsigma}p_{\alpha'_\varsigma}+\varsigma\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_k|\vec p|-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}|\vec p|^2$
$=p_{\alpha_\varsigma}p_{\alpha'_\varsigma}+\varsigma|\vec p|\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}p_k\delta_{\beta_\varsigma\alpha'_\varsigma}-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}|\vec p|^2$
$=\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat p,0)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat p,0)|\vec p|^2+\varsigma|\vec p|\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma}{}^{\beta_\varsigma}p_k\sum\limits_{h=1}^{-1}\lambda_{m\beta_\varsigma}(\hat p,h)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat p,h)-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}|\vec p|^2$
$=\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat p,0)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat p,0)|\vec p|^2+\varsigma|\vec p|[\varsigma|\vec p|\lambda_{m\beta_\varsigma}(\hat p,\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat p,\varsigma)-\varsigma|\vec p|\lambda_{m\beta_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)]-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}|\vec p|^2$
$=|\vec p|^2\sum\limits_{h=1}^{-1}\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat p,h)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat p,h)-\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}|\vec p|^2-2|\vec p|^2\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)$
$=-2|\vec p|^2\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)$ □

以上引理把常数不变张量分析与螺旋度分析联系起来了。

推论5.3.7. $\begin{cases}(\sigma^{ab}\hat p_a\hat p_b)^n=(-2)^{n-1}\sigma^{ab}\hat p_a\hat p_b\\ (\frac{\sigma^{ab}\partial_a\partial_b}{\nabla^2})^n=(-2)^{n-1}\frac{\sigma^{ab}\partial_a\partial_b}{\nabla^2}\end{cases}$ $\begin{cases}(\hat p^T\hat p-1)^n=(-1)^{n-1}(\hat p^T\hat p-1)\\ (\frac{\nabla^T\nabla}{\nabla^2}-1)^n=(-2)^{n-1}(\frac{\nabla^T\nabla}{\nabla^2}-1)\end{cases}$

推论5.3.8. $\begin{cases}(\varsigma\gamma\cdot\hat p)^{2n}=-(\hat p^T\hat p-1)\\ (\frac{-i\varsigma\gamma\cdot\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}})^{2n}=-(\frac{\nabla^T\nabla}{\nabla^2}-1)\end{cases}$ $\begin{cases}(\varsigma\gamma\cdot\hat p)^{2n-1}=(\varsigma\gamma\cdot\hat p)\\ (\frac{-i\varsigma\gamma\cdot\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}})^{2n-1}=(\frac{-i\varsigma\gamma\cdot\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}})\end{cases}$

推论5.3.9. $\begin{cases}(\hat p^T\hat p-1)(\varsigma\gamma\cdot\hat p)=(\varsigma\gamma\cdot\hat p)(\hat p^T\hat p-1)=-(\varsigma\gamma\cdot\hat p)\\ (\frac{\nabla^T\nabla}{\nabla^2}-1)(\frac{-i\varsigma\gamma\cdot\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}})=(\frac{-i\varsigma\gamma\cdot\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}})(\frac{\nabla^T\nabla}{\nabla^2}-1)=-(\frac{-i\varsigma\gamma\cdot\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}})\end{cases}$

5.4 电磁场数学上一般的协变对易规则

定理5.4.1.

$$\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]_\pm=\varsigma^{\substack{0\\1}}\delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]_\pm=0\\ [a^+_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]_\pm=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]_\pm\\ =i\varsigma^{\substack{1\\0}}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b[\delta_1\Delta^{(+\varsigma)}(x-x')-\pm\delta_2\Delta^{(-\varsigma)}(x-x')]\\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi_{\beta_\varsigma}(x')]_\pm=0\\ [\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]_\pm=0\end{cases}$$

证明：$[\Psi^{(+\varsigma)}_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^{(+\varsigma)+}_{\alpha'_\varsigma}(x')]_\pm$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq0}\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}[a_1(\vec{p},-\varsigma),a^+_1(\vec{p}',-\varsigma)]_\pm e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)|\vec{p}|\varsigma^{\substack{0\\1}}\delta_1\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\varsigma^{\substack{0\\1}}\delta_1|\vec{p}|e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$=\frac{-\varsigma^{\substack{0\\1}}\delta_1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_be^{i\varsigma p\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$=i\varsigma^{\substack{1\\0}}\delta_1\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(+\varsigma)}(x-x')$ □

证明：$[\Psi^{(-\varsigma)}_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^{(-\varsigma)+}_{\alpha'_\varsigma}(x')]_\pm$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq0}\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}[a^+_2(\vec{p},-\varsigma),a_2(\vec{p}',-\varsigma)]_\pm e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$=\pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)|\vec{p}|\varsigma^{\substack{0\\1}}\delta_2\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$=\pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\varsigma^{\substack{0\\1}}\delta_2|\vec{p}|e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$=\pm\frac{-\varsigma^{\substack{0\\1}}\delta_2}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_be^{-i\varsigma p\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$=-\pm i\varsigma^{\substack{1\\0}}\delta_2\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(-\varsigma)}(x-x')$ □

证明：$[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]_\pm$

$=[\Psi^{(+\varsigma)}_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^{(+\varsigma)+}_{\alpha'_\varsigma}(x')]_\pm+[\Psi^{(-\varsigma)}_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^{(-\varsigma)+}_{\alpha'_\varsigma}(x')]_\pm$

$=i\varsigma^{\substack{1\\0}}\delta_1\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(+\varsigma)}(x-x')-\pm i\varsigma^{\substack{1\\0}}\delta_2\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(-\varsigma)}(x-x')$

$=i\varsigma^{\substack{1\\0}}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b[\delta_1\Delta^{(+\varsigma)}(x-x')-\pm\delta_2\Delta^{(-\varsigma)}(x-x')]$

$=i\varsigma^{\substack{1\\0}}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b[(\delta_1\pm\delta_2)\Delta^{(+\varsigma)}(x-x')-\pm\delta_2\Delta(x-x')]$ □

从上式可知，只有$\delta_1\pm\delta_2=0$时，才满足微观因果性，同时只有$\delta_1,\delta_2\geq0$时，才满足几率非负性。所以数学上八种协变对易或反对易方案中，物理上合理的只有一种：即$\delta_1=\delta_2=1$，且满足对易关系。其实还有两种，即$\delta_1=\delta_2=0$，且满足对易或反对易关系，就是经典情形。

5.5 电磁场物理的协变对易规则

从上节可知，有物理意义的对易规则如下：（为了相互印证，重新作了证明）

定理5.5.1.

$$\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]=\varsigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]=0\\ [a^+_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi_{\beta_\varsigma}(x')]=0\\ [\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\end{cases}$$

证明：$[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq0}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}\{[a_1(\vec{p},-\varsigma),a^+_1(\vec{p}',-\varsigma)]e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}+[a^+_2(\vec{p},-\varsigma),a_2(\vec{p}',-\varsigma)]e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}\}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)|\vec{p}|[\varsigma\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}-\varsigma\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}]\}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\varsigma|\vec{p}|[e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}-e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}\}d^3\vec{p}$

$=\frac{-\varsigma}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_b[e^{i\varsigma p\cdot(x-x')}-e^{-i\varsigma p\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$

$= i\varsigma\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta[\varsigma(x-x')]$
$= i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$ □

定理5.5.2.

$$\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]=\varsigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]=0\\ [a^+_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\Psi^{(\tau)}_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^{(\kappa)+}_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\delta^{\tau\kappa}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(\tau)}(x-x')\\ [\Psi^{(\tau)}_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^{(\kappa)}_{\beta_\varsigma}(x')]=0\\ [\Psi^{(\tau)+}_{\alpha'_\varsigma}(x),\Psi^{(\kappa)+}_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\end{cases}$$

证明： $[\Psi^{(+\varsigma)}_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^{(+\varsigma)+}_{\alpha'_\varsigma}(x')]$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}[a_1(\vec{p},-\varsigma),a^+_1(\vec{p}',-\varsigma)]e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)|\vec{p}|\varsigma\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\varsigma|\vec{p}|e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= \frac{-\varsigma}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_be^{i\varsigma p\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(+\varsigma)}(x-x')$ □

证明： $[\Psi^{(-\varsigma)}_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^{(-\varsigma)+}_{\alpha'_\varsigma}(x')]$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}[a^+_2(\vec{p},-\varsigma),a_2(\vec{p}',-\varsigma)]e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)|\vec{p}|\varsigma\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\varsigma|\vec{p}|e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= \frac{\varsigma}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_be^{-i\varsigma p\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(-\varsigma)}(x-x')$ □

5.6 电磁场的等时对易规则

推论5.6.1.
$$\begin{cases}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi_{\beta_\varsigma}(x')]=0\\ [\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)]=\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi_{\beta_\varsigma}(\vec{r}',t)]=0\\ [\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi^+_{\beta'_\varsigma}(\vec{r}',t)]=0\end{cases}$$

证明： $[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$\Rightarrow[\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)]=2i\sigma^{k\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}$
$\Leftrightarrow[\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)]=\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$ □

推论5.6.2.
$$\begin{cases}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)]=\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi_{\beta_\varsigma}(\vec{r}',t)]=0\\ [\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi^+_{\beta'_\varsigma}(\vec{r}',t)]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]=\varsigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]=0\\ [a^+_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]=0\end{cases}$$

证明： $[a_1(\vec{p},-\varsigma),a^+_1(\vec{p}',-\varsigma)]$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int[\lambda^{+\alpha_\varsigma}_m(\hat{p},-\varsigma)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)},\lambda^{\alpha'_\varsigma}_m(\vec{p}',-\varsigma)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda^{+\alpha_\varsigma}_m(\hat{p},-\varsigma)\lambda^{\alpha'_\varsigma}_m(\vec{p}',-\varsigma)[\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)]e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= i\varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda^{+\alpha_\varsigma}_m(\hat{p},-\varsigma)\lambda^{\alpha'_\varsigma}_m(\vec{p}',-\varsigma)\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= i\varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda^{+\alpha_\varsigma}_m(\hat{p},-\varsigma)\lambda^{\alpha'_\varsigma}_m(\vec{p}',-\varsigma)\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}i\varsigma p_ke^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}d^3\vec{r}$
$= -\frac{1}{|\vec{p}|}\lambda^{+\alpha_\varsigma}_m(\hat{p},-\varsigma)\lambda^{\alpha'_\varsigma}_m(\hat{p},h')\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_k\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= -\lambda^+_m(\hat{p},-\varsigma)\frac{\gamma^kp_k}{|\vec{p}|}\lambda_m(\hat{p},-\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= \varsigma\lambda^+_m(\hat{p},-\varsigma)\lambda_m(\hat{p},-\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= \varsigma\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$ □

证明：$[a_2^+(\vec{p},-\varsigma),a_2(\vec{p}',-\varsigma)]$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int[\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)},\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)[\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)]e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$= i\varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$= i\varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{|\vec{p}||\vec{p}'|}}\int\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\vec{p}',-\varsigma)\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(-i\varsigma p_k)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}d^3\vec{r}$$
$$= \frac{1}{|\vec{p}|}\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\hat{p},h')\gamma^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_k\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$
$$= \lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma)\frac{\gamma^k p_k}{|\vec{p}|}\lambda_m(\hat{p},h')\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$
$$= -\varsigma\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma)\lambda_m(\hat{p},h')\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$
$$= -\varsigma\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$
□

5.7 电磁场对易规则小结

以上几个小节的证明正好形成一个逻辑闭环，故有如下性质：

推论5.7.1.
$$\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]=\varsigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]=0\\ [a^+_\sigma(\vec{p},-\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\varsigma)]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p}),a^+_{\sigma'}(\vec{p}')]=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p}),a_{\sigma'}(\vec{p}')]=0\\ [a^+_\sigma(\vec{p}),a^+_{\sigma'}(\vec{p}')]=0\end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

推论5.7.2.
$$\begin{cases}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi_{\beta_\varsigma}(x')]=0\\ [\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)]=\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi_{\beta_\varsigma}(\vec{r}',t)]=0\\ [\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi^+_{\beta'_\varsigma}(\vec{r}',t)]=0\end{cases}$$

5.8 电磁场的对易函数、因果函数和费曼传播子(好像跟波戈留波夫的差一个负号)

定义5.8.1.
$$\begin{cases}[\varphi(x),\varphi(x')]=i\Delta(x-x'),\varphi^+(x)=\varphi(x)\\ \Delta(x)=\Delta^{(+)}(x)+\Delta^{(-)}(x)=\Delta^{ret}(x)-\Delta^{adv}(x)\\ \Delta^{(l)}(x)=i[\Delta^{(-)}(x)-\Delta^{(+)}(x)]\\ N_m(1)=\begin{bmatrix}I_3\\0\end{bmatrix},\bar{N}_m(1)=[I_3,0]\end{cases}\qquad\begin{cases}\Delta^{(c)}(x)=\theta(t)\Delta^{(+)}(x)-\theta(-t)\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{ret}(x)=\theta(t)\Delta(x)=\Delta^{(c)}(x)+\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{adv}(x)=-\theta(-t)\Delta(x)=\Delta^{(c)}(x)-\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta_F(x)=\langle T\varphi(x)\varphi(x')\rangle_0=i\Delta^{(c)}(x-x')\end{cases}$$

定义5.8.2. $\tilde{\Delta}^{()}(x):=\begin{bmatrix}\Delta^{()}(x)\\0\end{bmatrix},\Delta^{(c)}(x-x'):=i\langle T\varphi(x)\varphi(x')\rangle_0,\vec{\partial}:=(\partial_x,\partial_y,\partial_z)$

推论5.8.1.
$$\begin{cases}\Delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x):=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x)\\ \Delta^{(+)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x):=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta^{(-)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x):=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{(l)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x):=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(l)}(x)\end{cases}\qquad\begin{cases}\Delta^{(c)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x):=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(c)}(x)-\sigma^{\pi\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\delta^4(x)\\ \Delta^{ret}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x):=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{ret}(x)-\sigma^{\pi\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\delta^4(x)\\ \Delta^{adv}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x):=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{adv}(x)-\sigma^{\pi\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\delta^4(x)\\ \Delta_{F\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x):=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta_F(x)-i\sigma^{\pi\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\delta^4(x)=i\Delta^{(c)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x)\\ \Delta_{F\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x)=\frac{i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_b}{p^2-i\varepsilon}+\cdots\end{cases}$$

推论5.8.2.
$$\begin{cases}[\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Delta(\gamma;x)=0\\ [\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Delta^{(+)}(\gamma;x)=0\\ [\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Delta^{(-)}(\gamma;x)=0\\ [\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Delta^{(l)}(\gamma;x)=0\end{cases}\qquad\begin{cases}[\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Delta^{(c)}(\gamma;x)=-\varsigma(\gamma,i\varsigma)_a\delta(t)\Delta(\gamma;x)|_{t=0}\\ [\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Delta^{ret}(\gamma;x)=-\varsigma(\gamma,i\varsigma)_a\delta(t)\Delta(\gamma;x)|_{t=0}\\ [\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Delta^{adv}(\gamma;x)=-\varsigma(\gamma,i\varsigma)_a\delta(t)\Delta(\gamma;x)|_{t=0}\\ [\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Delta_F(\gamma;x)=-i\varsigma(\gamma,i\varsigma)_a\delta(t)\Delta(\gamma;x)|_{t=0}\end{cases}$$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

推论5.8.3.

$$\begin{cases}(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta(\gamma;x)=0\\(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{(+)}(\gamma;x)=0\\(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{(-)}(\gamma;x)=0\\(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{(l)}(\gamma;x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{(c)}(\gamma;x)=-\varsigma\delta(t)N_m(1)\Delta(\gamma;x)|_{t=0}\\(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{ret}(\gamma;x)=-\varsigma\delta(t)N_m(1)\Delta(\gamma;x)|_{t=0}\\(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{adv}(\gamma;x)=-\varsigma\delta(t)N_m(1)\Delta(\gamma;x)|_{t=0}\\(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta_F(\gamma;x)=-i\varsigma\delta(t)N_m(1)\Delta(\gamma;x)|_{t=0}\end{cases}$$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

推论5.8.4.

$$\begin{cases}(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta(\gamma;x)\bar N_m(1)=0\\(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{(+)}(\gamma;x)\bar N_m(1)=0\\(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{(-)}(\gamma;x)\bar N_m(1)=0\\(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{(l)}(\gamma;x)\bar N_m(1)=0\end{cases}\quad\begin{cases}(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{(c)}(\gamma;x)\bar N_m(1)=-\varsigma\delta(t)N_m(1)\Delta(\gamma;x)|_{t=0}\bar N_m(1)\\(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{ret}(\gamma;x)\bar N_m(1)=-\varsigma\delta(t)N_m(1)\Delta(\gamma;x)|_{t=0}\bar N_m(1)\\(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{adv}(\gamma;x)\bar N_m(1)=-\varsigma\delta(t)N_m(1)\Delta(\gamma;x)|_{t=0}\bar N_m(1)\\(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta_F(\gamma;x)\bar N_m(1)=-i\varsigma\delta(t)N_m(1)\Delta(\gamma;x)|_{t=0}\bar N_m(1)\end{cases}$$

$[\Downarrow]$ $[\Downarrow]$

推论5.8.5.

$$\begin{cases}(\gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta(\gamma;x)=0\\(\gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(+)}(\gamma;x)=0\\(\gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(-)}(\gamma;x)=0\\(\gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(l)}(\gamma;x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}(\gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(c)}(\gamma;x)=-\varsigma\delta(t)\Delta(\gamma;x)|_{t=0}\\(\gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{ret}(\gamma;x)=-\varsigma\delta(t)\Delta(\gamma;x)|_{t=0}\\(\gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{adv}(\gamma;x)=-\varsigma\delta(t)\Delta(\gamma;x)|_{t=0}\\(\gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta_F(\gamma;x)=-i\varsigma\delta(t)\Delta(\gamma;x)|_{t=0}\end{cases}$$

5.9 电磁场能量动量算符的提取

推论5.9.1. $H=\int\limits_{\vec p\neq0}|\vec p|[a_1^+(\vec p,-\varsigma)a_1(\vec p,-\varsigma)+a_2(\vec p,-\varsigma)a_2^+(\vec p,-\varsigma)]d^3\vec p=\int\Psi^+(\vec r,t)\Psi(\vec r,t)d^3\vec r$

证明：$H=\int\limits_{\vec p\neq0}|\vec p|[a_1^+(\vec p,-\varsigma)a_1(\vec p,-\varsigma)+a_2(\vec p,-\varsigma)a_2^+(\vec p,-\varsigma)]d^3\vec p$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec p\neq0}[\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec r',t)e^{i\varsigma p\cdot x'}\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec r,t)e^{-i\varsigma p\cdot x}$

$+\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec r',t)e^{-i\varsigma p\cdot x'}\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec r,t)e^{i\varsigma p\cdot x}]d^3\vec p d^3\vec r d^3\vec r'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec p\neq0}\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec r',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec r,t)[e^{-i\varsigma\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}+e^{i\varsigma\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}]d^3\vec p d^3\vec r d^3\vec r'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{-1}{2}\int\limits_{\vec p\neq0}\sigma_{ab}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}p^ap^b\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec r',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec r,t)[e^{-i\varsigma\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}+e^{i\varsigma\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}]d^3\vec p d^3\vec r d^3\vec r'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{-1}{2}\int\limits_{\vec p\neq0}(\hat p^{\alpha'_\varsigma}\hat p^{\alpha_\varsigma}+\varsigma\gamma_k{}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\hat p^k-\delta^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma})\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec r',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec r,t)[e^{-i\varsigma\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}+e^{i\varsigma\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}]d^3\vec p d^3\vec r d^3\vec r'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec p\neq0}(\delta^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}-\hat p^{\alpha'_\varsigma}\hat p^{\alpha_\varsigma})e^{i\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec r',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec r,t)d^3\vec p d^3\vec r d^3\vec r'$

$=\int[\delta^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}-\frac{\partial^{\alpha'_\varsigma}\partial^{\alpha_\varsigma}}{\nabla^2}]\delta^3(\vec r-\vec r')\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec r',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec r,t)d^3\vec r d^3\vec r'$

$=\int\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec r,t)[\delta^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}-\frac{\partial^{\alpha'_\varsigma}\partial^{\alpha_\varsigma}}{\nabla^2}]\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec r,t)d^3\vec r$(利用了运动方程：$\nabla\cdot\Psi(\vec r,t)=0$)

$=\int\Psi^+(\vec r,t)\Psi(\vec r,t)d^3\vec r$ □

推论5.9.2. $\vec P=\int\limits_{\vec p\neq0}\vec p[a_1^+(\vec p,-\varsigma)a_1(\vec p,-\varsigma)+a_2(\vec p,-\varsigma)a_2^+(\vec p,-\varsigma)]d^3\vec p=-\varsigma\int\Psi^+(\vec r,t)\gamma\Psi(\vec r,t)d^3\vec r$

证明：$\vec P=\int\limits_{\vec p\neq0}\vec p[a_1^+(\vec p,-\varsigma)a_1(\vec p,-\varsigma)+a_2(\vec p,-\varsigma)a_2^+(\vec p,-\varsigma)]d^3\vec p$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec p\neq0}\hat p[\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec r',t)e^{i\varsigma p\cdot x'}\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec r,t)e^{-i\varsigma p\cdot x}$

$+\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec r',t)e^{-i\varsigma p\cdot x'}\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat p,-\varsigma)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec r,t)e^{i\varsigma p\cdot x}]d^3\vec p d^3\vec r d^3\vec r'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0} \hat{p}\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{-1}{2}\int\limits_{\vec{p}\neq 0} \hat{p}\sigma_{ab}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}p^a p^b\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{-1}{2}\int\limits_{\vec{p}\neq 0} \hat{p}(\hat{p}^{\alpha'_\varsigma}\hat{p}^{\alpha_\varsigma}+\varsigma{\gamma_k}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\hat{p}^k-\delta^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma})\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0} \hat{p}\varsigma{\gamma_k}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\hat{p}^k e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0} \Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)\varsigma\nabla(\gamma\cdot\nabla)^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\frac{1}{|\vec{p}|^2}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \int \Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)\varsigma\frac{\nabla(\gamma\cdot\nabla)^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}}{-\nabla^2}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \varsigma\int \Psi^+(\vec{r},t)\frac{\nabla(\gamma\cdot\nabla)}{-\nabla^2}\Psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$= -\varsigma\int \Psi^+(\vec{r},t)\gamma\Psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

推论5.9.3. $P^a = -\varsigma\int \Psi^+(\vec{r},t)(\gamma,-i\varsigma)^a\Psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

5.10 电磁场类电荷算符的提取

推论5.10.1. $Q = \varsigma\int\limits_{\vec{p}\neq 0}[a_1^+(\vec{p},-\varsigma)a_1(\vec{p},-\varsigma)-a_2(\vec{p},-\varsigma)a_2^+(\vec{p},-\varsigma)]d^3\vec{p} = i\varsigma\int \Psi^+(\vec{r},t)\frac{\gamma\cdot\nabla}{-\nabla^2}\Psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

证明： $Q = \varsigma\int\limits_{\vec{p}\neq 0}[a_1^+(\vec{p},-\varsigma)a_1(\vec{p},-\varsigma)-a_2(\vec{p},-\varsigma)a_2^+(\vec{p},-\varsigma)]d^3\vec{p}$

$= \varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\frac{1}{|\vec{p}|}[\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{i\varsigma p\cdot x'}\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i\varsigma p\cdot x}$

$-\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{-i\varsigma p\cdot x'}\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i\varsigma p\cdot x}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\frac{1}{|\vec{p}|}\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{-1}{2}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\frac{1}{|\vec{p}|}\sigma_{ab}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}p^a p^b\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{-1}{2}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\frac{1}{|\vec{p}|}(\hat{p}^{\alpha'_\varsigma}\hat{p}^{\alpha_\varsigma}+\varsigma{\gamma_k}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\hat{p}^k-\delta^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma})\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{-1}{2}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\frac{1}{|\vec{p}|}\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\varsigma{\gamma_k}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\hat{p}^k\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\frac{1}{|\vec{p}|}\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t){\gamma_k}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\hat{p}^k\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= -i\varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{(\gamma\cdot\nabla)^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}}{-\nabla^2}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= i\varsigma\int \Psi^+(\vec{r},t)\frac{\gamma\cdot\nabla}{-\nabla^2}\Psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int \Psi^+(\vec{r},t)\frac{i\partial_t}{-\nabla^2}\Psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

5.11 电磁场粒子数算符的提取

推论5.11.1. $N = \int\limits_{\vec{p}\neq 0}[a_1^+(\vec{p},-\varsigma)a_1(\vec{p},-\varsigma)+a_2(\vec{p},-\varsigma)a_2^+(\vec{p},-\varsigma)]d^3\vec{p} = \int \Psi^+(\vec{r},t)\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}}\Psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

证明： $N = \int\limits_{\vec{p}\neq 0}[a_1^+(\vec{p},-\varsigma)a_1(\vec{p},-\varsigma)+a_2(\vec{p},-\varsigma)a_2^+(\vec{p},-\varsigma)]d^3\vec{p}$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\frac{1}{|\vec{p}|}[\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{i\varsigma p\cdot x'}\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i\varsigma p\cdot x}$

$+\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{-i\varsigma p\cdot x'}\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i\varsigma p\cdot x}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\frac{1}{|\vec{p}|}\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{-1}{2}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\frac{1}{|\vec{p}|}\sigma_{ab}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}p^a p^b\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{-1}{2}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\frac{1}{|\vec{p}|}(\hat{p}^{\alpha'_\varsigma}\hat{p}^{\alpha_\varsigma}+\varsigma{\gamma_k}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\hat{p}^k-\delta^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma})\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\frac{1}{|\vec{p}|}(\delta^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}-\hat{p}^{\alpha'_\varsigma}\hat{p}^{\alpha_\varsigma})e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \int \frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}}[\delta^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}-\frac{\partial^{\alpha'_\varsigma}\partial^{\alpha_\varsigma}}{\nabla^2}]\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \int \Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}}[\delta^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma} - \frac{\partial^{\alpha'_\varsigma}\partial^{\alpha_\varsigma}}{\nabla^2}]\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$(利用了运动方程：$\nabla\cdot\Psi(\vec{r},t)=0$)

$= \int \Psi^+(\vec{r},t)\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}}\Psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

5.12 电磁场能量动量正规化算符

推论5.12.1. $H_0 = \int\limits_{\vec{p}\neq 0} |\vec{p}|[a_1^+(\vec{p},-\varsigma)a_1(\vec{p},-\varsigma) + a_2^+(\vec{p},-\varsigma)a_2(\vec{p},-\varsigma)]d^3\vec{p}$

$= \int \Psi^+(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} - \frac{i}{2}\int[\Psi^+(\vec{r},t)(\frac{\gamma.\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}})\Psi(\vec{r},t) + \Psi^T(\vec{r},t)(\frac{\gamma.\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}})\Psi^*(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

证明： $H_0 = \int\limits_{\vec{p}\neq 0} |\vec{p}|[a_1^+(\vec{p},-\varsigma)a_1(\vec{p},-\varsigma) + a_2^+(\vec{p},-\varsigma)a_2(\vec{p},-\varsigma)]d^3\vec{p}$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}[\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{i\varsigma p\cdot x'}\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i\varsigma p\cdot x}$

$+ \lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i\varsigma p\cdot x}\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{-i\varsigma p\cdot x'}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\lambda_m^{\alpha'_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\lambda_m^{+\alpha_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)[\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} + \Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{-1}{2(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}(\hat{p}^{\alpha'_\varsigma}\hat{p}^{\alpha_\varsigma} + \varsigma\gamma_k{}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\hat{p}^k - \delta^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma})[\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} + \Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \int \Psi^+(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$+ \frac{-1}{2(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\varsigma\gamma_k{}^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\hat{p}^k[\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} + \Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{i\varsigma\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \int \Psi^+(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} + \frac{-1}{2}\int i[\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r},t)(\frac{\gamma.\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}})^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t) - i[(\frac{\gamma.\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}})^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$= \int \Psi^+(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} - \frac{i}{2}\int[\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r},t)(\frac{\gamma.\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}})^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t) + [\Psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)(\frac{\gamma.\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}})^{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$= \int \Psi^+(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} - \frac{i}{2}\int[\Psi^+(\vec{r},t)(\frac{\gamma.\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}})\Psi(\vec{r},t) + \Psi^T(\vec{r},t)(\frac{\gamma.\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}})\Psi^*(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

$= H - H_g$ □

推论5.12.2. $H = H_0 + H_g$

$H_g = \frac{i}{2}\int[\Psi^+(\vec{r},t)(\frac{\gamma.\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}})\Psi(\vec{r},t) + \Psi^T(\vec{r},t)(\frac{\gamma.\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}})\Psi^*(\vec{r},t)]d^3\vec{r} = \int\limits_{\vec{p}\neq 0}|\vec{p}|[a_2(\vec{p},-\varsigma), a_2^+(\vec{p},-\varsigma)]d^3\vec{p}$

5.13 对易和反对易公式

推论5.13.1. $\begin{cases}[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]\\ [BC,A] = [B,A]C + B[C,A]\end{cases}$

$$\begin{cases}[AB,A'B'] = [AB,A']B' + A'[AB,B'] = [A,A']BB' + A[B,A']B' + A'[A,B']B + A'A[B,B']\\ [AB,A'B'] = A[B,A'B'] + [A,A'B']B = AA'[B,B'] + A[B,A']B' + A'[A,B']B + [A,A']B'B\end{cases}$$

推论5.13.2. $\begin{cases}[A,BC] = [A,B]C + B[A,C], [A,CB] = [A,C]B + C[A,B]\\ [A,BC] = \{A,B\}C - B\{A,C\}, [A,CB] = \{A,C\}B - C\{A,B\}\end{cases}$

推论5.13.3. $\begin{cases}[A,\{B,C\}] = \{[A,B],C\} + \{B,[A,C]\}\\ [A,[B,C]] = \{\{A,B\},C\} - \{B,\{A,C\}\}\end{cases}$

6 自由无耦合Yang-Mills场协变量子化新方案

6.1 自由无耦合Yang-Mills场方程各种等价形式 [24,26]

定义6.1.1. $\Psi^\rho_{\alpha_\varsigma} := \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\psi^\rho_{\alpha_\varsigma} = \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F^\rho_{ab} = \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}i\varsigma(E^\rho - i\varsigma B^\rho)_{\alpha_\varsigma}$

定义6.1.2. $\Psi^\rho := \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{E}^\rho - i\varsigma\vec{B}^\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{E}^\rho - i\varsigma\nabla\times\vec{A}^\rho), \Psi^\rho_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(E^\rho_i - i\varsigma\varepsilon_i{}^{jk}\partial_j A^\rho_k), p\cdot x := \vec{p}\cdot\vec{r} - Et$

定理6.1.1.

$$\begin{cases}\partial^a F^\rho_{ab} = 0\\ \partial^a * F^\rho_{ab} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}^\rho = 0, \nabla\times\vec{E}^\rho = -\partial_t\vec{B}^\rho\\ \nabla\cdot\vec{B}^\rho = 0, \nabla\times\vec{B}^\rho = \partial_t\vec{E}^\rho\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\gamma,-i\varsigma)^a\partial_a\Psi^\rho = 0\\ \nabla\cdot\Psi^\rho = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}[\partial_a + iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Psi^\rho = 0\\ S_{ab}(\gamma,\varsigma) = i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}(s)\end{cases}$$

6.2 自由无耦合Yang-Mills场复场强自旋方程及其平面波解

定理6.2.1. $[\partial_a + iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Psi^\rho(x) = 0$

推论6.2.1.

$$\begin{cases}\Psi^\rho(\vec{r},t) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\sqrt{|\vec{p}|}\lambda_m(\hat{p},-\varsigma)[a_1^\rho(\vec{p},-\varsigma)e^{i\varsigma p\cdot x} + a_2^{\rho+}(\vec{p},-\varsigma)e^{-i\varsigma p\cdot x}]d^3\vec{p}\\ \sqrt{|\vec{p}|}a_1^\rho(\vec{p},-\varsigma) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma)\Psi^\rho(\vec{r},t)e^{-i\varsigma p\cdot x}d^3\vec{r}\\ \sqrt{|\vec{p}|}a_2^{\rho+}(\vec{p},-\varsigma) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma)\Psi^\rho(\vec{r},t)e^{i\varsigma p\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$$

6.3 自由无耦合Yang-Mills场对易规则

推论6.3.1.

$$\begin{cases}[a_\sigma^\rho(\vec{p},-\varsigma), a_{\sigma'}^{\rho'+}(\vec{p}',-\varsigma)] = \varsigma\delta^{\rho\rho'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma^\rho(\vec{p},-\varsigma), a_{\sigma'}^{\tau}(\vec{p}',-\varsigma)] = 0\\ [a_\sigma^{\rho'+}(\vec{p},-\varsigma), a_{\sigma'}^{\tau'+}(\vec{p}',-\varsigma)] = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}[a_\sigma^\rho(\vec{p}), a_{\sigma'}^{\rho'+}(\vec{p}')] = \delta^{\rho\rho'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma^\rho(\vec{p}), a_{\sigma'}^{\tau}(\vec{p}')] = 0\\ [a_\sigma^{\rho'+}(\vec{p}),{}_{\sigma'}^{\tau'+}(\vec{p}')] = 0\end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

推论6.3.2.

$$\begin{cases}[\Psi^\rho_{\alpha_\varsigma}(x), \Psi^{\rho'+}_{\alpha'_\varsigma}(x')] = i\delta^{\rho\rho'}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\Psi^\rho_{\alpha_\varsigma}(x), \Psi^\tau_{\beta_\varsigma}(x')] = 0\\ [\Psi^{\rho'+}_{\alpha'_\varsigma}(x), \Psi^{\tau'+}_{\beta'_\varsigma}(x')] = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}[\Psi^\rho_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t), \Psi^{\rho'+}_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r}',t)] = \varsigma\delta^{\rho\rho'}\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\Psi^\rho_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t), \Psi^\tau_{\beta_\varsigma}(\vec{r}',t)] = 0\\ [\Psi^{\rho'+}_{\alpha'_\varsigma}(\vec{r},t), \Psi^{\tau'+}_{\beta'_\varsigma}(\vec{r}',t)] = 0\end{cases}$$

6.4 自由无耦合Yang-Mills场的对易函数、因果函数和费曼传播子

推论6.4.1.

$$\begin{cases}\Delta^{\rho\rho'}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x) := \delta^{\rho\rho'}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x)\\ \Delta^{\rho\rho'(+)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x) := \delta^{\rho\rho'}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta^{\rho\rho'(-)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x) := \delta^{\rho\rho'}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{\rho\rho'(l)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x) := \delta^{\rho\rho'}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(l)}(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta^{\rho\rho'(c)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x) := \delta^{\rho\rho'}[\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(c)}(x) - \sigma^{\pi\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\delta^4]\\ \Delta^{\rho\rho' ret}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x) := \delta^{\rho\rho'}[\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{ret}(x) - \sigma^{\pi\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\delta^4(x)]\\ \Delta^{\rho\rho' adv}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x) := \delta^{\rho\rho'}[\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{adv}(x) - \sigma^{\pi\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\delta^4(x)]\\ \Delta^{\rho\rho'}_{F\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x) := \delta^{\rho\rho'}[\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta_F(x) - i\sigma^{\pi\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\delta^4(x)] = i\Delta^{\rho\rho'(c)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x)\\ \Delta_{F\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(\gamma;x) = \frac{i\delta^{\rho\rho'}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_a p_b}{p^2 - i\varepsilon} + \cdots\end{cases}$$

推论6.4.2.

$$\begin{cases}[\partial_a + iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x) = 0\\ [\partial_a + iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Delta^{\rho\rho'(+)}(\gamma;x) = 0\\ [\partial_a + iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Delta^{\rho\rho'(-)}(\gamma;x) = 0\\ [\partial_a + iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Delta^{\rho\rho'(l)}(\gamma;x) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\partial_a + iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Delta^{\rho\rho'(c)}(\gamma;x) = -\varsigma(\gamma,i\varsigma)_a\delta(t)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)|_{t=0}\\ [\partial_a + iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Delta^{\rho\rho' ret}(\gamma;x) = -\varsigma(\gamma,i\varsigma)_a\delta(t)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)|_{t=0}\\ [\partial_a + iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Delta^{\rho\rho' adv}(\gamma;x) = -\varsigma(\gamma,i\varsigma)_a\delta(t)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)|_{t=0}\\ [\partial_a + iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Delta^{\rho\rho'}_F(\gamma;x) = -i\varsigma(\gamma,i\varsigma)_a\delta(t)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)|_{t=0}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow] \qquad\qquad [\Updownarrow]$$

推论6.4.3.

$$\begin{cases}(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x) = 0\\ (\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{\rho\rho'(+)}(\gamma;x) = 0\\ (\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{\rho\rho'(-)}(\gamma;x) = 0\\ (\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{\rho\rho'(l)}(\gamma;x) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{\rho\rho'(c)}(\gamma;x) = -\varsigma\delta(t)N_m(1)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)|_{t=0}\\ (\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{\rho\rho' ret}(\gamma;x) = -\varsigma\delta(t)N_m(1)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)|_{t=0}\\ (\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{\rho\rho' adv}(\gamma;x) = -\varsigma\delta(t)N_m(1)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)|_{t=0}\\ (\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta_F(\gamma;x) = -i\varsigma\delta(t)N_m(1)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)|_{t=0}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow] \qquad\qquad [\Updownarrow]$$

推论6.4.4.

$$\begin{cases}(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)\bar{N}_m(1) = 0\\ (\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{\rho\rho'(+)}(\gamma;x)\bar{N}_m(1) = 0\\ (\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{\rho\rho'(-)}(\gamma;x)\bar{N}_m(1) = 0\\ (\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{\rho\rho'(l)}(\gamma;x)\bar{N}_m(1) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{\rho\rho'(c)}(\gamma;x)\bar{N}_m(1)=-\varsigma\delta(t)N_m(1)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)|_{t=0}\bar{N}_m(1)\\(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{\rho\rho' ret}(\gamma;x)\bar{N}_m(1)=-\varsigma\delta(t)N_m(1)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)|_{t=0}\bar{N}_m(1)\\(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta^{\rho\rho' adv}(\gamma;x)\bar{N}_m(1)=-\varsigma\delta(t)N_m(1)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)|_{t=0}\bar{N}_m(1)\\(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a\partial^a N_m(1)\Delta_F(\gamma;x)\bar{N}_m(1)=-i\varsigma\delta(t)N_m(1)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)|_{t=0}\bar{N}_m(1)\end{cases}$$

$[\Downarrow]$ $[\Downarrow]$

推论6.4.5.

$$\begin{cases}(\gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)=0\\(\gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{\rho\rho'(+)}(\gamma;x)=0\\(\gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{\rho\rho'(-)}(\gamma;x)=0\\(\gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{\rho\rho'(l)}(\gamma;x)=0\end{cases}\qquad\begin{cases}(\gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{\rho\rho'(c)}(\gamma;x)=-\varsigma\delta(t)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)|_{t=0}\\(\gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{\rho\rho' ret}(\gamma;x)=-\varsigma\delta(t)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)|_{t=0}\\(\gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{\rho\rho' adv}(\gamma;x)=-\varsigma\delta(t)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)|_{t=0}\\(\gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta_F(\gamma;x)=-i\varsigma\delta(t)\Delta^{\rho\rho'}(\gamma;x)|_{t=0}\end{cases}$$

6.5 自由无耦合Yang-Mills场在辐射规范下势对易关系与复场强协变对易关系的等价性

引理6.5.1.

$$\begin{cases}\nabla^2\tilde{A}^\rho-\partial_t^2\tilde{A}^\rho=\vec{J}^\rho+\partial_t\nabla\tilde{\phi}^\rho,\nabla^2\tilde{\phi}^\rho=\rho^\rho\\\sqrt{2}\Psi^\rho=-\partial_t\tilde{A}^\rho-\nabla\tilde{\phi}^\rho-i\varsigma\nabla\times\tilde{A}^\rho,\nabla\cdot\tilde{A}^\rho=0\end{cases}[\Leftrightarrow]\begin{cases}[\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Psi^\rho=-i\sigma^{[\beta_\varsigma]}_{\varsigma ab}J^{b\rho}\\\tilde{A}^\rho=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\times(\Psi^\rho-\Psi^{+\rho})}{\nabla^2},\tilde{\phi}^\rho=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\cdot(\Psi^\rho+\Psi^{+\rho})}{\nabla^2}\end{cases}$$

引理6.5.2.

$$\begin{cases}[\tilde{A}_i^\rho(x),\tilde{A}_j^\tau(x')]=i\delta^{\rho\tau}(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')\\[\tilde{A}_i^\rho(x),\tilde{\phi}^\tau(x')]=0,[\tilde{\phi}^\rho(x),\tilde{\phi}^\tau(x')]=0\\\sqrt{2}\Psi^\rho=-\partial_t\tilde{A}^\rho-\nabla\tilde{\phi}^\rho-i\varsigma\nabla\times\tilde{A}^\rho,\nabla\cdot\tilde{A}^\rho=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\Psi^\rho_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^{\rho'+}_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\delta^{\rho\rho'}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\[\Psi^\rho_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^\tau_{\beta_\varsigma}(x')]=0,[\Psi^{\rho'+}_{\alpha'_\varsigma}(x),\Psi^{\tau'+}_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\\\tilde{A}^\rho=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\times(\Psi^\rho-\Psi^{+\rho})}{\nabla^2},\tilde{\phi}^\rho=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\cdot(\Psi^\rho+\Psi^{+\rho})}{\nabla^2}\end{cases}$$

引理6.5.3.

$$\begin{cases}[\Psi^\rho_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^{\rho'+}_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\delta^{\rho\rho'}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\[\Psi^\rho_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^\tau_{\beta_\varsigma}(x')]=0,[\Psi^{\rho'+}_{\alpha'_\varsigma}(x),\Psi^{\tau'+}_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\\\tilde{A}^\rho=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\times(\Psi^\rho-\Psi^{+\rho})}{\nabla^2},\tilde{\phi}^\rho=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\cdot(\Psi^\rho+\Psi^{+\rho})}{\nabla^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\tilde{A}_i^\rho(x),\tilde{A}_j^\tau(x')]=i\delta^{\rho\tau}(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')\\[\tilde{A}_i^\rho(x),\tilde{\phi}^\tau(x')]=0,[\tilde{\phi}^\rho(x),\tilde{\phi}^\tau(x')]=0\end{cases}$$

定理6.5.1.

$$\begin{cases}[\tilde{A}_i^\rho(x),\tilde{A}_j^\tau(x')]=i\delta^{\rho\tau}(\delta_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\Delta(x-x')\\[\tilde{A}_i^\rho(x),\tilde{\phi}^\tau(x')]=0,[\tilde{\phi}^\rho(x),\tilde{\phi}^\tau(x')]=0\\\nabla^2\tilde{A}^\rho-\partial_t^2\tilde{A}^\rho=\vec{J}^\rho+\partial_t\nabla\tilde{\phi}^\rho,\nabla^2\tilde{\phi}^\rho=\rho^\rho\\\sqrt{2}\Psi^\rho=-\partial_t\tilde{A}^\rho-\nabla\tilde{\phi}^\rho-i\varsigma\nabla\times\tilde{A}^\rho,\nabla\cdot\tilde{A}^\rho=0\end{cases}[\Leftrightarrow]\begin{cases}[\Psi^\rho_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^{\rho'+}_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\delta^{\rho\rho'}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\[\Psi^\rho_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^\tau_{\beta_\varsigma}(x')]=0,[\Psi^{\rho'+}_{\alpha'_\varsigma}(x),\Psi^{\tau'+}_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\\[\partial_a+iS_{ab}(\gamma,\varsigma)\partial^b]\Psi^\rho=-i\sigma^{[\beta_\varsigma]}_{\varsigma ab}J^{b\rho}\\\tilde{A}^\rho=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\times(\Psi^\rho-\Psi^{+\rho})}{\nabla^2},\tilde{\phi}^\rho=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\nabla\cdot(\Psi^\rho+\Psi^{+\rho})}{\nabla^2}\end{cases}$$

6.6 在$\lambda-$规范下导出自由无耦合Yang-Mills场的协变对易规则

推论6.6.1.

$$\begin{cases}[A_a^\rho(x),A_b^\tau(x')]=i\delta^{\rho\tau}(\delta_{ab}-\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial_a\partial_b}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')\\\phi=-iA_0,\sqrt{2}\Psi^\rho=-\partial_t\vec{A}^\rho-\nabla\phi^\rho-i\varsigma\nabla\times\vec{A}^\rho\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\Psi^\rho_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^{+\rho'}_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\delta^{\rho\rho'}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\[\Psi^\rho_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^\tau_{\beta_\varsigma}(x')]=0,[\Psi^{+\rho'}_{\alpha'_\varsigma}(x),\Psi^{+\tau'}_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\\[\Psi_i^\rho(x),\phi^\tau(x')]=[\Psi_i^{+\rho}(x),\phi^\tau(x')]=\frac{i}{\sqrt{2}}\delta^{\rho\tau}\partial_i\Delta(x-x')\\[\phi^\rho(x),\phi^\tau(x')]=-i\delta^{\rho\tau}(1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\nabla^2}{\Box+i\varepsilon})\Delta(x-x')\end{cases}$$

7 引力微子场协变量子化方案

7.1 引力微子自旋算符方程及其平面波解

定理7.1.1. $[\frac{3}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)\partial^b]\psi(x)=0$

推论7.1.1. $\begin{cases}\psi(\vec{r},t):=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int|\vec{p}|\lambda(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)[a_1(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ |\vec{p}|a_1(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda^+(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\psi(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}\\ |\vec{p}|a_2^+(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda^+(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\psi(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$

定义7.1.1. 投影算子:$\hat{P}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(\frac{3}{2},\varsigma):=\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma),\hat{P}^2(\frac{3}{2},\varsigma)=\hat{P}(\frac{3}{2},\varsigma),\hat{P}^+(\frac{3}{2},\varsigma)=\hat{P}(\frac{3}{2},\varsigma)$

推论7.1.2. $H_2=\int|\vec{p}|[a_1^+(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma)a_1(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma)-a_2(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma)a_2^+(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma)]d^3\vec{p}=\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{i\partial_t}{-\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

证明: $H_2=\int|\vec{p}|[a_1^+(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma)a_1(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma)-a_2(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma)a_2^+(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma)]d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{|\vec{p}|}[\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{ip\cdot x'}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}$

$-\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{-ip\cdot x'}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{|\vec{p}|}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int(-2\sqrt{2}i)^{-1}\frac{1}{|\vec{p}|^4}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_ap_bp_c\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int(-2\sqrt{2}i)^{-1}\frac{1}{|\vec{p}|^4}(\frac{1}{\sqrt{2}})^3\frac{i}{6}\{[3|\vec{p}|^3-2\varsigma|\vec{p}|^2[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]-12|\vec{p}|[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]^2+8\varsigma[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]^3\}\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)$
$[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{-1}{48}\frac{1}{|\vec{p}|^4}\{[3|\vec{p}|^3-2\varsigma|\vec{p}|^2[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]-12|\vec{p}|[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]^2+8\varsigma[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]^3\}\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)$
$[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{-1}{48}\frac{1}{|\vec{p}|^4}\{[-2\varsigma|\vec{p}|^2[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]+8\varsigma[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]^3\}\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}-e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{i\varsigma}{24}\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\{[\frac{1}{|\vec{p}|^2}[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]+\frac{1}{|\vec{p}|^4}4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^3\}[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\frac{-i\varsigma}{12}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\{\frac{\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla}{\nabla^2}-4\frac{[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^3}{\nabla^4}\}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\frac{i\varsigma}{12}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\{\frac{\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla}{\nabla^2}-4\frac{[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^3}{\nabla^4}\}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\frac{-i\varsigma}{3/2}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla}{\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{i\partial_t}{-\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

7.2 引力微子场协变常数不变张量的性质

推论7.2.1.

$\Gamma^{\pi\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(\frac{3}{2})=(\frac{1}{\sqrt{2}})^3\delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}$
$\Gamma^{i\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(\frac{3}{2})=-i\varsigma(\frac{1}{\sqrt{2}})^3\frac{2}{3}\sigma^i(\frac{3}{2})_{k_\varsigma k'_\varsigma}$
$\Gamma^{ij\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(\frac{3}{2})=-(\frac{1}{\sqrt{2}})^3\frac{1}{3}[\sigma^{\{i}(\frac{3}{2})\sigma^{j\}}(\frac{3}{2})-\frac{3}{2}\delta^{ij}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}=-(\frac{1}{\sqrt{2}})^3\frac{2}{3}\frac{1}{2!}[\sigma^{\{i}(\frac{3}{2})\sigma^{j\}}(\frac{3}{2})-\frac{3}{4}\delta^{\{ij\}}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}$
$\Gamma^{ijk}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(\frac{3}{2})=(\frac{1}{\sqrt{2}})^3\frac{2i\varsigma}{3}\{\sigma^{\{j}(\frac{3}{2})[\sigma^i(\frac{3}{2})]\sigma^{k\}}(\frac{3}{2})-[\frac{1}{2}\sigma^i(\frac{3}{2})\delta^{jk}+\frac{3}{2}\delta^{i\{j}\sigma^{k\}}(\frac{3}{2})]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}$
$=(\frac{1}{\sqrt{2}})^3\frac{4i\varsigma}{3}\frac{1}{3!}[\sigma^{\{i}(\frac{3}{2})\sigma^j(\frac{3}{2})\sigma^{k\}}(\frac{3}{2})-\frac{7}{4}\delta^{\{ij}\sigma^{k\}}(\frac{3}{2})]_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

推论7.2.2. $\Gamma^{abc}(\frac{3}{2})\partial_a\partial_b\partial_c\Delta(x-x')|_{t=t'}=\frac{i}{4\sqrt{2}}\{\nabla^2-4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

证明: $\Gamma^{abc}(\frac{3}{2})\partial_a\partial_b\partial_c\Delta(x-x')|_{t=t'}$

$=i\sum_{l=0}^{1}(-1)^lC_3^{2l+1}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{2-2l}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2l+1}}(\frac{3}{2})\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{2-2l}\nabla^{2l}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

$=i[C_3^1\Gamma^{ij\pi}(\frac{3}{2})\partial_i\partial_j-C_3^3\Gamma^{\pi\pi\pi}(\frac{3}{2})\nabla^2]\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

$=i\{-(\frac{1}{\sqrt{2}})^3[\sigma^{\{i}(\frac{3}{2})\sigma^{j\}}(\frac{3}{2})-\frac{3}{2}\delta^{ij}]\partial_i\partial_j-(\frac{1}{\sqrt{2}})^3\nabla^2\}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

$=-i(\frac{1}{\sqrt{2}})^3\{[\sigma^{\{i}(\frac{3}{2})\sigma^{j\}}(\frac{3}{2})-\frac{3}{2}\delta^{ij}]\partial_i\partial_j+\nabla^2\}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

$=i\frac{1}{4\sqrt{2}}\{\nabla^2-4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

$=\frac{i}{4\sqrt{2}}\{\nabla^2-9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$ □

推论7.2.3. $\Gamma^{abc}(\frac{3}{2})\partial_a\partial_b\partial_c\Delta(x-x')|_{t=t'}\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}=\frac{\varsigma}{4\sqrt{2}}\{\nabla^2-9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

证明: $\Gamma^{abc}(\frac{3}{2})\partial_a\partial_b\partial_c\Delta(x-x')|_{t=t'}\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}$

$=i\sum_{l=0}^{1}(-1)^lC_3^{2l}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{3-2l}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2l}}(\frac{3}{2})\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{3-2l}\nabla^{2l}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

$= i[C_3^0\Gamma^{ijk}(\frac{3}{2})\partial_i\partial_j\partial_k - C_3^2\Gamma^{i\pi\pi}(\frac{3}{2})\partial_i\nabla^2]\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$
$= i[(\frac{1}{\sqrt{2}})^3\frac{4i\varsigma}{3}\frac{1}{3!}[\sigma^{\{i}(\frac{3}{2})\sigma^j(\frac{3}{2})\sigma^{k\}}(\frac{3}{2}) - \frac{7}{4}\delta^{\{ij}\sigma^{k\}}(\frac{3}{2})]\partial_i\partial_j\partial_k + 2i\varsigma(\frac{1}{\sqrt{2}})^3\sigma^i(\frac{3}{2})\partial_i\nabla^2]\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$
$= i(\frac{1}{\sqrt{2}})^3 2i\varsigma\{\frac{2}{3}\{[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^3 - \frac{7}{4}[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]\nabla^2\} + [\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]\nabla^2\}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$
$= -i(\frac{1}{\sqrt{2}})^3\frac{i\varsigma}{3}\{\nabla^2 - 4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$
$= \frac{\varsigma}{4\sqrt{2}}\{\nabla^2 - 9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$ □

引理7.2.1. $\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_ap_bp_c = -2\sqrt{2}i|\vec{p}|^3\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)$

证明: $\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_ap_bp_c$
$\succ= C_3^3\Gamma^{\pi\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1)p_\pi^3 + C_3^2\Gamma^{i\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1)p_ip_\pi^2 + C_3^1\Gamma^{ij\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1)p_ip_jp_\pi + C_3^0\Gamma^{ijk}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1)p_ip_jp_k$
$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^3[-i|\vec{p}|^3 + 2i\varsigma|\vec{p}|^2\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p} - 2i|\vec{p}|[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]^2 + i\frac{3}{2}|\vec{p}|^3 + \frac{4i\varsigma}{3}\{[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]^3 - \frac{7}{4}|\vec{p}|^2[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]\}$
$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^3\frac{i}{6}[3|\vec{p}|^3 - 2\varsigma|\vec{p}|^2[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}] - 12|\vec{p}|[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]^2 + 8\varsigma[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]^3$
$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^3\frac{i}{6}|\vec{p}|^3[3 - 2\varsigma[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{p}] - 12[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{p}]^2 + 8\varsigma[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{p}]^3$
$= \{(\frac{1}{\sqrt{2}})^3\frac{i}{6}|\vec{p}|^3[3 - 2\varsigma[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{p}] - 12[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{p}]^2 + 8\varsigma[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{p}]^3\}\sum_{h=3/2}^{-3/2}\lambda(\hat{p},h)\lambda^+(\hat{p},h)$
$=\prec -2\sqrt{2}i|\vec{p}|^3\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)$ □

推论7.2.4. 投影算子:$\hat{P}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(\frac{3}{2},\varsigma) = \frac{i}{2\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c \to -\frac{1}{2\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c$

7.3 引力微子场数学上一般的协变对易规则

定理7.3.1.

$$\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\frac{3}{2}\varsigma)]_\pm \\ = \delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \\ [a_\sigma(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma), a_{\sigma'}(\vec{p}',-\frac{3}{2}\varsigma)]_\pm = 0 \\ [a^+_\sigma(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-\frac{3}{2}\varsigma)]_\pm = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}[\Psi_{k_\varsigma}(x), \Psi^+_{k'_\varsigma}(x')]_\pm \\ = -\frac{i}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c[(\delta_1 - \pm\delta_2)\Delta^{(+)}(x-x') \pm \delta_2\Delta(x-x')] \\ [\Psi_{k_\varsigma}(x), \Psi_{l_\varsigma}(x')]_\pm = 0 \\ [\Psi^+_{k'_\varsigma}(x), \Psi^+_{l'_\varsigma}(x')]_\pm = 0\end{cases}$$

证明: $[\Psi^{(+)}_{k_\varsigma}(x), \Psi^{(+)+}_{k'_\varsigma}(x')]_\pm$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\frac{3}{2}\varsigma)|\vec{p}||\vec{p}'|[a_1(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma), a_1^+(\vec{p}',-\frac{3}{2}\varsigma)]_\pm e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\frac{3}{2}\varsigma)|\vec{p}|^2\delta_1\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\delta_1|\vec{p}|^2e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= \frac{\delta_1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\frac{i}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_ap_bp_ce^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= \frac{\delta_1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\frac{-1}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_ce^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= -\frac{i}{\sqrt{2}}\delta_1\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\Delta^{(+)}(x-x')$ □

证明: $[\Psi^{(-)}_{k_\varsigma}(x), \Psi^{(-)+}_{k'_\varsigma}(x')]_\pm$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\frac{3}{2}\varsigma)|\vec{p}||\vec{p}'|[a_2(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma), a_2^+(\vec{p}',-\frac{3}{2}\varsigma)]_\pm e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\frac{3}{2}\varsigma)|\vec{p}|^2\delta_2\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\delta_2|\vec{p}|^2e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= \pm\frac{\delta_2}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\frac{i}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_ap_bp_ce^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= \pm\frac{\delta_2}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_ce^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$= -\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\delta_2\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\Delta^{(-)}(x-x')$ □

证明: $[\Psi_{k_\varsigma}(x), \Psi^+_{k'_\varsigma}(x')]_\pm$
$= [\Psi^{(+)}_{k_\varsigma}(x), \Psi^{(+)+}_{k'_\varsigma}(x')]_\pm + [\Psi^{(-)}_{k_\varsigma}(x), \Psi^{(-)+}_{k'_\varsigma}(x')]_\pm$
$= -\frac{i}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c[\delta_1\Delta^{(+)}(x-x') \pm \delta_2\Delta^{(-)}(x-x')]$
$= -\frac{i}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c[(\delta_1 - \pm\delta_2)\Delta^{(+)}(x-x') \pm \delta_2\Delta(x-x')]$ □

从上式可知，只有$\delta_1 - \pm\delta_2 = 0$时，才满足微观因果性，同时只有$\delta_1, \delta_2 \geq 0$时，才满足几率非负性。所以数学上八种协变对易或反对易方案中，物理上合理的只有一种：即$\delta_1 = \delta_2 = 1$，且满足反对易关系。其实还有两种，即$\delta_1 = \delta_2 = 0$，且满足对易或反对易关系，就是经典情形。

7.4 引力微子场物理的协变反对易规则

定理7.4.1.
$$\begin{cases}\{a_\sigma(\vec{p}, -\frac{3}{2}\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}', -\frac{3}{2}\varsigma)\} = \delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \\ \{a_\sigma(\vec{p}, -\frac{3}{2}\varsigma), a_{\sigma'}(\vec{p}', -\frac{3}{2}\varsigma)\} = 0 \\ \{a^+_\sigma(\vec{p}, -\frac{3}{2}\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}', -\frac{3}{2}\varsigma)] = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\{\psi_{k_\varsigma}(x), \psi^+_{k'_\varsigma}(x')\} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\Delta(x - x') \\ \{\psi_{k_\varsigma}(x), \psi_{l_\varsigma}(x')\} = 0 \\ \{\psi^+_{k'_\varsigma}(x), \psi^+_{l'_\varsigma}(x')\} = 0\end{cases}$$

证明：$\{\psi_{k_\varsigma}(x), \psi^+_{k'_\varsigma}(x')\}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \lambda_{k_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{3}{2}\varsigma)|\vec{p}||\vec{p}'|$
$\{\{a_1(\vec{p}, -\frac{3}{2}\varsigma), a^+_1(\vec{p}', -\frac{3}{2}\varsigma)\}e^{ip\cdot(x-x')} + \{a^+_2(\vec{p}, -\frac{3}{2}\varsigma), a_2(\vec{p}', -\frac{3}{2}\varsigma)\}e^{-ip\cdot(x-x')}\}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int |\vec{p}|^2\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{3}{2}\varsigma)[\delta^3(\vec{p} - \vec{p}')e^{ip\cdot(x-x')} + \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int |\vec{p}|^2\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{3}{2}\varsigma)[e^{ip\cdot(x-x')} + e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{2|\vec{p}|}\frac{i}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_a p_b p_c[e^{ip\cdot(x-x')} + e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= i\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{2|\vec{p}|}\frac{i}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c[e^{ip\cdot(x-x')} - e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= \frac{-i}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{2|\vec{p}|}[e^{ip\cdot(x-x')} - e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= \frac{-i}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\Delta(x - x')$ □

7.5 引力微子场的等时反对易规则

推论7.5.1.
$$\begin{cases}\{\psi_{k_\varsigma}(x), \psi^+_{k'_\varsigma}(x')\} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\Delta[(x - x')] \\ \{\psi_{k_\varsigma}(x), \psi_{l_\varsigma}(x')\} = 0 \\ \{\psi^+_{k'_\varsigma}(x), \psi^+_{l'_\varsigma}(x')\} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\{\psi_{k_\varsigma}(\vec{r}, t), \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}', t)\} \\ = \frac{1}{8}\{\nabla^2 - 4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \\ \{\psi_{k_\varsigma}(\vec{r}, t), \psi_{l_\varsigma}(\vec{r}', t)\} = 0, \{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}, t), \psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}', t)\} = 0\end{cases}$$

性质7.5.1.
$$\begin{cases}\Delta^*(x) = \Delta(x), \Delta(-x) = -\Delta(x), (\nabla^2 - \partial_t^2)\Delta(x) = 0 \\ \partial_t\Delta(x)|_{t=0} = -\delta^3(\vec{r}), \partial_k\partial_t\Delta(x)|_{t=0} = \partial_t\partial_k\Delta(x)|_{t=0} = -\partial_k\delta^3(\vec{r}) \\ \partial_k\Delta(x)|_{t=0} = 0, \partial_k\partial_l\Delta(x)|_{t=0} = 0, \partial_t^2\Delta(x)|_{t=0} = 0\end{cases}$$

证明：$\{\psi_{k_\varsigma}(\vec{r}, t), \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}', t)\} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\Delta[(x - x')]|_{t=t'}$
$= C^1_3\frac{-i}{\sqrt{2}}\Gamma^{ij\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_i\partial_j\partial_\pi\Delta[(x - x')]|_{t=t'} + \frac{-i}{\sqrt{2}}\Gamma^{\pi\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_\pi\partial_\pi\partial_\pi\Delta[(x - x')]|_{t=t'}$
$= \frac{1}{8}\{\nabla^2 - 4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$ □

推论7.5.2.
$$\begin{cases}\{\psi_{k_\varsigma}(\vec{r}, t), \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}', t)\} \\ = \frac{1}{8}\{\nabla^2 - 4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \\ \{\psi_{k_\varsigma}(\vec{r}, t), \psi_{l_\varsigma}(\vec{r}', t)\} = 0, \{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}, t), \psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}', t)\} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\{a_\sigma(\vec{p}, -\frac{3}{2}\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}', -\frac{3}{2}\varsigma)\} = \delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \\ \{a_\sigma(\vec{p}, -\frac{3}{2}\varsigma), a_{\sigma'}(\vec{p}', -\frac{3}{2}\varsigma)\} = 0 \\ \{a^+_\sigma(\vec{p}, -\frac{3}{2}\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}', -\frac{3}{2}\varsigma)] = 0\end{cases}$$

证明：$\{a_1(\vec{p}, -\frac{3}{2}\varsigma), a^+_1(\vec{p}', -\frac{3}{2}\varsigma)\}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{p}||\vec{p}'|}\int\{\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{3}{2}\varsigma)\Psi_{k_\varsigma}(\vec{r}, t)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)}, \lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}', -\frac{3}{2}\varsigma)\Psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}', t)e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}' - E't)}\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{p}||\vec{p}'|}\int \lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}', -\frac{3}{2}\varsigma)[\Psi_{k_\varsigma}(\vec{r}, t), \Psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}', t)]e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)}e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}' - E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{p}||\vec{p}'|}\int \lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}', -\frac{3}{2}\varsigma)\frac{1}{8}\{\nabla^2 - 4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)}e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}' - E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{p}||\vec{p}'|}\int \lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}', -\frac{3}{2}\varsigma)\frac{-1}{8}\{\vec{p}^2 - 4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]^2\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)}e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r} - E't)}d^3\vec{r}$
$= \frac{1}{|\vec{p}||\vec{p}'|}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}', -\frac{3}{2}\varsigma)\frac{-1}{8}\{\vec{p}^2 - 4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]^2\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$
$= \lambda^+(\hat{p}, -\frac{3}{2}\varsigma)\frac{-1}{8}\{\vec{p}^2 - 4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]^2\}\lambda(\hat{p}, -\frac{3}{2}\varsigma)\delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$
$= \lambda^+(\hat{p}, -\frac{3}{2}\varsigma)\lambda(\hat{p}, -\frac{3}{2}\varsigma)\delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$
$= \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$ □

证明：$\{a_2^+(\vec{p},-\frac{3}{2}\varsigma),a_2(\vec{p}',-\frac{3}{2}\varsigma)\}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{p}||\vec{p}'|}\int\{\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\Psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)},\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\frac{3}{2}\varsigma)\Psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{p}||\vec{p}'|}\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\frac{3}{2}\varsigma)[\Psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{p}||\vec{p}'|}\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\frac{3}{2}\varsigma)\frac{1}{8}\{\nabla^2-4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{p}||\vec{p}'|}\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\frac{3}{2}\varsigma)\frac{-1}{8}\{\vec{p}^2-4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]^2\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}d^3\vec{r}$
$= \frac{1}{|\vec{p}||\vec{p}'|}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-\frac{3}{2}\varsigma)\frac{-1}{8}\{\vec{p}^2-4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]^2\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= \lambda^+(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\frac{-1}{8}\{\vec{p}^2-4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\vec{p}]^2\}\lambda(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= \lambda^+(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\lambda(\hat{p},-\frac{3}{2}\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= \delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$ □

7.6 引力微子场的对易函数、因果函数和费曼传播子

推论7.6.1.

$$\begin{cases}\Delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}(\frac{3}{2};x):=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\Delta(x)\\ \Delta^{(+)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(\frac{3}{2};x):=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta^{(-)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(\frac{3}{2};x):=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{(l)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(\frac{3}{2};x):=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\Delta^{(l)}(x)\end{cases}$$

推论7.6.2.

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(\frac{3}{2};x):=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\Delta^{(c)}(x)+\frac{i}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{2}i^nC_3^n\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{3-n}}(\frac{3}{2})\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{3-n}\partial_t^{3-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\\ \Delta^{ret}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(\frac{3}{2};x):=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\Delta^{ret}(x)+\frac{i}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{2}i^nC_3^n\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{3-n}}(\frac{3}{2})\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{3-n}\partial_t^{3-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\\ \Delta^{adv}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(\frac{3}{2};x):=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\Delta^{adv}(x)+\frac{i}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{2}i^nC_3^n\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{3-n}}(\frac{3}{2})\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{3-n}\partial_t^{3-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\\ \Delta_{Fk_\varsigma k'_\varsigma}(\frac{3}{2};x):=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\Delta_F(x)+\frac{-1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{2}i^nC_3^n\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{3-n}}(\frac{3}{2})\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{3-n}\partial_t^{3-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\\ =i\Delta^{(c)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(\frac{3}{2};x),\Delta_{Fk_\varsigma k'_\varsigma}(\frac{3}{2};p)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma^{abc}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_ap_bp_c}{p^2-i\varepsilon}+\cdots\end{cases}$$

推论7.6.3.

$$\begin{cases}[s\partial_a+iS_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta(\frac{3}{2};x)=0\\ [s\partial_a+iS_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{(+)}(\frac{3}{2};x)=0\\ [s\partial_a+iS_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{(-)}(\frac{3}{2};x)=0\\ [s\partial_a+iS_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{(l)}(\frac{3}{2};x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}[s\partial_a+iS_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{(c)}(\frac{3}{2};x)=-\varsigma[\sigma(\frac{3}{2}),i\frac{3}{2}\varsigma]_a\delta(t)\Delta(\frac{3}{2};x)|_{t=0}\\ [s\partial_a+iS_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{ret}(\frac{3}{2};x)=-\varsigma[\sigma(\frac{3}{2}),i\frac{3}{2}\varsigma]_a\delta(t)\Delta(\frac{3}{2};x)|_{t=0}\\ [s\partial_a+iS_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta^{adv}(\frac{3}{2};x)=-\varsigma[\sigma(\frac{3}{2}),i\frac{3}{2}\varsigma]_a\delta(t)\Delta(\frac{3}{2};x)|_{t=0}\\ [s\partial_a+iS_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)\partial^b]\Delta_F(\frac{3}{2};x)=-i\varsigma[\sigma(\frac{3}{2}),i\frac{3}{2}\varsigma]_a\delta(t)\Delta(\frac{3}{2};x)|_{t=0}\end{cases}$$

7.7 引力微子的量子方程

推论7.7.1. $[\frac{3}{2}\partial_a+iS_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)\partial^b]\psi(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\dot{\psi}(\vec{r},t)=-i[\psi(\vec{r},t),H]\\ \nabla\psi(\vec{r},t)=i[\psi(\vec{r},t),\vec{P}]\\ \partial_a\psi(\vec{r},t)=i[\psi(\vec{r},t),P_a]\end{cases}$

定理7.7.1.

$$\begin{cases}\{\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\frac{1}{8}\{\nabla^2-4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ \{\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0,\{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=0\\ H=\frac{-i\varsigma}{3/2}\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla}{\nabla^2}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r},\vec{P}=\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{-i\nabla}{-\nabla^2}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases}[\psi(\vec{r},t),H]=\frac{-i\varsigma}{3/2}\frac{1}{8}\{\nabla^2-4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}\frac{\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla}{\nabla^2}\psi(\vec{r},t)\\ [\psi(\vec{r},t),\vec{P}]=\frac{1}{8}\{\nabla^2-4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}\frac{-i\nabla}{-\nabla^2}\psi(\vec{r},t)\end{cases}$$

证明： $[\psi(\vec{r},t),H]$
$= \frac{-i\varsigma}{3/2}\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\int d^3\vec{r}[\psi_{j_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\frac{\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla'}{\nabla'^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r}',t)]$
$= \frac{-i\varsigma}{3/2}\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\int d^3\vec{r}[\psi_{j_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]\frac{\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla'}{\nabla'^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r}',t)$
$= \frac{-i\varsigma}{3/2}\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\int d^3\vec{r}\frac{1}{8}\{\nabla^2-4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}_{j_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\frac{\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla'}{\nabla'^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r}',t)$
$= \frac{-i\varsigma}{3/2}\frac{1}{8}\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\{\nabla^2-4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\frac{\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla}{\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)$
$= \frac{-i\varsigma}{3/2}\frac{1}{8}\{\nabla^2-4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}\frac{\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla}{\nabla^2}\psi(\vec{r},t)$ □

证明： $[\psi(\vec{r},t),P]$
$= \delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\int d^3\vec{r}[\psi_{j_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\frac{-i\nabla}{-\nabla'^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r}',t)]$
$= \delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\int d^3\vec{r}[\psi_{j_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]\frac{-i\nabla}{-\nabla'^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r}',t)$
$= \delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\int d^3\vec{r}\frac{1}{8}\{\nabla^2-4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}_{j_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\frac{-i\nabla}{-\nabla'^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r}',t)$
$= \frac{1}{8}\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\{\nabla^2-4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\frac{-i\nabla}{-\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)$
$= \frac{1}{8}\{\nabla^2-4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}\frac{-i\nabla}{-\nabla^2}\psi(\vec{r},t)$ □

推论7.7.2.
$$\begin{cases}\dot\psi(\vec{r},t)=-i[\psi(\vec{r},t),H]\\ \nabla\psi(\vec{r},t)=i[\psi(\vec{r},t),\vec{P}]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dot\psi(\vec{r},t)=\frac{-\varsigma}{12}\{\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla-\frac{4}{\nabla^2}[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^3\}\psi(\vec{r},t)\\ \nabla\psi(\vec{r},t)=-\frac{1}{8}\{1-\frac{4}{\nabla^2}[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}\nabla\psi(\vec{r},t)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^a\partial_a\psi(\vec{r},t)=0\\ [\sigma(\frac{3}{2}),-\frac{3}{2}i\varsigma]^a\partial_a\psi(\vec{r},t)=0\end{cases}$$

推论7.7.3.
$$\begin{cases}(\frac{3}{2})^2\nabla\psi=\frac{3}{2}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla\sigma(\frac{3}{2})\psi-\frac{1}{2}\sigma(\frac{3}{2})[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]\psi\\ [\sigma(\frac{3}{2}),-\frac{3}{2}i\varsigma]^a\partial_a\psi(\vec{r},t)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\partial^a\partial_a\psi(\vec{r},t)=0\\ [\sigma(2),-\frac{3}{2}i\varsigma]^a\partial_a\psi(\vec{r},t)=0\end{cases}$$

推论7.7.4. $\frac{6}{2}\begin{bmatrix}3\partial_z & \sqrt{3}\partial_- & 0 & 0\\ \sqrt{3}\partial_+ & \partial_z & 2\partial_- & 0\\ 0 & 2\partial_+ & -\partial_z & \sqrt{3}\partial_-\\ 0 & 0 & \sqrt{3}\partial_+ & -3\partial_z\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}=\frac{6}{4}\begin{bmatrix}9\partial_z & \sqrt{3}\partial_- & 0 & 0\\ 3\sqrt{3}\partial_+ & \partial_z & -2\partial_- & 0\\ 0 & 2\partial_+ & \partial_z & -3\sqrt{3}\partial_-\\ 0 & 0 & -\sqrt{3}\partial_+ & 9\partial_z\end{bmatrix}$

推论7.7.5. $-\frac{2}{2}\begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\partial_z & \sqrt{3}\partial_- & 0 & 0\\ \sqrt{3}\partial_+ & \partial_z & 2\partial_- & 0\\ 0 & 2\partial_+ & -\partial_z & \sqrt{3}\partial_-\\ 0 & 0 & \sqrt{3}\partial_+ & -3\partial_z\end{bmatrix}=-\frac{2}{4}\begin{bmatrix}9\partial_z & 3\sqrt{3}\partial_- & 0 & 0\\ \sqrt{3}\partial_+ & \partial_z & 2\partial_- & 0\\ 0 & -2\partial_+ & \partial_z & -\sqrt{3}\partial_-\\ 0 & 0 & -3\sqrt{3}\partial_+ & 9\partial_z\end{bmatrix}$

$$\sigma(\tfrac{3}{2})=(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&\sqrt{3}&0&0\\ \sqrt{3}&0&2&0\\0&2&0&\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{3}&0\end{bmatrix},\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0&-\sqrt{3}&0&0\\ \sqrt{3}&0&-2&0\\0&2&0&-\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{3}&0\end{bmatrix},\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix})\qquad(24.3)$$

7.8 有关引理

引理7.8.1. $\nabla^2(r_i\partial_j-r_j\partial_i)=(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\nabla^2$

引理7.8.2. $[\sigma(s)\cdot\nabla](r_i\partial_j-r_j\partial_i)=(r_i\partial_j-r_j\partial_i)[\sigma(s)\cdot\nabla]+[\sigma_i(s)\partial_j-\sigma_j(s)\partial_i]$

引理7.8.3. $[\sigma(s)\cdot\nabla]^2(r_i\partial_j-r_j\partial_i)=(r_i\partial_j-r_j\partial_i)$

证明： $[\sigma(s)\cdot\nabla]^2(r_i\partial_j-r_j\partial_i)$
$=[\sigma(s)\cdot\nabla]\{(r_i\partial_j-r_j\partial_i)[\sigma(s)\cdot\nabla]+[\sigma_i(s)\partial_j-\sigma_j(s)\partial_i]\}$
$=(r_i\partial_j-r_j\partial_i)[\sigma(s)\cdot\nabla]^2+[\sigma_i(s)\partial_j-\sigma_j(s)\partial_i][\sigma(s)\cdot\nabla]+[\sigma(s)\cdot\nabla][\sigma_i(s)\partial_j-\sigma_j(s)\partial_i]$ □

推论7.8.1. $\frac{-i}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}(\frac{3}{2})\partial_a\partial_b\partial_c\Delta(x-x')|_{t=t'}=\frac{1}{8}\{\{\nabla^2-9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}\}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

推论7.8.2. $\frac{-i}{\sqrt{2}}\Gamma^{abc}(\frac{3}{2})\partial_a\partial_b\partial_c\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}=\frac{1}{8}\{\nabla^2-9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2\}[-i\varsigma\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

7.9 引力微子场的彭加莱对称性

引理7.9.1.
$$\begin{cases} P_a=-i\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\partial_a\frac{\psi(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec r=\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\hat P_a\frac{\psi(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec r\\ L_{ab}=-i\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec r=\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\hat L_{ab}\frac{\psi(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec r\\ M_{ab}=\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}[-i(r_a\partial_b-r_b\partial_a)+\hat S_{ab}]\frac{\psi(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec r=\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\hat M_{ab}\frac{\psi(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec r\end{cases}$$

推论7.9.1.
$$\begin{cases}\{\frac{\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\}=\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat\nabla]^2-1\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r'),\hat\nabla:=\frac{-i\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}}\\ \{\frac{\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\}=0,\{\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\}=0\end{cases}$$

定理7.9.1.
$$\begin{cases}[L_{ab},L_{cd}]=-i(g_{ad}L_{bc}-g_{ac}L_{bd}+g_{bc}L_{ad}-g_{bd}L_{ac})\\ [L_{ab},P_c]=-i(g_{bc}P_a-g_{ac}P_b),[P_a,P_b]=0\end{cases}$$

证明: $[L_{ab},L_{cd}]$

$$=-\int d^3\vec r d^3\vec r'[\frac{\psi^+(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\psi(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}]$$
$$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r d^3\vec r'[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}]$$
$$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r d^3\vec r'$$
$$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\{(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\}(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}$$
$$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}},(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$$
$$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r d^3\vec r'$$
$$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat\nabla]^2-1\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}$$
$$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat\nabla']^2-1\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec r'-\vec r)(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$$
$$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r d^3\vec r'$$
$$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial'_b-r_b\partial'_a)\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat\nabla']^2-1\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}$$
$$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}(r'_c\partial_d-r'_d\partial_c)\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat\nabla]^2-1\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$$
$$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r$$
$$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat\nabla]^2-1\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}(r_c\partial_d-r_d\partial_c)\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}$$
$$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_c\partial_d-r_d\partial_c)\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat\nabla]^2-1\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$$
$$=\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}[-i(r_a\partial_b-r_b\partial_a),-i(r_c\partial_d-r_d\partial_c)]\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat\nabla]^2-1\}\frac{\psi(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec r$$
$$=\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}[\hat L_{ab},\hat L_{cd}]\frac{\psi(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec r$$
$$=-i(g_{ad}L_{bc}-g_{ac}L_{bd}+g_{bc}L_{ad}-g_{bd}L_{ac})$$
□

证明: $[L_{ab},P_c]$

$$=-\int d^3\vec r d^3\vec r'[\frac{\psi^+(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\partial'_c\frac{\psi(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}]$$
$$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r d^3\vec r'[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\partial'_c\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}]$$
$$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r d^3\vec r'$$
$$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\{(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\}\partial'_c\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}},\partial'_c\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$$
$$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r d^3\vec r'$$
$$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat\nabla]^2-1\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')\partial'_c\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}$$
$$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\partial'_c\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat\nabla']^2-1\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec r'-\vec r)(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$$
$$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r d^3\vec r'$$
$$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial'_b-r_b\partial'_a)\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat\nabla']^2-1\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')\partial'_c\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}$$
$$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\partial_c\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat\nabla]^2-1\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$$

$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]^2-1\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial_c\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}} - \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\partial_c\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]^2-1\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$
$= \int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}[-i(r_a\partial_b - r_b\partial_a), -i\partial'_c]\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]^2-1\}\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec{r}$
$= \int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}[\hat{L}_{ab},\hat{P}_c]\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec{r}$
$= -i(g_{bc}P_a - g_{ac}P_b)$ □

证明： $[P_a, P_b]$
$= -\int[\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\partial_a\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}, \frac{\psi^+(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\partial'_b\frac{\psi(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\partial_a\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}, \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\partial'_b\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\{\partial_a\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}, \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\}\partial'_b\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}} - \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}, \partial'_b\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\}\partial_a\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$
$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]^2-1\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_b\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}} - \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}']^2-1\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\partial'_b\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})\partial_a\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$
$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}']^2-1\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial'_a\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_b\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}} - \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]^2-1\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\partial_b\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial_a\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}$
$= -\int\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]^2-1\}^{k_\varsigma l'_\varsigma}\partial_a\partial_b\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}} - \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]^2-1\}^{k'_\varsigma l_\varsigma}\partial_b\partial_a\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}d^3\vec{r}$
$= -\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a)\frac{1}{8}\{9[\frac{2}{3}\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]^2-1\}\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec{r}$
$= -\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}(\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a)\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec{r}$
$= \int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}[\hat{P}_a,\hat{P}_b]\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec{r} = 0$ □

引理7.9.2. $[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]^2\sigma(\frac{3}{2})\psi = \{2[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]\hat{\nabla} + \frac{1}{4}\sigma(\frac{3}{2})\}\psi, S_{ab}(\frac{3}{2}) = i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{3}{2})$

引理7.9.3. $[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]^2 S_{ab}(\frac{3}{2})\psi = \{2[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\hat{\nabla}_{\alpha_\varsigma} + \frac{1}{4}S_{ab}(\frac{3}{2})\}\psi$

引理7.9.4. $\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{3}{2})[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]\hat{\nabla}_{\beta_\varsigma}\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec{r}? = \int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{3}{2})\sigma_{\beta_\varsigma}(\frac{3}{2})\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec{r}$

证明： $[S_{ab}(t), S_{cd}(t)]$
$= \int[\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}, \frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}S_{cdm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{\psi_{n_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \int\{\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\{S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}, \frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\}S_{cdm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{\psi_{n_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}$
$- \frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\{\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}, S_{cdm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{\psi_{n_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}\}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \int\{\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(\frac{3}{2},\varsigma)S_{cdm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{1}{8}\{-1+4\frac{[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla']^2}{\nabla'^2}\}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\frac{\psi_{n_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}$
$- \frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec{r}',t)}{\sqrt{-\nabla'^2}}S_{cdm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(\frac{3}{2},\varsigma)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{1}{8}\{-1+4\frac{[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2}{\nabla^2}\}_{n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \int\{\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{1}{8}\{-1+4\frac{[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2}{\nabla^2}\}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}S_{cdm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{\psi_{n_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}$
$- \frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}S_{cdm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{1}{8}\{-1+4\frac{[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2}{\nabla^2}\}_{n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}d^3\vec{r}$
$= \int\{\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}S_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{1}{8}\{-1+4\frac{[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2}{\nabla^2}\}S_{cd}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}} - \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}S_{cd}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{1}{8}\{-1+4\frac{[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla]^2}{\nabla^2}\}S_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}d^3\vec{r}$
$= \int\{\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}S_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{1}{8}\{-1+4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]^2\}S_{cd}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}} - \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}S_{cd}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{1}{8}\{-1+4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]^2\}S_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}d^3\vec{r}$
$= \int\{\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}S_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}\hat{\nabla}_{\alpha_\varsigma}\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}} - \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}S_{cd}(\frac{3}{2},\varsigma)[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\hat{\nabla}_{\alpha_\varsigma}\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}d^3\vec{r}$
$? = \int\{\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}S_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma)i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma cd}\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{3}{2})\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}} - \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}S_{cd}(\frac{3}{2},\varsigma)i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{3}{2})\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\}d^3\vec{r}$
$= \int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}[S_{ab}(\frac{3}{2},\varsigma), S_{cd}(\frac{3}{2},\varsigma)]\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec{r}$ □

8 自由无耦合引力子场协变量子化方案

8.1 引力子自旋算符方程及其平面波解

定理8.1.1. $[2\partial_a + iS_{ab}(2,\varsigma)\partial^b]\psi(x) = 0$

推论8.1.1. $$\begin{cases}\psi(\vec{r},t) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int|\vec{p}|^{3/2}\lambda(\hat{p},-2\varsigma)[a_1(\vec{p},-2\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-2\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ |\vec{p}|^{3/2}a_1(\vec{p},-2\varsigma)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda^+(\hat{p},-2\varsigma)\psi(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{i}{|\vec{p}|}\lambda^+(\hat{p},-2\varsigma)\dot{\psi}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}\\ |\vec{p}|^{3/2}a_2^+(\vec{p},-2\varsigma)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda^+(\hat{p},-2\varsigma)\psi(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{-i}{|\vec{p}|}\lambda^+(\hat{p},-2\varsigma)\dot{\psi}(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$$

定义8.1.1. 投影算子:$\hat{P}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2,\varsigma):=\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma),\hat{P}^2(2,\varsigma)=\hat{P}(2,\varsigma),\hat{P}^+(2,\varsigma)=\hat{P}(2,\varsigma)$

推论8.1.2. $H_2=\int|\vec{p}|[a_1^+(\vec{p},-2\varsigma)a_1(\vec{p},-2\varsigma)+a_2(\vec{p},-2\varsigma)a_2^+(\vec{p},-2\varsigma)]d^3\vec{p}=\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{1}{-\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

证明: $H_2=\int|\vec{p}|[a_1^+(\vec{p},-2\varsigma)a_1(\vec{p},-2\varsigma)+a_2(\vec{p},-2\varsigma)a_2^+(\vec{p},-2\varsigma)]d^3\vec{p}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{|\vec{p}|^2}[\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{ip\cdot x'}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}$
$+\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{-ip\cdot x'}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{|\vec{p}|^2}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{4|\vec{p}|^6}4|\vec{p}|^4\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_ap_bp_cp_d\frac{1}{|\vec{p}|^6}[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\{(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{1}{3}|\vec{p}|^4\{0+4\varsigma[\sigma(2)\cdot\hat{p}]-2[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^2-4\varsigma[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^3+2[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^4\}\frac{1}{|\vec{p}|^6}[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+$
$e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{1}{24}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\{\{-[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^2+[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^4\}\frac{1}{|\vec{p}|^2}[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{1}{12}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\{-[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^2+[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^4\}\frac{1}{|\vec{p}|^2}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{1}{12}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\{\frac{1}{|\vec{p}|^4}[\sigma(2)\cdot i\vec{p}]^2+\frac{1}{|\vec{p}|^6}[\sigma(2)\cdot i\vec{p}]^4\}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{1}{12}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\{\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]^2}{\nabla^4}-\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]^4}{\nabla^6}\}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{1}{12}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\{\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]^2}{\nabla^4}-\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]^4}{\nabla^6}\}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{1}{-\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

推论8.1.3. $P_2=\int\vec{p}[a_1^+(\vec{p},-2\varsigma)a_1(\vec{p},-2\varsigma)+a_2(\vec{p},-2\varsigma)a_2^+(\vec{p},-2\varsigma)]d^3\vec{p}=\frac{-\varsigma}{2}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{\sigma(2)}{-\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

证明: $P_2=\int\vec{p}[a_1^+(\vec{p},-2\varsigma)a_1(\vec{p},-2\varsigma)+a_2(\vec{p},-2\varsigma)a_2^+(\vec{p},-2\varsigma)]d^3\vec{p}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^2}[\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{ip\cdot x'}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}$
$+\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{-ip\cdot x'}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^2}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\hat{p}}{4|\vec{p}|^6}4|\vec{p}|^4\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_ap_bp_cp_d\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^6}[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\{(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{1}{3}|\vec{p}|^4\{0+4\varsigma[\sigma(2)\cdot\hat{p}]-2[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^2-4\varsigma[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^3+2[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^4\}\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^6}[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+$
$e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{1}{12}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\{\varsigma[\sigma(2)\cdot\hat{p}]-\varsigma[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^3\}\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^2}[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{\varsigma}{6}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\{[\sigma(2)\cdot\hat{p}]-[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^3\}\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^2}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{\varsigma}{6}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\{-[\sigma(2)\cdot i\vec{p}]\frac{i\vec{p}}{|\vec{p}|^4}-[\sigma(2)\cdot i\vec{p}]^3\frac{i\vec{p}}{|\vec{p}|^6}\}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{\varsigma}{6}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\{-[\sigma(2)\cdot\nabla]\frac{\nabla}{\nabla^4}+[\sigma(2)\cdot\nabla]^3\frac{\nabla}{\nabla^6}\}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$=\frac{\varsigma}{6}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\{-[\sigma(2)\cdot\nabla]\frac{\nabla}{\nabla^4}+[\sigma(2)\cdot\nabla]^3\frac{\nabla}{\nabla^6}\}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\frac{\varsigma}{2}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)[\sigma(2)\cdot\nabla]\frac{\nabla}{\nabla^4}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\frac{-\varsigma}{2}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{\sigma(2)}{-\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

推论8.1.4. $P_a=\int p_a[a_1^+(\vec{p},-2\varsigma)a_1(\vec{p},-2\varsigma)+a_2(\vec{p},-2\varsigma)a_2^+(\vec{p},-2\varsigma)]d^3\vec{p}=\frac{-\varsigma}{2}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{[\sigma(2),-i2\varsigma]_a}{-\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

推论8.1.5. $P_2=\int\vec{p}[a_1^+(\vec{p},-2\varsigma)a_1(\vec{p},-2\varsigma)+a_2(\vec{p},-2\varsigma)a_2^+(\vec{p},-2\varsigma)]d^3\vec{p}=\frac{\varsigma}{2}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)[\sigma(2)\cdot\nabla]\frac{\nabla}{\nabla^4}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

8.2 引力子场协变常数不变张量的性质

推论8.2.1.
$\Gamma^{\pi\pi\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2)=(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

$\Gamma^{i\pi\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2)=-i\varsigma(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{1}{2}\sigma^i(2)_{k_\varsigma k'_\varsigma}$
$\Gamma^{ij\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2)=-(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{1}{6}[\sigma^{\{i}(2)\sigma^{j\}}(2)-2\delta^{ij}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}=-(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{1}{3}\frac{1}{2!}[\sigma^{\{i}(2)\sigma^{j\}}(2)-\delta^{\{ij\}}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}$
$\Gamma^{ijk\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2)=(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{i\varsigma}{6}\{\sigma^{\{j}(2)[\sigma^i(2)]\sigma^{k\}}(2)-[\sigma^i(2)\delta^{jk}+2\delta^{i\{j}\sigma^{k\}}(2)]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}$
$=(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{i\varsigma}{3}\frac{1}{3!}\{\sigma^{\{i}(2)\sigma^j(2)\sigma^{k\}}(2)-\frac{5}{2}\sigma^{\{i}(2)\delta^{jk\}}\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}$
$\Gamma^{ijkl}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2)=(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{2}{3}\frac{1}{4!}[\sigma^{\{i}(2)\sigma^j(2)\sigma^k(2)\sigma^{l\}}(2)-4\sigma^{\{i}(2)\sigma^j(2)\delta^{kl\}}+\frac{3}{2}\delta^{\{ij}\delta^{kl\}}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

引理8.2.1. $\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_ap_bp_cp_d=4|\vec{p}|^4\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)$

证明: $\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_ap_bp_cp_d$
$=C_4^4\Gamma^{\pi\pi\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1)p_\pi^4+C_4^3\Gamma^{i\pi\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1)p_ip_\pi^3+C_4^2\Gamma^{ij\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1)p_ip_jp_\pi^2+C_4^1\Gamma^{ijk\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1)p_ip_jp_kp_\pi+C_4^0\Gamma^{ijkl}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(1)p_ip_jp_kp_l$
$=(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{1}{3}\{3|\vec{p}|^4-6\varsigma|\vec{p}|^3[\sigma(2)\cdot\vec{p}]+6|\vec{p}|^2\{[\sigma(2)\cdot\vec{p}]^2-|\vec{p}|^2\}-4\varsigma|\vec{p}|\{[\sigma(2)\cdot\vec{p}]^3-\frac{5}{2}|\vec{p}|^2[\sigma(2)\cdot\vec{p}]\}$
$+2[[\sigma(2)\cdot\vec{p}]^4-4|\vec{p}|^2[\sigma(2)\cdot\vec{p}]^2+\frac{3}{2}|\vec{p}|^4]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}$
$=\{(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{1}{3}|\vec{p}|^4\{0+4\varsigma[\sigma(2)\cdot\hat{p}]-2[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^2-4\varsigma[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^3+2[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^4\}\sum_{h=2}^{-2}\lambda(\hat{p},h)\lambda^+(\hat{p},h)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}$
$=4|\vec{p}|^4\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)$ □

推论8.2.2. 投影算子:$\hat{P}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2,\varsigma)=\frac{1}{4}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\hat{p}_d\to\frac{1}{4}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\hat{\partial}_d$

8.3 引力子场数学上一般的协变对易规则

定理8.3.1.

$$\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-2\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-2\varsigma)]_\pm\\=\delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},-2\varsigma),a_{\sigma'}(\vec{p}',-2\varsigma)]_\pm=0\\ [a^+_\sigma(\vec{p},-2\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-2\varsigma)]_\pm=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\Psi_{k_\varsigma}(x),\Psi^+_{k'_\varsigma}(x')]_\pm\\=\frac{i}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d[\delta_1\Delta(x-x')-(\delta_1\pm\delta_2)\Delta^{(-)}(x-x')]\\ [\Psi_{k_\varsigma}(x),\Psi_{\beta_\varsigma}(x')]_\pm=0\\ [\Psi^+_{k'_\varsigma}(x),\Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]_\pm=0\end{cases}$$

证明: $[\Psi^{(+)}_{k_\varsigma}(x),\Psi^{(+)+}_{k'_\varsigma}(x')]_\pm$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\vec{p}',-2\varsigma)|\vec{p}|^{3/2}|\vec{p}'|^{3/2}[a_1(\vec{p},-2\varsigma),a_1^+(\vec{p}',-2\varsigma)]_\pm e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\vec{p}',-2\varsigma)|\vec{p}|^3\delta_1\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\delta_1|\vec{p}|^3e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$=\frac{\delta_1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\frac{1}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_ap_bp_cp_de^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$=\frac{\delta_1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\frac{1}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_de^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$=\frac{i}{2}\delta_1\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta^{(+)}(x-x')$ □

证明: $[\Psi^{(-)}_{k_\varsigma}(x),\Psi^{(-)+}_{k'_\varsigma}(x')]_\pm$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\vec{p}',-2\varsigma)|\vec{p}|^{3/2}|\vec{p}'|^{3/2}[a_2^+(\vec{p},-2\varsigma),a_2(\vec{p}',-2\varsigma)]_\pm e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$=\pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\vec{p}',-2\varsigma)|\vec{p}|^3\delta_2\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$=\pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\delta_2|\vec{p}|^3e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$=\pm\frac{\delta_2}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\frac{1}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_ap_bp_cp_de^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$=\pm\frac{\delta_2}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\frac{1}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_de^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$
$=-\pm\frac{i}{2}\delta_1\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta^{(-)}(x-x')$ □

证明: $[\Psi_{k_\varsigma}(x),\Psi^+_{k'_\varsigma}(x')]_\pm$
$=[\Psi^{(+)}_{k_\varsigma}(x),\Psi^{(+)+}_{k'_\varsigma}(x')]_\pm+[\Psi^{(-)}_{k_\varsigma}(x),\Psi^{(-)+}_{k'_\varsigma}(x')]_\pm$
$=\frac{i}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d[\delta_1\Delta^{(+)}(x-x')-\pm\delta_2\Delta^{(-)}(x-x')]$
$=\frac{i}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d[(\delta_1\pm\delta_2)\Delta^{(+)}(x-x')-\pm\delta_2\Delta(x-x')]$
$=\frac{i}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d[\delta_1\Delta(x-x')-(\delta_1\pm\delta_2)\Delta^{(-)}(x-x')]$ □

从上式可知，只有$\delta_1 \pm \delta_2 = 0$时，才满足微观因果性，同时只有$\delta_1, \delta_2 \geq 0$时，才满足几率非负性。所以数学上八种协变对易或反对易方案中，物理上合理的只有一种：即$\delta_1 = \delta_2 = 1$，且满足对易关系。其实还有两种，即$\delta_1 = \delta_2 = 0$，且满足对易或反对易关系，就是经典情形。

8.4 引力子场物理的协变对易规则

从上节可知，有物理意义的对易规则如下：（为了相互印证，重新作了证明）

定理8.4.1.
$$\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-2\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-2\varsigma)] = \delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \\ [a_\sigma(\vec{p},-2\varsigma), a_{\sigma'}(\vec{p}',-2\varsigma)] = 0 \\ [a^+_\sigma(\vec{p},-2\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-2\varsigma)] = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x), \psi^+_{k'_\varsigma}(x')] = \frac{i}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta(x-x') \\ [\psi_{k_\varsigma}(x), \psi_{l_\varsigma}(x')] = 0 \\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(x), \psi^+_{l'_\varsigma}(x')] = 0\end{cases}$$

证明：$\{\psi_{k_\varsigma}(x), \psi^+_{k'_\varsigma}(x')\}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)|\vec{p}|^{3/2}|\vec{p}'|^{3/2}$
$\{[a_1(\vec{p},-2\varsigma), a^+_1(\vec{p}',-2\varsigma)]e^{ip\cdot(x-x')} + [a^+_2(\vec{p},-2\varsigma), a_2(\vec{p}',-2\varsigma)]e^{-ip\cdot(x-x')}\}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int |\vec{p}|^3\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)[\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{ip\cdot(x-x')} - \delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int |\vec{p}|^3\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)[e^{ip\cdot(x-x')} - e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{2|\vec{p}|}\frac{1}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_ap_bp_cp_d[e^{ip\cdot(x-x')} - e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{2|\vec{p}|}\frac{1}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d[e^{ip\cdot(x-x')} - e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= \frac{i}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{2|\vec{p}|}[e^{ip\cdot(x-x')} - e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= \frac{i}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta(x-x')$ □

8.5 引力子场的等时对易规则

推论8.5.1.
$$\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x), \psi^+_{k'_\varsigma}(x')] = \frac{i}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta(x-x') \\ [\psi_{k_\varsigma}(x), \psi_{l_\varsigma}(x')] = 0 \\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(x), \psi^+_{l'_\varsigma}(x')] = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)] \\ = \frac{1}{6}i\varsigma\{[\sigma(2)\cdot\nabla]\nabla^2 - [\sigma(2)\cdot\nabla]^3]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \\ [\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t)] = 0, [\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)] = 0\end{cases}$$

证明：$[\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)] = \frac{i}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta(x-x')|_{t=t'}$
$= C^1_4\frac{i}{2}\Gamma^{ijk\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_i\partial_j\partial_k\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'} + C^3_4\frac{i}{2}\Gamma^{i\pi\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_i\partial_\pi\partial_\pi\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}$
$= \frac{1}{6}i\varsigma\{[\sigma(2)\cdot\nabla]\nabla^2 - [\sigma(2)\cdot\nabla]^3]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$ □

推论8.5.2.
$$\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)] \\ = \frac{1}{6}i\varsigma\{[\sigma(2)\cdot\nabla]\nabla^2 - [\sigma(2)\cdot\nabla]^3]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \\ [\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t)] = 0, [\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)] = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-2\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-2\varsigma)] = \varsigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \\ [a_\sigma(\vec{p},-2\varsigma), a_{\sigma'}(\vec{p}',-2\varsigma)] = 0 \\ [a^+_\sigma(\vec{p},-2\varsigma), a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-2\varsigma)] = 0\end{cases}$$

证明：$[a_1(\vec{p},-2\varsigma), a^+_1(\vec{p}',-2\varsigma)]$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{p}|^{3/2}|\vec{p}'|^{3/2}}\int[\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\Psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}, \lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-2\varsigma)\Psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{p}|^{3/2}|\vec{p}'|^{3/2}}\int \lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-2\varsigma)[\Psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \Psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{p}|^{3/2}|\vec{p}'|^{3/2}}$
$\int \lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-2\varsigma)\frac{1}{6}i\varsigma\{[\sigma(2)\cdot\nabla]\nabla^2 - [\sigma(2)\cdot\nabla]^3]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{p}|^{3/2}|\vec{p}'|^{3/2}}\int \lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-2\varsigma)\frac{1}{6}\{[\sigma(2)\cdot\vec{p}]\vec{p}^2 - [\sigma(2)\cdot\vec{p}]^3]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}d^3\vec{r}$
$= \varsigma\frac{1}{|\vec{p}|^{3/2}|\vec{p}'|^{3/2}}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-2\varsigma)\frac{1}{6}\{[\sigma(2)\cdot\vec{p}]\vec{p}^2 - [\sigma(2)\cdot\vec{p}]^3]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= \varsigma\lambda^+(\hat{p},-2\varsigma)\frac{1}{6}\{[\sigma(2)\cdot\hat{p}] - [\sigma(2)\cdot\hat{p}]^3]\}\lambda(\hat{p},-2\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= \lambda^+(\hat{p},-2\varsigma)\lambda(\hat{p},-2\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= \delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$ □

证明：$[a_2^+(\vec{p},-2\varsigma),a_2(\vec{p}',-2\varsigma)]$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{p}|^{3/2}|\vec{p}'|^{3/2}}\int[\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\Psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)},\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-2\varsigma)\Psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{p}|^{3/2}|\vec{p}'|^{3/2}}\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-2\varsigma)[\Psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{p}|^{3/2}|\vec{p}'|^{3/2}}$
$\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-2\varsigma)\frac{1}{6}i\varsigma\{[\sigma(2)\cdot\nabla]\nabla^2-[\sigma(2)\cdot\nabla]^3]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \varsigma\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{p}|^{3/2}|\vec{p}'|^{3/2}}\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-2\varsigma)\frac{-1}{6}\{[\sigma(2)\cdot\vec{p}]\vec{p}^2-[\sigma(2)\cdot\vec{p}]^3]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}d^3\vec{r}$
$= \varsigma\frac{1}{|\vec{p}|^{3/2}|\vec{p}'|^{3/2}}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-2\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-2\varsigma)\frac{-1}{6}\{[\sigma(2)\cdot\vec{p}]\vec{p}^2-[\sigma(2)\cdot\vec{p}]^3]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= \varsigma\lambda^+(\hat{p},-2\varsigma)\frac{-1}{6}\{[\sigma(2)\cdot\hat{p}]-[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^3]\}\lambda(\hat{p},-2\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= -\lambda^+(\hat{p},-2\varsigma)\lambda(\hat{p},-2\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$
$= -\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$ □

8.6 引力子场对易规则小结

以上几个小节的证明正好形成一个逻辑闭环，故有如下性质：

推论8.6.1.

$$\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-2\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-2\varsigma)]=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},-2\varsigma),a_{\sigma'}(\vec{p}',-2\varsigma)]=0\\ [a^+_\sigma(\vec{p},-2\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-2\varsigma)]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p}),a^+_{\sigma'}(\vec{p}')]=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p}),a_{\sigma'}(\vec{p}')]=0\\ [a^+_\sigma(\vec{p}),a^+_{\sigma'}(\vec{p}')]=0\end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

推论8.6.2.

$$\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta(x-x')\\ [\psi_{k_\varsigma}(x),\psi_{l_\varsigma}(x')]=0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(x),\psi^+_{l'_\varsigma}(x')]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]\\ =\frac{1}{6}i\varsigma\{[\sigma(2)\cdot\nabla]\nabla^2-[\sigma(2)\cdot\nabla]^3]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t)]=0,[\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)]=0\end{cases}$$

8.7 引力子场的对易函数、因果函数和费曼传播子

推论8.7.1.

$$\begin{cases}\Delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2;x):=\frac{1}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta(x)\\ \Delta^{(+)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2;x):=\frac{1}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta^{(-)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2;x):=\frac{1}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{(l)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2;x):=\frac{1}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta^{(l)}(x)\end{cases}$$

推论8.7.2.

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2;x):=\frac{1}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta^{(c)}(x)-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{3}i^nC_4^n\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{4-n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{4-n}\partial_t^{4-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\\ \Delta^{ret}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2;x):=\frac{1}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta^{ret}(x)-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{3}i^nC_4^n\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{4-n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{4-n}\partial_t^{4-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\\ \Delta^{adv}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2;x):=\frac{1}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta^{adv}(x)-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{3}i^nC_4^n\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{4-n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{4-n}\partial_t^{4-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\\ \Delta_{Fk_\varsigma k'_\varsigma}(2;x):=\frac{1}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta_F(x)-\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{3}i^nC_4^n\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{4-n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{4-n}\partial_t^{4-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\\ =i\Delta^{(c)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2;x),\Delta_{Fk_\varsigma k'_\varsigma}(2;p)=\frac{-i}{2}\frac{\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}p_ap_bp_cp_d}{p^2-i\varepsilon}+\cdots\end{cases}$$

推论8.7.3.

$$\begin{cases}[s\partial_a+iS_{ab}(2,\varsigma)\partial^b]\Delta(2;x)=0\\ [s\partial_a+iS_{ab}(2,\varsigma)\partial^b]\Delta^{(+)}(2;x)=0\\ [s\partial_a+iS_{ab}(2,\varsigma)\partial^b]\Delta^{(-)}(2;x)=0\\ [s\partial_a+iS_{ab}(2,\varsigma)\partial^b]\Delta^{(l)}(2;x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}[s\partial_a+iS_{ab}(2,\varsigma)\partial^b]\Delta^{(c)}(2;x)=-\varsigma[\sigma(2),i2\varsigma]_a\delta(t)\Delta(2;x)|_{t=0}\\ [s\partial_a+iS_{ab}(2,\varsigma)\partial^b]\Delta^{ret}(2;x)=-\varsigma[\sigma(2),i2\varsigma]_a\delta(t)\Delta(2;x)|_{t=0}\\ [s\partial_a+iS_{ab}(2,\varsigma)\partial^b]\Delta^{adv}(2;x)=-\varsigma[\sigma(2),i2\varsigma]_a\delta(t)\Delta(2;x)|_{t=0}\\ [s\partial_a+iS_{ab}(2,\varsigma)\partial^b]\Delta_F(2;x)=-i\varsigma[\sigma(2),i2\varsigma]_a\delta(t)\Delta(2;x)|_{t=0}\end{cases}$$

8.8 引力子场的量子方程

定理8.8.1.
$H=\frac{1}{2}\int\{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r,t),\Gamma(\nabla)\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t)\}d^3\vec r$

定理8.8.2. $[\psi_{j_\varsigma}(\vec r,t),\int d^3\vec r'\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)\Gamma(\nabla')^{k'_\varsigma k_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(\vec r',t)]=\frac{1}{2}[\psi_{j_\varsigma}(\vec r,t),\int d^3\vec r'\{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t),\Gamma(\nabla')^{k'_\varsigma k_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(\vec r',t)\}]$

证明： $\int d^3\vec r'[\psi_{j_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)\Gamma(\nabla')^{k'_\varsigma k_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(\vec r',t)]$
$=\int d^3\vec r'[\psi_{j_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)]\Gamma(\nabla')^{k'_\varsigma k_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(\vec r',t)]$
$=\int d^3\vec r'\Gamma(\nabla')^{k'_\varsigma k_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(\vec r',t)[\psi_{j_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)]$
$=\int d^3\vec r'[\psi_{j_\varsigma}(\vec r,t),\Gamma(\nabla')^{k'_\varsigma k_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(\vec r',t)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)]$ □

8.9 对易和反对易公式

推论8.9.1. $\begin{cases}[A,BC]=[A,B]C+B[A,C],[A,CB]=[A,C]B+C[A,B]\\ [A,BC]=\{A,B\}C-B\{A,C\},[A,CB]=\{A,C\}B-C\{A,B\}\end{cases}$

推论8.9.2. $\begin{cases}[A,\{B,C\}]=\{[A,B],C\}+\{B,[A,C]\}\\ [A,[B,C]]=\{\{A,B\},C\}-\{B,\{A,C\}\}\end{cases}$

定理8.9.1.

$$\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)]=\frac{1}{6}i\varsigma\{[\sigma(2)\cdot\nabla]\nabla^2-[\sigma(2)\cdot\nabla]^3]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')\\ [\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t),\psi_{l_\varsigma}(\vec r',t)]=0,[\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{l'_\varsigma}(\vec r',t)]=0\\ H=\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r,t)\frac{[\frac{1}{2}\sigma(2)\cdot\nabla]^2}{-\nabla^4}\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t)d^3\vec r|=\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r,t)\frac{1}{-\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t)d^3\vec r,\vec P=\frac{\varsigma}{2}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r,t)[\sigma(2)\cdot\nabla]\frac{\nabla}{\nabla^4}\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t)d^3\vec r\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}[\psi(\vec r,t),H]=\frac{i}{6}\varsigma\{-[\sigma(2)\cdot\nabla]+\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^3\}\psi(\vec r,t)\\ [\psi(\vec r,t),\vec P]=\frac{i}{12}\{\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]^2}{\nabla^2}-\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]^4}{\nabla^4}]\}\nabla\psi(\vec r,t)\end{cases}$$

证明： $[\psi(\vec r,t),H]$
$=\int d^3\vec r[\psi_{j_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)\{\frac{[\frac{1}{2}\sigma(2)\cdot\nabla']^2}{-\nabla'^4}\}^{k'_\varsigma k_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(\vec r',t)]$
$=\int d^3\vec r[\psi_{j_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)]\{\frac{[\frac{1}{2}\sigma(2)\cdot\nabla']^2}{-\nabla'^4}\}^{k'_\varsigma k_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(\vec r',t)$
$=\int d^3\vec r\frac{1}{6}i\varsigma\{[\sigma(2)\cdot\nabla]\nabla^2-[\sigma(2)\cdot\nabla]^3\}_{j_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')\{\frac{[\frac{1}{2}\sigma(2)\cdot\nabla']^2}{-\nabla'^4}\}^{k'_\varsigma k_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(\vec r',t)$
$=\frac{i}{6}\varsigma\{[\sigma(2)\cdot\nabla]\nabla^2-[\sigma(2)\cdot\nabla]^3\}_{j_\varsigma k'_\varsigma}\{\frac{[\frac{1}{2}\sigma(2)\cdot\nabla]^2}{-\nabla^4}\}^{k'_\varsigma k_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t)$
$=\frac{i}{24}\varsigma\{-\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^3+\frac{1}{\nabla^4}[\sigma(2)\cdot\nabla]^5\}\psi(\vec r,t)$
$=\frac{i}{6}\varsigma\{-[\sigma(2)\cdot\nabla]+\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^3\}\psi(\vec r,t)$ □

证明： $[\psi(\vec r,t),H]$
$=\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\int d^3\vec r[\psi_{j_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)\frac{1}{-\nabla'^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec r',t)]$
$=\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\int d^3\vec r[\psi_{j_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)]\frac{1}{-\nabla'^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec r',t)$
$=\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\int d^3\vec r\frac{1}{6}i\varsigma\{[\sigma(2)\cdot\nabla]\nabla^2-[\sigma(2)\cdot\nabla]^3\}_{j_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')\frac{1}{-\nabla'^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec r',t)$
$=\frac{i}{6}\varsigma\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\{[\sigma(2)\cdot\nabla]\nabla^2-[\sigma(2)\cdot\nabla]^3\}_{j_\varsigma k'_\varsigma}\frac{1}{-\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t)$
$=\frac{i}{6}\varsigma\{-[\sigma(2)\cdot\nabla]+\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^3\}\psi(\vec r,t)$ □

证明: $[\psi(\vec{r},t),\vec{P}]$
$= \frac{\varsigma}{2}\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\int d^3\vec{r}'[\psi_{j_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)[\sigma(2)\cdot\nabla']\frac{\nabla'}{\nabla'^4}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r}',t)]$
$= \frac{\varsigma}{2}\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\int d^3\vec{r}'[\psi_{j_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)][\sigma(2)\cdot\nabla']\frac{\nabla'}{\nabla'^4}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r}',t)$
$= \frac{\varsigma}{2}\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\int d^3\vec{r}'\frac{-1}{6}i\varsigma\{[\sigma(2)\cdot\nabla']\nabla'^2-[\sigma(2)\cdot\nabla']^3]\}_{j_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')[\sigma(2)\cdot\nabla']\frac{\nabla'}{\nabla'^4}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)$
$= \frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\nabla]^2\nabla^2-[\sigma(2)\cdot\nabla]^4]\}\frac{\nabla}{\nabla^4}\psi(\vec{r},t)$
$= \frac{i}{12}\{\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]^2}{\nabla^2}-\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]^4}{\nabla^4}]\}\nabla\psi(\vec{r},t)$ □

推论8.9.3.
$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\{[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^1\sigma(s)\}=[\sigma^2(s)-1][\sigma(s)\cdot\hat{p}]\\ \sigma(s)\cdot\{[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s)\}=[\sigma^2(s)-3][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2+\sigma^2(s)\\ \sigma(s)\cdot\{[\sigma(s)\cdot\hat{p}]^3\sigma(s)\}\\ =[\sigma^2(s)-6][\sigma(s)\cdot\hat{p}]^3+[3\sigma^2(s)-1]\sigma(s)\cdot\hat{p}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sigma(2)\cdot\{[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^1\sigma(2)\}=5[\sigma(2)\cdot\hat{p}]\\ \sigma(2)\cdot\{[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^2\sigma(2)\}=3[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^2+6\\ \sigma(2)\cdot\{[\sigma(2)\cdot\hat{p}]^3\sigma(2)\}=17[\sigma(2)\cdot\hat{p}]\end{cases}$$

推论8.9.4.
$$\begin{cases}\nabla\psi(\vec{r},t)=i[\psi(\vec{r},t),P]\\ \dot{\psi}(\vec{r},t)=-i[\psi(\vec{r},t),H]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla\psi(\vec{r},t)=-\frac{1}{12}\{\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]^2}{\nabla^2}-\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]^4}{\nabla^4}\}\nabla\psi(\vec{r},t)\\ \dot{\psi}(\vec{r},t)=-\frac{1}{6}\varsigma\{[\sigma(2)\cdot\nabla]-\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]^3}{\nabla^2}\}\psi(\vec{r},t)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^a\partial_a\psi(\vec{r},t)=0\\ [\sigma(2),-2i\varsigma]^a\partial_a\psi(\vec{r},t)=0\end{cases}$$

推论8.9.5. $\begin{cases}\nabla\psi(\vec{r},t)=-\frac{1}{12}\{\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]^2}{\nabla^2}-\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]^4}{\nabla^4}\}\nabla\psi(\vec{r},t)\\ \psi(\vec{r},t)=\int\lambda(\hat{p},-2\varsigma)[a_1(\vec{p})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}+a_2^+(\vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]d^3\vec{p}\end{cases}$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla\psi(\vec{r},t)=-\frac{1}{12}\{[\sigma(2)\cdot\nabla]-\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^3]\}\sigma(2)\psi(\vec{r},t)\\ \psi(\vec{r},t)=\int\lambda(\hat{p},-2\varsigma)[a_1(\vec{p})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}+a_2^+(\vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]d^3\vec{p}\end{cases}$$

推论8.9.6. $[2\partial_a+iS_{ab}(2,\varsigma)\partial^b]\psi(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\partial^a\partial_a\psi(\vec{r},t)=0\\ [\sigma(2),-2i\varsigma]^a\partial_a\psi(\vec{r},t)=0\end{cases}$

推论8.9.7. $[2\partial_a+iS_{ab}(2,\varsigma)\partial^b]\psi(x)=0\Rightarrow\partial_a\psi(\vec{r},t)=i[\psi(\vec{r},t),P_a]$

8.10 引力子场的第二种量子方程

定理8.10.1.
$$\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]=\frac{1}{6}i\varsigma\{[\sigma(2)\cdot\nabla]\nabla^2-[\sigma(2)\cdot\nabla]^3]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t)]=0,[\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)]=0\\ H=\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{1}{-\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r},\vec{P}=\frac{-\varsigma}{2}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{\sigma(2)}{-\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}[\psi(\vec{r},t),H]=\frac{i}{6}\varsigma\{-[\sigma(2)\cdot\nabla]+\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^3\}\psi(\vec{r},t)\\ [\psi(\vec{r},t),\vec{P}]=\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\nabla]-\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^3]\}\sigma(2)\psi(\vec{r},t)\end{cases}$$

证明: $[\psi(\vec{r},t),P]$
$= \frac{\varsigma}{2}\sigma(2)^{k'_\varsigma k_\varsigma}\int d^3\vec{r}'[\psi_{j_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\frac{1}{\nabla'^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r}',t)]$
$= \frac{\varsigma}{2}\sigma(2)^{k'_\varsigma k_\varsigma}\int d^3\vec{r}'[\psi_{j_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]\frac{1}{\nabla'^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r}',t)$
$= \frac{\varsigma}{2}\sigma(2)^{k'_\varsigma k_\varsigma}\int d^3\vec{r}'\frac{-1}{6}i\varsigma\{[\sigma(2)\cdot\nabla']\nabla'^2-[\sigma(2)\cdot\nabla']^3]\}_{j_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\frac{1}{\nabla'^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)$
$= \frac{\varsigma}{2}\sigma(2)^{k'_\varsigma k_\varsigma}\frac{1}{6}i\varsigma\{[\sigma(2)\cdot\nabla]\nabla'^2-[\sigma(2)\cdot\nabla]^3]\}_{j_\varsigma k'_\varsigma}\frac{1}{\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)$
$= \frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\nabla]-\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^3]\}\sigma(2)\psi(\vec{r},t)$
$?=-i\nabla\psi(\vec{r},t)$ □

性质8.10.1. $i\sigma(s)\times\nabla=\sigma(s)\cdot\nabla\sigma(s)-\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla],\sigma(s)\cdot\nabla\sigma(s)=i\sigma(s)\times\nabla+\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]$

推论8.10.1. $\{[\sigma(2)\cdot\nabla]-\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]^3}{\nabla^2}\}\sigma(2)$
$=i\sigma(s)\times\nabla+\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]-\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]^2}{\nabla^2}\{i\sigma(s)\times\nabla+\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}$
$=i\sigma(s)\times\nabla+\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]-\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]}{\nabla^2}i\{i\sigma(s)\times\nabla+\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}\times\nabla+\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]}{\nabla^2}\{i\sigma(s)\times\nabla+\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\}[\sigma(s)\cdot\nabla]$

性质8.10.2.

$\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}\equiv-\frac{1}{12}\sigma_\alpha(2)\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^3]\}\sigma^\alpha(2),[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^5\equiv-4[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]+5[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^3,\hat{\nabla}:=\frac{-i\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}},\hat{\nabla}^2=1$

推论8.10.2.

$$\begin{cases}\dot{\psi}(\vec{r},t)=\frac{1}{6}\varsigma\{-[\sigma(2)\cdot\nabla]+\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^3\}\psi(\vec{r},t)\\ \nabla\psi(\vec{r},t)=-\frac{1}{12}\{[\sigma(2)\cdot\nabla]-\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^3]\}\sigma(2)\psi(\vec{r},t)\end{cases}\Rightarrow\partial_t^2\psi(\vec{r},t)=\nabla^2\psi(\vec{r},t)$$

证明:

$$\begin{cases}\dot{\psi}(\vec{r},t)=\frac{1}{6}\varsigma\{-[\sigma(2)\cdot\nabla]+\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^3\}\psi(\vec{r},t)\\ \nabla\psi(\vec{r},t)=-\frac{1}{12}\{[\sigma(2)\cdot\nabla]-\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^3]\}\sigma(2)\psi(\vec{r},t)\end{cases}$$

$\Rightarrow\partial_t^2\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{36}\{[\sigma(2)\cdot\nabla]^2-2\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^4+\frac{1}{\nabla^4}[\sigma(2)\cdot\nabla]^6\}\psi(\vec{r},t)$

$=\frac{1}{36}\{[\sigma(2)\cdot\nabla]^2-2\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^4-4[\sigma(2)\cdot\nabla]^2+5\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^4\}\psi(\vec{r},t)$

$=-\frac{1}{12}\{[\sigma(2)\cdot\nabla]^2-\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^4\}\psi(\vec{r},t)$

$=\nabla^2\psi(\vec{r},t)$ □

推论8.10.3.

$$\begin{cases}\dot{\psi}(\vec{r},t)=\frac{1}{6}\varsigma\{-[\sigma(2)\cdot\nabla]+\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^3\}\psi(\vec{r},t)\\ \nabla\psi(\vec{r},t)=-\frac{1}{12}\{[\sigma(2)\cdot\nabla]-\frac{1}{\nabla^2}[\sigma(2)\cdot\nabla]^3]\}\sigma(2)\psi(\vec{r},t)\end{cases}!\Rightarrow[\sigma(2),-2i\varsigma]^a\partial_a\psi(\vec{r},t)=0$$

8.11 引力子场的彭加莱对称性

推论8.11.1.

$$\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}=i\sum_{l=0}^{[s]}(-1)^lC_{2s}^{2l}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l}}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{2s-2l}\nabla^{2l}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdot\cdot}^{2s}\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}=i\sum_{l=0}^{[s]}(-1)^lC_{2s}^{2l}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j\cdot\cdot}^{2s-2l}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\end{cases}$$

推论8.11.2.

$\Gamma^{\pi\pi\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2)=(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

$\Gamma^{i\pi\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2)=-i\varsigma(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{1}{2}\sigma^i(2)_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

$\Gamma^{ij\pi\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2)=-(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{1}{6}[\sigma^{\{i}(2)\sigma^{j\}}(2)-2\delta^{ij}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}=-(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{1}{3}\frac{1}{2!}[\sigma^{\{i}(2)\sigma^{j\}}(2)-\delta^{\{ij\}}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

$\Gamma^{ijk\pi}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2)=(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{i\varsigma}{6}\{\sigma^{\{j}(2)[\sigma^i(2)]\sigma^{k\}}(2)-[\sigma^i(2)\delta^{jk}+2\delta^{i\{j}\sigma^{k\}}(2)]\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

$=(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{i\varsigma}{3}\frac{1}{3!}\{\sigma^{\{i}(2)\sigma^j(2)\sigma^{k\}}(2)-\frac{5}{2}\sigma^{\{i}(2)\delta^{jk\}}\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

$\Gamma^{ijkl}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(2)=(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{2}{3}\frac{1}{4!}[\sigma^{\{i}(2)\sigma^j(2)\sigma^k(2)\sigma^{l\}}(2)-4\sigma^{\{i}(2)\sigma^j(2)\delta^{kl\}}+\frac{3}{2}\delta^{\{ij}\delta^{kl\}}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

推论8.11.3. $\Gamma^{abcd}(2)\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}$

$=i\sum_{l=0}^{2}(-1)^lC_4^{2l}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{4-2l}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l}}(2)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{4-2l}\nabla^{2l}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

$=i\{\Gamma^{ijkl}(2)\partial_i\partial_j\partial_k\partial_l\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')-6\Gamma^{ij\pi\pi}(2)\partial_i\partial_j\nabla^2\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')+\Gamma^{\pi\pi\pi\pi}(2)\nabla^4\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\}$

$=i\{(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{2}{3}\frac{1}{4!}[\sigma^{\{i}(2)\sigma^j(2)\sigma^k(2)\sigma^{l\}}(2)-4\sigma^{\{i}(2)\sigma^j(2)\delta^{kl\}}+\frac{3}{2}\delta^{\{ij}\delta^{kl\}}]\partial_i\partial_j\partial_k\partial_l\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')+6(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\frac{1}{3}\frac{1}{2!}[\sigma^{\{i}(2)\sigma^{j\}}(2)-\delta^{\{ij\}}]\partial_i\partial_j\nabla^2\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')+(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\nabla^4\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\}$

$=i\{\frac{1}{6}\{[\sigma(2)\cdot\nabla]^4-4[\sigma(2)\cdot\nabla]^2\nabla^2+\frac{3}{2}\nabla^4\}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')+\frac{1}{2}\{[\sigma(2)\cdot\nabla]^2\nabla^2-\nabla^4\}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')+\frac{1}{4}\nabla^4\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\}$

$=\frac{i}{6}\{[\sigma(2)\cdot\nabla]^4-[\sigma(2)\cdot\nabla]^2\nabla^2\}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

推论8.11.4.

$$\begin{cases}[\dot{\psi}_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]=-\frac{1}{2}\Gamma^{abcd}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\partial_\pi\Delta(x-x')\\ [\psi_{k_\varsigma}(x),\psi_{l_\varsigma}(x')]=0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(x),\psi^+_{l'_\varsigma}(x')]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\frac{\dot{\psi}_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}]\\ =\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^4\}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t)]=0,[\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)]=0\end{cases}$$

推论8.11.5. $\hat{P}_a(2)=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\hat{P}_a\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}d^3\vec{r}, M_{ab}(2)=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\hat{M}_{ab}\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}d^3\vec{r}$

定理8.11.1. $\begin{cases}[L_{ab},L_{cd}]=-i(g_{ad}L_{bc}-g_{ac}L_{bd}+g_{bc}L_{ad}-g_{bd}L_{ac})\\ [L_{ab},P_c]=-i(g_{bc}P_a-g_{ac}P_b),[P_a,P_b]=0\end{cases}$

证明: $[L_{ab},L_{cd}]$
$=-\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{-\nabla^2}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{-\nabla^2},\frac{\psi^+(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{i\dot{\psi}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}]$
$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}]$
$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}[(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}](r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}$
$+\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2},(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}](r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\}$
$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^4\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}$
$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}']^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}']^4\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\}$
$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}(r_a\partial'_b-r_b\partial'_a)\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}']^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}']^4\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}$
$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}(r'_c\partial_d-r'_d\partial_c)\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^4\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\}$
$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^4\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}(r_c\partial_d-r_d\partial_c)\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}$
$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}(r_c\partial_d-r_d\partial_c)\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^4\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\}$
$=-\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{-\nabla^2}[-i(r_a\partial_b-r_b\partial_a),-i(r_c\partial_d-r_d\partial_c)]\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^4\}\frac{\dot{\psi}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}d^3\vec{r}$
$=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{-\nabla^2}[\hat{L}_{ab},\hat{L}_{cd}]\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}d^3\vec{r}$
$=-i(g_{ad}L_{bc}-g_{ac}L_{bd}+g_{bc}L_{ad}-g_{bd}L_{ac})$ □

证明: $[L_{ab},P_c]$
$=-\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{-\nabla^2}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{-\nabla^2},\frac{\psi^+(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}\partial'_c\frac{i\dot{\psi}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}]$
$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}\partial'_c\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}]$
$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}[(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}]\partial'_c\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}+\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2},\partial'_c\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}](r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\}$
$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^4\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_c\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}$
$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}\partial'_c\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}']^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}']^4\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\}$
$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}(r_a\partial'_b-r_b\partial'_a)\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}']^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}']^4\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_c\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}$
$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}\partial_c\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^4\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\}$
$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^4\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial_c\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\partial_c\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^4\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}(r_a\partial_b-$
$r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\}$
$=-\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{-\nabla^2}[-i(r_a\partial_b-r_b\partial_a),-i\partial'_c]\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^4\}\frac{\dot{\psi}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}d^3\vec{r}$
$=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{-\nabla^2}[\hat{L}_{ab},\hat{P}_c]\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}d^3\vec{r}$
$=-i(g_{bc}P_a-g_{ac}P_b)$ □

证明: $[P_a,P_b]$

$= -\int[\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\partial_a\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{-\nabla^2},\frac{\psi^+(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}\partial'_b\frac{i\dot{\psi}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\partial_a\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}\partial'_b\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}[\partial_a\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}]\partial'_b\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}+\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2},\partial'_b\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}]\partial_a\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\}$

$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^4\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_b\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}']^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}']^4\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\partial'_b\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})\partial_a\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\}$

$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}']^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}']^4\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial'_a\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_b\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{-\nabla'^2}\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^4\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\partial_b\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial_a\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\}$

$= \int\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^4\}^{k_\varsigma l'_\varsigma}\partial_a\partial_b\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^4\}^{k'_\varsigma l_\varsigma}\partial_b\partial_a\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}\}d^3\vec{r}$

$= \int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{-\nabla^2}(\partial_a\partial_b-\partial_b\partial_a)\frac{i}{12}\{[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^2-[\sigma(2)\cdot\hat{\nabla}]^4\}\frac{\dot{\psi}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}d^3\vec{r}$

$= \int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{-\nabla^2}(\partial_a\partial_b-\partial_b\partial_a)\frac{-i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}d^3\vec{r}$

$= \int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{-\nabla^2}[\hat{P}_a,\hat{P}_b]\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{-\nabla^2}d^3\vec{r}=0$ □

第二十五章　s-自旋方程的协变量子化方案

自我评述：在本章终于按统一的方式对所有无质量自旋粒子建立了相应的量子场论。无需知道哈密顿量，就可以按统一的新程式对各种自旋粒子进行了量子化，给出了统一的量子化对易规则和能量动量算符形式，给出了部分量子彭加莱代数。但角动量算符只取得部分成功，没有彻底解决，仍需努力。

1 坐标空间中的自旋方程

1.1 s-自旋方程及其平面波解

定理1.1.1. $[s\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x) = 0$

推论1.1.1.
$$\begin{cases}\psi(\vec{r},t) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}\lambda(\hat{p},-s\varsigma)[a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p} \\ |\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}a_1(\vec{p},-s\varsigma) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)\psi(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{i}{|\vec{p}|}\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)\dot{\psi}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r} \\ |\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}a_2^+(\vec{p},-s\varsigma) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)\psi(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{-i}{|\vec{p}|}\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)\dot{\psi}(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$$

定义1.1.1. 投影算子:$\hat{P}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s,\varsigma) := \lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma), \hat{P}^2(s,\varsigma) = \hat{P}(s,\varsigma), \hat{P}^+(s,\varsigma) = \hat{P}(s,\varsigma)$

定义1.1.2. $A(\vec{r},t) := \frac{\partial_t}{\nabla^2}\psi(\vec{r},t) \Leftrightarrow \psi(\vec{r},t) = \partial_t A(\vec{r},t)$

2 常数不变张量$\Gamma^{abc\cdots}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)$的数学分析

2.1 s-自旋场协变常数不变张量$\Gamma^{abc\cdots}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)$的性质

性质2.1.1. $\Gamma^{\overbrace{\pi\pi\pi\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s) = (\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(i\varsigma)_{A_\varsigma A'_\varsigma}(i\varsigma)_{B_\varsigma B'_\varsigma}(i\varsigma)_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdots}^{2s}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)$
$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2s}\delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

性质2.1.2. $\Gamma^{\overbrace{i\pi\pi\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s) = (\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma)^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}(i\varsigma)_{B_\varsigma B'_\varsigma}(i\varsigma)_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdots}^{2s}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)$
$= -i\varsigma(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2s}\frac{1}{s}\sigma^i(s)_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

性质2.1.3. $\Gamma^{\overbrace{ij\pi\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s) = (\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma)^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma)^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}(i\varsigma)_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdots}^{2s}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)$
$= -(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2s}\frac{1}{s(s-\frac{1}{2})}\frac{1}{2!}[\sigma^{\{i}(s)\sigma^{j\}}(s) - \frac{s}{2}\delta^{\{ij\}}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

性质2.1.4. $\Gamma^{\overbrace{ijk\pi\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s) = (\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma)^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma)^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma)^k_{C_\varsigma C'_\varsigma}(i\varsigma)_{D_\varsigma D'_\varsigma}\cdots}^{2s}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma D'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)$
$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2s}\frac{i\varsigma}{s(s-\frac{1}{2})(s-1)}\frac{1}{3!}[\sigma^{\{i}(s)\sigma^j(s)\sigma^{k\}}(s) + \frac{1-3s}{2}\delta^{\{ij}\sigma^{k\}}(s)]_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

性质2.1.5. $\Gamma^{\overbrace{ijkl\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s) = (\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma)^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma)^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma)^k_{C_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma)^l_{D_\varsigma D'_\varsigma}\cdots}^{2s}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma D'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)$
$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2s}\frac{1}{s(s-\frac{1}{2})(s-1)(s-\frac{3}{2})}\frac{1}{4!}[\sigma^{\{i}(s)\sigma^j(s)\sigma^k(s)\sigma^{l\}}(s) + (2-3s)\sigma^{\{i}(s)\sigma^j(s)\delta^{kl\}} + \frac{3}{4}s(s-1)\delta^{\{ij}\delta^{kl\}}]_{k_\varsigma k'_\varsigma}$

2.2 重要关系

引理2.2.1.
$$\begin{cases}(\sigma\cdot\nabla)^{A'_\varsigma A_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(s)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t) = i\varsigma\partial_\pi\delta^{A'_\varsigma A_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(s)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t), [\sigma(s)\cdot\nabla]^{k'_\varsigma k_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t) = is\varsigma\partial_\pi\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t) \\ (\sigma\cdot\nabla)_{A_\varsigma A'_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)\psi^{k'_\varsigma}(\vec{r},t) = -i\varsigma\partial_\pi\delta^{A_\varsigma A'_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)\psi^{k'_\varsigma}(\vec{r},t), [\sigma(s)\cdot\nabla]_{k_\varsigma k'_\varsigma}\psi^{k'_\varsigma}(\vec{r},t) = -is\varsigma\partial_\pi\delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}\psi^{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\end{cases}$$

定理2.2.1. $\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\underbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}_{n}\psi(\vec{r},t)=2^{-s}\delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}(\partial_\pi)^n\psi^{k'_\varsigma}(\vec{r},t)$

证明: $\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{n}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2s-n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\underbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}_{n}\psi^{k'_\varsigma}(\vec{r},t)$

$=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma)^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma)^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(i\varsigma)_{P_\varsigma P'_\varsigma}(i\varsigma)_{Q_\varsigma Q'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-n}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot P_\varsigma Q_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot P'_\varsigma Q'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)\underbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}_{n}\psi^{k'_\varsigma}(\vec{r},t)$

$=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma\cdot\nabla)_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma\cdot\nabla)_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(i\varsigma)_{P_\varsigma P'_\varsigma}(i\varsigma)_{Q_\varsigma Q'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-n}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot P_\varsigma Q_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot P'_\varsigma Q'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)\psi^{k'_\varsigma}(\vec{r},t)$

$=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(-i\varsigma\partial_\pi)_{A_\varsigma A'_\varsigma}(-i\varsigma\partial_\pi)_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(i\varsigma)_{P_\varsigma P'_\varsigma}(i\varsigma)_{Q_\varsigma Q'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-n}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot P_\varsigma Q_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot P'_\varsigma Q'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)\psi^{k'_\varsigma}(\vec{r},t)$

$=2^{-s}\delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}(-\partial_\pi)^n\psi(\vec{r},t)$ □

推论2.2.1. $\begin{cases}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\overbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}^{2s}\\ \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)=\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}_{2s}\end{cases}$

定理2.2.2. $\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{n}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2s-n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\hat{p}_i\hat{p}_j\cdot\cdot}^{n}\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)=\frac{i^n}{2^s}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma),\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{ij\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\pi\cdot\cdot\pi}_{2s-n}}(s)\overbrace{\hat{p}^i\hat{p}^j\cdot\cdot}^{n}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},s\varsigma)=\frac{i^n}{2^s}\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},s\varsigma)$

证明: $\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{n}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2s-n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\hat{p}_i\hat{p}_j\cdot\cdot}^{n}\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)$

$=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma)^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma)^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(i\varsigma)_{P_\varsigma P'_\varsigma}(i\varsigma)_{Q_\varsigma Q'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-n}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot P_\varsigma Q_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot P'_\varsigma Q'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)\overbrace{\hat{p}_i\hat{p}_j\cdot\cdot}^{n}\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)$

$=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot P_\varsigma Q_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)$

$\overbrace{(\sigma\cdot\hat{p})_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma\cdot\hat{p})_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(i\varsigma)_{P_\varsigma P'_\varsigma}(i\varsigma)_{Q_\varsigma Q'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-n}\overbrace{\lambda^{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^{B'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\cdot\cdot\lambda^{P'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^{Q'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}^{2s}$

$=\frac{i^n}{2^s}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot P_\varsigma Q_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\overbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\cdot\cdot\lambda_{P_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_{Q_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}^{2s}$

$=\frac{i^n}{2^s}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)$ □

定理2.2.3. $\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{n}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2s-n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\hat{p}_i\hat{p}_j\cdot\cdot}^{n}\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},s\varsigma)=\frac{(-i)^n}{2^s}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},s\varsigma),\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{ij\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\pi\cdot\cdot\pi}_{2s-n}}(s)\overbrace{\hat{p}^i\hat{p}^j\cdot\cdot}^{n}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)=\frac{(-i)^n}{2^s}\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)$

定理2.2.4. $\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{ij\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\pi\cdot\cdot\pi}_{2s-n}}(s)\overbrace{\hat{p}^i\hat{p}^j\cdot\cdot}^{n}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},s\varsigma)=\frac{i^n}{2^s}\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},s\varsigma)$

定理2.2.5. $\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{n}}_{k'_\varsigma k_\varsigma}(s)\underbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}_{n}\psi^{k_\varsigma}(\vec{r},t)=2^{-s}\delta_{k'_\varsigma k_\varsigma}\partial^n_\pi\psi(\vec{r},t)\\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma k_\varsigma}(s):=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A'_\varsigma A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B'_\varsigma B_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C'_\varsigma C_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\end{cases}$

证明: $\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{n}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2s-n}}_{k'_\varsigma k_\varsigma}(s)\underbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}_{n}\psi^{k_\varsigma}(\vec{r},t)$

$=(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma)^i_{A'_\varsigma A_\varsigma}(\sigma)^j_{B'_\varsigma B_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(i\varsigma)_{P'_\varsigma P_\varsigma}(i\varsigma)_{Q'_\varsigma Q_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-n}\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot P'_\varsigma Q'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s)\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot P_\varsigma Q_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\underbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}_{n}\psi^{k_\varsigma}(\vec{r},t)$

$$= (\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma\cdot\nabla)_{A'_\varsigma A_\varsigma}(\sigma\cdot\nabla)_{B'_\varsigma B_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(i\varsigma)_{P'_\varsigma P_\varsigma}(i\varsigma)_{Q'_\varsigma Q_\varsigma}\cdots}^{2s-n}\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots P'_\varsigma Q'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots P_\varsigma Q_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)\psi^{k_\varsigma}(\vec{r},t)$$
$$= (\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(i\varsigma\partial_\pi)_{A'_\varsigma A_\varsigma}(i\varsigma\partial_\pi)_{B'_\varsigma B_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(i\varsigma)_{P'_\varsigma P_\varsigma}(i\varsigma)_{Q'_\varsigma Q_\varsigma}\cdots}^{2s-n}\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots P'_\varsigma Q'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots P_\varsigma Q_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)\psi^{k_\varsigma}(\vec{r},t)$$
$$= 2^{-s}\delta_{k'_\varsigma k_\varsigma}(\partial_\pi)^n\psi^{k_\varsigma}(\vec{r},t)$$ □

2.3 s-自旋场协变常数不变张量$\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{abc\cdots}(s)$的重要定理

引理2.3.1. $\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix}_a\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix}_b\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix}_c\cdots}^{2s} = (i\sqrt{2})^{2s}\lambda_{k_\varsigma}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-s\varsigma)\lambda_{k'_\varsigma}^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-s\varsigma)$

证明：$\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix}_a\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix}_b\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix}_c\cdots}^{2s}$

$$= (\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})^{2s}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdots}^{2s}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix}_a\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix}_b\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix}_c\cdots}^{2s}$$
$$= \begin{cases}(i\sqrt{2})^{2s}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{1_\varsigma 1_\varsigma 1_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{1'_\varsigma 1'_\varsigma 1'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s) = (i\sqrt{2})^{2s}\lambda_{k_\varsigma}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},s)\lambda_{k'_\varsigma}^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},s),\varsigma=-1\\(i\sqrt{2})^{2s}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{2_\varsigma 2_\varsigma 2_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{2'_\varsigma 2'_\varsigma 2'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s) = (i\sqrt{2})^{2s}\lambda_{k_\varsigma}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-s)\lambda_{k'_\varsigma}^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-s),\varsigma=1\end{cases}$$
$$= (i\sqrt{2})^{2s}\lambda_{k_\varsigma}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-s\varsigma)\lambda_{k'_\varsigma}^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-s\varsigma)$$ □

定理2.3.1. $\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s} = (i\sqrt{2})^{2s}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda_{k'_\varsigma}^{+}(\hat{p},-s\varsigma)$

以上$s=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2$已被证明，$s>2$还属于猜想，下面用常数不变张量分析法来统一证明它：

证明：$\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix}_a\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix}_b\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix}_c\cdots}^{2s} = (i\sqrt{2})^{2s}\lambda_{k_\varsigma}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-s\varsigma)\lambda_{k'_\varsigma}^{+}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-s\varsigma)$

$$\Leftrightarrow \Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)[exp\{-i\frac{(\gamma\times\hat{p})_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}|_a{}^{\tilde{a}}exp\{-i\frac{(\gamma\times\hat{p})_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}|_b{}^{\tilde{b}}exp\{-i\frac{(\gamma\times\hat{p})_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}|_c{}^{\tilde{c}}\cdots]\overbrace{\hat{p}_{\tilde{a}}\hat{p}_{\tilde{b}}\hat{p}_{\tilde{c}}\cdots}^{2s}$$
$$= (i\sqrt{2})^{2s}exp\{-i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}|_{k_\varsigma}{}^{\tilde{k}_\varsigma}\lambda_{\tilde{k}_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda_{\tilde{k}'_\varsigma}^{+}(\hat{p},-s\varsigma)exp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}|^{\tilde{k}'_\varsigma}{}_{k'_\varsigma}$$
$$\Leftrightarrow [exp\{i\frac{(\gamma\times\hat{p})_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}|^{\tilde{a}}{}_a exp\{i\frac{(\gamma\times\hat{p})_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}|^{\tilde{b}}{}_b exp\{i\frac{(\gamma\times\hat{p})_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}|^{\tilde{c}}{}_c\cdots]$$
$$exp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}|_{\tilde{k}_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)exp\{-i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}|^{k'_\varsigma}{}_{\tilde{k}'_\varsigma}\overbrace{\hat{p}_{\tilde{a}}\hat{p}_{\tilde{b}}\hat{p}_{\tilde{c}}\cdots}^{2s} = (i\sqrt{2})^{2s}\lambda_{\tilde{k}_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda_{\tilde{k}'_\varsigma}^{+}(\hat{p},-s\varsigma)$$
$$\Leftrightarrow \Gamma_{\tilde{k}_\varsigma\tilde{k}'_\varsigma}^{\overbrace{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_{\tilde{a}}\hat{p}_{\tilde{b}}\hat{p}_{\tilde{c}}\cdots}^{2s} = (i\sqrt{2})^{2s}\lambda_{\tilde{k}_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda_{\tilde{k}'_\varsigma}^{+}(\hat{p},-s\varsigma)$$
$$\Leftrightarrow \Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s} = (i\sqrt{2})^{2s}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda_{k'_\varsigma}^{+}(\hat{p},-s\varsigma)$$ □

推论2.3.1. 投影算子:$\hat{P}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s,\varsigma) = (i\sqrt{2})^{-2s}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s}, \Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s} = (i\sqrt{2})^{2s}\hat{P}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s,\varsigma)$

推论2.3.2. $\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s} \succ \Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s} = (i\sqrt{2})^{2s}\lambda(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^{+}(\hat{p},-s\varsigma), s\geq 0$

推论2.3.3. $\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s}\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = (i\sqrt{2})^{2s}\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$

推论2.3.4. $\begin{cases}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)=1, \lambda^{+k_\varsigma}(-\hat{p},-s\varsigma)\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)=0\\\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda_{k'_\varsigma}^{+}(\hat{p},-s\varsigma) = (i\sqrt{2})^{-2s}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s}\end{cases}$

2.4 算符$\hat{p}_a, \hat{\partial}_a$和$\Gamma_+^{abc\cdot\cdot}(s), \Gamma_-^{abc\cdot\cdot}(s)$定义的重新汇总

定义2.4.1. $\hat{p}_a := \frac{p_a}{|\vec{p}|} = (\hat{p}, i); \hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \hat{p}_\pi = \frac{p_\pi}{|\vec{p}|} = i; \hat{p}^2 = 1, \hat{p}_\pi^2 = i^2$

定义2.4.2. $\hat{\partial}_a := \frac{\partial_a}{i\sqrt{-\nabla^2}} = \frac{-i\partial_a}{\sqrt{-\nabla^2}} = \frac{(-i\nabla, -\partial_t)}{\sqrt{-\nabla^2}}; \hat{\nabla} = \frac{\nabla}{i\sqrt{-\nabla^2}} = \frac{-i\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}}; \hat{\nabla}^2 = 1, \hat{\nabla}_\pi^2 = i^2$

推论2.4.1. $p_a \simeq -i\partial_a, |\vec{p}| \simeq \sqrt{-\nabla^2}, \hat{p}_a \simeq \hat{\partial}_a, p_a = |\vec{p}|\hat{p}_a, \partial_a = (i\sqrt{-\nabla^2})\hat{\partial}_a$

定义2.4.3. $odd := -, even := +$

定义2.4.4.
$$\begin{cases} \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s) = 1\cdot\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l}}(s), 1\cdot\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l+1}}(s), l = 0, \cdot\cdot, 2s \\ \Gamma_+^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s) := 1\cdot\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l}}(s), 0\cdot\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l+1}}(s), l = 0, \cdot\cdot, 2s \\ \Gamma_-^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s) := 0\cdot\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l}}(s), 1\cdot\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l+1}}(s), l = 0, \cdot\cdot, 2s \end{cases}$$

推论2.4.2. $\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s) = \Gamma_+^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s) + \Gamma_-^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)$

2.5 算符$\Gamma_\pm^{abc\cdot\cdot}(s)\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot$和$\Gamma_\pm^{abc\cdot\cdot}(s)\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdot\cdot$在质壳条件下的性质

推论2.5.1. $\partial^a\partial_a\psi = 0 \Rightarrow$
$$\begin{cases} \Gamma_+^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\psi = \sum\limits_{l=0}^{[s]} C_{2s}^{2n}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l}}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{2s-2l}(\sqrt{-\nabla^2})^{2l}\psi \\ \Gamma_-^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\psi = \sum\limits_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]} C_{2s}^{2n+1}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l+1}}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{2s-2n-1}(\sqrt{-\nabla^2})^{2l}\partial_\pi\psi \end{cases}$$

推论2.5.2. $\partial^a\partial_a\psi = 0 \Rightarrow$
$$\begin{cases} \Gamma_+^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdot\cdot}^{2s}\psi = \sum\limits_{n=0}^{[s]} (-1)^l C_{2s}^{2l}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j\cdot\cdot}^{2s-2l}\psi \\ \Gamma_-^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdot\cdot}^{2s}\psi = \sum\limits_{n=0}^{[s-\frac{1}{2}]} (-1)^l C_{2s}^{2l+1}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l+1}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\hat{\partial}_\pi\psi \end{cases}$$

推论2.5.3. $\partial^a\partial_a\psi = 0 \Rightarrow$
$$\begin{cases} \Gamma_+^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdot\cdot}^{2s}\psi = \Gamma_+^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdot\cdot}^{2s,\hat{\partial}_\pi\to i}\psi \\ \Gamma_-^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdot\cdot}^{2s}\psi = -i\Gamma_-^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdot\cdot}^{2s,\hat{\partial}_\pi\to i}\hat{\partial}_\pi\psi \end{cases}$$

2.6 算符$\Gamma^{abc\cdot\cdot}(s)\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot\Delta(x-x')|_{t=t'}$的性质

性质2.6.1.
$$\begin{cases} \Gamma_-^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{p_a p_b p_c\cdot\cdot}^{2s} := \sum\limits_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]} C_{2s}^{2l+1}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l+1}}(s)\overbrace{p_i p_j\cdot\cdot}^{2s-2l-1}p_\pi^{2l+1} \\ \Gamma_-^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s} := \sum\limits_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]} C_{2s}^{2l+1}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l+1}}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\partial_\pi^{2l+1} \end{cases}$$

推论2.6.1.
$$\begin{cases} \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x-x')|_{t=t'} = i\sum\limits_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}(-1)^l C_{2s}^{2l+1}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l+1}}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\nabla^{2l}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x-x')|_{t=t'} = \frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}}\sum\limits_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}(-1)^l C_{2s}^{2l+1}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l+1}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x-x')|_{t=t'} = (i\sqrt{-\nabla^2})^{2s-1}\Gamma_-^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdot\cdot}^{2s,\hat{\partial}_\pi\to i}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \\ \Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x-x')|_{t=t'} = \frac{1}{i\sqrt{-\nabla^2}}\Gamma_-^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdot\cdot}^{2s,\hat{\partial}_\pi\to i}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \end{cases}$$

2.7 算符$\Gamma^{abc\cdot\cdot}(s)\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot|\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}$的性质

推论2.7.1.

$$\begin{cases}\overbrace{\Gamma^{abc\cdot\cdot}}^{2s}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}=i\sum_{l=0}^{[s]}(-1)^l C_{2s}^{2l}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l}}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{2s-2l}\nabla^{2l}\delta^3(\vec r-\vec r')\\ \overbrace{\Gamma^{abc\cdot\cdot}}^{2s}(s)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}=i\sum_{l=0}^{[s]}(-1)^l C_{2s}^{2l}\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-2l}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{2l}}(s)\overbrace{\hat\partial_i\hat\partial_j\cdot\cdot}^{2s-2l}\delta^3(\vec r-\vec r')\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overbrace{\Gamma^{abc\cdot\cdot}}^{2s}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}=i(i\sqrt{-\nabla^2})^{2s}\overbrace{\Gamma_+^{abc\cdot\cdot}}^{2s}(s)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdot\cdot}^{2s,\hat\partial_\pi\to i}\delta^3(\vec r-\vec r')\\ \overbrace{\Gamma^{abc\cdot\cdot}}^{2s}(s)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}=i\overbrace{\Gamma_+^{abc\cdot\cdot}}^{2s}(s)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdot\cdot}^{2s,\hat\partial_\pi\to i}\delta^3(\vec r-\vec r')\end{cases}$$

2.8 几个重要定理

定理2.8.1.

$$\begin{cases}\overbrace{\Gamma^{abc\cdot\cdot}}^{2s}(s)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\hat\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}=i\overbrace{\Gamma_+^{abc\cdot\cdot}}^{2s}(s)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdot\cdot}^{2s,\hat\partial_\pi\to i}\delta^3(\vec r-\vec r')\\ \overbrace{\Gamma^{abc\cdot\cdot}}^{2s}(s)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x-x')|_{t=t'}=\frac{1}{i\sqrt{-\nabla^2}}\overbrace{\Gamma_-^{abc\cdot\cdot}}^{2s}(s)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdot\cdot}^{2s,\hat\partial_\pi\to i}\delta^3(\vec r-\vec r')\end{cases}$$

定理2.8.2.

$$\begin{cases}\overbrace{\Gamma^{abc\cdot\cdot}}^{2n}(n)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdot\cdot}^{2n}\hat\partial_\pi\Delta(x-x')|_{t=t'}=i\overbrace{\Gamma_+^{abc\cdot\cdot}}^{2n}(n)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdot\cdot}^{2n,\hat\partial_\pi\to i}\delta^3(\vec r-\vec r')\\ \overbrace{\Gamma^{abc\cdot\cdot}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdot\cdot}^{2n+1}\Delta(x-x')|_{t=t'}=\frac{1}{i\sqrt{-\nabla^2}}\overbrace{\Gamma_-^{abc\cdot\cdot}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdot\cdot}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\delta^3(\vec r-\vec r')\end{cases}$$

猜想2.8.1.

$$\overbrace{\Gamma_+^{ab\cdot\cdot}}^{2s}(s)\overbrace{\hat p_a\hat p_b\cdot\cdot}^{2s}\lambda(\hat p,-s\varsigma)=\overbrace{\Gamma_-^{ab\cdot\cdot}}^{2s}(s)\overbrace{\hat p_a\hat p_b\cdot\cdot}^{2s}\lambda(\hat p,-s\varsigma)=\frac12\overbrace{\Gamma^{ab\cdot\cdot}}^{2s}(s)\overbrace{\hat p_a\hat p_b\cdot\cdot}^{2s}\lambda(\hat p,-s\varsigma)=\frac{(i\sqrt2)^{2s}}{2}\lambda(\hat p,-s\varsigma)$$

此猜想对低自旋情形已验证正确，对一般情形还需要严格加以证明。

推论2.8.1.

$$\begin{cases}\overbrace{\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{abc\cdot\cdot}}^{2n}(n)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdot\cdot}^{2n}\psi(\vec r,t;n)=(-2)^n\psi(\vec r,t;n)\\ \overbrace{\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{abc\cdot\cdot}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdot\cdot}^{2n+1}\hat\partial_\pi\psi(\vec r,t;n+\frac12)=-(-2)^n\sqrt2\psi(\vec r,t;n+\frac12)\end{cases}$$

证明：$\overbrace{\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{abc\cdot\cdot}}^{2n}(n)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdot\cdot}^{2n}\psi(\vec r,t;n)$

$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec p\neq0}|\vec p|^{(n-\frac12)}\overbrace{\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{abc\cdot\cdot}}^{2n}(n)\overbrace{\hat p_a\hat p_b\hat p_c\cdot\cdot}^{2n}\lambda(\hat p,-n\varsigma)[a_1(\vec p,-n\varsigma)e^{ip\cdot x}+(-1)^{2n}a_2^+(\vec p,-n\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec p$

$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec p\neq0}|\vec p|^{(n-\frac12)}(i\sqrt2)^{2n}\lambda(\hat p,-s\varsigma)\lambda(\hat p,-n\varsigma)[a_1(\vec p,-n\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec p,-n\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec p$

$=(-2)^n\psi(\vec r,t;n)$ □

证明：$\overbrace{\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{abc\cdot\cdot}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdot\cdot}^{2n+1}\hat\partial_\pi\psi(\vec r,t;n+\frac12)$

$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec p\neq0}d^3\vec p$

$|\vec p|^n\overbrace{\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{abc\cdot\cdot}}^{2n}(n+\frac12)\overbrace{\hat p_a\hat p_b\hat p_c\cdot\cdot}^{2n+1}\hat p_\pi\lambda(\hat p,-(n+\frac12)\varsigma)[a_1(\vec p,-(n+\frac12)\varsigma)e^{ip\cdot x}-(-1)^{2n+1}a_2^+(\vec p,-(n+\frac12)\varsigma)e^{-ip\cdot x}]$

$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec p\neq0}|\vec p|^n i(i\sqrt2)^{2n+1}\lambda(\hat p,-(n+\frac12)\varsigma)\lambda(\hat p,-(n+\frac12)\varsigma)[a_1(\vec p,-(n+\frac12)\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec p,-(n+\frac12)\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec p$

$=i(i\sqrt2)^{2n+1}\psi(\vec r,t;n+\frac12)$ □

3 s-自旋场的对易规则

3.1 对易和反对易公式

推论3.1.1. $\begin{cases}[A,BC]=[A,B]C+B[A,C],[A,CB]=[A,C]B+C[A,B]\\ [A,BC]=\{A,B\}C-B\{A,C\},[A,CB]=\{A,C\}B-C\{A,B\}\end{cases}$

推论3.1.2. $\begin{cases}[A,\{B,C\}]=\{[A,B],C\}+\{B,[A,C]\}\\ [A,[B,C]]=\{\{A,B\},C\}-\{B,\{A,C\}\}\end{cases}$

3.2 s-自旋场数学上一般的协变对易规则

定理3.2.1. $\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-s\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-s\varsigma)]_\pm=\delta_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},-s\varsigma),a_{\sigma'}(\vec{p}',-s\varsigma)]_\pm=0,[a^+_\sigma(\vec{p},-s\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-s\varsigma)]_\pm=0\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}[\Psi_{k_\varsigma}(x),\Psi^+_{k'_\varsigma}(x')]_\pm\\ =i(-\sqrt{2})^{-2(s-1)}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\{[\delta_1\pm(-1)^{2s}\delta_2]\Delta^{(+)}(x-x')\pm(-1)^{2s+1}\delta_2\Delta(x-x')\}\\ [\Psi_{k_\varsigma}(x),\Psi_{\beta_\varsigma}(x')]_\pm=0,[\Psi^+_{k'_\varsigma}(x),\Psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]_\pm=0\end{cases}$$

证明：$[\Psi^{(+)}_{k_\varsigma}(x),\Psi^{(+)+}_{k'_\varsigma}(x')]_\pm$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq0}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\vec{p}',-s\varsigma)|\vec{p}|^{(2s-1)/2}|\vec{p}'|^{(2s-1)/2}[a_1(\vec{p},-s\varsigma),a^+_1(\vec{p}',-s\varsigma)]_\pm e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\vec{p}',-s\varsigma)|\vec{p}|^{2s-1}\delta_1\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\delta_1|\vec{p}|^{2s-1}e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int(i\sqrt{2})^{-2s}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdot\cdot}^{2s}\delta_1|\vec{p}|^{2s-1}e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$=-(i\sqrt{2})^{-2(s-1)}\frac{\delta_1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{p_ap_bp_c\cdot\cdot}^{2s}e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$=i^{-2s}(\sqrt{2})^{-2(s-1)}\frac{\delta_1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}i^{-2s}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$=(-\sqrt{2})^{-2(s-1)}\frac{\delta_1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}e^{ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$=i(-\sqrt{2})^{-2(s-1)}\delta_1\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta^{(+)}(x-x')$ □

证明：$[\Psi^{(-)}_{k_\varsigma}(x),\Psi^{(-)+}_{k'_\varsigma}(x')]_\pm$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq0}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\vec{p}',-s\varsigma)|\vec{p}|^{(2s-1)/2}|\vec{p}'|^{(2s-1)/2}[a^+_2(\vec{p},-s\varsigma),a_2(\vec{p}',-s\varsigma)]_\pm e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$=\pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\vec{p}',-s\varsigma)|\vec{p}|^{2s-1}\delta_2\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$

$=\pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\delta_2|\vec{p}|^{2s-1}e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$=\pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int(i\sqrt{2})^{-2s}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdot\cdot}^{2s}\delta_2|\vec{p}|^{2s-1}e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$=-\pm(i\sqrt{2})^{-2(s-1)}\frac{\delta_2}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{p_ap_bp_c\cdot\cdot}^{2s}e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$=\pm i^{-2s}(\sqrt{2})^{-2(s-1)}\frac{\delta_2}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}(-i)^{-2s}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$=\pm(\sqrt{2})^{-2(s-1)}\frac{\delta_2}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}e^{-ip\cdot(x-x')}d^3\vec{p}$

$=-\pm i(\sqrt{2})^{-2(s-1)}\delta_2\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta^{(-)}(x-x')$ □

证明: $[\Psi_{k_\varsigma}(x),\Psi^+_{k'_\varsigma}(x')]_\pm$
$= [\Psi^{(+)}_{k_\varsigma}(x),\Psi^{(+)+}_{k'_\varsigma}(x')]_\pm + [\Psi^{(-)}_{k_\varsigma}(x),\Psi^{(-)+}_{k'_\varsigma}(x')]_\pm$
$= i(-\sqrt{2})^{-2(s-1)}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}[\delta_1\Delta^{(+)}(x-x')\pm(-1)^{2s+1}\delta_2\Delta^{(-)}(x-x')]$
$= i(-\sqrt{2})^{-2(s-1)}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\{[\delta_1\pm(-1)^{2s}\delta_2]\Delta^{(+)}(x-x')\pm(-1)^{2s+1}\delta_2\Delta(x-x')\}$ □

从上式可知，只有$\delta_1\pm(-1)^{-2s}\delta_2=0$时，才满足微观因果性，同时只有$\delta_1,\delta_2\geq 0$时，才满足几率非负性。所以数学上八种协变对易或反对易方案中，物理上合理的只有一种：即$\delta_1=\delta_2=1$(如果不是1可以归一化)，且对于玻色子满足对易关系；对于费米子满足反对易关系。其实还有两种，即$\delta_1=\delta_2=0$，且满足对易或反对易关系，就是经典情形。

3.3 s-自旋场物理的协变对易规则

定义3.3.1. $\Delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s;x) := \frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x)$

推论3.3.1. $\Delta(s,\varsigma;x) = \frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\bar{\Gamma}(s)\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a\otimes(\sigma,i\varsigma)^b\otimes(\sigma,i\varsigma)^c\otimes\cdot\cdot}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x)\Gamma(s)$

推论3.3.2. $\Delta(s,\varsigma;x) = (\frac{i\varsigma}{2})\bar{N}(s)[(\sigma,i\varsigma)^a\otimes\partial_a\Delta(s-\frac{1}{2},\varsigma;x)]N(s)$

证明: $\Delta(s,\varsigma;x) = \frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s,\varsigma)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x)$
$= \frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}(\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}})\bar{N}(s)[(\sigma,i\varsigma)^a\otimes\Gamma^{\overbrace{bc\cdot\cdot}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2},\varsigma)]N(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x)$
$= (\frac{i\varsigma}{2})\bar{N}(s)[(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a\otimes\Delta(s-\frac{1}{2},\varsigma;x)]N(s)$
$= (\frac{i\varsigma}{2})\bar{N}(s)[(\sigma,i\varsigma)^a\otimes\partial_a\Delta(s-\frac{1}{2},\varsigma;x)]N(s)$ □

定理3.3.1.

$$\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-s\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-s\varsigma)]_{-^{2s+1}}=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},-s\varsigma),a_{\sigma'}(\vec{p}',-s\varsigma)]_{-^{2s+1}}=0\\ [a^+_\sigma(\vec{p},-s\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-s\varsigma)]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}}, s\geq 0\\ =i\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x-x'),\Gamma(0):=1\\ [\psi_{k_\varsigma}(x),\psi_{l_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}}=0,[\psi^+_{k'_\varsigma}(x),\psi^+_{l'_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}$$

证明: $\{\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')\}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)|\vec{p}|^{(2s-1)/2}|\vec{p}'|^{(2s-1)/2}$
$\{[a_1(\vec{p},-s\varsigma),a^+_1(\vec{p}',-s\varsigma)]_{-^{2s+1}}e^{ip\cdot(x-x')}+[a^+_2(\vec{p},-s\varsigma),a_2(\vec{p}',-s\varsigma)]_{-^{2s+1}}e^{-ip\cdot(x-x')}\}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|^{2s-1}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)[\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{ip\cdot(x-x')}+(-1)^{2s+1}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}d^3\vec{p}'$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|^{2s-1}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^+_{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)[e^{ip\cdot(x-x')}+(-1)^{2s+1}e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\frac{-1}{(i\sqrt{2})^{2(s-1)}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{p_ap_bp_c\cdot\cdot}^{2s}[e^{ip\cdot(x-x')}+(-1)^{2s+1}e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}\frac{(-i)^{2(s-1)}}{(i\sqrt{2})^{2(s-1)}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}[e^{ip\cdot(x-x')}-e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= \frac{i}{(-\sqrt{2})^{2(s-1)}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}|}[e^{ip\cdot(x-x')}-e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$
$= \frac{i}{(-\sqrt{2})^{2(s-1)}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x-x')$
$= i\Delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s;x-x')$ □

3.4 s-自旋场的等时对易规则

推论3.4.1.

$$\Delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s;x) := \frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x),\ \Delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s;x)|_{t=0} = \frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}(i\sqrt{-\nabla^2})^{2s-1}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{-}(s)\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdot\cdot}^{2s,\hat{\partial}_\pi\to i}\delta^3(\vec{r})$$

推论3.4.2.

$$\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}},\ s\geq 0\\ =i\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi_{k_\varsigma}(x),\psi_{l_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}}=0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(x),\psi^+_{l'_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}},\ s>0\\ =i\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}(i\sqrt{-\nabla^2})^{2s-1}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{-}(s)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdots}^{2s,\hat\partial_\pi\to i}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}}=0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}$$

推论3.4.3.

$$\begin{cases}[\dot\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}},\ s\geq 0\\ =i\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}i\partial_\pi\Delta(x-x')\\ [\psi_{k_\varsigma}(x),\psi_{l_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}}=0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(x),\psi^+_{l'_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\dot\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}},\ s>0\\ =i\frac{(-1)^{2s+1}}{2^{s-1}}(i\sqrt{-\nabla^2})^{2s}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{+}(s)\overbrace{\hat\partial_a\hat\partial_b\hat\partial_c\cdots}^{2s,\hat\partial_\pi\to i}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}}=0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}$$

推论3.4.4.

$$\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}},\ s\geq 0\\ =i\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi_{k_\varsigma}(x),\psi_{l_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}}=0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(x),\psi^+_{l'_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}}=\frac{(-1)^{2s+1}}{2^{s-1}},\ s>0\\ \sum_{n=0}^{[s-\frac{1}{2}]}(-1)^nC^{2n+1}_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-2n-1}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2n+1}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{2s-2n-1}\nabla^{2n}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}}=0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}$$

推论3.4.5.

$$\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}}=\frac{(-1)^{2s+1}}{2^{s-1}},\ s>0\\ \sum_{n=0}^{[s-\frac{1}{2}]}(-1)^nC^{2n+1}_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-2n-1}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2n+1}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{2s-2n-1}\nabla^{2n}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}}=0\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t),\psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-s\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-s\varsigma)]_{-^{2s+1}}\\ =\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},-s\varsigma),a_{\sigma'}(\vec{p}',-s\varsigma)]_{-^{2s+1}}=0\\ [a^+_\sigma(\vec{p},-s\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-s\varsigma)]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}$$

证明：$[a_1(\vec{p},-s\varsigma),a^+_1(\vec{p}',-s\varsigma)]_{-^{2s+1}}$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{(|\vec{p}||\vec{p}'|)^{(2s-1)/2}}\int[\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\Psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)},\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-s\varsigma)\Psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}]_{-^{2s+1}}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{(|\vec{p}||\vec{p}'|)^{(2s-1)/2}}\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-s\varsigma)[\Psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}}e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{(|\vec{p}||\vec{p}'|)^{(2s-1)/2}}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\frac{(-1)^{2s+1}}{2^{s-1}}$$
$$\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-s\varsigma)\sum_{n=0}^{[s-\frac{1}{2}]}(-1)^nC^{2n+1}_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-2n-1}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2n+1}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{2s-2n-1}\nabla^{2n}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{(|\vec{p}||\vec{p}'|)^{(2s-1)/2}}\int d^3\vec{r}\frac{(-1)^{2s+1}}{2^{s-1}}$$
$$i^{2s-1}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-s\varsigma)\sum_{n=0}^{[s-\frac{1}{2}]}(-1)^nC^{2n+1}_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-2n-1}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2n+1}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{p_ip_j\cdots}^{2s-2n-1}\vec{p}^{2n}e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}$$
$$=\frac{(-i)^{2s-1}}{2^{s-1}}\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)\sum_{n=0}^{[s-\frac{1}{2}]}(-1)^nC^{2n+1}_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-2n-1}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2n+1}}(s)\overbrace{\hat{p}_i\hat{p}_j\cdots}^{2s-2n-1}\lambda(\vec{p}',-s\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$
$$=\frac{(-i)^{2s}}{2^{s-1}}\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{-}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s}\lambda(\vec{p}',-s\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$
$$=\frac{(-i)^{2s}}{2^{s-1}}\frac{1}{2}(i\sqrt{2})^{2s}\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$
$$=\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$
$$=\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$
□

证明：$[a^+_2(\vec{p},-s\varsigma),a_2(\vec{p}',-s\varsigma)]_{-^{2s+1}}$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{(|\vec{p}||\vec{p}'|)^{(2s-1)/2}}\int[\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\Psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)},\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-s\varsigma)\Psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}]_{-^{2s+1}}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{(|\vec{p}||\vec{p}'|)^{(2s-1)/2}}\int \lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-s\varsigma)[\Psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t),\Psi^{+}_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}}e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{(|\vec{p}||\vec{p}'|)^{(2s-1)/2}}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\frac{(-1)^{2s+1}}{2^{s-1}}$

$\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-s\varsigma)\sum_{n=0}^{[s-\frac{1}{2}]}(-1)^nC_{2s}^{2n+1}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-2n-1}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2n+1}}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{2s-2n-1}\nabla^{2n}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}'-E't)}$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{(|\vec{p}||\vec{p}'|)^{(2s-1)/2}}\int d^3\vec{r}\frac{(-1)^{2s+1}}{2^{s-1}}i$

$(-i)^{2s-1}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\vec{p}',-s\varsigma)\sum_{n=0}^{[s-\frac{1}{2}]}(-1)^nC_{2s}^{2n+1}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-2n-1}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2n+1}}(s)\overbrace{p_ip_j\cdots}^{2s-2n-1}\vec{p}^{2n}e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}$

$= \frac{(i)^{2s-1}}{2^{s-1}}\lambda^{+}(\hat{p},-s\varsigma)\sum_{n=0}^{[s-\frac{1}{2}]}(-1)^nC_{2s}^{2n+1}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{2s-2n-1}\overbrace{\pi\cdots\pi}^{2n+1}}(s)\overbrace{\hat{p}_i\hat{p}_j\cdots}^{2s-2n-1}\lambda(\vec{p}',-s\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

$= -\frac{(i)^{2s}}{2^{s-1}}\varsigma\lambda^{+}(\hat{p},-s\varsigma)\Gamma_{-}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s}\lambda(\vec{p}',-s\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

$= -\frac{(i)^{2s}}{2^{s-1}}\frac{1}{2}(i\sqrt{2})^{2s}\lambda^{+}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

$= (-1)^{2s+1}\lambda^{+}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

$= (-1)^{2s+1}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$ □

3.5 s-自旋场的对易函数、因果函数和费曼传播子

引理3.5.1. $[\partial_t^n,\theta(t)]\psi(x)=\sum_{l=1}^{n}\partial_t^{n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\psi(x),[\partial_t^n,\theta(-t)]\psi(x)=-\sum_{l=1}^{n}\partial_t^{n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\psi(x)$

证明: $[\partial_t^n,\theta(t)]\psi(x)=\partial_t^n\theta(t)\psi(x)-\theta(t)\partial_t^n\psi(x)$

$=\sum_{l=1}^{n}\partial_t^{n-l}[\partial_t\theta(t)]\partial_t^{l-1}\psi(x)=\sum_{l=1}^{n}\partial_t^{n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\psi(x)$ □

证明: $[\partial_t^n,\theta(-t)]\psi(x)=\partial_t^n\theta(-t)\psi(x)-\theta(-t)\partial_t^n\psi(x)$

$=\sum_{l=1}^{n}\partial_t^{n-l}[\partial_t\theta(-t)]\partial_t^{l-1}\psi(x)=-\sum_{l=1}^{n}\partial_t^{n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\psi(x)$ □

引理3.5.2. $[\theta(t),\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}]\Delta^{(+)}(x)-[\theta(-t),\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}]\Delta^{(-)}(x)$

$=\frac{i^{2s-2}}{2^{s-1}}\sum_{n=0}^{2s-1}i^nC_{2s}^n\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{2s-n}}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)$

证明: $[\theta(t),\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}]$

$=\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)[\theta(t),\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}]$

$=\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\sum_{n=0}^{2s-1}C_{2s}^n\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{2s-n}}(s)[\theta(t),\partial_\pi^{2s-n}]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}$

$=\frac{i^{2s}}{2^{s-1}}\sum_{n=0}^{2s-1}i^nC_{2s}^n\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{2s-n}}(s)[\theta(t),\partial_t^{2s-n}]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}$

$=\frac{i^{2s-2}}{2^{s-1}}\sum_{n=0}^{2s-1}i^nC_{2s}^n\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{2s-n}}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}$ □

证明: $[\theta(-t),\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}]$

$=\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)[\theta(-t),\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}]$

$=\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\sum_{n=0}^{2s-1}C_{2s}^n\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{2s-n}}(s)[\theta(-t),\partial_\pi^{2s-n}]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}$

$= \frac{i^{2s}}{2^{s-1}} \sum_{n=0}^{2s-1} i^n C_{2s}^n \Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{2s-n}}(s)[\theta(-t), \partial_t^{2s-n}]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}$

$= \frac{i^{2s}}{2^{s-1}} \sum_{n=0}^{2s-1} i^n C_{2s}^n \Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{2s-n}}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}$ □

证明： $[\theta(t), \frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}]\Delta^{(+)}(x) - [\theta(-t), \frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}]\Delta^{(-)}(x)$

$= [\theta(t), \frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}]\Delta(x) - [\theta(t)+\theta(-t), \frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}]\Delta^{(-)}(x)$

$= [\theta(t), \frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}]\Delta(x)$ □

引理3.5.3. $[sp_a + iS_{ab}(s,\varsigma)p^b]\lambda(\hat{p}, -s\varsigma) = 0$

证明： $[sp_a + iS_{ab}(s,\varsigma)p^b]\lambda(\hat{p}, -s\varsigma)$

$= |\vec{p}|\{s[exp\{i\frac{(R\times\hat{p})_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix}]_a + iS_{ab}(s,\varsigma)[exp\{i\frac{(R\times\hat{p})_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix}]^b\}$

$exp\{i\frac{[\sigma(2)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, -s\varsigma)$

$= exp\{i\frac{(R\times\hat{p})_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}|_a{}^c exp\{i\frac{[\sigma(2)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}|\vec{p}|[s\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix}_c + iS_{cd}(s,\varsigma)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\i\end{bmatrix}^d]\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, -s\varsigma)$

$= exp\{i\frac{(R\times\hat{p})_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}|_a{}^c exp\{i\frac{[\sigma(2)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}|\vec{p}|\cdot 0$

$= 0$ □

引理3.5.4. $[s\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\Delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s;x) = 0, [s\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\Delta(s;x) = 0$

证明： $[s\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\Delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s;x)$

$= (\frac{-1}{\sqrt{2}})^{2(s-1)}[s\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta(x)$

$= (\frac{-1}{\sqrt{2}})^{2(s-1)}i^{2s+1}\frac{-i}{(2\pi)^3}\int[sp_a + iS_{ab}(s,\varsigma)p^b]_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{p_ap_bp_c\cdots}^{2s}\frac{1}{2|\vec{p}|}[e^{ip\cdot x} - (-1)^{2s+1}e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$

$= (-\frac{1}{2})^{2s-1}\frac{-1}{(2\pi)^3}\int[sp_a + iS_{ab}(s,\varsigma)p^b]_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p}, -s\varsigma)\lambda_{k'_\varsigma}^+(\hat{p}, -s\varsigma)\overbrace{p_ap_bp_c\cdots}^{2s}\frac{1}{2|\vec{p}|^{2s+1}}[e^{ip\cdot x} - (-1)^{2s+1}e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$

$= (-\frac{1}{2})^{2s-1}\frac{-1}{(2\pi)^3}\int 0\cdot\lambda_{k'_\varsigma}^+(\hat{p}, -s\varsigma)\overbrace{p_ap_bp_c\cdots}^{2s}\frac{1}{2|\vec{p}|^{2s+1}}[e^{ip\cdot x} - (-1)^{2s+1}e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$

$= 0$ □

定义3.5.1.

$$\begin{cases}\Delta(x) = \Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(x) = \Delta^{ret}(x) - \Delta^{adv}(x)\\ \Delta^{(l)}(x) = i[\Delta^{(-)}(x) - \Delta^{(+)}(x)]\\ \Delta_F(x) = \langle T\varphi(x)\varphi(x')\rangle_0 = i\Delta^{(c)}(x-x')\end{cases} \quad \begin{cases}\Delta^{(c)}(x) = \theta(t)\Delta^{(+)}(x) - \theta(-t)\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{ret}(x) = \theta(t)\Delta(x) = \Delta^{(c)}(x) + \Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{adv}(x) = -\theta(-t)\Delta(x) = \Delta^{(c)}(x) - \Delta^{(+)}(x)\end{cases}$$

推论3.5.1.

$$\begin{cases}\Delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s;x) := \frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta(x)\\ \Delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{(+)}(s;x) := \frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{(-)}(s;x) := \frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{(l)}(s;x) := \frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma_{k_\varsigma k'_\varsigma}^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta^{(l)}(x)\end{cases}$$

推论3.5.2.

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s;x):=\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta^{(c)}(x)+\frac{i^{2s-2}}{2^{s-1}}\sum_{n=0}^{2s-1}i^nC^n_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{2s-n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\\ \Delta^{ret}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s;x):=\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta^{ret}(x)+\frac{i^{2s-2}}{2^{s-1}}\sum_{n=0}^{2s-1}i^nC^n_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{2s-n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\\ \Delta^{adv}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s;x):=\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta^{adv}(x)+\frac{i^{2s-2}}{2^{s-1}}\sum_{n=0}^{2s-1}i^nC^n_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{2s-n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\\ \Delta_{Fk_\varsigma k'_\varsigma}(s;x):=\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta_F(x)+\frac{i^{2s-1}}{2^{s-1}}\sum_{n=0}^{2s-1}i^nC^n_{2s}\Gamma^{\overbrace{ij\cdots}^{n}\overbrace{\pi\cdots}^{2s-n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\\ =i\Delta^{(c)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s;x)\end{cases}$$

推论3.5.3. $\Delta_{Fk_\varsigma k'_\varsigma}(s;p)=\frac{(-i)^{2s+1}}{2^{s-1}}\frac{\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{p_ap_bp_c\cdots}^{2s}}{p^2-i\varepsilon}+\cdots$

引理3.5.5. $[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\theta(t)=-\varsigma[\sigma(s),is\varsigma]_a\delta(t)$

证明: $[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\theta(t)$
$=[-is\delta_{a4}+S_{a4}(s,\varsigma)]\delta(t)=[-is\delta_{a4}-\varsigma\sigma_a(s)]\delta(t)=-\varsigma[\sigma(s),is\varsigma]_a\delta(t)$ □

引理3.5.6. $\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}}\delta^3(\vec{r})=2\Delta^{(+)}(x)|_{t=0}=2\Delta^{(-)}(x)|_{t=0}$

引理3.5.7. $[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma)D^b]\psi(s,\varsigma)=-\sqrt{2}\varsigma s\bar{Z}_a(s,\varsigma)\tilde{J}(s)\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^a\tilde{\psi}(s,\varsigma)=i\tilde{J}(s,\varsigma)$

推论3.5.4.

$$\begin{cases}[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\Delta(s;x)=0\\ [s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\Delta^{(+)}(s;x)=0\\ [s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\Delta^{(-)}(s;x)=0\\ [s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\Delta^{(l)}(s;x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\Delta^{(c)}(s;x)=-\varsigma[\sigma(s),is\varsigma]_a\delta(t)\Delta(s;x)|_{t=0}\\ =-\sqrt{2}\varsigma s[\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\bar{N}(s)(\sigma,i\varsigma)_a]i\varsigma\delta(t)N(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\\ [s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\Delta^{ret}(s;x)=-\varsigma[\sigma(s),is\varsigma]_a\delta(t)\Delta(s;x)|_{t=0}\\ [s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\Delta^{adv}(s;x)=-\varsigma[\sigma(s),is\varsigma]_a\delta(t)\Delta(s;x)|_{t=0}\\ [s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\Delta_F(s;x)=-i\varsigma[\sigma(s),is\varsigma]_a\delta(t)\Delta(s;x)|_{t=0}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]$$

推论3.5.5.

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Gamma(s)\Delta(s;x)=0\\ (\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Gamma(s)\Delta^{(+)}(s;x)=0\\ (\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Gamma(s)\Delta^{(-)}(s;x)=0\\ (\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Gamma(s)\Delta^{(l)}(s;x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Gamma(s)\Delta^{(c)}(s;x)=-\varsigma\delta(t)\Gamma(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\\ (\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Gamma(s)\Delta^{ret}(s;x)=-\varsigma\delta(t)\Gamma(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\\ (\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Gamma(s)\Delta^{adv}(s;x)=-\varsigma\delta(t)\Gamma(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\\ (\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Gamma(s)\Delta_F(s;x)=-i\varsigma\delta(t)\Gamma(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]$$

推论3.5.6.

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\Delta(s;x)=0\\ (\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\Delta^{(+)}(s;x)=0\\ (\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\Delta^{(-)}(s;x)=0\\ (\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\Delta^{(l)}(s;x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\Delta^{(c)}(s;x)=-\varsigma\delta(t)N(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\\ (\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\Delta^{ret}(s;x)=-\varsigma\delta(t)N(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\\ (\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\Delta^{adv}(s;x)=-\varsigma\delta(t)N(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\\ (\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\Delta_F(s;x)=-i\varsigma\delta(t)N(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]$$

推论3.5.7.

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Gamma(s)\Delta(s;x)\bar{\Gamma}(s)=0\\(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Gamma(s)\Delta^{(+)}(s;x)\bar{\Gamma}(s)=0\\(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Gamma(s)\Delta^{(-)}(s;x)\bar{\Gamma}(s)=0\\(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Gamma(s)\Delta^{(l)}(s;x)\bar{\Gamma}(s)=0\end{cases}\quad\begin{cases}(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Gamma(s)\Delta^{(c)}(s;x)\bar{\Gamma}(s)=-\varsigma\delta(t)\Gamma(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\bar{\Gamma}(s)\\(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Gamma(s)\Delta^{ret}(s;x)\bar{\Gamma}(s)=-\varsigma\delta(t)\Gamma(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\bar{\Gamma}(s)\\(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Gamma(s)\Delta^{adv}(s;x)\bar{\Gamma}(s)=-\varsigma\delta(t)\Gamma(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\bar{\Gamma}(s)\\(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Gamma(s)\Delta_F(s;x)\bar{\Gamma}(s)=-i\varsigma\delta(t)\Gamma(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\bar{\Gamma}(s)\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]\qquad\qquad[\Updownarrow]$$

推论3.5.8.

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\Delta(s;x)\bar{N}(s)=0\\(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\Delta^{(+)}(s;x)\bar{N}(s)=0\\(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\Delta^{(-)}(s;x)\bar{N}(s)=0\\(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\Delta^{(l)}(s;x)\bar{N}(s)=0\end{cases}\quad\begin{cases}(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\Delta^{(c)}(s;x)\bar{N}(s)=-\varsigma\delta(t)N(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\bar{N}(s)\\(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\Delta^{ret}(s;x)\bar{N}(s)=-\varsigma\delta(t)N(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\bar{N}(s)\\(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\Delta^{adv}(s;x)\bar{N}(s)=-\varsigma\delta(t)N(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\bar{N}(s)\\(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_a\partial^aN(s)\Delta_F(s;x)\bar{N}(s)=-i\varsigma\delta(t)N(s)\Delta(s;x)|_{t=0}\bar{N}(s)\end{cases}$$

$$[\Downarrow]\qquad\qquad[\Downarrow]$$

推论3.5.9.

$$\begin{cases}[\sigma(s),-is\varsigma]_a\partial^a\Delta(s;x)=0\\[\sigma(s),-is\varsigma]_a\partial^a\Delta^{(+)}(s;x)=0\\[\sigma(s),-is\varsigma]_a\partial^a\Delta^{(-)}(s;x)=0\\[\sigma(s),-is\varsigma]_a\partial^a\Delta^{(l)}(s;x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}[\sigma(s),-is\varsigma]_a\partial^a\Delta^{(c)}(s;x)=-s\varsigma\delta(t)\Delta(s;x)|_{t=0}\\[\sigma(s),-is\varsigma]_a\partial^a\Delta^{ret}(s;x)=-s\varsigma\delta(t)\Delta(s;x)|_{t=0}\\[\sigma(s),-is\varsigma]_a\partial^a\Delta^{adv}(s;x)=-s\varsigma\delta(t)\Delta(s;x)|_{t=0}\\[\sigma(s),-is\varsigma]_a\partial^a\Delta_F(s;x)=-is\varsigma\delta(t)\Delta(s;x)|_{t=0}\end{cases}$$

3.6 s-自旋场能量动量算符的提取

推论3.6.1.
$$\begin{cases}\psi(\vec{r},t):=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq0}|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}\lambda(\hat{p},-s\varsigma)[a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}a_1(\vec{p},-s\varsigma)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)\psi(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}\\|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)\psi(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$$

引理3.6.1.

$$\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-n}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\underbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}_{2s-n}\psi(\vec{r},t)=(\tfrac{1}{\sqrt{2}})^{2s}\delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_\pi^{2s-n}\psi(\vec{r},t),\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{ij\cdot\cdot}_{2s-n}\underbrace{\pi\cdot\cdot\pi}_{n}}(s)\overbrace{\partial^i\partial^j\cdot\cdot}^{2s-n}\psi(\vec{r},t)=(\tfrac{1}{\sqrt{2}})^{2s}\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\partial_\pi^{2s-n}\psi(\vec{r},t)$$

引理3.6.2. $\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-n}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\underbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}_{2s-n}\partial_\pi^n\psi(\vec{r},t)=(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2s}\delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_\pi^{2s}\psi(\vec{r},t)$

性质3.6.1.
$$\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{p_ap_bp_c\cdot\cdot}^{2s}=\sum\limits_{n=0}^{2s}C_{2s}^n\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-n}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{n}}(s)\overbrace{p_ip_j\cdot\cdot}^{2s-n}p_\pi^n\\\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}=\sum\limits_{n=0}^{2s}C_{2s}^n\Gamma^{\overbrace{ij\cdot\cdot}^{2s-n}\overbrace{\pi\cdot\cdot\pi}^{n}}(s)\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{2s-n}\partial_\pi^n\end{cases}$$

定理3.6.1.

$$H(s)=\int|\vec{p}|[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)]d^3\vec{p}=\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

证明： $H(s)=\int|\vec{p}|[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)]d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{|\vec{p}|^{2s-2}}[\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{ip\cdot x'}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}$

$+(-1)^{2s}\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{-ip\cdot x'}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{|\vec{p}|^{2s-2}}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+(-1)^{2s}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=(i\sqrt{2})^{-2s}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{|\vec{p}|^{2s-2}}\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{2s}}(s)\underbrace{\hat{p}^a\hat{p}^b\hat{p}^c\cdot\cdot}_{2s}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+(-1)^{2s}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$$= (-i\sqrt{2})^{-2s}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{1}{|\vec{p}|^{4s-2}}\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{2s}}(s)(\underbrace{p^ap^bp^c\cdot\cdot}_{2s}+\underbrace{p^{+a}p^{+b}p^{+c}\cdot\cdot}_{2s})e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$= (-i\sqrt{2})^{-2s}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{1}{|\vec{p}|^{4s-2}}\sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{ij\cdot\cdot}_{2s-n}\underbrace{\pi\cdot\cdot\pi}_{n}}(s)(\overbrace{p^ip^j\cdot\cdot}^{2s-n}p^n_\pi+\overbrace{p^ip^j\cdot\cdot}^{2s-n}p^{+n}_\pi)e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$= (\sqrt{2})^{-2s}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{1}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}(\sqrt{-\nabla^2})^n\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{ij\cdot\cdot}_{2s-n}\underbrace{\pi\cdot\cdot\pi}_{n}}(s)\overbrace{\partial^i\partial^j\cdot\cdot}^{2s-n}[1+(-1)^n]\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$= (-\sqrt{2})^{-2s}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{1}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}(\sqrt{-\nabla^2})^n\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{ij\cdot\cdot}_{2s-n}\underbrace{\pi\cdot\cdot\pi}_{n}}(s)\overbrace{\partial^i\partial^j\cdot\cdot}^{2s-n}[1+(-1)^n]\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$= (\tfrac{-1}{\sqrt{2}})^{2s}(\sqrt{2})^{-2s}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{1}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}(\sqrt{-\nabla^2})^n\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\partial^{2s-n}_\pi[1+(-1)^n]\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$= (\tfrac{-1}{\sqrt{2}})^{2s}(\sqrt{2})^{-2s}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{1}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}\partial^n_\pi\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\partial^{2s-n}_\pi[1+(-1)^n]\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$= \frac{1}{(-2)^{2s}}\int\psi^{+k_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{1}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}(-i\partial_t)^n(-i\partial_t)^{2s-n}[1+(-1)^n]\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$= \frac{1}{(-2)^{2s}}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_t)^{2s}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}[1+(-1)^n]\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$= \frac{1}{(-2)^{2s}}\int\psi^{+k_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_t)^{2s}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}[1+(-1)^n]\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$= \int\psi^+(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$ □

定理3.6.2.

$$P(s)=\int\vec{p}[a^+_1(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma)a^+_2(\vec{p},-s\varsigma)]d^3\vec{p}=\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{-i\nabla(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

证明： $P(s)=\int\vec{p}[a^+_1(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma)a^+_2(\vec{p},-s\varsigma)]d^3\vec{p}$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{2s-2}}[\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{ip\cdot x'}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}$$
$$+(-1)^{2s}\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)e^{-ip\cdot x'}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{2s-2}}\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^{k'_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+(-1)^{2s}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$= (i\sqrt{2})^{-2s}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{2s-2}}\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)(\Gamma)^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{2s}}(s)\underbrace{\hat{p}^a\hat{p}^b\hat{p}^c\cdot\cdot}_{2s}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)[e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+(-1)^{2s}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$= (-i\sqrt{2})^{-2s}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{4s-2}}\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{2s}}(s)(\underbrace{p^ap^bp^c\cdot\cdot}_{2s}-\underbrace{p^{+a}p^{+b}p^{+c}\cdot\cdot}_{2s})e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$= (-i\sqrt{2})^{-2s}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{4s-2}}\sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{ij\cdot\cdot}_{2s-n}\underbrace{\pi\cdot\cdot\pi}_{n}}(s)(\overbrace{p^ip^j\cdot\cdot}^{2s-n}p^n_\pi-\overbrace{p^ip^j\cdot\cdot}^{2s-n}p^{+n}_\pi)e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{p}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$= (\sqrt{2})^{-2s}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}(\sqrt{-\nabla^2})^n\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{ij\cdot\cdot}_{2s-n}\underbrace{\pi\cdot\cdot\pi}_{n}}(s)\overbrace{\partial^i\partial^j\cdot\cdot}^{2s-n}[(-1)^n-1]\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$= (-\sqrt{2})^{-2s}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}(\sqrt{-\nabla^2})^n\Gamma^{k'_\varsigma k_\varsigma}_{\underbrace{ij\cdot\cdot}_{2s-n}\underbrace{\pi\cdot\cdot\pi}_{n}}(s)\overbrace{\partial^i\partial^j\cdot\cdot}^{2s-n}[(-1)^n-1]\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$= (\tfrac{1}{\sqrt{2}})^{2s}(-\sqrt{2})^{-2s}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}(\sqrt{-\nabla^2})^n\delta^{k'_\varsigma k_\varsigma}\partial^{2s-n}_\pi[(-1)^n-1]\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$= \frac{1}{(-2)^{2s}}\int\psi^{+k_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}\sqrt{-\nabla^2}(-i\partial_t)^{n-1}(-i\partial_t)^{2s-n}[(-1)^n-1]\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$= \frac{1}{(-2)^{2s}}\int\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{-i\nabla(-i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}[(-1)^n-1]\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$= \frac{1}{(-2)^{2s}}\int\psi^{+k_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{-i\nabla(-i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}[(-1)^n-1]\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$= \int\psi^+(\vec{r},t)\frac{-i\nabla(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$ □

定理3.6.3.
$P_u(s) = \int p_u[a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]d^3\vec{p} = \int \psi^+(\vec{r}, t)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi(\vec{r}, t)d^3\vec{r}$

3.7 s-自旋场方程的各种物理算符

推论3.7.1.
$$\begin{cases}\psi(\vec{r}, t) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}\lambda(\hat{p}, -s\varsigma)[a_1(\vec{p}, -s\varsigma)e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p} \\ \vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}a_1(\vec{p}, -s\varsigma) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \lambda^+(\hat{p}, -s\varsigma)\psi(\vec{r}, t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r} \\ |\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \lambda^+(\hat{p}, -s\varsigma)\psi(\vec{r}, t)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$$

定理3.7.1.
$P_u(s) = \int \psi^+(\vec{r}, t)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi(\vec{r}, t)d^3\vec{r} = \int p_u[a^+(\vec{p}, -s\varsigma)a(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s}b(\vec{p}, -s\varsigma)b^+(\vec{p}, -s\varsigma)]d^3\vec{p}$

证明： $P_u(s) = \int \psi^+(\vec{r}, t)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi(\vec{r}, t)d^3\vec{r}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}|\vec{p}'|^{s-\frac{1}{2}}|\vec{p}|^{s-\frac{1}{2}}\lambda^+(\hat{p}', -s\varsigma)\lambda(\hat{p}, -s\varsigma)\frac{p_u}{|\vec{p}|^{2s-1}}$
$[a_1^+(\vec{p}', -s\varsigma)e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)} + a_2(\vec{p}', -s\varsigma)e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}][a_1(\vec{p}, -s\varsigma)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)} + (-1)^{2s}a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]$
$= \int \vec{p}|^{2s-1}\lambda^+(\hat{p}', -s\varsigma)\lambda(\hat{p}, -s\varsigma)\frac{p_u}{|\vec{p}|^{2s-1}}\{[a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]\delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$
$+ [(-1)^{2s}a_1^+(-\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)e^{-2i|\vec{p}|t} + a_2(-\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma)e^{2i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}' + \vec{p})\}d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$
$= \int p_u[a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]d^3\vec{p}$ □

定理3.7.2. $Q(s) = \int \psi^+(\vec{r}, t)\frac{(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi(\vec{r}, t)d^3\vec{r} = \int[a^+(\vec{p}, -s\varsigma)a(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s-1}b(\vec{p}, -s\varsigma)b^+(\vec{p}, -s\varsigma)]d^3\vec{p}$

证明： $Q(s) = \int \psi^+(\vec{r}, t)\frac{(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi(\vec{r}, t)d^3\vec{r}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}|\vec{p}'|^{s-\frac{1}{2}}|\vec{p}|^{s-\frac{1}{2}}\lambda^+(\hat{p}', -s\varsigma)\lambda(\hat{p}, -s\varsigma)\frac{1}{|\vec{p}|^{2s-1}}$
$[a_1^+(\vec{p}', -s\varsigma)e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)} + a_2(\vec{p}', -s\varsigma)e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}][a_1(\vec{p}, -s\varsigma)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)} + (-1)^{2s-1}a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]$
$= \int \vec{p}|^{2s-1}\lambda^+(\hat{p}', -s\varsigma)\lambda(\hat{p}, -s\varsigma)\frac{1}{|\vec{p}|^{2s-1}}\{[a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s-1}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]\delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$
$+ [(-1)^{2s-1}a_1^+(-\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)e^{-2i|\vec{p}|t} + a_2(-\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma)e^{2i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}' + \vec{p})\}d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$
$= \int[a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s-1}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]d^3\vec{p}$ □

定理3.7.3. $N(s) = \int \psi^+(\vec{r}, t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{-\nabla^2})^{4s-1}}\psi(\vec{r}, t)d^3\vec{r} = \int[a^+(\vec{p}, -s\varsigma)a(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s}b(\vec{p}, -s\varsigma)b^+(\vec{p}, -s\varsigma)]d^3\vec{p}$

证明： $N(s) = \int \psi^+(\vec{r}, t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{-\nabla^2})^{4s-1}}\psi(\vec{r}, t)d^3\vec{r}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}|\vec{p}'|^{s-\frac{1}{2}}|\vec{p}|^{s-\frac{1}{2}}\lambda^+(\hat{p}', -s\varsigma)\lambda(\hat{p}, -s\varsigma)\frac{1}{|\vec{p}|^{2s-1}}$
$[a_1^+(\vec{p}', -s\varsigma)e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)} + a_2(\vec{p}', -s\varsigma)e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}][a_1(\vec{p}, -s\varsigma)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)} + (-1)^{2s}a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]$
$= \int \vec{p}|^{2s-1}\lambda^+(\hat{p}', -s\varsigma)\lambda(\hat{p}, -s\varsigma)\frac{1}{|\vec{p}|^{2s-1}}\{[a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]\delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$
$+ [(-1)^{2s}a_1^+(-\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)e^{-2i|\vec{p}|t} + a_2(-\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma)e^{2i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}' + \vec{p})\}d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$
$= \int[a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]d^3\vec{p}$ □

定理3.7.4. $\vec{S}(s) = \int \psi^+(\vec{r}, t)\frac{(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi(\vec{r}, t)d^3\vec{r} = \int \hat{p}[a^+(\vec{p}, -s\varsigma)a(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s-1}b(\vec{p}, -s\varsigma)b^+(\vec{p}, -s\varsigma)]d^3\vec{p}$

证明： $\vec{S}(s) = \int \psi^+(\vec{r}, t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi(\vec{r}, t)d^3\vec{r}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}|\vec{p}'|^{s-\frac{1}{2}}|\vec{p}|^{s-\frac{1}{2}}\lambda^+(\hat{p}', -s\varsigma)\lambda(\hat{p}, -s\varsigma)\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{2s-1}}$
$[a_1^+(\vec{p}', -s\varsigma)e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)} + a_2(\vec{p}', -s\varsigma)e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}][a_1(\vec{p}, -s\varsigma)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)} + (-1)^{2s}a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]$
$= \int \vec{p}|^{2s-1}\lambda^+(\hat{p}', -s\varsigma)\lambda(\hat{p}, -s\varsigma)\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{2s-1}}\{[a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]\delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$
$+ [(-1)^{2s}a_1^+(-\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)e^{-2i|\vec{p}|t} + a_2(-\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma)e^{2i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}' + \vec{p})\}d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$
$= \int \hat{p}[a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]d^3\vec{p}$ □

定理3.7.5. $\vec{M}(s) = \int \psi^+(\vec{r}, t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{-\nabla^2})^{4s-1}}\psi(\vec{r}, t)d^3\vec{r} = \int \hat{p}[a^+(\vec{p}, -s\varsigma)a(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s}b(\vec{p}, -s\varsigma)b^+(\vec{p}, -s\varsigma)]d^3\vec{p}$

证明: $\vec{M}(s)=\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{-\nabla^2})^{4s-1}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}|\vec{p}'|^{s-\frac{1}{2}}|\vec{p}|^{s-\frac{1}{2}}\lambda^+(\hat{p}',-s\varsigma)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{2s-1}}$

$[a_1^+(\vec{p}',-s\varsigma)e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}+a_2(\vec{p}',-s\varsigma)e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}][a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}+(-1)^{2s-1}a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]$

$=\int\vec{p}|^{2s-1}\lambda^+(\hat{p}',-s\varsigma)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{2s-1}}\{[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)+(-1)^{2s-1}a_2(\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)]\delta^3(\vec{p}'-\vec{p})$

$+[(-1)^{2s-1}a_1^+(-\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-2i|\vec{p}|t}+a_2(-\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{2i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}'+\vec{p})\}d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$

$=\int\hat{p}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)+(-1)^{2s-1}a_2(\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)]d^3\vec{p}$ □

3.8 s-自旋场能量动量算符的小结

定理3.8.1. $[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\frac{\psi(x)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{[s]}}=0$

定理3.8.2. $P_a(s)=\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{-i\partial_a(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-l}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

定理3.8.3. $P_a(n)=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\partial_a\frac{\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r},P_a(n+\frac{1}{2})=-i\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\partial_a\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}$

定理3.8.4. $\begin{cases}M_{ab}(n)=i\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[-i(x_a\partial_b-x_b\partial_a)+S_{ab}(n,\varsigma)]\frac{\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}\\M_{ab}(n+\frac{1}{2})=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[-i(x_a\partial_b-x_b\partial_a)+S_{ab}(n+\frac{1}{2},\varsigma)]\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}\end{cases}$

3.9 s-自旋场合理的哈密顿型能量动量算符

定理3.9.1.

$$\begin{cases}\hat{H}(\frac{1}{2})=\frac{i\varsigma}{1/2}\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma(\frac{1}{2})\cdot\nabla\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\\hat{H}(1)=\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{[\sigma(1)\cdot\nabla]^2}{\nabla^2}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\\hat{H}(\frac{3}{2})=\frac{-i\varsigma}{3/2}\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{\sigma(\frac{3}{2})\cdot\nabla}{\nabla^2}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\\hat{H}(2)=(\frac{-i\varsigma}{2})^2\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]^2}{\nabla^4}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\end{cases}\quad\begin{cases}\hat{P}(\frac{1}{2})=-\int\psi^+(\vec{r},t)i\nabla\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\\hat{P}(1)=i\varsigma\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{[\sigma(1)\cdot\nabla]i\nabla}{\nabla^2}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\\hat{P}(\frac{3}{2})=\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{i\nabla}{\nabla^2}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\\hat{P}(2)=(\frac{-i\varsigma}{2})\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{[\sigma(2)\cdot\nabla]i\nabla}{\nabla^4}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\end{cases}$$

定理3.9.2.

$$\begin{cases}\hat{H}(n+\frac{1}{2})=\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{\frac{i\varsigma}{n+1/2}\sigma(n+\frac{1}{2})\cdot\nabla}{(\sqrt{-\nabla^2})^{2n}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\\hat{P}(n+\frac{1}{2})=\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{-i\nabla}{(\sqrt{-\nabla^2})^{2n}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\end{cases}\quad\begin{cases}\hat{H}(n)=\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{[\frac{i\varsigma}{n}\sigma(n)\cdot\nabla]^2}{(\sqrt{-\nabla^2})^{2n}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\\hat{P}(n)=\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{-i\nabla[\frac{i\varsigma}{n}\sigma(n)\cdot\nabla]}{(\sqrt{-\nabla^2})^{2n}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\end{cases}$$

3.10 导出的能量动量算符和角动量算符

定义3.10.1. $\begin{cases}\hat{M}_{ab}(s,\varsigma)=x_a\hat{P}_b-x_b\hat{P}_a+i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\delta(s-\frac{1}{2}),\hat{P}_a=-i\partial_a\\\Gamma_{ab}(s,\varsigma)=x_a\Gamma_b(s,\varsigma)-x_b\Gamma_a(s,\varsigma),\Gamma_a(s,\varsigma):=-\varsigma[\frac{1}{s}\sigma(s),-i\varsigma]_a\end{cases}$

推论3.10.1.

$$\begin{cases}P_a(n+\frac{1}{2})=\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{-i\partial_a}{(\sqrt{-\nabla^2})^{2n}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\P_a(n+\frac{1}{2})=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat{P}_a\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}\\M_{ab}(n+\frac{1}{2})=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat{M}_{ab}\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}\end{cases}\quad\begin{cases}P_a(n)=\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{-i\partial_a[\frac{i\varsigma}{n}\sigma(n)\cdot\nabla]}{(\sqrt{-\nabla^2})^{2n}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\\hat{P}_a(n)=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat{P}_a\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}\\M_{ab}(n)=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat{M}_{ab}\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}\end{cases}$$

定理3.10.1.

$$\begin{cases}H(1)=\int\psi_{k'_\varsigma}^+(\vec{r},t)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\H(2)=-\int\psi_{k'_\varsigma}^+(\vec{r},t)\frac{1}{\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}\end{cases}\quad\begin{cases}P(1)=-\varsigma\int\psi_{k'_\varsigma}^+(\vec{r},t)\sigma(1)\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\P(2)=(\frac{\varsigma}{2})\int\psi_{k'_\varsigma}^+(\vec{r},t)\frac{\sigma(2)}{\nabla^2}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}\end{cases}$$

推论3.10.2.

$$\begin{cases}P_a(n-\frac{1}{2})=\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{-i\partial_a}{(\sqrt{-\nabla^2})^{2(n-1)}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\P_a(n-\frac{1}{2})=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n-1}}\hat{P}_a\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n-1}}d^3\vec{r}\\M_{ab}(n-\frac{1}{2})=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n-1}}\hat{M}_{ab}\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n-1}}d^3\vec{r}\end{cases}\quad\begin{cases}P_a(n)=\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{-\varsigma[\frac{1}{n}\sigma(n),-i\varsigma]_a}{(\sqrt{-\nabla^2})^{2(n-1)}}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\P_a(n)=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n-1}}\Gamma_a\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n-1}}d^3\vec{r}\\M_{ab}(n)=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n-1}}\Gamma_{ab}\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n-1}}d^3\vec{r}\end{cases}$$

3.11 s-自旋场量子方程的提取

定理3.11.1. $[\psi(\vec{r},t),H(s)]=\frac{(-1)^{2s}}{4^{s-1}}\sqrt{-\nabla^2}[\Gamma_-^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)^{\hat{\partial}_\pi\to i}\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s}][\Gamma_+^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)^{\hat{\partial}_\pi\to i}\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s}]\psi(\vec{r},t)$

证明: $[\psi(\vec{r},t),H(s)]=[\psi(\vec{r},t),\frac{i^{-2s}}{2^{s-1}}\int\frac{\psi^+(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{s-1}}\Gamma_+^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}'_a\hat{\partial}'_b\hat{\partial}'_c\cdots}^{2s}\frac{\psi(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{s-1}}d^3\vec{r}']$

$=\frac{i^{-2s}}{2^{s-1}}\int[\psi(\vec{r},t),\frac{\psi^+(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{s-1}}]_{-2s+1}\Gamma_+^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}'_a\hat{\partial}'_b\hat{\partial}'_c\cdots}^{2s}\frac{\psi(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{s-1}}d^3\vec{r}'$

$=\frac{i^{-2s}}{2^{s-1}}\int i\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}(i\sqrt{-\nabla^2})^{2s-1}[\Gamma_-^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)^{\hat{\partial}_\pi\to i}\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s}]\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')[\Gamma_+^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{\hat{\partial}'_a\hat{\partial}'_b\hat{\partial}'_c\cdots}^{2s}]\frac{\psi(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{2(s-1)}}d^3\vec{r}'$

$=\frac{(-1)^{2s}}{4^{s-1}}\sqrt{-\nabla^2}[\Gamma_-^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)^{\hat{\partial}_\pi\to i}\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s}][\Gamma_+^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)^{\hat{\partial}_\pi\to i}\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s}]\psi(\vec{r},t)$ □

定理3.11.2. $[\psi(\vec{r},t),\vec{P}(s)]=\frac{(-1)^{2s}}{4^{s-1}}(-i\nabla)[\Gamma_-^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)^{\hat{\partial}_\pi\to i}\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s}][\Gamma_-^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)^{\hat{\partial}_\pi\to i}\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s}]\psi(\vec{r},t)$

定理3.11.3.

$???[\psi(\vec{r},t),P(s)]=\frac{(-1)^{2s}}{4^{s-1}}\sqrt{-\nabla^2}\{[\Gamma_-^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)^{\hat{\partial}_\pi\to i}\hat{\nabla},i\Gamma_+^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)^{\hat{\partial}_\pi\to i}]\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s}\}[\Gamma_-^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)^{\hat{\partial}_\pi\to i}\overbrace{\hat{\partial}_a\hat{\partial}_b\hat{\partial}_c\cdots}^{2s}]\psi(\vec{r},t)$

$=\frac{(-1)^{2s}}{4^{s-1}}\sqrt{-\nabla^2}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq0}d^3\vec{p}|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}$

$\{\{[\Gamma_-^{\overbrace{ab\cdots}^{2s}}(s)\hat{\nabla},i\Gamma_+^{\overbrace{ab\cdots}^{2s}}(s)]\overbrace{(\varsigma\hat{p},i)_a(\varsigma\hat{p},i)_b\cdots}^{2s}\}[\Gamma_-^{\overbrace{ab\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{(\varsigma\hat{p},i)_a(\varsigma\hat{p},i)_b\cdots}^{2s}]\lambda(\hat{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{ip\cdot x}$

$+[\Gamma_-^{\overbrace{ab\cdots}^{2s}}(s)\hat{\nabla},i\Gamma_+^{\overbrace{ab\cdots}^{2s}}(s)]\overbrace{(-\varsigma\hat{p},i)_a(-\varsigma\hat{p},i)_b\cdots}^{2s}\}[\Gamma_-^{\overbrace{ab\cdots}^{2s}}(s)\overbrace{(-\varsigma\hat{p},i)_a(-\varsigma\hat{p},i)_b\cdots}^{2s}]\lambda(\hat{p},-s\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}\}$

$!=\frac{(-1)^{2s}}{4^{s-1}}\sqrt{-\nabla^2}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq0}|\{[\Gamma_-^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)\hat{\nabla},i\Gamma_+^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}(s)]\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\hat{p}_c\cdots}^{2s}\}\frac{2^{s-1}}{i^{-2s}}\lambda(\hat{p},-s\varsigma)$

$\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}[a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$

$=\frac{(-1)^{2s}}{4^{s-1}}\sqrt{-\nabla^2}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq0}(\hat{\nabla},i)(\frac{2^{s-1}}{i^{-2s}})^2\lambda(\hat{p},-s\varsigma)|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}[a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$

$=\sqrt{-\nabla^2}(\hat{\nabla},i)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq0}|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}\lambda(\hat{p},-s\varsigma)[a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$

$=\sqrt{-\nabla^2}(\hat{\nabla},i)\psi$

$=(-i\nabla,i\sqrt{-\nabla^2})\psi$

3.12 对易和反对易公式

推论3.12.1. $\begin{cases}[A,BC]=[A,B]C+B[A,C],[A,CB]=[A,C]B+C[A,B]\\ [A,BC]=\{A,B\}C-B\{A,C\},[A,CB]=\{A,C\}B-C\{A,B\}\end{cases}$

推论3.12.2. $\begin{cases}[A,\{B,C\}]=\{[A,B],C\}+\{B,[A,C]\}\\ [A,[B,C]]=\{\{A,B\},C\}-\{B,\{A,C\}\}\end{cases}$

3.13 猜测：s-自旋场的能量动量算符和角动量算符的可能错误表述???

推论3.13.1.

$$\begin{cases}\hat{M}_{ab}(s,\varsigma)=-i(x_a\partial_b-x_b\partial_a)+i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)\\ \gamma_{ab}(s,\varsigma)=x_a\gamma_b(s,\varsigma)-x_b\gamma_a(s,\varsigma)+\frac{\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\partial_{\alpha_\varsigma}}{(\sqrt{-\nabla^2})^{2s}},\gamma_a(s,\varsigma):=-\varsigma[\frac{1}{s}\sigma(s),-i\varsigma]_a\\ \tilde{M}_{ab}(s,\varsigma)=-i(p_a\tilde{\partial}_b-p_b\tilde{\partial}_a)-is\varsigma\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\hat{p}_{\alpha_\varsigma},\tilde{\partial}_\pi\equiv\frac{1}{i|\vec{p}|}\\ \tilde{M}_{ab}(s,\varsigma)?=?-i(p_a\tilde{\partial}_b-p_b\tilde{\partial}_a)-is\varsigma\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\hat{p}_{\alpha_\varsigma},\tilde{\partial}_\pi\equiv\frac{1}{i|\vec{p}|}\end{cases}$$

推论3.13.2.

$$\begin{cases} P_a(s,\varsigma) = \int\limits_{\vec{p}\neq 0} \{a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)p_a a_1(\vec{p},-s\varsigma) + (-1)^{2s} a_2(\vec{p},-s\varsigma)p_a a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)\} d^3\vec{p} \\ M_{ab}(s,\varsigma) = \int\limits_{\vec{p}\neq 0} \{a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)\tilde{M}_{ab}(s,\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma) + (-1)^{2s+1} a_2(\vec{p},-s\varsigma)\tilde{M}_{ab}(s,\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)\} d^3\vec{p} \end{cases}$$

3.14 s-自旋场的量子方程

推论3.14.1. $[2\partial_a + iS_{ab}(2,\varsigma)\partial^b]\psi(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\psi}(\vec{r},t) = -i[\psi(\vec{r},t), H] \\ \nabla\psi(\vec{r},t) = i[\psi(\vec{r},t), \vec{P}] \\ \partial_a\psi(\vec{r},t) = i[\psi(\vec{r},t), P_a] \end{cases}$

推论3.14.2. $[s\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x) = 0[\text{波场}] \Leftrightarrow \begin{cases} \partial^a\partial_a\psi(\vec{r},t) = 0 \\ [\sigma(s), -is\varsigma]^a\partial_a\psi(\vec{r},t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \partial_a\psi(\vec{r},t) = i[\psi(\vec{r},t), P_a]$

推论3.14.3. $\begin{cases} s^2\vec{p}\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = s\sigma(s)\cdot\vec{p}\sigma(s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma) - (s-1)\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\vec{p}]\lambda(\hat{p},-s\varsigma) \\ [\sigma(s)\cdot\vec{p} + s\varsigma p]\sigma(s)\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = (s\vec{p} + \varsigma p\sigma(s))\lambda(\hat{p},-s\varsigma) \\ [\sigma(s)\cdot\vec{p} + s\varsigma p]\lambda(\hat{p},-s\varsigma) = 0 \end{cases}$

推论3.14.4. $[s\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} [\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma(s)\psi = \{(\varsigma\hat{\partial}_t)^{n-1}s[s^n - (s-1)^n]\hat{\nabla} + (\varsigma\hat{\partial}_t)^n(s-1)^n\sigma(s)\}\psi \\ [\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma(s)\psi = \{[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{n-1}s[s^n - (s-1)^n]\hat{\nabla} + (s-1)^n\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\}\psi \\ \sigma(s)\cdot[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\sigma(s)\psi = [s^{n+2} + s(s-1)^n][\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^n\psi \end{cases}$$

3.15 s-自旋场的彭加莱对易代数

定义3.15.1. $\begin{cases} \hat{M}_{ab}(s,\varsigma) = x_a\hat{P}_b - x_b\hat{P}_a + i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s), \hat{P}_a = -i\partial_a \\ \Gamma_{ab}(s,\varsigma) = x_a\Gamma_b(s,\varsigma) - x_b\Gamma_a(s,\varsigma), \Gamma_a(s,\varsigma) := -\varsigma[\frac{1}{s}\sigma(s), -i\varsigma]_a \end{cases}$

猜想3.15.1.

$$\begin{cases} P_a(n+\frac{1}{2}) = \int \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat{P}_a\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r} \\ M_{ab}(n+\frac{1}{2}) = \int \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat{M}_{ab}\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r} \end{cases} \quad \begin{cases} P_a(n) = \int \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat{P}_a\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r} \\ M_{ab}(n) = \int \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat{M}_{ab}\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r} \end{cases}$$

证明: $[P_a(x), P_b(x')] = [\int \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat{P}_a\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}, \int \frac{\psi^+(\vec{r}',t')}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\hat{P}_b\frac{\psi(\vec{r}',t')}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}d^3\vec{r}']$
$= -\int \frac{1}{\nabla^{2n}\nabla'^{2n}}[\psi^+(\vec{r},t)\partial_a\psi(\vec{r},t), \psi^+(\vec{r}',t')\partial'_b\psi(\vec{r}',t')]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -\int \frac{\delta^{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^{l_\varsigma l'_\varsigma}}{\nabla^{2n}\nabla'^{2n}}[\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\partial_a\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t')\partial'_b\psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t')]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= -\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\frac{\delta^{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^{l_\varsigma l'_\varsigma}}{\nabla^{2n}\nabla'^{2n}}$
$\{[\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\partial_a\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t')]\partial'_b\psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t') + \psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t')[\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\partial_a\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \partial'_b\psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t')]\}$
$= -\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\frac{\delta^{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^{l_\varsigma l'_\varsigma}}{\nabla^{2n}\nabla'^{2n}}$
$\{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\{\partial_a\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t), \psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t')\}\partial'_b\psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t') - \psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t')\{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t), \partial'_b\psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t')\}\partial_a\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\}$
$= -\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\frac{\delta^{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^{l_\varsigma l'_\varsigma}}{\nabla^{2n}\nabla'^{2n}}\frac{-i}{2^{2n}}$
$\{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\partial_a\Gamma^{\overbrace{cd\cdots}^{2n+1}}_{k_\varsigma l'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\partial_c\partial_d\cdots}^{2n+1}\Delta(x-x')\partial'_b\psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t') - \psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t')\partial'_b\Gamma^{\overbrace{cd\cdots}^{2n+1}}_{l_\varsigma k'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\partial'_c\partial'_d\cdots}^{2n+1}\Delta(x'-x)\partial_a\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\}$
$= \int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\frac{i\delta^{k_\varsigma k'_\varsigma}\delta^{l_\varsigma l'_\varsigma}}{2^{2n}\nabla^{4n}}$
$\{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)\partial'_b\psi_{l_\varsigma}(\vec{r}',t')\Gamma^{\overbrace{cd\cdots}^{2n+1}}_{k_\varsigma l'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})\partial_a\overbrace{\partial_c\partial_d\cdots}^{2n+1}\Delta(x-x') + \psi^+_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t')\partial_a\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)\Gamma^{\overbrace{cd\cdots}^{2n+1}}_{l_\varsigma k'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})\partial_b\overbrace{\partial_c\partial_d\cdots}^{2n+1}\Delta(x-x')\}$
$? = 0$ □

4 自旋波函数的傅里叶变换性质(无需满足自旋方程)

4.1 坐标-动量空间的一阶对应性质

性质4.1.1.
$$\begin{cases}\int\psi^{+}(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\psi^{+}(\vec{p},t)\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}=\int[a_1^{+}(\vec{p})a_1(\vec{p})+a_2(\vec{p})a_2^{+}(\vec{p})]d^3\vec{p}\\ \int\psi^{+}(\vec{r},t)\sigma(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}[=\int\psi^{+}(\vec{p},t)\sigma(s)\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}]\end{cases}$$

性质4.1.2.
$$\begin{cases}\int\psi^{+}(\vec{r},t)\hat{\nabla}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\psi^{+}(\vec{p},t)\hat{p}\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}\\ \int\psi^{+}(\vec{r},t)\vec{r}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\psi^{+}(\vec{p},t)(i\tilde{\nabla})\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}\\ \int\psi^{+}(\vec{r},t)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\psi^{+}(\vec{p},t)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}\end{cases}$$

性质4.1.3.
$$\begin{cases}\int\psi^{+}(\vec{r},t)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\hat{\nabla}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\psi^{+}(\vec{p},t)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\hat{p}\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}\\ \int\psi^{+}(\vec{r},t)\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\psi^{+}(\vec{p},t)\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}\\ \int\psi^{+}(\vec{r},t)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\sigma(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\psi^{+}(\vec{p},t)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s)\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}\end{cases}$$

性质4.1.4.
$$\begin{cases}\int\psi^{+}(\vec{r},t)r_i\sigma_j(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\psi^{+}(\vec{p},t)\sigma_j(s)(i\tilde{\partial}_i)\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}\\ \int\psi^{+}(\vec{r},t)\sigma_i(s)\partial_j\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=i\int\psi^{+}(\vec{p},t)\sigma_i(s)p_j\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}\end{cases}$$

性质4.1.5.
$$\begin{cases}\int\psi^{+}(\vec{r},t)[r_i\sigma_j(s)-r_j\sigma_i(s)]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=-i\int\psi^{+}(\vec{p},t)[\sigma_i(s)\tilde{\partial}_j-\sigma_j(s)\tilde{\partial}_i]\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}\\ \int\psi^{+}(\vec{r},t)[\sigma_i(s)\partial_j-\sigma_j(s)\partial_i]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=i\int\psi^{+}(\vec{p},t)[\sigma_i(s)p_j-\sigma_j(s)p_i]\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}\end{cases}$$

4.2 坐标-动量空间的二阶对应性质

性质4.2.1.
$$\begin{cases}\int\psi^{+}(\vec{r},t)r_i\partial_j\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int d^3\vec{p}\psi^{+}(\vec{p},t)(-\delta_{ij}-p_j\tilde{\partial}_i)\psi(\vec{p},t)\\ \int\psi^{+}(\vec{r},t)(\delta_{ij}+r_i\partial_j)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int d^3\vec{p}\psi^{+}(\vec{p},t)(-p_j\tilde{\partial}_i)\psi(\vec{p},t)\\ \int\psi^{+}(\vec{r},t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\psi^{+}(\vec{p},t)(p_i\tilde{\partial}_j-p_j\tilde{\partial}_i)\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}\end{cases}$$

证明: $\int\psi^{+}(\vec{r},t)r_i\partial_j\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\psi^{+}(\vec{p}',t)e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{r}}\psi(\vec{p},t)r_i\partial_j e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\psi^{+}(\vec{p}',t)e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{r}}\psi(\vec{p},t)ip_j(-i\tilde{\partial}_i)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\psi^{+}(\vec{p}',t)e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{r}}\psi(\vec{p},t)p_j\tilde{\partial}_i e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$

$=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\psi^{+}(\vec{p}',t)\tilde{\partial}_i[\psi(\vec{p},t)p_j]e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}$

$=-\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\psi^{+}(\vec{p}',t)\tilde{\partial}_i[\psi(\vec{p},t)p_j]\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

$=-\int d^3\vec{p}\psi^{+}(\vec{p},t)\tilde{\partial}_i[\psi(\vec{p},t)p_j]$

$=\int\psi^{+}(\vec{p},t)(-\delta_{ij}-p_j\tilde{\partial}_i)\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}$ □

性质4.2.2.

$$\begin{cases}\int\psi^{+}(\vec{r},t)r_i\partial_j[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=-i\{\int\psi^{+}(\vec{p},t)\delta_{ij}[\sigma(s)\cdot\vec{p}]\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}+\int\psi^{+}(\vec{p},t)p_j\tilde{\partial}_i\{[\sigma(s)\cdot\vec{p}]\psi(\vec{p},t)\}d^3\vec{p}\}\\ =-i\{\int\psi^{+}(\vec{p},t)\delta_{ij}[\sigma(s)\cdot\vec{p}]\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}+\int\psi^{+}(\vec{p},t)[\sigma(s)\cdot\vec{p}]p_j\tilde{\partial}_i\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}+\int\psi^{+}(\vec{p},t)p_j\sigma_i(s)\psi(\vec{p},t)\}d^3\vec{p}\}\end{cases}$$

证明: $\int\psi^{+}(\vec{r},t)r_i\partial_j[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\psi^{+}(\vec{p}',t)e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{r}}\psi(\vec{p},t)r_i\partial_j[\sigma(s)\cdot\nabla]e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\psi^{+}(\vec{p}',t)e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{r}}\psi(\vec{p},t)ip_j[i\sigma(s)\cdot\vec{p}](-i\tilde{\partial}_i)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\psi^{+}(\vec{p}',t)e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{r}}\psi(\vec{p},t)p_j[i\sigma(s)\cdot\vec{p}]\tilde{\partial}_i e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$

$=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\psi^{+}(\vec{p}',t)\tilde{\partial}_i\{\psi(\vec{p},t)p_j[i\sigma(s)\cdot\vec{p}]\}e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}$

$=-\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\psi^{+}(\vec{p}',t)\tilde{\partial}_i\{\psi(\vec{p},t)p_j[i\sigma(s)\cdot\vec{p}]\}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

$=-\int d^3\vec{p}\psi^{+}(\vec{p},t)\tilde{\partial}_i\{\psi(\vec{p},t)p_j[i\sigma(s)\cdot\vec{p}]\}$

$= \int \psi^+(\vec{p},t)(-\delta_{ij} - p_j\tilde{\partial}_i)\{[i\sigma(s)\cdot\vec{p}]\psi(\vec{p},t)\}d^3\vec{p}$

$= -i\{\int \psi^+(\vec{p},t)\delta_{ij}[\sigma(s)\cdot\vec{p}]\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p} + \int \psi^+(\vec{p},t)[\sigma(s)\cdot\vec{p}]p_j\tilde{\partial}_i\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p} + \int \psi^+(\vec{p},t)p_j\sigma_i(s)\psi(\vec{p},t)\}d^3\vec{p}\}$ □

性质4.2.3.

$$\begin{cases}\int \psi^+(\vec{r},t)(r_i\partial_j - r_j\partial_i)[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = i\int \psi^+(\vec{p},t)(p_i\tilde{\partial}_j - p_j\tilde{\partial}_i)\{[\sigma(s)\cdot\vec{p}]\psi(\vec{p},t)\}d^3\vec{p}\\ = i\{\int \psi^+(\vec{p},t)[\sigma(s)\cdot\vec{p}](p_i\tilde{\partial}_j - p_j\tilde{\partial}_i)\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p} + \int \psi^+(\vec{p},t)[p_i\sigma_j(s) - p_j\sigma_i(s)]\psi(\vec{p},t)\}d^3\vec{p}\}\end{cases}$$

性质4.2.4.

$\int \psi^+(\vec{r},t)[\sigma(s)\cdot\nabla]\{r_i\partial_j\psi(\vec{r},t)\}d^3\vec{r} = -i\{\int \psi^+(\vec{p},t)\delta_{ij}[\sigma(s)\cdot\vec{p}]\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p} + \int \psi^+(\vec{p},t)[\sigma(s)\cdot\vec{p}]p_j\tilde{\partial}_i\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}\}$

证明:

$\int \psi^+(\vec{r},t)[\sigma(s)\cdot\nabla]\{r_i\partial_j\psi(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$= \int \psi^+(\vec{r},t)\sigma_i(s)\partial_j\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} + \int \psi^+(\vec{r},t)r_i\partial_j[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$= i\int \psi^+(\vec{p},t)\sigma_i(s)p_j\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p} - i\{\int \psi^+(\vec{p},t)\delta_{ij}[\sigma(s)\cdot\vec{p}]\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p} + \int \psi^+(\vec{p},t)p_j\tilde{\partial}_i\{[\sigma(s)\cdot\vec{p}]\psi(\vec{p},t)\}d^3\vec{p}\}$

$= -i\{\int \psi^+(\vec{p},t)\delta_{ij}[\sigma(s)\cdot\vec{p}]\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p} + \int \psi^+(\vec{p},t)[\sigma(s)\cdot\vec{p}]p_j\tilde{\partial}_i\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}\}$ □

性质4.2.5. $\int \psi^+(\vec{r},t)[\sigma(s)\cdot\nabla][(r_i\partial_j - r_j\partial_i)\psi(\vec{r},t)]d^3\vec{r} = i\int \psi^+(\vec{p},t)[\sigma(s)\cdot\vec{p}](p_i\tilde{\partial}_j - p_j\tilde{\partial}_i)\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}$

5 动量空间中的自旋方程及其性质

5.1 动量空间中s-自旋方程的平面波解

推论5.1.1. $\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\psi(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}, \psi(\vec{p},t) = |\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}[a_1(\vec{p},-s\varsigma)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)} + a_2^+(-\vec{p},-s\varsigma)\lambda(-\hat{p},-s\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]$

证明: $\psi(\vec{r},t) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}\lambda(\hat{p},-s\varsigma)[a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$

$\Leftrightarrow \psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}\lambda(\hat{p},-s\varsigma)[a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)} + a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]d^3\vec{p}$

$\Leftrightarrow \psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}\lambda(\hat{p},-s\varsigma)[a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} + a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}]d^3\vec{p}$

$\Leftrightarrow \psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}[a_1(\vec{p},-s\varsigma)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)} + a_2^+(-\vec{p},-s\varsigma)\lambda(-\hat{p},-s\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}$

$\Leftrightarrow \psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\psi(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}, \psi(\vec{p},t) = |\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}[a_1(\vec{p},-s\varsigma)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)} + a_2^+(-\vec{p},-s\varsigma)\lambda(-\hat{p},-s\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]$

$\Leftrightarrow \psi(\vec{p},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \psi(\vec{r},t)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}d^3\vec{p}$ □

推论5.1.2. $\psi(\vec{p},t) = |\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}[a_1(\vec{p},-s\varsigma)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)} + a_2^+(-\vec{p},-s\varsigma)\lambda(-\hat{p},-s\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]$

5.2 动量空间中s-自旋方程的多种等价形式

定理5.2.1.

$[s(\vec{p},-\partial_t)_a + iS_{ab}(s,\varsigma)(\vec{p},-\partial_t)^b]\psi(\vec{p},t) = 0$ $[\Leftrightarrow]$ $\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\vec{p}\psi(\vec{p},t) = -i\varsigma\partial_t\psi, O(s)\cdot\vec{p}\psi(\vec{p},t) = 0$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

$[s\vec{p} - i\sigma(s)\times\vec{p}]\psi(\vec{p},t) = -\sigma(s)i\varsigma\partial_t\psi(\vec{p},t)$ $[\Leftrightarrow]$ $\begin{cases}\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\vec{p}\psi(\vec{p},t) = -i\varsigma\partial_t\psi(\vec{p},t)\\ \{s^2\vec{p} - is\sigma(s)\times\vec{p} - \sigma(s)[\sigma(s)\cdot\vec{p}]\}\psi(\vec{p},t) = 0\end{cases}$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

$\{s\vec{p} - [\sigma(s)\cdot\vec{p},\sigma(s)]\}\psi(\vec{p},t) = -i\varsigma\sigma(s)\partial_t\psi(\vec{p},t)$ $[\Leftrightarrow]$ $\begin{cases}\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\vec{p}\psi(\vec{p},t) = -i\varsigma\partial_t\psi(\vec{p},t)\\ \{s^2\vec{p} + (s-1)\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\vec{p}] - s[\sigma(s)\cdot\vec{p}]\sigma(s)\}\psi(\vec{p},t) = 0\end{cases}$

推论5.2.1. $\begin{cases}\sigma(s)\cdot\nabla\psi(x) = s\varsigma\partial_t\psi(x)\\ \nabla\psi(x) = [\sigma(s)\cdot\nabla]\sigma(s)\psi(x)\end{cases}$ $[\Leftrightarrow]$ $\begin{cases}[\sigma(s)\cdot\vec{p}]\psi(\vec{p},t) = -i\varsigma\partial_t\psi(\vec{p},t)\\ \vec{p}\psi(\vec{p},t) = [\sigma(s)\cdot\vec{p}]\sigma(s)\psi(\vec{p},t)\end{cases}$ $;s=1$

5.3 重要性质一

推论5.3.1. $[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s)\psi(\vec{p},t)=\{\hat{p}+(1-\frac{1}{s})\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]\}\psi(\vec{p},t)$

$[\Rightarrow][\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]^2\sigma(s)\psi(\vec{p},t)=\{s[1-(1-\frac{1}{s})^2][\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]\hat{p}+(1-\frac{1}{s})^2\sigma(s)\}\psi(\vec{p},t)$

推论5.3.2. $[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s)\psi(\vec{p},t)=\{\hat{p}+(1-\frac{1}{s})\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]\}\psi(\vec{p},t)$

$$[\Leftrightarrow]\begin{cases}[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n\sigma(s)\psi(\vec{p},t)=\{s[1-(1-\frac{1}{s})^n][\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{n-1}\hat{p}+(1-\frac{1}{s})^n\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]^n\}\psi(\vec{p},t)\\ [\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2n}\psi(\vec{p},t)=\psi(\vec{p},t)\end{cases}$$

$$[\Leftrightarrow]\begin{cases}[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2k+1}\sigma(s)\psi(\vec{p},t)=\{s[1-(1-\frac{1}{s})^{2k+1}]\hat{p}+(1-\frac{1}{s})^{2k+1}\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]\}\psi(\vec{p},t)\\ [\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2k}\sigma(s)\psi(\vec{p},t)=\{s[1-(1-\frac{1}{s})^{2k}][\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]\hat{p}+(1-\frac{1}{s})^{2k}\sigma(s)\}\psi(\vec{p},t)\\ [\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]^{2k}\psi(\vec{p},t)=\psi(\vec{p},t)\end{cases}$$

推论5.3.3.

$$\begin{cases}[\sigma(1)\cdot\hat{p}]^{2k+1}\sigma(1)\psi(\vec{p},t)=[\sigma(1)\cdot\hat{p}]\sigma(1)\psi(\vec{p},t)=\hat{p}\psi(\vec{p},t)\\ [\sigma(1)\cdot\hat{p}]^{2k+2}\sigma(1)\psi(\vec{p},t)=[\sigma(1)\cdot\hat{p}]^2\sigma(1)\psi(\vec{p},t)=[\sigma(1)\cdot\hat{p}]\hat{p}\psi(\vec{p},t)\end{cases}$$

5.4 重要性质二

定理5.4.1.

$$\begin{cases}\psi^+(\vec{p},t)\frac{1}{s}\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]\psi(\vec{p},t)=\psi^+(\vec{p},t)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]\frac{1}{s}\sigma(s)\psi(\vec{p},t)=\psi^+(\vec{p},t)\hat{p}\psi(\vec{p},t),s\geq 1\\ \psi^+(\vec{p},t)\{\sigma(\frac{1}{2})[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]+[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]\sigma(\frac{1}{2})\}\psi(\vec{p},t)=\frac{1}{2}\psi^+(\vec{p},t)\hat{p}\psi(\vec{p},t)\end{cases}$$

证明: $\psi^+(\vec{p},t)\{s^2\hat{p}+(s-1)\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]-s[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s)\}\psi(\vec{p},t)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\psi^+(\vec{p},t)\{s^2\hat{p}+(s-1)\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]-s[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s)\}\psi(\vec{p},t)=0\\ \psi^+(\vec{p},t)\{s^2\hat{p}+(s-1)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\sigma(s)-s\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\}\psi(\vec{p},t)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\psi^+(\vec{p},t)\frac{1}{s}\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]\psi(\vec{p},t)=\psi^+(\vec{p},t)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]\frac{1}{s}\sigma(s)\psi(\vec{p},t)=\psi^+(\vec{p},t)\hat{p}\psi(\vec{p},t),s\geq 1\\ \psi^+(\vec{p},t)\{\sigma(\frac{1}{2})[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]+[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]\sigma(\frac{1}{2})\}\psi(\vec{p},t)=\frac{1}{2}\psi^+(\vec{p},t)\hat{p}\psi(\vec{p},t)\end{cases}$$ □

定理5.4.2. $[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\vec{p}]^2\psi(\vec{p},t)=\vec{p}^2\psi(\vec{p},t)=-\partial_t^2\psi(\vec{p},t)$

推论5.4.1.

$$\begin{cases}\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{1}{s}\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\psi^+(\vec{r},t)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\frac{1}{s}\sigma(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\psi^+(\vec{r},t)\hat{\nabla}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r},s\geq 1\\ \int\psi^+(\vec{r},t)\{\sigma(\frac{1}{2})[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{\nabla}]+[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{\nabla}]\sigma(\frac{1}{2})\}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\frac{1}{2}\psi^+(\vec{r},t)\hat{\nabla}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\end{cases}$$

5.5 重要性质三

引理5.5.1. $\psi^+(\vec{p},t)\sigma(s)\psi(\vec{p},t)=(-s\varsigma)|\vec{p}|^{(2s-1)}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)-a_2(-\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(-\vec{p},-s\varsigma)]\hat{p},s\geq 1$

证明: $\psi^+(\vec{p},t)\sigma(s)\psi(\vec{p},t),s\geq 1$

$=|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}+a_2(-\vec{p},-s\varsigma)\lambda^+(-\hat{p},-s\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}]$

$\sigma(s)|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}[a_1(\vec{p},-s\varsigma)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}+a_2^+(-\vec{p},-s\varsigma)\lambda(-\hat{p},-s\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]$

$=|\vec{p}|^{(2s-1)}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}+a_2(-\vec{p},-s\varsigma)\lambda^+(-\hat{p},-s\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}]$

$\sigma(s)[a_1(\vec{p},-s\varsigma)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}+a_2^+(-\vec{p},-s\varsigma)\lambda(-\hat{p},-s\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]$

$=(-s\varsigma)|\vec{p}|^{(2s-1)}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)-a_2(-\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(-\vec{p},-s\varsigma)]\hat{p},s\geq 1$ □

引理5.5.2. $\psi^+(\vec{p},t)\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\psi(\vec{p},t)=s^2|\vec{p}|^{(2s-1)}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)+a_2(-\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(-\vec{p},-s\varsigma)]\hat{p},s\geq 1$

证明: $\psi^+(\vec{p},t)\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\psi(\vec{p},t),s\geq 1$

$=|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}+a_2(-\vec{p},-s\varsigma)\lambda^+(-\hat{p},-s\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}]$

$\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}[a_1(\vec{p},-s\varsigma)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}+a_2^+(-\vec{p},-s\varsigma)\lambda(-\hat{p},-s\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]$

$= |\vec{p}|^{(2s-1)}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)\lambda^+(\hat{p},-s\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)} + a_2(-\vec{p},-s\varsigma)\lambda^+(-\hat{p},-s\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}]$
$\sigma(s)[-s\varsigma a_1(\vec{p},-s\varsigma)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)} + s\varsigma a_2^+(-\vec{p},-s\varsigma)\lambda(-\hat{p},-s\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]$
$= s^2|\vec{p}|^{(2s-1)}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma) + a_2(-\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(-\vec{p},-s\varsigma)]\hat{p}, s\geq 1$ □

定理5.5.1.
$$\begin{cases}\psi^+(\vec{p},t)\sigma(s)\psi(\vec{p},t) = \psi^+(\vec{p},t)[\sigma(s)\cdot\hat{p}]\hat{p}\psi(\vec{p},t), \psi^+(\vec{p},t)\sigma(s)\times\hat{p}\psi(\vec{p},t)=0, s\geq 1\\ \psi^+(\vec{p},t)\frac{1}{s}\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]\psi(\vec{p},t) = \psi^+(\vec{p},t)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]\frac{1}{s}\sigma(s)\psi(\vec{p},t) = \psi^+(\vec{p},t)\hat{p}\psi(\vec{p},t), s\geq 1\\ \psi^+(\vec{p},t)\frac{1}{s}\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k\psi(\vec{p},t) = \psi^+(\vec{p},t)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]^k\frac{1}{s}\sigma(s)\psi(\vec{p},t), s\geq 1\end{cases}$$

推论5.5.1.
$$\begin{cases}\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int\psi^+(\vec{r},t)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\hat{\nabla}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}, \int\psi^+(\vec{r},t)[\sigma(s)\times\hat{\nabla}]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=0, s\geq 1\\ \int\psi^+(\vec{r},t)\frac{1}{s}\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int\psi^+(\vec{r},t)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\frac{1}{s}\sigma(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int\psi^+(\vec{r},t)\hat{\nabla}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}, s\geq 1\\ \int\psi^+(\vec{r},t)\frac{1}{s}\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^k\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int\psi^+(\vec{r},t)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^k\frac{1}{s}\sigma(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}, s\geq 1\\ \int\psi^+(\vec{r},t)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^i\frac{1}{s}\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^j\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int\psi^+(\vec{r},t)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^j\frac{1}{s}\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^i\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}, s\geq 1\end{cases}$$

推论5.5.2.
$$\begin{cases}\psi^+(\vec{p},t)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]\frac{1}{s}\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{p}]\psi(\vec{p},t) = \psi^+(\vec{p},t)\frac{1}{s}\sigma(s)\psi(\vec{p},t), s\geq 1\\ \int\psi^+(\vec{r},t)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\frac{1}{s}\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int\psi^+(\vec{r},t)\frac{1}{s}\sigma(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}, s\geq 1\\ \int\psi^+(\vec{r},t)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^i\frac{1}{s}\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^j\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int\psi^+(\vec{r},t)\frac{1}{s}\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{i+j}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}, s\geq 1\end{cases}$$

6 自旋和角动量算符的各种性质(满足自旋方程)

6.1 自旋波函数的一般性质

定义6.1.1. $\Gamma(n;m,l) := (\sqrt{-\nabla^2})^n\partial_\pi^m\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{l}, n\in Z; m,l\in N$

推论6.1.1. $\int\psi^+(\vec{r},t)\Gamma(n;m,l)\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r} = -\int\dot{\psi}^+(\vec{r},t)\Gamma(n;m,l)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

推论6.1.2. $\begin{cases}\int\psi^+(\vec{r},t)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\hat{\nabla}\Gamma(n;m,l)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int\psi^+(\vec{r},t)\sigma(s)\Gamma(n;m,l)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}, s\geq 1\\ \int\psi^+(\vec{r},t)\sigma(s)\Gamma(n;m,l)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = s\varsigma\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{\nabla}{\nabla^2}\Gamma(n;m,l)\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r}, s\geq 1\end{cases}$

推论6.1.3. $\begin{cases}\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{1}{s}\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]\Gamma(n;m,l)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int\psi^+(\vec{r},t)\hat{\nabla}\Gamma(n;m,l)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}, s\geq 1\\ \int\psi^+(\vec{r},t)\sigma(s)\Gamma(n;m,l)\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r} = s\varsigma\int\psi^+(\vec{r},t)\nabla\Gamma(n;m,l)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}, s\geq 1\end{cases}$

性质6.1.1. $\begin{cases}\int\psi^+(\vec{r},t)[\sigma_i(s)\partial_j - \sigma_j(s)\partial_i]\Gamma(n;m,l)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = 0, s\geq 1\\ \int\psi^+(\vec{r},t)[\sigma_i(s)\partial_j - \sigma_j(s)\partial_i]\Gamma(n;m,l)\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r} = 0, s\geq 1\end{cases}$

推论6.1.4.
$$\begin{cases}\int\psi^+(\vec{r},t)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^j\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^k\Gamma(n;m,l)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int\psi^+(\vec{r},t)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^k\sigma(s))[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^j\Gamma(n;m,l)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}, s\geq 1\\ \int\psi^+[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^j\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^k\Gamma(n;m,l)\psi d^3\vec{r} = s\varsigma\int\psi^+[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{j+k}\frac{\nabla}{\nabla^2}\Gamma(n;m,l)\dot{\psi}d^3\vec{r}, s\geq 1\\ \int\psi^+[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^j\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^k\Gamma(n;m,l)\dot{\psi}d^3\vec{r} = s\varsigma\int\psi^+[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^{j+k}\nabla\Gamma(n;m,l)\psi d^3\vec{r}, s\geq 1\end{cases}$$

6.2 角动量算符的性质一

引理6.2.1. $\nabla^2(r_i\partial_j - r_j\partial_i) = (r_i\partial_j - r_j\partial_i)\nabla^2$

引理6.2.2. $[\sigma(s)\cdot\nabla](r_i\partial_j - r_j\partial_i) = (r_i\partial_j - r_j\partial_i)[\sigma(s)\cdot\nabla] + [\sigma_i(s)\partial_j - \sigma_j(s)\partial_i]$

引理6.2.3. $[\sigma(s)\cdot\nabla]^2(r_i\partial_j - r_j\partial_i)$
$= (r_i\partial_j - r_j\partial_i)[\sigma(s)\cdot\nabla]^2 + [\sigma_i(s)\partial_j - \sigma_j(s)\partial_i][\sigma(s)\cdot\nabla] + [\sigma(s)\cdot\nabla][\sigma_i(s)\partial_j - \sigma_j(s)\partial_i]$

证明： $[\sigma(s)\cdot\nabla]^2(r_i\partial_j-r_j\partial_i)$
$=[\sigma(s)\cdot\nabla]\{(r_i\partial_j-r_j\partial_i)[\sigma(s)\cdot\nabla]+[\sigma_i(s)\partial_j-\sigma_j(s)\partial_i]\}$
$=(r_i\partial_j-r_j\partial_i)[\sigma(s)\cdot\nabla]^2+[\sigma_i(s)\partial_j-\sigma_j(s)\partial_i][\sigma(s)\cdot\nabla]+[\sigma(s)\cdot\nabla][\sigma_i(s)\partial_j-\sigma_j(s)\partial_i]$ □

性质6.2.1.
$$\begin{cases}s\geq 1,n\in Z,l,m\in N,\\ \int\psi^+(\vec r,t)[\sigma(s)\cdot\nabla](r_i\partial_j-r_j\partial_i)\Gamma(n;m,l)\psi(\vec r,t)d^3\vec r=\int\psi^+(\vec r,t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)[\sigma(s)\cdot\nabla]\Gamma(n;m,l)\psi(\vec r,t)d^3\vec r\\ \int\psi^+(\vec r,t)[\sigma(s)\cdot\nabla](r_i\partial_j-r_j\partial_i)\Gamma(n;m,l)\dot\psi(\vec r,t)d^3\vec r=\int\psi^+(\vec r,t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)[\sigma(s)\cdot\nabla]\Gamma(n;m,l)\dot\psi(\vec r,t)d^3\vec r\end{cases}$$

性质6.2.2.
$$\begin{cases}s\geq 1,n\in Z,l,m\in N,\\ \int\psi^+(\vec r,t)[\sigma(s)\cdot\nabla]^2(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\Gamma(n;m,l)\psi(\vec r,t)d^3\vec r=\int\psi^+(\vec r,t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)[\sigma(s)\cdot\nabla]^2\Gamma(n;m,l)\psi(\vec r,t)d^3\vec r\\ \int\psi^+(\vec r,t)[\sigma(s)\cdot\nabla]^2(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\Gamma(n;m,l)\dot\psi(\vec r,t)d^3\vec r=\int\psi^+(\vec r,t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)[\sigma(s)\cdot\nabla]^2\Gamma(n;m,l)\dot\psi(\vec r,t)d^3\vec r\end{cases}$$

推论6.2.1.
$$\begin{cases}s\geq 1,n\in Z,l,m\in N,\\ \int\psi^+(\vec r,t)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat\nabla]^2(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\Gamma(n;m,l)\psi(\vec r,t)d^3\vec r=\int\psi^+(\vec r,t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\Gamma(n;m,l)\psi(\vec r,t)d^3\vec r\\ \int\psi^+(\vec r,t)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\hat\nabla]^2(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\Gamma(n;m,l)\dot\psi(\vec r,t)d^3\vec r=\int\psi^+(\vec r,t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\Gamma(n;m,l)\dot\psi(\vec r,t)d^3\vec r\end{cases}$$

6.3 角动量算符的性质二

推论6.3.1.
$$\begin{cases}\int\psi^+(\vec r,t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec r,t)d^3\vec r=i\int\psi^+(\vec p,t)(p_i\tilde\partial_j-p_j\tilde\partial_i)\{[\sigma(s)\cdot\vec p]\psi(\vec p,t)\}d^3\vec p,s\geq\frac{1}{2}\\ \int\psi^+(\vec r,t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec r,t)d^3\vec r=i\int\psi^+(\vec p,t)[\sigma(s)\cdot\vec p](p_i\tilde\partial_j-p_j\tilde\partial_i)\psi(\vec p,t)d^3\vec p,s\geq 1\end{cases}$$

推论6.3.2.
$$\begin{cases}\int\psi^+(\vec r,t)(r_i\hat\partial_j-r_j\hat\partial_i)[\sigma(s)\cdot\hat\nabla]\psi(\vec r,t)d^3\vec r=i\int\psi^+(\vec p,t)(\hat p_i\tilde\partial_j-\hat p_j\tilde\partial_i)\{[\sigma(s)\cdot\hat p]\psi(\vec p,t)\}d^3\vec p,s\geq\frac{1}{2}\\ \int\psi^+(\vec r,t)(r_i\hat\partial_j-r_j\hat\partial_i)[\sigma(s)\cdot\hat\nabla]\psi(\vec r,t)d^3\vec r=i\int\psi^+(\vec p,t)[\sigma(s)\cdot\hat p](\hat p_i\tilde\partial_j-\hat p_j\tilde\partial_i)\psi(\vec p,t)d^3\vec p,s\geq 1\end{cases}$$

推论6.3.3.
$$\begin{cases}\int\psi^+(\vec r,t)[r_i\sigma_j(s)-r_j\sigma_i(s)]\psi(\vec r,t)d^3\vec r=-i\int\psi^+(\vec p,t)[\sigma_i(s)\tilde\partial_j-\sigma_j(s)\tilde\partial_i]\psi(\vec p,t)d^3\vec p\\ \int\psi^+(\vec r,t)(r_i\partial_j-r_j\partial_i)\psi(\vec r,t)d^3\vec r=\int\psi^+(\vec p,t)(p_i\tilde\partial_j-p_j\tilde\partial_i)\psi(\vec p,t)d^3\vec p\end{cases}$$

推论6.3.4. $-i\int\psi^+(\vec r,t)[r_i\partial_j-r_j\partial_i-\sigma^k_{\varsigma ij}\sigma_k(s)]\psi(\vec r,t)d^3\vec r$
$=-i\int\psi^+(\vec r,t)[r_i\partial_j-r_j\partial_i+i\varepsilon_{ij}{}^k\sigma_k(s)]\psi(\vec r,t)d^3\vec r$
$=-i\int\psi^+(\vec r,t)\{r_i\partial_j-r_j\partial_i+[\sigma_i(s),\sigma_j(s)]\}\psi(\vec r,t)d^3\vec r$
$=-i\int\psi^+(\vec p,t)\{p_i\tilde\partial_j-p_j\tilde\partial_i+[\sigma_i(s),\sigma_j(s)]\}\psi(\vec p,t)d^3\vec p$

6.4 角动量算符的性质???

推论6.4.1. $\int\psi^+(\vec r,t)r_i\sigma_j(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec r,t)d^3\vec r=-\int\psi^+(\vec p,t)\{\sigma_j(s)\sigma_i(s)+\sigma_j(s)[\sigma(s)\cdot\vec p]\tilde\partial_i\}\psi(\vec p,t)d^3\vec p$

证明： $\int\psi^+(\vec r,t)r_i\sigma_j(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec r,t)d^3\vec r$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec pd^3\vec p'd^3\vec r\psi^+(\vec p',t)e^{-i\vec p'\cdot\vec r}r_i\sigma_j(s)[\sigma(s)\cdot\nabla][\psi(\vec p,t)e^{i\vec p\cdot\vec r}]$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec pd^3\vec p'd^3\vec r\psi^+(\vec p',t)e^{-i\vec p'\cdot\vec r}\sigma_j(s)[\sigma(s)\cdot i\vec p]\psi(\vec p,t)(-i\tilde\partial_i)e^{i\vec p\cdot\vec r}$
$=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec pd^3\vec p'd^3\vec r\psi^+(\vec p',t)\tilde\partial_i\{\sigma_j(s)[\sigma(s)\cdot\vec p]\psi(\vec p,t)\}e^{i(\vec p-\vec p')\cdot\vec r}$
$=-\int d^3\vec pd^3\vec p'\psi^+(\vec p',t)\tilde\partial_i\{\sigma_j(s)[\sigma(s)\cdot\vec p]\psi(\vec p,t)\}\delta^3(\vec p-\vec p')$
$=-\int\psi^+(\vec p,t)\sigma_j(s)\tilde\partial_i\{[\sigma(s)\cdot\vec p]\psi(\vec p,t)\}d^3\vec p$
$=-\int\psi^+(\vec p,t)\{\sigma_j(s)\sigma_i(s)+\sigma_j(s)[\sigma(s)\cdot\vec p]\tilde\partial_i\}\psi(\vec p,t)d^3\vec p$ □

推论6.4.2. $\int\psi^+(\vec r,t)[\sigma(s)\cdot\nabla]\{r_i\sigma_j(s)\psi(\vec r,t)\}d^3\vec r=-\int d^3\vec p\psi^+(\vec p,t)[\sigma(s)\cdot\vec p]\sigma_j(s)\tilde\partial_i\psi(\vec p,t)$

证明： $\int \psi^+(\vec{r},t)[\sigma(s)\cdot\nabla]\{r_i\sigma_j(s)\psi(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\psi^+(\vec{p}',t)e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{r}}[\sigma(s)\cdot\nabla][r_i\sigma_j(s)\psi(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}]$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\psi^+(\vec{p}',t)e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{r}}[\sigma(s)\cdot\nabla][r_ie^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}]\sigma_j(s)\psi(\vec{p},t)$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\psi^+(\vec{p}',t)e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{r}}\{[\sigma(s)\cdot\nabla]r_i[e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}]+r_i[\sigma(s)\cdot\nabla]e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}\}\sigma_j(s)\psi(\vec{p},t)$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\psi^+(\vec{p}',t)e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{r}}\{[\sigma_i(s)\sigma_j(s)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}]+[\sigma(s)\cdot\vec{p}][\sigma_j(s)\tilde{\partial}_ie^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}]\}\psi(\vec{p},t)$
$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'d^3\vec{r}\psi^+(\vec{p}',t)\{\sigma_i(s)\sigma_j(s)\psi(\vec{p},t)-\tilde{\partial}_i[\sigma(s)\cdot\vec{p}\sigma_j(s)\psi(\vec{p},t)]\}e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}$
$= \int d^3\vec{p}\psi^+(\vec{p},t)\{[\sigma_i(s)\sigma_j(s)]\psi(\vec{p},t)-\tilde{\partial}_i[\sigma(s)\cdot\vec{p}\sigma_j(s)\psi(\vec{p},t)]\}$
$= -\int \psi^+(\vec{p},t)[\sigma(s)\cdot\vec{p}]\sigma_j(s)\tilde{\partial}_i\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}$ □

推论6.4.3.
$$\begin{cases}\int \psi^+(\vec{r},t)[r_i\sigma_j(s)-r_j\sigma_i(s)][\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int \psi^+(\vec{p},t)[\sigma_i(s)\tilde{\partial}_j-\sigma_j(s)\tilde{\partial}_i]\{[\sigma(s)\cdot\vec{p}]\psi(\vec{p},t)\}d^3\vec{p}\\ \int \psi^+(\vec{r},t)[\sigma(s)\cdot\nabla]\{[r_i\sigma_j(s)-r_j\sigma_i(s)]\psi(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}=\int \psi^+(\vec{p},t)[\sigma(s)\cdot\vec{p}][\sigma_i(s)\tilde{\partial}_j-\sigma_j(s)\tilde{\partial}_i]\psi(\vec{p},t)d^3\vec{p}\end{cases}$$

引理6.4.1.
$$\begin{cases}\Psi(\vec{p},t)=|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_1(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m(\hat{p},-\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}+a_2^+(-\vec{p},-\varsigma)\lambda_m(-\hat{p},-\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]\\ (\gamma\cdot\vec{p})\Psi(\vec{p},t)=-\varsigma|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_1(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m(\hat{p},-\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}-a_2^+(-\vec{p},-\varsigma)\lambda_m(-\hat{p},-\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]\end{cases}$$

推论6.4.4. $\lambda_m^+(-\hat{p},-\varsigma)(\gamma_i\tilde{\partial}_j-\gamma_j\tilde{\partial}_i)\lambda_m(\hat{p},-\varsigma)=0,\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma)(\gamma_i\tilde{\partial}_j-\gamma_j\tilde{\partial}_i)\lambda_m(-\hat{p},-\varsigma)=0$

定理6.4.1. $\int d^3\vec{r}\{\Psi^+(\vec{r},t)(r_i\gamma_j-r_j\gamma_i)(\gamma\cdot\nabla)\Psi(\vec{r},t)-\Psi^+(\vec{r},t)(\gamma\cdot\nabla)[(r_i\gamma_j-r_j\gamma_i)\Psi(\vec{r},t)]\}=0$

证明： $\int d^3\vec{r}\{\Psi^+(\vec{r},t)(r_i\gamma_j-r_j\gamma_i)(\gamma\cdot\nabla)\Psi(\vec{r},t)-\Psi^+(\vec{r},t)(\gamma\cdot\nabla)[(r_i\gamma_j-r_j\gamma_i)\Psi(\vec{r},t)]\}$
$=\int d^3\vec{r}\{\Psi^+(\vec{p},t)(\gamma_i\tilde{\partial}_j-\gamma_j\tilde{\partial}_i)[(\gamma\cdot\vec{p})\Psi(\vec{p},t)]-\Psi^+(\vec{p},t)(\gamma\cdot\vec{p})(\gamma_i\tilde{\partial}_j-\gamma_j\tilde{\partial}_i)\Psi(\vec{p},t)\}$
$=\int d^3\vec{r}\{\Psi^+(\vec{p},t)(\gamma_i\tilde{\partial}_j-\gamma_j\tilde{\partial}_i)[(\gamma\cdot\vec{p})\Psi(\vec{p},t)]-[(\gamma\cdot\vec{p})\Psi(\vec{p},t)]^+(\gamma_i\tilde{\partial}_j-\gamma_j\tilde{\partial}_i)\Psi(\vec{p},t)\}$
$=-\varsigma\int d^3\vec{r}\{|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_1^+(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}+a_2(-\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^+(-\hat{p},-\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}]$
$(\gamma_i\tilde{\partial}_j-\gamma_j\tilde{\partial}_i)\{|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_1(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m(\hat{p},-\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}-a_2^+(-\vec{p},-\varsigma)\lambda_m(-\hat{p},-\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]\}$
$-\{|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_1^+(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}-a_2(-\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^+(-\hat{p},-\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}]\}$
$(\gamma_i\tilde{\partial}_j-\gamma_j\tilde{\partial}_i)\{|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_1(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m(\hat{p},-\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}+a_2^+(-\vec{p},-\varsigma)\lambda_m(-\hat{p},-\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]\}\}$
$=2\varsigma\int d^3\vec{r}|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_1^+(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}](\gamma_i\tilde{\partial}_j-\gamma_j\tilde{\partial}_i)\{|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_2^+(-\vec{p},-\varsigma)\lambda_m(-\hat{p},-\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]\}$
$-2\varsigma\int d^3\vec{r}|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_2(-\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^+(-\hat{p},-\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}](\gamma_i\tilde{\partial}_j-\gamma_j\tilde{\partial}_i)\{|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_1(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m(\hat{p},-\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}]\}$
$=2\varsigma\int d^3\vec{r}|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_1^+(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}](\gamma_i\tilde{\partial}_j-\gamma_j\tilde{\partial}_i)\{|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_2^+(-\vec{p},-\varsigma)\lambda_m(-\hat{p},-\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]\}$
$-2\varsigma\int d^3\vec{r}|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_2(-\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^+(-\hat{p},-\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}](\gamma_i\tilde{\partial}_j-\gamma_j\tilde{\partial}_i)\{|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_1(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m(\hat{p},-\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}]\}$
$=2\varsigma\int d^3\vec{r}|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_1^+(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}](\gamma_i\tilde{\partial}_j-\gamma_j\tilde{\partial}_i)\lambda_m(-\hat{p},-\varsigma)\{|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_2^+(-\vec{p},-\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]\}$
$-2\varsigma\int d^3\vec{r}|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_2(-\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^+(-\hat{p},-\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}](\gamma_i\tilde{\partial}_j-\gamma_j\tilde{\partial}_i)\lambda_m(\hat{p},-\varsigma)\{|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_1(\vec{p},-\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}]\}$
$+2\varsigma\int d^3\vec{r}|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_1^+(\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^+(\hat{p},-\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}][\gamma_i\lambda_m(-\hat{p},-\varsigma)\tilde{\partial}_j-\gamma_j\lambda_m(-\hat{p},-\varsigma)\tilde{\partial}_i]\{|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_2^+(-\vec{p},-\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]\}$
$-2\varsigma\int d^3\vec{r}|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_2(-\vec{p},-\varsigma)\lambda_m^+(-\hat{p},-\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}][\gamma_i\lambda_m(\hat{p},-\varsigma)\tilde{\partial}_j-\gamma_j\lambda_m(\hat{p},-\varsigma)\tilde{\partial}_i]\{|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}[a_1(\vec{p},-\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}]\}$
$=0-0+0-0=0$ □

推论6.4.5. $\int d^3\vec{r}\{\psi^+(\vec{r},t)[r_i\sigma_j(1)-r_j\sigma_i(1)][\sigma(1)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)-\psi^+(\vec{r},t)[\sigma(1)\cdot\nabla]\{[r_i\sigma_j(1)-r_j\sigma_i(1)]\psi(\vec{r},t)\}\}=0$

6.5 角动量算符的性质三

推论6.5.1. $\psi^+(\vec{p},t)\sigma_i(s)[\sigma(s)\cdot\vec{p}]\tilde{\partial}_j\psi(\vec{p},t)??=\psi^+(\vec{p},t)p_i\tilde{\partial}_j\psi(\vec{p},t)$

引理6.5.1.
$$\begin{cases}P_a=-i\int \psi^+(\vec{r},t)\partial_a\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int \psi^+(\vec{r},t)\hat{P}_a\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\ L_{ab}=-i\int \psi^+(\vec{r},t)(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int \psi^+(\vec{r},t)\hat{L}_{ab}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\ M_{ab}=\int \psi^+(\vec{r},t)[-i(r_a\partial_b-r_b\partial_a)+i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int \psi^+(\vec{r},t)\hat{M}_{ab}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\ \tilde{M}_{ab}=-i\int \psi^+(\vec{r},t)(r_a\sigma_b-r_b\sigma_a)\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r}\\ \bar{M}_{ab}=-i\int \psi^+(\vec{r},t)(r_a\sigma_b-r_b\sigma_a)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}\end{cases}$$

定理6.5.1. $S_{ab}=\int\psi^+(\vec{r},t)S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=i\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\frac{-i\varsigma}{2}\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\int\hat{p}_{\alpha_\varsigma}[a_1^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})+a_2(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})]d^3\vec{p}$

6.6 自旋算符的性质一

推论6.6.1. $\begin{cases}\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=s\varsigma\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{\nabla}{\nabla^2}\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r},s\geq 1\\ \int\psi^+(\vec{r},t)\sigma(s)\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r}=s\varsigma\int\psi^+(\vec{r},t)\nabla\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r},s\geq 1\end{cases}$

推论6.6.2. $\begin{cases}\int\psi^+(\vec{r},t)S_{ab}(s,\varsigma)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=is\varsigma\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{\nabla_{\alpha_\varsigma}}{\nabla^2}\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r},s\geq 1\\ \int\psi^+(\vec{r},t)S_{ab}(s,\varsigma)\dot{\psi}(\vec{r},t)d^3\vec{r}=is\varsigma\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\int\psi^+(\vec{r},t)\nabla_{\alpha_\varsigma}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r},s\geq 1\end{cases}$

推论6.6.3. $\begin{cases}\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\sigma_{\alpha_\varsigma}(n+\frac{1}{2})\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}=-(n+\frac{1}{2})\varsigma\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}\nabla_{\alpha_\varsigma}\frac{\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}},n+\frac{1}{2}\geq 1\\ \int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\sigma_{\alpha_\varsigma}(n)\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}=n\varsigma\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\nabla_{\alpha_\varsigma}\frac{i\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},n\geq 1\end{cases}$

推论6.6.4. $\begin{cases}\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}S_{ab}(n+\frac{1}{2},\varsigma)\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}=-(n+\frac{1}{2})i\varsigma\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}\nabla_{\alpha_\varsigma}\frac{\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}},n+\frac{1}{2}\geq 1\\ \int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}S_{ab}(n,\varsigma)\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}=ni\varsigma\sigma_{\varsigma ab}^{\alpha_\varsigma}\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\nabla_{\alpha_\varsigma}\frac{i\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},n\geq 1\end{cases}$

6.7 自旋算符的性质二

推论6.7.1. $\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma_i(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\sigma_j(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}?=\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma_i(s)\sigma_j(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

推论6.7.2. $\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma_i(s)\sigma_j(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=???$

推论6.7.3. $[\sigma(s)\cdot\nabla]\sigma(s)\psi=\{s\nabla+(s-1)\sigma(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi$

证明： $\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma_i(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\sigma_j(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma_i(s)\{s\partial_j+(s-1)\sigma_j(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\nabla]\}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\int\psi^+(\vec{r},t)s\sigma_i(s)\partial_j\psi(\vec{r},t)+\psi^+(\vec{r},t)(s-1)\sigma_i(s)\sigma_j(s)[\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\int\psi^+(\vec{r},t)s[\sigma(s)\cdot\nabla]\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j\psi(\vec{r},t)+\psi^+(\vec{r},t)(s-1)[s^2\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j+\frac{s}{2}(\delta_{ij}-\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j+i\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\hat{\partial}_k\hat{\partial}_t)][\frac{1}{s}\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\int\psi^+(\vec{r},t)[s^2\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j+\frac{s-1}{2}(\delta_{ij}-\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j+i\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\hat{\partial}_k\hat{\partial}_t)][\sigma(s)\cdot\nabla]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

推论6.7.4. $[\sigma(s)\cdot\nabla]^2\sigma(s)\psi=\{(2s-1)[\sigma(s)\cdot\nabla]\nabla+(1-\frac{1}{s})^2\sigma(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]^2\}\psi$

证明： $\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma_i(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]^2\sigma_j(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma_i(s)\{(2s-1)[\sigma(s)\cdot\nabla]\partial_j+(1-\frac{1}{s})^2\sigma_j(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]^2\}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\int\psi^+(\vec{r},t)\{(2s-1)\sigma_i(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]\partial_j+(s-1)^2\sigma_i(s)\sigma_j(s)\nabla^2\}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\int\psi^+(\vec{r},t)\{(2s-1)s^2\partial_i\partial_j+(s-1)^2\sigma_i(s)\sigma_j(s)\nabla^2\}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\int\psi^+(\vec{r},t)\{(2s-1)s^2\partial_i\partial_j+(s-1)^2[s^2\partial_i\partial_j+\frac{s}{2}(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j+i\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t)]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\int\psi^+(\vec{r},t)\{s^4\partial_i\partial_j+\frac{s}{2}(s-1)^2(\delta_{ij}\nabla^2-\partial_i\partial_j+i\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

证明： $\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma_{[i}(s)[\sigma(s)\cdot\nabla]^2\sigma_{j]}(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\psi^+(\vec{r},t)s(s-1)^2i\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\partial_t\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

证明： $\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma_{[i}(s)[\sigma(s)\cdot\hat{\nabla}]^2\sigma_{j]}(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=(s-1)^2i\varepsilon_{ij}{}^k\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma_k(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

证明： $\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma_i(s)\sigma_j(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\psi^+(\vec{r},t)[s^2\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j+\frac{s}{2}(\delta_{ij}\hat{\nabla}^2-\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j+i\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\hat{\partial}_k\hat{\partial}_t)]\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r},s\neq 1$ □

证明： $\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma_{[i}(s)\sigma_{j]}(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=i\varsigma s\int\psi^+(\vec{r},t)\varepsilon_{ij}{}^k\hat{\partial}_k\hat{\partial}_t\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=i\varepsilon_{ij}{}^k\int\psi^+(\vec{r},t)\sigma_k(s)\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r},s\neq 1$ □

推论6.7.5. $\psi(\vec{p},t)=|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}[a_1(\vec{p},-s\varsigma)\lambda(\hat{p},-s\varsigma)e^{-i|\vec{p}|t)}+a_2^+(-\vec{p},-s\varsigma)\lambda(-\hat{p},-s\varsigma)e^{i|\vec{p}|t)}]$

6.8 自旋算符的性质三

证明: $\int \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}\sigma_{[i}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{1}{8}\{-1+4[\sigma(\frac{3}{2})\cdot\hat{\nabla}]^2\}\sigma_{j]}(\frac{3}{2},\varsigma)\frac{\psi(\vec{r},t)}{\sqrt{-\nabla^2}}d^3\vec{r}$ □

猜想6.8.1.

$$\begin{cases}P_a(n+\frac{1}{2})=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat{P}_a\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}\\ M_{ab}(n+\frac{1}{2})=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat{M}_{ab}\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}\end{cases}\quad\begin{cases}P_a(n)=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat{P}_a\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}\\ M_{ab}(n)=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\hat{M}_{ab}\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}\end{cases}$$

猜想6.8.2.

$$\begin{cases}\hat{s}(n+\frac{1}{2})=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\sigma(n+\frac{1}{2})\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}=\varsigma(n+\frac{1}{2})\int\frac{\dot{\psi}^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}\nabla\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}d^3\vec{r}\\ \hat{s}(n)=\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\sigma_\alpha(n)\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}=i\varsigma n\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\nabla\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}\end{cases}$$

7 s-自旋粒子的彭加莱对称性

7.1 玻色子的彭加莱对称性

引理7.1.1.

$$\begin{cases}[\frac{\dot{\psi}_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]=\frac{i}{(-2)^{n-1}}\Gamma_+^{\overbrace{ef\cdots}^{2n}}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [\frac{\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]=\frac{i}{(-2)^{n-1}}\frac{-1}{i\sqrt{-\nabla^2}}\Gamma_-^{\overbrace{ef\cdots}^{2n}}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}'),n>0\end{cases}$$

定理7.1.1.

$$\begin{cases}[L_{ab},L_{cd}]=-i(g_{ad}L_{bc}-g_{ac}L_{bd}+g_{bc}L_{ad}-g_{bd}L_{ac})\\ [L_{ab},P_c]=-i(g_{bc}P_a-g_{ac}P_b),[P_a,P_b]=0\end{cases}$$

证明: $[L_{ab},L_{cd}]$

$=-\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},\frac{\psi^+(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{i\dot{\psi}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]$

$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]$

$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}](r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}$

$+\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}](r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$

$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\Gamma_+^{\overbrace{ef\cdots}^{2n}}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}$

$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\Gamma_+^{\overbrace{ef\cdots}^{2n}}(n)\overbrace{\hat{\partial}'_e\hat{\partial}'_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}'_\pi\to i}\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$

$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial'_b-r_b\partial'_a)\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\Gamma_+^{\overbrace{ef\cdots}^{2n}}(n)\overbrace{\hat{\partial}'_e\hat{\partial}'_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}'_\pi\to i}\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r'_c\partial'_d-r'_d\partial'_c)\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}$

$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}(r'_c\partial_d-r'_d\partial_c)\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\Gamma_+^{\overbrace{ef\cdots}^{2n}}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$

$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}$

$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\Gamma_+^{\overbrace{ef\cdots}^{2n}}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}(r_c\partial_d-r_d\partial_c)\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}$

$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_c\partial_d-r_d\partial_c)\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\Gamma_+^{\overbrace{ef\cdots}^{2n}}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$

$=-\int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[-i(r_a\partial_b-r_b\partial_a),-i(r_c\partial_d-r_d\partial_c)]\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\Gamma_+^{\overbrace{ef\cdots}^{2n}}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\}\frac{\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}$

$= \int \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[\hat{L}_{ab}, \hat{L}_{cd}]\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}$
$= -i(g_{ad}L_{bc} - g_{ac}L_{bd} + g_{bc}L_{ad} - g_{bd}L_{ac})$ □

证明： $[L_{ab}, P_c]$
$= -\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, \frac{\psi^+(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\partial'_c\frac{i\dot{\psi}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]$
$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\partial'_c\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]$
$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]\partial'_c\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n} + \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, \partial'_c\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}](r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$
$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\overbrace{\Gamma^{ef\cdots}_+}^{2n}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_c\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}$
$- \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\partial'_c\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\overbrace{\Gamma^{ef\cdots}_+}^{2n}(n)\overbrace{\hat{\partial}'_e\hat{\partial}'_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}'_\pi\to i}\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$
$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial'_b - r_b\partial'_a)\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\overbrace{\Gamma^{ef\cdots}_+}^{2n}(n)\overbrace{\hat{\partial}'_e\hat{\partial}'_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}'_\pi\to i}\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_c\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}$
$- \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\partial_c\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\overbrace{\Gamma^{ef\cdots}_+}^{2n}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$
$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\overbrace{\Gamma^{ef\cdots}_+}^{2n}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial_c\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n} - \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\partial_c\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\overbrace{\Gamma^{ef\cdots}_+}^{2n}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}$
$(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$

$= -\int \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[-i(r_a\partial_b - r_b\partial_a), -i\partial'_c]\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\overbrace{\Gamma^{ef\cdots}_+}^{2n}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\}\frac{\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}$
$= \int \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[\hat{L}_{ab}, \hat{P}_c]\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}$
$= -i(g_{bc}P_a - g_{ac}P_b)$ □

证明： $[P_a, P_b]$
$= -\int[\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\partial_a\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, \frac{\psi^+(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\partial'_b\frac{i\dot{\psi}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\partial_a\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\partial'_b\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[\partial_a\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]\partial'_b\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n} + \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, \partial'_b\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]\partial_a\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$
$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\overbrace{\Gamma^{ef\cdots}_+}^{2n}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_b\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n} - \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\overbrace{\Gamma^{ef\cdots}_+}^{2n}(n)\overbrace{\hat{\partial}'_e\hat{\partial}'_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}'_\pi\to i}\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}$
$\partial'_b\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})\partial_a\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$
$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$
$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\overbrace{\Gamma^{ef\cdots}_+}^{2n}(n)\overbrace{\hat{\partial}'_e\hat{\partial}'_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}'_\pi\to i}\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial'_a\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_b\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n} - \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\overbrace{\Gamma^{ef\cdots}_+}^{2n}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}$
$\partial_b\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial_a\frac{\dot{\psi}_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$

$= \int\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\{\overbrace{\Gamma^{ef\cdots}_+}^{2n}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\}^{k_\varsigma l'_\varsigma}\partial_a\partial_b\frac{\dot{\psi}_{l'_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n} - \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\{\overbrace{\Gamma^{ef\cdots}_+}^{2n}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\}^{k'_\varsigma l_\varsigma}\partial_b\partial_a\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}d^3\vec{r}$

$= \int\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a)\frac{i}{(-2)^{n-1}}\{\overbrace{\Gamma^{ef\cdots}_+}^{2n}(n)\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n,\hat{\partial}_\pi\to i}\}\frac{\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}$

$= \int \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a)\frac{-i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}$

$= \int \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[\hat{P}_a, \hat{P}_b]\frac{i\dot{\psi}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r} = 0$ □

7.2 费米子的彭加莱对称性

引理7.2.1. $\{\frac{\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\} = \frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\Gamma_-^{\overbrace{ef\cdots}^{2n+1}}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n+1,\hat{\partial}_\pi\to i}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

定理7.2.1. $\begin{cases}[L_{ab}, L_{cd}] = -i(g_{ad}L_{bc} - g_{ac}L_{bd} + g_{bc}L_{ad} - g_{bd}L_{ac}) \\ [L_{ab}, P_c] = -i(g_{bc}P_a - g_{ac}P_b), [P_a, P_b] = 0\end{cases}$

证明: $[L_{ab}, L_{cd}]$

$= -\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, \frac{\psi^+(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}(r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\frac{\psi(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]$

$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}(r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]$

$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\{(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\}(r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}$

$- \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, (r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$

$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\Gamma_-^{\overbrace{ef\cdots}^{2n+1}}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n+1,\hat{\partial}_\pi\to i}\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}$

$- \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}(r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\Gamma_-^{\overbrace{ef\cdots}^{2n+1}}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat{\partial}'_e\hat{\partial}'_f\cdots}^{2n+1,\hat{\partial}'_\pi\to i}\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$

$= \delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial'_b - r_b\partial'_a)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\Gamma_-^{\overbrace{ef\cdots}^{2n+1}}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat{\partial}'_e\hat{\partial}'_f\cdots}^{2n+1,\hat{\partial}'_\pi\to i}\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r'_c\partial'_d - r'_d\partial'_c)\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}$

$- \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}(r'_c\partial_d - r'_d\partial_c)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\Gamma_-^{\overbrace{ef\cdots}^{2n+1}}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n+1,\hat{\partial}_\pi\to i}\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$

$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}$

$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\Gamma_-^{\overbrace{ef\cdots}^{2n+1}}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n+1,\hat{\partial}_\pi\to i}\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}(r_c\partial_d - r_d\partial_c)\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}$

$- \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_c\partial_d - r_d\partial_c)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\Gamma_-^{\overbrace{ef\cdots}^{2n+1}}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n+1,\hat{\partial}_\pi\to i}\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$

$= \int \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[-i(r_a\partial_b - r_b\partial_a), -i(r_c\partial_d - r_d\partial_c)]\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\Gamma_-^{\overbrace{ef\cdots}^{2n+1}}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n+1,\hat{\partial}_\pi\to i}\}\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}$

$= \int \frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[\hat{L}_{ab}, \hat{L}_{cd}]\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec{r}$

$= -i(g_{ad}L_{bc} - g_{ac}L_{bd} + g_{bc}L_{ad} - g_{bd}L_{ac})$ □

证明: $[L_{ab}, P_c]$

$= -\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\frac{\psi^+(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\psi(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, \frac{\psi^+(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\partial'_c\frac{\psi(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]$

$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\partial'_c\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]$

$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\{(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\}\partial'_c\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n} - \frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}, \partial'_c\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$

$= -\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec{r},t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial_b - r_b\partial_a)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\Gamma_-^{\overbrace{ef\cdots}^{2n+1}}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat{\partial}_e\hat{\partial}_f\cdots}^{2n+1,\hat{\partial}_\pi\to i}\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\partial'_c\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec{r}',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}$

$$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\partial'_c\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat\partial'_e\hat\partial'_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial'_\pi\to i}\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec r'-\vec r)(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$$
$$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r d^3\vec r'$$

$$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial'_b-r_b\partial'_a)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat\partial'_e\hat\partial'_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial'_\pi\to i}\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')\partial'_c\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}$$

$$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\partial_c\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$$
$$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r$$

$$\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial_c\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}$$

$$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\partial_c\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}(r_a\partial_b-r_b\partial_a)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$$

$$=\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[-i(r_a\partial_b-r_b\partial_a),-i\partial'_c]\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r$$
$$=\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[\hat L_{ab},\hat P_c]\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r$$
$$=-i(g_{bc}P_a-g_{ac}P_b)$$
□

证明： $[P_a,P_b]$

$$=-\int[\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\partial_a\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},\frac{\psi^+(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\partial'_b\frac{\psi(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]d^3\vec r d^3\vec r'$$
$$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int[\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\partial_a\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\partial'_b\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]d^3\vec r d^3\vec r'$$
$$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}$$
$$\int d^3\vec r d^3\vec r'\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\{\partial_a\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\}\partial'_b\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},\partial'_b\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}\partial_a\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$$

$$=-\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r d^3\vec r'\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\delta^3(\vec r-\vec r')\partial'_b\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}$$

$$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat\partial'_e\hat\partial'_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial'_\pi\to i}\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\partial'_b\delta^3(\vec r'-\vec r)\partial_a\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$$

$$=\delta^{k_\varsigma l_\varsigma}\delta^{k'_\varsigma l'_\varsigma}\int d^3\vec r d^3\vec r'\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat\partial'_e\hat\partial'_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial'_\pi\to i}\}_{l_\varsigma k'_\varsigma}\partial'_a\delta^3(\vec r-\vec r')\partial'_b\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}$$

$$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}_{l'_\varsigma k_\varsigma}\partial_b\delta^3(\vec r-\vec r')\partial_a\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}$$

$$=-\int\{\frac{\psi^+_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}^{k_\varsigma l'_\varsigma}\partial_a\partial_b\frac{\psi_{l'_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}$$

$$-\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}^{k'_\varsigma l_\varsigma}\partial_b\partial_a\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\}d^3\vec r$$

$$=-\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(\partial_a\partial_b-\partial_b\partial_a)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt{2}}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r$$
$$=-\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}(\partial_a\partial_b-\partial_b\partial_a)\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r$$
$$=\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[\hat P_a,\hat P_b]\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r=0$$
□

7.3 费米子自旋的彭加莱对称性

引理7.3.1.
$$\begin{cases}\{\frac{\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\}=\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\delta^3(\vec r-\vec r')\\ \{\frac{\dot\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\}=\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}(-i\sqrt{-\nabla^2})\overbrace{\Gamma_+^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\delta^3(\vec r-\vec r')\\ \{\frac{\dot\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}},\frac{\psi^+_{k'_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^{n+1}}\}=\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\frac{1}{i\sqrt{-\nabla^2}}\overbrace{\Gamma_+^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\delta^3(\vec r-\vec r')\end{cases}$$

推论7.3.1. $\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\sigma_{\alpha_\varsigma}(n+\frac12)\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r=-\varsigma(n+\frac12)\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}\nabla_{\alpha_\varsigma}\frac{\dot\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}},n+\frac12\geq1$

推论7.3.2. $\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\sigma_{\alpha_\varsigma}(n)\frac{i\dot\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r=n\varsigma\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\nabla_{\alpha_\varsigma}\frac{i\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},n\geq1$

证明： $[S_{ab}(t),S_{cd}(t)]$

$$=\int[\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(n+\frac12,\varsigma)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},\frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}S_{cdm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(n+\frac12,\varsigma)\frac{\psi_{n_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]d^3\vec rd^3\vec r'$$

$$=\int\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\{S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(n+\frac12,\varsigma)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},\frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\}S_{cdm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(n+\frac12,\varsigma)\frac{\psi_{n_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}$$
$$-\frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\{\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},S_{cdm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(n+\frac12,\varsigma)\frac{\psi_{n_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(n+\frac12,\varsigma)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec rd^3\vec r'$$

$$=\int\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(n+\frac12,\varsigma)S_{cdm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(n+\frac12,\varsigma)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial'_e\hat\partial'_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial'_\pi\to i}\}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')\frac{\psi_{n_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}$$

$$-\frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}S_{cdm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(n+\frac12,\varsigma)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(n+\frac12,\varsigma)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}_{n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec rd^3\vec r'$$

$$=\int\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(n+\frac12,\varsigma)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}S_{cdm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(n+\frac12,\varsigma)\frac{\psi_{n_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}$$

$$-\frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}S_{cdm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(n+\frac12,\varsigma)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}_{n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(n+\frac12,\varsigma)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r$$

$$=\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}S_{ab}(n+\frac12,\varsigma)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}S_{cd}(n+\frac12,\varsigma)\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}$$

$$-\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}S_{cd}(n+\frac12,\varsigma)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}S_{ab}(n+\frac12,\varsigma)\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r$$

$$=\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}S_{ab}(n+\frac12,\varsigma)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}S_{cd}(n+\frac12,\varsigma)\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}$$

$$-\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}S_{cd}(n+\frac12,\varsigma)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}S_{ab}(n+\frac12,\varsigma)\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r$$

$$???=\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[S_{ab}(n+\frac12,\varsigma),S_{cd}(n+\frac12,\varsigma)]\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r$$
$$=\int\frac{\psi^+(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[S_{ab}(n+\frac12,\varsigma),S_{cd}(n+\frac12,\varsigma)]\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r$$
$$=-i[g_{ad}S_{bc}(n+\frac12,\varsigma)-g_{ac}S_{bd}(n+\frac12,\varsigma)+g_{bc}S_{ad}(n+\frac12,\varsigma)-g_{bd}S_{ac}(n+\frac12,\varsigma)]$$ □

证明： $[\sigma_{\alpha_\varsigma}(t),\sigma_{\beta_\varsigma}(t)]$

$$=\int[\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\sigma_{\alpha_\varsigma k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(n+\frac12)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},\frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\sigma_{\beta_\varsigma m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(n+\frac12)\frac{\psi_{n_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}]d^3\vec rd^3\vec r'$$

$$=\int\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\{\sigma_{\alpha_\varsigma k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(n+\frac12)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},\frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\}\sigma_{\beta_\varsigma m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(n+\frac12)\frac{\psi_{n_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}$$
$$-\frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\{\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n},\sigma_{\beta_\varsigma m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(n+\frac12)\frac{\psi_{n_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\}\sigma_{\alpha_\varsigma k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(n+\frac12)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec rd^3\vec r'$$

$$=\int\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\sigma_{\alpha_\varsigma k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(n+\frac12)\sigma_{\beta_\varsigma m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(n+\frac12)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial'_e\hat\partial'_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial'_\pi\to i}\}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')\frac{\psi_{n_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}$$

$$-\frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\sigma_{\beta_\varsigma m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(n+\frac12)\sigma_{\alpha_\varsigma k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(n+\frac12)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\frac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}_{n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec rd^3\vec r'$$

$$=\int\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\sigma_{\alpha_\varsigma k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(n+\tfrac12)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\tfrac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}\sigma_{\beta_\varsigma m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(n+\tfrac12)\frac{\psi_{n_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}$$

$$-\frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\sigma_{\beta_\varsigma m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(n+\tfrac12)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\tfrac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}_{n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\sigma_{\alpha_\varsigma k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(n+\tfrac12)\frac{\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r$$

$$=\int\frac{\psi^{+}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\sigma_{\alpha_\varsigma}(n+\tfrac12)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\tfrac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}\sigma_{\beta_\varsigma}(n+\tfrac12)\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}$$

$$-\frac{\psi^{+}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\sigma_{\beta_\varsigma}(n+\tfrac12)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\tfrac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}\sigma_{\alpha_\varsigma}(n+\tfrac12)\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r$$

$$=\int\frac{\psi^{+}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\sigma_{\alpha_\varsigma}(n+\tfrac12)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\tfrac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}\sigma_{\beta_\varsigma}(n+\tfrac12)\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}$$

$$-\frac{\psi^{+}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\sigma_{\beta_\varsigma}(n+\tfrac12)\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\tfrac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}\sigma_{\alpha_\varsigma}(n+\tfrac12)\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r$$

$$???=\int\frac{\psi^{+}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[\sigma_{\alpha_\varsigma}(n+\tfrac12),\sigma_{\beta_\varsigma}(n+\tfrac12)]\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\overbrace{\Gamma_-^{ef\cdots}}^{2n+1}(n+\tfrac12)\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r$$
$$=\int\frac{\psi^{+}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}[\sigma_{\alpha_\varsigma}(n+\tfrac12),\sigma_{\beta_\varsigma}(n+\tfrac12)]\frac{\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}d^3\vec r=i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\sigma_{\gamma_\varsigma}(t)$$ □

证明: $[\sigma_{\alpha_\varsigma}(t),\sigma_{\beta_\varsigma}(t)](n+\frac12)^{-2}$

$$=\int[\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}\nabla_{\alpha_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}},\frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^{n+1}}\nabla'_{\beta_\varsigma}\delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}\frac{\dot\psi_{n_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^{n+1}}]d^3\vec r d^3\vec r'$$
$$=\int\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}\{\nabla_{\alpha_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}},\frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^{n+1}}\}\nabla'_{\beta_\varsigma}\delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}\frac{\dot\psi_{n_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^{n+1}}$$
$$-\frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^{n+1}}\{\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}},\nabla'_{\beta_\varsigma}\delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}\frac{\dot\psi_{n_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^{n+1}}\}\nabla_{\alpha_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}d^3\vec r d^3\vec r'$$

$$=\int\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}\nabla'_{\alpha_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\frac{1}{i\sqrt{-\nabla'^2}}\overbrace{\Gamma_+^{ef\cdots}}^{2n+1}\overbrace{\hat\partial'_e\hat\partial'_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial'_\pi\to i}\}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')\nabla'_{\beta_\varsigma}\delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}\frac{\dot\psi_{n_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^{n+1}}$$

$$-\frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec r',t)}{(\sqrt{-\nabla'^2})^{n+1}}\nabla_{\beta_\varsigma}\delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\frac{1}{i\sqrt{-\nabla^2}}\overbrace{\Gamma_+^{ef\cdots}}^{2n+1}\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}_{n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\delta^3(\vec r-\vec r')\nabla_{\alpha_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}d^3\vec r d^3\vec r'$$

$$=\int\frac{\psi^{+k_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}\nabla_{\alpha_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\frac{1}{i\sqrt{-\nabla^2}}\overbrace{\Gamma_+^{ef\cdots}}^{2n+1}\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}\nabla_{\beta_\varsigma}\delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}\frac{\dot\psi_{n_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}$$

$$-\frac{\psi^{+m_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}\nabla_{\beta_\varsigma}\delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\frac{1}{i\sqrt{-\nabla^2}}\overbrace{\Gamma_+^{ef\cdots}}^{2n+1}\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}_{n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\nabla_{\alpha_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}\frac{\dot\psi_{l_\varsigma}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}d^3\vec r$$

$$=\int\frac{\psi^{+}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}\nabla_{\alpha_\varsigma}\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\frac{1}{i\sqrt{-\nabla^2}}\overbrace{\Gamma_+^{ef\cdots}}^{2n+1}\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}\nabla_{\beta_\varsigma}\frac{\dot\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}$$

$$-\frac{\psi^{+}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}\nabla_{\beta_\varsigma}\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\frac{1}{i\sqrt{-\nabla^2}}\overbrace{\Gamma_+^{ef\cdots}}^{2n+1}\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}\nabla_{\alpha_\varsigma}\frac{\dot\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}d^3\vec r$$

$$=\int\frac{\psi^{+}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}\nabla_{\alpha_\varsigma}\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\frac{1}{i\sqrt{-\nabla^2}}\overbrace{\Gamma_+^{ef\cdots}}^{2n+1}\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}\nabla_{\beta_\varsigma}\frac{\dot\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}$$

$$-\frac{\psi^{+}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}\nabla_{\beta_\varsigma}\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\frac{1}{i\sqrt{-\nabla^2}}\overbrace{\Gamma_+^{ef\cdots}}^{2n+1}\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}\nabla_{\alpha_\varsigma}\frac{\dot\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}d^3\vec r$$

$$=\int\frac{\psi^{+}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}[\nabla_{\alpha_\varsigma},\nabla_{\beta_\varsigma}]\frac{i}{(-2)^{n-1}\sqrt2}\{\frac{1}{i\sqrt{-\nabla^2}}\overbrace{\Gamma_+^{ef\cdots}}^{2n+1}\overbrace{\hat\partial_e\hat\partial_f\cdots}^{2n+1,\hat\partial_\pi\to i}\}\frac{\dot\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}d^3\vec r$$
$$=\int\frac{\psi^{+}(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}[\nabla_{\alpha_\varsigma},\nabla_{\beta_\varsigma}]\frac{\dot\psi(\vec r,t)}{(\sqrt{-\nabla^2})^{n+1}}d^3\vec r=0?=i\varepsilon_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}{}^{\gamma_\varsigma}\sigma_{\gamma_\varsigma}(t)$$ □

推论7.3.3. $\lambda^+(\hat p,-s\varsigma)\sigma_i(s)[\sigma(s)\cdot\hat p]^n\sigma_j(s)\lambda(\hat p,-s\varsigma)$

$=\lambda^+(\hat p,-s\varsigma)\sigma_i(s)\{(-\varsigma)^{n-1}s[s^n-(s-1)^n]\hat p_j+(-\varsigma)^n(s-1)^n\sigma_j(s)\}\lambda(\hat p,-s\varsigma)$

$=(-\varsigma)^n s^2[s^n-(s-1)^n]\hat p_i\hat p_j+(-\varsigma)^n(s-1)^n\lambda^+(\hat p,-s\varsigma)\sigma_i(s)\sigma_j(s)\lambda(\hat p,-s\varsigma)$

$= (-\varsigma)^n s^2[s^n - (s-1)^n]\hat{p}_i\hat{p}_j + (-\varsigma)^n(s-1)^n[s^2\hat{p}_i\hat{p}_j + \frac{s}{2}(\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j - i\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\hat{p}_k)]$
$= (-\varsigma)^n s^2 s^n\hat{p}_i\hat{p}_j + (-\varsigma)^n(s-1)^n[\frac{s}{2}(\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j - i\varsigma\varepsilon_{ij}{}^k\hat{p}_k)]$

第二十六章 Penrose方程的协变量子化方案

自我评述：由于Penrose全对称方程与自旋方程完全等价，所以Penrose全对称方程的协变量子化原则上也已成功完成，只需从自旋方程等价转换过来即可。但直接从Penrose 全对称方程出发可以提供一种全新的解法，对有质量粒子的协变量子化有启示作用。由于详细结论已经由自旋方程方法全部得到，所以下面只给出Penrose全对称方程解法的精髓，不再求全，是自旋方程方法的补充。

1 Penrose全对称方程的协变量子化

1.1 Penrose全对称方程 [1,2]及其平面波解

定理1.1.1.

$$[s\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(x) = 0 \Leftrightarrow (\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x) = 0, \psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x) = \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)\psi_{k_\varsigma}(x)$$

推论1.1.1.

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec p\neq 0}|\vec p|^{(s-\frac12)}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)\lambda_{k_\varsigma}(\hat p,-s\varsigma)[a_1(\vec p,-s\varsigma)e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec p,-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec p \\ \vec p|^{(s-\frac12)}a_1(\vec p,-s\varsigma) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat p,-s\varsigma)\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)e^{-ip\cdot x}d^3\vec r \\ |\vec p|^{(s-\frac12)}a_2^+(\vec p,-s\varsigma) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat p,-s\varsigma)\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)e^{ip\cdot x}d^3\vec r\end{cases}$$

推论1.1.2.

$$\begin{cases}\lambda_{k_\varsigma}(\hat p,-s\varsigma) = \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\overbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}^{2s} \\ \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)\lambda_{k_\varsigma}(\hat p,-s\varsigma) = \underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}_{2s}\end{cases}$$

推论1.1.3.

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec p\neq 0}|\vec p|^{(s-\frac12)}\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}_{2s}[a_1(\vec p,-s\varsigma)e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec p,-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec p \\ \vec p|^{(s-\frac12)}a_1(\vec p,-s\varsigma) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+C_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}^{2s}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)e^{-ip\cdot x}d^3\vec r \\ |\vec p|^{(s-\frac12)}a_2^+(\vec p,-s\varsigma) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+C_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}^{2s}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)e^{ip\cdot x}d^3\vec r\end{cases}$$

1.2 Penrose全对称方程的自旋基及其性质

定义1.2.1. $\lambda_{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}(\hat p,-s\varsigma) := \underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}_{2s}$

推论1.2.1. $\begin{cases}\lambda^{+A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2}) = 1, \lambda^{+A_\varsigma}(-\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2}) = 1 \\ \lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2}) = -\tfrac{\varsigma}{2}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\hat p_a\end{cases}$

推论1.2.2. $\begin{cases}\lambda^{+A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}(\hat p,-s\varsigma)\lambda_{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}(\hat p,-s\varsigma) = 1, \lambda^{+A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}(-\hat p,-s\varsigma)\lambda_{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}(\hat p,-s\varsigma) = 0 \\ \lambda_{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}(\hat p,-s\varsigma)\lambda^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}(\hat p,-s\varsigma) = (-\tfrac{\varsigma}{2})^{2s}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\overbrace{\hat p_a\hat p_b\cdot\cdot}^{2s}\end{cases}$

1.3 Penrose全对称方程的各种物理算符

定理1.3.1. $P_u(s)$
$$= \int \psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}\int p_u[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)]d^3\vec{p}$$

证明: $P_u(s) = \int \psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}|\vec{p}'|^{s-\frac{1}{2}}|\vec{p}|^{s-\frac{1}{2}}\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}\frac{p_u}{|\vec{p}|^{2s-1}}$$
$$[a_1^+(\vec{p}',-s\varsigma)e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}+a_2(\vec{p}',-s\varsigma)e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}][a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}+(-1)^{2s}a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]$$
$$= \int \vec{p}|^{2s-1}\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}\frac{p_u}{|\vec{p}|^{2s-1}}$$
$$\{[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)]\delta^3(\vec{p}'-\vec{p})$$
$$+[(-1)^{2s}a_1^+(-\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-2i|\vec{p}|t}+a_2(-\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{2i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}'+\vec{p})\}d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$$
$$= \int \overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}$$
$$p_u[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)]d^3\vec{p}$$
$$= \int p_u[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)]d^3\vec{p}$$ □

定理1.3.2. $Q(s) = \int \psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$$= \int[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)+(-1)^{2s-1}a_2(\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)]d^3\vec{p}$$

证明: $Q(s) = \int \psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}|\vec{p}'|^{s-\frac{1}{2}}|\vec{p}|^{s-\frac{1}{2}}\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}\frac{1}{|\vec{p}|^{2s-1}}$$
$$[a_1^+(\vec{p}',-s\varsigma)e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}+a_2(\vec{p}',-s\varsigma)e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}][a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}+(-1)^{2s-1}a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]$$
$$= \int \vec{p}|^{2s-1}\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}\frac{1}{|\vec{p}|^{2s-1}}$$
$$\{[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)+(-1)^{2s-1}a_2(\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)]\delta^3(\vec{p}'-\vec{p})$$
$$+[(-1)^{2s-1}a_1^+(-\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-2i|\vec{p}|t}+a_2(-\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{2i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}'+\vec{p})\}d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$$
$$= \int[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)+(-1)^{2s-1}a_2(\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)]d^3\vec{p}$$ □

定理1.3.3. $N(s) = \int \psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$$= \int[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma)a_1(\vec{p},-s\varsigma)+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma)a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)]d^3\vec{p}$$

证明: $N(s) = \int \psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}|\vec{p}'|^{s-\frac{1}{2}}|\vec{p}|^{s-\frac{1}{2}}\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}\frac{1}{|\vec{p}|^{2s-1}}$$
$$[a_1^+(\vec{p}',-s\varsigma)e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}+a_2(\vec{p}',-s\varsigma)e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}][a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}+(-1)^{2s}a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]$$

$= \int \vec{p}|^{2s-1} \overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p}', -\frac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p}', -\frac{\varsigma}{2}) \cdots}^{2s} \underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2}) \cdots}_{2s} \frac{1}{|\vec{p}|^{2s-1}}$

$\{[a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]\delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$

$+ [(-1)^{2s}a_1^+(-\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)e^{-2i|\vec{p}|t} + a_2(-\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma)e^{2i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}' + \vec{p})\}d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$

$= \int [a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]d^3\vec{p}$ □

定理1.3.4. $\vec{S}(s) = \int \psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma \cdots}^{2s}}(\vec{r}, t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma \cdots}_{2s}}(\vec{r}, t)d^3\vec{r}$

$= \int \hat{p}[a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]d^3\vec{p}$

证明: $\vec{S}(s) = \int \psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma \cdots}^{2s}}(\vec{r}, t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma \cdots}_{2s}}(\vec{r}, t)d^3\vec{r}$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}|\vec{p}'|^{s-\frac{1}{2}}|\vec{p}|^{s-\frac{1}{2}} \overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p}', -\frac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p}', -\frac{\varsigma}{2}) \cdots}^{2s} \underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2}) \cdots}_{2s} \frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{2s-1}}$

$[a_1^+(\vec{p}', -s\varsigma)e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)} + a_2(\vec{p}', -s\varsigma)e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}][a_1(\vec{p}, -s\varsigma)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)} + (-1)^{2s}a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]$

$= \int \vec{p}|^{2s-1} \overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p}', -\frac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p}', -\frac{\varsigma}{2}) \cdots}^{2s} \underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2}) \cdots}_{2s} \frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{2s-1}}$

$\{[a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]\delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$

$+ [(-1)^{2s}a_1^+(-\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)e^{-2i|\vec{p}|t} + a_2(-\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma)e^{2i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}' + \vec{p})\}d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$

$= \int \hat{p}[a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]d^3\vec{p}$ □

定理1.3.5. $\vec{M}(s) = \int \psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma \cdots}^{2s}}(\vec{r}, t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma \cdots}_{2s}}(\vec{r}, t)d^3\vec{r}$

$= \int \hat{p}[a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s-1}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]d^3\vec{p}$

证明: $\vec{M}(s) = \int \psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma \cdots}^{2s}}(\vec{r}, t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma \cdots}_{2s}}(\vec{r}, t)d^3\vec{r}$

$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}|\vec{p}'|^{s-\frac{1}{2}}|\vec{p}|^{s-\frac{1}{2}} \overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p}', -\frac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p}', -\frac{\varsigma}{2}) \cdots}^{2s} \underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2}) \cdots}_{2s} \frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{2s-1}}$

$[a_1^+(\vec{p}', -s\varsigma)e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)} + a_2(\vec{p}', -s\varsigma)e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}][a_1(\vec{p}, -s\varsigma)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)} + (-1)^{2s-1}a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]$

$= \int \vec{p}|^{2s-1} \overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p}', -\frac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p}', -\frac{\varsigma}{2}) \cdots}^{2s} \underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2}) \cdots}_{2s} \frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{2s-1}}$

$\{[a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s-1}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]\delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$

$+ [(-1)^{2s-1}a_1^+(-\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)e^{-2i|\vec{p}|t} + a_2(-\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma)e^{2i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}' + \vec{p})\}d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$

$= \int \hat{p}[a_1^+(\vec{p}, -s\varsigma)a_1(\vec{p}, -s\varsigma) + (-1)^{2s-1}a_2(\vec{p}, -s\varsigma)a_2^+(\vec{p}, -s\varsigma)]d^3\vec{p}$ □

1.4 Penrose全对称方程的协变对易规则

定理1.4.1.

$$\begin{cases} [\psi_{k_\varsigma}(x), \psi^+_{k'_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}} = i\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta(x-x'), \Gamma(0) := 1 \\ [\psi_{k_\varsigma}(x), \psi_{l_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}} = 0, [\psi^+_{k'_\varsigma}(x), \psi^+_{l'_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}} = 0, s \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} [\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdots}_{2s}}(x), \psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}} = i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\sigma, i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma, i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma, i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta(x-x') \\ [\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdots}_{2s}}(x), \psi_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma \cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}} = 0, [\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}_{2s}}(x), \psi^+_{\underbrace{E'_\varsigma F'_\varsigma G'_\varsigma \cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}} = 0, s \geq 0 \end{cases}$$

引理1.4.1.

$$\begin{cases}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})=-\frac{\varsigma}{2}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\hat{p}_a\\ \lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{B'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})=\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{B'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}p_a(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}p_b=(\sigma,i\varsigma)^a_{B_\varsigma A'_\varsigma}p_a(\sigma,i\varsigma)^b_{A_\varsigma B'_\varsigma}p_b,p^ap_a=0\\ (\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}p_a(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}p_b=(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma B'_\varsigma}p_a(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma A'_\varsigma}p_b,p^ap_a=0\end{cases}$$

引理1.4.2. $\begin{cases}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_b=(\sigma,i\varsigma)^a_{B_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a(\sigma,i\varsigma)^b_{A_\varsigma B'_\varsigma}\partial_b,\partial^a\partial_a=0\\ (\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_b=(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma A'_\varsigma}\partial_b,\partial^a\partial_a=0\end{cases}$

直接验证便可以证明以上两个引理。

推论1.4.1. $\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\overbrace{p_ap_bp_c\cdots}^{2s}=\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{p_ap_bp_c\cdots}^{2s}$

推论1.4.2. $\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta(x-x')=\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta(x-x')$

推论1.4.3.

$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=0,[\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{E'_\varsigma F'_\varsigma G'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=0,s\geq 0\end{cases}$$

推论1.4.4. $\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa}=-\frac{1}{2}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa},[\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}]^*=\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}$
$\Psi_{\alpha_\varsigma}:=\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}$

推论1.4.5. $[\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma},\psi^+_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}]=\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\sigma^{cd}_{\beta_\varsigma\beta'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta(x-x')$

证明: $[\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma},\psi^+_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}]$
$=\frac{1}{4}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\sigma^{C'_\varsigma D'_\varsigma}_{\beta'_\varsigma}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa},\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\kappa D'_\kappa}]$
$=\frac{i}{32}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\sigma^{C'_\varsigma D'_\varsigma}_{\beta'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^d_{D_\varsigma D'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\sigma^{cd}_{\beta_\varsigma\beta'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta(x-x')$ □

推论1.4.6. $[\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{2n}},\psi^+_{\underbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdots}_{2n}}]=i\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\underbrace{\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\sigma^{cd}_{\beta_\varsigma\beta'_\varsigma}\cdots}_{n}\underbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\cdots}_{n}\Delta(x-x')$

推论1.4.7. $\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma},[\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}]^*=\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}$

推论1.4.8. $[\psi_{\alpha_\varsigma},\psi^+_{\alpha'_\varsigma}]=\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$

证明: $[\psi_{\alpha_\varsigma},\psi^+_{\alpha'_\varsigma}]$
$=-\frac{1}{2}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma},\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}]$
$=\frac{i}{4}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$=-i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$ □

1.5 光子Penrose全对称方程的协变量子化

定理1.5.1.
$[\partial_a+iS_{ab}(1,\varsigma)\partial^b]\psi(x)=0\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_a\partial^a\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x)=0,\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x)=\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(x)$

推论1.5.1.

$$\begin{cases}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}|\vec{p}|^{\frac{1}{2}}\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)[a_1(\vec{p},-\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ \vec{p}|^{\frac{1}{2}}a_1(\vec{p},-\varsigma)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}\\ |\vec{p}|^{\frac{1}{2}}a_2^+(\vec{p},-\varsigma)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\lambda^{+k_\varsigma}(\hat{p},-\varsigma)\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$$

定理1.5.2.

$$\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]=i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{k_\varsigma}(x),\psi_{l_\varsigma}(x')]=0,[\psi^+_{k'_\varsigma}(x),\psi^+_{l'_\varsigma}(x')]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]\\ =-\frac{i}{8}(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma\}B'_\varsigma)}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi_{C_\varsigma D_\varsigma}(x')]=0,[\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x),\psi^+_{C'_\varsigma D'_\varsigma}(x')]=0\end{cases}$$

定理1.5.3. $H(1)=\int\psi^+(\vec{r},t)\frac{[\sigma(1)\cdot\nabla]^2}{\nabla^2}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(\vec{r},t)\Gamma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{k'_\varsigma}\frac{[\sigma(1)\cdot\nabla]^2|^{k'_\varsigma k_\varsigma}}{\nabla^2}\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

1.6 光子Penrose一般方程的协变对易规则

猜想1.6.1. $[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]=-\frac{i}{2}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')+ik\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\Delta(x-x')$
$[\Leftrightarrow][\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x'),[\phi(x),\phi^+(x')]=i\Delta(x-x'),[\Psi_{\alpha_\varsigma}(x),\phi^+(x')]=0$

1.7 Penrose全对称方程的等时量子化规则

定理1.7.1. $[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x-x')$

$$\Rightarrow[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot E_\varsigma F_\varsigma\cdot\cdot Z_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot E'_\varsigma F'_\varsigma\cdot\cdot Z'_\varsigma}_{2s}}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}}$$

$$=-\frac{(i\varsigma)^{2s+1}}{2^{2s-1}}\sum_{k=0}^{[s-\frac{1}{2}]}\frac{(2s)!}{(2s-2k-1)!(2k)!1!}\overbrace{(\sigma\cdot\nabla)_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma\cdot\nabla)_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-2k-1}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2k}\nabla^{2k}\delta_{Z_\varsigma Z'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$$

1.8 Penrose全对称方程的对易函数、因果函数和费曼传播子

引理1.8.1.

$$[\theta(t),\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2s}]=-\frac{i^{2s}}{2^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s-1}\varsigma^nC^n_{2s}\overbrace{\sigma^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{n}\sum_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}$$

证明: $[\theta(t),\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2s}]$

$$=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}[\theta(t),\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}]$$

$$=-\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s-1}C^n_{2s}\overbrace{\sigma^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-n}(i\varsigma)^{2s-n}[\partial_\pi^{2s-n},\theta(t)]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{n}$$

$$=-\frac{i^{2s}}{2^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s-1}\varsigma^nC^n_{2s}\overbrace{\sigma^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-n}[\partial_t^{2s-n},\theta(t)]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{n}$$

$$=-\frac{i^{2s}}{2^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s-1}\varsigma^nC^n_{2s}\overbrace{\sigma^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{n}\sum_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}$$ □

推论1.8.1.

$$\begin{cases}\Delta_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x):=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta(x)\\ \Delta^{(+)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x):=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta^{(-)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x):=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{(l)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x):=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta^{(l)}(x)\end{cases}$$

推论1.8.2.

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x):=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta^{(c)}(x)\\ -\frac{i^{2s}}{2^{2s-1}}\sum\limits_{n=0}^{2s-1}\varsigma^nC^n_{2s}\overbrace{\sigma^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdots}^{2s-n}(i\varsigma)^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum\limits_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\\ \Delta^{(F)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=i\Delta^{(c)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x):=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta_F(x)\\ -\frac{i^{2s+1}}{2^{2s-1}}\sum\limits_{n=0}^{2s-1}\varsigma^nC^n_{2s}\overbrace{\sigma^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdots}^{2s-n}(i\varsigma)^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum\limits_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\end{cases}$$

推论1.8.3.

$$\begin{cases}\Delta^{(ret)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x):=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta^{(ret)}(x)\\ -\frac{i^{2s}}{2^{2s-1}}\sum\limits_{n=0}^{2s-1}\varsigma^nC^n_{2s}\overbrace{\sigma^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdots}^{2s-n}(i\varsigma)^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum\limits_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\\ \Delta^{(adv)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x):=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta^{(adv)}(x)\\ -\frac{i^{2s}}{2^{2s-1}}\sum\limits_{n=0}^{2s-1}\varsigma^nC^n_{2s}\overbrace{\sigma^i_{A_\varsigma A'_\varsigma}\sigma^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdots}^{2s-n}(i\varsigma)^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum\limits_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\end{cases}$$

引理1.8.2. $\Delta_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots E_\varsigma F_\varsigma\cdots Z_\varsigma}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots E'_\varsigma F'_\varsigma\cdots Z'_\varsigma}_{2s}}(s;x)|_{t=0}$

$$=i\frac{(i\varsigma)^{2s+1}}{2^{2s-1}}\sum_{k=0}^{[s-\frac{1}{2}]}\frac{(2s)!}{(2s-2k-1)!(2k)!1!}\overbrace{(\sigma\cdot\nabla)_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma\cdot\nabla)_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{2s-2k-1}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdots\delta_{Z_\varsigma Z'_\varsigma}}^{2k+1}\nabla^{2k}\delta^3(\vec{r})$$

推论1.8.4.

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Delta_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=0\\ (\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(+)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=0\\ (\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(-)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=0\\ (\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(l)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(c)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x)=-\varsigma\delta(t)\Delta_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x)|_{t=0}\\(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(ret)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x)=-\varsigma\delta(t)\Delta_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x)|_{t=0}\\(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(adv)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x)=-\varsigma\delta(t)\Delta_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x)|_{t=0}\\(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(F)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x)=-i\varsigma\delta(t)\Delta_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x)|_{t=0}\end{cases}$$

推论1.8.5.

$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=0\\(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=0\\(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=0\\(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(c)}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=i\varsigma\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^4(x)\\(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(ret)}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=i\varsigma\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^4(x)\\(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(adv)}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=i\varsigma\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^4(x)\\(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(F)}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=-\varsigma\delta_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^4(x)\end{cases}$$

2 Penrose全对称方程平面波的直接解法

自我评述：以上都是从自旋方程的已知结论等价转换过来的。下面将直接从Penrose全对称方程出发重新求解，提供一种新的解法。

2.1 Penrose全对称方程平面波的直接解法

定理2.1.1. $(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot\}}_{2s}}(x)$

$$\Leftrightarrow\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec p\neq0}|\vec p|^{(s-\frac12)}\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}_{2s}[a_1(\vec p,-s\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec p,-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec p$$

证明: $(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot\}}_{2s}}(x)$

$$\Rightarrow\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec p\neq0}\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})[a_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec p)e^{ip\cdot x}+b^+_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec p)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec p$$

$$\Rightarrow\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})a_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(\vec p)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)e^{-ip\cdot x}d^3\vec r=\frac{1}{(2s)!}\lambda_{\{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})a_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot\}}_{2s-1}}(\vec p,-s\varsigma)$$

$$\Rightarrow\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})a_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec p)=\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})a_{\underbrace{A_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec p)$$

$$\Rightarrow\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})[a_{\underbrace{C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec p)\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})+a'_{\underbrace{C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec p)\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,\tfrac{\varsigma}{2})]$$

$$=\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})[a_{\underbrace{C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec p)\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})+a'_{\underbrace{C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec p)\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,\tfrac{\varsigma}{2})]$$

$$\Rightarrow\lambda^{+A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat p,\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})[a_{\underbrace{C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec p)\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})+a'_{\underbrace{C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec p)\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,\tfrac{\varsigma}{2})]$$

$$=\lambda^{+A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat p,\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})[a_{\underbrace{C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec p)\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})+a'_{\underbrace{C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec p)\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,\tfrac{\varsigma}{2})]$$

$$\Rightarrow a'_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec p)=0,\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})a_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec p)=\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})a_{\underbrace{C_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec p)=\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})a_{\underbrace{B_\varsigma D_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec p)$$

$\Rightarrow\cdot\cdot$

$$\Rightarrow\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})a_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec p)=a(\vec p,-s\varsigma)\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}_{2s}$$

同理:$\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})b^+_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec p)=b^+(\vec p,-s\varsigma)\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}_{2s}$

$$\Rightarrow\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec p\neq0}|\vec p|^{(s-\frac12)}\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}_{2s}[a_1(\vec p,-s\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec p,-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec p$$

$|\vec p|^{(s-\frac12)}a_1(\vec p,-s\varsigma)=a(\vec p,-s\varsigma),|\vec p|^{(s-\frac12)}a_2^+(\vec p,-s\varsigma)=b^+(\vec p,-s\varsigma)$

$$\Rightarrow (\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots\}}_{2s}}(x)$$ □

推论2.1.1.

$$\begin{cases}|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}a_1(\vec{p},-s\varsigma)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^{+C_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}\\ |\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^{+C_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$$

2.2 从Penrose全对称方程平面波解重新证明协变对易关系

定理2.2.1.

$$\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-s\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-s\varsigma)]_{-^{2s+1}}=\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},-s\varsigma),a_{\sigma'}(\vec{p}',-s\varsigma)]_{-^{2s+1}}=0,[a^+_\sigma(\vec{p},-s\varsigma),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-s\varsigma)]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=0,[\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{E'_\varsigma F'_\varsigma G'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=0,s\geq 0\end{cases}$$

证明: $[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'(|\vec{p}||\vec{p}'|)^{(s-\frac{1}{2})}$

$$\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{B'_\varsigma}(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{C'_\varsigma}(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}$$

$$[[a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}],[a_1^+(\vec{p}',-s\varsigma)e^{-ip'\cdot x'}+a_2(\vec{p}',-s\varsigma)e^{ip'\cdot x'}]]_{-^{2s+1}}$$

$$\Rightarrow[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'(|\vec{p}||\vec{p}'|)^{(s-\frac{1}{2})}$$

$$\underbrace{[\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})][\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{B'_\varsigma}(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})][\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{C'_\varsigma}(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})]\cdots}_{2s}$$

$$\{[a_1(\vec{p},-s\varsigma),a_1^+(\vec{p}',-s\varsigma)]_{-^{2s+1}}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}+[a_2^+(\vec{p},-s\varsigma),a_2(\vec{p}',-s\varsigma)]_{-^{2s+1}}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}\}$$

$$\Rightarrow[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'(|\vec{p}||\vec{p}'|)^{(s-\frac{1}{2})}$$

$$\underbrace{[\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})][\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{B'_\varsigma}(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})][\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{C'_\varsigma}(\hat{p}',-\frac{\varsigma}{2})]\cdots}_{2s}$$

$$\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')[e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}+(-1)^{2s+1}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}]$$

$$\Rightarrow[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\underbrace{[|\vec{p}|\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})][|\vec{p}|\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{B'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})][|\vec{p}|\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+_{C'_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})]\cdots}_{2s}$$

$$|\vec{p}|^{-1}[e^{ip\cdot(x-x')}+(-1)^{2s+1}e^{-ip\cdot(x-x')}]$$

$$\Rightarrow[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}(-\frac{\varsigma}{2})^{2s}\underbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}p_a(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}p_b(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}p_c\cdots}_{2s}|\vec{p}|^{-1}[e^{ip\cdot(x-x')}+(-1)^{2s+1}e^{-ip\cdot(x-x')}]$$

$$\Rightarrow[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}2i(\frac{i\varsigma}{2})^{2s}\underbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_b(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\partial_c\cdots}_{2s}\int\frac{-i}{|2\vec{p}|}[e^{ip\cdot(x-x')}-e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$$

$$\Rightarrow [\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x), \psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}} = i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta(x-x')$$

□

证明： $[a_1(\vec{p},-s\varsigma), a_1^+(\vec{p}',-s\varsigma)]$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|^{-(2s-1)}\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\overbrace{\lambda^{A'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{B'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{C'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}$$
$$[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x), \psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|^{-(2s-1)}\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\overbrace{\lambda^{A'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{B'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{C'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}$$
$$i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta(x-x')e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|^{-(2s-1)}\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\overbrace{\lambda^{A'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{B'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{C'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}$$
$$i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}\cdots}^{2s}\{\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}_0|}[e^{ip_0\cdot(x-x')}-e^{-ip_0\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}_0\}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$= [\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int d^3\vec{p}_0d^3\vec{r}d^3\vec{r}'|\vec{p}|^{-(2s-1)}\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\overbrace{\lambda^{A'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{B'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{C'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}$$
$$(-\tfrac{\varsigma}{2})^{2s}\underbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}p_{0a}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}p_{0b}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}p_{0c}\cdots}_{2s}\frac{1}{|\vec{p}_0|}[e^{i(p_0-p)\cdot x}e^{-i(p_0-p')\cdot x'}+(-1)^{2s+1}e^{-i(p_0+p)\cdot x}e^{i(p_0+p')\cdot x'}]$$

$$= [\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int|\vec{p}|^{-(2s-1)}\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\overbrace{\lambda^{A'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{B'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{C'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}$$
$$\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}_0,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p}_0,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p}_0,-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}_0,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{B'_\varsigma}(\hat{p}_0,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{C'_\varsigma}(\hat{p}_0,-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}$$
$$\frac{1}{|\vec{p}_0|}[e^{i(p_0-p)\cdot x}e^{-i(p_0-p')\cdot x'}+(-1)^{2s+1}e^{-i(p_0+p)\cdot x}e^{i(p_0+p')\cdot x'}]d^3\vec{p}_0d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$= \int|\vec{p}|^{-(2s-1)}\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\overbrace{\lambda^{A'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{B'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{C'_\varsigma}(\hat{p}',-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}$$
$$\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}_0,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p}_0,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p}_0,-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p}_0,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{B'_\varsigma}(\hat{p}_0,-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{C'_\varsigma}(\hat{p}_0,-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}$$
$$\frac{1}{|\vec{p}_0|}[\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p}')+(-1)^{2s+1}e^{2iE_0(t-t')}\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p}')]d^3\vec{p}_0$$
$$= \overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\overbrace{\lambda^{A'_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{B'_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{C'_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}$$
$$\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda^+_{A'_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{B'_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{C'_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$

$$+(-1)^{2s+1}e^{2iE_0(t-t')}\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{+C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\overbrace{\lambda^{A'_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{B'_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^{C'_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}$$
$$\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(-\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(-\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{C_\varsigma}(-\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda^+_{A'_\varsigma}(-\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{B'_\varsigma}(-\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda^+_{C'_\varsigma}(-\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$
$$= \delta^3(\vec{p}-\vec{p}')+0 = \delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$

□

自我评述：以上的证法不再基于等时对易规则，直接基于协变对易规则，看似更难了，其实是更简单了，因为不需要求出复杂的等时对易规则(参看下一节)，即使求出也难于使用，而协变对易规则本身已知且很有规律，也可以分解为自旋基的乘积，整个证明过程基本上只依赖于自旋基的性质，没有复杂的计算。这个证明方法可以推广到其他所有类似情况，从而简化所有类似的证明。其他的几个对易括号也可按同样的方法求出，不再列出。

第二十七章　有质量复粒子的场协变量子化方案

自我评述：本章和下一章描述的有质量复粒子，正反粒子不同，数学本质上是复函数，区别于马约拉纳粒子；马约拉纳粒子，正反粒子相同，数学本质上是实函数，后面章节会详细讨论。有质量粒子方案采用与无质量粒子方案相反的步骤，先证明一般自旋粒子情形，再分别研究自旋-$\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2$ 的特殊情形。这样做的理由：一是协变量子化新方案经过之前的研究，总体上已经比较明确。二是先证明一般情形，后面的特殊情形就不需再做证明，省去很多麻烦与篇幅，内容更紧凑，也可以更专注于物理。为了证明一般情形，必须先研究Dirac方程自旋基的性质，所以本章前半部分主要是研究Dirac方程自旋基的内容，后半部分才是一般自旋粒子情形的证明。但Dirac方程完整的协变量子化方案还是放在后面章节去研究。在本章按统一的方式对所有有质量自旋复粒子建立了相应的量子场论。与无质量粒子一样，也无需知道哈密顿量，就可以按统一的新程式对各种有质量自旋粒子进行了量子化，给出了统一的量子化对易规则和能量动量算符形式，给出了部分量子彭加莱代数。与无质量粒子一样，角动量算符也只取得部分成功，没有彻底解决，仍需努力。

1 基础准备部分

1.1 Dirac自旋基的引入

1.1.1 Dirac电子方程 [5] 平面波的四维傅里叶解法

定理1.1.1. $(\gamma^a\partial_a+m)\psi(\vec{r},t)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}[a(\vec{p},E_{\vec{p}})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_{\vec{p}}t)}+a(-\vec{p},-E_{\vec{p}})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_{\vec{p}}t)}]d^3\vec{p}\\(i\gamma^a p_a+m)a(\vec{p},E_{\vec{p}})=0,(-i\gamma^a p_a+m)a(-\vec{p},-E_{\vec{p}})=0\end{cases}$$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)\psi(\vec{r},t)=0$

$$\Rightarrow\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{E=-\infty}^{+\infty}(i\gamma^a p_a+m)\psi(\vec{p},E)e^{ip\cdot x}d^3\vec{p}dE=0$$

$$\Leftrightarrow(i\gamma^a p_a+m)\psi(\vec{p},E)=0\Leftrightarrow(i\gamma^a p_a-m)(i\gamma^a p_a+m)\psi(\vec{p},E)=0,(i\gamma^a p_a+m)\psi(\vec{p},E)=0$$

$$\Leftrightarrow(E^2-\vec{p}^2-m^2)\psi(\vec{p},E)=0,(i\gamma^a p_a+m)\psi(\vec{p},E)=0$$

$$\Leftrightarrow\psi(\vec{p},E)=a(\vec{p},E)\delta(E^2-\vec{p}^2-m^2)+\psi_0(\vec{p},E)\delta_{E^2,\vec{p}^2+m^2},(i\gamma^a p_a+m)\psi(\vec{p},E)=0$$

$$\Rightarrow\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{E=-\infty}^{+\infty}[a(\vec{p},E)\delta(E^2-\vec{p}^2-m^2)+\psi_0(\vec{p},E)\delta_{E^2,\vec{p}^2+m^2}]e^{ip\cdot x}d^3\vec{p}dE$$

$$\Leftrightarrow\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{E=-\infty}^{+\infty}a(\vec{p},E)\delta(E^2-\vec{p}^2-m^2)e^{ip\cdot x}d^3\vec{p}dE$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}[a(\vec{p},E_{\vec{p}})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_{\vec{p}}t)}+a(\vec{p},-E_{\vec{p}})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}+E_{\vec{p}}t)}]d^3\vec{p}\\(i\gamma^a p_a+m)a(\vec{p},E_{\vec{p}})=0,(i\gamma\cdot\vec{p}+\gamma^4E_{\vec{p}}+m)a(\vec{p},-E_{\vec{p}})=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}[a(\vec{p},E_{\vec{p}})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_{\vec{p}}t)}+a(-\vec{p},-E_{\vec{p}})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_{\vec{p}}t)}]d^3\vec{p}\\(i\gamma^a p_a+m)a(\vec{p},E_{\vec{p}})=0,(-i\gamma^a p_a+m)a(-\vec{p},-E_{\vec{p}})=0\end{cases}$$ □

定理1.1.2. $(i\gamma^a p_a+m)a(\vec{p},E_{\vec{p}})=0,\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x),(i\gamma^a p_a+m)=\begin{bmatrix}m&-\varsigma E+\sigma\cdot\vec{p}\\-\varsigma E-\sigma\cdot\vec{p}&m\end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a(\vec{p},E_{\vec{p}})=\begin{bmatrix}m\varphi(\vec{p})\\(\varsigma E_{\vec{p}}+\sigma\cdot\vec{p})\varphi(\vec{p})\end{bmatrix}=(-i\gamma^a p_a+m)\begin{bmatrix}\varphi(\vec{p})\\0\end{bmatrix}=(-i\gamma^a p_a+m)\begin{bmatrix}0\\\frac{\varsigma E_{\vec{p}}+\sigma\cdot\vec{p}}{m}\varphi(\vec{p})\end{bmatrix}\\a(\vec{p},E_{\vec{p}})=\begin{bmatrix}(\varsigma E_{\vec{p}}-\sigma\cdot\vec{p})\eta(\vec{p})\\m\eta(\vec{p})\end{bmatrix}=(-i\gamma^a p_a+m)\begin{bmatrix}0\\\eta(\vec{p})\end{bmatrix}=(-i\gamma^a p_a+m)\begin{bmatrix}\frac{\varsigma E_{\vec{p}}-\sigma\cdot\vec{p}}{m}\eta(\vec{p})\\0\end{bmatrix}\end{cases}$$

推论1.1.1. $(i\gamma^a p_a - m)a(-\vec{p}, -E_{\vec{p}}) = 0, \gamma^a = (\sigma \otimes \sigma_y, \varsigma I \otimes \sigma_x), (i\gamma^a p_a - m) = \begin{bmatrix} -m & -\varsigma E+\sigma\cdot\vec{p} \\ -\varsigma E-\sigma\cdot\vec{p} & -m \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(-\vec{p}, -E_{\vec{p}}) = \begin{bmatrix} -m\varphi(-\vec{p}) \\ (\varsigma E_{\vec{p}} + \sigma\cdot\vec{p})\varphi(-\vec{p}) \end{bmatrix} = (-i\gamma^a p_a - m)\begin{bmatrix} \varphi(-\vec{p}) \\ 0 \end{bmatrix} = (-i\gamma^a p_a - m)\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\varsigma E_{\vec{p}} - \sigma\cdot\vec{p}}{m}\varphi(-\vec{p}) \end{bmatrix} \\ a(-\vec{p}, -E_{\vec{p}}) = \begin{bmatrix} (\varsigma E_{\vec{p}} - \sigma\cdot\vec{p})\eta(-\vec{p}) \\ -m\eta(-\vec{p}) \end{bmatrix} = (-i\gamma^a p_a - m)\begin{bmatrix} 0 \\ \eta(-\vec{p}) \end{bmatrix} = (-i\gamma^a p_a - m)\begin{bmatrix} \frac{-\varsigma E_{\vec{p}} + \sigma\cdot\vec{p}}{m}\eta(-\vec{p}) \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

自我评述：从上可以看出Dirac方程的平面波解有多种等价的表达形式。自旋基的直观选取有好多种，本质上有无限种选法，但它们本质上也是表象等价的，差一个幺正变换。无论选取哪一个基，物理是等价一致的。但选的好，计算就方便。但要注意对于无质量粒子，以上几种表达不一定是等价的。

1.1.2 非归一化Dirac自旋基(适合任意质量情形)

推论1.1.2. $(\gamma^a\partial_a + m)\psi(\vec{r}, t) = 0, \gamma^a = (\sigma \otimes \sigma_y, \varsigma I \otimes \sigma_x)$

$$\Leftrightarrow \psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2E}[a(\vec{p}, E)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)} + a(-\vec{p}, -E)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)}]d^3\vec{p}$$

$$a(\vec{p}, E) = (-i\gamma^a p_a + m)\begin{bmatrix} \varphi(\vec{p}) \\ 0 \end{bmatrix}, a(-\vec{p}, -E) = (-i\gamma^a p_a - m)\begin{bmatrix} \eta(\vec{p}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

γ^a本章采用以上约定，另有说明除外。

定义1.1.1. $X(\vec{p}, \frac{\kappa}{2}) := (-i\gamma^a p_a + m)\begin{bmatrix} \lambda(\hat{p}, \frac{\kappa}{2}) \\ 0 \end{bmatrix}, Y(\vec{p}, \frac{\kappa}{2}) := (-i\gamma^a p_a - m)\begin{bmatrix} \lambda(\hat{p}, \frac{\kappa}{2}) \\ 0 \end{bmatrix}$

推论1.1.3. $X(\vec{p}, \frac{\kappa}{2}) = \lambda(\hat{p}, \frac{\kappa}{2}) \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E + \kappa|\vec{p}| \end{bmatrix}, Y(\vec{p}, \frac{\kappa}{2}) = \lambda(\hat{p}, \frac{\kappa}{2}) \otimes \begin{bmatrix} -m \\ \varsigma E + \kappa|\vec{p}| \end{bmatrix}$

1.1.3 归一化无质量Dirac自旋基

定义1.1.2. $X(\vec{p}, \frac{\kappa}{2}) = Y(\vec{p}, \frac{\kappa}{2}) := -i\gamma^a p_a \begin{bmatrix} \lambda(\hat{p}, \frac{\kappa}{2}) \\ 0 \end{bmatrix}$

推论1.1.4. $X(\vec{p}, \frac{\varsigma}{2}) = Y(\vec{p}, \frac{\varsigma}{2}) = 2\varsigma|\vec{p}|\lambda(\hat{p}, \frac{\kappa}{2}) \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, X(\vec{p}, -\frac{\varsigma}{2}) = Y(\vec{p}, -\frac{\varsigma}{2}) = 0$

推论1.1.5. $\bar{X}(\vec{p}, \frac{\varsigma}{2}) = \bar{Y}(\vec{p}, \frac{\varsigma}{2}) = \lambda(\hat{p}, \frac{\kappa}{2}) \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{X}(\vec{p}, -\frac{\varsigma}{2}) = \bar{Y}(\vec{p}, -\frac{\varsigma}{2}) = 0$

自我评述：直接用$m \to 0$得到无质量情形，并不全面，这只是一组解，还有另一组解。事实上无质量情形需要重新分析。

1.1.4 Dirac电荷基的定义

定义1.1.3. $\mu(\vec{p}, \frac{\kappa}{2}) := \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{E-\kappa\varsigma|\vec{p}|}{2m}} \\ \varsigma\sqrt{\frac{E+\kappa\varsigma|\vec{p}|}{2m}} \end{bmatrix}, \nu(\vec{p}, \frac{\kappa}{2}) := \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{E-\kappa\varsigma|\vec{p}|}{2m}} \\ \varsigma\sqrt{\frac{E+\kappa\varsigma|\vec{p}|}{2m}} \end{bmatrix}$

推论1.1.6. $\mu(\vec{p}, \frac{\kappa}{2}) := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{m}{E+\kappa\varsigma|\vec{p}|}} \\ \varsigma\sqrt{\frac{E+\kappa\varsigma|\vec{p}|}{m}} \end{bmatrix}, \nu(\vec{p}, \frac{\kappa}{2}) := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{m}{E+\kappa\varsigma|\vec{p}|}} \\ \varsigma\sqrt{\frac{E+\kappa\varsigma|\vec{p}|}{m}} \end{bmatrix}$

定义1.1.4. $\tilde{\mu}(\vec{p}, \frac{\kappa}{2}) := \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{E-\kappa\varsigma|\vec{p}|}{2E}} \\ \varsigma\sqrt{\frac{E+\kappa\varsigma|\vec{p}|}{2E}} \end{bmatrix}, \tilde{\nu}(\vec{p}, \frac{\kappa}{2}) := \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{E-\kappa\varsigma|\vec{p}|}{2E}} \\ \varsigma\sqrt{\frac{E+\kappa\varsigma|\vec{p}|}{2E}} \end{bmatrix}$

推论1.1.7. $\tilde{\mu}(\vec{p}, \frac{\kappa}{2}) = \sqrt{\frac{m}{E}}\mu(\vec{p}, \frac{\kappa}{2}), \tilde{\nu}(\vec{p}, \frac{\kappa}{2}) = \sqrt{\frac{m}{E}}\nu(\vec{p}, \frac{\kappa}{2})$

自我评述：为何称为电荷基跟后面的具体分析有关，也许这样称呼并不合适。

1.1.5 归一化Dirac自旋基

推论1.1.8. $u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})}{\sqrt{2m(E+\kappa\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}m\\ \varsigma E+\kappa|\vec{p}|\end{bmatrix},v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})}{\sqrt{2m(E+\kappa\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}-m\\ \varsigma E+\kappa|\vec{p}|\end{bmatrix}$

推论1.1.9. $u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\otimes\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2}),v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\otimes\nu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$

推论1.1.10. $u(\vec{p},h)=-\varsigma\gamma_5 v(\vec{p},h),v(\vec{p},h)=-\varsigma\gamma_5 u(\vec{p},h),h=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$

定理1.1.3. $(i\gamma^a p_a+m)u(\vec{p},h)=0,(i\gamma^a p_a-m)v(\vec{p},h)=0,\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x,\varsigma I\otimes\sigma_z)$

定义1.1.5. $\tilde{u}(\vec{p},\frac{\kappa}{2}):=\sqrt{\frac{m}{E}}u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}),\tilde{v}(\vec{p},\frac{\kappa}{2}):=\sqrt{\frac{m}{E}}v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$

推论1.1.11. $\tilde{u}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})}{\sqrt{2E(E+\kappa\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}m\\ \varsigma E+\kappa|\vec{p}|\end{bmatrix},\tilde{v}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})}{\sqrt{2E(E+\kappa\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}-m\\ \varsigma E+\kappa|\vec{p}|\end{bmatrix}$

推论1.1.12. $\tilde{u}(\vec{p},\frac{\kappa}{2};m=0)=\frac{\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})}{\sqrt{2E(E+\kappa\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}m\\ \varsigma E+\kappa|\vec{p}|\end{bmatrix},\tilde{v}(\vec{p},\frac{\kappa}{2};m=0)=\frac{\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})}{\sqrt{2E(E+\kappa\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}-m\\ \varsigma E+\kappa|\vec{p}|\end{bmatrix}$

自我评述：为何定义两种归一化自旋基，与两种不同的归一化方式相对应。又为何如此选择自旋基主要理由有两点，一是分解为两个基的直积，可以简化很多计算；二是其中一个基选为螺旋度，可以充分利用之前的螺旋度分析成果，也可以大大简化计算。

1.1.6 新电荷算符的定义

定义1.1.6. $\hat{Q}(\vec{p}):=\frac{i\gamma^a p_a}{m},\hat{q}(\vec{p},\kappa):=\frac{-\varsigma E\sigma_x+i\kappa|\vec{p}|\sigma_y}{m}$

引理1.1.1. $i\gamma^a p_a=\begin{bmatrix}0 & -\varsigma E+\sigma\cdot\vec{p}\\ -\varsigma E-\sigma\cdot\vec{p} & 0\end{bmatrix}=-\varsigma EI\otimes\sigma_x+i\sigma\cdot\vec{p}\otimes\sigma_y,\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x)$

定理1.1.4. $\hat{Q}(\vec{p})u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}),\hat{Q}(\vec{p})v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}),\hat{q}(\vec{p},\kappa)\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2}),\hat{q}(\vec{p},\kappa)\nu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\nu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$

证明: $\hat{Q}(\vec{p})u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{i\gamma^a p_a}{m}u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=(-\varsigma\frac{E}{m}I\otimes\sigma_x+i\frac{1}{m}\sigma\cdot\vec{p}\otimes\sigma_y)\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\otimes\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=(I\otimes\frac{-\varsigma E\sigma_x+i\kappa|\vec{p}|\sigma_y}{m})(\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2}))\otimes\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=-\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\otimes\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$ □

证明: $\hat{Q}(\vec{p})v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{i\gamma^a p_a}{m}v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=(-\varsigma\frac{E}{m}I\otimes\sigma_x+i\frac{1}{m}\sigma\cdot\vec{p}\otimes\sigma_y)\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\otimes\nu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=(I\otimes\frac{-\varsigma E\sigma_x+i\kappa|\vec{p}|\sigma_y}{m})(\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2}))\otimes\nu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\otimes\nu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$ □

1.1.7 Dirac自旋基是自旋、螺旋度和电荷三个算符的共同本征态

性质1.1.1.

$$\begin{cases}\sigma^2(\frac{1}{2})\otimes Iu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\\ \sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}\otimes Iu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{\kappa}{2}u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\\ \hat{Q}(\vec{p})u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\\ \text{描述电子}:(s,h;Q)=(\frac{1}{2};\frac{\kappa}{2},-1)\end{cases}\quad\begin{cases}\sigma^2(\frac{1}{2})\otimes Iv(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\\ \sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}\otimes Iv(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{\kappa}{2}v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\\ \hat{Q}(\vec{p})v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\\ \text{描述正电子}:(s,h;Q)=(\frac{1}{2};\frac{\kappa}{2},1)\end{cases}$$

1.2 四维矢量自旋基的引入

1.2.1 四维矢量自旋基

推论1.2.1. $\lambda_m(\hat{p},-1)=\lambda_m^*(\hat{p},1),\lambda_m(\hat{p},0)=-\lambda_m^*(\hat{p},0),\lambda_m(\hat{p},1)=\lambda_m^*(\hat{p},-1)$

定义1.2.1. $\varepsilon_a(\vec{p},\kappa):=[i\lambda_m(\vec{p},\kappa),0]_a,\varepsilon_a(\vec{p},0):=\frac{1}{m}[iE\lambda_m(\vec{p},0),i|\vec{p}|]_a,\bar{\varepsilon}_a(\vec{p},h):=\varepsilon_{a'}^{+}(\vec{p},h)\eta_a^{a'}$

推论1.2.2.
$$\begin{cases}\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i\\-1\\0\end{bmatrix}\\ \lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},0)=\begin{bmatrix}0\\0\\-i\end{bmatrix}\\ \lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i\\-1\\0\end{bmatrix}\end{cases}$$

推论1.2.3. $\varepsilon_a(\begin{bmatrix}0\\0\\|\vec{p}|\end{bmatrix},1):=\frac{1}{\sqrt{2}}[-1,-i,0,0]_a,\varepsilon_a(\begin{bmatrix}0\\0\\|\vec{p}|\end{bmatrix},0):=\frac{1}{m}[0,0,E,i|\vec{p}|]_a,\varepsilon_a(\begin{bmatrix}0\\0\\|\vec{p}|\end{bmatrix},-1):=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-i,0,0]_a$

推论1.2.4. $\eta_{aa'}\varepsilon^{+a'}(\vec{p},\kappa)=-\varepsilon_a(\vec{p},-\kappa),\eta_{aa'}\varepsilon^{+a'}(\vec{p},0)=\varepsilon_a(\vec{p},0),\eta_{aa'}\varepsilon^{+a'}(\vec{p},h)=(-1)^h\varepsilon_a(\vec{p},-h)$

定理1.2.1. $\varepsilon^+(\vec{p},h)\varepsilon(\vec{p},h')=(\frac{E^2+p^2}{m^2})^{1-|h|}\delta_{hh'},\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},h)=\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2},\sum_{h=1}^{-1}h\varepsilon(\vec{p},h)\varepsilon^+(\vec{p},h)=R\cdot\hat{p}$

定理1.2.2. $\bar{\varepsilon}(\vec{p},h)\varepsilon(\vec{p},h')=\delta_{hh'},\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_b(\vec{p},h)=\delta_{ab}+\frac{p_ap_b}{m^2},\sum_{h=1}^{-1}h\varepsilon(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}(\vec{p},h)=R\cdot\hat{p}$

推论1.2.5. $(R\cdot\hat{p})\varepsilon(\vec{p},h)=h\varepsilon(\vec{p},h),(R\cdot\hat{p})\frac{p_{[a]}}{m}=0;R^2\varepsilon(\vec{p},h)=1(1+1)\varepsilon(\vec{p},h)$

推论1.2.6. $(L\cdot\hat{p})\varepsilon(\vec{p},\kappa)=0,(L\cdot\hat{p})\varepsilon(\vec{p},0)=-\frac{p_{[a]}}{m},(L\cdot\hat{p})\frac{p_{[a]}}{m}=-\varepsilon(\vec{p},0)$

推论1.2.7. $\begin{cases}(\sigma_+\cdot\hat{p})\varepsilon(\vec{p},\kappa)=\kappa\varepsilon(\vec{p},\kappa),(\sigma_+\cdot\hat{p})\varepsilon(\vec{p},0)=-\frac{p_{[a]}}{m},(\sigma_+\cdot\hat{p})\frac{p_{[a]}}{m}=-\varepsilon(\vec{p},0)\\(\sigma_-\cdot\hat{p})\varepsilon(\vec{p},\kappa)=\kappa\varepsilon(\vec{p},\kappa),(\sigma_-\cdot\hat{p})\varepsilon(\vec{p},0)=\frac{p_{[a]}}{m},(\sigma_-\cdot\hat{p})\frac{p_{[a]}}{m}=\varepsilon(\vec{p},0)\end{cases}$

自我评述：为何如此选择自旋基，与后面的具体分析相关，事实上我是在后面的具体分析中提炼出这个结果，然后放到这里进行必要的先行研究，从而使后面的章节可以更专注于物理本身。

1.2.2 复矢量自旋基和四维矢量自旋基之间的关系I

推论1.2.8. $\begin{cases}[R\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\varepsilon(\vec{p},\kappa)=-i\kappa\varepsilon(\vec{p},h),[R\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\varepsilon(\vec{p},0)=0,[R\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\frac{p_{[a]}}{m}=0\\[L\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\varepsilon(\vec{p},\kappa)=0,[L\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\varepsilon(\vec{p},0)=\frac{ip_{[a]}}{m},[L\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\frac{p_{[a]}}{m}=i\varepsilon(\vec{p},0)\end{cases}$

推论1.2.9. $\begin{cases}[R\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},1)=[\vec{0},0],[R\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},-1)=-[\lambda_m(\vec{p},0),0]\\[R\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},0)=-\frac{E}{m}[\lambda_m(\vec{p},1),0],[R\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\frac{p_{[a]}}{m}=-\frac{|\vec{p}|}{m}[\lambda_m(\vec{p},1),0]\\[L\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},1)=[\vec{0},0],[L\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},-1)=[\vec{0},1]\\[L\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},0)=-\frac{|\vec{p}|}{m}[\lambda_m(\vec{p},1),0],[L\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\frac{p_{[a]}}{m}=-\frac{E}{m}[\lambda_m(\vec{p},1),0]\end{cases}$

推论1.2.10. $\begin{cases}[R\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},-1)=[\vec{0},0],[R\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},1)=[\lambda_m(\vec{p},0),0]\\[R\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},0)=\frac{E}{m}[\lambda_m(\vec{p},-1),0],[R\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\frac{p_{[a]}}{m}=\frac{|\vec{p}|}{m}[\lambda_m(\vec{p},-1),0]\\[L\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},-1)=[\vec{0},0],[L\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},1)=[\vec{0},1]\\[L\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},0)=-\frac{|\vec{p}|}{m}[\lambda_m(\vec{p},-1),0],[L\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\frac{p_{[a]}}{m}=-\frac{E}{m}[\lambda_m(\vec{p},-1),0]\end{cases}$

1.2.3 复矢量自旋基和四维矢量自旋基之间的关系II

推论1.2.11. $\begin{cases}[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\varepsilon(\vec{p},\kappa)=-i\kappa\varepsilon(\vec{p},h),[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\varepsilon(\vec{p},0)=\frac{ip_{[a]}}{m},[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\frac{p_{[a]}}{m}=i\varepsilon(\vec{p},0)\\[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\varepsilon(\vec{p},\kappa)=-i\kappa\varepsilon(\vec{p},h),[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\varepsilon(\vec{p},0)=-\frac{ip_{[a]}}{m},[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\frac{p_{[a]}}{m}=-i\varepsilon(\vec{p},0)\end{cases}$

推论1.2.12. $\begin{cases}[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},1)=[\vec{0},0],[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},-1)=-[\lambda_m(\vec{p},0),-1]\\[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},0)=-\frac{E+|\vec{p}|}{m}[\lambda_m(\vec{p},1),0],[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\frac{p_{[a]}}{m}=-\frac{E+|\vec{p}|}{m}[\lambda_m(\vec{p},1),0]\\[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},1)=[\vec{0},0],[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},-1)=-[\lambda_m(\vec{p},0),1]\\[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},0)=-\frac{E-|\vec{p}|}{m}[\lambda_m(\vec{p},1),0],[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\frac{p_{[a]}}{m}=\frac{E-|\vec{p}|}{m}[\lambda_m(\vec{p},1),0]\end{cases}$

推论1.2.13. $\begin{cases}[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},-1)=[\vec{0},0],[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},1)=[\lambda_m(\vec{p},0),1]\\[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},0)=\frac{E-|\vec{p}|}{m}[\lambda_m(\vec{p},-1),0],[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\frac{p_{[a]}}{m}=-\frac{E-|\vec{p}|}{m}[\lambda_m(\vec{p},-1),0]\\[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},-1)=[\vec{0},0],[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},1)=[\lambda_m(\vec{p},0),-1]\\[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},0)=\frac{E+|\vec{p}|}{m}[\lambda_m(\vec{p},-1),0],[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\frac{p_{[a]}}{m}=\frac{E+|\vec{p}|}{m}[\lambda_m(\vec{p},-1),0]\end{cases}$

1.2.4 复矢量自旋基和四维矢量自旋基之间的关系III

推论1.2.14. $\begin{cases}[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\varepsilon(\vec{p},\kappa)=-i\kappa\varepsilon(\vec{p},h),[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\varepsilon(\vec{p},0)=\frac{ip_{[a]}}{m},[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\frac{p_{[a]}}{m}=i\varepsilon(\vec{p},0)\\ [\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\varepsilon(\vec{p},\kappa)=-i\kappa\varepsilon(\vec{p},h),[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\varepsilon(\vec{p},0)=-\frac{ip_{[a]}}{m},[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},0)]\frac{p_{[a]}}{m}=-i\varepsilon(\vec{p},0)\end{cases}$

推论1.2.15. $\begin{cases}[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},1)=[\vec{0},0],[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},-1)=i\frac{E+|\vec{p}|}{m}[\varepsilon(\vec{p},0)-\frac{p_{[a]}}{m}]\\ [\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},0)=i\frac{E+|\vec{p}|}{m}\varepsilon(\vec{p},1),[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\frac{p_{[a]}}{m}=i\frac{E+|\vec{p}|}{m}\varepsilon(\vec{p},1)\\ [\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},1)=[\vec{0},0],[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},-1)=i\frac{E-|\vec{p}|}{m}[\varepsilon(\vec{p},0)+\frac{p_{[a]}}{m}]\\ [\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\varepsilon(\vec{p},0)=i\frac{E-|\vec{p}|}{m}\varepsilon(\vec{p},1),[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},1)]\frac{p_{[a]}}{m}=-i\frac{E-|\vec{p}|}{m}\varepsilon(\vec{p},1)\end{cases}$

推论1.2.16. $\begin{cases}[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},-1)=[\vec{0},0],[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},1)=-i\frac{E-|\vec{p}|}{m}[\varepsilon(\vec{p},0)+\frac{p_{[a]}}{m}]\\ [\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},0)=-i\frac{E-|\vec{p}|}{m}\varepsilon(\vec{p},-1),[\sigma_+\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\frac{p_{[a]}}{m}=i\frac{E-|\vec{p}|}{m}\varepsilon(\vec{p},-1)\\ [\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},-1)=[\vec{0},0],[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},1)=-i\frac{E+|\vec{p}|}{m}[\varepsilon(\vec{p},0)-\frac{p_{[a]}}{m}]\\ [\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\varepsilon(\vec{p},0)=-i\frac{E+|\vec{p}|}{m}\varepsilon(\vec{p},-1),[\sigma_-\cdot\lambda_m(\vec{p},-1)]\frac{p_{[a]}}{m}=-i\frac{E+|\vec{p}|}{m}\varepsilon(\vec{p},-1)\end{cases}$

1.2.5 复矢量自旋基和四维矢量自旋基之间的关系IV

推论1.2.17. $\begin{cases}[\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},\kappa)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},0)=-i\kappa\varepsilon^a(\vec{p},h),[\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},0)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},0)=\frac{ip^a}{m},[\sigma^{ab}_{+\alpha}\frac{p_b}{m}]\lambda^\alpha_m(\vec{p},0)=i\varepsilon^a(\vec{p},0)\\ [\sigma^{ab}_{-\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},\kappa)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},0)=-i\kappa\varepsilon^a(\vec{p},h),[\sigma^{ab}_{-\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},0)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},0)=-\frac{ip^a}{m},[\sigma^{ab}_{-\alpha}\frac{p_b}{m}]\lambda^\alpha_m(\vec{p},0)=-i\varepsilon^a(\vec{p},0)\end{cases}$

推论1.2.18. $\begin{cases}[\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},1)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},1)=[\vec{0},0],[\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},-1)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},1)=i\frac{E+|\vec{p}|}{m}[\varepsilon^a(\vec{p},0)-\frac{p^a}{m}]\\ [\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},0)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},1)=i\frac{E+|\vec{p}|}{m}\varepsilon^a(\vec{p},1),[\sigma^{ab}_{+\alpha}\frac{p_b}{m}]\lambda^\alpha_m(\vec{p},1)=i\frac{E+|\vec{p}|}{m}\varepsilon^a(\vec{p},1)\\ [\sigma^{ab}_{-\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},1)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},1)=[\vec{0},0],[\sigma^{ab}_{-\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},-1)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},1)=i\frac{E-|\vec{p}|}{m}[\varepsilon^a(\vec{p},0)+\frac{p^a}{m}]\\ [\sigma^{ab}_{-\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},0)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},1)=i\frac{E-|\vec{p}|}{m}\varepsilon^a(\vec{p},1),[\sigma^{ab}_{-\alpha}\frac{p_b}{m}]\lambda^\alpha_m(\vec{p},1)=-i\frac{E-|\vec{p}|}{m}\varepsilon^a(\vec{p},1)\end{cases}$

推论1.2.19. $\begin{cases}[\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},-1)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},-1)=[\vec{0},0],[\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},1)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},-1)=-i\frac{E-|\vec{p}|}{m}[\varepsilon^a(\vec{p},0)+\frac{p^a}{m}]\\ [\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},0)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},-1)=-i\frac{E-|\vec{p}|}{m}\varepsilon^a(\vec{p},-1),[\sigma^{ab}_{+\alpha}\frac{p_b}{m}]\lambda^\alpha_m(\vec{p},-1)=i\frac{E-|\vec{p}|}{m}\varepsilon^a(\vec{p},-1)\\ [\sigma^{ab}_{-\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},-1)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},-1)=[\vec{0},0],[\sigma^{ab}_{-\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},1)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},-1)=-i\frac{E+|\vec{p}|}{m}[\varepsilon^a(\vec{p},0)-\frac{p^a}{m}]\\ [\sigma^{ab}_{-\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},0)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},-1)=-i\frac{E+|\vec{p}|}{m}\varepsilon^a(\vec{p},-1),[\sigma^{ab}_{-\alpha}\frac{p_b}{m}]\lambda^\alpha_m(\vec{p},-1)=-i\frac{E+|\vec{p}|}{m}\varepsilon^a(\vec{p},-1)\end{cases}$

1.2.6 复矢量自旋基和四维矢量自旋基之间的关系V

推论1.2.20.

$$\begin{cases}[\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},1)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},0)=-i\varepsilon^a(\vec{p},1),[\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},0)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},0)=\frac{ip^a}{m},[\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},-1)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},0)=i\varepsilon^a(\vec{p},-1)\\ [\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},1)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},1)=[\vec{0},0],[\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},0)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},1)=i\frac{E+|\vec{p}|}{m}\varepsilon^a(\vec{p},1)\\ [\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},-1)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},1)=i\frac{E+|\vec{p}|}{m}[\varepsilon^a(\vec{p},0)-\frac{p^a}{m}]\\ [\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},1)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},-1)=-i\frac{E-|\vec{p}|}{m}[\varepsilon^a(\vec{p},0)+\frac{p^a}{m}],[\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},0)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},-1)=-i\frac{E-|\vec{p}|}{m}\varepsilon^a(\vec{p},-1)\\ [\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},-1)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},-1)=[\vec{0},0]\end{cases}$$

推论1.2.21.

$$\sum_{h,h'=1}^{-1}[\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},h)]\lambda^\alpha_m(\vec{p},h')\{[\sigma^{a'b'}_{+\alpha'}\varepsilon_{b'}(\vec{p},h)]\lambda^{\alpha'}_m(\vec{p},h')\}^+$$
$$=\sum_{h=1}^{-1}[\sigma^{ab}_{+\alpha}\varepsilon_b(\vec{p},h)]\delta^{\alpha\alpha'}\{[\sigma^{a'b'}_{+\alpha'}\varepsilon_{b'}(\vec{p},h)]\}^+$$
$$=-\delta^{\alpha\alpha'}\sigma^{ab}_{+\alpha}\sigma^{a'b'}_{+\alpha'}\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_b(\vec{p},h)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},h)$$

$$= -(-\delta^{aa'}\delta^{bb'} + \delta^{ab'}\delta^{ba'} + \varepsilon^{aba'b'})\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_b(\vec{p},h)\varepsilon_{b'}^{+}(\vec{p},h)$$

$$= 3\delta^{aa'} - \sum_{h=1}^{-1}\varepsilon^{a'}(\vec{p},h)\varepsilon^{+a}(\vec{p},h) = 3\delta^{aa'} - \sum_{h=1}^{-1}\varepsilon^{a}(\vec{p},h)\varepsilon^{+a'}(\vec{p},h)$$

推论1.2.22.

$$\sum_{h,h'=1}^{-1}[\sigma_{-\alpha}^{ab}\varepsilon_b(\vec{p},h)]\lambda_m^{\alpha}(\vec{p},h')\{[\sigma_{-\alpha'}^{a'b'}\varepsilon_{b'}(\vec{p},h)]\lambda_m^{\alpha'}(\vec{p},h')\}^{+}$$

$$= \sum_{h=1}^{-1}[\sigma_{-\alpha}^{ab}\varepsilon_b(\vec{p},h)]\delta^{\alpha\alpha'}\{[\sigma_{-\alpha'}^{a'b'}\varepsilon_{b'}(\vec{p},h)]\}^{+}$$

$$= -\delta^{\alpha\alpha'}\sigma_{-\alpha}^{ab}\sigma_{-\alpha'}^{a'b'}\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_b(\vec{p},h)\varepsilon_{b'}^{+}(\vec{p},h)$$

$$= -(-\delta^{aa'}\delta^{bb'} + \delta^{ab'}\delta^{ba'} - \varepsilon^{aba'b'})\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_b(\vec{p},h)\varepsilon_{b'}^{+}(\vec{p},h)$$

$$= 3\delta^{aa'} - \sum_{h=1}^{-1}\varepsilon^{a'}(\vec{p},h)\varepsilon^{+a}(\vec{p},h) = 3\delta^{aa'} - \sum_{h=1}^{-1}\varepsilon^{a}(\vec{p},h)\varepsilon^{+a'}(\vec{p},h)$$

1.3 Dirac自旋基的数学分析

1.3.1 二维自旋基之间的等价关系

性质1.3.1. $\begin{cases}\lambda^{*}(\hat{p},-\frac{\kappa}{2}) = -i\kappa\sigma_y\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2}), \lambda^{+}(\hat{p},-\frac{\kappa}{2}) = i\kappa\lambda^{T}(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\sigma_y \\ \lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2}) = i\kappa\sigma_y\lambda^{*}(\hat{p},-\frac{\kappa}{2}), \lambda^{T}(\hat{p},\frac{\kappa}{2}) = -i\kappa\lambda^{+}(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})\sigma_y\end{cases}$

性质1.3.2. $\begin{cases}\mu^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}) = \varsigma\sigma_x\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2}), \mu^{+}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}) = \varsigma\mu^{T}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\sigma_x \\ \nu^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}) = -\varsigma\sigma_x\nu(\vec{p},\frac{\kappa}{2}), \nu^{+}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}) = -\varsigma\nu^{T}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\sigma_x\end{cases}$

性质1.3.3. $\begin{cases}\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \varsigma\sigma_x\mu^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}), \mu^{T}(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \varsigma\mu^{+}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\sigma_x \\ \nu(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = -\varsigma\sigma_x\nu^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}), \nu^{T}(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = -\varsigma\nu^{+}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\sigma_x\end{cases}$

1.3.2 Dirac自旋基之间的等价关系

性质1.3.4. $\begin{cases}u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = i\kappa\varsigma\sigma_y\otimes\sigma_x u^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}) = \kappa\gamma_2\gamma_5 u^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}) \\ v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = -i\kappa\varsigma\sigma_y\otimes\sigma_x v^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}) = -\kappa\gamma_2\gamma_5 v^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\end{cases}$

性质1.3.5. $\begin{cases}u^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}) = -i\kappa\varsigma\sigma_y\otimes\sigma_x u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = -\kappa\gamma_2\gamma_5 u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) \\ v^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}) = i\kappa\varsigma\sigma_y\otimes\sigma_x v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \kappa\gamma_2\gamma_5 v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\end{cases}$

性质1.3.6. $\begin{cases}u^{+}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}) = i\kappa\varsigma u^{T}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\sigma_y\otimes\sigma_x = \kappa u^{T}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_2\gamma_5 \\ v^{+}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}) = -i\kappa\varsigma v^{T}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\sigma_y\otimes\sigma_x = -i\kappa v^{T}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_2\gamma_5\end{cases}$

性质1.3.7. $\begin{cases}u^{T}(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = -i\kappa\varsigma u^{+}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\sigma_y\otimes\sigma_x = -\kappa u^{+}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\gamma_2\gamma_5 \\ v^{T}(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = i\kappa\varsigma v^{+}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\sigma_y\otimes\sigma_x = \kappa v^{+}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\gamma_2\gamma_5\end{cases}$

1.3.3 Dirac自旋基的完备性分析

推论1.3.1. $\begin{cases}\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\mu^{+}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}) = \frac{1}{2m}\begin{bmatrix} m & \varsigma E-\kappa|\vec{p}| \\ \varsigma E+\kappa|\vec{p}| & m\end{bmatrix} = \frac{1}{2}(I+\varsigma\frac{E}{m}\sigma_x - i\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y) \\ \mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\mu^{+}(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{\varsigma}{2m}\begin{bmatrix} \varsigma E-\kappa|\vec{p}| & m \\ m & \varsigma E+\kappa|\vec{p}|\end{bmatrix} = \frac{\varsigma}{2}(I+\varsigma\frac{E}{m}\sigma_x - i\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y)\sigma_x\end{cases}$

推论1.3.2. $\begin{cases}u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})u^{+}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}) = \frac{1}{4}[\kappa(\sigma\cdot\hat{p}+I)i\sigma_y]\otimes(I+\varsigma\frac{E}{m}\sigma_x - i\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y) \\ u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})u^{+}(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{1}{4}[(\kappa\sigma\cdot\hat{p}+I)\otimes(I+\varsigma\frac{E}{m}\sigma_x - i\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y)](\varsigma I\otimes\sigma_x)\end{cases}$

推论1.3.3. $\sum_{h=1/2}^{-1/2} u(\vec{p},h)\bar{u}(\vec{p},h) - v(\vec{p},h)\bar{v}(\vec{p},h)] = I_4, \sum_{h=1/2}^{-1/2} u(\vec{p},h)\bar{u}(\vec{p},h) + v(\vec{p},h)\bar{v}(\vec{p},h)] = \frac{-i\gamma^a p_a}{m}$

推论1.3.4. $\sum_{h=1/2}^{-1/2} u(\vec{p},h)u^+(\vec{p},h) + v(-\vec{p},h)v^+(-\vec{p},h)] = \frac{E}{m}$

1.3.4 Dirac方程准投影算子 [5]

定义1.3.1. $\Lambda_+(\frac{1}{2}) := \sum_{h=1/2}^{-1/2} u(\vec{p},h)u^+(\vec{p},h) = \frac{(m-i\gamma^a p_a)\gamma_4}{2m}, \Lambda_-(\frac{1}{2}) := \sum_{h=1/2}^{-1/2} v(\vec{p},h)v^+(\vec{p},h) = \frac{(-m-i\gamma^a p_a)\gamma_4}{2m}$

1.3.5 二维自旋基的正交性质

定义1.3.2. $\hat{p}_a := (\hat{p}, i)$

性质1.3.8.

$$\begin{cases} \lambda^+(\hat{p},\frac{\kappa}{2})(\sigma,i\kappa)_a\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2}) = \kappa\hat{p}_a \\ \mu^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})(\sigma,I)_a\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{1}{m}(\varsigma m, 0, -\kappa\varsigma|\vec{p}|, E)_a \\ \nu^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})(\sigma,I)_a\nu(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{1}{m}(-\varsigma m, 0, -\kappa\varsigma|\vec{p}|, E)_a \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})(\sigma,i\kappa)_a\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2}) = -i\kappa\sqrt{2}[\lambda_m(\hat{p},\kappa),0]_a \\ \mu^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})(\sigma,I)_a\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{1}{m}(\varsigma E, -i\kappa|\vec{p}|, 0, m)_a \\ \nu^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})(\sigma,I)_a\nu(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{1}{m}(-\varsigma E, i\kappa|\vec{p}|, 0, m)_a \end{cases}$$

1.3.6 Dirac自旋基的正交性质

性质1.3.9.

$$\begin{cases} u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})[(\sigma,i\kappa)_a\otimes\sigma_x]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = -v^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})[(\sigma,i\kappa)_a\otimes\sigma_x]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \kappa\varsigma\hat{p}_a \\ u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})[(\sigma,i\kappa)_a\otimes\sigma_y]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = v^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})[(\sigma,i\kappa)_a\otimes\sigma_y]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = 0 \\ u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})[(\sigma,i\kappa)_a\otimes\sigma_z]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = v^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})[(\sigma,i\kappa)_a\otimes\sigma_z]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = -\frac{\varsigma p_a}{m} \\ u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})[(\sigma,i\kappa)_a\otimes I]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = v^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})[(\sigma,i\kappa)_a\otimes I]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{\kappa E\hat{p}_a}{m} \end{cases}$$

性质1.3.10.

$$\begin{cases} u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})[(\sigma,i\kappa)_a\otimes\sigma_x]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = -v^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})[(\sigma,i\kappa)_a\otimes\sigma_x]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = -\kappa\varsigma\sqrt{2}\frac{E}{m}\varepsilon_a(\vec{p},\kappa) \\ u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})[(\sigma,i\kappa)_a\otimes\sigma_y]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = -v^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})[(\sigma,i\kappa)_a\otimes\sigma_y]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = i\sqrt{2}\frac{|\vec{p}|}{m}\varepsilon_a(\vec{p},\kappa) \\ u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})[(\sigma,i\kappa)_a\otimes\sigma_z]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = v^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})[(\sigma,i\kappa)_a\otimes\sigma_z]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = 0 \\ u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})[(\sigma,i\kappa)_a\otimes I]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = v^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})[(\sigma,i\kappa)_a\otimes I]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = -\kappa\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},\kappa) \end{cases}$$

推论1.3.5.

$$\begin{cases} \bar{u}(\vec{p},h)u(\vec{p},h') = \delta_{hh'}, \bar{v}(\vec{p},h)v(\vec{p},h') = -\delta_{hh'}, \bar{u}(\vec{p},h)v(\vec{p},h') = 0, \bar{v}(\vec{p},h)u(\vec{p},h') = 0 \\ u^+(\vec{p},h)u(\vec{p},h') = \frac{E}{m}\delta_{hh'}, v^+(\vec{p},h)v(\vec{p},h') = \frac{E}{m}\delta_{hh'}, u^+(\vec{p},h)v(-\vec{p},h') = 0, v^+(\vec{p},h)u(-\vec{p},h') = 0 \\ \Lambda_+(\vec{p},\frac{1}{2}) := \sum_{h=1/2}^{-1/2} u(\vec{p},h)\bar{u}(\vec{p},h) = \frac{m-i\gamma^a p_a}{2m}, \Lambda_-(\vec{p},\frac{1}{2}) := \sum_{h=1/2}^{-1/2} v(\vec{p},h)\bar{v}(\vec{p},h) = \frac{-m-i\gamma^a p_a}{2m} \end{cases}$$

1.3.7 Dirac自旋基性质推论I

性质1.3.11.

$$\begin{cases} u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_a u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = -v^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_a v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = (\vec{0}, I) \\ u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_i\gamma_j u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = v^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_i\gamma_j v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{E}{m}(\delta_{ij} + i\kappa\varepsilon_{ijk}\hat{p}^k) \\ u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_4\gamma_a u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = v^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_4\gamma_a v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = -i\frac{p_a}{m} \\ u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_a\gamma_4 u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = v^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_a\gamma_4 v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = i\frac{p_a^*}{m} \\ u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_4\gamma_5 u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = v^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_4\gamma_5 v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = 0 \end{cases}$$

性质1.3.12.

$$\begin{cases} u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_a u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = -v^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_a v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = (\vec{0}, I) \\ u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\gamma_a u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = -v^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\gamma_a v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = i\sqrt{2}\frac{|\vec{p}|}{m}\varepsilon_a(\vec{p},\kappa) \end{cases}$$

1.3.8 Dirac自旋基性质推论II

性质1.3.13.

$$\begin{cases}\bar{u}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-\bar{v}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=I\\ \bar{u}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_a u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\bar{v}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_a v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-i\frac{p_a}{m}\\ \bar{u}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_i\gamma_j u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-\bar{v}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_i\gamma_j v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\delta_{ij}+i\kappa\varepsilon_{ijk}\hat{p}^k\\ \bar{u}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_4\gamma_a u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-\bar{v}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_4\gamma_a v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=(\vec{0},I)\\ \bar{u}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_a\gamma_4 u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-\bar{v}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_a\gamma_4 v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=(\vec{0},I)\end{cases}$$

性质1.3.14.

$$\begin{cases}\bar{u}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-\bar{v}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=I\\ \bar{u}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_a u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\bar{v}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_a v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-i\frac{p_a}{m}\\ \bar{u}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_a\gamma_b u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-\bar{v}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_a\gamma_b v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\delta_{ab}+i\kappa\varepsilon_{abc4}\hat{p}^c\\ \bar{u}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})S_{ab}(e,\varsigma)u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-\bar{v}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})S_{ab}(e,\varsigma)v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{\kappa}{2}\varepsilon_{abc4}\hat{p}^c\end{cases}$$

1.4 Dirac自旋基与四维矢量基之间关系的分析

1.4.1 Dirac自旋基$u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$与四维矢量基$\varepsilon_a(\vec{p},h)$之间的等价变换

定义1.4.1. $\mathbb{X}_a=[im\gamma_a(\varsigma)-2S_{ab}(e,\varsigma)\partial^b]C,\mathbb{X}_a(p)=i[m\gamma_a(\varsigma)-2S_{ab}(e,\varsigma)p^b]C$

性质1.4.1.

$$\begin{cases}u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_a(p)u^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=2\sqrt{2}\frac{E^2}{m}\varepsilon_a^+(\vec{p},-\kappa)\\ u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})im\gamma_a Cu^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=\sqrt{2}m\varepsilon_a^+(\vec{p},-\kappa)\\ u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})[-2iS_{ab}(e,\varsigma)p^b]Cu^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=\sqrt{2}\frac{E^2+\vec{p}^2}{m}\varepsilon_a^+(\vec{p},-\kappa)\end{cases}$$

证明: $u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})im\gamma_a Cu^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})$
$=-i\kappa\varsigma u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})im\gamma_a C\sigma_y\otimes\sigma_x u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=\kappa u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})m\gamma_a(I\otimes\sigma_y)u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=-i\sqrt{2}[m\lambda_m(\vec{p},\kappa),0]_a$
$=-\sqrt{2}m\varepsilon_a(\vec{p},\kappa)=\sqrt{2}m\varepsilon_a^+(\vec{p},\kappa)$ □

证明: $u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})[-2iS_{ab}(e,\varsigma)p^b]Cu^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})$
$=-i\kappa\varsigma u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})[-2iS_{ab}(e,\varsigma)p^b]C\sigma_y\otimes\sigma_x u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=\kappa u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})i\gamma_a\gamma_b p^b(I\otimes\sigma_y)u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=[\kappa\sqrt{2}\frac{|\vec{p}|}{m}\varepsilon_{ijk}p^j\lambda_m^k(\vec{p},\kappa)-i\sqrt{2}\frac{E^2}{m}\lambda_m(\vec{p},\kappa),0]_a$
$=[i\kappa\sqrt{2}\frac{\vec{p}^2}{m}\varepsilon_{ijk}\lambda_m^j(\vec{p},0)\lambda_m^k(\vec{p},\kappa)-i\sqrt{2}\frac{E^2}{m}\lambda_m(\vec{p},\kappa),0]_a$
$=-i\sqrt{2}\frac{\vec{p}^2}{m}[\lambda_m(\vec{p},\kappa),0]_a-i\sqrt{2}\frac{E^2}{m}[\lambda_m(\vec{p},\kappa),0]_a$
$=-i\sqrt{2}\frac{E^2+\vec{p}^2}{m}[\lambda_m(\vec{p},\kappa),0]_a=-\sqrt{2}\frac{E^2+\vec{p}^2}{m}\varepsilon_a(\vec{p},\kappa)=\sqrt{2}\frac{E^2+\vec{p}^2}{m}\varepsilon_a^+(\vec{p},\kappa)$ □

证明: $u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_a(p)u^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})$
$=u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})i[m\gamma_a(\varsigma)-2S_{ab}(e,\varsigma)p^b]Cu^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})$
$=-i\kappa\varsigma u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})i[m\gamma_a(\varsigma)-2S_{ab}(e,\varsigma)p^b]C\sigma_y\otimes\sigma_x u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=\kappa u^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})[m\gamma_a(\varsigma)+i\gamma_a\gamma_b p^b](I\otimes\sigma_y)u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=-i\sqrt{2}[m\lambda_m(\hat{p},\kappa),0]_a+\kappa\sqrt{2}\frac{|\vec{p}|}{m}\varepsilon_{ijk}p^j\lambda_m^k(\hat{p},\kappa)-i\sqrt{2}\frac{E^2}{m}\lambda_m(\hat{p},\kappa)$
$=-i\sqrt{2}[m\lambda_m(\hat{p},\kappa),0]_a+i\kappa\sqrt{2}\frac{\vec{p}^2}{m}\varepsilon_{ijk}\lambda_m^j(\hat{p},0)\lambda_m^k(\hat{p},\kappa)-i\sqrt{2}\frac{E^2}{m}\lambda_m(\hat{p},\kappa)$
$=-i\sqrt{2}[m\lambda_m(\hat{p},\kappa),0]_a-i\sqrt{2}\frac{\vec{p}^2}{m}[\lambda_m(\hat{p},\kappa),0]_a-i\sqrt{2}\frac{E^2}{m}[\lambda_m(\hat{p},\kappa),0]_a$
$=-i2\sqrt{2}\frac{E^2}{m}[\lambda_m(\hat{p},\kappa),0]_a=-2\sqrt{2}\frac{E^2}{m}\varepsilon_a(\vec{p},\kappa)=2\sqrt{2}\frac{E^2}{m}\varepsilon_a^+(\vec{p},\kappa)$ □

推论1.4.1.
$$\begin{cases}\varepsilon_a^+(\vec{p},\kappa)=\frac{i}{\sqrt{2}}u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_a Cu^*(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{m}{2\sqrt{2}E^2}u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_a(p)u^*(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\\ \varepsilon_a(\vec{p},\kappa)=-\frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\bar{C}\gamma_a u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{m}{2\sqrt{2}E^2}u^T(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_a^+(p)u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\end{cases}$$

推论1.4.2.
$$\begin{cases}\varepsilon^{+a}(\vec{p},\kappa)=\frac{i}{\sqrt{2}}U^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},\kappa)(\gamma^a C)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}=\frac{m}{2\sqrt{2}E^2}U^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},\kappa)\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\\ \varepsilon_a(\vec{p},\kappa)=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},\kappa)=\frac{m}{2\sqrt{2}E^2}\mathbb{X}_a^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},\kappa)\end{cases}$$

性质1.4.2. $u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_a(p)u^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=2iE[\lambda_m(\hat{p},0),0]$

证明: $u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_a(p)u^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})$
$=u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})i[m\gamma_a(\varsigma)-2S_{ab}(e,\varsigma)p^b]Cu^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})$
$=-i\kappa\varsigma u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})i[m\gamma_a(\varsigma)-2S_{ab}(e,\varsigma)p^b]C\sigma_y\otimes\sigma_x u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=\kappa u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})[m\gamma_a(\varsigma)+i\gamma_a\gamma_b p^b](I\otimes\sigma_y)u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=(E\hat{p},-i|\vec{p}|)+(E\hat{p},i|\vec{p}|)$
$=(2E\hat{p},0)=2iE[\lambda_m(\hat{p},0),0]$ □

推论1.4.3. $u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})im\gamma_a Cu^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=m\varepsilon_a^+(\vec{p},0),u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})[-2iS_{ab}(e,\varsigma)p^bC]u^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=m\varepsilon_a(\vec{p},0)$

推论1.4.4. $u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_a(p)u^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=[2E\hat{p},0],u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_a(-p)u^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=[0,-2i|\vec{p}|]$

推论1.4.5.
$$\begin{cases}\varepsilon_a^+(\vec{p},0)=iu^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_a Cu^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}),[i\lambda_m(\hat{p},0),0]_a=\frac{1}{2E}u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_a(p)u^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\\ \varepsilon_a(\vec{p},0)=-iu^T(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\bar{C}\gamma_a u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}),[i\lambda_m(\hat{p},0),0]_a=\frac{1}{2E}u^T(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_a^+(p)u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\end{cases}$$

推论1.4.6.
$$\begin{cases}\varepsilon_a^+(\vec{p},0)=\frac{i}{\sqrt{2}}U^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0)(\gamma^a C)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma},[i\lambda_m(\hat{p},0),0]_a=\frac{1}{2\sqrt{2}E}U^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0)\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\\ \varepsilon_a(\vec{p},0)=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0),[i\lambda_m(\hat{p},0),0]_a=\frac{1}{2\sqrt{2}E}\mathbb{X}_a^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0)\end{cases}$$

推论1.4.7.
$$\begin{cases}\varepsilon^{+a}(\vec{p},h)=\frac{i}{\sqrt{2}}U^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)(\gamma^a C)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma},[-i\lambda_m^+(\hat{p},h),0]_a=(\frac{m}{E})^{|h|}\frac{1}{2\sqrt{2}E}U^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\\ \varepsilon_a(\vec{p},h)=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h),[i\lambda_m(\hat{p},h),0]_a=(\frac{m}{E})^{|h|}\frac{1}{2\sqrt{2}E}\mathbb{X}_a^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)\end{cases}$$

推论1.4.8.
$$\begin{cases}\lambda_m^+(\hat{p},h)=(\frac{m}{E})^{|h|}\frac{i}{2\sqrt{2}E}U^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)\mathbb{X}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\\ \lambda_m(\hat{p},h)=-(\frac{m}{E})^{|h|}\frac{i}{2\sqrt{2}E}\mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)\end{cases}\quad\begin{cases}0=(\frac{m}{E})^{|h|}\frac{i}{2\sqrt{2}E}U^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)\mathbb{X}^\pi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\\ 0=-(\frac{m}{E})^{|h|}\frac{i}{2\sqrt{2}E}\mathbb{X}_\pi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)\end{cases}$$

推论1.4.9.
$$\begin{cases}0=U^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0)\mathbb{X}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\\ 0=\mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0)\end{cases}\quad\begin{cases}|\vec{p}|=\frac{i}{2\sqrt{2}}U^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0)\mathbb{X}^\pi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\\ |\vec{p}|=-\frac{i}{2\sqrt{2}}\mathbb{X}_\pi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0)\end{cases}$$

1.4.2 Dirac自旋基$v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$与四维矢量基$\varepsilon_a(\vec{p},h)$之间的等价变换

性质1.4.3.
$$\begin{cases}v^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_a(-p)v^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=-2\sqrt{2}\frac{E^2}{m}\varepsilon_a^+(\vec{p},-\kappa)\\ v^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})im\gamma_a(\varsigma)Cv^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=-\sqrt{2}m\varepsilon_a^+(\vec{p},-\kappa)\\ v^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})2iS_{ab}(e,\varsigma)p^bCv^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=-\sqrt{2}\frac{E^2+\vec{p}^2}{m}\varepsilon_a^+(\vec{p},-\kappa)\end{cases}$$

证明: $v^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})im\gamma_a(\varsigma)Cv^*(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})$
$=i\kappa\varsigma v^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})im\gamma_a(\varsigma)C\sigma_y\otimes\sigma_x v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=-\kappa v^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})m\gamma_a(\varsigma)(I\otimes\sigma_y)v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=i\sqrt{2}[m\lambda_m(\hat{p},\kappa),0]_a=\sqrt{2}m\varepsilon_a(\vec{p},\kappa)=-\sqrt{2}m\varepsilon_a^+(\vec{p},-\kappa)$ □

证明: $v^{+}(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})2iS_{ab}(e,\varsigma)p^{b}Cv^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})$
$=i\kappa\varsigma v^{+}(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})2iS_{ab}(e,\varsigma)p^{b}C\sigma_{y}\otimes\sigma_{x}v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=-\kappa v^{+}(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})[-i\gamma_{a}\gamma_{b}p^{b}](I\otimes\sigma_{y})v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=-\kappa\sqrt{2}\frac{|\vec{p}|}{m}\varepsilon_{ijk}p^{j}\lambda_{m}^{k}(\hat{p},\kappa)+i\sqrt{2}\frac{E^{2}}{m}\lambda_{m}(\hat{p},\kappa)$
$=-i\kappa\sqrt{2}\frac{\vec{p}^{2}}{m}\varepsilon_{ijk}\lambda_{m}^{j}(\hat{p},0)\lambda_{m}^{k}(\hat{p},\kappa)+i\sqrt{2}\frac{E^{2}}{m}\lambda_{m}(\hat{p},\kappa)$
$=+i\sqrt{2}\frac{\vec{p}^{2}}{m}\lambda_{m}(\hat{p},\kappa)+i\sqrt{2}\frac{E^{2}}{m}\lambda_{m}(\hat{p},\kappa)$
$=i\sqrt{2}\frac{E^{2}+\vec{p}^{2}}{m}[\lambda_{m}(\hat{p},\kappa),0]_{a}=\sqrt{2}\frac{E^{2}+\vec{p}^{2}}{m}\varepsilon_{a}(\vec{p},\kappa)=-\sqrt{2}\frac{E^{2}+\vec{p}^{2}}{m}\varepsilon_{a}^{+}(\vec{p},-\kappa)$ □

证明: $v^{+}(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_{a}(-p)v^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})$
$=v^{+}(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})i[m\gamma_{a}(\varsigma)+2S_{ab}(e,\varsigma)p^{b}]Cv^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})$
$=i\kappa\varsigma v^{+}(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})i[m\gamma_{a}(\varsigma)+2S_{ab}(e,\varsigma)p^{b}]C\sigma_{y}\otimes\sigma_{x}v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=-\kappa v^{+}(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})[m\gamma_{a}(\varsigma)-i\gamma_{a}\gamma_{b}p^{b}](I\otimes\sigma_{y})v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=i\sqrt{2}[m\lambda_{m}(\hat{p},\kappa),0]_{a}-\kappa\sqrt{2}\frac{|\vec{p}|}{m}\varepsilon_{ijk}p^{j}\lambda_{m}^{k}(\hat{p},\kappa)+i\sqrt{2}\frac{E^{2}}{m}\lambda_{m}(\hat{p},\kappa)$
$=i\sqrt{2}[m\lambda_{m}(\hat{p},\kappa),0]_{a}-i\kappa\sqrt{2}\frac{\vec{p}^{2}}{m}\varepsilon_{ijk}\lambda_{m}^{j}(\hat{p},0)\lambda_{m}^{k}(\hat{p},\kappa)+i\sqrt{2}\frac{E^{2}}{m}\lambda_{m}(\hat{p},\kappa)$
$=i\sqrt{2}[m\lambda_{m}(\hat{p},\kappa),0]_{a}+i\sqrt{2}\frac{\vec{p}^{2}}{m}\lambda_{m}(\hat{p},\kappa)+i\sqrt{2}\frac{E^{2}}{m}\lambda_{m}(\hat{p},\kappa)$
$=i2\sqrt{2}\frac{E^{2}}{m}[\lambda_{m}(\hat{p},\kappa),0]_{a}=2\sqrt{2}\frac{E^{2}}{m}\varepsilon_{a}(\vec{p},\kappa)=-2\sqrt{2}\frac{E^{2}}{m}\varepsilon_{a}^{+}(\vec{p},-\kappa)$ □

推论1.4.10.
$$\begin{cases}-\varepsilon_{a}^{+}(\vec{p},\kappa)=\frac{i}{\sqrt{2}}v^{+}(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_{a}Cv^{*}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{m}{2\sqrt{2}E^{2}}v^{+}(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_{a}(p)v^{*}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\\-\varepsilon_{a}(\vec{p},\kappa)=-\frac{i}{\sqrt{2}}v^{T}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\bar{C}\gamma_{a}v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{m}{2\sqrt{2}E^{2}}v^{T}(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_{a}^{+}(p)v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\end{cases}$$

推论1.4.11.
$$\begin{cases}-\varepsilon^{+a}(\vec{p},\kappa)=\frac{i}{\sqrt{2}}V^{+\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}(\vec{p},\kappa)(\gamma^{a}C)_{\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}=\frac{m}{2\sqrt{2}E^{2}}V^{+\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}(\vec{p},\kappa)\mathbb{X}_{\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}^{a}(-p)\\-\varepsilon_{a}(\vec{p},\kappa)=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{C}\gamma_{a})^{\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}V_{\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}(\vec{p},\kappa)=\frac{m}{2\sqrt{2}E^{2}}\mathbb{X}_{a}^{+\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}(-p)V_{\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}(\vec{p},\kappa)\end{cases}$$

性质1.4.4. $v^{+}(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_{a}(-p)v^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=-2iE[\lambda_{m}(\hat{p},0),0]_{a}$

证明: $v^{+}(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_{a}(-p)v^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})$
$=v^{+}(\hat{p},\frac{\kappa}{2})i[m\gamma_{a}(\varsigma)+2S_{ab}(e,\varsigma)p^{b}]Cv^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})$
$=i\kappa\varsigma v^{+}(\hat{p},\frac{\kappa}{2})i[m\gamma_{a}(\varsigma)+2S_{ab}(e,\varsigma)p^{b}]C\sigma_{y}\otimes\sigma_{x}v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=-\kappa v^{+}(\hat{p},\frac{\kappa}{2})[m\gamma_{a}(\varsigma)-i\gamma_{a}\gamma_{b}p^{b}](I\otimes\sigma_{y})v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$
$=-[E\hat{p},-i|\vec{p}|]-[E\hat{p},i|\vec{p}|]$
$=-2iE[\lambda_{m}(\hat{p},0),0]_{a}$ □

推论1.4.12. $v^{+}(\hat{p},\frac{\kappa}{2})im\gamma_{a}Cv^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=-m\varepsilon_{a}^{+}(\vec{p},0),v^{+}(\hat{p},\frac{\kappa}{2})[2iS_{ab}(e,\varsigma)p^{b}C]v^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=-m\varepsilon_{a}(\vec{p},0)$

推论1.4.13. $v^{+}(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_{a}(-p)v^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=-[2E\hat{p},0],v^{+}(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_{a}(p)v^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=-[0,-2i|\vec{p}|]$

推论1.4.14.
$$\begin{cases}-\varepsilon_{a}^{+}(\vec{p},0)=iv^{+}(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\gamma_{a}Cv^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}),-[i\lambda_{m}(\hat{p},0),0]_{a}=\frac{1}{2E}v^{+}(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_{a}(-p)v^{*}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\\-\varepsilon_{a}(\vec{p},0)=-iv^{T}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\bar{C}\gamma_{a}v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}),-[i\lambda_{m}(\hat{p},0),0]_{a}=\frac{1}{2E}v^{T}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\mathbb{X}_{a}^{+}(-p)v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\end{cases}$$

推论1.4.15.
$$\begin{cases}-\varepsilon_{a}^{+}(\vec{p},0)=\frac{i}{\sqrt{2}}V^{+\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}(\vec{p},0)(\gamma^{a}C)_{\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}},-[i\lambda_{m}(\hat{p},0),0]_{a}=\frac{1}{2\sqrt{2}E}V^{+\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}(\vec{p},0)\mathbb{X}_{\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}^{a}(-p)\\-\varepsilon_{a}(\vec{p},0)=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{C}\gamma_{a})^{\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}V_{\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}(\vec{p},0),-[i\lambda_{m}(\hat{p},0),0]_{a}=\frac{1}{2\sqrt{2}E}\mathbb{X}_{a}^{+\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}(-p)V_{\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}(\vec{p},0)\end{cases}$$

推论1.4.16.
$$\begin{cases}-\varepsilon^{+a}(\vec{p},h)=\frac{i}{\sqrt{2}}V^{+\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}(\vec{p},h)(\gamma^{a}C)_{\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}},-[-i\lambda_{m}^{+}(\hat{p},h),0]_{a}=(\frac{m}{E})^{|h|}\frac{1}{2\sqrt{2}E}V^{+\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}(\vec{p},h)\mathbb{X}_{\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}^{a}(-p)\\-\varepsilon_{a}(\vec{p},h)=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{C}\gamma_{a})^{\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}V_{\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}(\vec{p},h),-[i\lambda_{m}(\hat{p},h),0]_{a}=(\frac{m}{E})^{|h|}\frac{1}{2\sqrt{2}E}\mathbb{X}_{a}^{+\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}(-p)V_{\lambda_{\varsigma}\mu_{\varsigma}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

推论1.4.17.

$$\begin{cases}-\lambda_m^+(\hat{p},h)=(\frac{m}{E})^{|h|}\frac{i}{2\sqrt{2}E}V^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)\mathbb{X}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\\-\lambda_m(\hat{p},h)=-(\frac{m}{E})^{|h|}\frac{i}{2\sqrt{2}E}\mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)\end{cases}\quad\begin{cases}0=(\frac{m}{E})^{|h|}\frac{i}{2\sqrt{2}E}V^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)\mathbb{X}^{\pi}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\\0=-(\frac{m}{E})^{|h|}\frac{i}{2\sqrt{2}E}\mathbb{X}_\pi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)\end{cases}$$

推论1.4.18.

$$\begin{cases}0=V^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0)\mathbb{X}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\\0=\mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0)\end{cases}\quad\begin{cases}-|\vec{p}|=\frac{i}{2\sqrt{2}}V^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0)\mathbb{X}^{\pi}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\\-|\vec{p}|=-\frac{i}{2\sqrt{2}}\mathbb{X}_\pi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0)\end{cases}$$

1.4.3 Dirac自旋基与四维矢量基之间的美妙关系

性质1.4.5. $[\sigma\cdot\lambda_m(\hat{p},\frac{\kappa}{2})]\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=0,[\sigma\cdot\lambda_m(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})]\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa\sqrt{2}\lambda(\hat{p},-\frac{\kappa}{2}),[\sigma\cdot\lambda_m(\hat{p},0)]\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})$

证明: $\lambda^+(\hat{p},\frac{\kappa}{2})(\sigma,i\kappa)_a\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=\kappa\hat{p}_a,\lambda^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})(\sigma,i\kappa)_a\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa\sqrt{2}[\lambda_m(\hat{p},\kappa),0]_a$
$\Rightarrow\lambda^+(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\sigma_k\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=\kappa\hat{p}_k,\lambda^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})\sigma_k\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa\sqrt{2}\lambda_{mk}(\hat{p},\frac{\kappa}{2})$
$\Rightarrow\lambda^+(\hat{p},\frac{\kappa}{2})[\sigma\cdot\lambda_m(\hat{p},\frac{\kappa}{2})]\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=0,\lambda^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})[\sigma\cdot\lambda_m(\hat{p},\frac{\kappa}{2})]\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=0$
$\Rightarrow\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\lambda^+(\hat{p},\frac{\kappa}{2})[\sigma\cdot\lambda_m(\hat{p},\frac{\kappa}{2})]\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=0,\lambda(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})[\sigma\cdot\lambda_m(\hat{p},\frac{\kappa}{2})]\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=0$
$\Rightarrow[\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\lambda^+(\hat{p},\frac{\kappa}{2})+\lambda(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})][\sigma\cdot\lambda_m(\hat{p},\frac{\kappa}{2})]\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=0$
$\Rightarrow[\sigma\cdot\lambda_m(\hat{p},\frac{\kappa}{2})]\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=0$ □

证明: $\lambda^+(\hat{p},\frac{\kappa}{2})(\sigma,i\kappa)_a\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=\kappa\hat{p}_a,\lambda^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})(\sigma,i\kappa)_a\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa\sqrt{2}[\lambda_m(\hat{p},\kappa),0]_a$
$\Rightarrow\lambda^+(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\sigma_k\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=\kappa\hat{p}_k,\lambda^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})\sigma_k\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa\sqrt{2}\lambda_{mk}(\hat{p},\frac{\kappa}{2})$
$\Rightarrow\lambda^+(\hat{p},\frac{\kappa}{2})[\sigma\cdot\lambda_m(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})]\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=0,\lambda^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})[\sigma\cdot\lambda_m(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})]\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa\sqrt{2}$
$\Rightarrow\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})[\sigma\cdot\lambda_m(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})]\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=0,\lambda(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})[\sigma\cdot\lambda_m(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})]\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa\sqrt{2}\lambda(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})$
$\Rightarrow[\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\lambda^+(\hat{p},\frac{\kappa}{2})+\lambda(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})][\sigma\cdot\lambda_m(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})]\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa\sqrt{2}\lambda(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})$
$\Rightarrow[\sigma\cdot\lambda_m(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})]\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa\sqrt{2}\lambda(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})$ □

性质1.4.6.

$$\begin{cases}[\gamma\cdot\lambda_m(\hat{p},\kappa)]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=0,[\gamma\cdot\lambda_m(\hat{p},-\kappa)]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-\kappa\sqrt{2}\gamma_5u(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\\[\gamma\cdot\lambda_m(\hat{p},0)]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa(I\otimes\sigma_y)u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\\[\gamma\cdot\lambda_m(\hat{p},\kappa)]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=0,[\gamma\cdot\lambda_m(\hat{p},-\kappa)]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\kappa\sqrt{2}\gamma_5v(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})\\[\gamma\cdot\lambda_m(\hat{p},0)]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa(I\otimes\sigma_y)v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\end{cases}$$

性质1.4.7.

$$\begin{cases}[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},\kappa)]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=0,[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},-\kappa)]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa\sqrt{2}\gamma_5u(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}),[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},0)]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa\gamma_5u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\\[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},\kappa)]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=0,[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},-\kappa)]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=i\kappa\sqrt{2}\gamma_5v(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}),[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},0)]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=i\kappa\gamma_5v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\end{cases}$$

1.5 二阶Bargmann-Wigner自旋基与四维矢量基之间的关系

1.5.1 二阶Bargmann-Wigner自旋基分解为四维矢量基

定理1.5.1. $U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{2\sqrt{2}m}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\varepsilon_a(\vec{p},h),V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{2\sqrt{2}m}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},h)$

证明: $\frac{1}{2\sqrt{2}m}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\varepsilon_a(\vec{p},\kappa)$
$=\frac{1}{2\sqrt{2}m}\mathbb{X}^a(p)\varepsilon_a(\vec{p},\kappa)=\frac{i\varsigma}{2\sqrt{2}m}\mathbb{X}(p)\cdot\lambda_m(\vec{p},\kappa)$
$=\frac{-\varsigma}{2\sqrt{2}m}\{m\gamma-\frac{i}{2}[\gamma^ap_a,\gamma]\}C\cdot\lambda_m(\vec{p},\kappa)$
$=\frac{-\varsigma}{2\sqrt{2}m}\{m\gamma_j-\frac{i}{2}[\gamma_ip^i+\gamma_4iE,\gamma_j]\}C\lambda_m^j(\vec{p},\kappa)$
$=\frac{-\varsigma}{2\sqrt{2}m}[(m+E\gamma_4)\gamma_j+\varepsilon_{ijk}p^i\sigma^k\otimes I]C\lambda_m^j(\vec{p},\kappa)$
$=\frac{i\varsigma}{2\sqrt{2}m}[i(m+E\gamma_4)\sigma_j\sigma_y\lambda_m^j(\vec{p},\kappa)\otimes\sigma_x-i\kappa|\vec{p}|\sigma_j\sigma_y\lambda_m^j(\vec{p},\kappa)\otimes\sigma_z]$
$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_j\sigma_y\lambda_m^j(\vec{p},\kappa)\otimes\frac{\varsigma}{2m}[(m\sigma_x+\varsigma E)-\kappa|\vec{p}|\sigma_z]$
$=\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\mu^T(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$

$= u(\vec{p}, \frac{\kappa}{2})u^T(\vec{p}, \frac{\kappa}{2})$

$= U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, \kappa)$ □

证明: $\frac{1}{2\sqrt{2}m}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\varepsilon_a(\vec{p}, 0)$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}m}\mathbb{X}^a(p)\varepsilon_a(\vec{p}, 0) = \frac{i\varsigma}{2\sqrt{2}m}\mathbb{X}(p)\cdot\frac{E}{m}\lambda_m(\vec{p}, 0) + \frac{i\varsigma}{2\sqrt{2}m}\mathbb{X}^\pi(p)\frac{|\vec{p}|}{m}$

$= \frac{-\varsigma}{2\sqrt{2}m}\{m\gamma - \frac{i}{2}[\gamma^a p_a, \gamma]\}C\cdot\frac{E}{m}\lambda_m(\vec{p}, 0) + \frac{-\varsigma}{2\sqrt{2}m}(m\gamma_4 - i\gamma^j p_j\gamma_4)C\frac{|\vec{p}|}{m}$

$= \frac{-\varsigma}{2\sqrt{2}m}\{m\gamma_j - \frac{i}{2}[\gamma_i p^i + \gamma_4 iE, \gamma_j]\}C\frac{E}{m}\lambda^j_m(\vec{p}, 0) + \frac{1}{2\sqrt{2}m}(m - i\gamma_i p^i)\gamma_2\frac{|\vec{p}|}{m}$

$= \frac{-\varsigma}{2\sqrt{2}m}[(m + E\gamma_4)\gamma_j + \varepsilon_{ijk}p^i\sigma^k\otimes I]C\frac{E}{m}\lambda^j_m(\vec{p}, 0) + \frac{1}{2\sqrt{2}m}(m\sigma_y\otimes\sigma_y - i\sigma_i\sigma_y p^i\otimes I)\frac{|\vec{p}|}{m}$

$= \frac{-\varsigma}{2\sqrt{2}m}(m + E\gamma_4)\sigma_j\sigma_y\frac{E}{m}\lambda^j_m(\vec{p}, 0)\otimes\sigma_x + \frac{1}{2\sqrt{2}m}(m\sigma_y\otimes\sigma_y - i\sigma_i\sigma_y p^i\otimes I)\frac{|\vec{p}|}{m}$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_j\sigma_y\lambda^j_m(\vec{p}, 0)\otimes\frac{\varsigma}{2}(\frac{E}{m}\sigma_x + \varsigma\frac{E^2 - \vec{p}^2}{m^2}) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y\otimes\sigma_y$

$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}[\sigma_j\sigma_y\lambda^j_m(\vec{p}, 0)\otimes(\varsigma\frac{E}{m}\sigma_x + I) - \frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y\otimes\sigma_y]$

$= U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, 0)$ □

证明: $U(\vec{p}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[u(\vec{p}, \frac{\kappa}{2})u^T(\vec{p}, -\frac{\kappa}{2}) + u(\vec{p}, -\frac{\kappa}{2})u^T(\vec{p}, \frac{\kappa}{2})]$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}[\lambda(\hat{p}, \frac{\kappa}{2})\lambda^T(\hat{p}, -\frac{\kappa}{2})\otimes\mu(\vec{p}, \frac{\kappa}{2})\mu^T(\vec{p}, -\frac{\kappa}{2}) + \lambda(\hat{p}, -\frac{\kappa}{2})\lambda^T(\hat{p}, \frac{\kappa}{2})\otimes\mu(\vec{p}, -\frac{\kappa}{2})\mu^T(\vec{p}, \frac{\kappa}{2})]$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{i}{2}(\sigma\cdot\hat{p} + \kappa I)\sigma_y\otimes\frac{1}{2}(I + \varsigma\frac{E}{m}\sigma_x - i\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y) + \frac{i}{2}(\sigma\cdot\hat{p} - \kappa I)\sigma_y\otimes\frac{1}{2}(I + \varsigma\frac{E}{m}\sigma_x - i\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y)$

$= \frac{i}{4\sqrt{2}}[(\sigma\cdot\hat{p} + \kappa I)\sigma_y\otimes(I + \varsigma\frac{E}{m}\sigma_x - i\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y) + (\sigma\cdot\hat{p} - \kappa I)\sigma_y\otimes(I + \varsigma\frac{E}{m}\sigma_x + i\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y)$

$= \frac{i}{2\sqrt{2}}[(\sigma\sigma_y\cdot\hat{p})\otimes(I + \varsigma\frac{E}{m}\sigma_x) + \sigma_y\otimes(-i\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y)$

$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\{[\sigma\sigma_y\cdot\lambda(\hat{p}, 0)]\otimes(I + \varsigma\frac{E}{m}\sigma_x) - \frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y\otimes\sigma_y\}$ □

1.5.2 Dirac自旋基与四维矢量基等价变换关系的小结与理顺

推论1.5.1.

$$\begin{cases} U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, h) = \frac{1}{2\sqrt{2}m}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\varepsilon_a(\vec{p}, h), V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, h) = -\frac{1}{2\sqrt{2}m}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\varepsilon_a(\vec{p}, h) \\ \varepsilon_a(\vec{p}, h) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, h) = \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, h) \end{cases}$$

推论1.5.2.

$$\begin{cases} U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, h) = -\frac{i}{4m}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}U_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\hat{p}, h), V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, h) = -\frac{i}{4m}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}V_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\hat{p}, h) \\ \varepsilon_a(\vec{p}, h) = -\frac{i}{4m}(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\varepsilon_b(\vec{p}, h) = -\frac{i}{4m}(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\varepsilon_b(\vec{p}, h) \end{cases}$$

推论1.5.3.

$$\begin{cases} [i\lambda_m(\hat{p}, h), 0]_a = (\frac{m}{E})^{|h|}\frac{1}{2\sqrt{2}E}\mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}_a(p)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, h) = -(\frac{m}{E})^{|h|}\frac{1}{2\sqrt{2}E}\mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}_a(-p)V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, h) \\ [i\lambda_m(\hat{p}, h), 0]_a = (\frac{m}{E})^{|h|}\frac{1}{8mE}\mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}_a(p)\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\varepsilon_b(\vec{p}, h) = (\frac{m}{E})^{|h|}\frac{1}{8mE}\mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}_a(-p)\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\varepsilon_b(\vec{p}, h) \end{cases}$$

推论1.5.4.

$$\begin{cases} \mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}_\pi(p)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, h) = \mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}_\pi(-p)V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, h) = 0 \\ \lambda_m(\hat{p}, h) = -(\frac{m}{E})^{|h|}\frac{i}{2\sqrt{2}E}\mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, h) = (\frac{m}{E})^{|h|}\frac{i}{2\sqrt{2}E}\mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, h) \end{cases}$$

推论1.5.5.

$$\begin{cases} \mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, 0) = \mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, 0) = 0 \\ -\frac{i}{2\sqrt{2}}\mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}_\pi(-p)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, 0) = \frac{i}{2\sqrt{2}}\mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}_\pi(p)V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p}, 0) = |\vec{p}| \end{cases}$$

定理1.5.2. $(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p) = (\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p) = 4im\delta^b_a$

定理1.5.3. $\mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}_a(p)\mathbb{X}_{b\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p) = \mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}_a(-p)\mathbb{X}_{b\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p) = 8E^2\delta_{ab} - 4p_a p^+_b$

证明: $\mathbb{X}^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}_a(p)\mathbb{X}_{b\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)$

$= tr[\mathbb{X}_a(p)\mathbb{X}_b(p)]$

$= tr\{\bar{C}[m\gamma_a - 2S_{ac}(e, \varsigma)p^{+c}][m\gamma_b - 2S_{bd}(e, \varsigma)p^d]C\}$

$= tr\{[m\gamma_a - 2S_{ac}(e, \varsigma)p^{+c}][m\gamma_b - 2S_{bd}(e, \varsigma)p^d]\}$

$= m^2 tr(\gamma_a\gamma_b) + 4tr[S_{ac}(e, \varsigma)S_{bd}(e, \varsigma)p^{+c}p^d]$

$= 4m^2\delta_{ab} + 4(\delta_{ab}\delta_{dc} - \delta_{ad}\delta_{bc})p^{+c}p^d$
$= 4m^2\delta_{ab} + 4(\delta_{ab}p_c^+p^c - p_ap_b^+)$
$= 8E^2\delta_{ab} - 4p_ap_b^+$ □

推论1.5.6. $\mathbb{X}_a^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p) = \mathbb{X}_a^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p) = 8E^2\delta_a^b - 4p_ap^{+b}$

猜想1.5.1. $-\frac{i}{4m}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma} = -\frac{i}{4m}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma} = \frac{1}{(2!)^2}\delta^{(\lambda'_\varsigma}_{\{\lambda_\varsigma}\delta^{\mu'_\varsigma)}_{\mu_\varsigma\}}$

1.5.3 有质量自旋-1粒子准投影算子分解为Dirac准投影算子

定理1.5.4.

$$\begin{cases}\Lambda_+(\vec{p},1) := \sum\limits_{h=1}^{-1} U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)U^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},h) = \frac{1}{(2!)^2}\Lambda_{+\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2}) \\ \Lambda_-(\vec{p},1) := \sum\limits_{h=1}^{-1} V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)V^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},h) = \frac{1}{(2!)^2}\Lambda_{-\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{-\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2})\end{cases}$$

证明: $\Lambda_+(\vec{p},1) := \sum\limits_{h=1}^{-1} U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)U^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},h)$

$=$

$u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$
$+ \frac{1}{2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})][u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) + u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$
$+ u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=$

$\frac{1}{4}\{[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})][u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]$
$+ [u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})][u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) + u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$
$+ [u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})][u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) + u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$
$+ [u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})][u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) + u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]\}$

$=$

$\frac{1}{4}\{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})[u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$
$+ u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})[u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$
$+ u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$
$+ u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$
$+ [u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$+ [u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$+ [u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$+ [u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=$

$\frac{1}{4}\{[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})][u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$
$+ [u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})][u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$
$+ [u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})][u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$
$+ [u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})][u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$
$= \frac{1}{4}[\Lambda_{+\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + \Lambda_{+\lambda_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + \Lambda_{+\mu_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{+\lambda_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + \Lambda_{+\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\lambda_{+\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\}$
$= \frac{1}{(2!)^2}\Lambda_{+\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2})$ □

1.5.4 解析证明一个重要定理

定理1.5.5. $\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)(\eta_{aa'} + \frac{p_ap^+_{a'}}{m^2})\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p) = \frac{1}{2}[(m - i\gamma^ap_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m - i\gamma^bp_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}$

证明: $\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)(\eta_{aa'} + \frac{p_ap^+_{a'}}{m^2})\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)$
$= \mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\sum\limits_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},h)\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)$

$= 8m^2 \sum_{h=1}^{-1} U_{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma}(\vec{p}, h) U^{+}_{\lambda'_\varsigma \mu'_\varsigma}(\vec{p}, h)$
$= 8m^2 \frac{1}{(2!)^2} \Lambda_{+\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p}, \frac{1}{2}) \Lambda_{+\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}(\vec{p}, \frac{1}{2})$
$= \frac{1}{2}[(m - i\gamma^a p_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m - i\gamma^b p_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}$ □

1.6 Dirac方程的协变反对易规则

1.6.1 Dirac方程及其分离形式 [5,6]

定义1.6.1. $\gamma^a = (\sigma \otimes \sigma_y, \varsigma I \otimes \sigma_x), -\gamma^a\gamma^4 = i\varsigma(\sigma \otimes \sigma_z, i\varsigma), \gamma^4\gamma^a = i\varsigma(\sigma \otimes \sigma_z, -i\varsigma), \gamma^4 \prec \gamma^4_{\lambda_\varsigma \lambda'_\varsigma}, \gamma_4 \prec \gamma_4^{\lambda'_\varsigma \lambda_\varsigma}$

推论1.6.1. $(\gamma^a \partial_a + m)\psi_{\lambda_\varsigma}(x) = 0 \Leftrightarrow [(\sigma \otimes \sigma_z, -i\varsigma)^a \partial_a - imI \otimes \sigma_x]\psi(x) = 0$

推论1.6.2. $\begin{cases} (\gamma^a \partial_a + m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma}(x) = 0 \\ \psi_{\lambda_\varsigma}(x) = [\lambda_{A_\varsigma}(x), \eta^{A'_\varsigma}(x)]^T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sigma, -i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma} \partial^a \lambda_{A_\varsigma}(x) = im\eta^{A'_\varsigma}(x) \\ (\sigma, i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma} \partial_a \eta^{A'_\varsigma}(x) = -im\lambda_{A_\varsigma}(x) \end{cases}$

1.6.2 Dirac方程的协变反对易规则

推论1.6.3.
$\{\psi_{\lambda_\varsigma}(x), \bar{\psi}^{\mu_\varsigma}(x')\} = i(m - \gamma^a \partial_a)_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma} \Delta(x - x') \Leftrightarrow \{\psi_{\lambda_\varsigma}(x), \psi^{+}_{\lambda'_\varsigma}(x')\} = i[(m - \gamma^a \partial_a)\gamma^4]_{\lambda_\varsigma \lambda'_\varsigma} \Delta(x - x')$

推论1.6.4.

$$\begin{cases} \{\psi_{\lambda_\varsigma}(x), \psi^{+}_{\lambda'_\varsigma}(x')\} = i[(m - \gamma^a \partial_a)\gamma^4]_{\lambda_\varsigma \lambda'_\varsigma} \Delta(x - x') \\ \{\psi_{\lambda_\varsigma}(x), \psi_{\lambda'_\varsigma}(x')\} = 0, \{\psi^{+}_{\lambda_\varsigma}(x), \psi^{+}_{\lambda'_\varsigma}(x')\} = 0 \\ \psi_{\lambda_\varsigma}(x) = [\lambda_{A_\varsigma}(x), \eta^{A'_\varsigma}(x)]^T \\ \gamma^a = (\sigma \otimes \sigma_y, \varsigma I \otimes \sigma_x) \\ S_{ab}(e, \varsigma) = -\frac{i}{4}[\gamma_a, \gamma_b] = S_{ab}(\varsigma) \oplus S_{ab}(-\varsigma) \\ S_{ab}(\varsigma) = \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma} = -\frac{i}{4}(\sigma, i\varsigma)_{[a}(\sigma, -i\varsigma)_{b]} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \{\lambda_{A_\varsigma}(x), \lambda^{+}_{A'_\varsigma}(x')\} = -\varsigma(\sigma, i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma} \partial_a \Delta(x - x') \\ \{\eta^{A'_\varsigma}(x), \eta_{+}^{A_\varsigma}(x')\} = \varsigma(\sigma, -i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma} \partial^a \Delta(x - x') \\ \{\lambda_{A_\varsigma}(x), \eta_{+}^{B_\varsigma}(x')\} = i\varsigma m \delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \Delta(x - x') \\ \{\eta^{A'_\varsigma}(x), \lambda^{+}_{B'_\varsigma}(x')\} = i\varsigma m \delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} \Delta(x - x') \\ \{\lambda_{A_\varsigma}(x), \lambda_{B_\varsigma}(x')\} = 0, \{\eta^{A'_\varsigma}(x), \eta^{B'_\varsigma}(x')\} = 0 \\ \{\lambda^{+}_{A'_\varsigma}(x), \lambda^{+}_{B'_\varsigma}(x')\} = 0, \{\eta_{+}^{A_\varsigma}(x), \eta_{+}^{B_\varsigma}(x')\} = 0 \\ \{\lambda_{A_\varsigma}(x), \eta^{A'_\varsigma}(x')\} = 0, \{\lambda^{+}_{A'_\varsigma}(x), \eta_{+}^{A_\varsigma}(x')\} = 0 \end{cases}$$

以上内容是基础部分，其推理和结论适用于所有章节，特别是适用于以下章节和下一章。

2 Bargmann-Wigner方程 [18]的自旋基和平面波解

2.1 Dirac方程自旋基的广义二项式定理及其推论

定理2.1.1.

$$\sum_{h=s}^{-s} C_{2s}^{s-h} \underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p}, \tfrac{1}{2}) u_{\mu_\varsigma}(\vec{p}, \tfrac{1}{2}) \cdots}_{s+h} \underbrace{\cdots u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p}, -\tfrac{1}{2}) u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p}, -\tfrac{1}{2})}_{s-h} \underbrace{u^{+}_{(\lambda'_\varsigma}(\vec{p}, \tfrac{1}{2}) u^{+}_{\mu'_\varsigma}(\vec{p}, \tfrac{1}{2}) \cdots}_{s+h} \underbrace{\cdots u^{+}_{\sigma'_\varsigma}(\vec{p}, -\tfrac{1}{2}) u^{+}_{\tau'_\varsigma)}(\vec{p}, -\tfrac{1}{2})}_{s-h}$$

$$= \overbrace{\sum_{h=1/2}^{-1/2} u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p}, h) u^{+}_{(\lambda'_\varsigma}(\vec{p}, h) \sum_{h=1/2}^{-1/2} u_{\mu_\varsigma}(\vec{p}, h) u^{+}_{\mu'_\varsigma}(\vec{p}, h) \cdot\cdot \sum_{h=1/2}^{-1/2} u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p}, h) u^{+}_{\sigma'_\varsigma}(\vec{p}, h)] \sum_{h=1/2}^{-1/2} u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p}, h) u^{+}_{\tau'_\varsigma)}(\vec{p}, h)]}^{2s}$$

推论2.1.1.

$$\sum_{h=s}^{-s} C_{2s}^{s-h} \underbrace{u_{\{1_\varsigma}(\vec{p}, \tfrac{1}{2}) u_{1_\varsigma}(\vec{p}, \tfrac{1}{2}) \cdots}_{s+h} \underbrace{\cdots u_{1_\varsigma}(\vec{p}, -\tfrac{1}{2}) u_{1_\varsigma\}}(\vec{p}, -\tfrac{1}{2})}_{s-h} \underbrace{u^{+}_{(1'_\varsigma}(\vec{p}, \tfrac{1}{2}) u^{+}_{1'_\varsigma}(\vec{p}, \tfrac{1}{2}) \cdots}_{s+h} \underbrace{\cdots u^{+}_{1'_\varsigma}(\vec{p}, -\tfrac{1}{2}) u^{+}_{1'_\varsigma)}(\vec{p}, -\tfrac{1}{2})}_{s-h}$$

$$= \overbrace{\sum_{h=1/2}^{-1/2} u_{\{1_\varsigma}(\vec{p}, h) u^{+}_{(1'_\varsigma}(\vec{p}, h) \sum_{h=1/2}^{-1/2} u_{1_\varsigma}(\vec{p}, h) u^{+}_{1'_\varsigma}(\vec{p}, h) \cdot\cdot \sum_{h=1/2}^{-1/2} u_{1_\varsigma}(\vec{p}, h) u^{+}_{1'_\varsigma}(\vec{p}, h)] \sum_{h=1/2}^{-1/2} u_{1_\varsigma\}}(\vec{p}, h) u^{+}_{1'_\varsigma)}(\vec{p}, h)]}^{2s}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{h=s}^{-s} C_{2s}^{s-h} [u_{1_\varsigma}(\vec{p}, \tfrac{1}{2}) u^{+}_{1_\varsigma}(\vec{p}, \tfrac{1}{2})]^{s+h} [u_{1_\varsigma}(\vec{p}, -\tfrac{1}{2}) u^{+}_{(1'_\varsigma}(\vec{p}, -\tfrac{1}{2})]^{s-h} = [u_{1_\varsigma}(\vec{p}, \tfrac{1}{2}) u^{+}_{1'_\varsigma}(\vec{p}, \tfrac{1}{2}) + u_{1_\varsigma}(\vec{p}, -\tfrac{1}{2}) u^{+}_{1'_\varsigma}(\vec{p}, -\tfrac{1}{2})]^{2s}$$

推论2.1.2.

$$\sum_{h=s}^{-s} C_{2s}^{s-h} \overbrace{\underbrace{u_{\{2_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{2_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdots u_{2_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{2_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h}\underbrace{u^+_{(2'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{2'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdots u^+_{2'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{2'_\varsigma)}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h}}^{2s}$$

$$= \sum_{h=1/2}^{-1/2} u_{\{2_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{(2'_\varsigma}(\vec{p},h)\sum_{h=1/2}^{-1/2} u_{2_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{2'_\varsigma}(\vec{p},h)\cdot\cdot\sum_{h=1/2}^{-1/2} u_{2_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{2'_\varsigma}(\vec{p},h)]\sum_{h=1/2}^{-1/2} u_{2_\varsigma\}}(\vec{p},h)u^+_{2'_\varsigma)}(\vec{p},h)]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{h=s}^{-s} C_{2s}^{s-h}[u_{2_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{2_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]^{s+h}[u_{2_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{(2'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]^{s-h} = [u_{2_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{2'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + u_{2_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{2'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]^{2s}$$

以上两个推论正好就是二项式展开定理。

引理2.1.1.

$$[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})][u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$
$$\neq$$
$$[u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})][u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$

引理2.1.2.

$$[v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})][v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$
$$\neq$$
$$[v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})][v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$

推论2.1.3.

$$\Lambda_{+\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) \neq \Lambda_{+\mu_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\Lambda_{+\lambda_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$
$$\Lambda_{-\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\Lambda_{-\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) \neq \Lambda_{-\mu_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\Lambda_{-\lambda_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

推论2.1.4.

$$\begin{cases} \frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{\Lambda_{+\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot\Lambda_{+\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}(\vec{p},\tfrac{1}{2})}_{2s} \neq \underbrace{\Lambda_{+\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot\Lambda_{+\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})}_{2s} \\ \frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{\Lambda_{-\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\Lambda_{-\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot\Lambda_{-\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}(\vec{p},\tfrac{1}{2})}_{2s} \neq \underbrace{\Lambda_{-\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\Lambda_{-\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot\Lambda_{-\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})}_{2s} \end{cases}$$

2.2 Bargmann-Wigner方程平面波解的合理推测(本章节后面将会给出严格的证明)

定理2.2.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)=0, \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma\}}_{2s}}(\vec{r},t)$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=s}^{-s}E^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

$$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2s)!}\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdots u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h}$$

$$V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2s)!}\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\underbrace{v_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdots v_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h}$$

推论2.2.1.

$$\begin{cases} a(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r} \\ b^+(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r} \end{cases}$$

推论2.2.2. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)=0, \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma\}}_{2s}}(\vec{r},t)$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=s}^{-s}E^{s-\frac{1}{2}}[a(\vec{p},h)\tilde{U}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)\tilde{V}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

$$\begin{cases} a(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\tilde{U}^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r} \\ b^+(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\tilde{V}^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r} \end{cases}$$

自我评述：以上的表达式与无质量粒子的平面波解形式十分相似，所以物理学本质上是有统一表述的，但要注意无质量粒子的平面波解不能通过以上有质量粒子的平面波解通过$m\to 0$ 得到，这说明无质量粒子与有质量粒子有本质的区别。

2.3 实表象下Bargmann-Wigner方程的平面波解

定理2.3.1. $(\gamma_s^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma\}}_{2s}}(\vec{r},t)$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=s}^{-s}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}[a(\vec{p},h)U_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}-(-1)^{s+h}\varsigma^{2s}b^+(\vec{p},-h)U^+_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$
$$U_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{\sqrt{(2s)!(s+h)!(s-h)!}}\underbrace{u_{s\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{s\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{s+h}\underbrace{\cdot\cdot u_{s\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{s\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h}$$
$$V_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=-(-1)^{s-h}\varsigma^{2s}U^+_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-h)$$

推论2.3.1.

$$\begin{cases} a(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}U_s^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r} \\ b^+(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}U_s^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r} \end{cases}$$

2.4 Bargmann-Wigner方程的自旋基

定义2.4.1.

$$\begin{cases} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h):=\frac{1}{\sqrt{(2s)!(s+h)!(s-h)!}}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{s+h}\underbrace{\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h} \\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h):=\frac{1}{\sqrt{(2s)!(s+h)!(s-h)!}}\underbrace{v_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{s+h}\underbrace{\cdot\cdot v_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h} \end{cases}$$

定义2.4.2.

$$\begin{cases} \tilde{U}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h):=\frac{1}{\sqrt{(2s)!(s+h)!(s-h)!}}\underbrace{\tilde{u}_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\tilde{u}_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{s+h}\underbrace{\cdot\cdot\tilde{u}_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})\tilde{u}_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h} \\ \tilde{V}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h):=\frac{1}{\sqrt{(2s)!(s+h)!(s-h)!}}\underbrace{\tilde{v}_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\tilde{v}_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{s+h}\underbrace{\cdot\cdot\tilde{v}_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})\tilde{v}_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h} \end{cases}$$

推论2.4.1.

$$\begin{cases} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sqrt{C_{2s}^{h-s}}[\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{s+h}\underbrace{\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h}+\cdot\cdot] \\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sqrt{C_{2s}^{h-s}}[\underbrace{v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{s+h}\underbrace{\cdot\cdot v_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h}+\cdot\cdot] \end{cases}$$

推论2.4.2. $u(\vec{p},h)=-\varsigma\gamma_5v(\vec{p},h),v(\vec{p},h)=-\varsigma\gamma_5u(\vec{p},h),h=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$

推论2.4.3.
$$\begin{cases} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=(-\varsigma)^{2s}\overbrace{\gamma_5\otimes\gamma_5\cdot\cdot}^{2s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) \\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=(-\varsigma)^{2s}\overbrace{\gamma_5\otimes\gamma_5\cdot\cdot}^{2s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) \end{cases}$$

2.5 Bargmann-Wigner方程的两种自旋基之间的关系

推论2.5.1.
$$\begin{cases} U^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=(-1)^{s+h}\varsigma^{2s}\overbrace{\sigma_y\otimes\sigma_y\cdot\cdot}^{4s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-h) \\ V^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=(-1)^{s-h}\varsigma^{2s}\overbrace{\sigma_y\otimes\sigma_y\cdot\cdot}^{4s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-h) \end{cases}$$

证明: $U^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2s)!}\sqrt{C^{s-h}_{2s}}\underbrace{u^+_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot}_{s+h}\underbrace{\cdot\cdot u^+_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{s-h}$

$$=(-1)^{s+h}\varsigma^{2s}\overbrace{\sigma_y\otimes\sigma_y\cdot\cdot}^{4s}\frac{1}{(2s)!}\sqrt{C^{s-h}_{2s}}\underbrace{v_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\cdot\cdot}_{s+h}\underbrace{\cdot\cdot v_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{s-h}$$

$$=(-1)^{s+h}\varsigma^{2s}\overbrace{\sigma_y\otimes\sigma_y\cdot\cdot}^{4s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-h)$$ □

推论2.5.2.
$$\begin{cases} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-h)=(-1)^{s-h}\varsigma^{2s}\overbrace{\sigma_y\otimes\sigma_y\cdot\cdot}^{4s}V^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) \\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-h)=(-1)^{s+h}\varsigma^{2s}\overbrace{\sigma_y\otimes\sigma_y\cdot\cdot}^{4s}U^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) \end{cases}$$

推论2.5.3.
$$\begin{cases} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-h)=(-1)^{s-h}\varsigma^{2s}\overbrace{(C\gamma_4)\otimes(C\gamma_4)\cdot\cdot}^{2s}V^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) \\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-h)=(-1)^{s+h}\varsigma^{2s}\overbrace{(C\gamma_4)\otimes(C\gamma_4)\cdot\cdot}^{2s}U^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) \end{cases}$$

2.6 Bargmann-Wigner方程自旋基的正交性质(可以直接看出来)

推论2.6.1.
$$\begin{cases} \bar{U}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h')=\delta_{hh'},\bar{U}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h')=0 \\ \bar{V}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h')=\delta_{hh'},\bar{V}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h')=0 \end{cases}$$

推论2.6.2.
$$\begin{cases} U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h')=(\frac{E}{m})^{2s}\delta_{hh'},U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p},h')=0 \\ V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h')=(\frac{E}{m})^{2s}\delta_{hh'},V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p},h')=0 \end{cases}$$

3 Bargmann-Wigner方程自旋基的递推关系

3.1 Bargmann-Wigner方程自旋基递推关系(枚举试探法)

定理3.1.1. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s+\frac{1}{2}-l)$

$$=\frac{1}{\sqrt{C^l_{2s+1}}}[\sqrt{C^{l-1}_{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s-l+1)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+\sqrt{C^l_{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s-l)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]$$

证明:

$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s+\frac{1}{2})$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2s+1)!(2s+1)!(0)!}} \underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{2s+1}\underbrace{\cdots u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{0}$$

$$= \underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})}_{2s+1}$$

$$= C^{\phi}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s}} u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C^0_{2s+1}}} C^0_{2s} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) \qquad \square$$

证明:

$$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s-\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2s+1)!(2s)!(1)!}} \underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{2s}\underbrace{\cdots u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2s+1)!(2s)!(1)!}} \underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{2s+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C^1_{2s+1}}}$$

$$\{[C^{\phi}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s}} u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2}) + C^{(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s}} u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C^1_{2s+1}}}[\sqrt{C^0_{2s}} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2}) + \sqrt{C^1_{2s}} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s-1)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})] \qquad \square$$

证明:

$$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s-\tfrac{3}{2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2s+1)!(2s-1)!(2)!}} \underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{2s-1}\underbrace{\cdots u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2s+1)!(2s-1)!(2)!}} \underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{2s+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C^2_{2s+1}}} C^{(\vec{p},-\frac{1}{2}),(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C^2_{2s+1}}}$$

$$[C^{(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s}} u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2}) + C^{(\vec{p},-\frac{1}{2}),(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s}} u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C^2_{2s+1}}}[\sqrt{C^1_{2s}} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s-1)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2}) + \sqrt{C^2_{2s}} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s-2)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})] \qquad \square$$

证明:

$$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s+\tfrac{1}{2}-l)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2s+1)!(2s+1-l)!(l)!}} \underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{2s+1-l}\underbrace{\cdots u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{l}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2s+1)!(2s-l+1)!(l)!}} \underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{2s+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C^l_{2s+1}}} C^{\overbrace{(\vec{p},-\frac{1}{2}),\cdot\cdot,(\vec{p},-\frac{1}{2})}^{l}}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C^2_{2s+1}}}$$

$$[C^{\overbrace{(\vec{p},-\frac{1}{2}),\cdot\cdot,(\vec{p},-\frac{1}{2})}^{l-1}}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s}}u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+C^{\overbrace{(\vec{p},-\frac{1}{2}),\cdot\cdot,(\vec{p},-\frac{1}{2})}^{l}}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s}}u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{C^l_{2s+1}}}[\sqrt{C^{l-1}_{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s-l+1)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+\sqrt{C^l_{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s-l)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]\qquad\Box$$

定理3.1.2. $V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s+\frac{1}{2}-l)$

$$=\frac{1}{\sqrt{C^l_{2s+1}}}[\sqrt{C^{l-1}_{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s-l+1)v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+\sqrt{C^l_{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s-l)v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$

证明:

$$V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s+\tfrac{1}{2}-l)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2s+1)!(2s+1-l)!(l)!}}\underbrace{v_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot}_{2s+1-l}\underbrace{\cdot\cdot v_{\rho_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{l}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2s+1)!(2s-l+1)!(l)!}}\underbrace{v_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot v_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{2s+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{C^l_{2s+1}}}C^{\overbrace{(\vec{p},-\frac{1}{2}),\cdot\cdot,(\vec{p},-\frac{1}{2})}^{l}}_{\underbrace{v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot v_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{C^2_{2s+1}}}[C^{\overbrace{(\vec{p},-\frac{1}{2}),\cdot\cdot,(\vec{p},-\frac{1}{2})}^{l-1}}_{\underbrace{v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot v_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s}}v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+C^{\overbrace{(\vec{p},-\frac{1}{2}),\cdot\cdot,(\vec{p},-\frac{1}{2})}^{l}}_{\underbrace{v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot v_{\rho_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s}}v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{C^l_{2s+1}}}[\sqrt{C^{l-1}_{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s-l+1)v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+\sqrt{C^l_{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s-l)v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]\qquad\Box$$

3.2 Bargmann-Wigner方程U-自旋基的分解(组合学方法)

定理3.2.1. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=s'}^{-s'}\frac{\sqrt{C^{s'+h'}_{s+h}C^{s'-h'}_{s-h}}}{\sqrt{C^{2s'}_{2s}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p},h-h')U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p},h')$

证明: $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{\sqrt{(2s)!(s+h)!(s-h)!}}$

$$\sum_{h'=s'}^{-s'}C^{s'+h'}_{s+h}C^{s'-h'}_{s-h}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot}_{(s-s')+(h-h')}\underbrace{\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{(s-s')-(h-h')}\underbrace{u_{(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot}_{(s'+h')}\underbrace{\cdot\cdot u_{\sigma'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\tau'_\varsigma)}(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{(s'-h')}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2s)!(s+h)!(s-h)!}}$$

$$\sum_{h'=s'}^{-s'}C^{s'+h'}_{s+h}C^{s'-h'}_{s-h}\sqrt{[2(s-s')]![(s-s')+(h-h')]![(s-s')-(h-h')]!}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p},h-h')$$

$$\sqrt{(2s')!(s'+h')!(s'-h')!}U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p},h')$$

$$=\frac{\sqrt{[2(s-s')]!}\sqrt{(2s')!}}{\sqrt{(2s)!}}$$

$$\sum_{h'=s'}^{-s'}C^{s'+h'}_{s+h}C^{s'-h'}_{s-h}\frac{\sqrt{[(s-s')+(h-h')]![(s-s')-(h-h')]!}\sqrt{(s'+h')!(s'-h')!}}{\sqrt{(s+h)!(s-h)!}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p},h-h')U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p},h')$$

$$=\sum_{h'=s'}^{-s'}\frac{\sqrt{C^{s'+h'}_{s+h}C^{s'-h'}_{s-h}}}{\sqrt{C^{2s'}_{2s}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p},h-h')U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p},h')\qquad\Box$$

推论3.2.1. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=n'}^{-n'}\frac{\sqrt{C^{n'+h'}_{n+h}C^{n'-h'}_{n-h}}}{\sqrt{C^{2n'}_{2n}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(n-n')}}(\vec{p},h-h')U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2n'}}(\vec{p},h')$

推论3.2.2. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{C^2_{n+h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n-2}}(\vec{p},h-1)U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},1)$
$+\frac{\sqrt{C^1_{n+h}C^1_{n-h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n-2}}(\vec{p},h)U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C^2_{n-h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n-2}}(\vec{p},h+1)U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},-1)$

推论3.2.3. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=1/2}^{-1/2}\frac{\sqrt{C^{1/2+h'}_{s+h}C^{1/2-h'}_{s-h}}}{\sqrt{C^1_{2s}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-h')U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h')$
$=\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

3.3 Bargmann-Wigner方程V-自旋基的分解(组合学方法)

定理3.3.1. $V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=s'}^{-s'}\frac{\sqrt{C^{s'+h'}_{s+h}C^{s'-h'}_{s-h}}}{\sqrt{C^{2s'}_{2s}}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p},h-h')V_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p},h')$

证明: $V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{\sqrt{(2s)!(s+h)!(s-h)!}}$
$\sum_{h'=s'}^{-s'}C^{s'+h'}_{s+h}C^{s'-h'}_{s-h}\underbrace{v_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdots}_{(s-s')+(h-h')}\underbrace{\cdots v_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{(s-s')-(h-h')}\underbrace{v_{(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdots}_{(s'+h')}\underbrace{\cdots v_{\sigma'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\tau'_\varsigma)}(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{(s'-h')}$
$=\frac{1}{\sqrt{(2s)!(s+h)!(s-h)!}}$
$\sum_{h'=s'}^{-s'}C^{s'+h'}_{s+h}C^{s'-h'}_{s-h}\sqrt{[2(s-s')]![(s-s')+(h-h')]![(s-s')-(h-h')]!}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p},h-h')$
$\sqrt{(2s')!(s'+h')!(s'-h')!}V_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p},h')$
$=\frac{\sqrt{[2(s-s')]!}\sqrt{(2s')!}}{\sqrt{(2s)!}}$
$\sum_{h'=s'}^{-s'}C^{s'+h'}_{s+h}C^{s'-h'}_{s-h}\frac{\sqrt{[(s-s')+(h-h')]![(s-s')-(h-h')]!}\sqrt{(s'+h')!(s'-h')!}}{\sqrt{(s+h)!(s-h)!}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p},h-h')V_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p},h')$
$=\sum_{h'=s'}^{-s'}\frac{\sqrt{C^{s'+h'}_{s+h}C^{s'-h'}_{s-h}}}{\sqrt{C^{2s'}_{2s}}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p},h-h')V_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p},h')$ □

推论3.3.1. $V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=n'}^{-n'}\frac{\sqrt{C^{n'+h'}_{n+h}C^{n'-h'}_{n-h}}}{\sqrt{C^{2n'}_{2n}}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(n-n')}}(\vec{p},h-h')V_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2n'}}(\vec{p},h')$

推论3.3.2. $V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{C^2_{n+h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n-2}}(\vec{p},h-1)V_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},1)$
$+\frac{\sqrt{C^1_{n+h}C^1_{n-h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n-2}}(\vec{p},h)V_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C^2_{n-h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma\xi_\varsigma}_{2n-2}}(\vec{p},h+1)V_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},-1)$

推论3.3.3. $V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=1/2}^{-1/2}\frac{\sqrt{C^{1/2+h'}_{s+h}C^{1/2-h'}_{s-h}}}{\sqrt{C^1_{2s}}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-h')V_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h')$
$=\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

3.4 Bargmann-Wigner方程自旋基的合成

推论3.4.1. $\frac{\sqrt{C^{s'+h'}_{s+s'+h}C^{s'-h'}_{s+s'-h}}}{\sqrt{C^{2s'}_{2(s+s')}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h-h')=U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p},h)\bar{U}^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s'}}(\vec{p},h'),-s-s'\le h\le s+s'$

推论3.4.2. $\frac{\sqrt{C^{s'+h'}_{s+s'+h}C^{s'-h'}_{s+s'-h}}}{\sqrt{C^{2s'}_{2(s+s')}}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h-h')=V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p},h)\bar{V}^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s'}}(\vec{p},h'),-s-s'\le h\le s+s'$

3.5 Bargmann-Wigner方程自旋基合成的推论

推论3.5.1.

$$\begin{cases} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s+\frac{1}{2}-l)u^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2s+1}}\frac{E}{m}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s-l+1) \\ U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s+\frac{1}{2}-l)u^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{2s+1-l}}{\sqrt{2s+1}}\frac{E}{m}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s-l) \end{cases}$$

推论3.5.2.

$$\begin{cases} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s+\frac{1}{2}-l)v^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2s+1}}\frac{E}{m}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s-l+1) \\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s+\frac{1}{2}-l)v^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{2s+1-l}}{\sqrt{2s+1}}\frac{E}{m}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s-l) \end{cases}$$

4 Bargmann-Wigner方程的准投影算子

4.1 Bargmann-Wigner方程准投影算子的定义和性质

定义4.1.1.

$$\begin{cases} \Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s):=\sum_{h=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)U^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) \\ \Lambda_{-\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s):=\sum_{h=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)V^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) \end{cases}$$

推论4.1.1.

$$\Lambda_{\pm\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s)=\frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{\Lambda_{\pm\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{\pm\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot\Lambda_{\pm\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s}$$

从对称指标广义二项式定理便可以直接得到以上推论。

推论4.1.2.

$$\begin{cases} \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s-h}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-h) \\ =\frac{\varsigma^{2s}}{[(2s)!]^2}\underbrace{(\Lambda_+\bar{C}\gamma_4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})(\Lambda_+\bar{C}\gamma_4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot(\Lambda_+\bar{C}\gamma_4)_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s} \\ \sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-h) \\ =\frac{\varsigma^{2s}}{[(2s)!]^2}\underbrace{(\Lambda_-\bar{C}\gamma_4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})(\Lambda_-\bar{C}\gamma_4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot(\Lambda_-\bar{C}\gamma_4)_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s} \end{cases}$$

推论4.1.3.

$$\begin{cases} \Lambda_{\pm\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot}_{2n_1}\underbrace{\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n_2}\cdot\cdot\underbrace{\tau_\varsigma\cdot\cdot}_{2n_k}\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n_1}\underbrace{\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n_2}\cdot\cdot\underbrace{\tau'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n_k}}(\vec{p},s)=\frac{1}{[(2s)!]^2}\Lambda_{\pm\{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot}_{2n_1}(\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n_1}}(\vec{p},n_1)\Lambda_{\pm\underbrace{\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n_2}\underbrace{\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n_2}}(\vec{p},n_2)\cdot\cdot\Lambda_{\pm\underbrace{\tau_\varsigma\cdot\cdot}_{2n_k}\}\underbrace{\tau'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n_k})}(\vec{p},n_k) \\ s=n_1+n_2+\cdot\cdot+n_k \end{cases}$$

推论4.1.4.

$$\Lambda_{\pm\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},n)$$

$$=\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{\Lambda_{\pm\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{\pm\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot\}_)}_{2n}=\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^{2n}}\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\pm p)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\pm p)\cdot\cdot)}_{n}\underbrace{\Lambda_{maa'}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n}$$

推论4.1.5.

$$\Lambda_{\pm\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},n)=\frac{1}{(2m)^{2n}}\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{[(\pm m-i\gamma^a p_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(\pm m-i\gamma^b p_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\}_)}_{2n}$$

$$=\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^{2n}}\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\pm p)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\pm p)\cdot\cdot)}_{n}\underbrace{(\eta_{aa'}+\frac{p_a p^+_{a'}}{m^2})\cdot\cdot}_{n}$$

推论4.1.6.

$$\begin{cases}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s-h}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-h)=\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{\varsigma^{2s}}{[(2s)!]^2}\underbrace{[(m-i\gamma^a p_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}_{2s}\\ \sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-h)=\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{\varsigma^{2s}}{[(2s)!]^2}\underbrace{[(-m-i\gamma^a p_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m-i\gamma^b p_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}_{2s}\end{cases}$$

4.2 Bargmann-Wigner方程真正的两类投影算子

定义4.2.1. $\tilde{\Lambda}_{\pm\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},s):=(\frac{m}{E})^{2s}\Lambda_{\pm\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},s)$

定义4.2.2. $\bar{\Lambda}_{\pm\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}{}^{\overbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},s):=\Lambda_{\pm\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},s)\overbrace{\gamma^{4}_{\lambda'_\varsigma}{}^{\eta_\varsigma}\gamma^{4}_{\mu'_\varsigma}{}^{\xi_\varsigma}\cdots}^{2s}$

4.3 Bargmann-Wigner方程准投影算子的递推关系(严格证明)

定理4.3.1. $\sum\limits_{h=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)$

$$=\frac{2s+1}{2s+2s'+1}\sum_{h''=s+s'}^{-s-s'}[U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h'')\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h'')]\sum_{h'=s'}^{-s'}[U^{\overbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')\bar{U}^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')]$$

证明：$\frac{C^{s'+h'}_{s+s'+h}C^{s'-h'}_{s+s'-h}}{C^{2s'}_{2(s+s')}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h-h')\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s_1}}(\vec{p},h-h')$

$$=U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h)\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h)U^{\overbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')\bar{U}^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h');-s-s'\le h\le s+s',-s'\le h'\le s'$$

$$\Rightarrow\sum_{h=s+s'}^{-s-s'}\sum_{h'=s'}^{-s'}\frac{C^{s'+h'}_{s+s'+h}C^{s'-h'}_{s+s'-h}}{C^{2s'}_{2(s+s')}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h-h')\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h-h')$$

$$=\sum_{h=s+s'}^{-s-s'}[U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h)\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h)]\sum_{h'=s'}^{-s'}[U^{\overbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')\bar{U}^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')]$$

$$\Leftrightarrow\sum_{h'=s'}^{-s'}\sum_{h''=s+s'-h'}^{-s-s'-h'}\frac{C^{s'+h'}_{s+s'+h'+h''}C^{s'-h'}_{s+s'-h'-h''}}{C^{2s'}_{2(s+s')}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h'')\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h'')$$

$$=\sum_{h=s+s'}^{-s-s'}[U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h)\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h)]\sum_{h'=s'}^{-s'}[U^{\overbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')\bar{U}^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')]$$

$$\Leftrightarrow\sum_{h'=s'}^{-s'}\sum_{h''=s}^{-s}\frac{C^{s'+h'}_{s+s'+h'+h''}C^{s'-h'}_{s+s'-h'-h''}}{C^{2s'}_{2(s+s')}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h'')\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h'')$$

$$=\sum_{h=s+s'}^{-s-s'}[U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h)\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h)]\sum_{h'=s'}^{-s'}[U^{\overbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')\bar{U}^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')]$$

$$\Leftrightarrow\sum_{h''=s}^{-s}\sum_{h'=s'}^{-s'}\frac{C^{s'+h'}_{s+s'+h'+h''}C^{s'-h'}_{s+s'-h'-h''}}{C^{2s'}_{2(s+s')}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h'')\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h'')$$

$$=\sum_{h=s+s'}^{-s-s'}[U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h)\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h)]\sum_{h'=s'}^{-s'}[U^{\overbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')\bar{U}^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')]$$

$$\Leftrightarrow\sum_{h''=s}^{-s}\frac{C^{2s'}_{2(s+s')+1}}{C^{2s'}_{2(s+s')}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h'')\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h'')$$

$$= \sum_{h=s+s'}^{-s-s'} [U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h)\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h)] \sum_{h'=s'}^{-s'} [U^{\overbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')\bar{U}^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{h''=s}^{-s} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h'')\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h'')$$

$$= \frac{2s+1}{2s+2s'+1} \sum_{h=s+s'}^{-s-s'} [U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h)\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h)] \sum_{h'=s'}^{-s'} [U^{\overbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')\bar{U}^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{h=s}^{-s} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)$$

$$= \frac{2s+1}{2s+2s'+1} \sum_{h''=s+s'}^{-s-s'} [U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h'')\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h'')] \sum_{h'=s'}^{-s'} [U^{\overbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')\bar{U}^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')] \qquad \square$$

定理4.3.2. $\sum_{h=s}^{-s} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)U^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)$

$$= \frac{2s+1}{2s+2s'+1}(\frac{m}{E})^{4s'} \sum_{h''=s+s'}^{-s-s'} [U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h'')U^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}_{2s'}}(\vec{p},h'')] \sum_{h'=s'}^{-s'} [U^{\overbrace{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')U^{+\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdots}^{2s'}}(\vec{p},h')]$$

自我评述：一个猜想经过多年后终于又得到了严格的证明，诀窍在于对于一个特殊组合学公式的利用。

4.4 Bargmann-Wigner方程准投影算子之间的关系

定理4.4.1.
$$\begin{cases} \Lambda_{\pm\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},s) = \frac{2s+1}{2s+2}(\frac{m}{E})^2\Lambda_{\pm\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s+1}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s+\frac{1}{2})\Lambda_{\pm}^{\tau'_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) \\ \Lambda_{\pm\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s+1}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s+\frac{1}{2}) = \frac{1}{[(2s+1)!]^2}\Lambda_{\pm\{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}(\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},s)\Lambda_{\pm\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2}) \end{cases}$$

定理4.4.2.
$$\begin{cases} \Lambda_{\pm\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},s) = \frac{2s+1}{2(s+l)+1}(\frac{m}{E})^{4l}\Lambda_{\pm\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\rho_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2(s+l)}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\rho'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2(s+l)}}(\vec{p},s+l)\Lambda_{\pm}^{\overbrace{\rho'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}^{2l}\overbrace{\rho_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}^{2l}}(\vec{p},l) \\ \Lambda_{\pm\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2(s+l)}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2(s+l)}}(\vec{p},s+l) = \frac{1}{[2(s+l)!]^2}\Lambda_{\pm\{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}(\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},s)\Lambda_{\pm\underbrace{\rho_\varsigma\cdots\tau_\varsigma\}}_{2l}\underbrace{\rho'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma)}_{2l}}(\vec{p},l) \end{cases}$$

5 Bargmann-Wigner方程的对易规则

5.1 Bargmann-Wigner方程的协变对易规则

定理5.1.1. $[a(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}} = \delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),[b(\vec{p},h),b^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}} = \delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),[rest]_{-^{2s+1}} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}} = \frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x') \\ [\psi^{(+)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^{(+)+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}} = \frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta^{(+)}(x-x') \\ [\psi^{(-)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^{(-)+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}} = \frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta^{(-)}(x-x') \\ [rest]_{-^{2s+1}} = 0 \end{cases}$$

证明: $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}' \sum_{h,h'=s}^{-s}(EE')^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{EE'}}^{2s}$

$$[[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x},[a^+(\vec{p}',h')U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',h)e^{-ip'\cdot x'}+b(\vec{p}',h')V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',h')e^{ip'\cdot x'}]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\sum_{h,h'=s}^{-s}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E'}}$$

$$[U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',h')[a(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}+V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',h')[b^+(\vec{p},h),b(\vec{p}',h')]e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\sum_{h,h'=s}^{-s}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E'}}$$

$$[U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',h')\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}+(-1)^{2s+1}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',h')\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}[\sum_{h=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot(x-x')}+(-1)^{2s+1}\sum_{h=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot(x-x')}]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}[\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},s)e^{ip\cdot(x-x')}+(-1)^{2s+1}\Lambda_{-\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},s)e^{-ip\cdot(x-x')}]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}[\frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{\Lambda_{+\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdots}_{2s}e^{ip\cdot(x-x')}$$

$$+(-1)^{2s+1}\frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{\Lambda_{-\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{-\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdots}_{2s}e^{-ip\cdot(x-x')}]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}\{\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{ip\cdot(x-x')}$$

$$+(-1)^{2s+1}\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(-m+\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m+\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{-ip\cdot(x-x')}\}$$

$$=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{1}{2E}[[e^{ip\cdot(x-x')}-e^{-ip\cdot(x-x')}]$$

$$=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')$$

$$=\frac{i(2m)^{2s}}{2^{2s-1}}\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(-i\partial,s)\Delta(x-x')$$

□

证明： $[\psi^{(+)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^{(+)+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\sum_{h,h'=s}^{-s}(EE')^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{EE'}}^{2s}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x},a^+(\vec{p}',h')U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',h)e^{-ip'\cdot x'}]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\sum_{h,h'=s}^{-s}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E'}}[U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',h')[a(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\sum_{h,h'=s}^{-s}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E'}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',h')\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}\sum_{h=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot(x-x')}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},s)e^{ip\cdot(x-x')}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}\frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{\Lambda_{+\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdots}_{2s}e^{ip\cdot(x-x')}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}\{\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{ip\cdot(x-x')}$$

$$=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{1}{2E}e^{ip\cdot(x-x')}$$

$$= \frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\Delta^{(+)}(x-x')$$
$$= \frac{i(2m)^{2s}}{2^{2s-1}}\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(-i\partial,s)\Delta^{(+)}(x-x')$$

□

证明：$[\psi^{(-)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^{(-)+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\sum_{h,h'=s}^{-s}(EE')^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{EE'}}^{2s}[b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x},b(\vec{p}',h')V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',h')e^{ip'\cdot x'}]$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\sum_{h,h'=s}^{-s}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E'}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',h')[b^+(\vec{p},h),b(\vec{p}',h')]e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\sum_{h,h'=s}^{-s}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E'}}(-1)^{2s+1}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',h')\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}(-1)^{2s+1}\sum_{h=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot(x-x')}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}(-1)^{2s+1}\Lambda_{-\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},s)e^{-ip\cdot(x-x')}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}(-1)^{2s+1}\frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{\Lambda_{-\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\Lambda_{-\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{2s}e^{-ip\cdot(x-x')}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}(-1)^{2s+1}\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(-m+\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m+\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}e^{-ip\cdot(x-x')}$$
$$= \frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{1}{2E}e^{-ip\cdot(x-x')}$$
$$= \frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\Delta^{(-)}(x-x')$$
$$= \frac{i(2m)^{2s}}{2^{2s-1}}\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(-i\partial,s)\Delta^{(-)}(x-x')$$

□

5.2 Bargmann-Wigner方程协变对易规则的反向推理

定理5.2.1.

$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\Delta(x-x')\\ [rest]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow [a(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),[b(\vec{p},h),b^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),[rest]_{-^{2s+1}}=0$$

下面给出几个主要对易括号的详细证明过程。

证明：$[a(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p},h)U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p}',h')[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p},h)U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p}',h')$$
$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\Delta(x-x')e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p},h)U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\{\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2E_0}[e^{ip_0\cdot(x-x')}-e^{-ip_0\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}_0\}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$

$$=[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\{\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-i\gamma^a p_{0a})\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_{0b})\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{ip_0\cdot(x-x')}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$+(-1)^{2s+1}\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(-m-i\gamma^a p_{0a})\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m-i\gamma^b p_{0b})\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{-ip_0\cdot(x-x')}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}_0$$

$$=[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$

$$U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)U^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{i(p_0-p)\cdot x}e^{-i(p_0-p')\cdot x'}$$

$$+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)V^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{-i(p_0+p)\cdot x}e^{i(p_0+p')\cdot x'}\}$$

$$=\int d^3\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$

$$U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)U^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p}')$$

$$+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)V^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{2iE_0(t-t')}\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p}')\}$$

$$=\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')(\frac{m}{E})^{4s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h')$$

$$\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h_0)U^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h_0)+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p},h_0)V^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p},h_0)e^{2iE(t-t')}\}$$

$$=\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')(\sum_{h_0=s}^{-s}\delta_{hh_0}\delta_{h'h_0}+0)$$

$$=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$

□

证明： $[b^+(\vec{p},h),b(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\{\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2E_0}[e^{ip_0\cdot(x-x')}-e^{-ip_0\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}_0\}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$

$$=[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\{\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-i\gamma^a p_{0a})\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_{0b})\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{ip_0\cdot(x-x')}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$+(-1)^{2s+1}\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(-m-i\gamma^a p_{0a})\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m-i\gamma^b p_{0b})\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{-ip_0\cdot(x-x')}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}_0$$

$$=[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$

$$V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{i(p_0+p)\cdot x}e^{-i(p_0+p')\cdot x'}$$

$$+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{-i(p_0-p)\cdot x}e^{i(p_0-p')\cdot x'}\}$$

$$=\int d^3\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$

$$V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{-2iE_0(t-t')}\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p}')$$

$$+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p}')\}$$

$$=\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')(\frac{m}{E})^{4s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h')$$

$$\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p},h_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p},h_0)e^{-2iE(t-t')}+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h_0)\}$$

$$=(-1)^{2s+1}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')(0+\sum_{h_0=s}^{-s}\delta_{hh_0}\delta_{h'h_0})$$

$$=(-1)^{2s+1}\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$

□

证明： $[a(\vec{p},h),b(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}e^{-i(p\cdot x+p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')e^{-i(p\cdot x+p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\{\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2E_0}[e^{ip_0\cdot(x-x')}-e^{-ip_0\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}_0\}e^{-i(p\cdot x+p'\cdot x')}$$

$$=[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\{\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-i\gamma^a p_{0a})\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_{0b})\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{ip_0\cdot(x-x')}e^{-i(p\cdot x+p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$+(-1)^{2s+1}\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(-m-i\gamma^a p_{0a})\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m-i\gamma^b p_{0b})\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{-ip_0\cdot(x-x')}e^{-i(p\cdot x+p'\cdot x')}\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}_0$$

$$=[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$

$$U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{i(p_0-p)\cdot x}e^{-i(p_0+p')\cdot x'}$$

$$+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{-i(p_0+p)\cdot x}e^{i(p_0-p')\cdot x'}\}$$

$$=\int d^3\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$

$$U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{-iE_0t'}\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p}')$$

$+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{iE_0t}\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p}')\}$

$=\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')(\frac{m}{E})^{4s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p}',h')$

$\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h_0)+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}',h_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}',h_0)e^{2iE(t-t')}\}$

$=0+0=0$ □

自我评述：以上的证法类似于Penrose方程情形，不再基于等时对易规则，直接基于协变对易规则进行计算，看似更难了，其实也是更简单了，因为等时对易规则不容易算出，即使算出了也难于使用，而协变对易规则本身已知且很有规律，且可以分解为自旋基的乘积，从而变得简单了。整个证明过程基本上只依赖于自旋基的性质，没有高难度的复杂计算。以上给出了最难的三个对易括号的证明，其他的几个对易括号可容易证出，不再详细列出。事实上，等时对易规则是协变对易规则的特例，所以等时对易规则的证法也可以采用以上的证法(取$t=t'$即可)。

5.3 Bargmann-Wigner方程协变对易规则的小结

结合以上两节的证明，便得到以下重要的定理。

定理5.3.1.

$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\Delta(x-x')\\ [rest]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow[a(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),[b(\vec{p},h),b^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),[rest]_{-^{2s+1}}=0$

定理5.3.2. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=2im^{2s}\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(-i\partial,s)$

5.4 Bargmann-Wigner方程的对易函数、因果函数和费曼传播子

引理5.4.1. $\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}$

$=\sum_{n=0}^{2s}C_{2s}^n\overbrace{[-(\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[-(\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{[m\gamma^4]_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}[m\gamma^4]_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s-n}$

$=\sum_{n=0}^{2s}(-1)^nm^{2s-n}C_{2s}^n\overbrace{(\gamma^a\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^b\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^4)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s-n}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{n}$

引理5.4.2. $[\theta(t),\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}]_{-}{}^{2s+1}$

$=\sum_{n=0}^{2s}(-1)^nm^{2s-n}C_{2s}^n[\theta(t),\overbrace{(\gamma^a\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^b\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^4)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s-n}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{n}$

$=\sum_{n=0}^{2s}(-1)^nm^{2s-n}C_{2s}^n\sum_{l=0}^{n-1}C_n^l\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^4)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s-n}[\theta(t),\partial_t^{2s-n}]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{l}$

$=\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^nm^{2s-n}C_{2s}^nC_n^l\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^4)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s-n}[\theta(t),\partial_t^{2s-n}]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{l}$

$=-\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^4)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{n}\sum_{l'=1}^{n-l}\partial_t^{n-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}$

推论5.4.1.

$$\begin{cases}\Delta_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x) := \frac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x)\\ \Delta^{(+)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x) := \frac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta^{(-)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x) := \frac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{(l)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x) := \frac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta^{(l)}(x)\end{cases}$$

推论5.4.2.

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x) := \frac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta^{(c)}(x)\\ -\frac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\cdots}^{n-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l'=1}^{n-l}\partial_t^{n-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}\Delta(x)\\ \Delta^{(F)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x) := \frac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta_F(x)\\ -i\frac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\cdots}^{n-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l'=1}^{n-l}\partial_t^{n-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}\Delta(x)\\ = i\Delta^{(c)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)\end{cases}$$

推论5.4.3.

$$\begin{cases}\Delta^{ret}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x) := \frac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta^{ret}(x)\\ -\frac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\cdots}^{n-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l'=1}^{n-l}\partial_t^{n-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}\Delta(x)\\ \Delta^{adv}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x) := \frac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta^{adv}(x)\\ -\frac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\cdots}^{n-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l'=1}^{n-l}\partial_t^{n-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}\Delta(x)\end{cases}$$

引理5.4.3. $\Delta(x)\partial_t^n\delta(t) = \sum_{l=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2l+1}(\nabla^2-m^2)^l\partial_t^{n-2l-1}\delta^4(x)$

推论5.4.4. $\Delta(x)\partial_t^{n-1-l}\delta(t) = \sum_{r=0}^{[(n-l-2)/2]} C_{n-1-l}^{2r+1}(\nabla^2-m^2)^r\partial_t^{n-l-2-2r}\delta^4(x)$

引理5.4.4. $\Delta_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)|_{t=0}$

$$= \frac{-i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}[C_{2s}^{2l+1}\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l-1}\overbrace{\cdots\delta_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}^{2l+1}](m^2-\nabla^2)^l\delta^3(\vec{r})$$

推论5.4.5.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=0\\(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(+)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=0\\(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(-)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=0\\(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(l)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(c)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=-i\gamma^4\delta(t)\Delta_{\underbrace{\kappa_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)|_{t=0}\\(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{ret}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=-i\gamma^4\delta(t)\Delta_{\underbrace{\kappa_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)|_{t=0}\\(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{adv}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=-i\gamma^4\delta(t)\Delta_{\underbrace{\kappa_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)|_{t=0}\\(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(F)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=\gamma^4\delta(t)\Delta_{\underbrace{\kappa_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)|_{t=0}\end{cases}$$

推论5.4.6.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=0\\(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(+)}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=0\\(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(-)}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=0\\(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(l)}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(c)}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=-\gamma^4_{\kappa_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^4(x)\\(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{ret}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=-\gamma^4_{\kappa_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^4(x)\\(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{adv}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=-\gamma^4_{\kappa_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^4(x)\\(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(F)}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=-i\gamma^4_{\kappa_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^4(x)\end{cases}$$

5.5 可分离表象下Bargmann-Wigner方程的协变量子化规则的重要推论

定义5.5.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}=0,\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x),\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}=\Gamma^{K_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}\psi_{K_\varsigma}(s)$

推论5.5.1.

$$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')$$

$$\Rightarrow[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta(x-x')$$

证明:

$$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')$$

$$\Leftrightarrow[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}},\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x)$$

$$=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[-imI\otimes\sigma(x)+(\sigma\otimes\sigma_z,i\varsigma)^a\partial_a]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[-imI\otimes\sigma(x)+(\sigma\otimes\sigma_z,i\varsigma)^b\partial_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')$$

$$\Rightarrow[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta(x-x')$$

$$\Leftrightarrow[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta(x-x')\qquad\square$$

5.6 Bargmann-Wigner方程对易规则两种描述的等价性证明

引理5.6.1. $2\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)(\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2})\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)=[(m-i\gamma^ap_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^bp_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}$

引理5.6.2. $2\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\Delta(x-x')=[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')$

定理5.6.1.

$$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{2n-1}}\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}_{2n}\Delta(x-x')$$

⇔

$$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')] = \frac{i}{2^{3n-1}}\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot)}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')$$

证明:

$$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]$$

$$= \frac{i}{2^{2n-1}[(2n)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}_{2n}\Delta(x-x')$$

$$= \frac{i}{2^{4n-1}[(2n)!]^2}\underbrace{\{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\{\lambda_\varsigma((\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\}\cdot\cdot\})}_{n}\Delta(x-x')$$

$$= \frac{i}{2^{3n-1}[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(x')\cdot\cdot)}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}][\eta_{bb'}-\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')$$

$$= \frac{i}{2^{3n-1}(n!)^2[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(x')\cdot\cdot)}_{n}\underbrace{[\eta_{\{a(a'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{bb'}-\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2}]\cdot\cdot\})}_{n}\Delta(x-x') \qquad \square$$

定理5.6.2.

$$\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')\}$$

$$= \frac{i}{2^{2n}}\frac{1}{[(2n+1)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta(x-x')$$

⇔

$$\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')\}$$

$$= \frac{i}{2^{3n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')$$

证明:

$$\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')\}$$

$$= \frac{i}{2^{2n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta(x-x')$$

$$= \frac{i}{2^{4n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{\{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\{\lambda_\varsigma((\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\}\cdot\cdot}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\Delta(x-x')$$

$$= \frac{i}{2^{3n}[(2n+1)!]^2}$$

$$\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(x')\cdot\cdot}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\eta_{\{a(a'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{bb'}-\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2}]\cdot\cdot\})}_{n}\Delta(x-x')$$

$$= \frac{i}{2^{3n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x') \qquad \square$$

5.7 有质量玻色子对易规则小结

定理5.7.1. $n \geq 0$

$$[a(\vec{p},h;n),a^+(\vec{p}',h';n)] = \delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),[b(\vec{p},h;n),b^+(\vec{p}',h';n)] = \delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),[rest]=0$$

$$\Leftrightarrow [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')] = \frac{i}{2^{2n-1}}\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}_{2n}\Delta(x-x'),[rest]=0$$

$$\Leftrightarrow [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')] = \frac{i}{2^{3n-1}}\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot)}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x'),[rest]=0$$

5.8 有质量费米子反对易规则小结

定理5.8.1. $n \geq 0$

$\{a(\vec{p},h;n+\frac{1}{2}),a^{+}(\vec{p}',h';n+\frac{1}{2})\}=\delta_{hh'}\delta^{3}(\vec{p}-\vec{p}'),\{b(\vec{p},h;n+\frac{1}{2}),b^{+}(\vec{p}',h';n+\frac{1}{2})\}=\delta_{hh'}\delta^{3}(\vec{p}-\vec{p}'),\{rest\}=0$

$\Leftrightarrow \{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')\}$

$=\frac{i}{2^{2n}}\frac{1}{[(2n+1)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta(x-x'),\{rest\}=0$

$\Leftrightarrow$

$\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')\}$

$=\frac{i}{2^{3n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^{a}_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^{+}_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x'),\{rest\}=0$

6 Bargmann-Wigner方程 [18]各种量子算符的提取

6.1 Bargmann-Wigner方程的等时对易规则

定理6.1.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma\}}_{2s}}(\vec{r},t)$

$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=s}^{-s}E^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^{+}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$

$$\begin{cases}a(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}\\ b^{+}(\vec{p},s)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$$

定理6.1.2. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t),\psi^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}}$

$=\frac{1}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}[C^{2l+1}_{2s}\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\delta_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}](m^2-\nabla^2)^l\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

证明: $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t),\psi^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}}$

$=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}^{2s}\Delta(x-x')|_{t=t'}$

$=\frac{1}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}[C^{2l+1}_{2s}\overbrace{(m\gamma^4-\vec{\gamma}\gamma^4\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4-\vec{\gamma}\gamma^4\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\delta_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}](m^2-\nabla^2)^l\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$

$=\frac{1}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}[C^{2l+1}_{2s}\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\delta_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}](m^2-\nabla^2)^l\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$ □

6.2 Bargmann-Wigner方程能量算符的提取

引理6.2.1. $\overbrace{[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})+E]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})+E]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}$

$=\sum_{l=0}^{2s}C^{l}_{2s}E^{l}\overbrace{(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{l}$

引理6.2.2. $\overbrace{[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})-E]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})-E]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}$

$=\sum_{l=0}^{2s}(-1)^{l}C^{l}_{2s}E^{l}\overbrace{(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{l}$

引理6.2.3.

$$\overbrace{[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})+E]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})+E]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}$$
$$+\overbrace{[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})-E]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})-E]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}$$
$$=2\sum_{l=0}^{[s]}C_{2s}^{2l}E^{2l}\overbrace{(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots\})}^{2l}$$

引理6.2.4.

$$\overbrace{[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})+E]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})+E]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}$$
$$-\overbrace{[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})-E]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})-E]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}$$
$$=2\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C_{2s}^{2l+1}E^{2l+1}\overbrace{(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l-1}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots\})}^{2l+1}$$

定理6.2.1.

$$H(s)=\int\sum_{h=s}^{-s}E[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-l}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

证明: $\int\sum_{h=s}^{-s}E[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m^{2s}}{E^{4s-2}}\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)$$
$$\sum_{h=s}^{-s}[U^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)U^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+(-1)^{2s}V^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m^{2s}}{E^{4s-2}}\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)$$
$$\sum_{h=s}^{-s}[U^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)U^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)+(-1)^{2s}V^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},h)]e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E^{4s-2}}\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)\frac{1}{(2m)^{2s}[(2s)!]^2}$$
$$\{\overbrace{[(m-i\gamma^a p_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}+\overbrace{[(m-i\gamma^a p_a^+)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_b^+)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}$$
$$=\frac{1}{2^{2s}[(2s)!]^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)\frac{1}{E^{4s-2}}$$
$$\{\overbrace{[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})+E]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})+E]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}$$
$$+\overbrace{[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})-E]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})-E]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}$$
$$=\frac{1}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)\frac{1}{E^{4s-2}}$$
$$\sum_{l=0}^{[s]}C_{2s}^{2l}E^{2l}\overbrace{(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots\})}^{2l}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}$$
$$=\frac{1}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)$$
$$\sum_{l=0}^{[s]}C_{2s}^{2l}\frac{1}{(E^2)^{2s-1-l}}\overbrace{(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots\})}^{2l}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}$$
$$=\frac{1}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)$$

$\sum_{l=0}^{[s]} C_{2s}^{2l}\frac{1}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1-l}}\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots_{\})}}^{2l}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)$

$\sum_{l=0}^{[s]} C_{2s}^{2l}\frac{1}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1-l}}\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots_{\})}}^{2l}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\frac{1}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}$

$\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\sum_{l=0}^{[s]} C_{2s}^{2l}\frac{\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1-l}}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots_{\})}}^{2l}\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{2^{2s-1}}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\sum_{l=0}^{[s]} C_{2s}^{2l}\frac{\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1-l}}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots}^{2l}\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{2^{2s-1}}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\sum_{l=0}^{[s]} C_{2s}^{2l}\frac{(i\partial_t)^{2s-2l}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1-l}}\overbrace{\delta_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots}^{2l}\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{2^{2s-1}}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\sum_{l=0}^{[s]} C_{2s}^{2l}\frac{(i\partial_t)^{2s-2l}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1-l}}\overbrace{\delta_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s}\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{2^{2s-1}}\sum_{l=0}^{[s]} C_{2s}^{2l}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s-2l}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1-l}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{2^{2s-1}}\sum_{l=0}^{[s]} C_{2s}^{2l}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

定理6.2.2.

$H(n)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2n}}(\vec{r},t)\frac{1}{(m^2-\nabla^2)^{n-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{r},t)d^3\vec{r},H(n+\frac{1}{2})=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2n+1}}(\vec{r},t)\frac{i\partial_t}{(m^2-\nabla^2)^{n}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

6.3 Bargmann-Wigner方程动量算符的提取

定理6.3.1.

$P(s)=\int\sum_{h=s}^{-s}\vec{p}[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{-i\nabla(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-l}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

证明: $\int\sum_{h=s}^{-s}\vec{p}[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m^{2s}}{E^{4s-1}}\vec{p}\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)$

$\sum_{h=s}^{-s}[U^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)U^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+(-1)^{2s}V^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}]d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m^{2s}}{E^{4s-1}}\vec{p}\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)$

$\sum_{h=s}^{-s}[U^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)U^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)-(-1)^{2s}V^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},h)]e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E^{4s-1}}\vec{p}\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)\frac{1}{(2m)^{2s}[(2s)!]^2}$

$\{\overbrace{[(m-i\gamma^a p_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots_{\})}}^{2s}-\overbrace{[(m-i\gamma^a p_a^+)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_b^+)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots_{\})}}^{2s}\}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}$

$=\frac{1}{2^{2s}[(2s)!]^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)\frac{1}{E^{4s-1}}\vec{p}$

$$\{\overbrace{[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})+E]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})+E]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}$$

$$-\overbrace{[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})-E]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})-E]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}$$

$$=\tfrac{1}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)\tfrac{1}{E^{4s-1}}\vec{p}$$

$$\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C_{2s}^{2l+1}E^{2l+1}\overbrace{(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l-1}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots\})}^{2l+1}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}$$

$$=\tfrac{1}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)$$

$$\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C_{2s}^{2l+1}\tfrac{\vec{p}}{(E^2)^{2s-1-l}}\overbrace{(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l-1}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots\})}^{2l+1}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}$$

$$=\tfrac{1}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)$$

$$\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C_{2s}^{2l+1}\tfrac{-i\nabla}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1-l}}\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l-1}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots\})}^{2l+1}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}$$

$$=\tfrac{1}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)$$

$$\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C_{2s}^{2l+1}\tfrac{-i\nabla}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1-l}}\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l-1}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots\})}^{2l+1}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$=\tfrac{1}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}$$

$$\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C_{2s}^{2l+1}\frac{-i\nabla\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1-l}}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots\})}^{2l+1}\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$=\tfrac{1}{2^{2s-1}}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C_{2s}^{2l+1}\frac{-i\nabla\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1-l}}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots}^{2l+1}\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$=\tfrac{1}{2^{2s-1}}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C_{2s}^{2l+1}\tfrac{-i\nabla(i\partial_t)^{2s-2l-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1-l}}\overbrace{\delta_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l-1}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots}^{2l+1}\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$=\tfrac{1}{2^{2s-1}}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C_{2s}^{2l+1}\tfrac{-i\nabla(i\partial_t)^{2s-2l-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1-l}}\overbrace{\delta_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s}\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$=\tfrac{1}{2^{2s-1}}\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C_{2s}^{2l+1}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\tfrac{-i\nabla(i\partial_t)^{2s-2l-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1-l}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$=\tfrac{1}{2^{2s-1}}\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C_{2s}^{2l+1}\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\tfrac{-i\nabla(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

$$=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\tfrac{-i\nabla(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

□

定理6.3.2.

$$P(n)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2n}}(\vec{r},t)\tfrac{(-i\nabla)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^n}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{r},t)d^3\vec{r},P(n+\tfrac{1}{2})=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2n+1}}(\vec{r},t)\tfrac{-i\nabla}{(m^2-\nabla^2)^n}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$$

6.4 Bargmann-Wigner方程能量动量算符的小结

定理6.4.1. $P_u(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\tfrac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

6.5 Bargmann-Wigner方程的各种物理算符

定理6.5.1.

$$P_u(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\sum_h p_u[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$$

证明： $P_u(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$$=\int\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}'=-\infty}^{+\infty}\sum_{h'}E'^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E'}}^{2s}[a^+(\vec{p}',h')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+b(\vec{p}',h')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^3\vec{p}'$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_h E^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}\frac{p_uE^{2s-1}}{(E^2)^{2s-1}}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+(-1)^{2s}b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{h,h'}(\frac{E'}{E})^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{E'E}}^{2s}[a^+(\vec{p}',h')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+b(\vec{p}',h')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]$$

$$p_u[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+(-1)^{2s}b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}$$

$$=\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}\sum_{h,h'}(\frac{m}{E})^{2s}p_u$$

$$\{\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')[a^+(\vec{p},h')a(\vec{p},h)U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)+(-1)^{2s}b(\vec{p},h')b^+(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)]$$

$$+\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')[(-1)^{2s}e^{2iEt}a^+(-\vec{p},h')b^+(\vec{p},h)U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},h')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)$$

$$+e^{-2iEt}b(\vec{p},h')a(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},h')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)]\}$$

$$=\int\sum_h p_u[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$$ □

定理6.5.2.

$$Q(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\sum_h[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s-1}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$$

证明： $Q(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$$=\int\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}'=-\infty}^{+\infty}\sum_{h'}E'^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E'}}^{2s}[a^+(\vec{p}',h')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+b(\vec{p}',h')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^3\vec{p}'$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_h E^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}\frac{E^{2s-1}}{(E^2)^{2s-1}}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+(-1)^{2s-1}b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{h,h'}(\frac{E'}{E})^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{E'E}}^{2s}[a^+(\vec{p}',h')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+b(\vec{p}',h')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]$$

$$[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+(-1)^{2s-1}b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}$$

$$=\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}\sum_{h,h'}(\frac{m}{E})^{2s}$$

$$\{\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')[a^+(\vec{p},h')a(\vec{p},h)U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)+(-1)^{2s-1}b(\vec{p},h')b^+(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)]$$

$$+\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')[(-1)^{2s-1}e^{2iEt}a^+(-\vec{p},h')b^+(\vec{p},h)U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},h')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)$$

$$+e^{-2iEt}b(\vec{p},h')a(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},h')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)]\}$$

$$= \int \sum_h [a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h) + (-1)^{2s-1}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p} \qquad \square$$

定理6.5.3.

$$N(s) = \int \psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{m^2-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int \sum_h [a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h) + (-1)^{2s}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$$

证明： $N(s) = \int \psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{m^2-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$$= \int \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}'=-\infty}^{+\infty}\sum_{h'} E'^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E'}}^{2s}[a^+(\vec{p}',h')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)} + b(\vec{p}',h')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^3\vec{p}'$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_h E^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}\frac{E^{2s}}{E^{4s-1}}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x} + (-1)^{2s}b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{h,h'}(\frac{E'}{E})^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{E'E}}^{2s}[a^+(\vec{p}',h')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)} + b(\vec{p}',h')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]$$

$$[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x} + (-1)^{2s}b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}$$

$$= \int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}\sum_{h,h'}(\frac{m}{E})^{2s}$$

$$\{\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')[a^+(\vec{p},h')a(\vec{p},h)U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h) + (-1)^{2s}b(\vec{p},h')b^+(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)]$$

$$+ \delta^3(\vec{p}+\vec{p}')[(-1)^{2s}e^{2iEt}a^+(-\vec{p},h')b^+(\vec{p},h)U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},h')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)$$

$$+ e^{-2iEt}b(\vec{p},h')a(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},h')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)]\}$$

$$= \int \sum_h [a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h) + (-1)^{2s}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p} \qquad \square$$

定理6.5.4.

$$\vec{S}(s) = \int \psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int \sum_h \hat{p}[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h) + (-1)^{2s}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$$

证明： $\vec{S}(s) = \int \psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$$= \int \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}'=-\infty}^{+\infty}\sum_{h'} E'^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E'}}^{2s}[a^+(\vec{p}',h')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)} + b(\vec{p}',h')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^3\vec{p}'$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_h E^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}\frac{\hat{p}E^{2s-1}}{(E^2)^{2s-1}}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x} + (-1)^{2s}b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{h,h'}(\frac{E'}{E})^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{E'E}}^{2s}\hat{p}[a^+(\vec{p}',h')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)} + b(\vec{p}',h')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]$$

$$[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x} + (-1)^{2s}b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}$$

$$= \int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}\sum_{h,h'}(\frac{m}{E})^{2s}\hat{p}$$

$$\{\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')[a^+(\vec{p},h')a(\vec{p},h)U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h) + (-1)^{2s}b(\vec{p},h')b^+(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)]$$

$$+ \delta^3(\vec{p}+\vec{p}')[(-1)^{2s}e^{2iEt}a^+(-\vec{p},h')b^+(\vec{p},h)U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},h')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)$$

$$+ e^{-2iEt}b(\vec{p},h')a(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},h')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)]\}$$

$= \int \sum_h \hat{p}[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h) + (-1)^{2s} b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$ □

定理6.5.5.

$$\vec{M}(s) = \int \psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{m^2-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int \sum_h \hat{p}[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h) + (-1)^{2s-1} b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$$

证明: $\vec{M}(s) = \int \psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{m^2-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$$= \int \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}'=-\infty}^{+\infty}\sum_{h'} E'^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E'}}^{2s}[a^+(\vec{p}',h')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)} + b(\vec{p}',h')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^3\vec{p}'$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_h E^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}\frac{\hat{p}E^{2s}}{E^{4s-1}}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x} + (-1)^{2s-1}b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}d^3\vec{r}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{h,h'}(\frac{E'}{E})^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{E'E}}^{2s}\hat{p}[a^+(\vec{p}',h')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)} + b(\vec{p}',h')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]$$

$$[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x} + (-1)^{2s-1}b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}$$

$$= \int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}\sum_{h,h'}(\frac{m}{E})^{2s}\hat{p}$$

$$\{\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')[a^+(\vec{p},h')a(\vec{p},h)U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h) + (-1)^{2s-1}b(\vec{p},h')b^+(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)]$$

$$+ \delta^3(\vec{p}+\vec{p}')[(-1)^{2s-1}e^{2iEt}a^+(-\vec{p},h')b^+(\vec{p},h)U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},h')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)$$

$$+ e^{-2iEt}b(\vec{p},h')a(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},h')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)]\}$$

$= \int \sum_h \hat{p}[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h) + (-1)^{2s-1} b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}$ □

6.6 Bargmann-Wigner方程的量子方程

定理6.6.1.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a + m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t) = 0\\ P_u(s) = \int \psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}\end{cases} \Rightarrow -i\partial_u\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{r},t) = [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{r},t), P_u]$$

证明: $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t), P_u(s)]$

$$= [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t), \int \psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r}',t)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)d^3\vec{r}']$$

$$= \int[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t), \psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r}',t)]_{-2s+1}\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)d^3\vec{r}'$$

$$= \int\frac{1}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}[C_{2s}^{2l+1}\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l-1}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots_{\})}}^{2l+1}]$$

$$(m^2-\nabla^2)^l\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-l}}\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r}',t)d^3\vec{r}'$$

$$= \frac{1}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}[C_{2s}^{2l+1}\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l-1}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots_{\})}}^{2l+1}]\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-l-1}}\psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)$$

$$= \frac{1}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C_{2s}^{2l+1}(i\partial_t)^{2s-2l-1}\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-l-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)$$

$$= \frac{1}{2^{2s-1}} \sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]} C_{2s}^{2l+1} \frac{-i\partial_u (i\partial_t)^{4s-2}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}} \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2s}}(\vec{r},t)$$

$$= -i\partial_u \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2s}}(\vec{r},t)$$ □

6.7 Bargmann-Wigner方程玻色子能量动量算符

定理6.7.1.

$$P_u(n) = \int \psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}^{2n}}(\vec{r},t) \frac{-i\partial_u (i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^n} \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r},t) d^3\vec{r}, P_u(n+\tfrac{1}{2}) = \int \psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}^{2n+1}}(\vec{r},t) \frac{-i\partial_u}{(m^2-\nabla^2)^n} \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2n+1}}(\vec{r},t) d^3\vec{r}$$

定理6.7.2.

$$\begin{cases} P_u(n) = \int \psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}^{2n}}(\vec{r},t) \frac{[-i\nabla, i\gamma^4(\vec{\gamma}\cdot\nabla+m)]\gamma^4(\vec{\gamma}\cdot\nabla+m)}{(m^2-\nabla^2)^n} {}_{\lambda_\varsigma}{}^{\eta_\varsigma} \psi_{\underbrace{\eta_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r},t) d^3\vec{r} \\ = \int \psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}^{2n}}(\vec{r},t) \frac{[-i\nabla\gamma^4(\vec{\gamma}\cdot\nabla+m), i(m^2-\nabla^2)]}{(m^2-\nabla^2)^n} {}_{\lambda_\varsigma}{}^{\eta_\varsigma} \psi_{\underbrace{\eta_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r},t) d^3\vec{r} \\ P_u(n+\tfrac{1}{2}) = \int \psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}^{2n+1}}(\vec{r},t) \frac{[-i\nabla, i\gamma^4(\vec{\gamma}\cdot\nabla+m)]}{(m^2-\nabla^2)^n} {}_{\lambda_\varsigma}{}^{\eta_\varsigma} \psi_{\underbrace{\eta_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2n+1}}(\vec{r},t) d^3\vec{r} \end{cases}$$

6.8 Bargmann-Wigner方程的玻色子量子方程

定理6.8.1. $(\gamma^a \partial_a + m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma} \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots \tau_\varsigma}_{2n}}(\vec{r},t) = 0 \Rightarrow -i\partial_u \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r},t) = [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r},t), P_u(n)]$

证明: $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r},t), H]$

$$= [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r},t), \int \psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma \mu'_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r}',t) \frac{1}{(m^2-\nabla'^2)^{n-1}} \psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma \mu'_\varsigma \cdots}^{2n}}(\vec{r}',t) d^3\vec{r}']$$

$$= \int [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r},t), \psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma \mu'_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r}',t) \frac{1}{(m^2-\nabla'^2)^{n-1}} \psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma \mu'_\varsigma \cdots}^{2n}}(\vec{r}',t)] d^3\vec{r}'$$

$$= \int [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r},t), \psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma \mu'_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r}',t)] \frac{1}{(m^2-\nabla'^2)^{n-1}} \psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma \mu'_\varsigma \cdots}^{2n}}(\vec{r}',t) d^3\vec{r}'$$

$$= \int \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{1}{[(2n)!]^2} \sum_{l=0}^{[n-\frac{1}{2}]} [C_{2n}^{2l+1} \overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2n-2l-1} \overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots\})}^{2l+1}]$$

$$(m^2-\nabla^2)^l \delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \frac{1}{(m^2-\nabla'^2)^{n-1}} \psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma \mu'_\varsigma \cdots}^{2n}}(\vec{r}',t) d^3\vec{r}'$$

$$= \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{1}{[(2n)!]^2} \sum_{l=0}^{[n-\frac{1}{2}]} [C_{2n}^{2l+1} \overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2n-2l-1} \overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots\})}^{2l+1}] \frac{1}{(m^2-\nabla^2)^{n-l-1}} \psi^{\overbrace{\lambda'_\varsigma \mu'_\varsigma \cdots}^{2n}}(\vec{r},t)$$

$$= i\partial_t \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r},t)$$ □

证明: $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r},t), P]$

$$= [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r},t), \int \psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma \mu'_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r}',t) \frac{-i\nabla'\gamma^4(\vec{\gamma}\cdot\nabla'+m)}{(m^2-\nabla'^2)^n} {}_{\lambda'_\varsigma}{}_{\eta'_\varsigma} \psi^{\overbrace{\eta'_\varsigma \mu'_\varsigma \cdots}^{2n}}(\vec{r}',t) d^3\vec{r}']$$

$$= \int [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r},t), \psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma \mu'_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r}',t) \frac{-i\nabla'\gamma^4(\vec{\gamma}\cdot\nabla'+m)}{(m^2-\nabla'^2)^n} {}_{\lambda'_\varsigma}{}_{\eta'_\varsigma} \psi^{\overbrace{\eta'_\varsigma \mu'_\varsigma \cdots}^{2n}}(\vec{r}',t)] d^3\vec{r}'$$

$$= \int [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r},t), \psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma \mu'_\varsigma \cdots}_{2n}}(\vec{r}',t)] \frac{-i\nabla'\gamma^4(\vec{\gamma}\cdot\nabla'+m)}{(m^2-\nabla'^2)^n} {}_{\lambda'_\varsigma}{}_{\eta'_\varsigma} \psi^{\overbrace{\eta'_\varsigma \mu'_\varsigma \cdots}^{2n}}(\vec{r}',t) d^3\vec{r}'$$

$$= \int \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{1}{[(2n)!]^2} \sum_{l=0}^{[n-\frac{1}{2}]} [C_{2n}^{2l+1} \overbrace{(m\gamma^4 + \gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4 + \gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2n-2l-1} \overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots\})}^{2l+1}]$$

$$(m^2 - \nabla^2)^l \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \frac{-i\nabla'\gamma^4(\vec{\gamma}\cdot\nabla' + m)}{(m^2 - \nabla'^2)^n} \lambda'_\varsigma{}_{\eta'_\varsigma} \psi^{\overbrace{\eta'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2n}}(\vec{r}', t) d^3\vec{r}'$$

$$= \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{1}{[(2n)!]^2}$$

$$\sum_{l=0}^{[n-\frac{1}{2}]} [C_{2n}^{2l+1} \overbrace{(m\gamma^4 + \gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4 + \gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2n-2l-1} \overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots\})}^{2l+1}] \frac{-i\nabla\gamma^4(\vec{\gamma}\cdot\nabla + m)}{(m^2 - \nabla^2)^{n-l}} \lambda'_\varsigma{}_{\eta'_\varsigma} \psi^{\overbrace{\eta'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2n}}(\vec{r}, t)$$

$$= -i\nabla\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{r}, t) \qquad \square$$

第二十八章　有质量复粒子的势协变量子化方案

自我评述：本章换成势的角度描述有质量复粒子，复粒子正反粒子不同，数学本质上是复函数，区别于马约拉纳粒子；马约拉纳粒子，正反粒子相同，数学本质上是实函数，后面章节会详细讨论。有质量粒子方案采用与无质量粒子方案相反的步骤，先证明一般自旋粒子情形，再分别研究自旋-$\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2$ 的特殊情形。这样做的理由：一是协变量子化新方案经过之前的研究，总体上已经比较明确。二是先证明一般情形，后面的特殊情形就不需再做证明，省去很多麻烦与篇幅，内容更紧凑，也可以更专注于物理。在本章按统一的方式对所有有质量自旋复粒子建立了相应势的量子场论。与无质量粒子一样，也无需知道哈密顿量，就可以按统一的新程式对各种有质量自旋粒子进行了量子化，给出了统一的量子化势对易规则和能量动量算符形式，给出了部分量子彭加莱代数。与无质量粒子一样，角动量算符也只取得部分成功，没有彻底解决，仍需努力。

1 Klein-Gordon方程的对易规则

1.1 有质量自旋-n的Bargmann-Wigner方程等价于Klein-Gordon方程 [18,20,23]

定义1.1.1. $\mathbb{X}_a=[im\gamma_a(\varsigma)-2S_{ab}(e,\varsigma)\partial^b]C,\mathbb{X}_a(p)=i[m\gamma_a(\varsigma)-2S_{ab}(e,\varsigma)p^b]C$

定理1.1.1.
$$\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x)=0\\ \psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x)\text{全对称}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^c\partial_c+m^2)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=0\\ \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=0,\partial^aA_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=0,A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)\text{全对称}\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x)=\frac{1}{2^n}\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)\end{cases}$$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}E^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2n}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

$$A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}[a(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

自我评述：把各自的平面波解代入以上两个等价的方程，并利用傅立叶分量相等性便可容易得到以下两个推论。这好比上面的方程是宏观结构，而下面的方程是微观结构，是数学原子。

推论1.1.1.
$$\begin{cases}(i\gamma^ap_a+m)U_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)=0\\ U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)\text{全对称},\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\\ =\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(p^cp_c+m^2)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0\\ p^a\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\text{全对称}\\ U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)\\ =\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^n}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdot\cdot}_{n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

推论1.1.2.
$$\begin{cases}(-i\gamma^ap_a+m)V_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)=0\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)\text{全对称},\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\\ =\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(p^cp_c+m^2)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\delta^{ab}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0\\ p^a\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\text{全对称}\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)\\ =\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^n}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(-p)\cdot\cdot}_{n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

1.2 Bargmann-Wigner方程玻色自旋基分解为自旋-1基

证明:

$$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(2n)!(2n)!(0)!}}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{2n}\underbrace{\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{0}$$
$$=\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})}_{2n}$$
$$=\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},1)\cdot\cdot U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},1)}_{n}=\frac{1}{\sqrt{(n!n!0!}}(\frac{1}{2\sqrt{2}m})^n\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\cdot\cdot\mathbb{X}^d_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(p)}_{n}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_{d\}}(\vec{p},1)}_{n}$$
$$=\frac{1}{n!\sqrt{C^0_{2n}}}(\frac{1}{2\sqrt{2}m})^n\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\cdot\cdot\mathbb{X}^d_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(p)}_{n}\sqrt{2^0}C^0_nC^0_{n-0}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_{d\}}(\vec{p},1)}_{n}\qquad\square$$

证明:

$$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-1)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(2n)!(2n-1)!(1)!}}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{2n-1}\underbrace{\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(2n)!(2n-1)!(1)!}}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{2n}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{C^1_{2n}}}\{[\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{2n}+\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})}_{2n}]$$
$$+\cdot\cdot$$
$$+[\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})}_{2n}+\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})}_{2n}]\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{C^1_n}}[\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},1)U_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{p},1)\cdot\cdot U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},0)}_{n}+\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},1)U_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{p},0)\cdot\cdot U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},1)}_{n}$$
$$+\cdot\cdot+\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0)U_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{p},1)\cdot\cdot U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},1)}_{n}]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n!(n-1)!1!}}(\frac{1}{2\sqrt{2}m})^n\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdot\cdot\mathbb{X}^d_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(p)}_{n}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_c(\vec{p},1)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},0)}_{n}$$
$$=\frac{1}{n!\sqrt{C^1_{2n}}}(\frac{1}{2\sqrt{2}m})^n\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdot\cdot\mathbb{X}^d_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(p)}_{n}\sqrt{2^1}C^1_nC^0_{n-1}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_c(\vec{p},1)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},0)}_{n}\qquad\square$$

证明:

$$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-2)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(2n)!(2n-2)!(2)!}}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{2n-2}\underbrace{\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(2n)!(2n-2)!(2)!}}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{2n}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{C^2_{2n}}}C^{(\vec{p},-\frac{1}{2}),(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2n}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{C^2_{2n}}}[C^{(\vec{p},-\frac{1}{2})(\vec{p},-\frac{1}{2})_{1,3,5,\cdot\cdot}}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2n}}+C^{(\vec{p},-\frac{1}{2}),(\vec{p},-\frac{1}{2})|_{rest}}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2n}}]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{C^2_{2n}}}[\sqrt{2^0}C^{(\vec{p},-1)}_{\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},1)\cdot\cdot U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},1)}_{n}}+\sqrt{2^2}C^{(\vec{p},0),(\vec{p},0)}_{\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},1)\cdot\cdot U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},1)}_{n}}]$$
$$=\frac{1}{n!\sqrt{C^2_{2n}}}(\frac{1}{2\sqrt{2}m})^n\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdot\cdot\mathbb{X}^d_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(p)}_{n}$$
$$[\sqrt{2^0}C^0_nC^1_{n-0}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_c(\vec{p},1)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},-1)}_{n}+\sqrt{2^2}C^2_nC^0_{n-2}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_c(\vec{p},0)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},0)}_{n}]\qquad\square$$

证明:

$$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-3)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(2n)!(2n-3)!(3)!}}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{2n-3}\underbrace{\cdot\, u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{3}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(2n)!(2n-3)!(3)!}}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\xi_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{2n}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^3}}C^{(\vec{p},-\frac{1}{2}),(\vec{p},-\frac{1}{2}),(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2n}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^3}}[C^{(\vec{p},-\frac{1}{2})(\vec{p},-\frac{1}{2})_{1,3,5,\cdot\cdot},(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2n}}+C^{(\vec{p},-\frac{1}{2}),(\vec{p},-\frac{1}{2}),(\vec{p},-\frac{1}{2})|_{rest}}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2n}}]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^3}}[\sqrt{2}P^{(\vec{p},-1),(\vec{p},0)}_{\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},1)\cdot\cdot U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},1)}_{n}}+\sqrt{2^3}C^{(\vec{p},0),(\vec{p},0),(\vec{p},0)}_{\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},1)\cdot\cdot U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},1)}_{n}}]$$
$$=\frac{1}{n!\sqrt{C_{2n}^3}}(\frac{1}{2\sqrt{2}m})^n\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdot\cdot\mathbb{X}^d_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(p)}_{n}$$
$$[\sqrt{2^1}C_n^1C_{n-1}^1\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_c(\vec{p},0)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},-1)}_{n}+\sqrt{2^3}C_n^3C_{n-3}^0\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot\varepsilon_c(\vec{p},0)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},0)}_{n}]\qquad\square$$

一般情形:

定理1.2.1.

$$\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-2k)=\frac{1}{n!\sqrt{C_{2n}^{2k}}}(\frac{1}{2\sqrt{2}m})^n\sum_{l=0}^{k|(n-k)}\sqrt{2^{2l}}C_n^{2l}C_{n-2l}^{k-l}\underbrace{\mathbb{X}^{a_1}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^{a_2}_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdot\cdot\mathbb{X}^{a_n}_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(p)}_{n}\\ \varepsilon_{\{a_1}(\vec{p},-1)\cdot\cdot\varepsilon_{a_{k-l}}(\vec{p},-1)|\varepsilon_{a_{k-l+1}}(\vec{p},0)\cdot\cdot\varepsilon_{a_k}(\vec{p},0)|\varepsilon_{a_{k+1}}(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_{a_n\}}(\vec{p},1)\\ U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-2k-1)=\frac{1}{n!\sqrt{C_{2n}^{2k+1}}}(\frac{1}{2\sqrt{2}m})^n\sum_{l=0}^{k|(n-1-k)}\sqrt{2^{2l+1}}C_n^{2l+1}C_{n-2l-1}^{k-l}\underbrace{\mathbb{X}^{a_1}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^{a_2}_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdot\cdot\mathbb{X}^{a_n}_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(p)}_{n}\\ \varepsilon_{\{a_1}(\vec{p},-1)\cdot\cdot\varepsilon_{a_{k-l}}(\vec{p},-1)|\varepsilon_{a_{k-l+1}}(\vec{p},0)\cdot\cdot\varepsilon_{a_k}(\vec{p},0)|\varepsilon_{a_{k+1}}(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_{a_n\}}(\vec{p},1)\end{cases}$$

证明:

$$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-2k)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(2n)!(2n-2k)!(2k)!}}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{2n-2k}\underbrace{\cdot\, u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{2k}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k}}}C^{\overbrace{(\vec{p},-\frac{1}{2}),\cdot\cdot,(\vec{p},-\frac{1}{2})}^{2k}}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2n}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k}}}\sum_{l=0}^{k|(n-k)}C^{\overbrace{(\vec{p},-\frac{1}{2}),\cdot\cdot,(\vec{p},-\frac{1}{2})}^{2k-2l}|^{D}_{1,3,\cdot\cdot}\overbrace{(\vec{p},-\frac{1}{2}),\cdot\cdot,(\vec{p},-\frac{1}{2})}^{2l}|^{S}_{1,3,\cdot\cdot}}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2n}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k}}}\sum_{l=0}^{k|(n-k)}\sqrt{2^{2l}}C^{\overbrace{(\vec{p},-1),\cdot\cdot,(\vec{p},-1)}^{k-l}|^{D}_{1,3,\cdot\cdot}\overbrace{(\vec{p},0),\cdot\cdot,(\vec{p},0)}^{2l}|^{S}_{1,3,\cdot\cdot}}_{\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},1)\cdot\cdot U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},1)}_{n}}$$
$$=\frac{1}{n!\sqrt{C_{2n}^{2k}}}(\frac{1}{2\sqrt{2}m})^n\sum_{l=0}^{k|(n-k)}\sqrt{2^{2l}}C_n^{2l}C_{n-2l}^{k-l}\underbrace{\mathbb{X}^{a_1}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^{a_2}_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdot\cdot\mathbb{X}^{a_n}_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(p)}_{n}$$
$$\varepsilon_{\{a_1}(\vec{p},-1)\cdot\cdot\varepsilon_{a_{k-l}}(\vec{p},-1)|\varepsilon_{a_{k-l+1}}(\vec{p},0)\cdot\cdot\varepsilon_{a_k}(\vec{p},0)|\varepsilon_{a_{k+1}}(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_{a_n\}}(\vec{p},1)\qquad\square$$

证明:

$$\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}}_{2n}(\vec{p},n-2k-1)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(2n)!(2n-2k-1)!(2k+1)!}}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{2n-2k-1}\underbrace{\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{2k+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k+1}}}C^{\overbrace{(\vec{p},-\frac{1}{2}),\cdot\cdot,(\vec{p},-\frac{1}{2})}^{2k+1}}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2n}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k+1}}}\sum_{l=0}^{k|(n-1-k)}C^{\overbrace{(\vec{p},-\frac{1}{2}),\cdot\cdot,(\vec{p},-\frac{1}{2})}^{2k-2l}|^{D}_{1,3,\cdot\cdot}\overbrace{(\vec{p},-\frac{1}{2}),\cdot\cdot,(\vec{p},-\frac{1}{2})}^{2l+1}|^{S}_{1,3,\cdot\cdot}}_{\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2n}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k+1}}}\sum_{l=0}^{k|(n-1-k)}\sqrt{2^{2l+1}}C^{\overbrace{(\vec{p},-1),\cdot\cdot,(\vec{p},-1)}^{k-l}|^{D}_{1,3,\cdot\cdot}\overbrace{(\vec{p},0),\cdot\cdot,(\vec{p},0)}^{2l+1}|^{S}_{1,3,\cdot\cdot}}_{\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},1)\cdot\cdot U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},1)}_{n}}$$
$$=\frac{1}{n!\sqrt{C_{2n}^{2k+1}}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}m}\right)^n\sum_{l=0}^{k|(n-1-k)}\sqrt{2^{2l+1}}C_n^{2l+1}C_{n-2l-1}^{k-l}\underbrace{\mathbb{X}^{a_1}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^{a_2}_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdot\cdot\mathbb{X}^{a_n}_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(p)}_{n}$$
$$\varepsilon_{\{a_1}(\vec{p},-1)\cdot\cdot\varepsilon_{a_{k-l}}(\vec{p},-1)|\varepsilon_{a_{k-l+1}}(\vec{p},0)\cdot\cdot\varepsilon_{a_k}(\vec{p},0)|\varepsilon_{a_{k+1}}(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_{a_n\}}(\vec{p},1)$$ □

1.3 Klein-Gordon方程自旋基的分解

定理1.3.1. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc\cdot\cdot d}_{n}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=n'}^{-n'}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{n'+h'}C_{n-h}^{n'-h'}}}{\sqrt{C_{2n}^{2n'}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-n'}}(\vec{p},h-h')\varepsilon_{\underbrace{c\cdot\cdot d}_{n'}}(\vec{p},h')$

证明: $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=n'}^{-n'}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{n'+h'}C_{n-h}^{n'-h'}}}{\sqrt{C_{2n}^{2n'}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(n-n')}}(\vec{p},h-h')U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2n'}}(\vec{p},h')$

$$\Rightarrow\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot(\bar{C}\gamma_b)^{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\bar{C}\gamma_c)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot(\bar{C}\gamma_d)^{\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},h)$$
$$=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot(\bar{C}\gamma_b)^{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\bar{C}\gamma_c)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot(\bar{C}\gamma_d)^{\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}}^{n}\sum_{h'=n'}^{-n'}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{n'+h'}C_{n-h}^{n'-h'}}}{\sqrt{C_{2n}^{2n'}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(n-n')}}(\vec{p},h-h')U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2n'}}(\vec{p},h')$$
$$\Leftrightarrow\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc\cdot\cdot d}_{n}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=n'}^{-n'}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{n'+h'}C_{n-h}^{n'-h'}}}{\sqrt{C_{2n}^{2n'}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-n'}}(\vec{p},h-h')\varepsilon_{\underbrace{c\cdot\cdot d}_{n'}}(\vec{p},h')$$ □

推论1.3.1.
$$\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_c(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_c(\vec{p},-1)$$

定理1.3.2.
$$\varepsilon_{a_1\cdot\cdot a_n}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{(2!)^n}}{\sqrt{(2n)!}}\sum_{h_2=1}^{-1}\cdot\cdot\sum_{h_n=1}^{-1}\frac{\sqrt{(n+h)!}}{\sqrt{(1+h_1)!\cdot\cdot(1+h_n)!}}\frac{\sqrt{(n-h)!}}{\sqrt{(1-h_1)!\cdot\cdot(1-h_n)!}}\varepsilon_{a_1}(\vec{p},h_1)\cdot\cdot\varepsilon_{a_n}(\vec{p},h_n);h_1:=h-\sum_{i=2}^{n}h_i$$

证明: $\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}(\vec{p},h)=\sum_{h_n=1}^{-1}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1+h_n}C_{n-h}^{1-h_n}}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_{n-1}}(\vec{p},h-h_n)\varepsilon_{a_n}(\vec{p},h_n)$

$$=\sum_{h_n=1}^{-1}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1+h_n}C_{n-h}^{1-h_n}}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\sum_{h_{n-1}=1}^{-1}\frac{\sqrt{C_{(n-1)+(h-h_n)}^{1+h_{n-1}}C_{(n-1)-(h-h_n)}^{1-h_{n-1}}}}{\sqrt{C_{2(n-1)}^2}}\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_{n-2}}(\vec{p},h-h_n-h_{n-1})\varepsilon_{a_{n-1}}(\vec{p},h_{n-1})\varepsilon_{a_n}(\vec{p},h_n)$$
$$=\frac{\sqrt{2!2!(2n-4)!}}{\sqrt{(2n)!}}\sum_{h_n=1}^{-1}\sum_{h_{n-1}=1}^{-1}\frac{\sqrt{(n+h)!}}{\sqrt{(1+h_n)!(1+h_{n-1})![(n+h)-(1+h_n)-(1+h_{n-1})]!}}\frac{\sqrt{(n-h)!}}{\sqrt{(1-h_n)!(1-h_{n-1})![(n-h)-(1-h_n)-(1-h_{n-1})]!}}$$
$$\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_{n-2}}(\vec{p},h-h_n-h_{n-1})\varepsilon_{a_{n-1}}(\vec{p},h_{n-1})\varepsilon_{a_n}(\vec{p},h_n)$$
$$=\frac{\sqrt{(2!)^n}}{\sqrt{(2n)!}}\sum_{h_n=1}^{-1}\sum_{h_{n-1}=1}^{-1}\cdot\cdot\sum_{h_2=1}^{-1}\varepsilon_{a_1}(\vec{p},h-h_n-h_{n-1}\cdot\cdot-h_2)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},h_2)\cdot\cdot\varepsilon_{a_{n-1}}(\vec{p},h_{n-1})\varepsilon_{a_n}(\vec{p},h_n)$$
$$\frac{\sqrt{(n+h)!}}{\sqrt{(1+h_n)!(1+h_{n-1})!\cdot\cdot(1+h_2)![(n+h)-(1+h_n)-(1+h_{n-1})\cdot\cdot-(1+h_2)]!}}\frac{\sqrt{(n-h)!}}{\sqrt{(1-h_n)!(1-h_{n-1})!\cdot\cdot(1-h_2)![(n-h)-(1-h_n)-(1-h_{n-1})\cdot\cdot-(1-h_2)]!}}$$

$$=\frac{\sqrt{(2!)^n}}{\sqrt{(2n)!}}\sum_{h_2=1}^{-1}\cdot\cdot\sum_{h_{n-1}=1}^{-1}\sum_{h_n=1}^{-1}\varepsilon_{a_1}(\vec{p},h_1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},h_2)\cdot\cdot\varepsilon_{a_{n-1}}(\vec{p},h_{n-1})\varepsilon_{a_n}(\vec{p},h_n)$$
$$\frac{\sqrt{(n+h)!}}{\sqrt{(1+h_1)!(1+h_2)!\cdot\cdot(1+h_{n-1})!(1+h_n)!}}\frac{\sqrt{(n-h)!}}{\sqrt{(1-h_1)!(1-h_2)!\cdot\cdot(1-h_{n-1})!(1-h_n)!}};h_1:=h-\sum_{i=2}^{n}h_i$$
$$=\frac{\sqrt{(2!)^n}}{\sqrt{(2n)!}}\sum_{h_2=1}^{-1}\cdot\cdot\sum_{h_n=1}^{-1}\frac{\sqrt{(n+h)!}}{\sqrt{(1+h_1)!\cdot\cdot(1+h_n)!}}\frac{\sqrt{(n-h)!}}{\sqrt{(1-h_1)!\cdot\cdot(1-h_n)!}}\varepsilon_{a_1}(\vec{p},h_1)\cdot\cdot\varepsilon_{a_n}(\vec{p},h_n);h_1:=h-\sum_{i=2}^{n}h_i \quad\square$$

推论1.3.2. $\varepsilon_{a_1\cdot\cdot a_n}(\vec{p},h);h_1:=h-\sum_{i=2}^{n}h_i$

$$=\frac{\sqrt{(2!)^n}}{\sqrt{(2n)!}}\sum_{h_2=1}^{-1}\cdot\cdot\sum_{h_n=1}^{-1}\frac{\sqrt{(n+h)!}}{\sqrt{(1+h_1)!\cdot\cdot(1+h_n)!}}\frac{\sqrt{(n-h)!}}{\sqrt{(1-h_1)!\cdot\cdot(1-h_n)!}}\varepsilon_{a_1}(\vec{p},h_1)\cdot\cdot\varepsilon_{a_n}(\vec{p},h_n)[\delta(h_1-1)+\delta(h_1)+\delta(h_1+1)]$$
$$=\frac{\sqrt{(2!)^n}}{\sqrt{(2n)!}}\sum_{h_1=1}^{-1}\sum_{h_2=1}^{-1}\cdot\cdot\sum_{h_n=1}^{-1}\frac{\sqrt{(n+h)!}}{\sqrt{(1+h_1)!\cdot\cdot(1+h_n)!}}\frac{\sqrt{(n-h)!}}{\sqrt{(1-h_1)!\cdot\cdot(1-h_n)!}}\varepsilon_{a_1}(\vec{p},h_1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},h_2)\cdot\cdot\varepsilon_{a_n}(\vec{p},h_n)\delta(h-\sum_{i=1}^{n}h_i)$$

1.4 数学归纳法严格证明Klein-Gordon方程自旋基的完整分解

定理1.4.1.

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-2k)=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-k)}\frac{2^i}{(n-k-i)!(2i)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-i}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}\\ \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-2k-1)=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k+1}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-1-k)}\frac{2^i\sqrt{2}}{(n-k-i-1)!(2i+1)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-i-1}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i+1}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}\end{cases}$$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$n'=1$时成立：

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c\cdot\cdot}_{1}}(\vec{p},1-2k)=\frac{1}{\sqrt{C_{2}^{2k}}}\sum_{i=0}^{\min(k,1-k)}\frac{2^i}{(1-k-i)!(2i)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{1-k-i}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}\\ \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c\cdot\cdot}_{1}}(\vec{p},1-2k-1)=\frac{1}{\sqrt{C_{2}^{2k+1}}}\sum_{i=0}^{\min(k,1-1-k)}\frac{2^i\sqrt{2}}{(1-k-i-1)!(2i+1)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{1-k-i-1}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i+1}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}\end{cases}$$

第二步：假设$n'=n-1$时成立：

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},(n-1)-2k)=\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-1-k)}\frac{2^i}{(n-1-k-i)!(2i)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-1-k-i}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}\\ \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},(n-1)-2k-1)=\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k+1}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-1-1-k)}\frac{2^i\sqrt{2}}{(n-1-k-i-1)!(2i+1)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-1-k-i-1}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i+1}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}\end{cases}$$

第三步：$n'=n$时，1：

$$n!\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot cd}_{n}}(\vec{p},h)$$
$$=\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{\{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{\{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{\{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},-1)$$
$$\Rightarrow n!\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot cd}_{n}}(\vec{p},n-2k)=\frac{\sqrt{C_{2n-2k}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{\{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n-1}}(\vec{p},(n-1)-2k)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},1)$$
$$+\frac{\sqrt{C_{2n-2k}^1C_{2k}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{\{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n-1}}(\vec{p},(n-1)-2(k-1)-1)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{2k}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{\{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n-1}}(\vec{p},(n-1)-2(k-1))\varepsilon_{d\}}(\vec{p},-1)$$
$$\Leftrightarrow n!\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot cd}_{n}}(\vec{p},n-2k)$$
$$=\frac{\sqrt{C_{2n-2k}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-1-k)}\frac{2^i}{(n-1-k-i)!(2i)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{(a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-1-k-i}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c)}(\vec{p},-1)}_{k-i}\varepsilon_{d\}}(\vec{p},1)$$
$$+\frac{\sqrt{C_{2n-2k}^1C_{2k}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k-1}}}\sum_{i=0}^{\min(k-1,n-1-1-k+1)}\frac{2^i\sqrt{2}}{(n-1-k+1-i-1)!(2i+1)!(k-1-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{(a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-1-k+1-i-1}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i+1}\underbrace{\varepsilon_{c)}(\vec{p},-1)}_{k-1-i}\varepsilon_{d\}}(\vec{p},0)$$
$$+\frac{\sqrt{C_{2k}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k-2}}}\sum_{i=0}^{\min(k-1,n-1-k+1)}\frac{2^i}{(n-1-k+1-i)!(2i)!(k-1-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{(a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-1-k+1-i}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c)}(\vec{p},-1)}_{k-1-i}\varepsilon_{d\}}(\vec{p},-1)$$

$$n\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot cd}_{n}}(\vec{p},n-2k)=\frac{\sqrt{C_{2n-2k}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-1-k)}\frac{2^{i}}{(n-1-k-i)!(2i)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-1-k-i}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c}(\vec{p},-1)}_{k-i}\varepsilon_{d\}}(\vec{p},1)$$

$$+\frac{\sqrt{C_{2n-2k}^{1}C_{2k}^{1}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k-1}}}\sum_{i=0}^{\min(k-1,n-1-k)}\frac{2^{i}\sqrt{2}}{(n-1-k-i)!(2i+1)!(k-1-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-1-k-i}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i+1}\underbrace{\varepsilon_{c}(\vec{p},-1)}_{k-1-i}\varepsilon_{d\}}(\vec{p},0)$$

$$+\frac{\sqrt{C_{2k}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k-2}}}\sum_{i=0}^{\min(k-1,n-k)}\frac{2^{i}}{(n-k-i)!(2i)!(k-1-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-i}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c}(\vec{p},-1)}_{k-1-i}\varepsilon_{d\}}(\vec{p},-1)$$

$$\Leftrightarrow n\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n}}(\vec{p},n-2k)=\frac{\sqrt{C_{2n-2k}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-1-k)}\frac{2^{i}}{(n-1-k-i)!(2i)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-i}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}$$

$$+\frac{\sqrt{C_{2n-2k}^{1}C_{2k}^{1}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k-1}}}\sum_{i=0}^{\min(k-1,n-1-k)}\frac{2^{i}\sqrt{2}}{(n-1-k-i)!(2i+1)!(k-1-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-1-k-i}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i+2}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-1-i}$$

$$+\frac{\sqrt{C_{2k}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k-2}}}\sum_{i=0}^{\min(k-1,n-k)}\frac{2^{i}}{(n-k-i)!(2i)!(k-1-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-i}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}$$

$$\Leftrightarrow n\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n}}(\vec{p},n-2k)=\frac{\sqrt{C_{2n-2k}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-1-k)}\frac{2^{i}}{(n-1-k-i)!(2i)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-i}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}$$

$$+\frac{\sqrt{C_{2n-2k}^{1}C_{2k}^{1}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k-1}}}\sum_{i=1}^{\min(k,n-k)}\frac{2^{i-1}\sqrt{2}}{(n-k-i)!(2i-1)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-i}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}$$

$$+\frac{\sqrt{C_{2k}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k-2}}}\sum_{i=0}^{\min(k-1,n-k)}\frac{2^{i}}{(n-k-i)!(2i)!(k-1-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-i}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}$$

$$=\frac{n}{\sqrt{C_{2n}^{2k}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-k)}\frac{2^{i}}{(n-k-i)!(2i)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-i}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n}}(\vec{p},n-2k)=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-k)}\frac{2^{i}}{(n-k-i)!(2i)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-i}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}$$

同理$n'=n$时，2：

$$n!\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot cd}_{n}}(\vec{p},h)$$

$$=\frac{\sqrt{C_{n+h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{\{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1}C_{n-h}^{1}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{\{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{\{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},-1)$$

$$\Rightarrow n!\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot cd}_{n}}(\vec{p},n-2k-1)$$

$$=\frac{\sqrt{C_{n+n-2k-1}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{\{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n-1}}(\vec{p},(n-1)-2k-1)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+n-2k-1}^{1}C_{n-n+2k+1}^{1}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{\{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n-1}}(\vec{p},(n-1)-2k)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},0)+$$
$$\frac{\sqrt{C_{n-n+2k+1}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{\{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n-1}}(\vec{p},(n-1)-2(k-1)-1)\varepsilon_{d\}}(\vec{p},-1)$$

$$=\frac{\sqrt{C_{n+n-2k-1}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k+1}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-1-1-k)}\frac{2^{i}\sqrt{2}}{(n-1-k-i-1)!(2i+1)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{(a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-1-k-i-1}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i+1}\underbrace{\varepsilon_{c)}(\vec{p},-1)}_{k-i}\varepsilon_{d\}}(\vec{p},1)$$

$$+\frac{\sqrt{C_{n+n-2k-1}^{1}C_{n-n+2k+1}^{1}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-1-k)}\frac{2^{i}}{(n-1-k-i)!(2i)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{(a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-1-k-i}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c)}(\vec{p},-1)}_{k-i}\varepsilon_{d\}}(\vec{p},0)$$

$$+\frac{\sqrt{C_{n-n+2k+1}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k-1}}}\sum_{i=0}^{\min(k-1,n-1-1-k+1)}\frac{2^{i}\sqrt{2}}{(n-1-k+1-i-1)!(2i+1)!(k-1-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{(a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-1-k+1-i-1}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i+1}\underbrace{\varepsilon_{c)}(\vec{p},-1)}_{k-1-i}\varepsilon_{d\}}(\vec{p},-1)$$

$$\Leftrightarrow n\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n}}(\vec{p},n-2k-1)$$

$$=\frac{\sqrt{C_{2n-2k-1}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k+1}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-2-k)}\frac{2^{i}\sqrt{2}}{(n-2-k-i)!(2i+1)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-1-k-i}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i+1}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}$$

$$+\frac{\sqrt{C_{2n-2k-1}^{1}C_{2k+1}^{1}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-1-k)}\frac{2^{i}}{(n-1-k-i)!(2i)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdots}_{n-1-k-i}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdots}_{2i+1}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}$$

$$+\frac{\sqrt{C_{2k+1}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\frac{1}{\sqrt{C_{2n-2}^{2k-1}}}\sum_{i=0}^{\min(k-1,n-1-k)}\frac{2^{i}\sqrt{2}}{(n-1-k-i)!(2i+1)!(k-1-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{(a}(\vec{p},1)\cdots}_{n-1-k-i}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdots}_{2i+1}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}$$

$$=\frac{n}{\sqrt{C_{2n}^{2k+1}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-1-k)}\frac{2^{i}\sqrt{2}}{(n-k-i-1)!(2i+1)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdots}_{n-k-i-1}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdots}_{2i+1}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}$$

$$\Leftrightarrow\varepsilon_{\underbrace{a\cdots b\cdots c\cdots}_{n}}(\vec{p},n-2k-1)=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k+1}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-1-k)}\frac{2^{i}\sqrt{2}}{(n-k-i-1)!(2i+1)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdots}_{n-k-i-1}\underbrace{\varepsilon_{b}(\vec{p},0)\cdots}_{2i+1}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}$$

此步证明了$n'=n$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

以前只是靠直觉、猜测、试探和验证得到了这个定理，时隔两年多(2019-2022)我终于用数学归纳法严格证明了以上定理，看来长久坚持与持续不断的深入思考十分重要，有时候比兴趣更重要。这为完全证明Behrends-Fronsdal投影算子公式奠定了基础。

推论1.4.1.

$$\begin{cases}\varepsilon^{+}_{\underbrace{a\cdots b\cdots c\cdots}_{n}}(\vec{p},n-2k)\underbrace{\eta^{a}_{a'}\cdots\eta^{b}_{b'}\cdots\eta^{c}_{c'}\cdots}_{n}=(-1)^{n-2k}\varepsilon_{\underbrace{a'\cdots b'\cdots c'\cdots}_{n}}(\vec{p},2k-n)\\ \varepsilon^{+}_{\underbrace{a\cdots b\cdots c\cdots}_{n}}(\vec{p},n-2k-1)\underbrace{\eta^{a}_{a'}\cdots\eta^{b}_{b'}\cdots\eta^{c}_{c'}\cdots}_{n}=(-1)^{n-2k-1}\varepsilon_{\underbrace{a'\cdots b'\cdots c'\cdots}_{n}}(\vec{p},2k+1-n)\end{cases}$$

推论1.4.2. $\bar{\varepsilon}_{\underbrace{abc\cdots}_{n}}(\vec{p},h):=\varepsilon^{+}_{\underbrace{abc\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\underbrace{\eta^{a}_{a'}\eta^{b}_{b'}\eta^{c}_{c'}\cdots}_{n}=(-1)^{h}\varepsilon_{\underbrace{a'b'c'\cdots}_{n}}(\vec{p},-h)$

1.5 Klein-Gordon方程准投影算子的递推关系

推论1.5.1.

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots bc}_{n}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}^{c}(\vec{p},1)=\frac{\sqrt{C_{n+h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\\ \varepsilon_{\underbrace{a\cdots bc}_{n}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}^{c}(\vec{p},0)=\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1}C_{n-h}^{1}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots b}_{n-1}}(\vec{p},h)\\ \varepsilon_{\underbrace{a\cdots bc}_{n}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}^{c}(\vec{p},-1)=\frac{\sqrt{C_{n-h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\end{cases}$$

$$[\Rightarrow]\sum_{h=(n-1)}^{-(n-1)}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots b}_{n-1}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdots b'}_{n-1}}(\vec{p},h)=\frac{2(n-1)+1}{2n+1}[\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots bc}_{n}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdots b'c'}_{n}}(\vec{p},h)][\sum_{h'=1}^{-1}\varepsilon^{c'}(\vec{p},h')\bar{\varepsilon}^{c}(\vec{p},h')]$$

推论1.5.2. $\sum_{h=(n-n')}^{-(n-n')}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots b}_{n-n'}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdots b'}_{n-n'}}(\vec{p},h)$

$$=\frac{2(n-n')+1}{2n+1}[\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots bc\cdots d}_{n}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdots b'c'\cdots d'}_{n}}(\vec{p},h)]\overbrace{[\sum_{h'=1}^{-1}\varepsilon^{c'}(\vec{p},h')\bar{\varepsilon}^{c}(\vec{p},h')]\cdots[\sum_{h'=1}^{-1}\varepsilon^{d'}(\vec{p},h')\bar{\varepsilon}^{d}(\vec{p},h')]}^{n'}$$

推论1.5.3.

$$\begin{cases}\sum_{h=(n-n')}^{-(n-n')}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots b}_{n-n'}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdots b'}_{n-n'}}(\vec{p},h)=\frac{2(n-n')+1}{2n+1}[\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots bc\cdots d}_{n}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdots b'c'\cdots d'}_{n}}(\vec{p},h)]\overbrace{\delta^{cc'}\cdots\delta^{dd'}}^{n'}\\ \sum_{h=(n-n')}^{-(n-n')}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots b}_{n-n'}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'\cdots b'}_{n-n'}}(\vec{p},h)=\frac{2(n-n')+1}{2n+1}[\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots bc\cdots d}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'\cdots b'c'\cdots d'}_{n}}(\vec{p},h)]\overbrace{\eta^{cc'}\cdots\eta^{dd'}}^{n'}\end{cases}$$

定理1.5.1.

$$\sum_{h=(n-n')}^{-(n-n')}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-n'}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdot\cdot b'}_{n-n'}}(\vec{p},h)=\frac{2n+1-2n'}{2n+1}[\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc\cdot\cdot d}_{n}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdot\cdot b'c'\cdot\cdot d'}_{n}}(\vec{p},h)][\sum_{h'=n'}^{-n'}\varepsilon^{\overbrace{c'\cdot\cdot d'}^{n'}}(\vec{p},h')\bar{\varepsilon}^{\overbrace{c\cdot\cdot d}^{n'}}(\vec{p},h')]$$

证明:

$$\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc\cdot\cdot d}_{n}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}^{\overbrace{c\cdot\cdot d}^{n'}}(\vec{p},h')=\frac{\sqrt{C_{n+h}^{n'+h'}C_{n-h}^{n'-h'}}}{\sqrt{C_{2n}^{2n'}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-n'}}(\vec{p},h-h')$$

$$\Rightarrow\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc\cdot\cdot d}_{n}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdot\cdot b'c'\cdot\cdot d'}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^{\overbrace{c'\cdot\cdot d'}^{n'}}(\vec{p},h')\bar{\varepsilon}^{\overbrace{c\cdot\cdot d}^{n'}}(\vec{p},h')=\frac{C_{n+h}^{n'+h'}C_{n-h}^{n'-h'}}{C_{2n}^{2n'}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-n'}}(\vec{p},h-h')\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdot\cdot b'}_{n-n'}}(\vec{p},h-h')$$

$$\Rightarrow\sum_{h=n}^{-n}\sum_{h'=n'}^{-n'}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc\cdot\cdot d}_{n}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdot\cdot b'c'\cdot\cdot d'}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^{\overbrace{c'\cdot\cdot d'}^{n'}}(\vec{p},h')\bar{\varepsilon}^{\overbrace{c\cdot\cdot d}^{n'}}(\vec{p},h')$$

$$=\sum_{h=n}^{-n}\sum_{h'=n'}^{-n'}\frac{C_{n+h}^{n'+h'}C_{n-h}^{n'-h'}}{C_{2n}^{2n'}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-n'}}(\vec{p},h-h')\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdot\cdot b'}_{n-n'}}(\vec{p},h-h')$$

$$=\sum_{l=0}^{2n'}\frac{C_{n+(n-l)}^{n'+(n'-l)}C_{n-(n-l)}^{n'-(n'-l)}}{C_{2n}^{2n'}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-n'}}(\vec{p},n-n')\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdot\cdot b'}_{n-n'}}(\vec{p},n-n')$$

$$+\sum_{l=0}^{2n'}\frac{C_{n+(n-1-l)}^{n'+(n'-l)}C_{n-(n-1-l)}^{n'-(n'-l)}}{C_{2n}^{2n'}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-n'}}(\vec{p},n-n'-1)\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdot\cdot b'}_{n-n'}}(\vec{p},n-n'-1)$$

$$+\sum_{l=0}^{2n'}\frac{C_{n+(n-2-l)}^{n'+(n'-l)}C_{n-(n-2-l)}^{n'-(n'-l)}}{C_{2n}^{2n'}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-n'}}(\vec{p},n-n'-2)\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdot\cdot b'}_{n-n'}}(\vec{p},n-n'-2)$$

$$+\cdot\cdot$$

$$+\sum_{l=0}^{2n'}\frac{C_{n+[n-2(n-n')-l]}^{n'+(n'-l)}C_{n-[n-2(n-n')-l]}^{n'-(n'-l)}}{C_{2n}^{2n'}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-n'}}(\vec{p},n-n'-2(n-n'))\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdot\cdot b'}_{n-n'}}(\vec{p},n-n'-2(n-n'))$$

$$=\sum_{h=n}^{2n'-n}\sum_{l=0}^{2n'}\frac{C_{n+(h-l)}^{n'+(n'-l)}C_{n-(h-l)}^{n'-(n'-l)}}{C_{2n}^{2n'}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-n'}}(\vec{p},h-n')\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdot\cdot b'}_{n-n'}}(\vec{p},h-n')$$

$$=\sum_{h=n}^{2n'-n}\sum_{h'=n'}^{-n'}\frac{C_{n+(h-n'+h')}^{n'+h'}C_{n-(h-n'+h')}^{n'-h'}}{C_{2n}^{2n'}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-n'}}(\vec{p},h-n')\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdot\cdot b'}_{n-n'}}(\vec{p},h-n')$$

$$=\sum_{h=n-n'}^{n'-n}\sum_{h'=n'}^{-n'}\frac{C_{(n+h')+h}^{n'+h'}C_{(n-h')-h}^{n'-h'}}{C_{2n}^{2n'}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-n'}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdot\cdot b'}_{n-n'}}(\vec{p},h)$$

$$\Rightarrow\sum_{h=(n-n')}^{-(n-n')}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-n'}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdot\cdot b'}_{n-n'}}(\vec{p},h)=\frac{2n+1-2n'}{2n+1}[\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc\cdot\cdot d}_{n}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdot\cdot b'c'\cdot\cdot d'}_{n}}(\vec{p},h)][\sum_{h'=n'}^{-n'}\varepsilon^{\overbrace{c'\cdot\cdot d'}^{n'}}(\vec{p},h')\bar{\varepsilon}^{\overbrace{c\cdot\cdot d}^{n'}}(\vec{p},h')]\quad\square$$

1.6 推导到自旋-n粒子Klein-Gordon方程的平面波解

定理1.6.1. $(-\partial^c\partial_c+m^2)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=0,A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=(\frac{1}{2im})^n\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x)$

$$A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}[a(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

$$\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)$$

证明: $[A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(x')]$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sum_{h,h'=n}^{-n}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\frac{1}{\sqrt{2^nE}}\frac{1}{\sqrt{2^nE'}}$$

$$[a(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^{+}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x},a^{+}(\vec{p}',h')\varepsilon^{+}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p}',h')e^{-ip'\cdot x'}+b(\vec{p}',h')\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p}',h')e^{ip'\cdot x'}]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sum_{h,h'=n}^{-n}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\frac{1}{\sqrt{2^nE}}\frac{1}{\sqrt{2^nE'}}$$

$$\{\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p}',h')[a(\vec{p},h),a^{+}(\vec{p}',h')]e^{ip\cdot x}e^{-ip'\cdot x'}+\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p}',h')[b^{+}(\vec{p},h),b(\vec{p}',h')]e^{-ip\cdot x}e^{ip'\cdot x'}\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sum_{h,h'=n}^{-n}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\frac{1}{\sqrt{2^nE}}\frac{1}{\sqrt{2^nE'}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p}',h')\delta_{hh'}\delta(\vec{p}-\vec{p}')(e^{ip\cdot x}e^{-ip'\cdot x'}-e^{-ip\cdot x}e^{ip'\cdot x'})$$

$$=\frac{i}{2^{n-1}}\int[\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)]\{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{-i}{2E}[e^{ip\cdot(x-x')}-e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}\}$$

$$=\frac{i}{2^{n-1}}[\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(-i\partial,h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(-i\partial,h)]\int\{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{-i}{2E}[e^{ip\cdot(x-x')}-e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}\}$$

$$=\frac{i}{2^{n-1}}[\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(-i\partial,h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(-i\partial,h)]\Delta(x-x')$$ □

1.7 自旋-n粒子Klein-Gordon方程自旋基的正确猜想(最初的想法仍保留)

定理1.7.1.

$$\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^n}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdots}_{n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\\ [\Rightarrow]\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^n}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(-p)\cdots}_{n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\\ [\Rightarrow]\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

推论1.7.1.

$$\begin{cases}\sum_{h=n}^{-n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)U^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^{2n}}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(p)\cdots}_{n}\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\\ \sum_{h=n}^{-n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)V^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^{2n}}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(p)\cdots}_{n}\sum_{h=n}^{-n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

推论1.7.2.

$$\begin{cases}\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{2^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots}^{n}\sum_{h=n}^{-n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)U^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)\\ \sum_{h=n}^{-n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{2^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots}^{n}\sum_{h=n}^{-n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)V^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

定理1.7.2. $\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=(-1)^n\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)$

证明: $\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)$

$$=(-\varsigma)^{2n}\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\gamma_5\bar{C}\gamma_a\gamma_5)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_5\bar{C}\gamma_b\gamma_5)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)$$

$$=(-1)^n\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)$$

$$=(-1)^n\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)$$ □

证明: $\varepsilon^{+\overbrace{ab\cdot\cdot}^{n}}(\vec{p},h')\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)$

$$=\frac{1}{(-i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\gamma^aC)_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma^bC)_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}U^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}(\vec{p},h')\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)$$

$$=\frac{1}{2^n}\overbrace{(\gamma^aC)_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma^bC)_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}U^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}(\vec{p},h')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)$$ □

定理1.7.3. $\varepsilon^{+}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=(-1)^h\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdot\cdot}^{n}\varepsilon_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},-h)$

证明: $\varepsilon^{+}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(-i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a^*)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b^*)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}U^{+}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)$

$$=\frac{1}{(-i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a^*)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b^*)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}(-1)^{n+h}\varsigma^{2n}\overbrace{\sigma_y\otimes\sigma_y\cdot\cdot}^{4n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},-h)$$

$$=\frac{(-1)^{n+h}}{(-i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\gamma_2\bar{C}\gamma_a^*\gamma_2)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_2\bar{C}\gamma_b^*\gamma_2)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},-h)$$

$$=\frac{(-1)^{n+h}}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_{a'}\eta_a^{a'})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_{b'}\eta_b^{b'})^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},-h)$$

$$=\frac{(-1)^{n+h}}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_{a'})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_{b'})^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},-h)$$

$$=(-1)^h\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdot\cdot}^{n}\varepsilon_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},-h)$$ □

猜想1.7.1. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-2k)=(-1)^n\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-2k)$

$$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-k)}\frac{2^i}{(n-k-i)!(2i)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-i}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k}}}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{\min(k,n-k)}2^iC_n^{2i}C_{n-2i}^{k-i}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-i}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k}}}\frac{1}{n!}[\sqrt{2^0}C_n^0C_{n-0}^k\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{0}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k}+\sqrt{2^2}C_n^2C_{n-2}^{k-1}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-1}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-1}$$

$$+\sqrt{2^4}C_n^4C_{n-4}^{k-2}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-2}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{4}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-2}+\sqrt{2^6}C_n^6C_{n-6}^{k-3}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-3}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{6}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-3}+\cdot\cdot]$$

猜想1.7.2. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-2k-1)=(-1)^n\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-2k-1)$

$$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k+1}}}\sum_{i=0}^{\min(k,n-1-k)}\frac{2^i\sqrt{2}}{(n-k-i-1)!(2i+1)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-i-1}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i+1}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k+1}}}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{\min(k,n-k-1)}\sqrt{2^{2i+1}}C_n^{2i+1}C_{n-2i-1}^{k-i}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-i-1}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2i+1}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-i}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k+1}}}\frac{1}{n!}[\sqrt{2^1}C_n^1C_{n-1}^k\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-1}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{1}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k}+\sqrt{2^3}C_n^3C_{n-3}^{k-1}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-2}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{3}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-1}$$

$$+\sqrt{2^5}C_n^5C_{n-5}^{k-2}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-3}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{5}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-2}+\sqrt{2^7}C_n^7C_{n-7}^{k-3}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-k-4}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{7}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{k-3}+\cdot\cdot]$$

推论1.7.3. $\delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=0, p^a\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=0, \varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}$全对称

1.8 自旋-n粒子Klein-Gordon方程的平面波解

推论1.8.1. $A_{ab\cdots}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}\varepsilon_{ab\cdots}(\vec{p},h)[a(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+(-1)^n b^+(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$

2 K-G方程自旋基和准投影算子的几个例子

2.1 自旋-1粒子Klein-Gordon方程的准投影算子

推论2.1.1. $\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},h)\eta^{a'}_a=(-1)^h\varepsilon_a(\vec{p},-h)$

定理2.1.1. $\begin{cases}\sum\limits_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},h)=\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2}\\ \sum\limits_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},h)\eta^{a'}_b=\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_a(\vec{p},h)\varepsilon_b(\vec{p},-h)=\delta_{ab}+\frac{p_ap_b}{m^2}\end{cases}$

推论2.1.2. $[-\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},-1)+\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},0)-\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon_b(\vec{p},1)]=\delta_{ab}+\frac{p_ap_b}{m^2}$

推论2.1.3. $p^a\varepsilon_a(\vec{p},h)=0$

2.2 自旋-1粒子C-K自旋基和1-自旋基的关系

引理2.2.1.
$$\begin{cases}[\sigma^a_+\varepsilon_a(\vec{p},\kappa)]\lambda(\hat{p},\kappa)=0, [\sigma^a_+\varepsilon_a(\vec{p},-\kappa)]\lambda(\hat{p},\kappa)=-i\kappa\sqrt{2}\gamma_5u(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}), [\sigma^a_+\varepsilon_a(\vec{p},0)]\lambda(\hat{p},\kappa)=-i\kappa\gamma_5\lambda(\hat{p},\kappa)\\ [\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},\kappa)]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=0, [\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},-\kappa)]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=i\kappa\sqrt{2}\gamma_5v(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}), [\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},0)]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=i\kappa\gamma_5v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\end{cases}$$

2.3 自旋-2粒子Klein-Gordon方程的准投影算子

性质2.3.1.
$$\begin{cases}|2,2\rangle=|1\rangle\otimes|1\rangle;\\ |2,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\otimes|1\rangle+|1\rangle\otimes|0\rangle);\\ |2,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(|-1\rangle\otimes|1\rangle+2|0\rangle\otimes|0\rangle+|1\rangle\otimes|-1\rangle);\\ |2,-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|-1\rangle\otimes|0\rangle+|0\rangle\otimes|-1\rangle);\\ |2,-2\rangle=|-1\rangle\otimes|-1\rangle;\end{cases}$$

性质2.3.2.
$$\begin{cases}\varepsilon_{ab}(\vec{p},2)=\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},1)\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},1)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},0)+\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},1)]\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},0)=\frac{1}{\sqrt{6}}[\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},-1)+\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon_b(\vec{p},1)+2\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},0)]\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon_b(\vec{p},0)+\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},-1)]\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},-2)=\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon_b(\vec{p},-1)\\ \delta^{ab}\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)=0, p^a\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)=0, \varepsilon_{ab}(\vec{p},h)=\varepsilon_{ba}(\vec{p},h)\end{cases}$$

推论2.3.1. $\varepsilon^+_{a'b'}(\vec{p},h)\eta^{a'}_a\eta^{b'}_b=(-1)^h\varepsilon_{ab}(\vec{p},-h)$

定理2.3.1. $\sum\limits_{h=2}^{-2}\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'b'}(\vec{p},h)=\frac{1}{4}\{[\eta_{\{a(a'}+\frac{p_{\{a}p^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}+\frac{p_{b\}}p^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}+\frac{p_{\{a}p_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}+\frac{p^+_{(a'}p^+_{b')}}{m^2}]\}$

证明: $\sum\limits_{h=2}^{-2}\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'b'}(\vec{p},h)$
$=\frac{1}{12}\{12\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},1)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},1)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},1)$
$+6[\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},0)+\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},1)][\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},1)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},0)+\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},0)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},1)]$

$+\,2[\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},-1)+\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon_b(\vec{p},1)+2\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},0)]$

$[\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},1)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},-1)+\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},-1)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},1)+2\varepsilon_{a'}(\vec{p},0)\varepsilon_{b'}(\vec{p},0)]$

$+\,6[\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon_b(\vec{p},0)+\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},-1)][\varepsilon^+_a(\vec{p},-1)\varepsilon^+_b(\vec{p},0)+\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},0)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},-1)]$

$+\,12\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon_b(\vec{p},-1)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},-1)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},-1)\}$

$=\frac{1}{12}\{$

$3[\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},1)+\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},0)+\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},-1)][\varepsilon_b(\vec{p},1)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},1)+\varepsilon_b(\vec{p},0)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},0)+\varepsilon_b(\vec{p},-1)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},-1)]$

$+$

$3[\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},1)+\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},0)+\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},-1)][\varepsilon_b(\vec{p},1)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},1)+\varepsilon_b(\vec{p},0)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},0)+\varepsilon_b(\vec{p},-1)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},-1)]$

$+$

$3[\varepsilon_b(\vec{p},1)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},1)+\varepsilon_b(\vec{p},0)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},0)+\varepsilon_b(\vec{p},-1)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},-1)][\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},1)+\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},0)+\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},-1)]$

$+$

$3[\varepsilon_b(\vec{p},1)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},1)+\varepsilon_b(\vec{p},0)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},0)+\varepsilon_b(\vec{p},-1)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},-1)][\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},1)+\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},0)+\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},-1)]$

$-$

$4[-\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},-1)+\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},0)-\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon_b(\vec{p},1)]$

$[-\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},1)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},-1)+\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},0)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},0)-\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},-1)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},1)]\}$

$=\frac{1}{4}\{[\eta_{\{a(a'}+\frac{p_{\{a}p^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}+\frac{p_{b\}}p^+_{b')}}{m^2}]-\frac{4}{3}[\delta_{ab}+\frac{p_ap_b}{m^2}][\delta_{a'b'}+\frac{p^+_{a'}p^+_{b'}}{m^2}]\}$

$=\frac{1}{4}\{[\eta_{\{a(a'}+\frac{p_{\{a}p^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}+\frac{p_{b\}}p^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}+\frac{p_{\{a}p_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}+\frac{p^+_{(a'}p^+_{b')}}{m^2}]\}$ □

推论2.3.2.
$\sum_{h=2}^{-2}\varepsilon_{a_1a_2}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{b'_1b'_2}(\vec{p},h)\eta^{b'_1}_{b_1}\eta^{b'_2}_{b_2}=\frac{1}{4}\{[\delta_{\{a_1(b_1}+\frac{p_{\{a_1}p_{(b_1}}{m^2}][\delta_{a_2\}b_2)}+\frac{p_{a_2\}}p_{b_2)}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{a_1a_2\}}+\frac{p_{\{a_1}p_{a_2\}}}{m^2}][\delta_{(b_1b_2)}+\frac{p_{(b_1}p_{b_2)}}{m^2}]\}$

2.4 另一种证法

性质2.4.1.

$$\begin{cases}\varepsilon_{a_1a_2}(\vec{p},2)=\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\\ \varepsilon_{a_1a_2}(\vec{p},1)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)+\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)]\\ \varepsilon_{a_1a_2}(\vec{p},0)=\frac{1}{\sqrt{6}}[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)+2\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)]\\ \varepsilon_{a_1a_2}(\vec{p},-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)+\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)]\\ \varepsilon_{a_1a_2}(\vec{p},-2)=\varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\\ \delta^{a_1a_2}\varepsilon_{a_1a_2}(\vec{p},h)=0,p^{a_1}\varepsilon_{a_1a_2}(\vec{p},h)=0,\varepsilon_{a_1a_2}(\vec{p},h)=\varepsilon_{a_2a_1}(\vec{p},h)\end{cases}$$

性质2.4.2.

$$\begin{cases}\varepsilon_{b_1b_2}(\vec{p},2)=\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)\\ \varepsilon_{b_1b_2}(\vec{p},1)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)+\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]\\ \varepsilon_{b_1b_2}(\vec{p},0)=\frac{1}{\sqrt{6}}[\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)+2\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)]\\ \varepsilon_{b_1b_2}(\vec{p},-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)+\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)]\\ \varepsilon_{b_1b_2}(\vec{p},-2)=\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)\\ \delta^{b_1b_2}\varepsilon_{b_1b_2}(\vec{p},h)=0,p^{b_1}\varepsilon_{b_1b_2}(\vec{p},h)=0,\varepsilon_{b_1b_2}(\vec{p},h)=\varepsilon_{b_2b_1}(\vec{p},h)\end{cases}$$

推论2.4.1. $\varepsilon_a(\begin{bmatrix}0\\0\\|\vec{p}|\end{bmatrix},1):=\frac{1}{\sqrt{2}}[-1,-i,0,0]_a,\varepsilon_a(\begin{bmatrix}0\\0\\|\vec{p}|\end{bmatrix},0):=\frac{1}{m}[0,0,E,i|\vec{p}|]_a,\varepsilon_a(\begin{bmatrix}0\\0\\|\vec{p}|\end{bmatrix},1):=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-i,0,0]_a$

证明:

$2[\varepsilon_{a_1a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1b_2}(\vec{p},1)+\varepsilon_{a_1a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1b_2}(\vec{p},-1)]$

$=[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)+\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)][\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)+\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)]$

$+\,[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)+\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)][\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)+\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]$

$=[\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)$

$+ [\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)$
$+ [\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)$
$+ [\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)$
$= Q_{\{a_1(b_1}[\varepsilon_{a_2\}}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2)}(\vec{p},0)]$
$= -P_{\{a_1(b_1}[\varepsilon_{a_2\}}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2)}(\vec{p},0)] + \varepsilon_{\{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2\}}(\vec{p},0)\varepsilon_{(b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2)}(\vec{p},0)$ □

证明： $\sum_{h=2}^{-2}\varepsilon_{a_1a_2}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_{b_1b_2}(\vec{p},h) = \sum_{h=2}^{-2}(-1)^h\varepsilon_{a_1a_2}(\vec{p},h)\varepsilon_{b_1b_2}(\vec{p},-h)$
$= \frac{1}{12}$
$\{12\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)$
$- 6[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0) + \varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)][\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0) + \varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)]$
$+ 2[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1) + 2\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)]$
$[\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1) + 2\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)]$
$- 6[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0) + \varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)][\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0) + \varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]$
$+ 12\varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)\}$
$= \frac{1}{12}$
$\{12\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1) + 12\varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)$
$+ 12\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)$
$- 4[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)][\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]$
$- 4\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)$
$+ 4[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)]\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)$
$+ 4[\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)$
$+ 6[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)][\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]$
$- 6\{[\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)$
$+ [\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)$
$+ [\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)$
$+ [\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)\}\}$
$= \frac{1}{12}$
$\{12\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)$
$+ 6[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)][\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]$
$+ 6[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)][\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]$
$- 6\{[\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)$
$+ [\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)$
$+ [\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)$
$+ [\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)\}$
$-$
$4[-\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0) - \varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)]$
$[-\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0) - \varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]\}$
$= \frac{1}{12}\{$
$6[-\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0) - \varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]$
$[-\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0) - \varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]$
$+$
$6[-\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0) - \varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]$
$[-\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0) - \varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]$
$-$
$4[-\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1) + \varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0) - \varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)]$

$[-\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)-\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]$
$=\frac{1}{12}\{$
$3[-\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)-\varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]$
$[-\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)-\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]$
$+$
$3[-\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)-\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]$
$[-\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)-\varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]$
$+$
$3[-\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)-\varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]$
$[-\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)-\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]$
$+$
$3[-\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)-\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]$
$[-\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)-\varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]$
$-$
$4[-\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},0)-\varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)]$
$[-\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},0)-\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]$
$=\frac{1}{4}\{[\delta_{\{a_1(b_1}+\frac{p_{\{a_1}p_{(b_1}}{m^2}][\delta_{a_2\}b_2)}+\frac{p_{a_2\}}p_{b_2)}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{a_1a_2\}}+\frac{p_{\{a_1}p_{a_2\}}}{m^2}][\delta_{(b_1b_2)}+\frac{p_{(b_1}p_{b_2)}}{m^2}]\}$ □

推论2.4.2. $2[\varepsilon_{a_1a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1b_2}(\vec{p},1)+\varepsilon_{a_1a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1b_2}(\vec{p},-1)]$
$=-P_{\{a_1(b_1}[\varepsilon_{a_2\}}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2)}(\vec{p},0)]+\varepsilon_{\{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2\}}(\vec{p},0)\varepsilon_{(b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2)}(\vec{p},0)$

推论2.4.3.
$[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)][\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]$
$+$
$[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)][\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)]$
$=2[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)][\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)]+2[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)][\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]$
$+[\varepsilon_{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},1)][\varepsilon_{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},1)]$

推论2.4.4. $2\varepsilon_{\{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1\}}(\vec{p},-1)\varepsilon_{(a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2)}(\vec{p},-1)+2\varepsilon_{\{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2\}}(\vec{p},-1)\varepsilon_{(a_2}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_1)}(\vec{p},-1)$
$=\varepsilon_{\{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2\}}(\vec{p},1)\varepsilon_{\{b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2\}}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{\{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2\}}(\vec{p},-1)\varepsilon_{\{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2\}}(\vec{p},1)$
$+2\varepsilon_{\{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2\}}(\vec{p},-1)\varepsilon_{\{b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2\}}(\vec{p},-1)$

推论2.4.5. $Q_{\{a_1(b_1}Q_{a_2\}b_2)}$
$=\varepsilon_{\{a_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{a_2\}}(\vec{p},1)\varepsilon_{(b_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{b_2)}(\vec{p},-1)+\varepsilon_{\{a_1}(\vec{p},-1)\varepsilon_{a_2\}}(\vec{p},-1)\varepsilon_{(b_1}(\vec{p},1)\varepsilon_{b_2)}(\vec{p},1)+2Q_{a_1a_2}Q_{b_1b_2}$

推论2.4.6.
$P_{\{a_1(b_1}P_{a_2\}b_2)}=[Q_{\{a_1(b_1}-\varepsilon_{\{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{(b_1}(\vec{p},0)][Q_{a_2\}b_2)}-\varepsilon_{a_2\}}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2)}(\vec{p},0)]$
$=Q_{\{a_1(b_1}Q_{a_2\}b_2)}-2Q_{\{a_1(b_1}[\varepsilon_{a_2\}}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2)}(\vec{p},0)]+\varepsilon_{\{a_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{a_2\}}(\vec{p},0)\varepsilon_{(b_1}(\vec{p},0)\varepsilon_{b_2)}(\vec{p},0)$

2.5 自旋-3粒子Klein-Gordon方程的CG系数和自旋基

推论2.5.1.

$$\begin{cases}\langle 2,2;1,1|2,1;3,3\rangle=1\\ \langle 2,2;1,0|2,1;3,2\rangle=\frac{1}{\sqrt3},\langle 2,1;1,1|2,1;3,2\rangle=\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\\ \langle 2,2;1,-1|2,1;3,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{15}},\langle 2,1;1,0|2,1;3,1\rangle=\frac{\sqrt8}{\sqrt{15}},\langle 2,0;1,1|2,1;3,1\rangle=\frac{\sqrt6}{\sqrt{15}}\\ \langle 2,1;1,-1|2,1;3,0\rangle=\frac{1}{\sqrt5},\langle 2,0;1,0|2,1;3,0\rangle=\frac{\sqrt3}{\sqrt{15}},\langle 2,-1;1,1|2,1;3,0\rangle=\frac{1}{\sqrt5}\\ \langle 2,-2;1,1|2,1;3,-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{15}},\langle 2,-1;1,0|2,1;3,-1\rangle=\frac{\sqrt8}{\sqrt{15}},\langle 2,0;1,-1|2,1;3,-1\rangle=\frac{\sqrt6}{\sqrt{15}}\\ \langle 2,-2;1,0|2,1;3,-2\rangle=\frac{1}{\sqrt3},\langle 2,-1;1,-1|2,1;3,-2\rangle=\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\\ \langle 2,-2;1,-1|2,1;3,-3\rangle=1\end{cases}$$

推论2.5.2.

$$\begin{cases}\varepsilon_{abc}(\vec p,3)=\varepsilon_{ab}(\vec p,2)\varepsilon_c(\vec p,1)=\frac{1}{3!}\varepsilon_{\{a}(\vec p,1)\varepsilon_b(\vec p,1)\varepsilon_{c\}}(\vec p,1)\\ \varepsilon_{abc}(\vec p,2)=\frac{1}{\sqrt3}\varepsilon_{ab}(\vec p,2)\varepsilon_c(\vec p,0)+\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\varepsilon_{ab}(\vec p,1)\varepsilon_c(\vec p,1)=\frac{\sqrt3}{3!}\varepsilon_{\{a}(\vec p,1)\varepsilon_b(\vec p,1)\varepsilon_{c\}}(\vec p,0)\\ \varepsilon_{abc}(\vec p,1)=\frac{1}{\sqrt{15}}\varepsilon_{ab}(\vec p,2)\varepsilon_c(\vec p,-1)+\frac{\sqrt8}{\sqrt{15}}\varepsilon_{ab}(\vec p,1)\varepsilon_c(\vec p,0)+\frac{\sqrt6}{\sqrt{15}}\varepsilon_{ab}(\vec p,0)\varepsilon_c(\vec p,1)\\ =\frac{6}{3!\sqrt{15}}\varepsilon_{\{a}(\vec p,1)\varepsilon_b(\vec p,0)\varepsilon_{c\}}(\vec p,0)+\frac{3}{3!\sqrt{15}}\varepsilon_{\{a}(\vec p,1)\varepsilon_b(\vec p,1)\varepsilon_{c\}}(\vec p,-1)\\ \varepsilon_{abc}(\vec p,0)=\frac{1}{\sqrt5}\varepsilon_{ab}(\vec p,1)\varepsilon_c(\vec p,-1)+\frac{\sqrt3}{\sqrt5}\varepsilon_{ab}(\vec p,0)\varepsilon_c(\vec p,0)+\frac{1}{\sqrt5}\varepsilon_{ab}(\vec p,-1)\varepsilon_c(\vec p,1)\\ =\frac{6}{3!\sqrt{10}}\varepsilon_{\{a}(\vec p,1)\varepsilon_b(\vec p,0)\varepsilon_{c\}}(\vec p,-1)+\frac{2}{3!\sqrt{10}}\varepsilon_{\{a}(\vec p,0)\varepsilon_b(\vec p,0)\varepsilon_{c\}}(\vec p,0)\\ \varepsilon_{abc}(\vec p,-1)=\frac{1}{\sqrt{15}}\varepsilon_{ab}(\vec p,-2)\varepsilon_c(\vec p,1)+\frac{\sqrt8}{\sqrt{15}}\varepsilon_{ab}(\vec p,-1)\varepsilon_c(\vec p,0)+\frac{\sqrt6}{\sqrt{15}}\varepsilon_{ab}(\vec p,0)\varepsilon_c(\vec p,-1)\\ =\frac{6}{3!\sqrt{15}}\varepsilon_{\{a}(\vec p,-1)\varepsilon_b(\vec p,0)\varepsilon_{c\}}(\vec p,0)+\frac{3}{3!\sqrt{15}}\varepsilon_{\{a}(\vec p,-1)\varepsilon_b(\vec p,-1)\varepsilon_{c\}}(\vec p,1)\\ \varepsilon_{abc}(\vec p,-2)=\frac{1}{\sqrt3}\varepsilon_{ab}(\vec p,-2)\varepsilon_c(\vec p,0)+\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\varepsilon_{ab}(\vec p,-1)\varepsilon_c(\vec p,-1)=\frac{\sqrt3}{3!}\varepsilon_{\{a}(\vec p,-1)\varepsilon_b(\vec p,-1)\varepsilon_{c\}}(\vec p,0)\\ \varepsilon_{abc}(\vec p,-3)=\varepsilon_{ab}(\vec p,-2)\varepsilon_c(\vec p,-1)=\frac{1}{3!}\varepsilon_{\{a}(\vec p,-1)\varepsilon_b(\vec p,-1)\varepsilon_{c\}}(\vec p,-1)\end{cases}$$

2.6 自旋-n粒子Klein-Gordon方程的准投影算子

定义2.6.1. $\bar\varepsilon_a(\vec p,h):=\varepsilon^+_{a'}(\vec p,h)\eta_a^{a'},\bar\varepsilon_{ab}(\vec p,h):=\varepsilon^+_{a'b'}(\vec p,h)\eta_a^{a'}\eta_b^{b'},P_{ab}:=\delta_{ab}+\frac{p_ap_b}{m^2}$

推论2.6.1.

$$\begin{cases}\sum\limits_{h=1}^{-1}\varepsilon_{a_1}(\vec p,h)\bar\varepsilon_{b_1}(\vec p,h)=P_{a_1b_1},\sum\limits_{h=1}^{-1}-|h|\varepsilon_{a_1}(\vec p,h)\bar\varepsilon_{b_1}(\vec p,h):=Q_{a_1b_1}=\varepsilon_{\{a_1}(\vec p,1)\varepsilon_{b_1\}}(\vec p,-1)\\ \sum\limits_{h=2}^{-2}\varepsilon_{a_1a_2}(\vec p,h)\bar\varepsilon_{b_1b_2}(\vec p,h)=\frac{1}{(2!)^2}[P_{\{a_1(b_1}P_{a_2\}b_2)}-\frac13P_{\{a_1a_2\}}P_{(b_1b_2)}]\end{cases}$$

猜想2.6.1.

$$\begin{cases}\sum\limits_{h=n}^{-n}\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}(\vec p,h)\bar\varepsilon_{b_1b_2\cdot\cdot b_n}(\vec p,h)=\frac{1}{(n!)^2}\sum\limits_{r=0}^{[n/2]}A_{n,r}[P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2}\cdot\cdot P_{a_{2r-1}a_{2r}}P_{b_{2r-1}b_{2r}}][P_{a_{2r+1}b_{2r+1}}\cdot\cdot P_{a_n\}b_n)}]\\ A_{n,r}=(-\frac12)^r\frac{n!(2n-2r-1)!!}{r!(n-2r)!(2n-1)!!}=(-\frac12)^r\frac{1}{r!}\frac{n(n-1)\cdot\cdot(n-2r+1)}{(2n-1)(2n-3)\cdot\cdot(2n-2r+1)}=(-1)^r\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}=(-1)^rC_{2n}^{-n}C_n^rC_{2n-2r}^n\\ A_{n,0}=1,A_{n,1}=-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)},A_{n,2}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8(2n-1)(2n-3)},\cdots\end{cases}$$

以上Behrends和Fronsdal构造出来的公式 [29,30] [20]，并没有严格地被证明，本质上还是一个猜想，它是后面很多重要结论的前提条件。需要严格证明它，但目前我还做不到。

定义2.6.2. $P_{a_1a_2\cdot\cdot a_nb_1b_2\cdot\cdot b_n}(n):=\sum\limits_{h=n}^{-n}\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}(\vec p,h)\bar\varepsilon_{b_1b_2\cdot\cdot b_n}(\vec p,h)$

猜想2.6.2.

$$P_{a_1a_2\cdot\cdot a_nb_1b_2\cdot\cdot b_n}(n)=\frac{1}{(n!)^2}\sum_{r=0}^{[n/2]}(-\frac12)^r\frac{1}{r!}\frac{n(n-1)\cdot\cdot(n-2r+1)}{(2n-1)(2n-3)\cdot\cdot(2n-2r+1)}[P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2}\cdot\cdot P_{a_{2r-1}a_{2r}}P_{b_{2r-1}b_{2r}}][P_{a_{2r+1}b_{2r+1}}\cdot\cdot P_{a_n\}b_n)}]$$

$$=\frac{1}{(2n)!}\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^rC_n^rC_{2n-2r}^n[P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2}\cdot\cdot P_{a_{2r-1}a_{2r}}P_{b_{2r-1}b_{2r}}][P_{a_{2r+1}b_{2r+1}}\cdot\cdot P_{a_n\}b_n)}]$$

猜想2.6.3. $P_{a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_n}(n)=P_{\{a_1a_2\cdots a_{n-1},(b_1b_2\cdots b_{n-1}}(n-1)P_{a_n\}b_n)}$
$+P_{\{a_1a_2\cdots a_{n-1},a_n\}(b_1b_2\cdots b_{n-2}}(n-1)P_{b_{n-1}b_n)}+P_{\{a_1a_2\cdots a_{n-2}(b_n,b_1b_2\cdots b_{n-1})}(n-1)P_{a_{n-1}a_n\}}$

猜想2.6.4.

$$\begin{cases}\sum\limits_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{n+1}{2n+3}\sum\limits_{h=n+1}^{-(n+1)}\sum\limits_{h'=1}^{-1}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots c}_{n+1}}(\vec{p},h)\sigma^c_+\lambda_m(\vec{p},h')[\varepsilon_{\underbrace{a'b'\cdots c'}_{n+1}}(\vec{p},h)\sigma^{c'}_+\lambda_m(\vec{p},h')]^+\\ \sum\limits_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}[\tau'_\varsigma]}(\vec{p},h)=\frac{n+1}{2n+3}\sum\limits_{h=n+1}^{-(n+1)}\sum\limits_{h'=1/2}^{-1/2}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots c}_{n+1}}(\vec{p},h)\gamma^cu(\vec{p},h')[\varepsilon_{\underbrace{a'b'\cdots c'}_{n+1}}(\vec{p},h)\gamma^{c'}u(\vec{p},h')]^+\end{cases}$$

3 Rarita-Schwinger方程的反对易规则

3.1 有质量自旋-$n+\frac{1}{2}$的Bargmann-Wigner方程等价于Rarita-Schwinger方程 [18,20,21]

定理3.1.1.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x)=0\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x)\text{全对称}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\gamma^c\partial_c+m)A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}(x)=0\\ \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}(x)=0,\gamma^aA_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}(x)=0,A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}(x)\text{全对称}\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x)=\frac{1}{2^n}\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(x)\end{cases}$$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{r},t)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)}E^n\sqrt{\frac{m}{E}}^{2n+1}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

$$A_{ab\cdots\tau_\varsigma}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE}}[\varepsilon_{ab\cdots\tau_\varsigma}(\vec{p},h)a(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+\tilde{\varepsilon}_{ab\cdots\tau_\varsigma}(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

自我评述：与玻色子情形一样处理，把各自的平面波解代入以上两个等价的方程，并利用傅立叶分量相等性也可容易得到以下两个推论。

推论3.1.1.

$$\begin{cases}(i\gamma^ap_a+m)U_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)=0\\ U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)\text{全对称},\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\\ =\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(i\gamma^cp_c+m)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)=0\\ \varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)\text{全对称},\delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)=0,\\ \gamma^a\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)=0,p^a\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)=0\\ U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)\\ =\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^n}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdots}_{n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\end{cases}$$

推论3.1.2.

$$\begin{cases}(-i\gamma^ap_a+m)V_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)=0\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)\text{全对称},\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\\ =\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-i\gamma^cp_c+m)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)=0\\ \tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)\text{全对称},\delta^{ab}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)=0\\ \gamma^a\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)=0,p^a\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)=0\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)\\ =\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^n}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(-p)\cdots}_{n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\end{cases}$$

推论3.1.3. $\Lambda_-(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma_4\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)=0,\Lambda_+(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma_4\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)=0$

3.2 自旋$s=n+\frac{1}{2}$粒子Rarita-Schwinger方程的自旋基

定理3.2.1.

$$\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^n}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdot\cdot}_{n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\\ [\Rightarrow]\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^n}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdot\cdot}_{n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\\ [\Rightarrow]\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

定理3.2.2.

$$\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^n}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdot\cdot}_{n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\\ [\Rightarrow]\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

$$\begin{cases}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^n}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdot\cdot}_{n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\\ [\Rightarrow]\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

推论3.2.1.

$$\begin{cases}\sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)\\ =\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^{2n}}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(p)\cdot\cdot}_{n}\sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)\\ =\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^{2n}}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(p)\cdot\cdot}_{n}\sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)\end{cases}$$

推论3.2.2.

$$\begin{cases}\sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)\\ =\frac{1}{2^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)\\ =\frac{1}{2^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

定理3.2.3. $\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=-\varsigma(-1)^n\gamma_{5\tau_\varsigma}{}^{\sigma_\varsigma}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{n}}(\vec{p},h)$

证明: $\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)$

$=(-\varsigma)^{2n+1}\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\gamma_5\bar{C}\gamma_a\gamma_5)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_5\bar{C}\gamma_b\gamma_5)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\gamma_{5\tau_\varsigma}{}^{\sigma_\varsigma}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}\sigma_\varsigma}(\vec{p},h)$

$=-\varsigma(-1)^n\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\gamma_{5\tau_\varsigma}{}^{\sigma_\varsigma}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}\sigma_\varsigma}(\vec{p},h)$

$=-\varsigma(-1)^n\gamma_{5\tau_\varsigma}{}^{\sigma_\varsigma}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{n}}(\vec{p},h)$ □

定理3.2.4. $\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)=(-1)^{h-\frac{1}{2}}(\gamma_2\gamma_5)_{\tau'_\varsigma}{}^{\tau_\varsigma}\overbrace{\eta^a_{a'}\eta^b_{b'}\cdot\cdot}^{n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},-h)$

证明: $\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{(-i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma^*_{a'})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma^*_{b'})^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}U^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)$

$=\frac{1}{(-i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma^*_{a'})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma^*_{b'})^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}(-1)^{n+\frac{1}{2}+h}\varsigma^{2n+1}\overbrace{\sigma_y\otimes\sigma_y\cdot\cdot}^{4n+2}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},-h)$

$=\varsigma\frac{(-1)^{n+\frac{1}{2}+h}}{(-i\sqrt{2})^n}\gamma_{2\tau'_\varsigma}{}^{\tau_\varsigma}\overbrace{(\gamma_2\bar{C}\gamma^*_{a'}\gamma_2)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_2\bar{C}\gamma^*_{b'}\gamma_2)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}\tau_\varsigma}(\vec{p},-h)$

$=\varsigma\frac{(-1)^{n+\frac{1}{2}+h}}{(i\sqrt{2})^n}\gamma_{2\tau'_\varsigma}{}^{\tau_\varsigma}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a\eta^a_{a'})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b\eta^b_{b'})^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}\tau_\varsigma}(\vec{p},-h)$

$=\varsigma\frac{(-1)^{n+\frac{1}{2}+h}}{(i\sqrt{2})^n}\gamma_{2\tau'_\varsigma}{}^{\tau_\varsigma}\overbrace{\eta^a_{a'}\eta^b_{b'}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}\tau_\varsigma}(\vec{p},-h)$

$=\varsigma(-1)^{n+\frac{1}{2}+h}\gamma_{2\tau'_\varsigma}{}^{\tau_\varsigma}\overbrace{\eta^a_{a'}\eta^b_{b'}\cdot\cdot}^{n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},-h)$

$=(-1)^{h-\frac{1}{2}}(\gamma_2\gamma_5)_{\tau'_\varsigma}{}^{\tau_\varsigma}\overbrace{\eta^a_{a'}\eta^b_{b'}\cdot\cdot}^{n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},-h)$ □

3.3 自旋$s=n+\frac{1}{2}$粒子Rarita-Schwinger方程的平面波解

推论3.3.1.
$A_{ab\cdot\cdot\tau_\varsigma}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE}}[\varepsilon_{ab\cdot\cdot\tau_\varsigma}(\vec{p},h)a(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+\tilde{\varepsilon}_{ab\cdot\cdot\tau_\varsigma}(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$

证明: $\{A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\}$

$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sum\limits_{h,h'=n}^{-n}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE}}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE'}}$

$\{a(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x},a^+(\vec{p}',h')\varepsilon^+_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p}',h')e^{-ip'\cdot x'}+b(\vec{p}',h')\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p}',h')e^{ip'\cdot x'}\}$

$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sum\limits_{h,h'=n}^{-n}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE}}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE'}}e^{-ip\cdot x}e^{ip'\cdot x'}$

$\{\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p}',h')\{a(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')\}e^{ip\cdot x}e^{-ip'\cdot x'}+\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p}',h')\{b^+(\vec{p},h),b(\vec{p}',h')\}\}$

$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sum\limits_{h,h'=n}^{-n}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE}}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE'}}\delta_{hh'}\delta(\vec{p}-\vec{p}')$

$[\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p}',h')e^{ip\cdot x}e^{-ip'\cdot x'}+\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p}',h')e^{-ip\cdot x}e^{ip'\cdot x'}]$

$=\frac{im}{2^{n-1}}\int\sum\limits_{h=n}^{-n}\{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{-i}{2E}[\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)e^{ip\cdot(x-x')}+\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}\}$

$=\frac{im}{2^{n-1}}[\sum\limits_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(-i\partial,h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(-i\partial,h)]\int\{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{-i}{2E}[e^{ip\cdot(x-x')}-e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}\}$

$=\frac{im}{2^{n-1}}[\sum\limits_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(-i\partial,h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(-i\partial,h)]\Delta(x-x')$ □

3.4 自旋-$\frac{n}{2}$粒子Rarita-Schwinger方程的自旋基

定理3.4.1.

$$\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)\\=\frac{1}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}[\sqrt{C^{l-1}_{2n}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-l+1)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+\sqrt{C^l_{2n}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-l)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]\\V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)\\=\frac{1}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}[\sqrt{C^{l-1}_{2n}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-l+1)v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+\sqrt{C^l_{2n}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-l)v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]\end{cases}$$

推论3.4.1.

$$\begin{cases}\frac{m}{E}u^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)=\frac{\sqrt{C^{l-1}_{2n}}}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-l+1)=\sqrt{\frac{l}{2n+1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-l+1)\\\frac{m}{E}u^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)=\frac{\sqrt{C^{l}_{2n}}}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-l)=\sqrt{\frac{2n+1-l}{2n+1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-l)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{m}{E}v^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)=\frac{\sqrt{C^{l-1}_{2n}}}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-l+1)=\sqrt{\frac{l}{2n+1}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-l+1)\\\frac{m}{E}v^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)=\frac{\sqrt{C^{l}_{2n}}}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-l)=\sqrt{\frac{2n+1-l}{2n+1}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2n}}(\vec{p},n-l)\end{cases}$$

定理3.4.2. $\Lambda_{\pm\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},n)=\frac{2n+1}{2n+2}(\frac{m}{E})^2\Lambda_{\pm\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},n+\frac{1}{2})\Lambda^{\tau'_\varsigma\tau_\varsigma}_{\pm}(\vec{p},\frac{1}{2})$

推论3.4.2.

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)=\frac{1}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}[\sqrt{C^{l-1}_{2n}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l+1)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+\sqrt{C^l_{2n}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]\\\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)=\frac{1}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}[\sqrt{C^{l-1}_{2n}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l+1)v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+\sqrt{C^l_{2n}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l)v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]\end{cases}$$

推论3.4.3.

$$\begin{cases}\frac{m}{E}u^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)=\frac{\sqrt{C^{l-1}_{2n}}}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l+1)=\sqrt{\frac{l}{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l+1)\\\frac{m}{E}u^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)=\frac{\sqrt{C^{l}_{2n}}}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l)=\sqrt{\frac{2n+1-l}{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{m}{E}v^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)=\frac{\sqrt{C^{l-1}_{2n}}}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l+1)=\sqrt{\frac{l}{2n+1}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l+1)\\\frac{m}{E}v^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)=\frac{\sqrt{C^{l}_{2n}}}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l)=\sqrt{\frac{2n+1-l}{2n+1}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l)\end{cases}$$

定理3.4.3. $\sum\limits_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{2n+1}{2n+2}(\frac{m}{E})^2\sum\limits_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)\Lambda^{\tau'_\varsigma\tau_\varsigma}_{+}(\vec{p},\frac{1}{2})$

证明: $(\frac{m}{E})^2\sum\limits_{l=0}^{2n+1}[u^{\tau'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+u^{\tau'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)$

$$= (\frac{m}{E})^2 \sum_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)} \varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)\Lambda_+^{\tau'_\varsigma\tau_\varsigma}$$

$$= \sum_{l=0}^{2n+1}[\frac{l}{2n+1}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},n-l+1)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec{p},n-l+1) + \frac{2n+1-l}{2n+1}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},n-l)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec{p},n-l)]$$

$$= \frac{2n+2}{2n+1}\sum_{l=1}^{2n+1}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},n-l+1)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec{p},n-l+1)$$

$$= \frac{2n+2}{2n+1}\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec{p},h)$$ □

证明: $\sum_{l=0}^{2n+1}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)$

$$= \sum_{l=0}^{2n+1}\frac{1}{C^l_{2n+1}}[\sqrt{C^{l-1}_{2n}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},n-l+1)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2}) + \sqrt{C^l_{2n}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},n-l)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$

$$[\sqrt{C^{l-1}_{2n}}\varepsilon_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec{p},n-l+1)u_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2}) + \sqrt{C^l_{2n}}\varepsilon_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec{p},n-l)u_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]^+$$

$$?? = \sum_{l=0}^{2n+1}\frac{1}{C^l_{2n+1}}[C^{l-1}_{2n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},n-l+1)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec{p},n-l+1)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$+ \sum_{l=0}^{2n+1}\frac{1}{C^l_{2n+1}}C^l_{2n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},n-l)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec{p},n-l)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$ □

4 R-S方程自旋基和准投影算子的几个例子

4.1 自旋-1粒子R-S自旋基和Dirac自旋基的关系

引理4.1.1.

$$\begin{cases}[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},\kappa)]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=0,[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},-\kappa)]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa\sqrt{2}\gamma_5u(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}),[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},0)]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa\gamma_5u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\\ [\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},\kappa)]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=0,[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},-\kappa)]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=i\kappa\sqrt{2}\gamma_5v(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}),[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},0)]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=i\kappa\gamma_5v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\end{cases}$$

性质4.1.1.

$$\begin{cases}u(\vec{p},\frac{1}{2})=-\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},1)]v(\vec{p},-\frac{1}{2})=i\varsigma[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},0)]v(\vec{p},\frac{1}{2})\\ u(\vec{p},-\frac{1}{2})=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},-1)]v(\vec{p},\frac{1}{2})=-i\varsigma[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},0)]v(\vec{p},-\frac{1}{2})\end{cases}$$

$$\begin{cases}v(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},1)]u(\vec{p},-\frac{1}{2})=-i\varsigma[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},0)]u(\vec{p},\frac{1}{2})\\ v(\vec{p},-\frac{1}{2})=-\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},-1)]u(\vec{p},\frac{1}{2})=i\varsigma[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},0)]u(\vec{p},-\frac{1}{2})\end{cases}$$

定理4.1.1.

$$\begin{cases}\sum_{h=1/2}^{-1/2}u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{3}\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},h)\gamma^a\Lambda_-(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{a'}\\ \sum_{h=1/2}^{-1/2}v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h)v^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{3}\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},h)\gamma^a\Lambda_+(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{a'}\end{cases}$$

证明: $\sum_{h=1/2}^{-1/2}u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)$

$$= \frac{1}{3}\sum_{h=2}^{-2}\{[\varepsilon_a(\vec{p},h)\gamma^a v(\vec{p},\tfrac{1}{2})][\varepsilon_{a'}(\vec{p},h)\gamma^{a'}v(\vec{p},\tfrac{1}{2})]^+ + [\varepsilon_a(\vec{p},h)\gamma^a v(\vec{p},-\tfrac{1}{2})][\varepsilon_{a'}(\vec{p},h)\gamma^{a'}v(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]^+\}$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},h)\gamma^a\Lambda_-(\vec{p},\tfrac{1}{2})\gamma^{a'}$$ □

证明: $\sum_{h=1/2}^{-1/2}v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h)v^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)$

$$= \frac{1}{3}\sum_{h=2}^{-2}\{[\varepsilon_a(\vec{p},h)\gamma^a u(\vec{p},\tfrac{1}{2})][\varepsilon_{a'}(\vec{p},h)\gamma^{a'}u(\vec{p},\tfrac{1}{2})]^+ + [\varepsilon_a(\vec{p},h)\gamma^a u(\vec{p},-\tfrac{1}{2})][\varepsilon_{a'}(\vec{p},h)\gamma^{a'}u(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]^+\}$$

$= \frac{1}{3}\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},h)\gamma^a\Lambda_+(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{a'}$ □

以上定理直接验证也是成立的。

4.2 自旋-2粒子R-S自旋基和Dirac自旋基的关系

引理4.2.1.

$$\begin{cases}\varepsilon_{ab}(\vec{p},2)\gamma^b u(\vec{p},\frac{1}{2})=0\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},1)\gamma^b u(\vec{p},\frac{1}{2})=-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_a(\vec{p},1)\gamma_5 u(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},0)\gamma^b u(\vec{p},\frac{1}{2})=-\frac{i}{\sqrt{3}}[\varepsilon_a(\vec{p},1)\gamma_5 u(\vec{p},-\frac{1}{2})+\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},0)\gamma_5 u(\vec{p},\frac{1}{2})]\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},-1)\gamma^b u(\vec{p},\frac{1}{2})=-\frac{i}{\sqrt{2}}[\varepsilon_a(\vec{p},-1)\gamma_5 u(\vec{p},\frac{1}{2})+\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},0)\gamma_5 u(\vec{p},-\frac{1}{2})]\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},-2)\gamma^b u(\vec{p},\frac{1}{2})=-i\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},-1)\gamma_5 u(\vec{p},-\frac{1}{2})\end{cases}$$

引理4.2.2.

$$\begin{cases}\varepsilon_{ab}(\vec{p},2)\gamma^b u(\vec{p},-\frac{1}{2})=i\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},1)\gamma_5 u(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},1)\gamma^b u(\vec{p},-\frac{1}{2})=\frac{i}{\sqrt{2}}[\varepsilon_a(\vec{p},1)\gamma_5 u(\vec{p},-\frac{1}{2})+\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},0)\gamma_5 u(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},0)\gamma^b u(\vec{p},-\frac{1}{2})=\frac{i}{\sqrt{3}}[\varepsilon_a(\vec{p},-1)\gamma_5 u(\vec{p},\frac{1}{2})+\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},0)\gamma_5 u(\vec{p},-\frac{1}{2})]\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},-1)\gamma^b u(\vec{p},-\frac{1}{2})=\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_a(\vec{p},-1)\gamma_5 u(\vec{p},-\frac{1}{2})\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},-2)\gamma^b u(\vec{p},-\frac{1}{2})=0\end{cases}$$

引理4.2.3.

$$\begin{cases}\varepsilon_{ab}(\vec{p},2)\gamma^b v(\vec{p},\frac{1}{2})=0\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},1)\gamma^b v(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_a(\vec{p},1)\gamma_5 v(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},0)\gamma^b v(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{i}{\sqrt{3}}[\varepsilon_a(\vec{p},1)\gamma_5 v(\vec{p},-\frac{1}{2})+\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},0)\gamma_5 v(\vec{p},\frac{1}{2})]\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},-1)\gamma^b v(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{i}{\sqrt{2}}[\varepsilon_a(\vec{p},-1)\gamma_5 v(\vec{p},\frac{1}{2})+\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},0)\gamma_5 v(\vec{p},-\frac{1}{2})]\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},-2)\gamma^b v(\vec{p},\frac{1}{2})=i\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},-1)\gamma_5 v(\vec{p},-\frac{1}{2})\end{cases}$$

引理4.2.4.

$$\begin{cases}\varepsilon_{ab}(\vec{p},2)\gamma^b v(\vec{p},-\frac{1}{2})=-i\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},1)\gamma_5 v(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},1)\gamma^b v(\vec{p},-\frac{1}{2})=-\frac{i}{\sqrt{2}}[\varepsilon_a(\vec{p},1)\gamma_5 v(\vec{p},-\frac{1}{2})+\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},0)\gamma_5 v(\vec{p},\frac{1}{2})]\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},0)\gamma^b v(\vec{p},-\frac{1}{2})=-\frac{i}{\sqrt{3}}[\varepsilon_a(\vec{p},-1)\gamma_5 vu(\vec{p},\frac{1}{2})+\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},0)\gamma_5 v(\vec{p},-\frac{1}{2})]\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},-1)\gamma^b v(\vec{p},-\frac{1}{2})=-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_a(\vec{p},-1)\gamma_5 v(\vec{p},-\frac{1}{2})\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},-2)\gamma^b v(\vec{p},-\frac{1}{2})=0\end{cases}$$

4.3 自旋-$\frac{3}{2}$粒子Rarita-Schwinger方程的准投影算子

性质4.3.1.

$$\begin{cases}\varepsilon_{a\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2})=\varepsilon_a(\vec{p},1)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \varepsilon_{a\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{3}}[\varepsilon_a(\vec{p},1)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},0)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]\\ \varepsilon_{a\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{3}}[\varepsilon_a(\vec{p},-1)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},0)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]\\ \varepsilon_{a\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{3}{2})=\varepsilon_a(\vec{p},-1)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\\ \gamma^a\varepsilon_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)=0\end{cases}$$

性质4.3.2.

$$\begin{cases}\tilde{\varepsilon}_{a\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2})=-\varepsilon_a(\vec{p},1)v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \tilde{\varepsilon}_{a\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})=-\frac{1}{\sqrt{3}}[\varepsilon_a(\vec{p},1)v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},0)v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]\\ \tilde{\varepsilon}_{a\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})=-\frac{1}{\sqrt{3}}[\varepsilon_a(\vec{p},-1)v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},0)v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]\\ \tilde{\varepsilon}_{a\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{3}{2})=-\varepsilon_a(\vec{p},-1)v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\\ \gamma^a\tilde{\varepsilon}_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)=0\end{cases}$$

推论4.3.1.

$$\begin{cases}\varepsilon_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p},\frac{3}{2})=-\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ab}(\vec{p},2)\gamma^b v(\vec{p},-\frac{1}{2})=i\varsigma\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},1)\gamma_5 v(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \varepsilon_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p},\frac{1}{2})=-i\varsigma\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\varepsilon_{ab}(\vec{p},1)\gamma^b v(\vec{p},-\frac{1}{2})=i\varsigma\varepsilon_{ab}(\vec{p},0)\gamma^b v(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \varepsilon_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p},-\frac{1}{2})=i\varsigma\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\varepsilon_{ab}(\vec{p},-1)\gamma^b v(\vec{p},\frac{1}{2})=-i\varsigma\varepsilon_{ab}(\vec{p},0)\gamma^b v(\vec{p},-\frac{1}{2})\\ \varepsilon_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p},-\frac{3}{2})=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ab}(\vec{p},-2)\gamma^b v(\vec{p},\frac{1}{2})=-i\varsigma\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},-1)\gamma_5 v(\vec{p},-\frac{1}{2})\\ \gamma^a\varepsilon_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)=0\end{cases}$$

推论4.3.2.

$$\begin{cases}\tilde{\varepsilon}_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p},\frac{3}{2})=-\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ab}(\vec{p},2)\gamma^b u(\vec{p},-\frac{1}{2})=i\varsigma\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},1)\gamma_5 u(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \tilde{\varepsilon}_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p},\frac{1}{2})=-i\varsigma\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\varepsilon_{ab}(\vec{p},1)\gamma^b u(\vec{p},-\frac{1}{2})=i\varsigma\varepsilon_{ab}(\vec{p},0)\gamma^b u(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \tilde{\varepsilon}_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p},-\frac{1}{2})=i\varsigma\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\varepsilon_{ab}(\vec{p},-1)\gamma^b u(\vec{p},\frac{1}{2})=-i\varsigma\varepsilon_{ab}(\vec{p},0)\gamma^b u(\vec{p},-\frac{1}{2})\\ \tilde{\varepsilon}_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p},-\frac{3}{2})=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ab}(\vec{p},-2)\gamma^b u(\vec{p},\frac{1}{2})=-i\varsigma\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},-1)\gamma_5 u(\vec{p},-\frac{1}{2})\\ \gamma^a\tilde{\varepsilon}_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)=0\end{cases}$$

定理4.3.1.

$$\begin{cases}\sum\limits_{h=3/2}^{-3/2}\varepsilon_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'[\tau'_\varsigma]}(\vec{p},h)=\frac{2}{5}\sum\limits_{h=2}^{-2}\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'b'}(\vec{p},h)\gamma^b\Lambda_-(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{b'}\\ \sum\limits_{h=3/2}^{-3/2}\tilde{\varepsilon}_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^+_{a'[\tau'_\varsigma]}(\vec{p},h)=\frac{2}{5}\sum\limits_{h=2}^{-2}\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'b'}(\vec{p},h)\gamma^b\Lambda_+(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{b'}\end{cases}$$

证明: $\sum\limits_{h=3/2}^{-3/2}\varepsilon_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'[\tau'_\varsigma]}(\vec{p},h)$

$$=\frac{2}{5}\sum_{h=2}^{-2}\{[\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)\gamma^b v(\vec{p},\frac{1}{2})][\varepsilon_{a'b'}(\vec{p},h)\gamma^{b'}v(\vec{p},\frac{1}{2})]^++[\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)\gamma^b v(\vec{p},-\frac{1}{2})][\varepsilon_{a'b'}(\vec{p},h)\gamma^{b'}v(\vec{p},-\frac{1}{2})]^+\}$$

$$=\frac{2}{5}\sum_{h=2}^{-2}\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'b'}(\vec{p},h)\gamma^b\Lambda_-(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{b'}$$ □

证明: $\sum\limits_{h=3/2}^{-3/2}\tilde{\varepsilon}_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^+_{a'[\tau'_\varsigma]}(\vec{p},h)$

$$=\frac{2}{5}\sum_{h=2}^{-2}\{[\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)\gamma^b u(\vec{p},\frac{1}{2})][\varepsilon_{a'b'}(\vec{p},h)\gamma^{b'}u(\vec{p},\frac{1}{2})]^++[\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)\gamma^b u(\vec{p},-\frac{1}{2})][\varepsilon_{a'b'}(\vec{p},h)\gamma^{b'}u(\vec{p},-\frac{1}{2})]^+\}$$

$$=\frac{2}{5}\sum_{h=2}^{-2}\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'b'}(\vec{p},h)\gamma^b\Lambda_+(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{b'}$$ □

4.4 自旋-$n+\frac{1}{2}$粒子Rarita-Schwinger方程的准投影算子猜想证明

引理4.4.1.

$$\begin{cases}[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},\kappa)]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=0,[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},-\kappa)]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=i\sqrt{2}\kappa\varsigma v(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}),[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},0)]u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=i\kappa\varsigma v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\\ [\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},\kappa)]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=0,[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},-\kappa)]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-i\sqrt{2}\kappa\varsigma u(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}),[\gamma^a\varepsilon_a(\vec{p},0)]v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=-i\kappa\varsigma u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\end{cases}$$

引理4.4.2. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},n+1)\gamma^c u(\vec{p},\frac{1}{2})$

$$=\frac{1}{\sqrt{C^0_{2(n+1)}}}\frac{1}{(n+1)!}\sqrt{2^0}C^0_{n+1}C^0_{n+1-0}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot}_{n+1}\underbrace{\cdot\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot}_{0}\underbrace{\cdot\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{0}\gamma^c u(\vec{p},\frac{1}{2})$$

$$= \underbrace{\varepsilon_a(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_b(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n}\varepsilon_c(\vec{p},1)\gamma^c u(\vec{p},\tfrac{1}{2}) = 0$$

引理4.4.3. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},n+1)\gamma^c u(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$$= \frac{1}{\sqrt{C^0_{2(n+1)}}}\frac{1}{(n+1)!}\sqrt{2^0}C^0_{n+1}C^0_{n+1-0}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n+1}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{0}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{0}\gamma^c u(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$= \underbrace{\varepsilon_a(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_b(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n}\varepsilon_c(\vec{p},1)\gamma^c u(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

$$= -i\varsigma\sqrt{2}(-1)^n\underbrace{\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},1)\cdot\cdot\tilde{\varepsilon}_b(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n}v(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

$$= -i\varsigma\sqrt{2}(-1)^n\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},n+\tfrac{1}{2})$$

引理4.4.4. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c\cdot\cdot}_{n+1}}(\vec{p},n)\gamma^c u(\vec{p},\frac{1}{2})$

$$= \frac{1}{\sqrt{C^1_{2(n+1)}}}\frac{1}{(n+1)!}\sqrt{2^1}C^1_{n+1}C^0_{n}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{1}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{0}\gamma^c u(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\underbrace{[\varepsilon_a(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_b(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_c(\vec{p},0)+\cdot\cdot+\varepsilon_a(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot\varepsilon_c(\vec{p},1)+\cdot\cdot+\varepsilon_a(\vec{p},0)\cdot\cdot\varepsilon_b(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_c(\vec{p},1)]}_{n+1}\gamma^c u(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}}\underbrace{\varepsilon_a(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_b(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n}\varepsilon_c(\vec{p},0)\gamma^c u(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{i\varsigma}{\sqrt{n+1}}(-1)^n\underbrace{\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},1)\cdot\cdot\tilde{\varepsilon}_b(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n}v(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{i\varsigma}{\sqrt{n+1}}(-1)^n\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},n+\tfrac{1}{2})$$

引理4.4.5. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c\cdot\cdot}_{n+1}}(\vec{p},n)\gamma^c u(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$$= \frac{1}{\sqrt{C^1_{2(n+1)}}}\frac{1}{(n+1)!}\sqrt{2^1}C^1_{n+1}C^0_{n}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{1}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{0}\gamma^c u(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\underbrace{[\varepsilon_a(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_b(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_c(\vec{p},0)+\cdot\cdot+\varepsilon_a(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot\varepsilon_c(\vec{p},1)+\cdot\cdot+\varepsilon_a(\vec{p},0)\cdot\cdot\varepsilon_b(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_c(\vec{p},1)]}_{n+1}\gamma^c u(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\{\underbrace{\varepsilon_a(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_b(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n}\varepsilon_c(\vec{p},0)\gamma^c u(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+\underbrace{[\varepsilon_a(\vec{p},0)\cdot\cdot\varepsilon_b(\vec{p},1)\cdot\cdot+\cdot\cdot+\varepsilon_a(\vec{p},1)\cdot\cdot\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot]}_{n}\varepsilon_c(\vec{p},1)\gamma^c u(\vec{p},-\tfrac{1}{2})\}$$

$$= -\frac{i\varsigma}{\sqrt{n+1}}(-1)^n\{\underbrace{\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},1)\cdot\cdot\tilde{\varepsilon}_b(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n}v(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+\sqrt{2}\underbrace{[\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},0)\cdot\cdot\tilde{\varepsilon}_b(\vec{p},1)\cdot\cdot+\cdot\cdot+\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},1)\cdot\cdot\tilde{\varepsilon}_b(\vec{p},0)\cdot\cdot]}_{n}v(\vec{p},\tfrac{1}{2})\}$$

$$= -\frac{i\varsigma}{\sqrt{n+1}}(-1)^n\frac{1}{n!}[\sqrt{2^0}C^0_nC^0_{n-0}\underbrace{\tilde{\varepsilon}_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot\tilde{\varepsilon}_b(\vec{p},1)\cdot\cdot_{\}}}_{n}v(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+\sqrt{2^1}C^1_nC^0_{n-1}\underbrace{\tilde{\varepsilon}_{\{a}(\vec{p},0)\cdot\cdot\tilde{\varepsilon}_b(\vec{p},1)\cdot\cdot_{\}}}_{n}v(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$

$$= -\frac{i\varsigma\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+1}}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{C^1_{2n+1}}}[\sqrt{C^0_{2n}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot}_{n}}v(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+\sqrt{C^1_{2n}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot}_{n}}v(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$

$$= -\frac{i\varsigma\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+1}}(-1)^n\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},n-\tfrac{1}{2})$$

引理4.4.6. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},n-1)\gamma^c u(\vec{p},\frac{1}{2})$

$$= \frac{1}{\sqrt{C^2_{2(n+1)}}}\frac{1}{(n+1)!}$$

$$[\sqrt{2^0}C^0_{n+1}C^1_{n+1-0}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{0}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{1}+\sqrt{2^2}C^2_{n+1}C^0_{n-1}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n-1}\underbrace{\varepsilon_b(\vec{p},0)\cdot\cdot}_{2}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)}_{0}]\gamma^c u(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C^2_{2(n+1)}}}(-1)^n[\underbrace{\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},1)\cdot\cdot\tilde{\varepsilon}_b(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n}\varepsilon_c(\vec{p},-1)\gamma^c u(\vec{p},\tfrac{1}{2})+\sqrt{2}\sqrt{2^1}\frac{1}{(n-1)!}\underbrace{\tilde{\varepsilon}_{\{a}(\vec{p},0)\cdot\cdot\tilde{\varepsilon}_b(\vec{p},1)\cdot\cdot_{\}}}_{n}\varepsilon_c(\vec{p},0)\gamma^c u(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$

$$= \frac{i\sqrt{2(2n+1)}\varsigma}{\sqrt{C^2_{2(n+1)}}}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{C^1_{2n+1}}}$$

$$[\sqrt{2^0}C_n^0C_{n-0}^0\frac{1}{n!}\underbrace{\tilde{\varepsilon}_{\{a}(\vec{p},1)\cdot\cdot\tilde{\varepsilon}_b(\vec{p},1)\cdot\cdot_{\}}}_{n}v(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+\sqrt{2^1}C_n^1C_{n-1}^0\frac{1}{n!}\underbrace{\tilde{\varepsilon}_{\{a}(\vec{p},0)\cdot\cdot\tilde{\varepsilon}_b(\vec{p},1)\cdot\cdot_{\}}}_{n}v(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$

$$=\frac{i\varsigma\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{C_{2n+1}^1}}[\sqrt{C_{2n}^0}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot}_{n}}v(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+\sqrt{C_{2n}^1}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot}_{n}}v(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$

$$=\frac{i\varsigma\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}(-1)^n\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},n-\tfrac{1}{2})$$

定理4.4.1.

$$\begin{cases}\gamma^c u(\vec{p},\tfrac{1}{2})\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n+1}}(\vec{p},h)=-i\varsigma\frac{\sqrt{n+1-h}}{\sqrt{n+1}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2})\\ \gamma^c u(\vec{p},-\tfrac{1}{2})\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n+1}}(\vec{p},h)=i\varsigma\frac{\sqrt{n+1+h}}{\sqrt{n+1}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})\end{cases}\quad\begin{cases}\gamma^c v(\vec{p},\tfrac{1}{2})\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n+1}}(\vec{p},h)=-i\varsigma\frac{\sqrt{n+1-h}}{\sqrt{n+1}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2})\\ \gamma^c v(\vec{p},-\tfrac{1}{2})\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n+1}}(\vec{p},h)=i\varsigma\frac{\sqrt{n+1+h}}{\sqrt{n+1}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})\end{cases}$$

证明：$\gamma^c u(\vec{p},\tfrac{1}{2})\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n+1}}(\vec{p},h)$

$$=\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h-1)\gamma^c u(\vec{p},\tfrac{1}{2})\tilde{\varepsilon}_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^1C_{n+1-h}^1}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h)\gamma^c u(\vec{p},\tfrac{1}{2})\tilde{\varepsilon}_c(\vec{p},0)$$

$$+\frac{\sqrt{C_{n+1-h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h+1)\gamma^c u(\vec{p},\tfrac{1}{2})\tilde{\varepsilon}_c(\vec{p},-1)$$

$$=-\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^1C_{n+1-h}^1}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h)i\varsigma v(\vec{p},\tfrac{1}{2})-\frac{\sqrt{C_{n+1-h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h+1)i\sqrt{2}\varsigma v(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$=-i\varsigma\frac{\sqrt{n+1-h}}{\sqrt{n+1}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2})$$ □

证明：$\gamma^c u(\vec{p},-\tfrac{1}{2})\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n+1}}(\vec{p},h)$

$$=\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h-1)\gamma^c u(\vec{p},-\tfrac{1}{2})\tilde{\varepsilon}_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^1C_{n+1-h}^1}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h)\gamma^c u(\vec{p},-\tfrac{1}{2})\tilde{\varepsilon}_c(\vec{p},0)$$

$$+\frac{\sqrt{C_{n+1-h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h+1)\gamma^c u(\vec{p},-\tfrac{1}{2})\tilde{\varepsilon}_c(\vec{p},-1)$$

$$=\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h-1)i\sqrt{2}\varsigma v(\vec{p},\tfrac{1}{2})+\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^1C_{n+1-h}^1}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h)i\varsigma v(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$=i\varsigma\frac{\sqrt{n+1+h}}{\sqrt{n+1}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})$$ □

证明：$\gamma^c v(\vec{p},\tfrac{1}{2})\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n+1}}(\vec{p},h)$

$$=\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h-1)\gamma^c v(\vec{p},\tfrac{1}{2})\varepsilon_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^1C_{n+1-h}^1}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h)\gamma^c v(\vec{p},\tfrac{1}{2})\varepsilon_c(\vec{p},0)$$

$$+\frac{\sqrt{C_{n+1-h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h+1)\gamma^c v(\vec{p},\tfrac{1}{2})\varepsilon_c(\vec{p},-1)$$

$$=-\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^1C_{n+1-h}^1}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h)i\varsigma u(\vec{p},\tfrac{1}{2})-\frac{\sqrt{C_{n+1-h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h+1)i\sqrt{2}\varsigma u(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$=-i\varsigma\frac{\sqrt{n+1-h}}{\sqrt{n+1}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2})$$ □

证明：$\gamma^c v(\vec{p},-\tfrac{1}{2})\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n+1}}(\vec{p},h)$

$$=\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h-1)\gamma^c v(\vec{p},-\tfrac{1}{2})\varepsilon_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^1C_{n+1-h}^1}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h)\gamma^c v(\vec{p},-\tfrac{1}{2})\varepsilon_c(\vec{p},0)$$

$$+\frac{\sqrt{C_{n+1-h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h+1)\gamma^c v(\vec{p},-\tfrac{1}{2})\varepsilon_c(\vec{p},-1)$$

$$=\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h-1)i\sqrt{2}\varsigma u(\vec{p},\tfrac{1}{2})+\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^1C_{n+1-h}^1}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h)i\varsigma u(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$=i\varsigma\frac{\sqrt{n+1+h}}{\sqrt{n+1}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})$$ □

推论4.4.1.

$$\begin{cases}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},n+1-l)\gamma^c u(\vec{p},\frac{1}{2})=-i\varsigma\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{n+1}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},n-l+\frac{3}{2})\\ \tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},n+1-l)\gamma^c u(\vec{p},-\frac{1}{2})=i\varsigma\frac{\sqrt{2n+2-l}}{\sqrt{n+1}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},n-l+\frac{1}{2})\\ \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},n+1-l)\gamma^c v(\vec{p},\frac{1}{2})=-i\varsigma\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{n+1}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},n-l+\frac{3}{2})\\ \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},n+1-l)\gamma^c v(\vec{p},-\frac{1}{2})=i\varsigma\frac{\sqrt{2n+2-l}}{\sqrt{n+1}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},n-l+\frac{1}{2})\end{cases}$$

推论4.4.2.

$$\begin{cases}\sum\limits_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}[\tau'_\varsigma]}(\vec{p},h)=\frac{n+1}{2n+3}\sum\limits_{h=n+1}^{-(n+1)}\sum\limits_{h'=1/2}^{-1/2}[\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},h)\gamma^c v(\vec{p},h')][\varepsilon_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},h)\gamma^{c'}v(\vec{p},h']^+\\ \sum\limits_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}[\tau'_\varsigma]}(\vec{p},h)=\frac{n+1}{2n+3}\sum\limits_{h=n+1}^{-(n+1)}\sum\limits_{h'=1/2}^{-1/2}[\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},h)\gamma^c u(\vec{p},h')][\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},h)\gamma^{c'}u(\vec{p},h']^+\end{cases}$$

推论4.4.3.

$$\begin{cases}\sum\limits_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}[\tau'_\varsigma]}(\vec{p},h)=\frac{1}{2}\frac{2n+2}{2n+3}\sum\limits_{h=n+1}^{-(n+1)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},h)\gamma^c\Lambda_-(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{c'}\\ \sum\limits_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}[\tau'_\varsigma]}(\vec{p},h)=\frac{1}{2}\frac{2n+2}{2n+3}\sum\limits_{h=n+1}^{-(n+1)}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},h)\gamma^c\Lambda_+(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{c'}\end{cases}$$

4.5 自旋-$n+\frac{1}{2}$粒子Rarita-Schwinger方程自旋基的合成

推论4.5.1.

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)=\frac{1}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}[\sqrt{C^{l-1}_{2n}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l+1)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+\sqrt{C^l_{2n}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]\\ \tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)=\frac{1}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}[\sqrt{C^{l-1}_{2n}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l+1)v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+\sqrt{C^l_{2n}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l)v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]\end{cases}$$

推论4.5.2.

$$\begin{cases}\frac{m}{E}u^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)=\frac{\sqrt{C^{l-1}_{2n}}}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l+1)=\sqrt{\frac{l}{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l+1)\\ \frac{m}{E}u^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)=\frac{\sqrt{C^l_{2n}}}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l)=\sqrt{\frac{2n+1-l}{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{m}{E}v^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)=\frac{\sqrt{C^{l-1}_{2n}}}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l+1)=\sqrt{\frac{l}{2n+1}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l+1)\\ \frac{m}{E}v^{+\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)=\frac{\sqrt{C^l_{2n}}}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l)=\sqrt{\frac{2n+1-l}{2n+1}}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n-l)\end{cases}$$

推论4.5.3. $\varepsilon_a(\vec{p},\kappa)=-\frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\bar{C}\gamma_a u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}),\varepsilon_a(\vec{p},0)=-iu^T(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\bar{C}\gamma_a u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$

推论4.5.4. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n+1}}(\vec{p},h)$

$$=\frac{\sqrt{C^2_{n+1+h}}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C^1_{n+1+h}C^1_{n+1-h}}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon_c(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C^2_{n+1-h}}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_c(\vec{p},-1)$$

定理4.5.1. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n+1}}(\vec{p},n+1-l)$

$$=-\frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_c\frac{\sqrt{2n+2-l}}{\sqrt{2n+2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)-\frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_c\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2n+2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},n+\frac{3}{2}-l)$$

证明:

$\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n+1}}(\vec{p},n+1-l)$

$$=\frac{\sqrt{C^2_{2n+2-l}}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n-l)\varepsilon_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C^1_{2n+2-l}C^1_l}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n+1-l)\varepsilon_c(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C^2_l}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n+2-l)\varepsilon_c(\vec{p},-1)$$

$$= \frac{\sqrt{C^2_{2n+2-l}}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n-l)[-\frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_c u(\vec{p},\frac{1}{2})]$$
$$+ \frac{\sqrt{C^1_{2n+2-l}C^1_l}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n+1-l)\{[-\frac{i}{2}u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_c u(\vec{p},\frac{1}{2})]+[-\frac{i}{2}u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_c u(\vec{p},-\frac{1}{2})]\}$$
$$+ \frac{\sqrt{C^2_l}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n+2-l)[-\frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_c u(\vec{p},-\frac{1}{2})]$$
$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_c\{\frac{\sqrt{C^2_{2n+2-l}}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n-l)u(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{C^1_{2n+2-l}C^1_l}}{\sqrt{2C^2_{2n+2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n+1-l)u(\vec{p},-\frac{1}{2})\}$$
$$- \frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_c\{\frac{\sqrt{C^1_{2n+2-l}C^1_l}}{\sqrt{2C^2_{2n+2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n+1-l)u(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{C^2_l}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n+2-l)u(\vec{p},-\frac{1}{2})\}$$
$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_c\{\frac{\sqrt{C^2_{2n+2-l}}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\frac{\sqrt{C^l_{2n+1}}}{\sqrt{C^l_{2n}}}\frac{\sqrt{C^l_{2n}}}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n-l)u(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{C^1_{2n+2-l}C^1_l}}{\sqrt{2C^2_{2n+2}}}\frac{\sqrt{C^l_{2n+1}}}{\sqrt{C^{l-1}_{2n}}}\frac{\sqrt{C^{l-1}_{2n}}}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n+1-l)u(\vec{p},-\frac{1}{2})\}$$
$$-\frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_c\{\frac{\sqrt{C^1_{2n+2-l}C^1_l}}{\sqrt{2C^2_{2n+2}}}\frac{\sqrt{C^{l-l}_{2n+1}}}{\sqrt{C^{l-1}_{2n}}}\frac{\sqrt{C^{l-1}_{2n}}}{\sqrt{C^{l-1}_{2n+1}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n+1-l)u(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{C^2_l}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\frac{\sqrt{C^{l-1}_{2n+1}}}{\sqrt{C^{l-2}_{2n}}}\frac{\sqrt{C^{l-2}_{2n}}}{\sqrt{C^{l-1}_{2n+1}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n+2-l)u(\vec{p},-\frac{1}{2})\}$$
$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_c\frac{\sqrt{C^2_{2n+2-l}}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\frac{\sqrt{C^l_{2n+1}}}{\sqrt{C^l_{2n}}}[\frac{\sqrt{C^l_{2n}}}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n-l)u(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{C^{l-1}_{2n}}}{\sqrt{C^l_{2n+1}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n+1-l)u(\vec{p},-\frac{1}{2})]$$
$$- \frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_c\frac{\sqrt{C^2_l}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\frac{\sqrt{C^{l-1}_{2n+1}}}{\sqrt{C^{l-2}_{2n}}}\{\frac{\sqrt{C^{l-1}_{2n}}}{\sqrt{C^{l-1}_{2n+1}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n+1-l)u(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{C^{l-2}_{2n}}}{\sqrt{C^{l-1}_{2n+1}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}}(\vec{p},n+2-l)u(\vec{p},-\frac{1}{2})\}$$
$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_c\frac{\sqrt{2n+2-l}}{\sqrt{2n+2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)-\frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_c\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2n+2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},n+\frac{3}{2}-l)$$
$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma_4\gamma_2\gamma_c\frac{\sqrt{2n+2-l}}{\sqrt{2n+2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},n+\frac{1}{2}-l)-\frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\gamma_4\gamma_2\gamma_c\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2n+2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},n+\frac{3}{2}-l) \quad \square$$

推论4.5.5. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n+1}}(\vec{p},h)=-\frac{i}{2}[\frac{\sqrt{n+1+h}}{\sqrt{n+1}}u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_c\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h-\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1-h}}{\sqrt{n+1}}u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_c\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h+\frac{1}{2})]$

推论4.5.6. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n+1}}(\vec{p},h)=-\frac{i}{2}[\frac{\sqrt{n+1+h}}{\sqrt{n+1}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h-\frac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\hat{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1-h}}{\sqrt{n+1}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h+\frac{1}{2})u_{\sigma_\varsigma}(\hat{p},-\frac{1}{2})](\bar{C}\gamma_c)^{\tau_\varsigma\sigma_\varsigma}$

5 各种势准投影算子的缩减模式

5.1 各种势准投影算子的正式定义

定义5.1.1.

$$\begin{cases}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n):=\sum\limits_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\sum\limits_{h=n}^{-n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\\ \Lambda_{+m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}):=\sum\limits_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)\\ \Lambda_{-m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2}):=\sum\limits_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)\end{cases}$$

5.2 各种势准投影算子之间的关系-最简缩减模式

定理5.2.1.

$$\begin{cases}\sum\limits_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{2n+1}{2n+2}(\frac{m}{E})^2\sum\limits_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)\Lambda_+^{\tau'_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \sum\limits_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}[\tau'_\varsigma]}(\vec{p},h)=\frac{2n+2}{2n+3}\frac{1}{2}\sum\limits_{h=n+1}^{-(n+1)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},h)\gamma^c\Lambda_-(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{c'}\end{cases}$$

定理5.2.2.

$$\begin{cases}\sum\limits_{h=n}^{-n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{2n+1}{2n+2}(\frac{m}{E})^2\sum\limits_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)\Lambda_-^{\tau'_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \sum\limits_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}[\tau'_\varsigma]}(\vec{p},h)=\frac{2n+2}{2n+3}\frac{1}{2}\sum\limits_{h=n+1}^{-(n+1)}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},h)\gamma^c\Lambda_+(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{c'}\end{cases}$$

推论5.2.1.

$$\begin{cases}\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{2n+1}{2n+3}\sum_{h=n+1}^{-(n+1)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},h)\eta^{cc'}\\ \sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_{\varsigma}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},h)=\frac{2n+2}{2n+4}\sum_{h=n+\frac{3}{2}}^{-(n+\frac{3}{2})}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}\tau_{\varsigma}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},h)\eta^{cc'}\end{cases}$$

证明： $\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)$

$$=\frac{2n+1}{2n+2}(\frac{m}{E})^2\sum_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_{\varsigma}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},h)\Lambda_{+}^{\tau'_{\varsigma}\tau_{\varsigma}}(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

$$=\frac{2n+1}{4n+6}(\frac{m}{E})^2\sum_{h=n+1}^{-(n+1)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},h)[\gamma^{c}\Lambda_{-}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\gamma^{c'}]_{\tau_{\varsigma}\tau'_{\varsigma}}\Lambda_{+}^{\tau'_{\varsigma}\tau_{\varsigma}}(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

$$=\frac{2n+1}{4n+6}(\frac{m}{E})^2\sum_{h=n+1}^{-(n+1)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},h)tr[\gamma^{c}\Lambda_{-}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\gamma^{c'}\Lambda_{+}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$

$$=\frac{2n+1}{2n+3}\sum_{h=n+1}^{-(n+1)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},h)\eta^{cc'}$$ □

证明： $\sum_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_{\varsigma}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},h)$

$$=\frac{2n+2}{2n+3}\frac{1}{2}\sum_{h=n+1}^{-(n+1)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},h)\gamma^{c}\Lambda_{-}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\gamma^{c'}$$

$$=\frac{2n+2}{2n+3}\frac{1}{2}\frac{2n+3}{2n+5}\sum_{h=n+2}^{-(n+2)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot cd}_{n+2}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'd'}_{n+2}}(\vec{p},h)\gamma^{c}\Lambda_{-}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\gamma^{c'}\eta^{dd'}$$

$$=\frac{2n+2}{2n+5}\frac{2n+5}{2n+4}\frac{1}{2}\frac{2n+4}{2n+5}\sum_{h=n+2}^{-(n+2)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot cd}_{n+2}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'd'}_{n+2}}(\vec{p},h)\gamma^{c}\Lambda_{-}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\gamma^{c'}\eta^{dd'}$$

$$=\frac{2n+2}{2n+4}\frac{1}{2}\frac{2n+4}{2n+5}\sum_{h=n+2}^{-(n+2)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot cd}_{n+2}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'd'}_{n+2}}(\vec{p},h)\gamma^{d}\Lambda_{-}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\gamma^{d'}\eta^{cc'}$$

$$=\frac{2n+2}{2n+4}\sum_{h=n+3/2}^{-(n+3/2)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}\tau_{\varsigma}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}\tau_{\varsigma}}(\vec{p},h)\eta^{cc'}$$ □

推论5.2.2.

$$\begin{cases}\sum_{h=n}^{-n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{2n+1}{2n+3}\sum_{h=n+1}^{-(n+1)}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},h)\eta^{cc'}\\ \sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_{\varsigma}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},h)=\frac{2n+2}{2n+4}\sum_{h=n+\frac{3}{2}}^{-(n+\frac{3}{2})}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}\tau_{\varsigma}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},h)\eta^{cc'}\end{cases}$$

推论5.2.3.

$$\begin{cases}\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{2n+1}{2(n+m)+1}\sum_{h=n+m}^{-(n+m)}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot c\cdot\cdot d}_{n+m}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'}_{n+m}}(\vec{p},h)\underbrace{\eta^{cc'}\cdot\cdot\eta^{dd'}}_{m}\\ \sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}\tau_{\varsigma}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'\cdot\cdot}_{n}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},h)=\frac{2n+2}{2(n+m)+2}\sum_{h=n+m+\frac{1}{2}}^{-(n+m+\frac{1}{2})}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot c\cdot\cdot d}_{n}\tau_{\varsigma}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'}_{n}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},h)\underbrace{\eta^{cc'}\cdot\cdot\eta^{dd'}}_{m}\end{cases}$$

推论5.2.4.

$$\begin{cases}\sum_{h=n}^{-n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{2n+1}{2(n+m)+1}\sum_{h=n+m}^{-(n+m)}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot c\cdot\cdot d}_{n+m}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'}_{n+m}}(\vec{p},h)\underbrace{\eta^{cc'}\cdot\cdot\eta^{dd'}}_{m}\\ \sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{2n+2}{2(n+m)+2}\sum_{h=n+m+\frac{1}{2}}^{-(n+m+\frac{1}{2})}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot c\cdot\cdot d}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)\underbrace{\eta^{cc'}\cdot\cdot\eta^{dd'}}_{m}\end{cases}$$

5.3 各种势准投影算子最简缩减模式的重新整理

定理5.3.1.

$$\begin{cases}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n)=\frac{2n+1}{2n+2}(\frac{m}{E})^2\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2})\Lambda_{\pm}^{\tau'_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}[\tau'_\varsigma]}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=\frac{2n+2}{2n+3}\frac{1}{2}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},n+1)\gamma^{c}\Lambda_{\mp}(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{c'}\end{cases}$$

推论5.3.1.

$$\begin{cases}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n)=\frac{2n+1}{2n+3}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},n+1)\eta^{cc'}\\ \Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=\frac{2n+2}{2n+4}\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}\tau_\varsigma\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{3}{2})\eta^{cc'}\end{cases}$$

推论5.3.2.

$$\begin{cases}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n)=\frac{2n+1}{2(n+l)+1}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot c\cdot\cdot d}_{n+l}\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'}_{n+l}}(\vec{p},n+l)\underbrace{\eta^{cc'}\cdot\cdot\eta^{dd'}}_{l}\\ \Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=\frac{2(n+\frac{1}{2})+1}{2(n+l+\frac{1}{2})+1}\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot c\cdot\cdot d}_{n+l}\tau_\varsigma\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'}_{n+l}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+l+\frac{1}{2})\underbrace{\eta^{cc'}\cdot\cdot\eta^{dd'}}_{l}\end{cases}$$

推论5.3.3.

$$\begin{cases}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n)=\frac{2n+1}{2(n+l+\frac{1}{2})+1}(\frac{m}{E})^2\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot c\cdot\cdot d}_{n+l}\tau_\varsigma\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'}_{n+l}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+l+\frac{1}{2})\underbrace{\eta^{cc'}\cdot\cdot\eta^{dd'}}_{l}\Lambda_{\pm}^{\tau'_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}[\tau'_\varsigma]}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=\frac{2(n+\frac{1}{2})+1}{2(n+1+l)+1}\frac{1}{2}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot c\cdot\cdot de}_{n+1+l}\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'e'}_{n+1+l}}(\vec{p},n+1+l)\underbrace{\eta^{cc'}\cdot\cdot\eta^{dd'}}_{l}\gamma^{e}\Lambda_{\mp}(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{e'}\end{cases}$$

5.4 各种势准投影算子之间的关系-物理缩减模式

推论5.4.1.

$$\begin{cases}\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{2n+1}{2n+3}\sum_{h=n+1}^{-(n+1)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},h)(\eta^{cc'}+\frac{p^{c}p^{+c'}}{m^2})\\ \sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{2n+2}{2n+4}\sum_{h=n+\frac{3}{2}}^{-(n+\frac{3}{2})}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)(\eta^{cc'}+\frac{p^{c}p^{+c'}}{m^2})\end{cases}$$

推论5.4.2.

$$\begin{cases}\sum_{h=n}^{-n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{2n+1}{2n+3}\sum_{h=n+1}^{-(n+1)}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},h)(\eta^{cc'}+\frac{p^{c}p^{+c'}}{m^2})\\ \sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{2n+2}{2n+4}\sum_{h=n+\frac{3}{2}}^{-(n+\frac{3}{2})}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)(\eta^{cc'}+\frac{p^{c}p^{+c'}}{m^2})\end{cases}$$

推论5.4.3.

$$\begin{cases}\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{2n+1}{2(n+m)+1}\sum_{h=n+m}^{-(n+m)}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot c\cdot\cdot d}_{n+m}}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'}_{n+m}}(\vec{p},h)\underbrace{(\eta^{cc'}+\frac{p^{c}p^{+c'}}{m^2})\cdot\cdot(\eta^{dd'}+\frac{p^{d}p^{+d'}}{m^2})}_{m}\\ \sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)\\ =\frac{2n+2}{2(n+m)+2}\sum_{h=n+m+\frac{1}{2}}^{-(n+m+\frac{1}{2})}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot c\cdot\cdot d}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)\underbrace{(\eta^{cc'}+\frac{p^{c}p^{+c'}}{m^2})\cdot\cdot(\eta^{dd'}+\frac{p^{d}p^{+d'}}{m^2})}_{m}\end{cases}$$

推论5.4.4.

$$\begin{cases}\sum_{h=n}^{-n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{2n+1}{2(n+m)+1}\sum_{h=n+m}^{-(n+m)}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot c\cdot\cdot d}_{n+m}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'}_{n+m}}(\vec{p},h)\underbrace{(\eta^{cc'}+\frac{p^{c}p^{+c'}}{m^2})\cdot\cdot(\eta^{dd'}+\frac{p^{d}p^{+d'}}{m^2})}_{m}\\ \sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}\tau_{\varsigma}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'\cdot\cdot}_{n}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},h)\\ =\frac{2n+2}{2(n+m)+2}\sum_{h=n+m+\frac{1}{2}}^{-(n+m+\frac{1}{2})}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot c\cdot\cdot d}_{n}\tau_{\varsigma}}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'}_{n}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},h)\underbrace{(\eta^{cc'}+\frac{p^{c}p^{+c'}}{m^2})\cdot\cdot(\eta^{dd'}+\frac{p^{d}p^{+d'}}{m^2})}_{m}\end{cases}$$

5.5 各种势准投影算子物理缩减模式的重新整理

定理5.5.1.

$$\begin{cases}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n)=\frac{2n+1}{2n+3}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}}(\vec{p},n+1)\Lambda_m^{cc'}(\vec{p},1)\\ \Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_{\varsigma}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=\frac{2n+2}{2n+4}\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n+1}\tau_{\varsigma}\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'}_{n+1}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},n+\frac{3}{2})\Lambda_m^{cc'}(\vec{p},1)\end{cases}$$

推论5.5.1.

$$\begin{cases}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n)=\frac{2n+1}{2(n+l)+1}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot c\cdot\cdot d}_{n+l}\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'}_{n+l}}(\vec{p},n+l)\underbrace{\Lambda_m^{cc'}(\vec{p},1)\cdot\cdot\Lambda_m^{dd'}(\vec{p},1)}_{l}\\ \Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_{\varsigma}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=\frac{2(n+\frac{1}{2})+1}{2(n+l+\frac{1}{2})+1}\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot c\cdot\cdot d}_{n+l}\tau_{\varsigma}\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'}_{n+l}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},n+l+\frac{1}{2})\underbrace{\Lambda_m^{cc'}(\vec{p},1)\cdot\cdot\Lambda_m^{dd'}(\vec{p},1)}_{l}\end{cases}$$

推论5.5.2.

$$\begin{cases}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n)=\frac{2n+1}{2(n+2)+1}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot cd}_{n+2}\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'd'}_{n+2}}(\vec{p},n+2)\Lambda_m^{cdc'd'}(\vec{p},2)\\ \Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_{\varsigma}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=\frac{2(n+\frac{1}{2})+1}{2(n+2+\frac{1}{2})+1}\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot cd}_{n+2}\tau_{\varsigma}\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'd'}_{n+2}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},n+2+\frac{1}{2})\Lambda_m^{cdc'd'}(\vec{p},2)\end{cases}$$

推论5.5.3.

$$\begin{cases}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n)=\frac{2n+1}{2(n+l)+1}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot c\cdot\cdot d}_{n+l}\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'}_{n+l}}(\vec{p},n+l)\Lambda_m^{\overbrace{c\cdot\cdot d}^{l}\overbrace{c'\cdot\cdot d'}^{l}}(\vec{p},l)\\ \Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_{\varsigma}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=\frac{2(n+\frac{1}{2})+1}{2(n+l+\frac{1}{2})+1}\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot c\cdot\cdot d}_{n+l}\tau_{\varsigma}\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'}_{n+l}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},n+l+\frac{1}{2})\Lambda_m^{\overbrace{c\cdot\cdot d}^{l}\overbrace{c'\cdot\cdot d'}^{l}}(\vec{p},l)\end{cases}$$

推论5.5.4.

$$\begin{cases}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n)=\frac{2n+1}{2(n+l+\frac{1}{2})+1}(\frac{m}{E})^2\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot c\cdot\cdot d}_{n+l}\tau_{\varsigma}\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'}_{n+l}\tau'_{\varsigma}}(\vec{p},n+l+\frac{1}{2})\Lambda_m^{\overbrace{c\cdot\cdot d}^{l}\overbrace{c'\cdot\cdot d'}^{l}}(\vec{p},l)\Lambda_{\pm}^{\tau'_{\varsigma}\tau_{\varsigma}}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_{\varsigma}]\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}[\tau'_{\varsigma}]}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=\frac{2(n+\frac{1}{2})+1}{2(n+1+l)+1}\frac{1}{2}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot c\cdot\cdot de}_{n+1+l}\underbrace{a'b'\cdot\cdot c'\cdot\cdot d'e'}_{n+1+l}}(\vec{p},n+1+l)\Lambda_m^{\overbrace{c\cdot\cdot d}^{l}\overbrace{c'\cdot\cdot d'}^{l}}(\vec{p},l)\gamma^{e}\Lambda_{\mp}(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{e'}\end{cases}$$

5.6 各种势准投影算子的通用性质

性质5.6.1.

$$\begin{cases}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n)=\frac{1}{n!}\Lambda_{m\underbrace{\{ab\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n)=\frac{1}{n!}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\underbrace{(a'b'\cdot\cdot)}_{n}}(\vec{p},n)=\frac{1}{(n!)^2}\Lambda_{m\underbrace{\{ab\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{(a'b'\cdot\cdot)}_{n}}(\vec{p},n)\\ \delta^{ab}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n)=\delta^{a'b'}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n)=0,p^{a}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n)=p^{+a'}\Lambda_{m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n)=0\end{cases}$$

性质5.6.2.

$$\begin{cases}\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=\frac{1}{n!}\Lambda_{\pm m\underbrace{\{ab\cdot\cdot\}}_{n}\tau_\varsigma\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2})\\ =\frac{1}{n!}\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma\underbrace{(a'b'\cdot\cdot)}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=\frac{1}{(n!)^2}\Lambda_{\pm m\underbrace{\{ab\cdot\cdot\}}_{n}\tau_\varsigma\underbrace{(a'b'\cdot\cdot)}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2})\\ \delta^{ab}\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=\delta^{a'b'}\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=0\\ p^a\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=p^{+a'}\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=0\\ \gamma^a\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=0,\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}[\tau'_\varsigma]}(\vec{p},n+\frac{1}{2})\gamma^{a'}=0\\ (\pm i\gamma^c p_c+m)\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},n+\frac{1}{2})=0,\Lambda_{\pm m\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}[\tau'_\varsigma]}(\vec{p},n+\frac{1}{2})(\pm i\gamma^{c'}p^+_{c'}-m)=0\end{cases}$$

6 势对易规则的直接解法(等价变换法)

6.1 引理

引理6.1.1. $\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}(p)[\delta_{ab}+\frac{p_ap_b}{m^2}]=0$

6.2 势$A_{abc\cdot\cdot}$对易规则的变换求法

定理6.2.1.

$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{3n-1}}\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot)}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\\ A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=\frac{1}{(i2m)^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x)=\frac{1}{(2n)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\}}_{2n}}(x)\\ A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(x)=\frac{1}{(-i2m)^n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x)=\frac{1}{(2n)!}\psi^+_{\underbrace{\{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\}}_{2n}}(x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow[A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(x')]=i\frac{1}{2^{5n-1}m^{2n}}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}$$

$$\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^c_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^d_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+c'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\mathbb{X}^{+d'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(x')\cdot\cdot)}_{n}\underbrace{[\eta_{cc'}-\frac{\partial_c\partial^+_{c'}}{m^2}][\eta_{dd'}-\frac{\partial_d\partial^+_{d'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')$$

$$=i\frac{1}{2^{4n-1}m^{2n}}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}$$

$$\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}_{2n}\Delta(x-x')$$

证明： $[A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(x')]$

$$=\frac{1}{(2m)^{2n}}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]$$

$$=\frac{1}{(2m)^{2n}}\frac{i}{2^{3n-1}[(2n)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}$$

$$\underbrace{\mathbb{X}^c_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^d_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+c'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\mathbb{X}^{+d'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(x')\cdot\cdot)}_{n}\underbrace{[\eta_{cc'}-\frac{\partial_c\partial^+_{c'}}{m^2}][\eta_{dd'}-\frac{\partial_d\partial^+_{d'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')$$

$$=i\frac{1}{2^{5n-1}m^{2n}}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}$$

$$\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^c_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^d_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+c'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\mathbb{X}^{+d'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(x')\cdot\cdot)}_{n}\underbrace{[\eta_{cc'}-\frac{\partial_c\partial^+_{c'}}{m^2}][\eta_{dd'}-\frac{\partial_d\partial^+_{d'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')$$

$$= i\frac{1}{2^{4n-1}m^{2n}}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}$$
$$\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}_{2n}\Delta(x-x')$$ □

6.3 势$A_{abc\cdot\cdot\tau_\varsigma}$反对易规则的变换求法

定理6.3.1.

$$\begin{cases}\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')\} \\ =\frac{i}{2^{3n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x') \\ A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x)=\frac{1}{(i2m)^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x)=\frac{1}{(2n+1)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma\}}_{2n+1}}(x) \\ A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(x)=\frac{1}{(-i2m)^n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x)=\frac{1}{(2n+1)!}\psi^+_{\underbrace{\{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma\}}_{2n+1}}(x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\{A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\}$$
$$= i\frac{1}{2^{5n}m^{2n}}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}$$
$$\frac{1}{[(2n+1)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')$$
$$= i\frac{1}{2^{4n}m^{2n}}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}$$
$$\frac{1}{[(2n+1)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta(x-x')$$

证明: $\{A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\}$

$$=\frac{1}{(2m)^{2n}}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')\}$$
$$= i\frac{1}{2^{5n}m^{2n}}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}$$
$$\frac{1}{[(2n+1)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')$$
$$= i\frac{1}{2^{4n}m^{2n}}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}$$
$$\frac{1}{[(2n+1)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta(x-x')$$ □

6.4 Bargmann-Wigner全对称方程的等时量子化规则

定理6.4.1.

$$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-2^{s+1}}=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma\otimes\sigma_z,i\varsigma)^a_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\sigma\otimes\sigma_z,i\varsigma)^b_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x-x')$$
$$\Rightarrow[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\xi_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\xi'_\varsigma\eta'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{r}',t)]_{-2^{s+1}}$$
$$=-\frac{(i\varsigma)^{2s+1}}{2^{2s-1}}\sum_{k=0}^{[s-\frac{1}{2}]}\frac{(2s)!}{(2s-2k-1)!(2k)!1!}\overbrace{[(\sigma\cdot\nabla)\otimes\sigma_z]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(\sigma\cdot\nabla)\otimes\sigma_z]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-2k-1}\overbrace{\delta_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\delta_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2k}\nabla^{2k}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$$

7 有质量粒子协变对易规则的总结与梳理

7.1 有质量玻色子协变对易规则梳理

定义7.1.1. $$\begin{cases}\hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_n a'_1\cdot\cdot a'_n}(n)=\frac{1}{(n!)^2}\sum_{P(a)}^{P(b)}\sum_{r=0}^{[n/2]}k_r\hat{P}_{a_1a_2}\hat{P}_{a'_1a'_2}\cdot\cdot\hat{P}_{a_{2r-1}a_{2r}}\hat{P}_{a'_{2r-1}a'_{2r}}\prod_{i=2r+1}^{n}\hat{P}_{a_ia'_i}\\ k_r=(-\frac{1}{2})^r\frac{n!(2n-2r-1)!!}{r!(n-2r)!(2n-1)!!}\end{cases}$$

定义7.1.2. $$\begin{cases}\hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_n b_1\cdot\cdot b_n}(n)=\frac{1}{(n!)^2}\sum_{P(a)}^{P(b)}\sum_{r=0}^{[n/2]}k_r\hat{P}_{a_1a_2}\hat{P}_{b_1b_2}\cdot\cdot\hat{P}_{a_{2r-1}a_{2r}}\hat{P}_{b_{2r-1}b_{2r}}\prod_{i=2r+1}^{n}\hat{P}_{a_ib_i}\\ \hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_n b_1\cdot\cdot b_n}(n):=\eta^{a'_1}_{b_1}\eta^{a'_2}_{b_2}\cdot\cdot\eta^{a'_n}_{b_n}\hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_n a'_1\cdot\cdot a'_n}(n)\end{cases}$$

定理7.1.1. $[A_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}(x),\bar{A}_{b_1b_2\cdot\cdot b_n}(x')]=i\hat{P}_{a_1a_2\cdot\cdot a_nb_1b_2\cdot\cdot b_n}(n)\Delta(x-x'),\bar{A}_{b_1b_2\cdot\cdot b_n}:=\eta^{b'_1}_{b_1}\eta^{b'_2}_{b_2}\cdot\cdot\eta^{b'_n}_{b_n}A^+_{b'_1b'_2\cdot\cdot b'_n}$

$$[\Updownarrow]$$

定理7.1.2. $[A_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}(x),A^+_{a'_1a'_2\cdot\cdot a'_n}(x')]=i\hat{P}_{a_1a_2\cdot\cdot a_na'_1a'_2\cdot\cdot a'_n}(n)\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理7.1.3. $$[A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(x')]=\frac{1}{m^{2n}}\frac{i}{2^{5n-1}[(2n)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}$$
$$\underbrace{\mathbb{X}^c_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^d_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+c'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\mathbb{X}^{+d'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(x')\cdot\cdot)}_{n}\underbrace{[\eta_{cc'}-\frac{\partial_c\partial^+_{c'}}{m^2}][\eta_{dd'}-\frac{\partial_d\partial^+_{d'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')$$

$$[\Updownarrow]$$

定理7.1.4. $$[A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(x')]=\frac{1}{m^{2n}}\frac{i}{2^{4n-1}[(2n)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}$$
$$\underbrace{[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}_{2n}\Delta(x-x')$$

$$[\Updownarrow]$$

定理7.1.5. $$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{3n-1}[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot)}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')$$

$$[\Updownarrow]$$

定理7.1.6. $$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{2n-1}[(2n)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}_{2n}\Delta(x-x')$$

$$[\Downarrow]$$

定理7.1.7. $$[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=i\frac{(i\varsigma)^{2n}}{2^{2n-1}[(2n)!]^2}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2n}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2n}\Delta(x-x')$$

$$[\Updownarrow]$$

定理7.1.8. $$[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]=i\frac{(-1)^{2n}}{2^{n-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(n)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x-x')$$

势A和场ψ的对易关系都有两种等价表述方式，且互为前提和互为因果。既可以从势对易关系推出一切，也可以从场对易关系推出一切。这说明对于有质量粒子，势和场两种描述方案是完全等价的。并且可以从有质量粒子的对易规则推得与无质量粒子完全类似的对易规则，反之则不行。

猜想7.1.1. $\frac{1}{(n!)^2}\sum_{P(a)}^{P(a')}\sum_{r=0}^{[n/2]}(-\frac{1}{2})^r\frac{n!(2n-2r-1)!!}{r!(n-2r)!(2n-1)!!}\prod_{i=1}^{r}(\delta_{a_{2i-1}a_{2i}}-\frac{\partial_{a_{2i-1}}\partial_{a_{2i}}}{m^2})(\delta_{a'_{2r-1}a'_{2r}}-\frac{\partial_{a'_{2r-1}}\partial_{a'_{2r}}}{m^2})\prod_{j=2r+1}^{n}(\eta_{a_ja'_j}-\frac{\partial_{a_j}\partial^+_{a'_j}}{m^2})$

$$=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{1-4n}}{[(2n)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\underbrace{[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}_{2n}$$

7.2 有质量玻色子对易规则与准投影算子之间的关系

推论7.2.1. $\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)$

$$=\frac{1}{2^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_{a'})^{+\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\bar{C}\gamma_{b'})^{+\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\sum_{h=n}^{-n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)$$

定理7.2.1. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=2im^{2s}\sum_{h=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(-i\partial,h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(-i\partial,h)$

定理7.2.2. $[A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(x')]=\frac{i}{2^{n-1}}\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(-i\partial,h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(-i\partial,h)$

证明： $[A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(x')]=\frac{1}{m^{2n}}\frac{i}{2^{4n-1}[(2n)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}$

$$\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}_{2n}\Delta(x-x')$$

$$=\frac{i}{2^{2n-1}}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\sum_{h=n}^{-n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(-i\partial,h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(-i\partial,h)\Delta(x-x')$$

$$=\frac{i}{2^{n-1}}\sum_{h=n}^{-n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(-i\partial,h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(-i\partial,h)$$ □

7.3 有质量费米子协变反对易规则梳理

定义7.3.1. $\hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma a'_1\cdot\cdot a'_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})=\frac{n+1}{2n+3}\hat{P}_{aa_1\cdot\cdot a_na'a'_1\cdot\cdot a'_n}(n+1)[\gamma^a(-m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\gamma^{a'}]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma},\gamma^{a'}=\gamma^a\eta_a^{a'}$

定义7.3.2. $\begin{cases}\hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma b_1\cdot\cdot b_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})=\frac{n+1}{2n+3}\hat{P}_{aa_1\cdot\cdot a_nbb_1\cdot\cdot b_n}(n+1)[\gamma^a(m+\gamma^c\partial_c)\gamma^b\gamma^4]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\\ \hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma b_1\cdot\cdot b_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2}):=\eta_{b_1}^{a'_1}\eta_{b_2}^{a'_2}\cdot\cdot\eta_{b_n}^{a'_n}\hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma a'_1\cdot\cdot a'_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})\end{cases}$

推论7.3.1. $\hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma b_1\cdot\cdot b_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})=\frac{n+1}{2n+3}\hat{P}_{aa_1\cdot\cdot a_nbb_1\cdot\cdot b_n}(n+1)[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^a\gamma^b\gamma^4]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}$

定理7.3.1. $\{A_{a_1a_2\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma}(x),\bar{A}_{b_1b_2\cdot\cdot b_n\tau'_\varsigma}(x')\}=i\hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma b_1\cdot\cdot b_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理7.3.2. $\{A_{a_1a_2\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma}(x),A^+_{a'_1a'_2\cdot\cdot a'_n\tau'_\varsigma}(x')\}=i\hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma a'_1\cdot\cdot a'_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理7.3.3. $\{A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\}=i\frac{1}{m^{2n}}\frac{1}{2^{5n}[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}$

$$\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')$$

$$[\Updownarrow]$$

定理7.3.4. $\{A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\}=\frac{1}{m^{2n}}\frac{i}{2^{4n}[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}$
$\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理7.3.5. $\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}(x')\}$
$=\frac{i}{2^{3n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理7.3.6. $\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}(x')\}=\frac{i}{2^{2n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}_{2n+1}\Delta(x-x')$

$$[\Downarrow]$$

定理7.3.7. $\{\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}(x')\}=i\frac{(i\varsigma)^{2n+1}}{2^{2n}[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2n+1}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2n+1}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理7.3.8. $\{\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')\}=i\frac{(-1)^{2n+1}}{2^{n-1/2}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2n+1}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2n+1}\Delta(x-x')$

势A和场ψ的反对易关系都有两种等价表述方式，且互为前提和互为因果。既可以从势反对易关系推出一切，也可以从场反对易关系推出一切。这说明对于有质量粒子，势和场两种描述方案是完全等价的。并且可以从有质量粒子的对易规则推得与无质量粒子完全类似的反对易规则，反之则不行。

7.4 有质量费米子对易规则与准投影算子之间的关系

推论7.4.1. $\sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)$
$=\frac{1}{2^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)$

定理7.4.1. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=2im^{2s}\sum_{h=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(-i\partial,h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(-i\partial,h)$

定理7.4.2. $\{A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\}=\frac{im}{2^{n-1}}\sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(-i\partial,h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(-i\partial,h)$

证明： $\{A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\}=\frac{1}{m^{2n}}\frac{i}{2^{4n}[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}$
$\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta(x-x')$
$=\frac{im}{2^{2n-1}}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(-i\partial,h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(-i\partial,h)\Delta(x-x')$
$=\frac{im}{2^{n-1}}\sum_{h=n+\frac{1}{2}}^{-(n+\frac{1}{2})}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(-i\partial,h)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(-i\partial,h)$ □

8 势方程的对易函数、因果函数和费曼传播子

8.1 Klein-Gordon方程的对易函数、因果函数和费曼传播子

推论8.1.1.

$$\begin{cases}\Delta_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{1-4n}}{[(2n)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\underbrace{[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}_{2n}\Delta(x)\\ \Delta^{(+)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{1-4n}}{[(2n)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\underbrace{[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}_{2n}\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta^{(-)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{1-4n}}{[(2n)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\underbrace{[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}_{2n}\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{(l)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{1-4n}}{[(2n)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\underbrace{[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}_{2n}\Delta^{(l)}(x)\end{cases}$$

推论8.1.2.

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{1-4n}}{[(2n)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\{\underbrace{[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}_{2n}\Delta^{(c)}(x)\\ -\sum_{k=0}^{2n}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{i^{k+l}m^{2n-k}(2n)!}{l!(k-l)!(2n-k)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots}^{k-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^4)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots\})}^{2n-k}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l'=1}^{k-l}\partial_t^{k-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}\Delta(x)\}\\ \Delta^{(F)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{1-4n}}{[(2n)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\{\underbrace{[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}_{2n}\Delta_F(x)\\ -i\sum_{k=0}^{2n}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{i^{k+l}m^{2n-k}(2n)!}{l!(k-l)!(2n-k)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots}^{k-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^4)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots\})}^{2n-k}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l'=1}^{k-l}\partial_t^{k-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}\Delta(x)\}\\ =i\Delta^{(c)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)\end{cases}$$

推论8.1.3.

$$\begin{cases}\Delta^{ret}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{1-4n}}{[(2n)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\{\underbrace{[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}_{2n}\Delta^{ret}(x)\\ -\sum_{k=0}^{2n}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{i^{k+l}m^{2n-k}(2n)!}{l!(k-l)!(2n-k)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots}^{k-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^4)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots\})}^{2n-k}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l'=1}^{k-l}\partial_t^{k-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}\Delta(x)\}\\ \Delta^{adv}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{1-4n}}{[(2n)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\{\underbrace{[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}_{2n}\Delta^{adv}(x)\\ -\sum_{k=0}^{2n}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{i^{k+l}m^{2n-k}(2n)!}{l!(k-l)!(2n-k)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots}^{k-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^4)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots\})}^{2n-k}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l'=1}^{k-l}\partial_t^{k-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}\Delta(x)\}\end{cases}$$

引理8.1.1. $\Delta(x)\partial_t^n\delta(t)=\sum_{l=0}^{[(n-1)/2]}C_n^{2l+1}(\nabla^2-m^2)^l\partial_t^{n-2l-1}\delta^4(x)$

推论8.1.4. $\Delta(x)\partial_t^{n-1-l}\delta(t)=\sum_{r=0}^{[(n-l-2)/2]}C_{n-1-l}^{2r+1}(\nabla^2-m^2)^r\partial_t^{k-l-2-2r}\delta^4(x)$

引理8.1.2. $\Delta_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)|_{t=0}$

$$=\frac{-i}{m^{2n}}\frac{2^{1-4n}}{[(2n)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\sum_{l=0}^{n-1}[C_{2n}^{2l+1}\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdots}^{2n-2l-1}\overbrace{\cdots\delta_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}^{2l+1}](m^2-\nabla^2)^l\delta^3(\vec{r})$$

引理8.1.3. $\partial_t\Delta_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)|_{t=0}$

$$= -\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{1-4n}}{[(2n)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\sum_{l=0}^{n}[C_{2n}^{2l}\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdots}^{2n-2l}\overbrace{\cdots\delta_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}^{2l}](m^2-\nabla^2)^l\delta^3(\vec{r})$$

推论8.1.5.

$$\begin{cases}(\partial^c\partial_c-m^2)\Delta_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=0,\delta^{ab}\Delta_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=0,\partial^a\Delta_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=0\\(\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{(+)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=0,\delta^{ab}\Delta^{(+)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=0,\partial^a\Delta^{(+)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=0\\(\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{(-)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=0,\delta^{ab}\Delta^{(-)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=0,\partial^a\Delta^{(-)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=0\end{cases}$$

推论8.1.6.

$$\begin{cases}(\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{(c)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=-\delta'(t)\Delta_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)|_{t=0}-\delta(t)\partial_t\Delta_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)|_{t=0},\delta^{ab}\Delta^{(c)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=0,\partial^a\Delta^{(c)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)\\(\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{(F)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=-i\delta'(t)\Delta_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)|_{t=0}-i\delta(t)\partial_t\Delta_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)|_{t=0},\delta^{ab}\Delta^{(F)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=0,\partial^a\Delta^{(F)}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x\\(\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{ret}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=-\delta'(t)\Delta_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)|_{t=0}-\delta(t)\partial_t\Delta_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)|_{t=0},\delta^{ab}\Delta^{ret}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=0,\partial^a\Delta^{ret}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)\\(\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{adv}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=-\delta'(t)\Delta_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)|_{t=0}-\delta(t)\partial_t\Delta_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)|_{t=0},\delta^{ab}\Delta^{adv}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)=0,\partial^a\Delta^{adv}_{\underbrace{a\cdots}_{n}\underbrace{a'\cdots}_{n}}(n;x)\end{cases}$$

8.2 Rarita-Schwinger方程的对易函数、因果函数和费曼传播子

推论8.2.1.

$$\begin{cases}\Delta_{\underbrace{a\cdots\tau_\varsigma}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{-4n}}{[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdots[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta(x)\\\Delta^{(+)}_{\underbrace{a\cdots\tau_\varsigma}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{-4n}}{[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdots[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta^{(+)}(x)\\\Delta^{(-)}_{\underbrace{a\cdots\tau_\varsigma}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{-4n}}{[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdots[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta^{(-)}(x)\\\Delta^{(l)}_{\underbrace{a\cdots\tau_\varsigma}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{-4n}}{[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdots[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta^{(l)}(x)\end{cases}$$

推论8.2.2.

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{\underbrace{a\cdots\tau_\varsigma}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{-4n}}{[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\{\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdots[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta^{(c)}(x)\\-\sum_{k=0}^{2n+1}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{i^{k+l}m^{2n+1-k}(2n+1)!}{l!(k-l)!(2n+1-k)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots}^{k-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^4)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots\})}^{2n+1-k}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l'=1}^{k-l}\partial_t^{k-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}\Delta(x)\}\\\Delta^{(F)}_{\underbrace{a\cdots\tau_\varsigma}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{-4n}}{[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\{\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdots[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta_F(x)\\-i\sum_{k=0}^{2n+1}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{i^{k+l}m^{2n+1-k}(2n+1)!}{l!(k-l)!(2n+1-k)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots}^{k-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^4)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots\})}^{2n+1-k}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l'=1}^{k-l}\partial_t^{k-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}\Delta(x)\}\\=i\Delta^{(c)}_{\underbrace{a\cdots\tau_\varsigma}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)\end{cases}$$

推论8.2.3.

$$\begin{cases}\Delta^{ret}_{\underbrace{a\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{n}\underbrace{a'\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{-4n}}{[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\{\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta^{ret}(x)\\ -\sum_{k=0}^{2n+1}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{i^{k+l}m^{2n+1-k}(2n+1)!}{l!(k-l)!(2n+1-k)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdot\cdot}^{k-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^4)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2n+1-k}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{n}\sum_{l'=1}^{k-l}\partial_t^{k-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}\Delta(x)\}\\ \Delta^{adv}_{\underbrace{a\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{n}\underbrace{a'\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{-4n}}{[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\{\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta^{adv}(x)\\ -\sum_{k=0}^{2n+1}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{i^{k+l}m^{2n+1-k}(2n+1)!}{l!(k-l)!(2n+1-k)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdot\cdot}^{k-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^4)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2n+1-k}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{n}\sum_{l'=1}^{k-l}\partial_t^{k-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}\Delta(x)\}\end{cases}$$

引理8.2.1. $\Delta(x)\partial_t^n\delta(t)=\sum_{l=0}^{[(n-1)/2]}C_n^{2l+1}(\nabla^2-m^2)^l\partial_t^{n-2l-1}\delta^4(x)$

推论8.2.4. $\Delta(x)\partial_t^{n-1-l}\delta(t)=\sum_{r=0}^{[(n-l-2)/2]}C_{n-1-l}^{2r+1}(\nabla^2-m^2)^r\partial_t^{k-l-2-2r}\delta^4(x)$

推论8.2.5.

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{\underbrace{a\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{n}\underbrace{a'\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{-4n}}{[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\{\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta^{(c)}(x)\\ +\sum_{k=0}^{2n+1}\sum_{l=0}^{k-2}\sum_{r=0}^{[(k-l-2)/2]}C_{n-l-1}^{2r+1}\frac{i^{k+l}m^{2n+1-k}(2n+1)!}{l!(k-l)!(2n+1-k)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdot\cdot}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\cdot\cdot}^{k-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2n+1-k}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{l}(\nabla^2-m^2)^r\partial_t^{k-l-2-2r}\delta^4(x)\}\\ \Delta^{(F)}_{\underbrace{a\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{n}\underbrace{a'\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{-4n}}{[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\{\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta_F(x)\\ +i\sum_{k=0}^{2n+1}\sum_{l=0}^{k-2}\sum_{r=0}^{[(k-l-2)/2]}C_{n-l-1}^{2r+1}\frac{i^{k+l}m^{2n+1-k}(2n+1)!}{l!(k-l)!(2n+1-k)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdot\cdot}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\cdot\cdot}^{k-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2n+1-k}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{l}(\nabla^2-m^2)^r\partial_t^{k-l-2-2r}\delta^4(x)\}\\ =i\Delta^{(c)}_{\underbrace{a\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{n}\underbrace{a'\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)\\ \Delta^{(F)}_{\underbrace{a\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{n}\underbrace{a'\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{n}}(s;p)=-i\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{-4n}}{[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\frac{\overbrace{[(m-i\gamma^a p_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2n}}{p^2+m^2-i\varepsilon}+\cdots\end{cases}$$

推论8.2.6.

$$\begin{cases}\Delta^{ret}_{\underbrace{a\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{n}\underbrace{a'\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{-4n}}{[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\{\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta^{ret}(x)\\ +\sum_{k=0}^{2n+1}\sum_{l=0}^{k-2}\sum_{r=0}^{[(k-l-2)/2]}C_{n-l-1}^{2r+1}\frac{i^{k+l}m^{2n+1-k}(2n+1)!}{l!(k-l)!(2n+1-k)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdot\cdot}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\cdot\cdot}^{k-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2n+1-k}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{l}(\nabla^2-m^2)^r\partial_t^{k-l-2-2r}\delta^4(x)\}\\ \Delta^{adv}_{\underbrace{a\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{n}\underbrace{a'\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x):=\frac{1}{m^{2n}}\frac{2^{-4n}}{[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\{\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta^{adv}(x)\\ +\sum_{k=0}^{2n+1}\sum_{l=0}^{k-2}\sum_{r=0}^{[(k-l-2)/2]}C_{n-l-1}^{2r+1}\frac{i^{k+l}m^{2n+1-k}(2n+1)!}{l!(k-l)!(2n+1-k)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdot\cdot}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\cdot\cdot}^{k-l}\overbrace{(\gamma^4)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2n+1-k}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{l}(\nabla^2-m^2)^r\partial_t^{k-l-2-2r}\delta^4(x)\}\end{cases}$$

引理8.2.2. $\Delta_{\underbrace{a\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{n}\underbrace{a'\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)|_{t=0}$

$$=\frac{-i}{m^{2n}}\frac{2^{-4n}}{[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\sum_{l=0}^{n}[C_{2n}^{2l+1}\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2n-2l-1}\overbrace{\cdot\cdot\delta_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}^{2l+1}](m^2-\nabla^2)^l\delta^3(\vec{r})$$

推论8.2.7.

$$\begin{cases}(\gamma^c\partial_c+m)\Delta_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0,\delta^{ab}\Delta_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0,\gamma^a\Delta_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0\\(\gamma^c\partial_c+m)\Delta^{(+)}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0,\delta^{ab}\Delta^{(+)}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0,\gamma^a\Delta^{(+)}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0\\(\gamma^c\partial_c+m)\Delta^{(-)}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0,\delta^{ab}\Delta^{(-)}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0,\gamma^a\Delta^{(-)}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0\end{cases}$$

推论8.2.8.

$$\begin{cases}(\gamma^c\partial_c+m)\Delta^{(c)}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=-i\gamma^4\delta(t)\Delta_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)|_{t=0},\delta^{ab}\Delta^{(c)}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0,\gamma^a\Delta^{(c)}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0\\(\gamma^c\partial_c+m)\Delta^{(F)}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=\gamma^4\delta(t)\Delta_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)|_{t=0},\delta^{ab}\Delta^{(F)}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0,\gamma^a\Delta^{(F)}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0\\(\gamma^c\partial_c+m)\Delta^{ret}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=-i\gamma^4\delta(t)\Delta_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)|_{t=0},\delta^{ab}\Delta^{ret}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0,\gamma^a\Delta^{ret}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0\\(\gamma^c\partial_c+m)\Delta^{adv}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=-i\gamma^4\delta(t)\Delta_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)|_{t=0},\delta^{ab}\Delta^{adv}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0,\gamma^a\Delta^{adv}_{\underbrace{a\cdots[\tau_\varsigma]}_{n}\underbrace{a'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(n;x)=0\end{cases}$$

第二十九章　有质量实粒子的协变量子化方案

自我评述：有质量实粒子，即马约拉纳粒子，正反粒子相同，数学本质上完全可以由实函数描述，也可以用复函数描述，但必须满足马约拉纳条件。对于Bargmann-Wigner 方程或Dirac方程描述的粒子，一般来说既可以描述带荷的复粒子，也可以描述不带荷的马约拉纳粒子。两种情形的主对易规则形式一致，但其余对易或反对易括号，对带荷的复粒子一般为零；对不带荷的马约拉纳粒子，其余对易或反对易括号由主对易规则和马约拉纳条件自然得到，一般不为零。在以后章节一般只讨论复粒子情形，也只给出主对易规则，不再专门讨论马约拉纳粒子情形，若要得到马约拉纳粒子情形的量子场论，只需在复粒子情形加上马约拉纳条件即可自然得到。在本章按统一的方式对所有自旋的马约拉纳粒子建立了相应的量子场论。与复粒子一样，也无需知道哈密顿量，就可以按统一的新程式对各种有质量自旋粒子进行了量子化，给出了统一的场、势量子化对易规则和能量动量算符形式，给出了部分量子彭加莱代数。与复粒子一样，角动量算符也只取得部分成功，没有彻底解决，仍需努力，角动量算符问题是新量子化程式的一个亟待解决的难题。

1 Majorana方程

1.1 实表象和Dirac分离表象下的Majorana方程 [5]

定义1.1.1.

$$\begin{cases}(\gamma_s^a\partial_a+m)\psi_s=0,\gamma_s^a=(\sigma_{-\kappa}\sigma_{\kappa y},\varsigma\sigma_{\kappa x}),\psi_s^*=\psi_s\\(\gamma^a\partial_a+m)\psi=0,\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x),\psi^*=-e^{2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_y\psi\end{cases}$$

$$\begin{cases}\psi_s=S_s(\kappa,\theta)\psi,S_s(\kappa,\theta):=e^{i\theta}S_{em}(\kappa)\\S_s^T(\kappa,\theta)S_s(\kappa,\theta)=e^{2i\theta}S_{em}^T(\kappa)S_{em}(\kappa)=-e^{2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_y\end{cases},S_{em}(\kappa)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i&0&0&-i\\-1&0&0&-1\\0&-i&-i&0\\0&-\kappa&\kappa&0\end{bmatrix}$$

1.2 实表象和Dirac分离表象下的Majorana条件

推论1.2.1. $\psi_s=\psi_s^*\Leftrightarrow\psi^*=-e^{2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_y\psi,-\sigma_y\otimes\sigma_y=\bar{C}\gamma_4$

θ是调节相位参数，一般取0或$\pi/2$。

2 Majorana B-W方程

2.1 实表象和Dirac分离表象下的Majorana B-W方程 [18]

定义2.1.1.

$$\begin{cases}(\gamma_s^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)=0,\gamma_s^a=(\sigma_{-\kappa}\sigma_{\kappa y},\varsigma\sigma_{\kappa x}),\psi_s^*=\psi_s\\(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)=0,\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x),\psi^*=(-1)^{2s}e^{4si\theta}\overbrace{\sigma_y\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_y}^{4s}\psi\end{cases}$$

2.2 实表象和Dirac分离表象下的Majorana条件

推论2.2.1.

$$\psi_s=\psi_s^*\Leftrightarrow\psi^*=(-1)^{2s}e^{4si\theta}\overbrace{\sigma_y\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_y}^{4s}\psi=e^{4si\theta}\overbrace{(\bar{C}\gamma_4)\otimes(\bar{C}\gamma_4)\cdot\cdot}^{2s}\psi$$

θ是调节相位参数，一般取0或$\pi/2$。

3 分离表象下Majorana B-W方程的平面波解

3.1 引理

引理3.1.1. $\sum_{h=s}^{-s} b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=(-1)^{2s}e^{-4si\theta}\sum_{h=s}^{-s} a^+(\vec{p},h)\overbrace{\sigma_y\otimes\sigma_y\cdot\cdot}^{4s}U^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$

$\Leftrightarrow b^+(\vec{p},h)=\varsigma^{2s}e^{-4si\theta}(-1)^{s+h}a^+(\vec{p},-h)\Leftrightarrow b(\vec{p},h)=\varsigma^{2s}e^{4si\theta}(-1)^{s+h}a(\vec{p},-h)$

证明: $\sum_{h=s}^{-s} b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=(-1)^{2s}e^{-4si\theta}\sum_{h=s}^{-s} a^+(\vec{p},h)\overbrace{\sigma_y\otimes\sigma_y\cdot\cdot}^{4s}U^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$

$=\varsigma^{2s}e^{-4si\theta}\sum_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}a^+(\vec{p},-h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$

$\Leftrightarrow b^+(\vec{p},h)=\varsigma^{2s}e^{-4si\theta}(-1)^{s+h}a^+(\vec{p},-h)\Leftrightarrow b(\vec{p},h)=\varsigma^{2s}e^{4si\theta}(-1)^{s+h}a(\vec{p},-h)$ □

引理3.1.2.

$$\begin{cases}[a(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a(\vec{p},h),a(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=0\\ [a^+(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=0\\ b^+(\vec{p},h)=\varsigma^{2s}e^{-4si\theta}(-1)^{s+h}a^+(\vec{p},-h)\\ b(\vec{p},h)=\varsigma^{2s}e^{4si\theta}(-1)^{s+h}a(\vec{p},-h)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[b(\vec{p},h),b^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [b(\vec{p},h),b(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=0\\ [b^+(\vec{p},h),b^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=0\\ [a(\vec{p},h),b^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\varsigma^{2s}e^{-4si\theta}(-1)^{s-h}\delta_{-h,h'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a^+(\vec{p},h),b(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=-\varsigma^{2s}e^{4si\theta}(-1)^{s-h}\delta_{-h,h'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a(\vec{p},h),b(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=0\\ [a^+(\vec{p},h),b^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}$$

3.2 分离表象下Majorana B-W方程 [18]的平面波解(证明还需补上)

定理3.2.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)=0,\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x)$

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\}}_{2s}}(\vec{r},t),\psi^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)=(-1)^{2s}e^{4si\theta}\overbrace{\sigma_y\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_y}^{4s}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sum_{h=s}^{-s}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ b^+(\vec{p},h)=\varsigma^{2s}e^{-4si\theta}(-1)^{s+h}a^+(\vec{p},-h)\end{cases}$$

$$\begin{cases}a(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}\\ b^+(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$$

推论3.2.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)=0,\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x)$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\}}_{2s}}(\vec{r},t),\psi^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)=(-1)^{2s}e^{4si\theta}\overbrace{\sigma_y\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_y}^{4s}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)$$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sum_{h=s}^{-s}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+(-1)^{2s}e^{-4si\theta}a^+(\vec{p},h)\overbrace{\sigma_y\otimes\sigma_y\cdot\cdot}^{4s}U^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

$$a(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}$$

推论3.2.2. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)=0,\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x)$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\}}_{2s}}(\vec{r},t),\psi^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)=(-1)^{2s}e^{4si\theta}\overbrace{\sigma_y\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_y}^{4s}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)$$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sum_{h=s}^{-s}E^{s-\frac{1}{2}}[a(\vec{p},h)\tilde{U}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+(-1)^{2s}e^{-4si\theta}a^+(\vec{p},h)\overbrace{\sigma_y\otimes\sigma_y\cdot\cdot}^{4s}\tilde{U}^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

$$a(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\tilde{U}^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}$$

3.3 分离表象下Majorana B-W方程的协变对易规则

定理3.3.1.

$$\begin{cases}[a(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),[b(\vec{p},h),b^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a(\vec{p},h),b^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\varsigma^{2s}e^{-4si\theta}(-1)^{s-h}\delta_{-h,h'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a^+(\vec{p},h),b(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=-\varsigma^{2s}e^{4si\theta}(-1)^{s+h}\delta_{-h,h'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [rest]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}$$

$\Rightarrow\Rightarrow$

$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{e^{-4si\theta}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{e^{4si\theta}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[C^+(m-\gamma^a\partial_a^+)]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[C^+(m-\gamma^b\partial_b^+)]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\Delta(x-x')\end{cases}$$

证明: $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\sum_{h,h'=s}^{-s}(EE')^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{EE'}}^{2s}$

$$[[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x},[a^+(\vec{p}',h')U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',h)e^{-ip'\cdot x'}+b(\vec{p}',h')V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',h')e^{ip'\cdot x'}]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\sum_{h,h'=s}^{-s}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E'}}\{[U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',h')[a(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$

$$+V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',h')[b^+(\vec{p},h),b(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\sum_{h,h'=s}^{-s}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E'}}$$

$$[U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',h')\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}+(-1)^{2s+1}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',h')\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}[\sum_{h=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot(x-x')}+(-1)^{2s+1}\sum_{h=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot(x-x')}]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}[\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},s)e^{ip\cdot(x-x')}+(-1)^{2s+1}\Lambda_{-\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},s)e^{-ip\cdot(x-x')}]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}[\frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{\Lambda_{+\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{2s}e^{ip\cdot(x-x')}$$

$$+(-1)^{2s+1}\frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{\Lambda_{-\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\Lambda_{-\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{2s}e^{-ip\cdot(x-x')}]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}\{\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}e^{ip\cdot(x-x')}$$

$$+(-1)^{2s+1}\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(-m+\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m+\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}e^{-ip\cdot(x-x')}\}$$

$$= \frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{1}{2E}[[e^{ip\cdot(x-x')}-e^{-ip\cdot(x-x')}]$$
$$= \frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\Delta(x-x')$$
$$= \frac{i(2m)^{2s}}{2^{2s-1}}\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(-i\partial,s)\Delta(x-x')$$

□

证明： $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\sum_{h,h'=s}^{-s}(EE')^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{EE'}}^{2s}$

$$[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}$$
$$,a(\vec{p}',h')U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',h)e^{ip'\cdot x'}+b^+(\vec{p}',h')V_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',h')e^{-ip'\cdot x'}]_{-^{2s+1}}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\sum_{h,h'=s}^{-s}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E'}}$$
$$[U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',h')[a(\vec{p},h),b^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$
$$+V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',h')[b^+(\vec{p},h),a(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\sum_{h,h'=s}^{-s}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E'}}\varsigma^{2s}e^{-4si\theta}(-1)^{s-h}\delta_{-h,h'}$$
$$[U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',h')\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}-V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',h')\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}]$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\sum_{h=s}^{-s}\frac{m^{2s}}{E}\varsigma^{2s}e^{-4si\theta}$$
$$[(-1)^{s-h}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},-h)e^{ip\cdot(x-x')}+(-1)^{2s+1}(-1)^{s+h}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},-h)e^{-ip\cdot(x-x')}]$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\sum_{h=s}^{-s}\frac{m^{2s}}{E}e^{-4si\theta}$$
$$[\frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{(\Lambda_+\bar{C}\gamma_4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})(\Lambda_+\bar{C}\gamma_4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot(\Lambda_+\bar{C}\gamma_4)_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}(\vec{p},\tfrac{1}{2})}_{2s}e^{ip\cdot(x-x')}$$
$$+(-1)^{2s+1}\frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{(\Lambda_-\bar{C}\gamma_4)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})(\Lambda_-\bar{C}\gamma_4)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot(\Lambda_-\bar{C}\gamma_4)_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}(\vec{p},\tfrac{1}{2})}_{2s}e^{-ip\cdot(x-x')}]$$
$$= e^{-4si\theta}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}\{\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}e^{ip\cdot(x-x')}$$
$$+(-1)^{2s+1}\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(-m+\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m+\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}e^{-ip\cdot(x-x')}\}$$
$$= e^{-4si\theta}\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\frac{1}{2E}[e^{ip\cdot(x-x')}-e^{-ip\cdot(x-x')}]$$
$$= e^{-4si\theta}\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\Delta(x-x')$$

□

推论3.3.1. $[a(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),[a(\vec{p},h),a(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=0,[a^+(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{e^{-4si\theta}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{e^{4si\theta}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[C^+(m-\gamma^a\partial_a^+)]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[C^+(m-\gamma^b\partial_b^+)]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')\end{cases}$$

3.4 分离表象下Majorana B-W方程协变对易规则的反向推理

定理3.4.1.

$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{e^{-4si\theta}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{e^{4si\theta}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[C^+(m-\gamma^a\partial_a^+)]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[C^+(m-\gamma^b\partial_b^+)]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}[a(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),[b(\vec{p},h),b^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a(\vec{p},h),b^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\varsigma^{2s}e^{-4si\theta}(-1)^{s-h}\delta_{-h,h'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a^+(\vec{p},h),b(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=-\varsigma^{2s}e^{4si\theta}(-1)^{s+h}\delta_{-h,h'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [rest]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}$$

下面给出几个主要对易括号的详细证明过程。

证明: $[a(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\{\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2E_0}[e^{ip_0\cdot(x-x')}-e^{-ip_0\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}_0\}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$

$$=[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\{\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-i\gamma^ap_{0a})\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^bp_{0b})\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{ip_0\cdot(x-x')}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$

$$+(-1)^{2s+1}\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(-m-i\gamma^ap_{0a})\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m-i\gamma^bp_{0b})\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{-ip_0\cdot(x-x')}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}_0$$

$$=[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$

$$U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{i(p_0-p)\cdot x}e^{-i(p_0-p')\cdot x'}$$

$$+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{-i(p_0+p)\cdot x}e^{i(p_0+p')\cdot x'}\}$$

$$=\int d^3\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$

$$U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p}')$$

$$+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{2iE_0(t-t')}\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p}')\}$$

$$=\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')(\frac{m}{E})^{4s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h')$$

$$\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h_0)+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p},h_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p},h_0)e^{2iE(t-t')}\}$$

$$=\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')(\sum_{h_0=s}^{-s}\delta_{hh_0}\delta_{h'h_0}+0)$$

$$=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$

□

证明： $[b^+(\vec{p},h),b(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\{\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2E_0}[e^{ip_0\cdot(x-x')}-e^{-ip_0\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}_0\}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$

$$=[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\{\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-i\gamma^a p_{0a})\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_{0b})\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{ip_0\cdot(x-x')}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$+(-1)^{2s+1}\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(-m-i\gamma^a p_{0a})\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m-i\gamma^b p_{0b})\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{-ip_0\cdot(x-x')}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}_0$$

$$=[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$

$$V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{i(p_0+p)\cdot x}e^{-i(p_0+p')\cdot x'}$$

$$+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{-i(p_0-p)\cdot x}e^{i(p_0-p')\cdot x'}\}$$

$$=\int d^3\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$

$$V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{-2iE_0(t-t')}\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p}')$$

$$+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p}')\}$$

$$=\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')(\frac{m}{E})^{4s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h')$$

$$\{\sum_{h_0=s}^{-s} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p},h_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p},h_0)e^{-2iE(t-t')}+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h_0)\}$$
$$=(-1)^{2s+1}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')(0+\sum_{h_0=s}^{-s}\delta_{hh_0}\delta_{h'h_0})$$
$$=(-1)^{2s+1}\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$

□

证明： $[a(\vec{p},h),b^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$
$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{e^{-4si\theta}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$
$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{e^{-4si\theta}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\{\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2E_0}[e^{ip_0\cdot(x-x')}-e^{-ip_0\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}_0\}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$
$$=[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$
$$\{\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{e^{-4si\theta}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-i\gamma^a p_{0a})C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_{0b})C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{ip_0\cdot(x-x')}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$+(-1)^{2s+1}\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{e^{-4si\theta}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(-m-i\gamma^a p_{0a})C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m-i\gamma^b p_{0b})C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{-ip_0\cdot(x-x')}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}_0$$
$$=\varsigma^{2s}e^{-4si\theta}[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$
$$U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')\{\sum_{h_0=s}^{-s}(-1)^{s-h_0}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)V_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,-h_0)e^{i(p_0-p)\cdot x}e^{-i(p_0-p')\cdot x'}$$
$$+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}(-1)^{s+h_0}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,-h_0)e^{-i(p_0+p)\cdot x}e^{i(p_0+p')\cdot x'}\}$$
$$=\varsigma^{2s}e^{-4si\theta}\int d^3\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$
$$U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')\{\sum_{h_0=s}^{-s}(-1)^{s-h_0}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)V_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,-h_0)\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p}')$$
$$+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}(-1)^{s+h_0}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,-h_0)\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p}')\}$$
$$=\varsigma^{2s}e^{-4si\theta}(\frac{m}{E})^{4s}$$
$$U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{+\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h')\{\sum_{h_0=s}^{-s}(-1)^{s-h_0}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h_0)V_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-h_0)\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$
$$+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}(-1)^{s+h_0}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p},h_0)U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p},-h_0)\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')\}$$
$$=\varsigma^{2s}e^{-4si\theta}(-1)^{s-h}\delta_{-h,h'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$

□

证明： $[a(\vec{p},h),b(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}e^{-i(p\cdot x+p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')e^{-i(p\cdot x+p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\{\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2E_0}[e^{ip_0\cdot(x-x')}-e^{-ip_0\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}_0\}e^{-i(p\cdot x+p'\cdot x')}$$

$$=[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\{\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-i\gamma^a p_{0a})\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_{0b})\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{ip_0\cdot(x-x')}e^{-i(p\cdot x+p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$+(-1)^{2s+1}\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(-m-i\gamma^a p_{0a})\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m-i\gamma^b p_{0b})\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{-ip_0\cdot(x-x')}e^{-i(p\cdot x+p'\cdot x')}\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}_0$$

$$=[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$

$$U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{i(p_0-p)\cdot x}e^{-i(p_0+p')\cdot x'}$$

$$+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{-i(p_0+p)\cdot x}e^{i(p_0-p')\cdot x'}\}$$

$$=\int d^3\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$

$$U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{-iE_0t'}\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p}')$$

$$+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,h_0)e^{iE_0t}\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p}')\}$$

$$=\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')(\frac{m}{E})^{4s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},h)V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',h')$$

$$\{\sum_{h_0=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h_0)+(-1)^{2s+1}\sum_{h_0=s}^{-s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}',h_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}',h_0)e^{2iE(t-t')}\}$$

$$=0+0=0$$

□

推论3.4.1.

$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{e^{-4si\theta}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{e^{4si\theta}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[C^+(m-\gamma^a\partial_a^+)]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[C^+(m-\gamma^b\partial_b^+)]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')\end{cases}$$

$$\Rightarrow[a(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),[a(\vec{p},h),a(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=0,[a^+(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=0$$

3.5 分离表象下Majorana B-W方程协变对易规则的小结

定理3.5.1.

$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{e^{-4si\theta}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{e^{4si\theta}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[C^+(m-\gamma^a\partial_a^+)]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[C^+(m-\gamma^b\partial_b^+)]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow[a(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),[a(\vec{p},h),a(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=0,[a^+(\vec{p},h),a^+(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=0$$

3.6 分离表象下Majorana B-W方程的协变量子化规则的重要推论

定义3.6.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}=0,\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x),\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}=\Gamma^{K_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}\psi_{K_\varsigma}(s)$

推论3.6.1.

$$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')$$

$$\Rightarrow[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta(x-x')$$

证明:

$$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')$$

$$\Leftrightarrow[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}},\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x)$$

$$=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[-imI\otimes\sigma(x)+(\sigma\otimes\sigma_z,i\varsigma)^a\partial_a]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[-imI\otimes\sigma(x)+(\sigma\otimes\sigma_z,i\varsigma)^b\partial_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')$$

$$\Rightarrow[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta(x-x')$$

$$\Leftrightarrow[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta(x-x')$$ □

推论3.6.2.

$$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{e^{-4si\theta}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')$$

$$\Rightarrow[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\Delta(x-x')$$

推论3.6.3.

$$[\psi^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{e^{4si\theta}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[C^+(m-\gamma^a\partial_a^+)]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[C^+(m-\gamma^b\partial_b^+)]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')$$

$$\Rightarrow[\psi^+_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\Delta(x-x')$$

4 分离表象下Majorana B-W方程对易规则的两种等价表述

4.1 分离表象下Majorana B-W方程的等价协变对易规则

引理4.1.1.

$$\begin{cases}2\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)(\eta_{aa'}+\frac{p_a p^+_{a'}}{m^2})\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)=[(m-i\gamma^a p_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\\ 2\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)(\eta_{aa'}+\frac{p_a p^+_{a'}}{m^2})(\bar{C}\gamma_4\mathbb{X}^{+a'}\bar{C}\gamma_4)_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)=[(m-i\gamma^a p_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_b)C]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\Delta(x-x')=[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')\\ 2\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})(\bar{C}\gamma_4\mathbb{X}^{+a'}\bar{C}\gamma_4)_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\Delta(x-x')=[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')\end{cases}$$

定理4.1.1.

$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{2n-1}}\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot_{\})}}_{2n}\Delta(x-x')\\ \Leftrightarrow\\ [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{3n-1}}\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot_{\}}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot_{)}}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{2n-1}}\frac{e^{-4ni\theta}}{[(2n)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot_{\})}}_{2n}\Delta(x-x')\\ \Leftrightarrow\\ [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{3n-1}}\frac{e^{-4ni\theta}}{[(2s)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot_{\}}}_{n}\underbrace{(\bar{C}\gamma_4\mathbb{X}^{+a'}\bar{C}\gamma_4)_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot_{)}}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\end{cases}$$

定理4.1.2.

$$\begin{cases}\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')\}\\ =\frac{i}{2^{2n}}\frac{1}{[(2n+1)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta(x-x')\\ \Leftrightarrow\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')\}\\ =\frac{i}{2^{3n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')\}\\ =\frac{i}{2^{2n}}\frac{e^{-(4n+2)i\theta}}{[(2n+1)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^c\partial_c)C]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta(x-x')\\ \Leftrightarrow\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')\}\\ =\frac{ie^{-(4n+2)i\theta}}{2^{3n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{(\bar{C}\gamma_4\mathbb{X}^{+a'}\bar{C}\gamma_4)_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)C]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\end{cases}$$

4.2 分离表象下有质量Majorana玻色子对易规则小结

定理4.2.1. $n\geq 0$

$$[a(\vec{p},h;n),a^+(\vec{p}',h';n)]=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),[a(\vec{p},h;n),a(\vec{p}',h';n)]=0,[a^+(\vec{p},h;n),a^+(\vec{p}',h';n)]=0$$

$$\Leftrightarrow[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{2n-1}}\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot_{\})}}_{2n}\Delta(x-x')$$

$$\Leftrightarrow[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{3n-1}}\frac{1}{[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot_{\}}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot_{)}}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')$$

4.3 分离表象下有质量Majorana费米子反对易规则小结

定理4.3.1. $n \geq 0$

$\{a(\vec{p},h;n+\frac{1}{2}),a^+(\vec{p}',h';n+\frac{1}{2})\}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),\{rest\}=0$

$\Leftrightarrow \{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')\}$

$=\frac{i}{2^{2n}}\frac{1}{[(2n+1)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta(x-x')$

$\Leftrightarrow$

$\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')\}$

$=\frac{i}{2^{3n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')$

4.4 分离表象下推导到自旋-n粒子Klein-Gordon方程的平面波解

定理4.4.1. $(-\partial^c\partial_c+m^2)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=0,A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=(\frac{1}{2im})^n\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x)$

$A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}[a(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

$\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)$

$\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},h)$

5 分离表象下Majorana B-W方程各种量子算符

5.1 分离表象下Majorana B-W方程各种算符的提取

定理5.1.1.

$$\begin{cases}P_u(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\sum\limits_h p_u[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}a(\vec{p},h)a^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}\\ Q(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\sum\limits_h[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s-1}a(\vec{p},h)a^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}\\ N(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{m^2-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\sum\limits_h[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}a(\vec{p},h)a^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}\\ \vec{S}(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\sum\limits_h\hat{p}[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}a(\vec{p},h)a^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}\\ \vec{M}(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{m^2-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\sum\limits_h\hat{p}[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s-1}a(\vec{p},h)a^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}\end{cases}$$

6 Klein-Gordon方程的对易规则

6.1 有质量自旋-n的Majorana B-W方程等价于Klein-Gordon方程 [18,20,23]

定义6.1.1. $\mathbb{X}_a\equiv[im\gamma_a(\varsigma)-2S_{ab}(e,\varsigma)\partial^b]C$

定理6.1.1. $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x)=0\\ \psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x)\text{全对称}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^c\partial_c+m^2)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=0\\ \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=0,\partial^aA_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=0,A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)\text{全对称}\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x)=\frac{1}{2^n}\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)\end{cases}$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}E^{n-\frac12}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2n}[a(\vec p,h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec p,h)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+b^+(\vec p,h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec p,h)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^3\vec p$$

$$A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}[a(\vec p,h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec p,h)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+b^+(\vec p,h)\tilde\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec p,h)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^3\vec p$$

6.2 自旋-n粒子Klein-Gordon方程的平面波解

推论6.2.1. $A_{ab\cdot\cdot}(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}\varepsilon_{ab\cdot\cdot}(\vec p,h)[a(\vec p,h)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+(-1)^nb^+(\vec p,h)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^3\vec p$

推论6.2.2. $A_{ab\cdot\cdot}(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}\varepsilon_{ab\cdot\cdot}(\vec p,h)[a(\vec p,h)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+e^{-4ni\theta}(-1)^ha^+(\vec p,-h)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^3\vec p$

性质6.2.1. $b^+(\vec p,h)=\varsigma^{2s}e^{-4si\theta}(-1)^{s+h}a^+(\vec p,-h)\Rightarrow b(\vec p,h)=\varsigma^{2s}e^{4si\theta}(-1)^{s+h}a(\vec p,-h)$

推论6.2.3. $A_{ab\cdot\cdot}(\vec r,t)=e^{-4ni\theta}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdot\cdot}^{n}A^+_{a'b'\cdot\cdot}(\vec r,t)$

证明: $e^{-4ni\theta}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdot\cdot}^{n}A^+_{a'b'\cdot\cdot}(\vec r,t)$

$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdot\cdot}^{n}\varepsilon^+_{a'b'\cdot\cdot}(\vec p,h)[e^{-4ni\theta}a^+(\vec p,h)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+(-1)^ha(\vec p,-h)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^3\vec p$

$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}(-1)^h\varepsilon_{ab\cdot\cdot}(\vec p,-h)[e^{-4ni\theta}a^+(\vec p,h)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+(-1)^ha(\vec p,-h)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^3\vec p$

$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}\varepsilon_{ab\cdot\cdot}(\vec p,-h)[a(\vec p,-h)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+(-1)^he^{-4ni\theta}a^+(\vec p,h)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^3\vec p$

$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}\varepsilon_{ab\cdot\cdot}(\vec p,h)[a(\vec p,h)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+(-1)^he^{-4ni\theta}a^+(\vec p,-h)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^3\vec p$

$=A_{ab\cdot\cdot}(\vec r,t)$ □

从上面结论可知，为了保持势$A_{ab\cdot\cdot}$的实性，参数θ取0或$\pi/2$比较合适。

7 Rarita-Schwinger方程的对易规则

7.1 有质量自旋-$n+\frac12$的Majorana B-W方程等价于Rarita-Schwinger方程 [18, 20, 21]

定理7.1.1.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x)=0\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x)\text{全对称}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\gamma^c\partial_c+m)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(x)=0\\ \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(x)=0,\gamma^aA_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(x)=0,A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(x)\text{全对称}\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x)=\frac{1}{2^n}\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x)\end{cases}$$

$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec r,t)$

$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n+1/2}^{-(n+1/2)}E^{n-\frac12}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2n+1}[a(\vec p,h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec p,h)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+b^+(\vec p,h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec p,h)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^3\vec p$

$$A_{ab\cdot\cdot\tau_\varsigma}(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt m}{\sqrt{2^nE}}[\varepsilon_{ab\cdot\cdot\tau_\varsigma}(\vec p,h)a(\vec p,h)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+\tilde\varepsilon_{ab\cdot\cdot\tau_\varsigma}(\vec p,h)b^+(\vec p,h)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^3\vec p$$

7.2 分离表象下自旋$s=n+\frac{1}{2}$粒子Rarita-Schwinger方程的平面波解

推论7.2.1. $A_{ab\cdot\cdot\tau_\varsigma}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE}}[\varepsilon_{ab\cdot\cdot\tau_\varsigma}(\vec{p},h)a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+\tilde{\varepsilon}_{ab\cdot\cdot\tau_\varsigma}(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

推论7.2.2. $A_{ab\cdot\cdot\tau_\varsigma}(\vec{r},t)$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE}}\varepsilon_{ab\cdot\cdot\sigma_\varsigma}(\vec{p},h)[\delta_{\tau_\varsigma}{}^{\sigma_\varsigma}a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+(-1)^{h-\frac{1}{2}}e^{-(4n+2)i\theta}\gamma_{5\tau_\varsigma}{}^{\sigma_\varsigma}a^+(\vec{p},-h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

定理7.2.1. $A^+_{ab\cdot\cdot\tau_\varsigma}(\vec{r},t)=-e^{(4n+2)i\theta}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdot\cdot}^{n}(\sigma_y\otimes\sigma_y)_{\tau_\varsigma}{}^{\tau'_\varsigma}A_{a'b'\cdot\cdot\tau'_\varsigma}(\vec{r},t)=e^{(4n+2)i\theta}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdot\cdot}^{n}(\bar{C}\gamma_4)_{\tau_\varsigma}{}^{\tau'_\varsigma}A_{a'b'\cdot\cdot\tau'_\varsigma}(\vec{r},t)$

证明: $-e^{-(4n+2)i\theta}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdot\cdot}^{n}(\sigma_y\otimes\sigma_y)_{\tau_\varsigma}{}^{\tau'_\varsigma}A^+_{a'b'\cdot\cdot\tau'_\varsigma}(\vec{r},t)$

$$=-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE}}$$

$$\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdot\cdot}^{n}\gamma_{2\tau_\varsigma}{}^{\tau'_\varsigma}\varepsilon^+_{a'b'\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}(\vec{p},h)[e^{-(4n+2)i\theta}\delta_{\tau'_\varsigma}{}^{\sigma'_\varsigma}a^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+(-1)^{h-\frac{1}{2}}\gamma_{5\tau_\varsigma}{}^{\sigma_\varsigma}a(\vec{p},-h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$=-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},-h)[(-1)^{h-\frac{1}{2}}e^{-(4n+2)i\theta}\gamma_{5\tau_\varsigma}{}^{\tau'_\varsigma}a^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}-\delta_{\tau_\varsigma}{}^{\tau'_\varsigma}a(\vec{p},-h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\sigma_\varsigma}(\vec{p},h)[(-1)^{h-\frac{1}{2}}e^{-(4n+2)i\theta}\gamma_{5\tau_\varsigma}{}^{\sigma_\varsigma}a^+(\vec{p},-h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+\delta_{\tau_\varsigma}{}^{\sigma_\varsigma}a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$=A_{ab\cdot\cdot\tau_\varsigma}(\vec{r},t)$$ □

从上面结论可知，为了保持势$A_{ab\cdot\cdot\tau_\varsigma}$的实性，参数$\theta$取0或$\pi/2$比较合适，但取0更简单。

7.3 分离表象下Majorana B-W方程的等时量子化规则

定理7.3.1.

$$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(\sigma\otimes\sigma_z,i\varsigma)^a_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\sigma\otimes\sigma_z,i\varsigma)^b_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x-x')$$

$$\Rightarrow[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\xi_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\xi'_\varsigma\eta'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{r}',t)]_{-^{2s+1}}$$

$$=-\frac{(i\varsigma)^{2s+1}}{2^{2s-1}}\sum_{k=0}^{[s-\frac{1}{2}]}\frac{(2s)!}{(2s-2k-1)!(2k)!1!}\overbrace{[(\sigma\cdot\nabla)\otimes\sigma_z]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(\sigma\cdot\nabla)\otimes\sigma_z]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-2k-1}\overbrace{\delta_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\delta_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2k}\nabla^{2k}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$$

8 分离表象下有质量Majorana粒子协变对易规则的总结与梳理

8.1 定义

定义8.1.1.

$$\Gamma^{\overbrace{b_1b_2\cdot\cdot}^{n}\overbrace{b'_1b'_2\cdot\cdot}^{n}}_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(p;n)$$

$$:=\overbrace{(\bar{C}\gamma_{a_1})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_{a_2})^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'_1}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{a'_2}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\underbrace{\mathbb{X}^{b_1}_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^{b_2}_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+b'_1}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(-p)\mathbb{X}^{+b'_2}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(-p)\cdot\cdot)}_{n}$$

$$\Gamma^{\overbrace{b_1b_2\cdot\cdot}^{n}\overbrace{b'_1b'_2\cdot\cdot}^{n}}_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(x,x';n)$$

$$:=\overbrace{(\bar{C}\gamma_{a_1})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_{a_2})^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'_1}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{a'_2}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\underbrace{\mathbb{X}^{b_1}_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^{b_2}_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+b'_1}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\mathbb{X}^{+b'_2}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(x')\cdot\cdot)}_{n}$$

定义8.1.2.

$$\Gamma_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(p;n)$$

$$:=\overbrace{(\bar{C}\gamma_{a_1})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_{a_2})^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'_1}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{a'_2}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\underbrace{[(m-i\gamma^a p_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}_{2n}$$

$$\Gamma_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(x;n)$$

$$:=\overbrace{(\bar{C}\gamma_{a_1})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_{a_2})^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'_1}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{a'_2}C)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}_{2n}$$

推论8.1.1. $\Gamma_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(x;n)=\frac{1}{2^n}\Gamma^{\overbrace{b_1b_2\cdot\cdot}^{n}\overbrace{b'_1b'_2\cdot\cdot}^{n}}_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(x,x';n)\underbrace{[\eta_{b_1b'_1}-\frac{\partial_{b_1}\partial^+_{b'_1}}{m^2}][\eta_{b_2b'_2}-\frac{\partial_{b_2}\partial^+_{b'_2}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}$

8.2 分离表象下有质量Majorana玻色子协变对易规则梳理(取$\theta=0$)

定义8.2.1. $\hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma b_1\cdot\cdot b_n}(n):=\eta^{a'_1}_{b_1}\eta^{a'_2}_{b_2}\cdot\cdot\eta^{a'_n}_{b_n}\hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma a'_1\cdot\cdot a'_n}(n)$

定理8.2.1.
$$\begin{cases}[A_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}(x),A^+_{a'_1a'_2\cdot\cdot a'_n}(x')]=i\hat{P}_{a_1a_2\cdot\cdot a_na'_1a'_2\cdot\cdot a'_n}(n)\Delta(x-x')\\ [A_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}(x),A_{b_1b_2\cdot\cdot b_n}(x')]=i\hat{P}_{a_1a_2\cdot\cdot a_na'_1a'_2\cdot\cdot a'_n}(n)\eta^{a'_1}_{b_1}\eta^{a'_2}_{b_2}\cdot\cdot\eta^{a'_n}_{b_n}\Delta(x-x')\\ A_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}=A^+_{a'_1a'_2\cdot\cdot a'_n}\eta^{a'_1}_{a_1}\eta^{a'_2}_{a_2}\cdot\cdot\eta^{a'_n}_{a_n},A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}=A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}\underbrace{\eta^{a_1}_{a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot}_{n}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

定理8.2.2.
$$\begin{cases}[A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}(x),A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(x')]=\frac{im^{-2n}}{2^{4n-1}[(2n)!]^2}\Gamma_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(x;n)\Delta(x-x')\\ [A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}(x),A_{\underbrace{b_1b_2\cdot\cdot}_{n}}(x')]=\frac{im^{-2n}}{2^{4n-1}[(2n)!]^2}\Gamma_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(x;n)\underbrace{\eta^{a'_1}_{b_1}\eta^{a'_2}_{b_2}\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\\ A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}=A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}\underbrace{\eta^{a'_1}_{a_1}\eta^{a'_2}_{a_2}\cdot\cdot}_{n},A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}=A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}\underbrace{\eta^{a_1}_{a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot}_{n}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

定理8.2.3.
$$\begin{cases}[A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}(x),A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(x')]=\frac{im^{-2n}}{2^{5n-1}[(2n)!]^2}\Gamma^{\overbrace{b_1b_2\cdot\cdot}^{n}\overbrace{b'_1b'_2\cdot\cdot}^{n}}_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(x,x';n)\underbrace{[\eta_{b_1b'_1}-\frac{\partial_{b_1}\partial^+_{b'_1}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\\ [A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}(x),A_{\underbrace{b_1b_2\cdot\cdot}_{n}}(x')]=\frac{im^{-2n}}{2^{5n-1}[(2n)!]^2}\Gamma^{\overbrace{c_1c_2\cdot\cdot}^{n}\overbrace{c'_1c'_2\cdot\cdot}^{n}}_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(x,x';n)\underbrace{[\eta_{c_1c'_1}-\frac{\partial_{c_1}\partial^+_{c'_1}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\eta^{a'_1}_{b_1}\eta^{a'_2}_{b_2}\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\\ A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}=A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}\underbrace{\eta^{a'_1}_{a_1}\eta^{a'_2}_{a_2}\cdot\cdot}_{n},A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}=A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}\underbrace{\eta^{a_1}_{a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot}_{n}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

定理8.2.4.
$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{3n-1}[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot)}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\\ [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{3n-1}[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot)}_{n}\underbrace{[\delta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}=\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}\underbrace{\gamma_{2\lambda_\varsigma}^{\ \lambda'_\varsigma}\gamma_{2\mu_\varsigma}^{\ \mu'_\varsigma}\cdot\cdot}_{2n},\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}=\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}\underbrace{\gamma_{2\lambda'_\varsigma}^{\ \lambda_\varsigma}\gamma_{2\mu'_\varsigma}^{\ \mu_\varsigma}\cdot\cdot}_{2n},\mathbb{X}^a=\gamma_2\mathbb{X}^{+a'}\gamma_2\eta^a_{a'}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

定理8.2.5.
$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{2n-1}[(2n)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}_{2n}\Delta(x-x')\\ [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{2n-1}[(2n)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}_{2n}\Delta(x-x')\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}=\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}\underbrace{\gamma_2{}^{\lambda'_\varsigma}_{\lambda_\varsigma}\gamma_2{}^{\mu'_\varsigma}_{\mu_\varsigma}\cdots}_{2n},\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}=\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}\underbrace{\gamma_2{}^{\lambda_\varsigma}_{\lambda'_\varsigma}\gamma_2{}^{\mu_\varsigma}_{\mu'_\varsigma}\cdots}_{2n}\end{cases}$$

$$[\Downarrow]$$

定理8.2.6. $[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2n}}(x')]=i\frac{(i\varsigma)^{2n}}{2^{2n-1}[(2n)!]^2}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots\})}^{2n}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2n}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理8.2.7. $[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]=i\frac{(-1)^{2n}}{2^{n-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(n)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta(x-x')$

势A和场ψ的对易关系都有两种等价表述方式，且互为前提和互为因果。既可以从势对易关系推出一切，也可以从场对易关系推出一切。这说明对于有质量粒子，势和场两种描述方案是完全等价的。并且可以从有质量粒子的对易规则推得与无质量粒子完全类似的对易规则，反之则不行。

8.3 分离表象下有质量Majorana费米子协变反对易规则梳理

定理8.3.1. $\{A_{a_1a_2\cdots a_n\tau_\varsigma}(x),A^+_{a'_1a'_2\cdots a'_n\tau'_\varsigma}(x')\}=i\hat{P}_{a_1\cdots a_n\tau_\varsigma a'_1\cdots a'_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理8.3.2.
$$\begin{cases}\{A_{a_1a_2\cdots a_n\sigma_\varsigma}(x),A_{b_1b_2\cdots b_n\sigma_\varsigma}(x')\}=-i\hat{P}_{a_1\cdots a_n\tau_\varsigma b_1\cdots b_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})\gamma_2{}^{\tau'_\varsigma}_{\sigma_\varsigma}\Delta(x-x')\\ A_{\underbrace{a_1a_2\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{r},t)=-A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{r},t)\underbrace{\eta^{a'_1}_{a_1}\eta^{a'_2}_{a_2}\cdots}_{n}\gamma_2{}^{\tau'_\varsigma}_{\tau_\varsigma},A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{r},t)=-A_{\underbrace{a_1a_2\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{r},t)\underbrace{\eta^{a_1}_{a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdots}_{n}\gamma_2{}^{\tau_\varsigma}_{\tau'_\varsigma}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

定理8.3.3.
$$\begin{cases}\{A_{\underbrace{a_1a_2\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(x),A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\}=\frac{im^{-2n}}{2^{5n}[(2n+1)!]^2}\\ \overbrace{(\bar{C}\gamma_{a_1})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'_1}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\underbrace{\mathbb{X}^{b_1}_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+b'_1}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdots}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\eta_{b_1b'_1}-\frac{\partial_{b_1}\partial^+_{b'_1}}{m^2}]\cdots}_{n}\Delta(x-x')\\ \{A_{\underbrace{a_1a_2\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(x),A_{\underbrace{a'_1a'_2\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\}=\frac{i(im)^{-2n}}{2^{5n}[(2n+1)!]^2}\\ \overbrace{(\bar{C}\gamma_{a_1})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_{a'_1})^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\underbrace{\mathbb{X}^{b_1}_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{b'_1}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdots}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\delta_{b_1b'_1}-\frac{\partial_{b_1}\partial_{b'_1}}{m^2}]\cdots}_{n}\Delta(x-x')\\ A_{\underbrace{a_1a_2\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{r},t)=-A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{r},t)\underbrace{\eta^{a'_1}_{a_1}\eta^{a'_2}_{a_2}\cdots}_{n}\gamma_2{}^{\tau'_\varsigma}_{\tau_\varsigma},A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{r},t)=-A_{\underbrace{a_1a_2\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{r},t)\underbrace{\eta^{a_1}_{a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdots}_{n}\gamma_2{}^{\tau_\varsigma}_{\tau'_\varsigma}\\ \bar{C}\gamma_a=-\gamma_2\gamma_{a'}C\gamma_2\eta^{a'}_a,\mathbb{X}^a=\gamma_2\mathbb{X}^{+a'}\gamma_2\eta^a_{a'}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

定理8.3.4.

$$\begin{cases}\{A_{\underbrace{a_1a_2\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(x),A^+_{\underbrace{a_1'a_2'\cdots}_{n}\tau_\varsigma'}(x')\}\\=\frac{im^{-2n}}{2^{4n}[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_{a_1})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a_1'}C)^{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'}\cdots}^{n}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda_\varsigma'}\cdots[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau_\varsigma')}}_{2n+1}\Delta(x-x')\\\{A_{\underbrace{a_1a_2\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(x),A_{\underbrace{a_1'a_2'\cdots}_{n}\tau_\varsigma'}(x')\}\\=\frac{i(im)^{-2n}}{2^{4n}[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\bar{C}\gamma_{a_1})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_{a_1'})^{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'}\cdots}^{n}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda_\varsigma'}\cdots[(m-\gamma^c\partial_c)C]_{\tau_\varsigma\}\tau_\varsigma')}}_{2n+1}\Delta(x-x')\\A_{\underbrace{a_1a_2\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{r},t)=-A^+_{\underbrace{a_1'a_2'\cdots}_{n}\tau_\varsigma'}(\vec{r},t)\underbrace{\eta^{a_1'}_{a_1}\eta^{a_2'}_{a_2}\cdots}_{n}\gamma_2{}^{\tau_\varsigma'}_{\tau_\varsigma},A^+_{\underbrace{a_1'a_2'\cdots}_{n}\tau_\varsigma'}(\vec{r},t)=-A_{\underbrace{a_1a_2\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{r},t)\underbrace{\eta^{a_1}_{a_1'}\eta^{a_2}_{a_2'}\cdots}_{n}\gamma_2{}^{\tau_\varsigma}_{\tau_\varsigma'},\bar{C}\gamma_a=-\gamma_2\gamma_{a'}C\gamma_2\eta^{a'}_a\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

定理8.3.5.

$$\begin{cases}\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdots}_{2n+1}}(x')\}=\frac{i}{2^{3n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'}(x')\cdots}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\}\tau_\varsigma')}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdots}_{n}\Delta(x-x')\\\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdots}_{2n+1}}(x')\}=\frac{i}{2^{3n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{a'}_{(\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'}(x')\cdots)}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)C]_{\tau_\varsigma\}\tau_\varsigma')}\underbrace{[\delta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2}]\cdots}_{n}\Delta(x-x')\\\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}=-\psi^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdots}_{2n+1}}\underbrace{\gamma_2{}^{\lambda_\varsigma'}_{\lambda_\varsigma}\gamma_2{}^{\mu_\varsigma'}_{\mu_\varsigma}\cdots}_{2n+1},\psi^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdots}_{2n+1}}=-\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}\underbrace{\gamma_2{}^{\lambda_\varsigma}_{\lambda_\varsigma'}\gamma_2{}^{\mu_\varsigma}_{\mu_\varsigma'}\cdots}_{2n+1},\mathbb{X}^a=\gamma_2\mathbb{X}^{+a'}\gamma_2\eta^a_{a'}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

定理8.3.6.

$$\begin{cases}\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdots}_{2n+1}}(x')\}=\frac{i}{2^{2n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda_\varsigma'}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu_\varsigma'}\cdots\})}_{2n+1}\Delta(x-x')\\\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x),\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdots}_{2n+1}}(x')\}=\frac{i}{2^{2n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)C]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda_\varsigma'}[(m-\gamma^b\partial_b)C]_{\mu_\varsigma\mu_\varsigma'}\cdots\})}_{2n+1}\Delta(x-x')\\\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}=-\psi^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdots}_{2n+1}}\underbrace{\gamma_2{}^{\lambda_\varsigma'}_{\lambda_\varsigma}\gamma_2{}^{\mu_\varsigma'}_{\mu_\varsigma}\cdots}_{2n+1},\psi^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdots}_{2n+1}}=-\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}\underbrace{\gamma_2{}^{\lambda_\varsigma}_{\lambda_\varsigma'}\gamma_2{}^{\mu_\varsigma}_{\mu_\varsigma'}\cdots}_{2n+1}\end{cases}$$

$$[\Downarrow]$$

定理8.3.7. $\{\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{A_\varsigma'B_\varsigma'\cdots}_{2n+1}}(x')\}=i\frac{(i\varsigma)^{2n+1}}{2^{2n}[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A_\varsigma'}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B_\varsigma'}\cdots\})}^{2n+1}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2n+1}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理8.3.8. $\{\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k_\varsigma'}(x')\}=i\frac{(-1)^{2n+1}}{2^{n-1/2}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2n+1}}_{k_\varsigma k_\varsigma'}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2n+1}\Delta(x-x')$

势A和场ψ的反对易关系都有两种等价表述方式，且互为前提和互为因果。既可以从势反对易关系推出一切，也可以从场反对易关系推出一切。这说明对于有质量粒子，势和场两种描述方案是完全等价的。并且可以从有质量粒子的对易规则推得与无质量粒子完全类似的反对易规则，反之则不行。

8.4 实表象和Dirac分离表象的Majorana方程

引理8.4.1. $S_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$

$S_y(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)S_y^+=(-\sigma_z,\sigma_y,\sigma_x),S_y^+(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)S_y=(\sigma_z,\sigma_y,-\sigma_x)$

$I\otimes S_y[(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_z),-\varsigma I\otimes\sigma_x]I\otimes S_y^+=[(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x),\varsigma I\otimes\sigma_z]$

$I\otimes S_y^+[(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x),\varsigma I\otimes\sigma_x]I\otimes S_y=[(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_z),-\varsigma I\otimes\sigma_x]$

定义8.4.1.

$$\begin{cases}(\gamma_s^a\partial_a+m)\psi_s=0,\gamma_s^a=(\sigma_{-\kappa}\sigma_{\kappa y},\varsigma\sigma_{\kappa z}),\psi_s^*=\psi_s\\(\gamma^a\partial_a+m)\psi=0,\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x),\psi^*=-e^{2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_y\psi\end{cases}$$

$$\begin{cases}\psi_s=S_s(\kappa,\theta)\psi,S_s(\kappa,\theta):=e^{i\theta}S_{em}(\kappa)|(I\otimes S_y^+)\\S_s^T(\kappa,\theta)S_s(\kappa,\theta)=e^{2i\theta}S_{em}^T(\kappa)S_{em}(\kappa)=-e^{2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_y\end{cases},S_{em}(\kappa)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i&0&0&-i\\-1&0&0&-1\\0&-i&-i&0\\0&-\kappa&\kappa&0\end{bmatrix},S_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$$

9 实表象下Bargmann-Wigner方程

9.1 实表象B-W自旋基

引理9.1.1.

$$\begin{cases}\overbrace{S_s\otimes S_s\cdots}^{2s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{\sqrt{(2s)!(s+h)!(s-h)!}}\underbrace{[S_su_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})][S_su_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdots[S_su_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})][S_su_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]}_{s-h}\\\overbrace{S_s\otimes S_s\cdots}^{2s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{\sqrt{(2s)!(s+h)!(s-h)!}}\underbrace{[S_sv_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})][S_sv_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdots[S_sv_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})][S_sv_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]}_{s-h}\end{cases}$$

定义9.1.1.

$$\begin{cases}U_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h):=\frac{1}{\sqrt{(2s)!(s+h)!(s-h)!}}\underbrace{u_{s\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{s\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdots u_{s\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{s\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h}\\V_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h):=\frac{1}{\sqrt{(2s)!(s+h)!(s-h)!}}\underbrace{v_{s\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v_{s\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdots v_{s\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v_{s\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h}\end{cases}$$

9.2 实表象下B-W自旋基之间关系

推论9.2.1.

$$\begin{cases}U_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=(-\varsigma)^{2s}\overbrace{\gamma_{s5}\otimes\gamma_{s5}\cdots}^{2s}V_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)\\V_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=(-\varsigma)^{2s}\overbrace{\gamma_{s5}\otimes\gamma_{s5}\cdots}^{2s}U_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

推论9.2.2.

$$\begin{cases}U^+_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=(-1)^{s-h}\varsigma^{2s}V_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-h)\\V^+_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=(-1)^{s+h}\varsigma^{2s}U_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-h)\end{cases}$$

推论9.2.3.

$$\begin{cases}U^+_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=(-1)^{s+h}\overbrace{\gamma_{s5}\otimes\gamma_{s5}\cdots}^{2s}U_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-h)\\V^+_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=(-1)^{s-h}\overbrace{\gamma_{s5}\otimes\gamma_{s5}\cdots}^{2s}V_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-h)\end{cases}$$

9.3 实表象下B-W自旋基和矢量基之间的关系

推论9.3.1.

$$\begin{cases}U_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^n}\underbrace{[S_s\mathbb{X}^a(p)S_s^T]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[S_s\mathbb{X}^b(p)S_s^T]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}_{n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\\{}[\Rightarrow]\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(S_s^*\bar{C}\gamma_aS_s^+)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(S_s^*\bar{C}\gamma_bS_s^+)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}U_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)\\V_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^n}\underbrace{[S_s\mathbb{X}^a(-p)S_s^T]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[S_s\mathbb{X}^b(-p)S_s^T]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}_{n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\\{}[\Rightarrow]\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(S_s^*\bar{C}\gamma_aS_s^+)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(S_s^*\bar{C}\gamma_bS_s^+)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}V_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

推论9.3.2.

$$\begin{cases} U_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^n}\underbrace{[S_s\mathbb{X}^a(p)S_s^T]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[S_s\mathbb{X}^b(p)S_s^T]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}_{n}\varepsilon_{s\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h) \\ [\Rightarrow]\varepsilon_{s\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(S_s^*\bar{C}\gamma_a S_s^+)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(S_s^*\bar{C}\gamma_b S_s^+)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}U_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h) \\ V_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^n}\underbrace{[S_s\mathbb{X}^a(-p)S_s^T]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[S_s\mathbb{X}^b(-p)S_s^T]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}_{n}\tilde{\varepsilon}_{s\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h) \\ [\Rightarrow]\tilde{\varepsilon}_{s\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(S_s^*\bar{C}\gamma_a S_s^+)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(S_s^*\bar{C}\gamma_b S_s^+)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}V_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},h) \end{cases}$$

9.4 实表象下矢量基

定理9.4.1.

$$\begin{cases} \varepsilon^+_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=(-1)^h\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}^{n}\varepsilon_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec{p},-h) \\ \varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=(-1)^h\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}^{n}\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec{p},-h) \\ \varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=(-1)^n\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h) \end{cases}
\qquad
\begin{cases} \varepsilon^+_{\underbrace{sab\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)=(-1)^{h+\frac{1}{2}}e^{-2i\theta}\gamma_{s5\tau'_\varsigma}{}^{\tau_\varsigma}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}^{n}\varepsilon_{s\underbrace{a'b'\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},-h) \\ \varepsilon_{\underbrace{sab\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)=(-1)^{h-\frac{1}{2}}e^{2i\theta}\gamma_{s5\tau'_\varsigma}{}^{\tau_\varsigma}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}^{n}\varepsilon^+_{s\underbrace{a'b'\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},-h) \\ \varepsilon_{s\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=-\varsigma(-1)^n\gamma_{s5\tau_\varsigma}{}^{\sigma_\varsigma}\tilde{\varepsilon}_{s\underbrace{ab\cdots\sigma_\varsigma}_{n}}(\vec{p},h) \end{cases}$$

证明: $\varepsilon^+_{\underbrace{sab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)$

$$=(-1)^{h-\frac{1}{2}}(S_s^*\gamma_2\gamma_5S_s^+)_{\tau_\varsigma}{}^{\tau'_\varsigma}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}^{n}\varepsilon_{s\underbrace{a'b'\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},-h)$$

$$=-(-1)^{h-\frac{1}{2}}e^{-2i\theta}(S_s^*S_s^TS_s\gamma_5S_s^+)_{\tau_\varsigma}{}^{\tau'_\varsigma}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}^{n}\varepsilon_{s\underbrace{a'b'\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},-h)$$

$$=(-1)^{h+\frac{1}{2}}e^{-2i\theta}\gamma_{s5\tau_\varsigma}{}^{\tau'_\varsigma}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}^{n}\varepsilon_{s\underbrace{a'b'\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p},-h)$$ □

9.5 实表象下Majorana B-W方程 [18]平面波解

定理9.5.1.

$$(\gamma_s^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)=0,\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{s\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\}}_{2s}}(\vec{r},t),\psi^+_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)=\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)$$

$$\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=s}^{-s}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}[a(\vec{p},h)U_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+a^+(\vec{p},h)U^+_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$U_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{\sqrt{(2s)!(s+h)!(s-h)!}}\underbrace{u_{s\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{s\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdots u_{s\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{s\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h}$$

$$a(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}U_s^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h)\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}$$

9.6 实表象下Majorana B-W方程各种算符的提取

定理9.6.1.

$$\begin{cases} P_u(s)=\int\psi_s^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\sum_h p_u[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}a(\vec{p},h)a^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p} \\ Q(s)=\int\psi_s^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\sum_h[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s-1}a(\vec{p},h)a^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p} \\ N(s)=\int\psi_s^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{m^2-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\sum_h[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}a(\vec{p},h)a^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p} \\ \vec{S}(s)=\int\psi_s^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\sum_h\hat{p}[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}a(\vec{p},h)a^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p} \\ \vec{M}(s)=\int\psi_s^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{m^2-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\sum_h\hat{p}[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s-1}a(\vec{p},h)a^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p} \end{cases}$$

9.7 实表象下Klein-Gordon方程和Rarita-Schwinger方程的平面波解

推论9.7.1.

$$\begin{cases} A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}[a(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+e^{-4ni\theta}a^+(\vec{p},h)\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}^{n}\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p} \\ A_{s\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{r},t) \\ =\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE}}[a(\vec{p},h)\varepsilon_{s\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+e^{-4ni\theta}a^+(\vec{p},h)\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}^{n}\varepsilon^+_{\underbrace{sa'b'\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p} \end{cases}$$

推论9.7.2.

$$\begin{cases} A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)[a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+e^{-4ni\theta}(-1)^h a^+(\vec{p},-h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p} \\ A_{s\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(x) \\ =\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE}}\varepsilon_{s\underbrace{ab\cdots}_{n}\sigma_\varsigma}(\vec{p},h)[a(\vec{p},h)\delta_{\tau_\varsigma}{}^{\sigma_\varsigma}e^{ip\cdot x}+e^{-(4n+2)i\theta}(-1)^{h-\frac{1}{2}}a^+(\vec{p},-h)\gamma_{s5\tau_\varsigma}{}^{\sigma_\varsigma}e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p} \end{cases}$$

推论9.7.3.

$$\begin{cases} A_{ab\cdots}(\vec{r},t)=e^{-4ni\theta}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}^{n}A^+_{a'b'\cdots}(\vec{r},t),\ A^+_{sab\cdots}(\vec{r},t)=e^{4ni\theta}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}^{n}A_{sa'b'\cdots}(\vec{r},t) \\ A_{sab\cdots\tau_\varsigma}(\vec{r},t)=e^{-4ni\theta}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}^{n}A^+_{sa'b'\cdots\tau_\varsigma}(\vec{r},t),\ A^+_{sab\cdots\tau_\varsigma}(\vec{r},t)=e^{4ni\theta}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}^{n}A_{sa'b'\cdots\tau_\varsigma}(\vec{r},t) \end{cases}$$

证明： $A^+_{sab\cdots\tau_\varsigma}(\vec{r},t)$

$$=-e^{(4n+2)i\theta}(S_s^*)_{\tau_\varsigma}{}^{\sigma_\varsigma}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}^{n}(\sigma_y\otimes\sigma_y)_{\sigma_\varsigma}{}^{\xi_\varsigma}(S_s^+)_{\xi_\varsigma}{}^{\eta_\varsigma}A_{sa'b'\cdots\eta_\varsigma}(\vec{r},t)$$

$$=e^{4ni\theta}(S_s^*S_s^TS_sS_s^+)_{\tau_\varsigma}{}^{\sigma_\varsigma}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}^{n}A_{sa'b'\cdots\sigma_\varsigma}(\vec{r},t)$$

$$=e^{4ni\theta}\overbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}^{n}A_{sa'b'\cdots\tau_\varsigma}(\vec{r},t)$$

□

9.8 实表象下Majorana B-W方程协变对易规则

推论9.8.1.

$$\begin{cases}[\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma_s^a\partial_a)\gamma_s^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma_s^b\partial_b)\gamma_s^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot_{\})}}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=[\psi^+_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=[\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}\\ \psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=\psi^+_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow[a(\vec p,h),a^+(\vec p',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec p-\vec p'),[a(\vec p,h),a(\vec p',h')]_{-^{2s+1}}=0,[a^+(\vec p,h),a^+(\vec p',h')]_{-^{2s+1}}=0$$

10 实表象下有质量Majorana粒子协变对易规则的总结与梳理

10.1 实表象下有质量Majorana玻色子协变对易规则梳理(取$\theta=0$)

定理10.1.1.
$$\begin{cases}[A_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}(x),A^+_{a'_1a'_2\cdot\cdot a'_n}(x')]=i\hat P_{a_1a_2\cdot\cdot a_na'_1a'_2\cdot\cdot a'_n}(n)\Delta(x-x')\\ [A_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}(x),A_{b_1b_2\cdot\cdot b_n}(x')]=i\hat P_{a_1a_2\cdot\cdot a_na'_1a'_2\cdot\cdot a'_n}(n)\eta^{a'_1}_{b_1}\eta^{a'_2}_{b_2}\cdot\cdot\eta^{a'_n}_{b_n}\Delta(x-x')\\ A_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}=A^+_{a'_1a'_2\cdot\cdot a'_n}\eta^{a'_1}_{a_1}\eta^{a'_2}_{a_2}\cdot\cdot\eta^{a'_n}_{a_n},A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}=A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}\underbrace{\eta^{a_1}_{a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot}_{n}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

定理10.1.2.
$$\begin{cases}[A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}(x),A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(x')]=\frac{im^{-2n}}{2^{4n-1}[(2n)!]^2}\Gamma_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(x;n)\Delta(x-x')\\ [A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}(x),A_{\underbrace{b_1b_2\cdot\cdot}_{n}}(x')]=\frac{im^{-2n}}{2^{4n-1}[(2n)!]^2}\Gamma_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(x;n)\underbrace{\eta^{a'_1}_{b_1}\eta^{a'_2}_{b_2}\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\\ A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}=A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}\underbrace{\eta^{a'_1}_{a_1}\eta^{a'_2}_{a_2}\cdot\cdot}_{n},A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}=A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}\underbrace{\eta^{a_1}_{a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot}_{n}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

定理10.1.3.
$$\begin{cases}[A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}(x),A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(x')]=\frac{im^{-2n}}{2^{5n-1}[(2n)!]^2}\Gamma^{\overbrace{b_1b_2\cdot\cdot}^{n}\overbrace{b'_1b'_2\cdot\cdot}^{n}}_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(x,x';n)\underbrace{[\eta_{b_1b'_1}-\frac{\partial_{b_1}\partial^+_{b'_1}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\\ [A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}(x),A_{\underbrace{b_1b_2\cdot\cdot}_{n}}(x')]=\frac{im^{-2n}}{2^{5n-1}[(2n)!]^2}\Gamma^{\overbrace{c_1c_2\cdot\cdot}^{n}\overbrace{c'_1c'_2\cdot\cdot}^{n}}_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}(x,x';n)\underbrace{[\eta_{c_1c'_1}-\frac{\partial_{c_1}\partial^+_{c'_1}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\eta^{a'_1}_{b_1}\eta^{a'_2}_{b_2}\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\\ A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}=A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}\underbrace{\eta^{a'_1}_{a_1}\eta^{a'_2}_{a_2}\cdot\cdot}_{n},A^+_{\underbrace{a'_1a'_2\cdot\cdot}_{n}}=A_{\underbrace{a_1a_2\cdot\cdot}_{n}}\underbrace{\eta^{a_1}_{a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot}_{n}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

定理10.1.4.
$$\begin{cases}[\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{3n-1}[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}_s{}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot_{\}}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}_s{}^{+a}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot_{)}}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\\ [\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{3n-1}[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}_s{}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot_{\}}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}_s{}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot_{)}}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\\ \psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}=\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}\underbrace{\delta^{\lambda'_\varsigma}_{\lambda_\varsigma}\delta^{\mu'_\varsigma}_{\mu_\varsigma}\cdot\cdot}_{2n},\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}=\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}\underbrace{\delta^{\lambda_\varsigma}_{\lambda'_\varsigma}\delta^{\mu_\varsigma}_{\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}_{2n},\mathbb{X}^a_s:=S_s\mathbb{X}^aS^T_s\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

定理10.1.5. $$\begin{cases}[\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{3n-1}[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}_s{}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}_s{}^{a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot)}_{n}\underbrace{[\delta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\\ [\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{3n-1}[(2n)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}_s{}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot\}}_{n}\underbrace{\mathbb{X}_s{}^{a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot)}_{n}\underbrace{[\delta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\\ \psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}=\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}\underbrace{\delta^{\lambda'_\varsigma}_{\lambda_\varsigma}\delta^{\mu'_\varsigma}_{\mu_\varsigma}\cdot\cdot}_{2n},\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}=\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}\underbrace{\delta^{\lambda_\varsigma}_{\lambda'_\varsigma}\delta^{\mu_\varsigma}_{\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}_{2n},\mathbb{X}^a_s:=S_s\mathbb{X}^aS^T_s,\mathbb{X}^a_s=\mathbb{X}^{+a'}_s\eta^a_{a'}\end{cases}$$

[⇕]

定理10.1.6. $$\begin{cases}[\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{2n-1}[(2n)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a_s\partial_a)\gamma^4_s]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b_s\partial_b)\gamma^4_s]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}_{2n}\Delta(x-x')\\ [\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{2n-1}[(2n)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a_s\partial_a)\gamma^4_s]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b_s\partial_b)\gamma^4_s]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}_{2n}\Delta(x-x')\\ \psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}=\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}\underbrace{\delta^{\lambda'_\varsigma}_{\lambda_\varsigma}\delta^{\mu'_\varsigma}_{\mu_\varsigma}\cdot\cdot}_{2n},\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}=\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}\underbrace{\delta^{\lambda_\varsigma}_{\lambda'_\varsigma}\delta^{\mu_\varsigma}_{\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}_{2n}\end{cases}$$

[⇓]

定理10.1.7. $[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]=i\frac{(i\varsigma)^{2n}}{2^{2n-1}[(2n)!]^2}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2n}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2n}\Delta(x-x')$

[⇕]

定理10.1.8. $[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]=i\frac{(-1)^{2n}}{2^{n-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(n)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x-x')$

定义10.1.1. $\mathbb{X}^a\equiv[im\gamma^a(\varsigma)-2S^{ab}(e,\varsigma)\partial_b]C,\mathbb{X}^a(p)\equiv i[m\gamma^a(\varsigma)-2S^{ab}(e,\varsigma)p_b]C$

定义10.1.2. $\mathbb{X}^a_s\equiv[im\gamma^a_s(\varsigma)-2S^{ab}_s(e,\varsigma)\partial_b]C_s,\mathbb{X}^a_s(p)\equiv i[m\gamma^a_s(\varsigma)-2S^{ab}_s(e,\varsigma)p_b]C_s,C_s:=-\gamma^2_s\gamma^4_s\gamma^2$

势A和场ψ的对易关系都有两种等价表述方式，且互为前提和互为因果。既可以从势对易关系推出一切，也可以从场对易关系推出一切。这说明对于有质量粒子，势和场两种描述方案是完全等价的。并且可以从有质量粒子的对易规则推得与无质量粒子完全类似的对易规则，反之则不行。

10.2 实表象下有质量Majorana费米子协变反对易规则梳理

定义10.2.1. $\hat{P}_{sa_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma a'_1\cdot\cdot a'_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})=\frac{n+1}{2n+3}\hat{P}_{aa_1\cdot\cdot a_na'a'_1\cdot\cdot a'_n}(n+1)[\gamma^a_s(-m-\gamma^c_s\partial_c)\gamma^4_s\gamma^{a'}_s]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma},\gamma^{a'}_s=\gamma^a_s\eta^{a'}_a$

定义10.2.2. $$\begin{cases}\hat{P}_{sa_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma b_1\cdot\cdot b_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})=\frac{n+1}{2n+3}\hat{P}_{aa_1\cdot\cdot a_nbb_1\cdot\cdot b_n}(n+1)[\gamma^a_s(m+\gamma^c_s\partial_c)\gamma^b_s\gamma^4_s]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\\ \hat{P}_{sa_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma b_1\cdot\cdot b_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2}):=\eta^{a'_1}_{b_1}\eta^{a'_2}_{b_2}\cdot\cdot\eta^{a'_n}_{b_n}\hat{P}_{sa_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma a'_1\cdot\cdot a'_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})\end{cases}$$

推论10.2.1. $\hat{P}_{sa_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma b_1\cdot\cdot b_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})=\frac{n+1}{2n+3}\hat{P}_{aa_1\cdot\cdot a_nbb_1\cdot\cdot b_n}(n+1)[(m-\gamma^c_s\partial_c)\gamma^a_s\gamma^b_s\gamma^4_s]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}$

定理10.2.1. $\{A_{sa_1a_2\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma}(x),A^+_{sa'_1a'_2\cdot\cdot a'_n\tau'_\varsigma}(x')\}=i\hat{P}_{sa_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma a'_1\cdot\cdot a'_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})\Delta(x-x')$

[⇕]

定理10.2.2. $$\begin{cases}\{A_{sa_1a_2\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma}(x),A_{sb_1b_2\cdot\cdot b_n\tau'_\varsigma}(x')\}=i\hat{P}_{sa_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma b_1\cdot\cdot b_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})\Delta(x-x')\\ A_{sab\cdot\cdot\tau_\varsigma}=\overbrace{\eta^{a'}_a\eta^{b'}_b\cdot\cdot}^{n}A^+_{sa'b'\cdot\cdot\tau_\varsigma},A^+_{sab\cdot\cdot\tau_\varsigma}=\overbrace{\eta^{a'}_a\eta^{b'}_b\cdot\cdot}^{n}A_{sa'b'\cdot\cdot\tau_\varsigma}\end{cases}$$

[⇕]

定理10.2.3.

$$\begin{cases}\{A_{s\underbrace{a_1a_2\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(x),A^{+}_{s\underbrace{a'_1a'_2\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\}=\frac{im^{-2n}}{2^{5n}[(2n+1)!]^2}\\ \overbrace{(\gamma^4_s\gamma_{sa_1})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma^4_s\gamma_{sa'_1})^{+\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\underbrace{\mathbb{X}_s^{b_1}{}_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}_s^{+b'_1}{}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdots}_{n}[(m-\gamma^c_s\partial_c)\gamma^4_s]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\eta_{b_1b'_1}-\frac{\partial_{b_1}\partial^+_{b'_1}}{m^2}]\cdots}_{n}\Delta(x-x')\\ \{A_{s\underbrace{a_1a_2\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(x),A_{s\underbrace{a'_1a'_2\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\}=\frac{i(im)^{-2n}}{2^{5n}[(2n+1)!]^2}\\ \overbrace{(\gamma^4_s\gamma_{sa_1})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma^4_s\gamma_{sa'_1})^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\underbrace{\mathbb{X}_s^{b_1}{}_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}_s^{b'_1}{}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdots}_{n}[(m-\gamma^c_s\partial_c)\gamma^4_s]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\delta_{b_1b'_1}-\frac{\partial_{b_1}\partial_{b'_1}}{m^2}]\cdots}_{n}\Delta(x-x')\\ A_{sab\cdots\tau_\varsigma}=\overbrace{\eta^{a'}_a\eta^{b'}_b\cdots}^{n}A^+_{sa'b'\cdots\tau_\varsigma},A^+_{sab\cdots\tau_\varsigma}=\overbrace{\eta^{a'}_a\eta^{b'}_b\cdots}^{n}A_{sa'b'\cdots\tau_\varsigma}\\ S^*_s\bar{C}\gamma^aS^+_s=\gamma^4_s\gamma^a_s,S_s\gamma^{a'}CS^T_s=\gamma^{a'}_s\gamma^4_s,\mathbb{X}^a_s:=S_s\mathbb{X}^aS^T_s,\mathbb{X}^a_s=\mathbb{X}^{+a'}_s\eta^a_{a'}\end{cases}$$

$[\Updownarrow]$

定理10.2.4.

$$\begin{cases}\{A_{s\underbrace{a_1a_2\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(x),A^{+}_{s\underbrace{a'_1a'_2\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\}\\ =\frac{im^{-2n}}{2^{4n}[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\gamma^4_s\gamma_{sa_1})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{sa'_1}\gamma^4_s)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\underbrace{[(m-\gamma^a_s\partial_a)\gamma^4_s]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdots[(m-\gamma^c_s\partial_c)\gamma^4_s]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta(x-x')\\ \{A_{s\underbrace{a_1a_2\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(x),A_{s\underbrace{a'_1a'_2\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\}\\ =\frac{i(im)^{-2n}}{2^{4n}[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\gamma^4_s\gamma_{sa_1})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma^4_s\gamma_{sa'_1})^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\underbrace{[(m-\gamma^a_s\partial_a)\gamma^4_s]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdots[(m-\gamma^c_s\partial_c)\gamma^4_s]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}_{2n+1}\Delta(x-x')\\ A_{sab\cdots\tau_\varsigma}=\overbrace{\eta^{a'}_a\eta^{b'}_b\cdots}^{n}A^+_{sa'b'\cdots\tau_\varsigma},A^+_{sab\cdots\tau_\varsigma}=\overbrace{\eta^{a'}_a\eta^{b'}_b\cdots}^{n}A_{sa'b'\cdots\tau_\varsigma},S^*_s\bar{C}\gamma^aS^+_s=\gamma^4_s\gamma^a_s,S_s\gamma^{a'}CS^T_s=\gamma^{a'}_s\gamma^4_s\end{cases}$$

$[\Updownarrow]$

定理10.2.5.

$$\begin{cases}\{\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x),\psi^{+}_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x')\}\\ =\frac{i}{2^{3n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}_s{}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}_s{}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdots}_{n}[(m-\gamma^c_s\partial_c)\gamma^4_s]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdots}_{n}\Delta(x-x')\\ \{\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x),\psi_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x')\}\\ =\frac{i}{2^{3n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}_s{}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}_s{}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdots}_{n}[(m-\gamma^c_s\partial_c)\gamma^4_s]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdots}_{n}\Delta(x-x')\\ \psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}=\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n+1}}\underbrace{\delta^{\lambda'_\varsigma}_{\lambda_\varsigma}\delta^{\mu'_\varsigma}_{\mu_\varsigma}\cdots}_{2n+1},\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n+1}}=\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}\underbrace{\delta^{\lambda_\varsigma}_{\lambda'_\varsigma}\delta^{\mu_\varsigma}_{\mu'_\varsigma}\cdots}_{2n+1},\mathbb{X}^a_s:=S_s\mathbb{X}^aS^T_s\end{cases}$$

$[\Updownarrow]$

定理10.2.6.

$$\begin{cases}\{\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}(x),\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}(x')\}\\ =\frac{i}{2^{3n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}_s{}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\mathbb{X}_s{}^{a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot}_{n}[(m-\gamma^c_s\partial_c)\gamma^4_s]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\delta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\\ \{\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}(x),\psi_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}(x')\}\\ =\frac{i}{2^{3n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{\mathbb{X}_s{}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\mathbb{X}_s{}^{a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot}_{n}[(m-\gamma^c_s\partial_c)\gamma^4_s]_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}\underbrace{[\delta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2}]\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')\\ \psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}=\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}\underbrace{\delta^{\lambda'_\varsigma}_{\lambda_\varsigma}\delta^{\mu'_\varsigma}_{\mu_\varsigma}\cdot\cdot}_{2n+1},\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}=\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}\underbrace{\delta^{\lambda_\varsigma}_{\lambda'_\varsigma}\delta^{\mu_\varsigma}_{\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}_{2n+1},\mathbb{X}^a_s:=S_s\mathbb{X}^aS^T_s,\mathbb{X}^a_s=\mathbb{X}^{+a'}_s\eta^a_{a'}\end{cases}$$

$$[\Updownarrow]$$

定理10.2.7.

$$\begin{cases}\{\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}(x),\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}(x')\}=\frac{i}{2^{2n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a_s\partial_a)\gamma^4_s]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b_s\partial_b)\gamma^4_s]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\}) }_{2n+1}\Delta(x-x')\\ \{\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}(x),\psi_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}(x')\}=\frac{i}{2^{2n}[(2n+1)!]^2}\underbrace{[(m-\gamma^a_s\partial_a)\gamma^4_s]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b_s\partial_b)\gamma^4_s]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\}) }_{2n+1}\Delta(x-x')\\ \psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}=\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}\underbrace{\delta^{\lambda'_\varsigma}_{\lambda_\varsigma}\delta^{\mu'_\varsigma}_{\mu_\varsigma}\cdot\cdot}_{2n+1},\psi^+_{s\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}=\psi_{s\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}\underbrace{\delta^{\lambda_\varsigma}_{\lambda'_\varsigma}\delta^{\mu_\varsigma}_{\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}_{2n+1}\end{cases}$$

$$[\Downarrow]$$

定理10.2.8. $\{\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n+1}}(x')\}=i\frac{(i\varsigma)^{2n+1}}{2^{2n}[(2n+1)!]^2}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2n+1}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2n+1}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理10.2.9. $\{\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')\}=i\frac{(-1)^{2n+1}}{2^{n-1/2}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2n+1}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2n+1}\Delta(x-x')$

势A和场ψ的反对易关系都有两种等价表述方式，且互为前提和互为因果。既可以从势反对易关系推出一切，也可以从场反对易关系推出一切。这说明对于有质量粒子，势和场两种描述方案是完全等价的。并且可以从有质量粒子的对易规则推得与无质量粒子完全类似的反对易规则，反之则不行。

第三十章　各种对称和反对称方程的平面波解

自我评述：在本章中我对于各种全对称和全反对称方程平面波解提供了统一的解法，并为后续物理研究提供先导性的知识。

1 Bargmann-Wigner方程的平面波解

1.1 两个推论

推论1.1.1.

$$\begin{cases} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) \\ U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{s+1/2+h}}{\sqrt{2s+1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+1/2-h}}{\sqrt{2s+1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) \end{cases}$$

推论1.1.2.

$$\begin{cases} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) \\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{s+1/2+h}}{\sqrt{2s+1}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+1/2-h}}{\sqrt{2s+1}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) \end{cases}$$

1.2 两个关于U-自旋基的引理

引理1.2.1. $\sum\limits_{h=s}^{-s}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sum\limits_{h=s}^{-s}a_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},h-1)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p},-\frac{1}{2})=0,-(s-1)\le h\le s$

证明: $\sum\limits_{h=s}^{-s}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sum\limits_{h=s}^{-s}a_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{h=s}^{-s}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)[\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=\sum\limits_{h=s}^{-s}a_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{2s}}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h-1)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$
$=\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}a_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{2s}}a_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h-1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}),-(s-1)\le h\le s$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},h-1)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p},-\frac{1}{2})=0,-(s-1)\le h\le s$ □

引理1.2.2. $\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},h-1)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p},-\frac{1}{2})=0,-(s-1)\le h\le s$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)=c_+(\vec{p},h)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}c_+(\vec{p},h-1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}),-(s-1)\le h\le s \\ a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-s)=c_+(\vec{p},-s)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+c_-(\vec{p},-s)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}),h=-s \end{cases}$$

证明: $\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},h-1)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p},-\frac{1}{2})=0,-(s-1)\le h\le s$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}\{c_+(\vec{p},h)u_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+c_-(\vec{p},h)u_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+d_+(\vec{p},h)v_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+d_-(\vec{p},h)v_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\}u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{2s}}$
$\{c_+(\vec{p},h-1)u_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+c_-(\vec{p},h-1)u_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+d_+(\vec{p},h-1)v_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+d_-(\vec{p},h-1)v_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\}u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p},-\frac{1}{2})=$
$0,-(s-1)\le h\le s$
$\Leftrightarrow c_+(\vec{p},h)u_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}c_-(\vec{p},h-1)u_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$+[c_-(\vec{p},h)-\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}c_+(\vec{p},h-1)]u_{[\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p},\frac{1}{2})$

$$+d_+(\vec p,h)v_{[\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)u_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}d_-(\vec p,h-1)v_{[\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)u_{\tau_\varsigma]}(\vec p,-\tfrac12)$$
$$+d_-(\vec p,h)v_{[\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)u_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}d_+(\vec p,h-1)v_{[\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)u_{\tau_\varsigma]}(\vec p,-\tfrac12)=0,-(s-1)\le h\le s$$
$$\Leftrightarrow[c_-(\vec p,h)-\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}c_+(\vec p,h-1)]u_{[\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)u_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\tfrac12)$$
$$+d_+(\vec p,h)v_{[\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)u_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}d_-(\vec p,h-1)v_{[\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)u_{\tau_\varsigma]}(\vec p,-\tfrac12)$$
$$+d_-(\vec p,h)v_{[\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)u_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}d_+(\vec p,h-1)v_{[\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)u_{\tau_\varsigma]}(\vec p,-\tfrac12)=0,-(s-1)\le h\le s$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\tfrac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}c_-(\vec p,h)=\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{2s}}c_+(\vec p,h-1),-(s-1)\le h\le s\\ d_+(\vec p,h)=0,d_-(\vec p,h)=0,-s\le h\le s\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_{\eta_\varsigma}(\vec p,h)=c_+(\vec p,h)u_{\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}c_+(\vec p,h-1)u_{\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12),-(s-1)\le h\le s\\ a_{\eta_\varsigma}(\vec p,-s)=c_+(\vec p,-s)u_{\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)+c_-(\vec p,-s)u_{\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12),h=-s\end{cases}\qquad\square$$

1.3 两个关于V-自旋基的引理

引理1.3.1. $\sum_{h=s}^{-s}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec p,h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec p,h)=\sum_{h=s}^{-s}b^+_{\tau_\varsigma}(\vec p,h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec p,h)$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec p,h)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\frac12)+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec p,h-1)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,-\frac12)=0,-(s-1)\le h\le s$

证明: $\sum_{h=s}^{-s}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec p,h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec p,h)=\sum_{h=s}^{-s}b^+_{\tau_\varsigma}(\vec p,h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec p,h)$

$$\Leftrightarrow\sum_{h=s}^{-s}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec p,h)[\tfrac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec p,h-\tfrac12)v_{\tau_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec p,h+\tfrac12)v_{\tau_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)$$
$$=\sum_{h=s}^{-s}b^+_{\tau_\varsigma}(\vec p,h)\tfrac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec p,h-\tfrac12)v_{\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec p,h+\tfrac12)v_{\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)$$
$$\Leftrightarrow\tfrac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec p,h)v_{\tau_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{2s}}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec p,h-1)v_{\tau_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)]$$
$$=\tfrac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}b^+_{\tau_\varsigma}(\vec p,h)v_{\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{2s}}b^+_{\tau_\varsigma}(\vec p,h-1)v_{\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12),-(s-1)\le h\le s$$
$$\Leftrightarrow\tfrac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec p,h)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec p,h-1)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,-\tfrac12)=0,-(s-1)\le h\le s\qquad\square$$

引理1.3.2. $\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec p,h)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\frac12)+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec p,h-1)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,-\frac12)=0,-(s-1)\le h\le s$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec p,h)=d_+(\vec p,h)v_{\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}d_+(\vec p,h-1)v_{\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12),-(s-1)\le h\le s\\ b^+_{\eta_\varsigma}(\vec p,-s)=d_+(\vec p,-s)v_{\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)+d_-(\vec p,-s)v_{\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12),h=-s\end{cases}$$

证明: $\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec p,h)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\frac12)+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec p,h-1)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,-\frac12)=0,-(s-1)\le h\le s$

$$\Leftrightarrow\tfrac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}\{c_+(\vec p,h)u_{[\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)+c_-(\vec p,h)u_{[\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)+d_+(\vec p,h)v_{[\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)+d_-(\vec p,h)v_{[\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)\}v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{2s}}$$
$$\{c_+(\vec p,h-1)u_{[\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)+c_-(\vec p,h-1)u_{[\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)+d_+(\vec p,h-1)v_{[\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)+d_-(\vec p,h-1)v_{[\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)\}v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,-\tfrac12)$$
$$=0,-(s-1)\le h\le s$$
$$\Leftrightarrow d_+(\vec p,h)v_{[\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}d_-(\vec p,h-1)v_{[\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,-\tfrac12)$$
$$+[d_-(\vec p,h)-\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}d_+(\vec p,h-1)]v_{[\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\tfrac12)$$
$$+c_+(\vec p,h)u_{[\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}c_-(\vec p,h-1)u_{[\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,-\tfrac12)$$
$$+c_-(\vec p,h)u_{[\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}c_+(\vec p,h-1)u_{[\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,-\tfrac12)=0,-(s-1)\le h\le s$$
$$\Leftrightarrow[d_-(\vec p,h)-\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}d_+(\vec p,h-1)]v_{[\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\tfrac12)$$
$$+c_+(\vec p,h)u_{[\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}c_-(\vec p,h-1)u_{[\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,-\tfrac12)$$
$$+c_-(\vec p,h)u_{[\eta_\varsigma}(\vec p,-\tfrac12)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,\tfrac12)+\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}c_+(\vec p,h-1)u_{[\eta_\varsigma}(\vec p,\tfrac12)v_{\tau_\varsigma]}(\vec p,-\tfrac12)=0,-(s-1)\le h\le s$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\tfrac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}d_-(\vec p,h)=\tfrac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{2s}}d_+(\vec p,h-1),-(s-1)\le h\le s\\ c_+(\vec p,h)=0,c_-(\vec p,h)=0,-s\le h\le s\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h) = d_+(\vec{p},h)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + \frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}d_+(\vec{p},h-1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2}), -(s-1)\le h\le s \\ b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-s) = d_+(\vec{p},-s)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + d_-(\vec{p},-s)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2}), h=-s \end{cases} \qquad \square$$

1.3.1 两个重要定理

定理1.3.1.

$$\begin{cases} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h) = c_+(\vec{p},h)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + \frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}c_+(\vec{p},h-1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2}), -(s-1)\le h\le s \\ a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-s) = c_+(\vec{p},-s)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + c_-(\vec{p},-s)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2}), h=-s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sum_{h=s}^{-s} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) = \sum_{(h+1/2)=(s+1/2)}^{-(s+1/2)} a(\vec{p},h+\tfrac{1}{2})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2}) \\ a(\vec{p},-s-\tfrac{1}{2}) := c_-(\vec{p},-s), a(\vec{p},h+\tfrac{1}{2}) := \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{s+h+1}}c_+(\vec{p},h), -s\le h\le s \end{cases}$$

证明:

$$\begin{cases} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h) = c_+(\vec{p},h)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + \frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}c_+(\vec{p},h-1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2}), -(s-1)\le h\le s \\ a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-s) = c_+(\vec{p},-s)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + c_-(\vec{p},-s)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2}), h=-s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{h=s}^{-s} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) = \sum_{h=s}^{-s+1}[c_+(\vec{p},h)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + \frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}c_+(\vec{p},h-1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$$
$$+ \sum_{h=-s}[c_+(\vec{p},-s)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + c_-(\vec{p},-s)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-s)$$
$$= \sum_{h=s}^{-s+1} c_+(\vec{p},h)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) + \sum_{h=s}^{-s+1}\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}c_+(\vec{p},h-1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$$
$$+ \sum_{h=-s}[c_+(\vec{p},-s)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + c_-(\vec{p},-s)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-s)$$
$$= [\sum_{h=s-1}^{-s} c_+(\vec{p},h)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) + \sum_{h=s-1}^{-s}\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{s+h+1}}c_+(\vec{p},h)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h+1)]$$
$$+ [\sum_{h=s} c_+(\vec{p},s)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s) + \sum_{h=-s} c_-(\vec{p},-s)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-s)]$$
$$= \sum_{h=s-1}^{-s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{s+h+1}}c_+(\vec{p},h)[\frac{\sqrt{s+h+1}}{\sqrt{2s+1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + \frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s+1}}c_+(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h+1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$
$$+ [\sum_{h=s} c_+(\vec{p},s)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s) + \sum_{h=-s} c_-(\vec{p},-s)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-s)]$$
$$= \sum_{h=s-1}^{-s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{s+h+1}}c_+(\vec{p},h)$$
$$[\frac{\sqrt{(s+\frac{1}{2})+(h+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2s+1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},(h+\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2}) + \frac{\sqrt{(s+\frac{1}{2})-(h+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2s+1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},(h+\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$
$$+ [c_+(\vec{p},s)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s+\tfrac{1}{2}) + c_-(\vec{p},-s)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},-s-\tfrac{1}{2})]$$
$$= \sum_{(h+1/2)=(s-1/2)}^{-(s-1/2)}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{s+h+1}}c_+(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2}) + c_+(\vec{p},s)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s+\tfrac{1}{2})$$
$$+ c_-(\vec{p},-s)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},-s-\tfrac{1}{2})$$
$$= \sum_{(h+1/2)=(s+1/2)}^{-(s-1/2)}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{s+h+1}}c_+(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2}) + c_-(\vec{p},-s)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},-s-\tfrac{1}{2})$$
$$= \sum_{(h+1/2)=(s+1/2)}^{-(s+1/2)} a(\vec{p},h+\tfrac{1}{2})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2})$$
$$, a(\vec{p},h+\tfrac{1}{2}) := \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{s+h+1}}c_+(\vec{p},h), -s\le h\le s; a(\vec{p},-s-\tfrac{1}{2}) := c_-(\vec{p},-s) \qquad \square$$

定理1.3.2.

$$\begin{cases} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)=d_+(\vec{p},h)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}d_+(\vec{p},h-1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}),-(s-1)\le h\le s \\ b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-s)=d_+(\vec{p},-s)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+d_-(\vec{p},-s)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}),h=-s \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \sum_{h=s}^{-s} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sum_{(h+1/2)=(s+1/2)}^{-(s+1/2)} b^+(\vec{p},h+\frac{1}{2})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2}) \\ b^+(\vec{p},-s-\frac{1}{2}):=d_-(\vec{p},-s),b^+(\vec{p},h+\frac{1}{2}):=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{s+h+1}}d_+(\vec{p},h),-s\le h\le s \end{cases}$$

证明:

$$\begin{cases} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)=d_+(\vec{p},h)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}d_+(\vec{p},h-1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}),-(s-1)\le h\le s \\ b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-s)=d_+(\vec{p},-s)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+d_-(\vec{p},-s)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}),h=-s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{h=s}^{-s} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sum_{h=s}^{-s+1}[d_+(\vec{p},h)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}d_+(\vec{p},h-1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$$
$$+\sum_{h=-s}[d_+(\vec{p},-s)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+d_-(\vec{p},-s)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-s)$$
$$=\sum_{h=s}^{-s+1}d_+(\vec{p},h)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)+\sum_{h=s}^{-s+1}\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}d_+(\vec{p},h-1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$$
$$+\sum_{h=-s}[d_+(\vec{p},-s)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+d_-(\vec{p},-s)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-s)$$
$$=[\sum_{h=s-1}^{-s}d_+(\vec{p},h)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)+\sum_{h=s-1}^{-s}\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{s+h+1}}d_+(\vec{p},h)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h+1)]$$
$$+[\sum_{h=s}d_+(\vec{p},s)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s)+\sum_{h=-s}d_-(\vec{p},-s)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-s)]$$
$$=\sum_{h=s-1}^{-s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{s+h+1}}d_+(\vec{p},h)[\frac{\sqrt{s+h+1}}{\sqrt{2s+1}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s+1}}d_+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h+1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$$
$$+[\sum_{h=s}d_+(\vec{p},s)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s)+\sum_{h=-s}d_-(\vec{p},-s)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},-s)]$$
$$=\sum_{h=s-1}^{-s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{s+h+1}}d_+(\vec{p},h)$$
$$[\frac{\sqrt{(s+\frac{1}{2})+(h+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2s+1}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},(h+\frac{1}{2})-\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{(s+\frac{1}{2})-(h+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2s+1}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},(h+\frac{1}{2})+\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$$
$$+[d_+(\vec{p},s)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s+\frac{1}{2})+d_-(\vec{p},-s)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},-s-\frac{1}{2})]$$
$$=\sum_{(h+1/2)=(s-1/2)}^{-(s-1/2)}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{s+h+1}}d_+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})+d_+(\vec{p},s)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},s+\frac{1}{2})$$
$$+d_-(\vec{p},-s)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},-s-\frac{1}{2})$$
$$=\sum_{(h+1/2)=(s+1/2)}^{-(s-1/2)}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{s+h+1}}d_+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})+d_-(\vec{p},-s)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},-s-\frac{1}{2})$$
$$=\sum_{(h+1/2)=(s+1/2)}^{-(s+1/2)}b^+(\vec{p},h+\frac{1}{2})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})$$
$$,b^+(\vec{p},h+\frac{1}{2}):=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{s+h+1}}d_+(\vec{p},h),-s\le h\le s;b^+(\vec{p},-s-\frac{1}{2}):=d_-(\vec{p},-s)$$ □

1.4 用数学归纳法严格求解Bargmann-Wigner方程的平面波解

定理1.4.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\}}_{2s}}(x)$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=s}^{-s}\frac{m^s}{\sqrt{E}}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

$$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2s)!}\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{s-h}$$

$V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2s)!}\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\underbrace{v_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdots v_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{s-h}$

证明：采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$s'=1/2$时成立：

$(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma}(x)=0,\psi_{\lambda_\varsigma}(x)=\psi_{\lambda_\varsigma}(x)$

$\Leftrightarrow$

$\psi_{\lambda_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=1/2}^{-1/2}\frac{m^{1/2}}{\sqrt{E}}[a(\vec{p},h)U_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)V_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$

第二步：假设$s'=s$时成立：

$(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\}}_{2s}}(x)$

$\Leftrightarrow$

$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=s}^{-s}\frac{m^s}{\sqrt{E}}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$

第三步：$s'=s+1/2$时：

$(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(x)=\frac{1}{(2s+1)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma\}}_{2s+1}}(x)$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=s}^{-s}\frac{m^s}{\sqrt{E}}[a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(x)=\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s+1}}(x)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=s}^{-s}\frac{m^s}{\sqrt{E}}[a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ \int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=s}^{-s}\frac{m^s}{\sqrt{E}}[a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ =\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=s}^{-s}\frac{m^s}{\sqrt{E}}[a_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=s}^{-s}\frac{m^s}{\sqrt{E}}[a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ \sum\limits_{h=s}^{-s}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sum\limits_{h=s}^{-s}a_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)\\ \sum\limits_{h=s}^{-s}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sum\limits_{h=s}^{-s}b^+_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=s}^{-s}\frac{m^s}{\sqrt{E}}[a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)=c_+(\vec{p},h)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}c_+(\vec{p},h-1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}),-(s-1)\le h\le s\\ a_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-s)=c_+(\vec{p},-s)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+c_-(\vec{p},-s)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}),h=-s\\ b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p},h)=d_+(\vec{p},h)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+1-h}}{\sqrt{s+h}}d_+(\vec{p},h-1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}),-(s-1)\le h\le s\\ b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-s)=d_+(\vec{p},-s)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+d_-(\vec{p},-s)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}),h=-s\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{(h+1/2)=(s+1/2)}^{-(s+1/2)}\frac{m^s}{\sqrt{E}}\\ [\sqrt{m}a(\vec{p},h+\frac{1}{2})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})e^{ip\cdot x}+\sqrt{m}b^+(\vec{p},h+\frac{1}{2})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ \sqrt{m}a(\vec{p},-s-\frac{1}{2}):=c_-(\vec{p},-s),\sqrt{m}a(\vec{p},h+\frac{1}{2}):=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{(s+\frac{1}{2})+(h+\frac{1}{2})}}c_+(\vec{p},h),-s\le h\le s\\ \sqrt{m}b^+(\vec{p},-s-\frac{1}{2}):=d_-(\vec{p},-s),\sqrt{m}b^+(\vec{p},h+\frac{1}{2}):=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{(s+\frac{1}{2})+(h+\frac{1}{2})}}d_+(\vec{p},h),-s\le h\le s\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma}_{2s+1}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=s+1/2}^{-(s+1/2)}\frac{m^{s+1/2}}{\sqrt{E}}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ a(\vec{p},-s-\frac{1}{2}):=\frac{c_-(\vec{p},-s)}{\sqrt{m}},a(\vec{p},h):=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{(s+\frac{1}{2})+h}}\frac{c_+(\vec{p},h-\frac{1}{2})}{\sqrt{m}},-s+\frac{1}{2}\le h\le s+\frac{1}{2}\\ b^+(\vec{p},-s-\frac{1}{2}):=\frac{d_-(\vec{p},-s)}{\sqrt{m}},b^+(\vec{p},h):=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{(s+\frac{1}{2})+h}}\frac{d_+(\vec{p},h-\frac{1}{2})}{\sqrt{m}},-s+\frac{1}{2}\le h\le s+\frac{1}{2}\end{cases}$$

此步证明了$n'=n$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

2 N+1维时空中Bargmann-Wigner方程的平面波解

2.1 N+1维时空中Bargmann-Wigner方程U-自旋基的性质

2.1.1 关于对称性条件的U-自旋基引理

引理2.1.1. $\sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)=\sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}a_{\tau_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\ +\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0\end{cases}$$

证明: $\sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)=\sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}a_{\tau_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)$

$$\Leftrightarrow\sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)[\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l)U_{\tau_\varsigma}(\vec{p};1)$$

$$+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)U_{\tau_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)U_{\tau_\varsigma}(\vec{p};l)]$$

$$=\sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}a_{\tau_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)[\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l)U_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)$$

$$+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)U_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)U_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l)]$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\ +\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0\\ \frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\ +\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2-1,\cdot\cdot,n_l+1)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0\cdots\cdots\\ \frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\ +\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\ +\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0\end{cases}\qquad\square$$

引理2.1.2.

$$\begin{cases}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum\limits_{k=1}^{l}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)+\sum\limits_{k=1}^{l}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)\\\frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{k=1}^{l}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k),d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)=0$$

$$\begin{cases}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)\\+\cdots+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_1\geq1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)=c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)\\+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};3)+\cdots\\+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l+1;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_2\geq1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l)=c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)\\+\frac{\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3,n_4,\cdot\cdot,n_l;3)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};3)+\frac{\sqrt{n_4+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,n_4+1,\cdot\cdot,n_l;3)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};4)+\cdots\\+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_l+1;3)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_3\geq1\end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\begin{cases}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l)=c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)\\+\cdots+c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l-1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l-1)+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{n_l}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_l=2s\geq1\end{cases}$$

证明:

$$\begin{cases}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum\limits_{k=1}^{l}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)+\sum\limits_{k=1}^{l}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)\\\frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{k=1}^{l}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k),d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)=0$$

$$\begin{cases}c(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)=\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1)\cdots\\c(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}c(\vec{p};0,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;3)=\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2+1}}c(\vec{p};0,n_2,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;2)\cdots\\c(\vec{p};0,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_2+1}}c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}c(\vec{p};0,0,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;4)=\frac{\sqrt{n_4+1}}{\sqrt{n_3+1}}c(\vec{p};0,0,n_3,n_4+1,\cdot\cdot,n_l;3)\cdots\\c(\vec{p};0,0,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_3+1}}c(\vec{p};0,0,n_3,n_4,\cdot\cdot,n_l+1;3)\end{cases}$$

$\cdots$

$$\left\{c(\vec{p};0,\cdot,0,n_{l-1}+1,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_{l-1}+1}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_{l-1},n_l+1;l-1)\right.$$

$\Leftrightarrow$

$$a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{k=1}^{l}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k),d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)=0$$

$$\begin{cases}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)\\+\cdots+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_1\geq1\end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)=c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1) \\ +\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};3)+\cdots \\ +\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l+1;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_2\ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l)=c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\frac{\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3,n_4,\cdot\cdot,n_l;3)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};3)+\frac{\sqrt{n_4+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,n_4+1,\cdot\cdot,n_l;3)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};4)+\cdots \\ +\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_l+1;3)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_3\ge 1 \end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\begin{cases} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l)=c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\cdots+c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l-1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l-1)+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{n_l}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_l=2s\ge 1 \end{cases}$$ □

推论2.1.1. $a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{k=1}^{l}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)$

$$\begin{cases} c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)=\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1),n_1\ge 1\cdots \\ c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1),n_1\ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;3)=\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;2),n_2\ge 1\cdots \\ c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l+1;2),n_2\ge 1 \end{cases}$$

$\cdots$

$$\left\{c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_{l-1},n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_{l-1}}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_{l-1}-1,n_l+1;l),n_{l-1}\ge 1\right.$$

$\Leftrightarrow$

$$a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{k=1}^{l}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)$$

$$\begin{cases} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\cdots+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_1\ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)=c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1) \\ +\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};3)+\cdots \\ +\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l+1;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_2\ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l)=c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\frac{\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3,n_4,\cdot\cdot,n_l;3)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};3)+\frac{\sqrt{n_4+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,n_4+1,\cdot\cdot,n_l;3)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};4)+\cdots \\ +\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_l+1;3)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_3\ge 1 \end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\begin{cases} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l)=c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\cdots+c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l-1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l-1)+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{n_l}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_l=2s\ge 1 \end{cases}$$

引理2.1.3.

$$\begin{cases} c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)=\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1),n_1\ge 1\cdots \\ c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1),n_1\ge 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}\sum_{k=1}^{l}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)$$

$$=\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)$$

$$+\sum_{n_2\cdot\cdot+n_l=2s}\sum_{k=2}^{l}c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)$$

证明:

$$\begin{cases}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)=\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1),n_1\geq 1\cdots\\ c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1),n_1\geq 1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}\sum_{k=1}^{l}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)$$

$$=\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s}^{n_1\neq 0}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)[\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)$$

$$+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l)]$$

$$+\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s}^{n_1=0}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)[c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)$$

$$+c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l)]$$

$$=\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}^{1\leq n_1\leq 2s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)$$

$$+\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}^{0\leq n_1\leq 2s-1,1\leq n_2\leq 2s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1+1,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot$$

$$+\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}^{0\leq n_1\leq 2s-1,1\leq n_l\leq 2s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l)$$

$$+\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}^{n_1=0}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)[c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)$$

$$+c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l)]$$

$$=\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)$$

$$+\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1+1,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot$$

$$+\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l)$$

$$+\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}^{n_1=0}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)[c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l)]$$

$$=\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)$$

$$+\sum_{n_2\cdot\cdot+n_l=2s}\sum_{k=2}^{l}c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)$$ □

推论2.1.2.

$$\begin{cases}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)=\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1),n_1\geq 1\cdots\\ c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1),n_1\geq 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;3)=\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;2),n_2\geq 1\cdots\\ c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l+1;2),n_2\geq 1\end{cases}$$

$\cdots$

$$\Big\{c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_{l-1},n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_{l-1}}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_{l-1}-1,n_l+1;l),n_{l-1}\geq 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}\sum_{k=1}^{l}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)$$

$$= \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1+1}} c(\vec{p}; n_1, n_2, \cdot\cdot, n_l; 1) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; n_1+1, n_2, \cdot\cdot, n_l)$$
$$+ \sum_{n_2+\cdot\cdot+n_l=2s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2+1}} c(\vec{p}; 0, n_2, n_3, \cdot\cdot, n_l; 2) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; 0, n_2+1, n_3, \cdot\cdot, n_l)$$
$$+ \sum_{n_3+\cdot\cdot+n_l=2s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3+1}} c(\vec{p}; 0, 0, n_3, \cdot\cdot, n_l; 3) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; 0, 0, n_3+1, \cdot\cdot, n_l)$$
$$+ \cdots + \sum_{n_l=2s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_l+1}} c(\vec{p}; 0, \cdot\cdot, 0, n_l; l) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; 0, \cdot\cdot, 0, n_l+1)$$

引理2.1.4.

$$\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1+1}} c(\vec{p}; n_1, n_2, \cdot\cdot, n_l; 1) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; n_1+1, n_2, \cdot\cdot, n_l)$$
$$+ \sum_{n_2+\cdot\cdot+n_l=2s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2+1}} c(\vec{p}; 0, n_2, n_3, \cdot\cdot, n_l; 2) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; 0, n_2+1, n_3, \cdot\cdot, n_l)$$
$$+ \sum_{n_3+\cdot\cdot+n_l=2s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3+1}} c(\vec{p}; 0, 0, n_3, \cdot\cdot, n_l; 3) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; 0, 0, n_3+1, \cdot\cdot, n_l)$$
$$+ \cdots + \sum_{n_l=2s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_l+1}} c(\vec{p}; 0, \cdot\cdot, 0, n_l; l) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; 0, \cdot\cdot, 0, n_l+1)$$
$$= \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s+1} a(\vec{p}; n_1, n_2, \cdot\cdot, n_l) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; n_1, n_2, \cdot\cdot, n_l)$$

$$\begin{cases} a(\vec{p}; n_1, n_2, \cdot\cdot, n_l) := \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1}} c(\vec{p}; n_1-1, n_2, \cdot\cdot, n_l; 1), n_1 \neq 0 \\ a(\vec{p}; 0, n_2, \cdot\cdot, n_l) := \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2}} c(\vec{p}; 0, n_2-1, n_3, \cdot\cdot, n_l; 2), n_2 \neq 0 \\ a(\vec{p}; 0, 0, n_3, \cdot\cdot, n_l) := \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3}} c(\vec{p}; 0, 0, n_3-1, \cdot\cdot, n_l; 3), n_3 \neq 0 \\ \cdots \\ a(\vec{p}; 0, 0, \cdot\cdot, 0, n_l) := \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_l}} c(\vec{p}; 0, \cdot\cdot, 0, n_l-1; l), n_l \neq 0 \end{cases}$$

证明: $\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s} \sum_{k=1}^{l} c(\vec{p}; n_1, n_2, \cdot\cdot, n_l; k) u_{\eta_\varsigma}(\vec{p}; k) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}; n_1, \cdot\cdot, n_l)$

$$= \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1+1}} c(\vec{p}; n_1, n_2, \cdot\cdot, n_l; 1) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; n_1+1, n_2, \cdot\cdot, n_l)$$
$$+ \sum_{n_2+\cdot\cdot+n_l=2s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2+1}} c(\vec{p}; 0, n_2, n_3, \cdot\cdot, n_l; 2) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; 0, n_2+1, n_3, \cdot\cdot, n_l)$$
$$+ \sum_{n_3+\cdot\cdot+n_l=2s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3+1}} c(\vec{p}; 0, 0, n_3, \cdot\cdot, n_l; 3) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; 0, 0, n_3+1, \cdot\cdot, n_l)$$
$$+ \cdots + \sum_{n_l=2s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_l+1}} c(\vec{p}; 0, \cdot\cdot, 0, n_l; l) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; 0, \cdot\cdot, 0, n_l+1)$$
$$= \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s+1}^{n_1\neq 0} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1}} c(\vec{p}; n_1-1, n_2, \cdot\cdot, n_l; 1) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; n_1, n_2, \cdot\cdot, n_l)$$
$$+ \sum_{n_2+\cdot\cdot+n_l=2s+1}^{n_1=0, n_2\neq 0} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2}} c(\vec{p}; 0, n_2-1, n_3, \cdot\cdot, n_l; 2) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; 0, n_2, n_3, \cdot\cdot, n_l)$$
$$+ \sum_{n_3+\cdot\cdot+n_l=2s+1}^{n_1=0, n_2=0, n_3\neq 0} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3}} c(\vec{p}; 0, 0, n_3-1, \cdot\cdot, n_l; 3) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; 0, 0, n_3, \cdot\cdot, n_l)$$
$$+ \cdots + \sum_{n_l=2s+1}^{n_1=0, \cdot\cdot, n_{l-1}=0, n_l\neq 0} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_l}} c(\vec{p}; 0, \cdot\cdot, 0, n_l-1; l) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; 0, \cdot\cdot, 0, n_l)$$
$$= \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s+1} a(\vec{p}; n_1, n_2, \cdot\cdot, n_l) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; n_1, n_2, \cdot\cdot, n_l)$$

$$\begin{cases} a(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1),n_1\neq 0\\ a(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l;2),n_2\neq 0\\ a(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_l;3),n_3\neq 0\\ \cdots\\ a(\vec{p};0,0,\cdot\cdot,0,n_l)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_l}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l-1;l),n_l\neq 0 \end{cases}$$ □

2.1.2 几个推论

推论2.1.3. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l)U_{\tau_\varsigma}(\vec{p};1)$
$+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)U_{\tau_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)U_{\tau_\varsigma}(\vec{p};l)$

推论2.1.4. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};0,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)U_{\tau_\varsigma}(\vec{p};2)$
$+\frac{\sqrt{n_3}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};0,n_2,n_3-1,\cdot\cdot,n_l)U_{\tau_\varsigma}(\vec{p};0,0,1,\cdot\cdot,0)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)U_{\tau_\varsigma}(\vec{p};l)$

推论2.1.5. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s+1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l)U_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)$
$+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s+1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)U_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{2s+1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)U_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l)$

2.1.3 一个重要定理

定理2.1.1.

$$\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s}a_{\tau_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)$$
$\Leftrightarrow$
$$a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{k=1}^{l}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)$$
$$\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l}^{=2s}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s+1}a(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)$$
$$\begin{cases} a(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1),n_1\neq 0\\ a(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l;2),n_2\neq 0\\ a(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_l;3),n_3\neq 0\\ \cdots\\ a(\vec{p};0,0,\cdot\cdot,0,n_l)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_l}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l-1;l),n_l\neq 0 \end{cases}$$

证明:

$$\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s}a_{\tau_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)$$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\ +\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{2s}}a_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1)u_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0 \end{cases}$$
$\Leftrightarrow$
$$a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{k=1}^{l}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)$$
$$\begin{cases} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)\\ +\cdots+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_1\geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l) = c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1) \\ +\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};3)+\cdots \\ +\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l+1;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l), n_2\geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l) = c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\frac{\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3,n_4,\cdot\cdot,n_l;3)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};3)+\frac{\sqrt{n_4+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,n_4+1,\cdot\cdot,n_l;3)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};4)+\cdots \\ +\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_l+1;3)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l), n_3\geq 1 \end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\begin{cases} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l) = c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;2)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\cdots+c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l-1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l-1)+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{n_l}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l), n_l=2s\geq 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l) = \sum_{k=1}^{l} c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)$$

$$\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l}^{=2s} a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l) = \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s+1} a(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)$$

$$\begin{cases} a(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l) = \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1), n_1\neq 0 \\ a(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l) = \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l;2), n_2\neq 0 \\ a(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l) = \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_l;3), n_3\neq 0 \\ \cdots \\ a(\vec{p};0,0,\cdot\cdot,0,n_l) = \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_l}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l-1;l), n_l\neq 0 \end{cases}$$ □

2.2 N+1维时空中Bargmann-Wigner方程V-自旋基的性质

2.2.1 关于对称性条件的V-自旋基引理

引理2.2.1. $\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l) = \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s} b^+_{\tau_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2) \\ +\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0 \end{cases}$$

证明: $\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l) = \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s} b^+_{\tau_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)$

$$\Leftrightarrow \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)[\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l)V_{\tau_\varsigma}(\vec{p};1)$$

$$+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)V_{\tau_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)V_{\tau_\varsigma}(\vec{p};l)]$$

$$= \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s} b^+_{\tau_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)[\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l)V_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)$$

$$+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)V_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)V_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l)]$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0\\\frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2-1,\cdot\cdot,n_l+1)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0\cdots\cdots\\\frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0\end{cases}\qquad\square$$

引理2.2.2.

$$\begin{cases}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{k=1}^{l}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)+\sum_{k=1}^{l}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)\\\frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{k=1}^{l}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k),c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)=0$$

$$\begin{cases}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)\\+\cdots+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_1\ge1\end{cases}$$

$$\begin{cases}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)=d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)\\+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};3)+\cdots\\+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l+1;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_2\ge1\end{cases}$$

$$\begin{cases}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l)=d(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+d(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)\\+\frac{\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_3}}d(\vec{p};0,0,n_3,n_4,\cdot\cdot,n_l;3)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};3)+\frac{\sqrt{n_4+1}}{\sqrt{n_3}}d(\vec{p};0,0,n_3-1,n_4+1,\cdot\cdot,n_l;3)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};4)+\cdots\\+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_3}}d(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_l+1;3)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_3\ge1\end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\begin{cases}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l)=d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)\\+\cdots+d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l-1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l-1)+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{n_l}}d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_l=2s\ge1\end{cases}$$

证明:

$$\begin{cases}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{k=1}^{l}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)+\sum_{k=1}^{l}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)\\\frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{k=1}^{l}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k),c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)=0$$

$$\begin{cases}d(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)=\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1+1}}d(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1)\cdots\\d(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1+1}}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1)\end{cases}$$

$$\begin{cases} d(\vec{p};0,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;3)=\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2+1}}d(\vec{p};0,n_2,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;2)\cdots \\ d(\vec{p};0,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_2+1}}d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d(\vec{p};0,0,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;4)=\frac{\sqrt{n_4+1}}{\sqrt{n_3+1}}d(\vec{p};0,0,n_3,n_4+1,\cdot\cdot,n_l;3)\cdots \\ d(\vec{p};0,0,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_3+1}}d(\vec{p};0,0,n_3,n_4,\cdot\cdot,n_l+1;3) \end{cases}$$

$\cdots$

$$\begin{cases} d(\vec{p};0,\cdot,0,n_{l-1}+1,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_{l-1}+1}}d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_{l-1},n_l+1;l-1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{k=1}^{l}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k),c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)=0$$

$$\begin{cases} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\cdots+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_1\ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)=d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1) \\ +\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};3)+\cdots \\ +\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l+1;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_2\ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l)=d(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+d(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\frac{\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_3}}d(\vec{p};0,0,n_3,n_4,\cdot\cdot,n_l;3)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};3)+\frac{\sqrt{n_4+1}}{\sqrt{n_3}}d(\vec{p};0,0,n_3-1,n_4+1,\cdot\cdot,n_l;3)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};4)+\cdots \\ +\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_3}}d(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_l+1;3)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_3\ge 1 \end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\begin{cases} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l)=d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\cdots+d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l-1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l-1)+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{n_l}}d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_l=2s\ge 1 \end{cases}$$ □

推论2.2.1. $b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{k=1}^{l}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)$

$$\begin{cases} d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)=\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1),n_1\ge 1\cdots \\ d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1),n_1\ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;3)=\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;2),n_2\ge 1\cdots \\ d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l+1;2),n_2\ge 1 \end{cases}$$

$\cdots$

$$\begin{cases} d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_{l-1},n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_{l-1}}}d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_{l-1}-1,n_l+1;l),n_{l-1}\ge 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{k=1}^{l}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)$$

$$\begin{cases} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\cdots+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_1\ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)=d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1) \\ +\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};3)+\cdots \\ +\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l+1;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_2\ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l)=d(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+d(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\frac{\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_3}}d(\vec{p};0,0,n_3,n_4,\cdot\cdot,n_l;3)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};3)+\frac{\sqrt{n_4+1}}{\sqrt{n_3}}d(\vec{p};0,0,n_3-1,n_4+1,\cdot\cdot,n_l;3)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};4)+\cdots \\ +\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_3}}d(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_l+1;3)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_3\ge 1 \end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\begin{cases} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l) = d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1) + d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\cdots + d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l-1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l-1) + \frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{n_l}}d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l), n_l = 2s \geq 1 \end{cases}$$

引理2.2.3.

$$\begin{cases} d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;2) = \frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1), n_1 \geq 1\cdots \\ d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;l) = \frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1), n_1 \geq 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}\sum_{k=1}^{l} d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)$$
$$= \sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1+1}}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)$$
$$+ \sum_{n_2\cdot\cdot+n_l=2s}\sum_{k=2}^{l} d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)$$

证明:

$$\begin{cases} d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;2) = \frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1), n_1 \geq 1\cdots \\ d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;l) = \frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1), n_1 \geq 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}\sum_{k=1}^{l} d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)$$
$$= \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s}^{n_1\neq 0} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)[\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)$$
$$+ \frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) + \cdot\cdot + \frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l)]$$
$$+ \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s}^{n_1=0} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)[d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)$$
$$+ d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) + \cdot\cdot + d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l)]$$
$$= \sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}^{1\leq n_1\leq 2s} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)$$
$$+ \sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}^{0\leq n_1\leq 2s-1, 1\leq n_2\leq 2s} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1+1,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1+1}}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) + \cdot\cdot$$
$$+ \sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}^{0\leq n_1\leq 2s-1, 1\leq n_l\leq 2s} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l)$$
$$+ \sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}^{n_1=0} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)[d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)$$
$$+ d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) + \cdot\cdot + d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l)]$$
$$= \sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)$$
$$+ \sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1+1,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1+1}}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) + \cdot\cdot$$
$$+ \sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{n_1+1}}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l)$$
$$+ \sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}^{n_1=0} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)[d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2) + \cdot\cdot + d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l)]$$
$$= \sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1+1}}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)$$
$$+ \sum_{n_2\cdot\cdot+n_l=2s}\sum_{k=2}^{l} d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l) \qquad \square$$

推论2.2.2.

$$\begin{cases} d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)=\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1),n_1\geq 1\cdots \\ d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1),n_1\geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;3)=\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;2),n_2\geq 1\cdots \\ d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l+1;2),n_2\geq 1 \end{cases}$$

$\cdots$

$$\begin{cases} d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_{l-1},n_l;l)=\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_{l-1}}}d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_{l-1}-1,n_l+1;l),n_{l-1}\geq 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}\sum_{k=1}^{l}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)$$
$$=\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1+1}}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)$$
$$+\sum_{n_2+\cdot\cdot+n_l=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2+1}}d(\vec{p};0,n_2,n_3,\cdot\cdot,n_l;2)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,n_2+1,n_3,\cdot\cdot,n_l)$$
$$+\sum_{n_3+\cdot\cdot+n_l=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3+1}}d(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;3)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,0,n_3+1,\cdot\cdot,n_l)$$
$$+\cdots+\sum_{n_l=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_l+1}}d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l+1)$$

引理2.2.4.

$$\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1+1}}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)$$
$$+\sum_{n_2+\cdot\cdot+n_l=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2+1}}d(\vec{p};0,n_2,n_3,\cdot\cdot,n_l;2)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,n_2+1,n_3,\cdot\cdot,n_l)$$
$$+\sum_{n_3+\cdot\cdot+n_l=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3+1}}d(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;3)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,0,n_3+1,\cdot\cdot,n_l)$$
$$+\cdots+\sum_{n_l=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_l+1}}d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l+1)$$
$$=\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s+1}b^+(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)$$

$$\begin{cases} b^+(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l):=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1),n_1\neq 0 \\ b^+(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l):=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l;2),n_2\neq 0 \\ b^+(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l):=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3}}d(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_l;3),n_3\neq 0 \\ \cdots \\ b^+(\vec{p};0,0,\cdot\cdot,0,n_l):=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_l}}d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l-1;l),n_l\neq 0 \end{cases}$$

证明: $\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l=2s}\sum_{k=1}^{l}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)$

$$=\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1+1}}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)$$
$$+\sum_{n_2+\cdot\cdot+n_l=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2+1}}d(\vec{p};0,n_2,n_3,\cdot\cdot,n_l;2)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,n_2+1,n_3,\cdot\cdot,n_l)$$
$$+\sum_{n_3+\cdot\cdot+n_l=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3+1}}d(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;3)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,0,n_3+1,\cdot\cdot,n_l)$$
$$+\cdots+\sum_{n_l=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_l+1}}d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l+1)$$

$$= \sum_{n_1+\cdots+n_l=2s+1}^{n_1\neq 0} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1}} d(\vec{p}; n_1-1, n_2, \cdots, n_l; 1) V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; n_1, n_2, \cdots, n_l)$$
$$+ \sum_{n_2+\cdots+n_l=2s+1}^{n_1=0, n_2\neq 0} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2}} d(\vec{p}; 0, n_2-1, n_3, \cdots, n_l; 2) V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; 0, n_2, n_3, \cdots, n_l)$$
$$+ \sum_{n_3+\cdots+n_l=2s+1}^{n_1=0, n_2=0, n_3\neq 0} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3}} d(\vec{p}; 0, 0, n_3-1, \cdots, n_l; 3) V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; 0, 0, n_3, \cdots, n_l)$$
$$+ \cdots + \sum_{n_l=2s+1}^{n_1=0, \cdots, n_{l-1}=0, n_l\neq 0} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_l}} d(\vec{p}; 0, \cdots, 0, n_l-1; l) V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; 0, \cdots, 0, n_l)$$
$$= \sum_{n_1+\cdots+n_l=2s+1} b^+(\vec{p}; n_1, n_2, \cdots, n_l) V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; n_1, n_2, \cdots, n_l)$$
$$\begin{cases} b^+(\vec{p}; n_1, n_2, \cdots, n_l) = \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1}} d(\vec{p}; n_1-1, n_2, \cdots, n_l; 1), n_1 \neq 0 \\ b^+(\vec{p}; 0, n_2, \cdots, n_l) = \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2}} d(\vec{p}; 0, n_2-1, n_3, \cdots, n_l; 2), n_2 \neq 0 \\ b^+(\vec{p}; 0, 0, n_3, \cdots, n_l) = \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3}} d(\vec{p}; 0, 0, n_3-1, \cdots, n_l; 3), n_3 \neq 0 \\ \cdots \\ b^+(\vec{p}; 0, 0, \cdots, 0, n_l) = \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_l}} d(\vec{p}; 0, \cdots, 0, n_l-1; l), n_l \neq 0 \end{cases}$$

□

2.2.2 几个推论

推论2.2.3. $V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}; n_1, n_2, \cdots, n_l) = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p}; n_1-1, n_2, \cdots, n_l) v_{\tau_\varsigma}(\vec{p}; 1)$
$+ \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p}; n_1, n_2-1, \cdots, n_l) v_{\tau_\varsigma}(\vec{p}; 2) + \cdots + \frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{2s}} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p}; n_1, n_2, \cdots, n_l-1) v_{\tau_\varsigma}(\vec{p}; l)$

推论2.2.4. $V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}; 0, n_2, \cdots, n_l) = \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p}; 0, n_2-1, \cdots, n_l) v_{\tau_\varsigma}(\vec{p}; 2)$
$+ \frac{\sqrt{n_3}}{\sqrt{2s}} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p}; 0, n_2, n_3-1, \cdots, n_l) v_{\tau_\varsigma}(\vec{p}; 0, 0, 1, \cdots, 0) + \cdots + \frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{2s}} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p}; 0, n_2, \cdots, n_l-1) v_{\tau_\varsigma}(\vec{p}; l)$

推论2.2.5. $V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; n_1, n_2, \cdots, n_l) = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s+1}} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}; n_1-1, n_2, \cdots, n_l) v_{\eta_\varsigma}(\vec{p}; 1)$
$+ \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s+1}} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}; n_1, n_2-1, \cdots, n_l) v_{\eta_\varsigma}(\vec{p}; 2) + \cdots + \frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{2s+1}} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}; n_1, n_2, \cdots, n_l-1) v_{\eta_\varsigma}(\vec{p}; l)$

2.2.3 一个重要定理

定理2.2.1.

$$\sum_{n_1+\cdots+n_l=2s} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p}; n_1, \cdots, n_l) V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}; n_1, \cdots, n_l) = \sum_{n_1+\cdots+n_l=2s} b^+_{\tau_\varsigma}(\vec{p}; n_1, \cdots, n_l) V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}; n_1, \cdots, n_l)$$
$\Leftrightarrow$
$$b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p}; n_1, n_2, \cdots, n_l) = \sum_{k=1}^{l} d(\vec{p}; n_1, n_2, \cdots, n_l; k) v_{\eta_\varsigma}(\vec{p}; k)$$
$$\sum_{n_1\cdots+n_l}^{=2s} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p}; n_1, n_2, \cdots, n_l) V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}; n_1, \cdots, n_l) = \sum_{n_1+\cdots+n_l}^{=2s+1} b^+(\vec{p}; n_1, n_2, \cdots, n_l) V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p}; n_1, n_2, \cdots, n_l)$$
$$\begin{cases} b^+(\vec{p}; n_1, n_2, \cdots, n_l) = \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1}} d(\vec{p}; n_1-1, n_2, \cdots, n_l; 1), n_1 \neq 0 \\ b^+(\vec{p}; 0, n_2, \cdots, n_l) = \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2}} d(\vec{p}; 0, n_2-1, n_3, \cdots, n_l; 2), n_2 \neq 0 \\ b^+(\vec{p}; 0, 0, n_3, \cdots, n_l) = \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3}} d(\vec{p}; 0, 0, n_3-1, \cdots, n_l; 3), n_3 \neq 0 \\ \cdots \\ b^+(\vec{p}; 0, 0, \cdots, 0, n_l) = \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_l}} d(\vec{p}; 0, \cdots, 0, n_l-1; l), n_l \neq 0 \end{cases}$$

证明:

$$\sum_{n_1+\cdots+n_l=2s} b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p}; n_1, \cdots, n_l) V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}; n_1, \cdots, n_l) = \sum_{n_1+\cdots+n_l=2s} b^+_{\tau_\varsigma}(\vec{p}; n_1, \cdots, n_l) V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}; n_1, \cdots, n_l)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdots+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{2s}}b^+_{[\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1)v_{\tau_\varsigma]}(\vec{p};l)=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{k=1}^{l}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)$$

$$\begin{cases}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)\\+\cdots+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l+1;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_1\geq 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)=d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)\\+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)+\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};3)+\cdots\\+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l+1;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_2\geq 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l)=d(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+d(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)\\+\frac{\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_3}}d(\vec{p};0,0,n_3,n_4,\cdot\cdot,n_l;3)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};3)+\frac{\sqrt{n_4+1}}{\sqrt{n_3}}d(\vec{p};0,0,n_3-1,n_4+1,\cdot\cdot,n_l;3)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};4)+\cdots\\+\frac{\sqrt{n_l+1}}{\sqrt{n_3}}d(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_l+1;3)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_3\geq 1\end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\begin{cases}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l)=d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};1)+d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;2)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};2)\\+\cdots+d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l-1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l-1)+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{n_l}}d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l;l)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};l),n_l=2s\geq 1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{k=1}^{l}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l;k)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p};k)$$

$$\sum_{n_1\cdot\cdot+n_l}^{=2s}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)=\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s+1}b^+(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)$$

$$\begin{cases}b^+(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1}}d(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l;1),n_1\neq 0\\b^+(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2}}d(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_l;2),n_2\neq 0\\b^+(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3}}d(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_l;3),n_3\neq 0\\\cdots\\b^+(\vec{p};0,0,\cdot\cdot,0,n_l)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_l}}d(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_l-1;l),n_l\neq 0\end{cases}$$ □

2.3 用数学归纳法严格求解N+1维时空中Bargmann-Wigner方程的平面波解

定理2.3.1.

$$(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\}}_{2s}}(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}\frac{m^s}{\sqrt{E}}$$

$$[a(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$s'=1/2$时成立：

$$(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma}(x)=0,\psi_{\lambda_\varsigma}(x)=\psi_{\lambda_\varsigma}(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$\psi_{\lambda_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=1}\frac{m^{1/2}}{\sqrt{E}}[a(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\lambda_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)V_{\lambda_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

第二步：假设$s'=s$时成立：

$(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\}}_{2s}}(x)$

$\Leftrightarrow$

$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}\frac{m^s}{\sqrt{E}}$

$[a(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$

第三步：$s'=s+1/2$时：

$(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(x)=\frac{1}{(2s+1)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma\}}_{2s+1}}(x)$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}\frac{m^s}{\sqrt{E}}\\ [a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{ip\cdot x}+b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(x)=\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s+1}}(x)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}\frac{m^s}{\sqrt{E}}\\ [a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{ip\cdot x}+b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ \int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}\frac{m^s}{\sqrt{E}}\\ [a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{ip\cdot x}+b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ =\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}\frac{m^s}{\sqrt{E}}\\ [a_{\tau_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{ip\cdot x}+b^+_{\tau_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}\frac{m^s}{\sqrt{E}}\\ [a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{ip\cdot x}+b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ \sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}a_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)=\sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}a_{\tau_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)\\ \sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}b^+_{\eta_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)=\sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}b^+_{\tau_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=s}^{-s}\frac{m^{s+1/2}}{\sqrt{E}}\\ [a(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\eta_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\end{cases}$$

此步证明了$s'=s+1/2$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

3 K-G方程平面波解的直观解法

3.1 直观解法的数学基础

引理3.1.1.

$$\begin{cases}\sum_{h=n}^{-n}[a_d(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)]=\sum_{h=n}^{-n}[a_d(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)]\\(p^cp_c+m^2)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,p^a\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{n!}\varepsilon_{\underbrace{\{ab\cdot\cdot\}}_{n}}(\vec{p},h)\\a_d(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=a_a(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{db\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h),a_d(\vec{p},h):=a(\vec{p},h;1)\varepsilon_d(\vec{p},1)+a(\vec{p},h;0)\varepsilon_d(\vec{p},0)+a(\vec{p},h;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)\end{cases}$$

引理3.1.2.

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_c(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_c(\vec{p},-1)\\\sum_{h=n}^{-n}[a_d(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)]=\sum_{h=n}^{-n}[a_a(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{db\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)],-n\le h\le n\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_c(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_c(\vec{p},-1)\\a(\vec{p},h;1)=\frac{\sqrt{C_{n+h+1}^2}}{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}a(\vec{p},h+1;0),a(\vec{p},h;-1)=\frac{\sqrt{C_{n-h+1}^2}}{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}a(\vec{p},h-1;0)\\a(\vec{p},n;-1)=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^2}}a(\vec{p},n-2;1),a(\vec{p},-n;1)=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^2}}a(\vec{p},-n+2;-1)\\-n+1\le h\le n-1\end{cases}$$

证明:

$$\begin{cases}\sum_{h=n}^{-n}[a_d(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)]=\sum_{h=n}^{-n}[a_a(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{db\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)]\\a_d(\vec{p},h):=a(\vec{p},h;1)\varepsilon_d(\vec{p},1)+a(\vec{p},h;0)\varepsilon_d(\vec{p},0)+a(\vec{p},h;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{h=n}^{-n}[a(\vec{p},h;1)\varepsilon_d(\vec{p},1)+a(\vec{p},h;0)\varepsilon_d(\vec{p},0)+a(\vec{p},h;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)]\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)$$

$$=\sum_{h=n}^{-n}[a(\vec{p},h;1)\varepsilon_a(\vec{p},1)+a(\vec{p},h;0)\varepsilon_a(\vec{p},0)+a(\vec{p},h;-1)\varepsilon_a(\vec{p},-1)]\varepsilon_{\underbrace{db\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{h=n}^{-n}[a(\vec{p},h;1)\varepsilon_d(\vec{p},1)+a(\vec{p},h;0)\varepsilon_d(\vec{p},0)+a(\vec{p},h;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)]$$

$$[\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_a(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_a(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_a(\vec{p},-1)]$$

$$=\sum_{h=n}^{-n}[a(\vec{p},h;1)\varepsilon_a(\vec{p},1)+a(\vec{p},h;0)\varepsilon_a(\vec{p},0)+a(\vec{p},h;-1)\varepsilon_a(\vec{p},-1)]$$

$$[\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_d(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_d(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)]$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h-1)a(\vec{p},h;1)=\sum_{h=n}^{-n}a(\vec{p},h;1)\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\\\sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h-1)a(\vec{p},h;0)=\sum_{h=n}^{-n}a(\vec{p},h;1)\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)\\\sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h-1)a(\vec{p},h;-1)=\sum_{h=n}^{-n}a(\vec{p},h;1)\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)a(\vec{p},h;1)=\sum_{h=n}^{-n}a(\vec{p},h;0)\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\\\sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)a(\vec{p},h;0)=\sum_{h=n}^{-n}a(\vec{p},h;0)\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)\\\sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)a(\vec{p},h;-1)=\sum_{h=n}^{-n}a(\vec{p},h;0)\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h+1)a(\vec{p},h;1)=\sum_{h=n}^{-n}a(\vec{p},h;-1)\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\\ \sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h+1)a(\vec{p},h;0)=\sum_{h=n}^{-n}a(\vec{p},h;-1)\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)\\ \sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h+1)a(\vec{p},h;-1)=\sum_{h=n}^{-n}a(\vec{p},h;-1)\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h-1)a(\vec{p},h;0)=\sum_{h=n}^{-n}a(\vec{p},h;1)\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)\\ \sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h-1)a(\vec{p},h;-1)=\sum_{h=n}^{-n}a(\vec{p},h;1)\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\\ \sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h+1)a(\vec{p},h;0)=\sum_{h=n}^{-n}a(\vec{p},h;-1)\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\sum_{h=n-1}^{-n-1}\frac{\sqrt{C_{n+h+1}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)a(\vec{p},h+1;0)=\sum_{h=n}^{-n}a(\vec{p},h;1)\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)\\ \sum_{h=n-1}^{-n-1}\frac{\sqrt{C_{n+h+1}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)a(\vec{p},h+1;-1)=\sum_{h=n+1}^{-n+1}a(\vec{p},h-1;1)\frac{\sqrt{C_{n-h+1}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)\\ \sum_{h=n+1}^{-n+1}\frac{\sqrt{C_{n-h+1}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)a(\vec{p},h-1;0)=\sum_{h=n}^{-n}a(\vec{p},h;-1)\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\sum_{h=n-1}^{-n+1}\frac{\sqrt{C_{n+h+1}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)a(\vec{p},h+1;0)=\sum_{h=n-1}^{-n+1}a(\vec{p},h;1)\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)\\ \sum_{h=n-1}^{-n+1}\frac{\sqrt{C_{n+h+1}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)a(\vec{p},h+1;-1)=\sum_{h=n-1}^{-n+1}a(\vec{p},h-1;1)\frac{\sqrt{C_{n-h+1}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)\\ \sum_{h=n-1}^{-n+1}\frac{\sqrt{C_{n-h+1}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)a(\vec{p},h-1;0)=\sum_{h=n-1}^{-n+1}a(\vec{p},h;-1)\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{C_{n+h+1}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}a(\vec{p},h+1;0)=\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}a(\vec{p},h;1)\\ \frac{\sqrt{C_{n+h+1}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}a(\vec{p},h+1;-1)=\frac{\sqrt{C_{n-h+1}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}a(\vec{p},h-1;1)\\ \frac{\sqrt{C_{n-h+1}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}a(\vec{p},h-1;0)=\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}a(\vec{p},h;-1)\\ -n+1\le h\le n-1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}a(\vec{p},h;1)=\frac{\sqrt{C_{n+h+1}^2}}{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}a(\vec{p},h+1;0),a(\vec{p},h;-1)=\frac{\sqrt{C_{n-h+1}^2}}{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}a(\vec{p},h-1;0)\\ a(\vec{p},n;-1)=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^2}}a(\vec{p},n-2;1),a(\vec{p},-n;1)=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^2}}a(\vec{p},-n+2;-1)\\ -n+1\le h\le n-1\end{cases}$$ □

推论3.1.1.

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_c(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_c(\vec{p},-1)\\ \sum_{h=n}^{-n}[a_d(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)]=\sum_{h=n}^{-n}[a_a(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{db\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)],-n\le h\le n\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_c(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_c(\vec{p},-1)\\ a(\vec{p},h;1)=\frac{\sqrt{C_{n+h+1}^2}}{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}a(\vec{p},h+1;0),a(\vec{p},h;-1)=\frac{\sqrt{C_{n-h+1}^2}}{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}a(\vec{p},h-1;0)\\ a(\vec{p},n;-1)=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^2}}a(\vec{p},n-2;1)=\frac{1}{\sqrt{4n}}a(\vec{p},n-1;0),a(\vec{p},-n;1)=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^2}}a(\vec{p},-n+2;-1)=\frac{1}{\sqrt{4n}}a(\vec{p},-n+1;0)\\ -n+1\le h\le n-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{h=n}^{-n}[a_d(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},h)]$$

$$= \sum_{h=n-1}^{-n+1}[a_d(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},h)] + [a_d(\vec{p},n)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},n)] + [a_d(\vec{p},-n)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},-n)]$$

$$= \sum_{h=n-1}^{-n+1}[a(\vec{p},h;1)\varepsilon_d(\vec{p},1) + a(\vec{p},h;0)\varepsilon_d(\vec{p},0) + a(\vec{p},h;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)]\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},h)$$
$$+ [a(\vec{p},n;1)\varepsilon_d(\vec{p},1) + a(\vec{p},n;0)\varepsilon_d(\vec{p},0) + a(\vec{p},n;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)]\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},n)$$
$$+ [a(\vec{p},-n;1)\varepsilon_d(\vec{p},1) + a(\vec{p},-n;0)\varepsilon_d(\vec{p},0) + a(\vec{p},-n;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)]\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},-n)$$

$$= \sum_{h=n-1}^{-n+1}[\frac{\sqrt{C^2_{n+h+1}}}{\sqrt{C^1_{n+h}C^1_{n-h}}}a(\vec{p},h+1;0)\varepsilon_d(\vec{p},1) + a(\vec{p},h;0)\varepsilon_d(\vec{p},0) + \frac{\sqrt{C^2_{n-h+1}}}{\sqrt{C^1_{n+h}C^1_{n-h}}}a(\vec{p},h-1;0)\varepsilon_d(\vec{p},-1)]\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},h)$$
$$+ [a(\vec{p},n;1)\varepsilon_d(\vec{p},1) + a(\vec{p},n;0)\varepsilon_d(\vec{p},0) + a(\vec{p},n;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)]\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},n)$$
$$+ [a(\vec{p},-n;1)\varepsilon_d(\vec{p},1) + a(\vec{p},-n;0)\varepsilon_d(\vec{p},0) + a(\vec{p},-n;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)]\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},-n)$$

$$= [\sum_{h=n}^{-n+2}\frac{\sqrt{C^2_{n+h}}}{\sqrt{C^1_{n+h-1}C^1_{n-h+1}}}a(\vec{p},h;0)\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},h-1) + \sum_{h=n-1}^{-n+1}a(\vec{p},h;0)\varepsilon_d(\vec{p},0)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},h)$$
$$+ \sum_{h=n-2}^{-n}\frac{\sqrt{C^2_{n-h}}}{\sqrt{C^1_{n+h+1}C^1_{n-h-1}}}a(\vec{p},h;0)\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},h+1)]$$
$$+ [a(\vec{p},n;1)\varepsilon_d(\vec{p},1) + a(\vec{p},n;0)\varepsilon_d(\vec{p},0) + \frac{1}{\sqrt{4n}}a(\vec{p},n-1;0)\varepsilon_d(\vec{p},-1)]\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},n)$$
$$+ [\frac{1}{\sqrt{4n}}a(\vec{p},-n+1;0)\varepsilon_d(\vec{p},1) + a(\vec{p},-n;0)\varepsilon_d(\vec{p},0) + a(\vec{p},-n;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)]\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},-n)$$

$$= [\sum_{h=n}^{-n+2}\frac{\sqrt{C^2_{n+1+h}}}{\sqrt{C^1_{n+1+h}C^1_{n+1-h}}}a(\vec{p},h;0)\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},h-1) + \sum_{h=n-1}^{-n+1}a(\vec{p},h;0)\varepsilon_d(\vec{p},0)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},h)$$
$$+ \sum_{h=n-2}^{-n}\frac{\sqrt{C^2_{n+1-h}}}{\sqrt{C^1_{n+1+h}C^1_{n+1-h}}}a(\vec{p},h;0)\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},h+1)]$$
$$+ [a(\vec{p},n;1)\varepsilon_d(\vec{p},1) + a(\vec{p},n;0)\varepsilon_d(\vec{p},0) + \frac{1}{\sqrt{4n}}a(\vec{p},n-1;0)\varepsilon_d(\vec{p},-1)]\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},n)$$
$$+ [\frac{1}{\sqrt{4n}}a(\vec{p},-n+1;0)\varepsilon_d(\vec{p},1) + a(\vec{p},-n;0)\varepsilon_d(\vec{p},0) + a(\vec{p},-n;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)]\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},-n)$$

$$= \sum_{h=n-2}^{-n+2}\frac{\sqrt{C^2_{2n+2}}}{\sqrt{C^1_{n+1+h}C^1_{n+1-h}}}a(\vec{p},h;0)$$
$$[\frac{\sqrt{C^2_{n+1+h}}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},h-1) + \frac{\sqrt{C^1_{n+1+h}C^1_{n+1-h}}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_d(\vec{p},0)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},h) + \frac{\sqrt{C^2_{n+1-h}}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},h+1)]$$
$$+ \sqrt{n}a(\vec{p},n;0)\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},n-1) + \frac{\sqrt{2n-1}}{2}a(\vec{p},n-1;0)\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},n-2)$$
$$+ a(\vec{p},n-1;0)\varepsilon_d(\vec{p},0)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},n-1) + a(\vec{p},-n+1;0)\varepsilon_d(\vec{p},0)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},-n+1)$$
$$+ \sqrt{n}a(\vec{p},-n;0)\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},-n+1) + \frac{\sqrt{2n-1}}{2}a(\vec{p},-n+1;0)\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},-n+2)$$
$$+ [a(\vec{p},n;1)\varepsilon_d(\vec{p},1) + a(\vec{p},n;0)\varepsilon_d(\vec{p},0) + \frac{1}{\sqrt{4n}}a(\vec{p},n-1;0)\varepsilon_d(\vec{p},-1)]\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},n)$$
$$+ [\frac{1}{\sqrt{4n}}a(\vec{p},-n+1;0)\varepsilon_d(\vec{p},1) + a(\vec{p},-n;0)\varepsilon_d(\vec{p},0) + a(\vec{p},-n;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)]\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},-n)$$

$$= \sum_{h=n-2}^{-n+2}\frac{\sqrt{C^2_{2n+2}}}{\sqrt{C^1_{n+1+h}C^1_{n+1-h}}}a(\vec{p},h;0)$$
$$[\frac{\sqrt{C^2_{n+1+h}}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},h-1) + \frac{\sqrt{C^1_{n+1+h}C^1_{n+1-h}}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_d(\vec{p},0)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},h) + \frac{\sqrt{C^2_{n+1-h}}}{\sqrt{C^2_{2n+2}}}\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},h+1)]$$
$$+ a(\vec{p},n-1;0)[\frac{\sqrt{2n-1}}{2}\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},n-2) + \varepsilon_d(\vec{p},0)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},n-1) + \frac{1}{\sqrt{4n}}\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},n)]$$
$$+ a(\vec{p},-n+1;0)[\frac{1}{\sqrt{4n}}\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},n)+)\varepsilon_d(\vec{p},0)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},-n+1) + \frac{\sqrt{2n-1}}{2}\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\ldots}_{n}}(\vec{p},-n+2)]$$

$$+a(\vec{p},n;0)[\sqrt{n}\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},n-1)+\varepsilon_d(\vec{p},0)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},n)]$$
$$+a(\vec{p},-n;0)[\varepsilon_d(\vec{p},0)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},-n)+\sqrt{n}\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},-n+1)]$$
$$+a(\vec{p},n;1)\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},n)+a(\vec{p},-n;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},-n)$$

$$=\sum_{h=n-1}^{-n+1}\frac{\sqrt{C_{2n+2}^2}}{\sqrt{C_{n+1+h}^1C_{n+1-h}^1}}a(\vec{p},h;0)$$
$$[\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h-1)+\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^1C_{n+1-h}^1}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_d(\vec{p},0)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)+\frac{\sqrt{C_{n+1-h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h+1)]$$
$$+a(\vec{p},n;0)[\sqrt{n}\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},n-1)+\varepsilon_d(\vec{p},0)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},n)]$$
$$+a(\vec{p},-n;0)[\varepsilon_d(\vec{p},0)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},-n)+\sqrt{n}\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},-n+1)]$$
$$+a(\vec{p},n;1)\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},n)+a(\vec{p},-n;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},-n)$$

$$=\sum_{h=n}^{-n}\frac{\sqrt{C_{2n+2}^2}}{\sqrt{C_{n+1+h}^1C_{n+1-h}^1}}a(\vec{p},h;0)$$
$$[\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h-1)+\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^1C_{n+1-h}^1}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_d(\vec{p},0)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)+\frac{\sqrt{C_{n+1-h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h+1)]$$
$$+a(\vec{p},n;1)\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},n)+a(\vec{p},-n;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},-n)$$

$$=\sum_{h=n+1}^{-n-1}a(\vec{p},h)$$
$$[\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h-1)+\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^1C_{n+1-h}^1}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_d(\vec{p},0)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)+\frac{\sqrt{C_{n+1-h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h+1)]$$
$$a(\vec{p},h):=\frac{\sqrt{C_{2n+2}^2}}{\sqrt{C_{n+1+h}^1C_{n+1-h}^1}}a(\vec{p},h;0),-n\le h\le n;a(\vec{p},n+1):=a(\vec{p},n;1),a(\vec{p},-n-1):=a(\vec{p},-n;-1)$$

$$=\sum_{h=n+1}^{-n-1}a(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots d}_{n+1}}(\vec{p},h)$$
$$a(\vec{p},h):=\frac{\sqrt{C_{2n+2}^2}}{\sqrt{C_{n+1+h}^1C_{n+1-h}^1}}a(\vec{p},h;0),-n\le h\le n;a(\vec{p},n+1):=a(\vec{p},n;1),a(\vec{p},-n-1):=a(\vec{p},-n;-1)$$
$$\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots d}_{n+1}}(\vec{p},h):=\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_d(\vec{p},1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h-1)+\frac{\sqrt{C_{n+1+h}^1C_{n+1-h}^1}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_d(\vec{p},0)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)$$
$$+\frac{\sqrt{C_{n+1-h}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}\varepsilon_d(\vec{p},-1)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h+1),-n-1\le h\le n+1$$

3.2 K-G方程平面波解的直观解法?

定理3.2.1.

$$(-\partial^c\partial_c+m^2)A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(x)=0,\delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(x)=0,\partial^aA_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(x)=0,A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(x)\text{全对称}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}[a(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\(p^cp_c+m^2)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=0,\delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=0,p^a\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=0,\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\text{全对称}\\(p^cp_c+m^2)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=0,\delta^{ab}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=0,p^a\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)=0,\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p},h)\text{全对称}\end{cases}$$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$n'=1$时成立：

$$(-\partial^c\partial_c+m^2)A_a(x)=0,\partial^aA_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}A_a(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}[a(\vec{p},h)\varepsilon_a(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\(p^cp_c+m^2)\varepsilon_a(\vec{p},h)=0,p^a\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0\\(p^cp_c+m^2)\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},h)=0,p^a\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0\end{cases}$$

第二步：假设$n'=n$时成立：

$$(-\partial^c\partial_c+m^2)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=0,\delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=0,\partial^aA_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=0,A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)\text{全对称}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}[a(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\(p^cp_c+m^2)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,p^a\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\text{全对称}\\(p^cp_c+m^2)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\delta^{ab}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,p^a\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\text{全对称}\end{cases}$$

第三步：$n'=n+1$时，

$$(-\partial^c\partial_c+m^2)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n+1}}(x)=0,\delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n+1}}(x)=0,\partial^aA_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n+1}}(x)=0,A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n+1}}(x)\text{全对称}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-\partial^c\partial_c+m^2)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}d}(x)=0,\delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}d}(x)=0,\partial^aA_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}d}(x)=0\\A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}d}(x)=\frac{1}{n!}A_{\underbrace{\{ab\cdot\cdot\}}_{n}d}(x),A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}d}(x)=A_{\underbrace{db\cdot\cdot}_{n}a}(x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}d}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}[a_d(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b_d^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\(p^cp_c+m^2)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,p^a\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{n!}\varepsilon_{\underbrace{\{ab\cdot\cdot\}}_{n}}(\vec{p},h)\\(p^cp_c+m^2)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\delta^{ab}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,p^a\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{n!}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{\{ab\cdot\cdot\}}_{n}}(\vec{p},h)\\A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}d}(x)=A_{\underbrace{db\cdot\cdot}_{n}a}(x),a_d(\vec{p},h):=a(\vec{p},h;1)\varepsilon_d(\vec{p},1)+a(\vec{p},h;0)\varepsilon_d(\vec{p},0)+a(\vec{p},h;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)\\b_d^+(\vec{p},h):=b^+(\vec{p},h;1)\tilde{\varepsilon}_d(\vec{p},1)+b^+(\vec{p},h;0)\tilde{\varepsilon}_d(\vec{p},0)+b^+(\vec{p},h;-1)\tilde{\varepsilon}_d(\vec{p},-1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}d}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=n}^{-n}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}[a_d(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b_d^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\(p^cp_c+m^2)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,p^a\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{n!}\varepsilon_{\underbrace{\{ab\cdot\cdot\}}_{n}}(\vec{p},h)\\(p^cp_c+m^2)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\delta^{ab}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,p^a\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=0,\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{n!}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{\{ab\cdot\cdot\}}_{n}}(\vec{p},h)\\a_d(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=a_a(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{db\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h),b_d^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)=b_a^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{db\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)\\a_d(\vec{p},h):=a(\vec{p},h;1)\varepsilon_d(\vec{p},1)+a(\vec{p},h;0)\varepsilon_d(\vec{p},0)+a(\vec{p},h;-1)\varepsilon_d(\vec{p},-1)\\b_d^+(\vec{p},h):=b^+(\vec{p},h;1)\tilde{\varepsilon}_d(\vec{p},1)+b^+(\vec{p},h;0)\tilde{\varepsilon}_d(\vec{p},0)+b^+(\vec{p},h;-1)\tilde{\varepsilon}_d(\vec{p},-1)\end{cases}$$

此步证明了$n'=n+1$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

4 四维时空中反对称张量场方程的平面波解

4.1 自旋-1粒子Klein-Gordon方程的平面波解

定理4.1.1. $\partial^bF_{ab}+m^2A_a=0,F_{ab}=\partial_aA_b-\partial_bA_a\Leftrightarrow(\partial^b\partial_b-m^2)A_a=0,\partial^aA_a=0$

$$A_a(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}[a(\vec{p},h)\varepsilon_a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

定理4.1.2. $\begin{cases}\frac{1}{2!}\partial^{[a}F^{bc]}+mF^{abc}=0,\partial_aF^{ab}=0\\ \partial^{[a}F^{bcd]}=0,\partial_aF^{abc}+mF^{bc}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_aF^{abc}+mF^{bc}=0,\frac{1}{2!}\partial^{[a}F^{bc]}+mF^{abc}=0\\ \partial^cF_{cab}-m^2A_{ab}=0,F_{cab}=\frac{1}{2!}\partial_{[c}A_{ab]};A_{ab}:=\frac{-1}{m}F_{ab}\end{cases}$

定理4.1.3. $\partial^cF_{cab}-m^2A_{ab}=0,F_{cab}=\frac{1}{2!}\partial_{[c}A_{ab]}\Leftrightarrow(\partial^c\partial_c-m^2)A_{ab}=0,\partial^aA_{ab}=0,A_{ab}=-A_{ba}$

定理4.1.4. $(\partial^c\partial_c-m^2)A_{ab}=0,\partial^aA_{ab}=0,A_{ab}=-A_{ba}$

$\Leftrightarrow A_{ab}(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}[a(\vec p,h)\varepsilon_{ab}(\vec p,h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec p,h)\tilde\varepsilon_{ab}(\vec p,h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec p$

证明: $(\partial^c\partial_c-m^2)A_{ab}=0,\partial^aA_{ab}=0,A_{ab}=-A_{ba}$

$\Leftrightarrow A_{ab}(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}[a_b(\vec p,h)\varepsilon_a(\vec p,h)e^{ip\cdot x}+b_b^+(\vec p,h)\tilde\varepsilon_a(\vec p,h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec p,A_{ab}=-A_{ba}$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{h=1}^{-1}a_{\{a}(\vec p,h)\varepsilon_{b\}}(\vec p,h)=0,a_a(\vec p,h)=\sum\limits_{h'=1}^{-1}a(\vec p,h;h')\varepsilon_a(\vec p,h')+c(\vec p,h;0)\frac{p_a}{m}$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{h,h'=1}^{-1}a(\vec p,h;h')\varepsilon_{\{a}(\vec p,h')\varepsilon_{b\}}(\vec p,h)+c(\vec p,h;0)\frac{1}{m}p_{\{a}\varepsilon_{b\}}(\vec p,h)=0$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{h,h'=1}^{-1}a(\vec p,h;h')\varepsilon_{\{a}(\vec p,h')\varepsilon_{b\}}(\vec p,h)=0,c(\vec p,h;0)=0$

$\Leftrightarrow a(\vec p,-1;1)=-a(\vec p,1;-1),a(\vec p,0;1)=-a(\vec p,1;0),a(\vec p,-1;0)=-a(\vec p,0;-1),a(\vec p,h;h)=0$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{h=1}^{-1}a_b(\vec p,h)\varepsilon_a(\vec p,h)=\sum\limits_{h',h=1}^{-1}a(\vec p,h;h')\varepsilon_a(\vec p,h)\varepsilon_b(\vec p,h')$

$=a(\vec p,1;0)\varepsilon_{[a}(\vec p,1)\varepsilon_{b]}(\vec p,0)+a(\vec p,1;-1)\varepsilon_{[a}(\vec p,1)\varepsilon_{b]}(\vec p,-1)+a(\vec p,0;-1)\varepsilon_{[a}(\vec p,0)\varepsilon_{b]}(\vec p,-1)$

$=a(1)\varepsilon_{ab}(\vec p,1)+a(0)\varepsilon_{ab}(\vec p,0)+a(-1)\varepsilon_{ab}(\vec p,-1)=\sum\limits_{h=1}^{-1}a(h)\varepsilon_{ab}(\vec p,h)$

$a(1)=\sqrt2a(\vec p,1;0),a(0)=\sqrt2a(\vec p,1;-1),a(-1)=\sqrt2a(\vec p,0;-1)$

$\varepsilon_{ab}(\vec p,1):=\frac{1}{\sqrt2}\varepsilon_{[a}(\vec p,1)\varepsilon_{b]}(\vec p,0),\varepsilon_{ab}(\vec p,0):=\frac{1}{\sqrt2}\varepsilon_{[a}(\vec p,1)\varepsilon_{b]}(\vec p,-1),\varepsilon_{ab}(\vec p,-1):=\frac{1}{\sqrt2}\varepsilon_{[a}(\vec p,0)\varepsilon_{b]}(\vec p,-1)$

$\Leftrightarrow A_{ab}(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}[a(\vec p,h)\varepsilon_{ab}(\vec p,h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec p,h)\tilde\varepsilon_{ab}(\vec p,h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec p$ □

定理4.1.5. $\partial^dF_{dabc}-m^2A_{abc}=0,F_{dabc}=\frac{1}{3!}\partial_{[d}A_{abc]}\Leftrightarrow(\partial^d\partial_d-m^2)A_{abc}=0,\partial^aA_{abc}=0,A_{abc}=\frac{1}{3!}A_{[abc]}$

4.2 n=N+1维时空中自旋-1粒子Klein-Gordon方程的平面波解

定理4.2.1. $\partial^bF_{ab}+m^2A_a=0,F_{ab}=\partial_aA_b-\partial_bA_a\Leftrightarrow(\partial^b\partial_b-m^2)A_a=0,\partial^aA_a=0$

$A_a(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2E}}[a(\vec p,h)\varepsilon_a(\vec p,h)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+b^+(\vec p,h)\tilde\varepsilon_a(\vec p,h)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^3\vec p$

定义4.2.1. $L=\{\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&i\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\cdot\cdot\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\-i&0&0&\cdot\cdot&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&i\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\cdot\cdot\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&-i&0&\cdot\cdot&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&i\\0&0&0&0&0&0&\cdot\cdot\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&-i&\cdot\cdot&0&0&0\end{bmatrix},\cdot\cdot,\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\cdot\cdot\\0&0&0&0&0&0&i\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\cdot\cdot&-i&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\cdot\cdot\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&i\\0&0&0&\cdot\cdot&0&-i&0\end{bmatrix}\}$

推论4.2.1. $L_{\vec p}:=L_{\vec v}=e^{-\{ln[\gamma_v(1+v)]\}\hat v\cdot L}=1-\gamma_v(\vec v\cdot L)+\frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec v\cdot L)^2=1-\frac{1}{m}(\vec p\cdot L)+\frac{1}{m(E+m)}(\vec p\cdot L)^2$

推论4.2.2. $L_{\vec p}=\frac{1}{m}\begin{bmatrix}m&0&0&-ip_x\\0&m&0&-ip_y\\0&0&m&-ip_z\\ip_x&ip_y&ip_z&E\end{bmatrix}+\frac{1}{m(E+m)}\begin{bmatrix}p_xp_x&p_xp_y&p_xp_z&0\\p_yp_x&p_yp_y&p_yp_z&0\\p_zp_x&p_zp_y&p_zp_z&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

推论4.2.3. $\varepsilon(\vec p,h):=L_{\vec p}\begin{bmatrix}0_1\\\cdot\cdot\\1_h\\\cdot\cdot\\0_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0_1\\\cdot\cdot\\1_h\\\cdot\cdot\\0_n\end{bmatrix}+\frac{p_h}{m(E+m)}\begin{bmatrix}\vec p\\i(E+m)\end{bmatrix},\varepsilon_a(\vec p,n):=L_{\vec p}\begin{bmatrix}0_1\\\cdot\cdot\\0_0\\\cdot\cdot\\1_n\end{bmatrix}=-i\frac{p_a}{m};h=1,\cdot\cdot,N$

推论4.2.4. $p^a\varepsilon_a(\vec p,h)=0,\varepsilon_a(\vec p,h)\eta^{aa'}\varepsilon_{a'}^+(\vec p,h')=\delta_{hh'},\sum\limits_{h=1}^{N}\varepsilon_a(\vec p,h)\varepsilon_{a'}^+(\vec p,h)=\eta_{aa'}+\frac{p_ap_{a'}^+}{m^2}$

推论4.2.5. $L_{\vec v}\begin{bmatrix}\vec0\\i\end{bmatrix}=e^{-ln[\gamma_v(1+v)]\hat v\cdot L}\begin{bmatrix}\vec0\\i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_v\vec v\\i\gamma_v\end{bmatrix},L_{\vec v}\begin{bmatrix}\vec0\\im\end{bmatrix}=e^{-ln[\gamma_v(1+v)]\hat v\cdot L}\begin{bmatrix}\vec0\\im\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec p\\iE\end{bmatrix}$

定理4.2.2. $-\frac{i}{4}[\Gamma_i,\Gamma_j]=S_{ij}\Rightarrow\Gamma_i=?$

推论4.2.6. $\begin{cases}\lambda_m(\hat{p},1;1)=S_m(1)\lambda(\hat{p},1;1)=e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i\\ -1\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{2\hat{p}_-}\begin{bmatrix} i(\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y)\\ -1(\hat{p}_x-i\hat{p}_y\hat{p}_z)\\ -2i(\hat{p}_+\hat{p}_-)\end{bmatrix},\lambda_m(-\hat{p},1;1)=\frac{\hat{p}_+}{\hat{p}_-}\lambda_m(\hat{p},-1;1)\\ \lambda_m(\hat{p},0;1)=S_m(1)\lambda(\hat{p},0;1)=e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ -i\end{bmatrix}=-i\begin{bmatrix}\hat{p}_x\\ \hat{p}_y\\ \hat{p}_z\end{bmatrix}=-i\hat{p},\lambda_m(-\hat{p},0;1)=-\lambda_m(\hat{p},0;1)\\ \lambda_m(\hat{p},-1;1)=S_m(1)\lambda(\hat{p},-1;1)=e^{i\vec{\omega}\cdot\gamma}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i\\ -1\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{2\hat{p}_+}\begin{bmatrix} -i(\hat{p}_x\hat{p}_z+i\hat{p}_y)\\ -1(\hat{p}_x+i\hat{p}_y\hat{p}_z)\\ 2i(\hat{p}_+\hat{p}_-)\end{bmatrix},\lambda_m(-\hat{p},-1;1)=\frac{\hat{p}_-}{\hat{p}_+}\lambda_{em}(\hat{p},1;1)\end{cases}$

推论4.2.7. $\varepsilon(\vec{p},\pm1)=[L_{\vec{p}}S_m^+(1)e^{-i\vec{\omega}\cdot R}]\varepsilon(\vec{p},\pm1;1)$

推论4.2.8. $\frac{1}{2\hat{p}_-}\begin{bmatrix} i(\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y)\\ -1(\hat{p}_x-i\hat{p}_y\hat{p}_z)\\ -2i(\hat{p}_+\hat{p}_-)\end{bmatrix}=[](\begin{bmatrix}0_1\\ ..\\ 1_h\\ ..\\ 0_n\end{bmatrix}+\frac{p_x}{m(E+m)}\begin{bmatrix}\vec{p}\\ i(E+m)\end{bmatrix})$

推论4.2.9. $(\gamma^a\otimes\sigma_y\partial_a+I\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y\partial_u+I_4\otimes\sigma_x\partial_v+m)\psi=0$

$\Rightarrow(\gamma^a\otimes\sigma_y\partial_a+I\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y iM+I_4\otimes\sigma_x 0+m)\psi=0$

$\Rightarrow(\gamma^a\otimes\sigma_z\partial_a+I\otimes\sigma_z\otimes\sigma_z iM+m)\psi'=0$

4.3 n=N+1维时空中自旋-2粒子Klein-Gordon方程的平面波解

定理4.3.1. $(\partial^c\partial_c-m^2)A_{ab}=0,\partial^a A_{ab}=0,A_{ab}=-A_{ba}$

$A_{ab}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h,h'=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2E}}[a(\vec{p};h,h')\varepsilon_{[a}(\vec{p},h)\varepsilon_{b]}(\vec{p},h')e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p};h,h')\tilde{\varepsilon}_{[a}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_{b]}(\vec{p},h')e^{-ip\cdot x}d^3\vec{p}$

第三十一章　自旋基和CG系数的数学分析

自我评述：本章对于各种自旋基进行了一般的数学分析和逻辑推演，发现自旋基之间变换关系的系数就是自旋耦合系统的CG系数，从而也提供了一种一般求解CG系数的新方法。这个新方法比传统的自旋耦合本征态的求解方法更直观、更具体、更简单，因为新方法完全是构造式的，并且选取的自旋基比传统的更一般、更普遍、更严谨，故而使用起来更方便、更有用，可能对彻底理清量子纠缠能提供一定的帮助。

1 Bargmann-Wigner方程自旋基的重新梳理分析

1.1 Dirac自旋基是自旋、螺旋度和电荷三个算符的共同本征态

定义1.1.1. $\hat{Q}(\vec{p}) := \frac{i\gamma^a p_a}{m}, \hat{q}(\vec{p},\kappa) := \frac{-\varsigma E\sigma_x + i\kappa|\vec{p}|\sigma_y}{m}$

性质1.1.1.

$$\begin{cases} \sigma^2(\frac{1}{2}) \otimes I u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) \\ \sigma(\frac{1}{2}) \cdot \hat{p} \otimes I u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{\kappa}{2}u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) \\ \hat{Q}(\vec{p})u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = -u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) \\ \text{描述电子}:(s,h;Q) = (\frac{1}{2};\frac{\kappa}{2},-1) \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma^2(\frac{1}{2}) \otimes I v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) \\ \sigma(\frac{1}{2}) \cdot \hat{p} \otimes I v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{\kappa}{2}v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) \\ \hat{Q}(\vec{p})v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) \\ \text{描述正电子}:(s,h;Q) = (\frac{1}{2};\frac{\kappa}{2},1) \end{cases}$$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$s' = \frac{1}{2}$时成立：

第二步：假设$s' = s - \frac{1}{2}$时成立：

第三步：$s' = s$时：

此步证明了$s' = s$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

1.2 Dirac方程准投影算子$\gamma^a = (\sigma \otimes \sigma_y, \varsigma I \otimes \sigma_x)$

推论1.2.1. $\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\mu^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2}) = \frac{1}{2m}\begin{bmatrix} m & \varsigma E-\kappa|\vec{p}| \\ \varsigma E+\kappa|\vec{p}| & m \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(I + \varsigma\frac{E}{m}\sigma_x - i\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y)$

推论1.2.2. $\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\mu^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{\varsigma}{2m}\begin{bmatrix} \varsigma E-\kappa|\vec{p}| & m \\ m & \varsigma E+\kappa|\vec{p}| \end{bmatrix} = \frac{\varsigma}{2}(I + \varsigma\frac{E}{m}\sigma_x - i\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y)\sigma_x$

推论1.2.3. $u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})}{\sqrt{2m(E+\kappa\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+\kappa|\vec{p}| \end{bmatrix}, v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})}{\sqrt{2m(E+\kappa\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} -m \\ \varsigma E+\kappa|\vec{p}| \end{bmatrix}$

推论1.2.4. $u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{1}{4}[(\kappa\sigma\cdot\hat{p}+I)\otimes(I+\varsigma\frac{E}{m}\sigma_x - i\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y)](\varsigma I\otimes\sigma_x), \gamma^a = (\sigma\otimes\sigma_y, \varsigma I\otimes\sigma_x)$

1.3 特殊表象$\gamma^a = (\sigma \otimes \sigma_y, I \otimes \sigma_x; I \otimes \sigma_z)$下相应自旋基

推论1.3.1. $\gamma^a = (\sigma \otimes \sigma_y, I \otimes \sigma_x)$

$u(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})}{\sqrt{2m(E+\kappa|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ E+\kappa|\vec{p}| \end{bmatrix}, v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = \frac{\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})}{\sqrt{2m(E+\kappa|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} -m \\ E+\kappa|\vec{p}| \end{bmatrix}$

1.4 自旋基组合性质$(\gamma_a,\gamma_5):=[(\sigma\otimes\sigma_y, I\otimes\sigma_z), -I\otimes\sigma_x]$

推论1.4.1.

$$\begin{cases}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(\sigma\cdot\hat{p}+I)=\frac{1}{2}(\sigma,-i)^a\hat{p}_a,\hat{p}_a:=(\hat{p},i)\\ \lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}(\sigma\cdot\hat{p}-I)=-\frac{1}{2}(\sigma,i)^a\hat{p}_a\\ \lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(\sigma\cdot\hat{p}+I)i\sigma_y=\frac{1}{2}(\sigma,i)^a\hat{p}_a i\sigma_y\\ \lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}i\sigma_y(\sigma\cdot\hat{p}+I)=-\frac{1}{2}i\sigma_y(\sigma,i)^a\hat{p}_a\end{cases}$$

推论1.4.2. $u(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2m}}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ \sqrt{E-m}\end{bmatrix},u(\vec{p},-\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2m}}\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ -\sqrt{E-m}\end{bmatrix}$

证明: $u(\vec{p},\frac{1}{2})u^+(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2m}}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ \sqrt{E-m}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2m}}\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ \sqrt{E-m}\end{bmatrix}^+$
$=\frac{1}{2m}[\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})]\otimes[\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ \sqrt{E-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ \sqrt{E-m}\end{bmatrix}^+]$
$=\frac{1}{4m}(\sigma,-i)^a\hat{p}_a\otimes(E+m\sigma_z+|\vec{p}|\sigma_x)$ □

证明: $u(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+(\vec{p},-\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2m}}\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ -\sqrt{E-m}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2m}}\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ -\sqrt{E-m}\end{bmatrix}^+$
$=\frac{1}{2m}[\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})]\otimes[\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ -\sqrt{E-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ -\sqrt{E-m}\end{bmatrix}^+]$
$=-\frac{1}{4m}(\sigma,i)^a\hat{p}_a\otimes(E+m\sigma_z-|\vec{p}|\sigma_x)$ □

证明: $u(\vec{p},\frac{1}{2})u^+(\vec{p},-\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2m}}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ \sqrt{E-m}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2m}}\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ -\sqrt{E-m}\end{bmatrix}^+$
$=\frac{1}{2m}[\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})]\otimes[\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ \sqrt{E-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ -\sqrt{E-m}\end{bmatrix}^+]$
$=\frac{1}{4m}[(\sigma,i)^a\hat{p}_a i\sigma_y]\otimes(E\sigma_z+m-i|\vec{p}|\sigma_y)$ □

证明: $u(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2m}}\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ -\sqrt{E-m}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2m}}\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ \sqrt{E-m}\end{bmatrix}^+$
$=\frac{1}{2m}[\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})]\otimes[\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ -\sqrt{E-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ \sqrt{E-m}\end{bmatrix}^+]$
$=\frac{1}{2m}[\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})]\otimes[\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ -\sqrt{E-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ \sqrt{E-m}\end{bmatrix}^+]$
$=-\frac{1}{4m}[i\sigma_y(\sigma,i)^a\hat{p}_a]\otimes(E\sigma_z+m+i|\vec{p}|\sigma_y)$ □

==

证明: $u(\vec{p},\frac{1}{2})u^+(\vec{p},\frac{1}{2})+u(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=\frac{1}{4m}(\sigma,-i)^a\hat{p}_a\otimes(E+m\sigma_z+|\vec{p}|\sigma_x)-\frac{1}{4m}(\sigma,i)^a\hat{p}_a\otimes(E+m\sigma_z-|\vec{p}|\sigma_x)$
$=\frac{1}{2m}(\sigma\cdot\vec{p}\otimes\sigma_x+E+mI\otimes\sigma_z)=\frac{(m-i\gamma^a p_a)\gamma_4}{2m}$ □

证明: $u(\vec{p},\frac{1}{2})u^+(\vec{p},\frac{1}{2})-u(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=\frac{1}{4m}(\sigma,-i)^a\hat{p}_a\otimes(E+m\sigma_z+|\vec{p}|\sigma_x)+\frac{1}{4m}(\sigma,i)^a\hat{p}_a\otimes(E+m\sigma_z-|\vec{p}|\sigma_x)$
$=\frac{1}{2m}[\sigma\cdot\hat{p}\otimes(E+m\sigma_z)+|\vec{p}|I\otimes\sigma_x]$
$=\frac{1}{2m}[i(\gamma\cdot\hat{p})(E\gamma_4-m)-|\vec{p}|]\gamma_5$ □

定义1.4.1. $\Lambda_+(\frac{1}{2}):=\sum_{h=1/2}^{-1/2}u(\vec{p},h)u^+(\vec{p},h)=\frac{(m-i\gamma^a p_a)\gamma_4}{2m},\Lambda_-(\frac{1}{2}):=\sum_{h=1/2}^{-1/2}v(\vec{p},h)v^+(\vec{p},h)=\frac{(-m-i\gamma^a p_a)\gamma_4}{2m}$

推论1.4.3. $u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\otimes\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2}),v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\otimes\nu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$

1.5 定义-自旋基分解:$s=(s-\frac{1}{2})\oplus\frac{1}{2}$

定义1.5.1. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}),-s\leq h\leq s$

推论1.5.1. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=1/2}^{-1/2}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+h'}C_{s-h}^{1/2-h'}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-h')U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h'),-s\leq h\leq s$

推论1.5.2. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\hat{\Gamma}_{\tau_\varsigma}(h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)$

$=\sum_{h'=1/2}^{-1/2}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+h'}C_{s-h}^{1/2-h'}}}{\sqrt{C_{2s}^{1}}}U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-h'),-s\leq h\leq s$

定义1.5.2. $\hat{\Gamma}_{\tau_\varsigma}(h):=\sum_{h'=1/2}^{-1/2}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+h'}C_{s-h}^{1/2-h'}}}{\sqrt{C_{2s}^{1}}}U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h')[](\vec{p},h-h'),-s\leq h\leq s$

1.6 推论-$U_{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},h)$是自旋本征态

定义1.6.1. $\Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I):=[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I]\otimes I_{4^{2s-1}}+I_4\otimes[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I]\otimes I_{4^{2s-2}}+\cdot\cdot+I_{4^{2s-1}}\otimes[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I]$

定理1.6.1. $[\Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\cdot\hat{p}]U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=hU_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h),-s\leq h\leq s$

证明: $[\Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\cdot\hat{p}]U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$

$=\{\Omega(s-\frac{1}{2};\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\otimes I_4+I_{4^{2s-1}}\otimes[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I]\}\cdot\hat{p}$

$[\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})],-s\leq h\leq s$

$=[\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}hU_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}hU_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})],-s\leq h\leq s$

$=hU_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h),-s\leq h\leq s$ □

定理1.6.2. $\Omega^2(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=s(s+1)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h),-s\leq h\leq s$

以上定理可以用全对称的表象变换方法可以很容易得到证明？好像不容易，但可以用下面章节的上升和下降算符方法证明($\hat{p}_z=1$才成立)。由上可知$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$ 是自旋本征态，所以展开系数是CG 系数，实际计算结果也表明确实就是对应的CG系数。从而也提供了一种统一、规范、直观和完整的计算CG系数新方法。

1.7 特殊表象$\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_z;-I\otimes\sigma_x)$下Dirac自旋基的升降算符

Dirac旋量推动变换:

推论1.7.1. $D_{\vec{v}}=e^{-ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot(\frac{i}{2}\vec{\gamma}\gamma_4)}=\frac{1+\gamma_v-i\gamma_v\vec{v}\cdot\vec{\gamma}\gamma_4}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}=\frac{E+m-i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_4}{\sqrt{2m(E+m)}}=\frac{m-i\gamma^a p_a\gamma_4}{\sqrt{2m(E+m)}}$

定理1.7.1. $e^{-ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot(\frac{i}{2}\vec{\gamma}\gamma_4)}(\sigma\otimes I)e^{ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot(\frac{i}{2}\vec{\gamma}\gamma_4)}=\frac{1}{m(E+m)}\begin{bmatrix}E(E+m)\sigma_i-2p_i(\sigma\cdot\vec{p}) & (E+m)[(\sigma\cdot\vec{p})\sigma_i-p_i]\\(E+m)[(\sigma\cdot\vec{p})\sigma_i-p_i] & E(E+m)\sigma_i-2p_i(\sigma\cdot\vec{p})\end{bmatrix}$

证明: $e^{-ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot(\frac{i}{2}\vec{\gamma}\gamma_4)}(\sigma\otimes I)e^{ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot(\frac{i}{2}\vec{\gamma}\gamma_4)}$

$=\frac{E+m-i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_4}{\sqrt{2m(E+m)}}(\sigma\otimes I)\frac{E+m+i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_4}{\sqrt{2m(E+m)}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}E+m & \sigma\cdot\vec{p}\\\sigma\cdot\vec{p} & E+m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma & 0\\0 & \sigma\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}E+m & -\sigma\cdot\vec{p}\\-\sigma\cdot\vec{p} & E+m\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2m(E+m)}\begin{bmatrix}E+m & \sigma\cdot\vec{p}\\\sigma\cdot\vec{p} & E+m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(E+m)\sigma & -\sigma(\sigma\cdot\vec{p})\\-\sigma(\sigma\cdot\vec{p}) & (E+m)\sigma\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2m(E+m)}\begin{bmatrix}(E+m)^2\sigma-(\sigma\cdot\vec{p})\sigma(\sigma\cdot\vec{p}) & (E+m)[(\sigma\cdot\vec{p})\sigma-\sigma(\sigma\cdot\vec{p})]\\(E+m)[(\sigma\cdot\vec{p})\sigma-\sigma(\sigma\cdot\vec{p})] & (E+m)^2\sigma-(\sigma\cdot\vec{p})\sigma(\sigma\cdot\vec{p})\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2m(E+m)}\begin{bmatrix}(E+m)^2\sigma_i+\vec{p}^2\sigma_i-2p_i(\sigma\cdot\vec{p}) & 2(E+m)[(\sigma\cdot\vec{p})\sigma_i-p_i]\\2(E+m)[(\sigma\cdot\vec{p})\sigma_i-p_i] & (E+m)^2\sigma_i+\vec{p}^2\sigma_i-2p_i(\sigma\cdot\vec{p})\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{m(E+m)}\begin{bmatrix}E(E+m)\sigma_i-2p_i(\sigma\cdot\vec{p}) & (E+m)[(\sigma\cdot\vec{p})\sigma_i-p_i]\\(E+m)[(\sigma\cdot\vec{p})\sigma_i-p_i] & E(E+m)\sigma_i-2p_i(\sigma\cdot\vec{p})\end{bmatrix}$ □

推论1.7.2. $e^{-ln[\gamma_v(1+v)](\frac{i}{2}\vec{\gamma}_z\gamma_4)}(\sigma\otimes I)e^{ln[\gamma_v(1+v)](\frac{i}{2}\vec{\gamma}_z\gamma_4)}=$

$$\begin{cases}x:\frac{E}{m}\sigma_x\otimes I+\frac{i|\vec{p}|}{m}\sigma_y\otimes\sigma_x=\frac{E}{m}(-i\gamma_y+\frac{|\vec{p}|}{E}\gamma_x\gamma_5)\gamma_z\\y:\frac{E}{m}\sigma_y\otimes I-\frac{i|\vec{p}|}{m}\sigma_x\otimes\sigma_x=\frac{1}{m}(i\gamma_x+\frac{|\vec{p}|}{E}\gamma_y\gamma_5)\gamma_z\\z:\sigma_z\otimes I=-i\gamma_x\gamma_y\end{cases}$$

推论1.7.3.

$$\begin{cases} u(\begin{bmatrix} 0\\0\\|\vec{p}| \end{bmatrix}, \frac{1}{2}) = e^{-ln[\gamma_v(1+v)](\frac{i}{2}\gamma_z\gamma_4)} \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \sqrt{E+m}\\ \sqrt{E-m} \end{bmatrix} \\ u(\begin{bmatrix} 0\\0\\|\vec{p}| \end{bmatrix}, -\frac{1}{2}) = e^{-ln[\gamma_v(1+v)](\frac{i}{2}\vec{\gamma}_z\gamma_4)} \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \sqrt{E+m}\\ -\sqrt{E-m} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(\begin{bmatrix} 0\\0\\|\vec{p}| \end{bmatrix}, \frac{1}{2}) = e^{-ln[\gamma_v(1+v)](\frac{i}{2}\vec{\gamma}_z\gamma_4)} \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \sqrt{E-m}\\ \sqrt{E+m} \end{bmatrix} \\ v(\begin{bmatrix} 0\\0\\|\vec{p}| \end{bmatrix}, -\frac{1}{2}) = e^{-ln[\gamma_v(1+v)](\frac{i}{2}\vec{\gamma}_z\gamma_4)} \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\sqrt{E-m}\\ \sqrt{E+m} \end{bmatrix} \end{cases}$$

证明： $u(\begin{bmatrix} 0\\0\\|\vec{p}| \end{bmatrix}, \frac{1}{2})$

$$= e^{-ln[\gamma_v(1+v)](\frac{i}{2}\gamma_z\gamma_4)} \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{E+m-i|\vec{p}|\gamma_z\gamma_4}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{bmatrix} E+m & \sigma_z|\vec{p}| \\ \sigma_z|\vec{p}| & E+m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \sqrt{E+m}\\ \sqrt{E-m} \end{bmatrix}$$

□

证明： $u(\begin{bmatrix} 0\\0\\|\vec{p}| \end{bmatrix}, -\frac{1}{2})$

$$= e^{-ln[\gamma_v(1+v)](\frac{i}{2}\gamma_z\gamma_4)} \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{E+m-i|\vec{p}|\gamma_z\gamma_4}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{bmatrix} E+m & \sigma_z|\vec{p}| \\ \sigma_z|\vec{p}| & E+m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \sqrt{E+m}\\ -\sqrt{E-m} \end{bmatrix}$$

□

证明： $v(\begin{bmatrix} 0\\0\\|\vec{p}| \end{bmatrix}, \frac{1}{2})$

$$= e^{-ln[\gamma_v(1+v)](\frac{i}{2}\gamma_z\gamma_4)} \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{E+m-i|\vec{p}|\gamma_z\gamma_4}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{bmatrix} E+m & \sigma_z|\vec{p}| \\ \sigma_z|\vec{p}| & E+m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \sqrt{E-m}\\ \sqrt{E+m} \end{bmatrix}$$

□

证明： $v(\begin{bmatrix} 0\\0\\|\vec{p}| \end{bmatrix}, -\frac{1}{2})$

$$= e^{-ln[\gamma_v(1+v)](\frac{i}{2}\gamma_z\gamma_4)} \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{E+m-i|\vec{p}|\gamma_z\gamma_4}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{bmatrix} E+m & \sigma_z|\vec{p}| \\ \sigma_z|\vec{p}| & E+m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\sqrt{E-m}\\ \sqrt{E+m} \end{bmatrix}$$

□

推论1.7.4. $e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma\otimes I}{2}} e^{-ln[\gamma_v(1+v)](\frac{i}{2}\vec{\gamma}_z\gamma_4)} (\sigma \otimes I) e^{ln[\gamma_v(1+v)](\frac{i}{2}\vec{\gamma}_z\gamma_4)} e^{-i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma\otimes I}{2}} =$

$$\begin{cases} x : \frac{E}{m}[\sigma_x(\frac{1}{2}) - \hat{p}_x \frac{\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}+\sigma_z(\frac{1}{2})}{1+\hat{p}_z}] \otimes I + \frac{i|\vec{p}|}{m}[\sigma_y(\frac{1}{2}) - \hat{p}_y \frac{\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}+\sigma_z(\frac{1}{2})}{1+\hat{p}_z}] \otimes \sigma_x \\ = \frac{iE}{2m}[-\gamma_y\gamma_z + \frac{\hat{p}_x}{1+\hat{p}_z}(\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i\gamma_j\gamma_k + \gamma_x\gamma_y)] - \frac{|\vec{p}|}{2m}[-\gamma_z\gamma_x + \frac{\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i\gamma_j\gamma_k + \gamma_x\gamma_y)]\gamma_5 \\ y : \frac{E}{m}[\sigma_y(\frac{1}{2}) - \hat{p}_y \frac{\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}+\sigma_z(\frac{1}{2})}{1+\hat{p}_z}] \otimes I - \frac{i|\vec{p}|}{m}[\sigma_x(\frac{1}{2}) - \hat{p}_x \frac{\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}+\sigma_z(\frac{1}{2})}{1+\hat{p}_z}] \otimes \sigma_x \\ = \frac{iE}{2m}[-\gamma_z\gamma_x + \frac{\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i\gamma_j\gamma_k + \gamma_x\gamma_y)] + \frac{|\vec{p}|}{2m}[-\gamma_y\gamma_z + \frac{\hat{p}_x}{1+\hat{p}_z}(\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i\gamma_j\gamma_k + \gamma_x\gamma_y)]\gamma_5 \\ z : [\sigma(\frac{1}{2}) \cdot \hat{p}] \otimes I = -\frac{i}{4}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i\gamma_j\gamma_k = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i S_{jk}(e, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

定义1.7.1.

$$\begin{cases}\hat{J}_x(\vec{0},\frac{1}{2};\gamma_a):=-\frac{i}{2}\gamma_y\gamma_z\\ \hat{J}_y(\vec{0},\frac{1}{2};\gamma_a):=-\frac{i}{2}\gamma_z\gamma_x\\ \hat{J}_z(\vec{0},\frac{1}{2};\gamma_a):=-\frac{i}{2}\gamma_x\gamma_y\end{cases}$$

定义1.7.2.

$$\begin{cases}x+iy:\hat{J}_+(\vec{p},\frac{1}{2};m):=\{[\sigma_x(\frac{1}{2})+i\sigma_y(\frac{1}{2})]-\frac{(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)}{1+\hat{p}_z}[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}+\sigma_z(\frac{1}{2})]\}\otimes I(\frac{E}{m}+\frac{|\vec{p}|}{m}\otimes\sigma_x)\\ =[i(\gamma_x+i\gamma_y)\gamma_z+\frac{(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)}{1+\hat{p}_z}(\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i\gamma_j\gamma_k+\gamma_x\gamma_y)]\frac{i(E-|\vec{p}|\gamma_5)}{2m}\\ x-iy:\hat{J}_-(\vec{p},\frac{1}{2};m):=\{[\sigma_x(\frac{1}{2})-i\sigma_y(\frac{1}{2})]-\frac{(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)}{1+\hat{p}_z}[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}+\sigma_z(\frac{1}{2})]\}(\frac{E}{m}-\frac{|\vec{p}|}{m}\otimes\sigma_x)\\ =[-i(\gamma_x-i\gamma_y)\gamma_z+\frac{(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)}{1+\hat{p}_z}(\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i\gamma_j\gamma_k+\gamma_x\gamma_y)]\frac{i(E+|\vec{p}|\gamma_5)}{2m}\\ z:\hat{J}_z(\vec{p},\frac{1}{2};m):=[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]\otimes I=-\frac{i}{4}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i\gamma_j\gamma_k=\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_iS_{jk}(e,\frac{1}{2}),\hat{Q}(\vec{p},\frac{1}{2};m):=\frac{i\gamma^ap_a}{m}\end{cases}$$

推论1.7.5.

$$\begin{cases}u(\vec{p},\frac{1}{2})=e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma\otimes I}{2}}e^{-ln[\gamma_v(1+v)](\frac{i}{2}\vec{\gamma}_z\gamma_4)}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2m}}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ \sqrt{E-m}\end{bmatrix}\\ u(\vec{p},-\frac{1}{2})=e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma\otimes I}{2}}e^{-ln[\gamma_v(1+v)](\frac{i}{2}\vec{\gamma}_z\gamma_4)}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2m}}\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\begin{bmatrix}\sqrt{E+m}\\ -\sqrt{E-m}\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\begin{cases}v(\vec{p},\frac{1}{2})=e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma\otimes I}{2}}e^{-ln[\gamma_v(1+v)](\frac{i}{2}\vec{\gamma}_z\gamma_4)}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2m}}\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\begin{bmatrix}\sqrt{E-m}\\ \sqrt{E+m}\end{bmatrix}\\ v(\vec{p},-\frac{1}{2})=e^{i\vec{\omega}\cdot\frac{\sigma\otimes I}{2}}e^{-ln[\gamma_v(1+v)](\frac{i}{2}\vec{\gamma}_z\gamma_4)}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2m}}\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\begin{bmatrix}-\sqrt{E-m}\\ \sqrt{E+m}\end{bmatrix}\end{cases}$$

1.8 一般表象Dirac自旋基的升降算符

定义1.8.1.

$$\begin{cases}\hat{J}_x(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a):=\frac{iE}{2m}[-\gamma_y\gamma_z+\frac{\hat{p}_x}{1+\hat{p}_z}(\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i\gamma_j\gamma_k+\gamma_x\gamma_y)]-\frac{|\vec{p}|}{2m}[-\gamma_z\gamma_x+\frac{\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i\gamma_j\gamma_k+\gamma_x\gamma_y)]\gamma_5\\ \hat{J}_y(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a):=\frac{iE}{2m}[-\gamma_z\gamma_x+\frac{\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i\gamma_j\gamma_k+\gamma_x\gamma_y)]+\frac{|\vec{p}|}{2m}[-\gamma_y\gamma_z+\frac{\hat{p}_x}{1+\hat{p}_z}(\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i\gamma_j\gamma_k+\gamma_x\gamma_y)]\gamma_5\\ \hat{J}_z(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a):=-\frac{i}{4}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i\gamma_j\gamma_k=\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_iS_{jk}(e,\frac{1}{2}),\hat{Q}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a):=\frac{i\gamma^ap_a}{m}\end{cases}$$

推论1.8.1.

$$\begin{cases}\hat{J}_x^2(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)=\frac{1}{4},\hat{J}_y^2(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)=\frac{1}{4},\hat{J}_z^2(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)=\frac{1}{4}\\ [\hat{J}_i(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a),\hat{J}_j(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)]=\varepsilon_{ij}{}^k\hat{J}_k(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a),\hat{J}^2(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\end{cases}$$

推论1.8.2. $\frac{1}{2}\delta_{\lambda_\varsigma}^{\lambda''_\varsigma}\frac{1}{2}\delta_{\mu_\varsigma}^{\mu''_\varsigma}=$

$$[\frac{1}{2}\delta_{\lambda_\varsigma}^{\lambda'_\varsigma}\frac{1}{2}\delta_{\mu_\varsigma}^{\mu'_\varsigma}+\hat{J}_x{}_{\lambda_\varsigma}^{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)\hat{J}_x{}_{\mu_\varsigma}^{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)+\hat{J}_y{}_{\lambda_\varsigma}^{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)\hat{J}_y{}_{\mu_\varsigma}^{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)+\hat{J}_z{}_{\lambda_\varsigma}^{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)\hat{J}_z{}_{\mu_\varsigma}^{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)]$$
$$[\frac{1}{2}\delta_{\lambda'_\varsigma}^{\lambda''_\varsigma}\frac{1}{2}\delta_{\mu'_\varsigma}^{\mu''_\varsigma}+\hat{J}_x{}_{\lambda'_\varsigma}^{\lambda''_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)\hat{J}_x{}_{\mu'_\varsigma}^{\mu''_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)+\hat{J}_y{}_{\lambda'_\varsigma}^{\lambda''_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)\hat{J}_y{}_{\mu'_\varsigma}^{\mu''_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)+\hat{J}_z{}_{\lambda'_\varsigma}^{\lambda''_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)\hat{J}_z{}_{\mu'_\varsigma}^{\mu''_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)]$$

推论1.8.3.

$$\begin{cases}\hat{J}_+(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a):=[i(\gamma_x+i\gamma_y)\gamma_z+\frac{\hat{p}_x+i\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i\gamma_j\gamma_k+\gamma_x\gamma_y)]\frac{i(E-|\vec{p}|\gamma_5)}{2m}\\ \hat{J}_-(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a):=[-i(\gamma_x-i\gamma_y)\gamma_z+\frac{\hat{p}_x-i\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i\gamma_j\gamma_k+\gamma_x\gamma_y)]\frac{i(E+|\vec{p}|\gamma_5)}{2m}\\ \hat{J}_z(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a):=-\frac{i}{4}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_i\gamma_j\gamma_k=\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\hat{p}_iS_{jk}(e,\frac{1}{2}),\hat{Q}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a):=\frac{i\gamma^ap_a}{m}\end{cases}$$

推论1.8.4.

$$\begin{cases}\hat{J}_+(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)u(\vec{p},-\frac{1}{2})=u(\vec{p},\frac{1}{2});\hat{J}_+(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)u(\vec{p},\frac{1}{2})=0\\ \hat{J}_-(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)u(\vec{p},\frac{1}{2})=u(\vec{p},-\frac{1}{2});\hat{J}_-(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)u(\vec{p},-\frac{1}{2})=0\\ \hat{J}_z(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)u(\vec{p},h)=hu(\vec{p},h),\hat{Q}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)u(\vec{p},h)=u(\vec{p},h),-\frac{1}{2}\leq h\leq\frac{1}{2}\end{cases}$$

推论1.8.5.

$$\begin{cases}\hat{J}_+(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)v(\vec{p},-\frac{1}{2})=v(\vec{p},\frac{1}{2});\hat{J}_+(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)v(\vec{p},\frac{1}{2})=0\\ \hat{J}_-(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)v(\vec{p},\frac{1}{2})=v(\vec{p},-\frac{1}{2});\hat{J}_-(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)v(\vec{p},-\frac{1}{2})=0\\ \hat{J}_z(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)v(\vec{p},h)=hv(\vec{p},h),\hat{Q}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)v(\vec{p},h)=-v(\vec{p},h),-\frac{1}{2}\leq h\leq\frac{1}{2}\end{cases}$$

1.9 Bargmann-Wigner方程自旋基的升降算符

定义1.9.1.

$$\begin{cases}\hat{J}(\vec{p},s;\gamma_a):=\underbrace{\hat{J}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)\otimes I_4\otimes\cdot\cdot\otimes I_4}_{2s}+\underbrace{I_4\otimes\hat{J}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)\otimes\cdot\cdot\otimes I_4}_{2s}+\cdots+\underbrace{I_4\otimes\cdot\cdot\otimes I_4\otimes\hat{J}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)}_{2s}\\ \hat{Q}(\vec{p},s;\gamma_a):=\underbrace{\hat{Q}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)\otimes I_4\otimes\cdot\cdot\otimes I_4}_{2s}+\underbrace{I_4\otimes\hat{Q}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)\otimes\cdot\cdot\otimes I_4}_{2s}+\cdots+\underbrace{I_4\otimes\cdot\cdot\otimes I_4\otimes\hat{Q}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)}_{2s}\end{cases}$$

推论1.9.1.

$$\begin{cases}\hat{J}_x^2(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)=\frac{1}{4},\hat{J}_y^2(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)=\frac{1}{4},\hat{J}_z^2(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)=\frac{1}{4},\hat{J}^2(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\\ [\hat{J}_i(\vec{p},s;\gamma_a),\hat{J}_j(\vec{p},s;\gamma_a)]=\varepsilon_{ij}{}^k\hat{J}_k(\vec{p},s;\gamma_a)\end{cases}$$

定理1.9.1. $\hat{J}_+(\vec{p},s;\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sqrt{s(s+1)-h(h+1)}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h+1)$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$s'=\frac{1}{2}$时成立：

$\hat{J}_+(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\sqrt{\frac{3}{4}-h(h+1)}U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},h+1),-\frac{1}{2}\le h\le\frac{1}{2}$

第二步：假设$s'=s-\frac{1}{2}$时成立：

$\hat{J}_+(\vec{p},s-\frac{1}{2};\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)=\sqrt{(s-\frac{1}{2})(s+\frac{1}{2})-h(h+1)}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h),-s+\frac{1}{2}\le h\le s-\frac{1}{2}$

第三步：$s'=s$时： $-s\le h\le s,\hat{J}_+(\vec{p},s;\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$

$=\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}[\hat{J}_+(\vec{p},s-\frac{1}{2};\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})]U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}[\hat{J}_+(\vec{p},s-\frac{1}{2};\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})]U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$+\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})\hat{J}_+(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})\hat{J}_+(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=\frac{\sqrt{s+h}\sqrt{(s+\frac{1}{2})(s-\frac{1}{2})-(h-\frac{1}{2})(h+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$

$+\frac{\sqrt{s-h}\sqrt{(s+\frac{1}{2})(s-\frac{1}{2})-(h+1-\frac{1}{2})(h+1+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{3}{2})]U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=\frac{\sqrt{(s-h)(s+h+1)}\sqrt{s+h+1}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{(s-h)(s+h+1)}\sqrt{s-h-1}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{3}{2})U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=\sqrt{s(s+1)-h(h+1)}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h+1)$

此步证明了$s'=s$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

定理1.9.2. $\hat{J}_-(\vec{p},s;\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sqrt{s(s+1)-h(h-1)}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h-1)$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$s'=\frac{1}{2}$时成立：

$\hat{J}_-(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\sqrt{\frac{3}{4}-h(h-1)}U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},h-1),-\frac{1}{2}\le h\le\frac{1}{2}$

第二步：假设$s'=s-\frac{1}{2}$时成立：

$\hat{J}_-(\vec{p},s-\frac{1}{2};\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)=\sqrt{(s-\frac{1}{2})(s+\frac{1}{2})-h(h-1)}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-1),-s+\frac{1}{2}\le h\le s-\frac{1}{2}$

第三步：$s'=s$时： $-s\le h\le s,\hat{J}_-(\vec{p},s;\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$

$=\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}[\hat{J}_-(\vec{p},s-\frac{1}{2};\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})]U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}[\hat{J}_-(\vec{p},s-\frac{1}{2};\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})]U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$$+\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})\hat{J}_-(\vec{p},\tfrac{1}{2};\gamma_a)U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}\hat{J}_-(\vec{p},s-\tfrac{1}{2};\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2})\hat{J}_-(\vec{p},\tfrac{1}{2};\gamma_a)U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$=\frac{\sqrt{s+h}\sqrt{(s+\frac{1}{2})(s-\frac{1}{2})-(h-1-\frac{1}{2})(h-1+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\tfrac{3}{2})U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

$$+\frac{\sqrt{s-h}\sqrt{(s+\frac{1}{2})(s-\frac{1}{2})-(h-\frac{1}{2})(h+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})]U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$=\frac{\sqrt{s+h}\sqrt{(s+h-1)(s-h+1)}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\tfrac{3}{2})U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

$$+\frac{\sqrt{s-h}\sqrt{(s+h)(s-h)}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})]U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$=\frac{\sqrt{(s+h)(s-h+1)}\sqrt{(s+h-1)}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\tfrac{3}{2})U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

$$+\frac{\sqrt{(s+h)(s-h+1)}\sqrt{s-h+1}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})U_{\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$=\sqrt{s(s+1)-h(h-1)}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h-1)$$

此步证明了$s'=s$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

推论1.9.2.

$$\begin{cases}\hat{J}_+(\vec{p},s;\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)=\sqrt{s(s+1)-h(h+1)}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h+1),-s\le h\le s\\ \hat{J}_-(\vec{p},s;\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)=\sqrt{s(s+1)-h(h-1)}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h-1),-s\le h\le s\\ \hat{J}_z(\vec{p},s;\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)=hU_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h),-s\le h\le s\\ \hat{Q}(\vec{p},s;\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)=-2sU_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h),-s\le h\le s\end{cases}$$

推论1.9.3.

$$\begin{cases}\hat{J}_+(\vec{p},s;\gamma_a)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)=\sqrt{s(s+1)-h(h+1)}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h+1),-s\le h\le s\\ \hat{J}_-(\vec{p},s;\gamma_a)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)=\sqrt{s(s+1)-h(h-1)}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h-1),-s\le h\le s\\ \hat{J}_z(\vec{p},s;\gamma_a)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)=hV_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h),-s\le h\le s\\ \hat{Q}(\vec{p},s;\gamma_a)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)=2sV_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h),-s\le h\le s\end{cases}$$

推论1.9.4.

$$\begin{cases}\hat{J}^2(\vec{p},s;\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)=s(s+1)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h),\hat{J}^2(\vec{p},*\tfrac{1}{2};\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)=\tfrac{3}{4}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)\\ \hat{J}_z(\vec{p},s;\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)=hU_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h),\hat{Q}(\vec{p},*\tfrac{1}{2};\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)=-U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)\\ U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2s)!}U_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\}}_{2s}}(\vec{p},h),\hat{J}^2=\hat{J}_z^2+\tfrac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_-+\hat{J}_+\hat{J}_-),-s\le h\le s\end{cases}$$

推论1.9.5.

$$\begin{cases}\hat{J}^2(\vec{p},s;\gamma_a)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)=s(s+1)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h),\hat{J}^2(\vec{p},*\frac{1}{2};\gamma_a)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{3}{4}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)\\ \hat{J}_z(\vec{p},s;\gamma_a)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)=hV_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h),\hat{Q}(\vec{p},*\frac{1}{2};\gamma_a)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)=V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes..}_{2s}}(\vec{p},h)\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma..}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2s)!}V_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma..\}}_{2s}}(\vec{p},h),\hat{J}^2=\hat{J}_z^2+\frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_-+\hat{J}_+\hat{J}_-),-s\le h\le s\end{cases}$$

1.10 推论-$U_{\lambda_\varsigma..\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},h)$的正交性

定义1.10.1. $\bar{U}^{\tau_\varsigma}(\vec{p},h')U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\delta_{hh'},-\frac{1}{2}\le h,h'\le\frac{1}{2}$

定理1.10.1. $\bar{U}^{\overbrace{\lambda_\varsigma..\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma..\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\delta_{hh'},-s\le h',h\le s$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$s'=\frac{1}{2}$时成立：

$\bar{U}^{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h')U_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)=\delta_{hh'},-\frac{1}{2}\le h,h'\le\frac{1}{2}$

第二步：假设$s'=s-\frac{1}{2}$时成立：

$\bar{U}^{\overbrace{\lambda_\varsigma..\sigma_\varsigma}^{2s-1}}(\vec{p},h')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma..\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)=\delta_{hh'},-s+\frac{1}{2}\le h',h\le s-\frac{1}{2}$

第三步：$s'=s$时：$\bar{U}^{\overbrace{\lambda_\varsigma..\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p},h')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma..\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h),-s\le h',h\le s$

$$=[\sum_{\bar{h}'=1/2}^{-1/2}\frac{\sqrt{C_{s+h'}^{1/2+\bar{h}'}C_{s-h'}^{1/2-\bar{h}'}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\bar{U}^{\overbrace{\lambda_\varsigma..\sigma_\varsigma}^{2s-1}}(\vec{p},h'-\bar{h}')\bar{U}^{\tau_\varsigma}(\vec{p},\bar{h}')][\sum_{\bar{h}=1/2}^{-1/2}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+\bar{h}}C_{s-h}^{1/2-\bar{h}}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma..\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\bar{h})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\bar{h})]$$

$$=\sum_{\bar{h}',\bar{h}=1/2}^{-1/2}[\frac{\sqrt{C_{s+h'}^{1/2+\bar{h}'}C_{s-h'}^{1/2-\bar{h}'}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+\bar{h}}C_{s-h}^{1/2-\bar{h}}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\bar{U}^{\overbrace{\lambda_\varsigma..\sigma_\varsigma}^{2s-1}}(\vec{p},h'-\bar{h}')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma..\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\bar{h})\delta_{\bar{h}\bar{h}'}]$$

$$=\sum_{\bar{h}=1/2}^{-1/2}[\frac{\sqrt{C_{s+h'}^{1/2+\bar{h}}C_{s-h'}^{1/2-\bar{h}}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+\bar{h}}C_{s-h}^{1/2-\bar{h}}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\bar{U}^{\overbrace{\lambda_\varsigma..\sigma_\varsigma}^{2s-1}}(\vec{p},h'-\bar{h})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma..\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\bar{h})]$$

$$=\sum_{\bar{h}=1/2}^{-1/2}[\frac{\sqrt{C_{s+h'}^{1/2+\bar{h}}C_{s-h'}^{1/2-\bar{h}}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+\bar{h}}C_{s-h}^{1/2-\bar{h}}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\delta_{hh'}]$$

$$=\sum_{\bar{h}=1/2}^{-1/2}[\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+\bar{h}}C_{s-h}^{1/2-\bar{h}}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+\bar{h}}C_{s-h}^{1/2-\bar{h}}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}]\delta_{hh'}$$

$$=\delta_{hh'}$$

此步证明了$s'=s$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

1.11 推论-自旋基分解:$1=\frac{1}{2}\oplus\frac{1}{2}$

推论1.11.1. $U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{1+h}}{\sqrt{2}}U_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h-\frac{1}{2})U_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{1-h}}{\sqrt{2}}U_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h+\frac{1}{2})U_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$$=\begin{cases}U_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})U_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}),h=1\\ \frac{1}{\sqrt{2}}U_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})U_{\mu_\varsigma\}}(\vec{p},-\frac{1}{2}),h=0\\ U_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})U_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}),h=-1\end{cases}$$

推论1.11.2. $U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)=U_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}(\vec{p},h),-1\le h\le 1$

1.12 推论-自旋基分解:$0=\frac{1}{2}\ominus\frac{1}{2}$

推论1.12.1. $F_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{\sqrt{2}}u_{[\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma]}(\vec{p},-\frac{1}{2}),h=0$

推论1.12.2. $[(\sigma\otimes I)\cdot(I\otimes\sigma)][\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]=-3[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]$

证明: $\sigma\cdot[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]\sigma^T$
$=\frac{i}{2}\sigma\cdot[(\sigma,-i\varsigma)^a\hat{p}_a\sigma_y-(\sigma,i\varsigma)^a\hat{p}_a\sigma_y]\sigma^T$
$=\sigma\cdot(i\varsigma\sigma_y)\sigma^T$
$=\sigma_x(i\varsigma\sigma_y)\sigma_x^T+\sigma_y(i\varsigma\sigma_y)\sigma_y^T+\sigma_z(i\varsigma\sigma_y)\sigma_z^T$
$=-3(i\varsigma\sigma_y)=-3[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]$ □

推论1.12.3.

$$\begin{cases}[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]^2[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]=0[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]\\ [\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]\cdot\hat{p}[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]=0[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]\end{cases}$$

定理1.12.1.

$$\begin{cases}F=-[C\phi+im\gamma_a(\varsigma)\gamma_5(\varsigma)C\mathbf{A}^a+\gamma_5(\varsigma)C\Phi]\\ F=\frac{1}{\sqrt{2}}[u(\vec{p},\frac{1}{2})u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})-u(\vec{p},-\frac{1}{2})u^T(\vec{p},\frac{1}{2})]=-\frac{m-i\gamma^a p_a}{2\sqrt{2}m}\gamma_5 C\\ \varepsilon_a(\vec{p},0;0):=\frac{1}{i\sqrt{2}}(\bar{C}\gamma_a\gamma_5)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}F_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{p_a}{m}\end{cases}$$

证明: $-2i\sqrt{2}(-im\mathbf{A}_a)=\varepsilon_a(\vec{p},0;0)=\frac{1}{i\sqrt{2}}(\bar{C}\gamma_a\gamma_5)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}F_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)$
$=\frac{1}{2i}(\bar{C}\gamma_a\gamma_5)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}u_{[\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma]}(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=-i(\bar{C}\gamma_a\gamma_5)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=-iu^T(\vec{p},\frac{1}{2})(\bar{C}\gamma_a\gamma_5)u(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=iu^T(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma_2\gamma_5\gamma_4\gamma_a u(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=iu^+(\vec{p},-\frac{1}{2})\gamma_4\gamma_a u(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=\frac{p_a}{m}$ □

证明: $2i\sqrt{2}(-\Phi)=\frac{1}{i\sqrt{2}}(\bar{C}\gamma_5)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}F_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)$
$=\frac{1}{2i}(\bar{C}\gamma_5)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}u_{[\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma]}(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=-i(\bar{C}\gamma_5)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=-iu^T(\vec{p},\frac{1}{2})(\bar{C}\gamma_5)u(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=-iu^T(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma_2\gamma_5\gamma_4 u(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=-iu^+(\vec{p},-\frac{1}{2})\gamma_4 u(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=-i$ □

证明: $2i\sqrt{2}(-\phi)=\frac{1}{i\sqrt{2}}(\bar{C})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}F_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)$
$=\frac{1}{2i}(\bar{C})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}u_{[\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma]}(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=-i(\bar{C})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=-iu^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}u(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=-iu^T(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma_2\gamma_5\gamma_4\gamma_5 u(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=-iu^+(\vec{p},-\frac{1}{2})\gamma_4\gamma_5 u(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=0$ □

证明: $F=\frac{1}{\sqrt{2}}[u(\vec{p},\frac{1}{2})u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})-u(\vec{p},-\frac{1}{2})u^T(\vec{p},\frac{1}{2})]$
$=\frac{1}{\sqrt{2}}[u(\vec{p},\frac{1}{2})u^+(\vec{p},\frac{1}{2})+u(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+(\vec{p},-\frac{1}{2})]\gamma_2\gamma_5=\frac{m-i\gamma^a p_a}{2\sqrt{2}m}\gamma_4\gamma_2\gamma_5$
$=\frac{ip^a}{2m\sqrt{2}}\gamma_a\gamma_5 C-\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma_5 C=-\frac{m-i\gamma^a p_a}{2\sqrt{2}m}\gamma_5 C$ □

证明: $[u(\vec{p},\frac{1}{2})u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})-u(\vec{p},-\frac{1}{2})u^T(\vec{p},\frac{1}{2})]=\frac{ip^a}{2m}\gamma_a\gamma_5 C-\frac{1}{2}\gamma_5 C$ □

1.13 推论-自旋基分解:$s=(s-1)\oplus 1$

定理1.13.1. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=1}^{-1}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1+h'}C_{s-h}^{1-h'}}}{\sqrt{C_{2s}^2}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2(s-1)}}(\vec{p},h-h')U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},h'),s\geq 1,-s\leq h\leq s$

证明: $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$

$= \frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$= \frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}[\frac{\sqrt{s+h-1}}{\sqrt{2s-1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec{p},h-1)U_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s-1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(\vec{p},h)U_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$

$+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}[\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s-1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec{p},h)U_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h-1}}{\sqrt{2s-1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(\vec{p},h+1)U_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=[\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}\frac{\sqrt{s+h-1}}{\sqrt{2s-1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec{p},h-1)U_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s-1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(\vec{p},h)U_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]$

$+[\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s-1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec{p},h)U_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}\frac{\sqrt{s-h-1}}{\sqrt{2s-1}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(\vec{p},h+1)U_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$

$=\frac{\sqrt{C^2_{s+h}C^0_{s-h}}}{\sqrt{C^2_{2s}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec{p},h-1)U_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{C^1_{s+h}C^1_{s-h}}}{\sqrt{C^2_{2s}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec{p},h)\frac{1}{\sqrt{2}}U_{\{\sigma_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$+\frac{\sqrt{C^0_{s+h}C^2_{s-h}}}{\sqrt{C^2_{2s}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(\vec{p},h+1)U_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=\frac{\sqrt{C^2_{s+h}C^0_{s-h}}}{\sqrt{C^2_{2s}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec{p},h-1)U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C^1_{s+h}C^1_{s-h}}}{\sqrt{C^2_{2s}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-2}}(\vec{p},h)U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},0)$

$+\frac{\sqrt{C^0_{s+h}C^2_{s-h}}}{\sqrt{C^2_{2s}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(\vec{p},h+1)U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},-1)$

$=\sum_{h'=1}^{-1}\frac{\sqrt{C^{1+h'}_{s+h}C^{1-h'}_{s-h}}}{\sqrt{C^2_{2s}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2(s-1)}}(\vec{p},h-h')U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},h')$ □

推论1.13.1. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h), s\geq 1, -s\leq h\leq s$

1.14 推论-自旋基分解:$s+s'=s\oplus s'$

定理1.14.1. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=s'}^{-s'}\frac{\sqrt{C^{s'+h'}_{s+s'+h}C^{s'-h'}_{s+s'-h}}}{\sqrt{C^{2s'}_{2(s+s')}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h-h')U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p},h'), -s-s'\leq h\leq s+s'$

证明: 对s'采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$s''=\frac{1}{2}$时成立：

$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\tau_\varsigma}_{1}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=1/2}^{-1/2}\frac{\sqrt{C^{1/2+h'}_{s+1/2+h}C^{1/2-h'}_{s+1/2-h}}}{\sqrt{C^1_{2(s+1/2)}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h-h')U_{\underbrace{\tau_\varsigma}_{1}}(\vec{p},h'), -s-\frac{1}{2}\leq h\leq s+\frac{1}{2}$

第二步：假设$s''=s'-\frac{1}{2}$时成立：

$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=s'-1/2}^{-s'+1/2}\frac{\sqrt{C^{s'-1/2+h'}_{s+s'-1/2+h}C^{s'-1/2-h'}_{s+s'-1/2-h}}}{\sqrt{C^{2s'-1}_{2(s+s')-1}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h-h')U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\vec{p},h')$

$-s-s'+\frac{1}{2}\leq h\leq s+s'-\frac{1}{2}$

第三步：$s''=s'$时：$-s-s'\leq h\leq s+s', U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p},h)$

$=\frac{\sqrt{s+s'+h}}{\sqrt{2(s+s')}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+s'-h}}{\sqrt{2(s+s')}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=\frac{\sqrt{s+s'+h}}{\sqrt{2(s+s')}}[\sum_{h'=s'-1/2}^{-s'+1/2}\frac{\sqrt{C^{s'-1/2+h'}_{s+s'-1+h}C^{s'-1/2-h'}_{s+s'-h}}}{\sqrt{C^{2s'-1}_{2(s+s')-1}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h-\frac{1}{2}-h')U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\vec{p},h')]U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$

$+[\sum_{h'=s'-1/2}^{-s'+1/2}\frac{\sqrt{C^{s'-1/2+h'}_{s+s'+h}C^{s'-1/2-h'}_{s+s'-1-h}}}{\sqrt{C^{2s'-1}_{2(s+s')-1}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h+\frac{1}{2}-h')U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\vec{p},h')]U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=[\sum_{h'=s'}^{-s'+1}\frac{\sqrt{C^{s'-1+h'}_{s+s'-1+h}C^{s'-h'}_{s+s'-h}}}{\sqrt{C^{2s'}_{2(s+s')}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h-h')\frac{\sqrt{s+s'+h}}{\sqrt{2s'}}U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\vec{p},h'-\frac{1}{2})]U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$

$$+[\sum_{h'=s'-1}^{-s'}\frac{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-1-h}^{s'-1-h'}}}{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h-h')\frac{\sqrt{s+s'-h}}{\sqrt{2s'}}U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\vec{p},h'+\frac{1}{2})]U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$$

$$=[\sum_{h'=s'}^{-s'+1}\frac{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-h}^{s'-h'}}}{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h-h')\frac{\sqrt{s'+h'}}{\sqrt{2s'}}U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\vec{p},h'-\frac{1}{2})]U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$$

$$+[\sum_{h'=s'-1}^{-s'}\frac{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-h}^{s'-h'}}}{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h-h')\frac{\sqrt{s'-h'}}{\sqrt{2s'}}U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\vec{p},h'+\frac{1}{2})]U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$$

$$=[\sum_{h'=s'}^{-s'}\frac{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-h}^{s'-h'}}}{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h-h')\frac{\sqrt{s'+h'}}{\sqrt{2s'}}U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\vec{p},h'-\frac{1}{2})]U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$$

$$+[\sum_{h'=s'}^{-s'}\frac{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-h}^{s'-h'}}}{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h-h')\frac{\sqrt{s'-h'}}{\sqrt{2s'}}U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\vec{p},h'+\frac{1}{2})]U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$$

$$=\sum_{h'=s'}^{-s'}\frac{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-h}^{s'-h'}}}{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h-h')U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p},h'),-s-s'\leq h\leq s+s'$$

此步证明了$s''=s'$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

推论1.14.1. $-s_1-s_2\leq h\leq s_1+s_2$

$$\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\vec{p},h)=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\frac{\sqrt{C_{s_1+s_2+h}^{s_2+h_2}C_{s_1+s_2-h}^{s_2-h_2}}}{\sqrt{C_{2(s_1+s_2)}^{2s_2}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\vec{p},h_1)U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\vec{p},h_2)\delta(h-h_1-h_2)\\U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\vec{p},h)=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\frac{\sqrt{C_{s_1+s_2+h}^{s_1+h_1}C_{s_1+s_2-h}^{s_1-h_1}}}{\sqrt{C_{2(s_1+s_2)}^{2s_1}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\vec{p},h_1)U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\vec{p},h_2)\delta(h-h_1-h_2)\end{cases}$$

推论1.14.2. $-s_1-s_2\leq h\leq s_1+s_2,U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\vec{p},h)$

$$=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}[\frac{(2s_1)!(2s_2)!}{(2s_1+2s_2)!}\frac{(s_1+h_1+s_2+h_2)!}{(s_1+h_1)!(s_2+h_2)!}\frac{(s_1-h_1+s_2-h_2)!}{(s_1-h_1)!(s_2-h_2)!}]^{1/2}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\vec{p},h_1)U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\vec{p},h_2)\delta(h-h_1-h_2)$$

1.15 推论-自旋基反向合成

推论1.15.1. $\frac{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-h}^{s'-h'}}}{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h-h')=U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p},h)\bar{U}^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s'}}(\vec{p},h'),-s-s'\leq h\leq s+s'$

推论1.15.2. $\frac{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-h}^{s'-h'}}}{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h-h')=\bar{U}^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s'}}(\vec{p},h')U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s'}\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h),-s-s'\leq h\leq s+s'$

推论1.15.3. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\vec{p},h_1)=\frac{\sqrt{C_{2(s_1+s_2)}^{2s_2}}}{\sqrt{C_{s_1+h_1+s_2+h_2}^{s_2+h_2}C_{s_1-h_1+s_2-h_2}^{s_2-h_2}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\vec{p},h_1+h_2)\bar{U}^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}^{2s_2}}(\vec{p},h_2)$

推论1.15.4. $\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)\bar{U}^{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2}),-s\leq h\leq s\\U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)\bar{U}^{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2}),-s\leq h\leq s\end{cases}$

1.16 推论-自旋基分解:$s_1+s_2+s_3=s_1\oplus s_2\oplus s_3$

推论1.16.1. $-s_1-s_2-s_3\leq h\leq s_1+s_2+s_3,U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_3}}(\vec{p},h)$

$$=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\sum_{h_3=s_3}^{-s_3}[\frac{(2s_1)!(2s_2)!(2s_3)!}{(2s_1+2s_2+2s_3)!}\frac{(s_1+h_1+s_2+h_2+s_3+h_3)!}{(s_1+h_1)!(s_2+h_2)!(s_3+h_3)!}\frac{(s_1-h_1+s_2-h_2+s_3-h_3)!}{(s_1-h_1)!(s_2-h_2)!(s_3-h_3)!}]^{1/2}$$

$$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\vec{p},h_1)U_{\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\vec{p},h_2)U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_3}}(\vec{p},h_3)\delta(h-h_1-h_2-h_3)$$

证明: $-s_1-s_2-s_3\le h\le s_1+s_2+s_3, U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_3}}(\vec{p},h)$

$=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_{23}=s_2+s_3}^{-s_2-s_3}[\frac{(2s_1)!(2s_2+2s_3)!}{(2s_1+2s_2+2s_3)!}\frac{(s_1+h_1+s_2+s_3+h_{23})!}{(s_1+h_1)!(s_2+s_3+h_{23})!}\frac{(s_1-h_1+s_2+s_3-h_{23})!}{(s_1-h_1)!(s_2+s_3-h_{23})!}]^{1/2}$

$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\vec{p},h_1)U_{\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_3}}(\vec{p},h_{23})\delta(h-h_1-h_{23})$

$=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_{23}=s_2+s_3}^{-s_2-s_3}[\frac{(2s_1)!(2s_2+2s_3)!}{(2s_1+2s_2+2s_3)!}\frac{(s_1+h_1+s_2+s_3+h_{23})!}{(s_1+h_1)!(s_2+s_3+h_{23})!}\frac{(s_1-h_1+s_2+s_3-h_{23})!}{(s_1-h_1)!(s_2+s_3-h_{23})!}]^{1/2}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\vec{p},h_1)\delta(h-h_1-h_{23})$

$\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\sum_{h_3=s_3}^{-s_3}[\frac{(2s_2)!(2s_3)!}{(2s_2+2s_3)!}\frac{(s_2+h_2+s_3+h_3)!}{(s_2+h_2)!(s_3+h_3)!}\frac{(s_2-h_2+s_3-h_3)!}{(s_2-h_2)!(s_3-h_3)!}]^{1/2}U_{\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\vec{p},h_2)U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_3}}(\vec{p},h_3)\delta(h_{23}-h_2-h_3)$

$=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\sum_{h_3=s_3}^{-s_3}[\frac{(2s_1)!(2s_2)!(2s_3)!}{(2s_1+2s_2+2s_3)!}\frac{(s_1+h_1+s_2+h_2+s_3+h_3)!}{(s_1+h_1)!(s_2+h_2)!(s_3+h_3)!}\frac{(s_1-h_1+s_2-h_2+s_3-h_3)!}{(s_1-h_1)!(s_2-h_2)!(s_3-h_3)!}]^{1/2}$

$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\vec{p},h_1)U_{\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\vec{p},h_2)U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_3}}(\vec{p},h_3)\delta(h-h_1-h_2-h_3)$ □

1.17 推论-自旋基分解:$s_1+s_2\cdot\cdot+s_n=s_1\oplus s_2\cdot\cdot\oplus s_n$

推论1.17.1. $-\sum_{i=1}^n s_i\le h\le\sum_{i=1}^n s_i, U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}\cdot\cdot\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}(\vec{p},h)$

$=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\cdot\cdot\sum_{h_n=s_n}^{-s_n}[\frac{\prod_{i=1}^n(2s_i)!}{[\sum_{i=1}^n(2s_i)]!}\frac{[\sum_{i=1}^n(s_i+h_i)]!}{\prod_{i=1}^n(s_i+h_i)!}\frac{[\sum_{i=1}^n(s_i-h_i)]!}{\prod_{i=1}^n(s_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\vec{p},h_1)U_{\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\vec{p},h_2)\cdot\cdot U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}(\vec{p},h_n)\delta(h-\sum_{i=1}^n h_i)$

1.18 一个重要的数学推论

推论1.18.1. $\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\cdot\cdot\sum_{h_n=s_n}^{-s_n}\frac{[\sum_{i=1}^n(s_i+h_i)]!}{\prod_{i=1}^n(s_i+h_i)!}\frac{[\sum_{i=1}^n(s_i-h_i)]!}{\prod_{i=1}^n(s_i-h_i)!}\delta(h-\sum_{i=1}^n h_i)=\frac{[\sum_{i=1}^n(2s_i)]!}{\prod_{i=1}^n(2s_i)!},-\sum_{i=1}^n s_i\le h\le\sum_{i=1}^n s_i$

1.19 推论-自旋基分解:$s=\frac{1}{2}\oplus\frac{1}{2}\cdot\cdot\oplus\frac{1}{2}$

推论1.19.1. $-s\le h\le s$

$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sum_{h_1=1/2}^{-1/2}\sum_{h_2=1/2}^{-1/2}\cdot\cdot\sum_{h_n=1/2}^{-1/2}[\frac{(s+h)!(s-h)!}{(2s)!}]^{\frac{1}{2}}\underbrace{U_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h_1)U_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h_2)\cdot\cdot U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h_n)}_{2s}\delta(h-\sum_{i=1}^n h_i)$

推论1.19.2. $-s\le h\le s$

$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2s)!}\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot}_{s+h}\underbrace{\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{s-h}$

推论1.19.3. $-s\le h\le s,\forall s$

$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow$

$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2s)!}\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot}_{s+h}\underbrace{\cdot\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{s-h}$

1.20 推论-$U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},h)$的全对称性

定理1.20.1. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2s)!}U_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma\sigma_\varsigma\}}_{2s}}(\vec{p},h),-s\le h\le s$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$s'=\frac{1}{2},1$时成立：

$U_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{1!}U_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h),-\frac{1}{2}\le h\le\frac{1}{2};U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{2!}U_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\}}(\vec{p},h),-1\le h\le 1$

第二步：假设$s'=s-\frac{1}{2}$时成立：

$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2s-1)!}U_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma\}}_{2s-1}}(\vec{p},h),-s+\frac{1}{2}\le h\le s-\frac{1}{2}$

第三步：$1 \leq s' = s$时：$-s \leq h \leq s, U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$

$= \sum_{h'=1/2}^{-1/2} \frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+h'}C_{s-h}^{1/2-h'}}}{\sqrt{C_{2s}^1}} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-h')U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h') = \sum_{h'=1}^{-1} \frac{\sqrt{C_{s+h}^{1+h'}C_{s-h}^{1-h'}}}{\sqrt{C_{2s}^2}} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2(s-1)}}(\vec{p},h-h')U_{\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}(\vec{p},h')$

$\Rightarrow U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) = \frac{1}{(2s-1)!}U_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma\}\sigma_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h), U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) = U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h), -s \leq h \leq s$

$\Leftrightarrow U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) = \frac{1}{(2s)!}U_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma\sigma_\varsigma\}}_{2s}}(\vec{p},h), -s \leq h \leq s$

此步证明了$s' = s$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

1.21 有质量s-自旋粒子的准投影算子

引理1.21.1.

$$\begin{cases} \hat{J}_+(\vec{p},s-\frac{1}{2};\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2}) = \sqrt{(s-h)(s+h)}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2}), -s \leq h \leq s \\ \hat{J}_-(\vec{p},s-\frac{1}{2};\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2}) = \sqrt{(s+h)(s-h)}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2}), -s \leq h \leq s \\ \hat{J}_z(\vec{p},s;\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h) = hU_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h), -s \leq h \leq s \\ \hat{J}(s) :\prec \hat{J}(\vec{p},s;\gamma_a) \end{cases}$$

定理1.21.1. $\Lambda_+(s) = [\frac{2s+1}{4s} + \frac{1}{s}\hat{J}_x(s-\frac{1}{2})\otimes\hat{J}_x(\frac{1}{2}) + \frac{1}{s}\hat{J}_y(s-\frac{1}{2})\otimes\hat{J}_y(\frac{1}{2}) + \frac{1}{s}\hat{J}_z(s-\frac{1}{2})\otimes\hat{J}_z(\frac{1}{2})][\Lambda_+(s-\frac{1}{2})\otimes\Lambda_+(\frac{1}{2})]$

证明: $\Lambda_+(s) \prec \sum_{h=s}^{-s} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$

$= \sum_{h=s}^{-s}[\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$

$[\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$

$= \sum_{h=s}^{-s}[\frac{s+h}{2s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})][U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]$

$+ \sum_{h=s}^{-s}[\frac{s-h}{2s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})][U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$

$+ \sum_{h=s}^{-s}[\frac{\sqrt{(s+h)(s-h)}}{2s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})][U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$

$+ \sum_{h=s}^{-s}[\frac{\sqrt{(s-h)(s+h)}}{2s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})][U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]$

$= [\frac{s+\frac{1}{2}+\hat{J}_z(s-\frac{1}{2})}{2s}\sum_{h=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})][U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]$

$+ [\frac{s+\frac{1}{2}-\hat{J}_z(s-\frac{1}{2})}{2s}\sum_{h=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})][U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$

$+ [\frac{\hat{J}_-(s-\frac{1}{2})}{2s}\sum_{h=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})][U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$

$+ [\frac{\hat{J}_+(s-\frac{1}{2})}{2s}\sum_{h=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})][U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]$

$$= [\tfrac{s+\frac{1}{2}+\hat{J}_z(s-\frac{1}{2})}{2s}\sum_{h=s-1/2}^{-s+1/2}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)][U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$

$$+ [\tfrac{s+\frac{1}{2}-\hat{J}_z(s-\frac{1}{2})}{2s}\sum_{h=s-1/2}^{-s+1/2}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)][U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$

$$+ [\tfrac{\hat{J}_-(s-\frac{1}{2})}{2s}\sum_{h=s-1/2}^{-s+1/2}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)][U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$

$$+ [\tfrac{\hat{J}_+(s-\frac{1}{2})}{2s}\sum_{h=s-1/2}^{-s+1/2}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)][U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$

$$= [\tfrac{s+\frac{1}{2}+\hat{J}_z(s-\frac{1}{2})}{2s}\sum_{h=s-1/2}^{-s+1/2}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)][U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$

$$+ [\tfrac{\hat{J}_+(s-\frac{1}{2})}{2s}\sum_{h=s-1/2}^{-s+1/2}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)][\hat{J}_-(\tfrac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$

$$+ [\tfrac{s+\frac{1}{2}-\hat{J}_z(s-\frac{1}{2})}{2s}\sum_{h=s-1/2}^{-s+1/2}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)][U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$

$$+ [\tfrac{\hat{J}_-(s-\frac{1}{2})}{2s}\sum_{h=s-1/2}^{-s+1/2}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)][\hat{J}_+(\tfrac{1}{2})U_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})U^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$

$$\succ [\tfrac{2s+1}{4s}+\tfrac{1}{s}\hat{J}_x(s-\tfrac{1}{2})\otimes\hat{J}_x(\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{s}\hat{J}_y(s-\tfrac{1}{2})\otimes\hat{J}_y(\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{s}\hat{J}_z(s-\tfrac{1}{2})\otimes\hat{J}_z(\tfrac{1}{2})][\Lambda_+(s-\tfrac{1}{2})\otimes\Lambda_+(\tfrac{1}{2})] \quad \square$$

定理1.21.2. $\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}\underbrace{\lambda''_\varsigma\cdot\cdot\sigma''_\varsigma\tau''_\varsigma}_{2s}}(s)-\frac{3}{4}\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}\underbrace{\lambda''_\varsigma\cdot\cdot\sigma''_\varsigma}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})\Lambda_{+\tau_\varsigma\tau''_\varsigma}(\frac{1}{2})$

$$= [\hat{J}_x{}^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}^{2s-1}}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2})\hat{J}_x{}^{\tau'_\varsigma}_{\tau_\varsigma}(\tfrac{1}{2})+\hat{J}_y{}^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}^{2s-1}}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2})\hat{J}_y{}^{\tau'_\varsigma}_{\tau_\varsigma}(\tfrac{1}{2})+\hat{J}_z{}^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}^{2s-1}}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2})\hat{J}_z{}^{\tau'_\varsigma}_{\tau_\varsigma}(\tfrac{1}{2})]\tfrac{1}{s}\Lambda_{+\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma}_{2s-1}\underbrace{\lambda''_\varsigma\cdot\cdot\sigma''_\varsigma}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2})\Lambda_{+\tau'_\varsigma\tau''_\varsigma}(\tfrac{1}{2})$$

1.22 有质量1-自旋粒子的准投影算子

定理1.22.1. $\Lambda_+(1)=[\frac{3}{4}+\hat{J}_x(\frac{1}{2})\otimes\hat{J}_x(\frac{1}{2})+\hat{J}_y(\frac{1}{2})\otimes\hat{J}_y(\frac{1}{2})+\hat{J}_z(\frac{1}{2})\otimes\hat{J}_z(\frac{1}{2})][\Lambda_+(\frac{1}{2})\otimes\Lambda_+(\frac{1}{2})]$

推论1.22.1. $\Lambda_{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\lambda''_\varsigma\mu''_\varsigma}(1)-\frac{1}{2}\Lambda_{+\lambda_\varsigma\lambda''_\varsigma}(\frac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\mu''_\varsigma}(\frac{1}{2})=$
$\frac{1}{2}\Lambda_{+\lambda_\varsigma\mu''_\varsigma}(\frac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\lambda''_\varsigma}(\frac{1}{2})=[\frac{1}{2}\delta^{\lambda'_\varsigma}_{\lambda_\varsigma}\frac{1}{2}\delta^{\mu'_\varsigma}_{\mu_\varsigma}+\hat{J}_x{}^{\lambda'_\varsigma}_{\lambda_\varsigma}(\frac{1}{2})\hat{J}_x{}^{\mu'_\varsigma}_{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2})+\hat{J}_y{}^{\lambda'_\varsigma}_{\lambda_\varsigma}(\frac{1}{2})\hat{J}_y{}^{\mu'_\varsigma}_{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2})+\hat{J}_z{}^{\lambda'_\varsigma}_{\lambda_\varsigma}(\frac{1}{2})\hat{J}_z{}^{\mu'_\varsigma}_{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2})]\Lambda_{+\lambda'_\varsigma\lambda''_\varsigma}(\frac{1}{2})\Lambda_{+\mu'_\varsigma\mu''_\varsigma}(\frac{1}{2})$

1.23 Bargmann-Wigner方程平面波解的算子表述

定理1.23.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\}}_{2s}}(x)$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=\tfrac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\tfrac{m^s}{\sqrt{E}}\sum_{h=s}^{-s}\tfrac{\hat{J}_-^{s-h}(\vec{p},s;\gamma_a)}{(s-h)!\sqrt{C_{2s}^{s-h}}}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},s)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},s)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=\tfrac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\tfrac{m^s}{\sqrt{E}}\sum_{h=s}^{-s}\tfrac{\hat{J}_+^{s+h}(\vec{p},s;\gamma_a)}{(s+h)!\sqrt{C_{2s}^{s+h}}}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},-s)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},-s)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

2 Klein-Gordon方程自旋基的重新梳理分析

2.1 静止系的有质量矢量自旋基

推论2.1.1. $(R\cdot\hat{p})\varepsilon(\vec{p},h)=h\varepsilon(\vec{p},h),(R\cdot\hat{p})\frac{p_{[a]}}{m}=0;R^2\varepsilon(\vec{p},h)=1(1+1)\varepsilon(\vec{p},h)$

推论2.1.2.
$$\begin{cases}\lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i\\-1\\0\end{bmatrix}\\ \lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},0)=\begin{bmatrix}0\\0\\-i\end{bmatrix}\\ \lambda_m(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i\\-1\\0\end{bmatrix}\end{cases}$$

推论2.1.3. $\varepsilon_a(\begin{bmatrix}0\\0\\|\vec{p}|\end{bmatrix},1):=\frac{1}{\sqrt{2}}[-1,-i,0,0]_a,\varepsilon_a(\begin{bmatrix}0\\0\\|\vec{p}|\end{bmatrix},0):=\frac{1}{m}[0,0,E,i|\vec{p}|]_a,\varepsilon_a(\begin{bmatrix}0\\0\\|\vec{p}|\end{bmatrix},-1):=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-i,0,0]_a$

推论2.1.4. $\varepsilon_a(\vec{0},1):=\frac{1}{\sqrt{2}}[-1,-i,0,0]_a,\varepsilon_a(\vec{0},0):=[0,0,1,0]_a,\varepsilon_a(\vec{0},-1):=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-i,0,0]_a$

推论2.1.5. $\begin{cases}(R_x+iR_y)\varepsilon_a(\vec{0},h)=\varepsilon_a(\vec{0},h+1),-1\le h<1;(R_x+iR_y)\varepsilon_a(\vec{0},1)=0\\(R_x-iR_y)\varepsilon_a(\vec{0},h)=\varepsilon_a(\vec{0},h-1),-1<h\le 1;(R_x-iR_y)\varepsilon_a(\vec{0},-1)=0\end{cases}$

2.2 z轴方向的有质量矢量自旋基

推论2.2.1.

$$L_{\vec{v}}=e^{-ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot L}=1-\gamma_v(\vec{v}\cdot L)+\frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec{v}\cdot L)^2=\gamma_v(1-\vec{v}\cdot L)-\frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec{v}\cdot R)^2,L_{\vec{v}}L_{-\vec{v}}=L_{-\vec{v}}L_{\vec{v}}=I$$

定理2.2.1. $\varepsilon(\begin{bmatrix}0\\0\\|\vec{p}|\end{bmatrix},h)=e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}\varepsilon(\vec{0},h)$

证明: $e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}\varepsilon(\vec{0},1)=\frac{1}{m}\begin{bmatrix}m&0&0&0\\0&m&0&0\\0&0&E&-i|\vec{p}|\\0&0&i|\vec{p}|&E\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}[-1,-i,0,0]^T=\frac{1}{\sqrt{2}}[-1,-i,0,0]^T$ □

证明: $e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}\varepsilon(\vec{0},0)=\frac{1}{m}\begin{bmatrix}m&0&0&0\\0&m&0&0\\0&0&E&-i|\vec{p}|\\0&0&i|\vec{p}|&E\end{bmatrix}[0,0,1,0]^T=\frac{1}{m}[0,0,E,i|\vec{p}|]^T$ □

证明: $e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}\varepsilon(\vec{0},-1)=\frac{1}{m}\begin{bmatrix}m&0&0&0\\0&m&0&0\\0&0&E&-i|\vec{p}|\\0&0&i|\vec{p}|&E\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-i,0,0]^T=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-i,0,0]^T$ □

定理2.2.2.

$$\begin{cases}e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}R_xe^{ln[\gamma_v(1+v)]L_z}=\frac{E}{m}R_x-\frac{i|\vec{p}|}{m}L_y\\e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}R_ye^{ln[\gamma_v(1+v)]L_z}=\frac{E}{m}R_y+\frac{i|\vec{p}|}{m}L_x\\e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}R_ze^{ln[\gamma_v(1+v)]L_z}=R_z\end{cases}$$

证明: $e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}R_ze^{ln[\gamma_v(1+v)]L_z}$

$$=[1-\gamma_vvL_z+(\gamma_v-1)L_z^2]R_z[1+\gamma_vvL_z+(\gamma_v-1)L_z^2]$$
$$=\frac{1}{m^2}[m-|\vec{p}|L_z+(E-m)L_z^2]R_z[m+|\vec{p}|L_z+(E-m)L_z^2]$$
$$=\frac{1}{m^2}\begin{bmatrix}m&0&0&0\\0&m&0&0\\0&0&E&-i|\vec{p}|\\0&0&i|\vec{p}|&E\end{bmatrix}R_z\begin{bmatrix}m&0&0&0\\0&m&0&0\\0&0&E&i|\vec{p}|\\0&0&-i|\vec{p}|&E\end{bmatrix}=R_z$$ □

证明: $e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}R_xe^{ln[\gamma_v(1+v)]L_z}$

$$=\frac{1}{m^2}\begin{bmatrix}m&0&0&0\\0&m&0&0\\0&0&E&-i|\vec{p}|\\0&0&i|\vec{p}|&E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m&0&0&0\\0&m&0&0\\0&0&E&i|\vec{p}|\\0&0&-i|\vec{p}|&E\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{m^2}\begin{bmatrix}m&0&0&0\\0&m&0&0\\0&0&E&-i|\vec{p}|\\0&0&i|\vec{p}|&E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-iE&|\vec{p}|\\0&im&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{m}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-iE&|\vec{p}|\\0&iE&0&0\\0&-|\vec{p}|&0&0\end{bmatrix}=\frac{E}{m}R_x-\frac{i|\vec{p}|}{m}L_y$$ □

证明: $e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}R_ye^{ln[\gamma_v(1+v)]L_z}$

$$=\frac{1}{m^2}\begin{bmatrix}m&0&0&0\\0&m&0&0\\0&0&E&-i|\vec{p}|\\0&0&i|\vec{p}|&E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m&0&0&0\\0&m&0&0\\0&0&E&i|\vec{p}|\\0&0&-i|\vec{p}|&E\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{m^2}\begin{bmatrix}m&0&0&0\\0&m&0&0\\0&0&E&-i|\vec{p}|\\0&0&i|\vec{p}|&E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&iE&-|\vec{p}|\\0&0&0&0\\-im&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{m}\begin{bmatrix}0&0&iE&-|\vec{p}|\\0&0&0&0\\-iE&0&0&0\\|\vec{p}|&0&0&0\end{bmatrix}=\frac{E}{m}R_y+\frac{i|\vec{p}|}{m}L_x$$ □

推论2.2.2.

$$\begin{cases}e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}(R_x+iR_y)e^{ln[\gamma_v(1+v)]L_z}=\frac{E}{m}(R_x+iR_y)-\frac{|\vec{p}|}{m}(L_x+iL_y)\\e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}(R_x-iR_y)e^{ln[\gamma_v(1+v)]L_z}=\frac{E}{m}(R_x-iR_y)+\frac{|\vec{p}|}{m}(L_x-iL_y)\\e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}R_ze^{ln[\gamma_v(1+v)]L_z}=R_z\end{cases}$$

2.3 $e^{i\vec{\omega}\cdot R}Re^{-i\vec{\omega}\cdot R}$的性质

引理2.3.1. $e^{i\vec{\omega}\cdot R}=1+i(R\times\hat{p})_z-(R\times\hat{p})_z^2/(1+\hat{p}_z)=1+i(R_x\hat{p}_y-R_y\hat{p}_x)-(R_x\hat{p}_y-R_y\hat{p}_x)_z^2/(1+\hat{p}_z)$
$$=1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)$$

定理2.3.1. $e^{i\vec{\omega}\cdot R}R_xe^{-i\vec{\omega}\cdot R}=R_x-\frac{\hat{p}_x}{1+\hat{p}_z}(R\cdot\hat{p}+R_z),e^{i\vec{\omega}\cdot R}R_ye^{-i\vec{\omega}\cdot R}=R_y-\frac{\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(R\cdot\hat{p}+R_z),e^{i\vec{\omega}\cdot R}R_ze^{-i\vec{\omega}\cdot R}=R\cdot\hat{p}$

证明：$e^{i\vec{\omega}\cdot R}R_xe^{-i\vec{\omega}\cdot R}$
$$=[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & \hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & \hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]$$
$$=[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)][\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0&0\\ i(1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & i(1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & -i+i\hat{p}_z^2 & 0\\ i\hat{p}_y\hat{p}_x & i\hat{p}_y^2 & i\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]$$
$$=R_x-i\begin{bmatrix}0&0&0&0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & -1+\hat{p}_z^2 & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & \hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)-i\begin{bmatrix}0 & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & -\hat{p}_x\hat{p}_y & 0\\ 0 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & -\hat{p}_y^2 & 0\\ 0 & 1-\hat{p}_z^2 & -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)$$
$$+\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}i\begin{bmatrix}0&0&0&0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & -1+\hat{p}_z^2 & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & \hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)^2]$$
$$=R_x-i\begin{bmatrix}0 & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & -\hat{p}_x\hat{p}_y & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & 0 & -\hat{p}_x^2-2\hat{p}_y^2 & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_x^2+2\hat{p}_y^2 & 0 & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)-i\begin{bmatrix}0&0&2\hat{p}_x\hat{p}_y&0\\ 0&0&2\hat{p}_y^2&0\\ -2\hat{p}_x\hat{p}_y & -2\hat{p}_y^2 & 0&0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)$$
$$=R_x-i\begin{bmatrix}0 & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & \hat{p}_x\hat{p}_y & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & 0 & -\hat{p}_x^2 & 0\\ -\hat{p}_x\hat{p}_y & \hat{p}_x^2 & 0 & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)$$
$$=R_x-\frac{\hat{p}_x}{1+\hat{p}_z}(R\cdot\hat{p}+R_z)$$
□

证明：$e^{i\vec{\omega}\cdot R}R_ye^{-i\vec{\omega}\cdot R}$
$$=[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & \hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & \hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]$$
$$=[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)][\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-i(1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & -i(1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & i-i\hat{p}_z^2 & 0\\ 0&0&0&0\\ -i\hat{p}_x^2 & -i\hat{p}_x\hat{p}_y & -i\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]$$
$$=R_y-i\begin{bmatrix}-(1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0&0&0&0\\ -\hat{p}_x^2 & -\hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]-i\begin{bmatrix}\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0 & \hat{p}_x^2 & 0\\ \hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0 & \hat{p}_y\hat{p}_x & 0\\ -1+\hat{p}_z^2 & 0 & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)$$
$$-i\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & -1+\hat{p}_z^2 & 0\\ 0&0&0&0\\ \hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & \hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)^2$$
$$=R_y-i\begin{bmatrix}0 & -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 2\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2 & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 0 & \hat{p}_x\hat{p}_y & 0\\ -2\hat{p}_x^2-\hat{p}_y^2 & -\hat{p}_x\hat{p}_y & 0 & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]-i\begin{bmatrix}0&0&-2\hat{p}_x^2&0\\ 0&0&-2\hat{p}_x\hat{p}_y&0\\ 2\hat{p}_x^2 & 2\hat{p}_x\hat{p}_y & 0&0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)$$
$$=R_y-i\begin{bmatrix}0 & -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & \hat{p}_y^2 & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 0 & -\hat{p}_x\hat{p}_y & 0\\ -\hat{p}_y^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & 0 & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]$$
$$=R_y-\frac{\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(R\cdot\hat{p}+R_z)$$
□

证明：$e^{i\vec{\omega}\cdot R}R_ze^{-i\vec{\omega}\cdot R}$
$$=[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & \hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & \hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]$$
$$=[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)][\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-i\hat{p}_y\hat{p}_x & -i\hat{p}_y^2 & -i\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ i\hat{p}_x^2 & i\hat{p}_x\hat{p}_y & i\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]$$
$$=R_z-i\begin{bmatrix}-\hat{p}_y\hat{p}_x & -\hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & \hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)$$

$$-i\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & \hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ -\hat{p}_x^2 & -\hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)^2$$

$$=R_z-i\begin{bmatrix}0 & -\hat{p}_x^2-\hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2 & 0 & \hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)$$

$$=R\cdot\hat{p}$$ □

2.4 $e^{i\vec{\omega}\cdot R}Le^{-i\vec{\omega}\cdot R}$的性质

定理2.4.1. $e^{i\vec{\omega}\cdot R}L_xe^{-i\vec{\omega}\cdot R}=L_x-\frac{\hat{p}_x}{1+\hat{p}_z}(L\cdot\hat{p}+L_z),e^{i\vec{\omega}\cdot R}L_ye^{-i\vec{\omega}\cdot R}=L_y-\frac{\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(L\cdot\hat{p}+L_z),e^{i\vec{\omega}\cdot R}L_ze^{-i\vec{\omega}\cdot R}=L\cdot\hat{p}$

证明: $e^{i\vec{\omega}\cdot R}L_xe^{-i\vec{\omega}\cdot R}$

$$=[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & \hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & \hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]$$

$$=[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)][\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & \hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]$$

$$=L_x+i\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & \hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]-i\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \hat{p}_x^2\\ 0 & 0 & 0 & \hat{p}_y\hat{p}_x\\ 0 & 0 & 0 & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]$$

$$=L_x-i\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \hat{p}_x^2\\ 0 & 0 & 0 & \hat{p}_y\hat{p}_x\\ 0 & 0 & 0 & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x\\ -\hat{p}_x^2 & -\hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]$$

$$=L_x-\frac{\hat{p}_x}{1+\hat{p}_z}(L\cdot\hat{p}+L_z)$$ □

证明: $e^{i\vec{\omega}\cdot R}L_ye^{-i\vec{\omega}\cdot R}$

$$=[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -i & 0 & 0\end{bmatrix}[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & \hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & \hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]$$

$$=[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)][\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -i & 0 & 0\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & \hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]$$

$$=L_y+i\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & \hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]-i\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \hat{p}_x\hat{p}_y\\ 0 & 0 & 0 & \hat{p}_y^2\\ 0 & 0 & 0 & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)$$

$$=L_y-i\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \hat{p}_x\hat{p}_y\\ 0 & 0 & 0 & \hat{p}_y^2\\ 0 & 0 & 0 & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y\\ -\hat{p}_y\hat{p}_x & -\hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)$$

$$=L_y-\frac{\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(L\cdot\hat{p}+L_z)$$ □

证明: $e^{i\vec{\omega}\cdot R}L_ze^{-i\vec{\omega}\cdot R}$

$$=[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & -i & 0\end{bmatrix}[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & \hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & \hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]$$

$$=[1-\begin{bmatrix}\hat{p}_x^2 & \hat{p}_x\hat{p}_y & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z) & 0\\ \hat{p}_y\hat{p}_x & \hat{p}_y^2 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z) & 0\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)][\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & -i & 0\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)]$$

$$=L_z+i\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & -(1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & 1-\hat{p}_z^2 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)-i\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z)\\ 0 & 0 & 0 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z)\\ 0 & 0 & 0 & 1-\hat{p}_z^2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)$$

$$=L_z-i\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -\hat{p}_x(1+\hat{p}_z)\\ 0 & 0 & 0 & -\hat{p}_y(1+\hat{p}_z)\\ 0 & 0 & 0 & 1-\hat{p}_z^2\\ (1+\hat{p}_z)\hat{p}_x & (1+\hat{p}_z)\hat{p}_y & -1+\hat{p}_z^2 & 0\end{bmatrix}/(1+\hat{p}_z)$$

$$=L\cdot\hat{p}$$ □

2.5 $\varepsilon(\vec{p},h)$的升降算符

定理2.5.1. $\varepsilon(\vec{p},h)=e^{i\vec{\omega}\cdot R}e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}\varepsilon(\vec{0},h)=[i\lambda_m(\hat{p},1),0],[\frac{E}{m}i\lambda_m(\hat{p},0),\frac{i|\vec{p}|}{m}],[i\lambda_m(\hat{p},-1),0]$

推论2.5.1.

$$\begin{cases} e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}R_x e^{ln[\gamma_v(1+v)]L_z}e^{-i\vec{\omega}\cdot R}=\frac{E}{m}[R_x-\frac{\hat{p}_x}{1+\hat{p}_z}(R\cdot\hat{p}+R_z)]-\frac{i|\vec{p}|}{m}[L_y-\frac{\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(L\cdot\hat{p}+L_z)] \\ e^{i\vec{\omega}\cdot R}e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}R_y e^{ln[\gamma_v(1+v)]L_z}e^{-i\vec{\omega}\cdot R}=\frac{E}{m}[R_y-\frac{\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(R\cdot\hat{p}+R_z)]+\frac{i|\vec{p}|}{m}[L_x-\frac{\hat{p}_x}{1+\hat{p}_z}(L\cdot\hat{p}+L_z)] \\ e^{i\vec{\omega}\cdot R}e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}R_z e^{ln[\gamma_v(1+v)]L_z}e^{-i\vec{\omega}\cdot R}=R\cdot\hat{p} \end{cases}$$

定义2.5.1.

$$\begin{cases} \hat{J}_x(\vec{p},1;R,L):=\frac{E}{m}[R_x-\frac{\hat{p}_x}{1+\hat{p}_z}(R\cdot\hat{p}+R_z)]-\frac{i|\vec{p}|}{m}[L_y-\frac{\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(L\cdot\hat{p}+L_z)] \\ \hat{J}_y(\vec{p},1;R,L):=\frac{E}{m}[R_y-\frac{\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(R\cdot\hat{p}+R_z)]+\frac{i|\vec{p}|}{m}[L_x-\frac{\hat{p}_x}{1+\hat{p}_z}(L\cdot\hat{p}+L_z)] \\ \hat{J}_z(\vec{p},1;R,L):=R\cdot\hat{p} \end{cases}$$

推论2.5.2. $[\hat{J}_i(\vec{p},1;R,L),\hat{J}_j(\vec{p},1;R,L)]=\varepsilon_{ij}{}^k\hat{J}_k(\vec{p},1;R,L)$

推论2.5.3.

$$\begin{cases} \hat{J}_+(\vec{p},1;R,L):=e^{i\vec{\omega}\cdot R}e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}(R_x+iR_y)e^{ln[\gamma_v(1+v)]L_z}e^{-i\vec{\omega}\cdot R} \\ =\frac{E}{m}[(R_x+iR_y)-\frac{\hat{p}_x+i\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(R\cdot\hat{p}+R_z)]-\frac{|\vec{p}|}{m}[(L_x+iL_y)-\frac{\hat{p}_x+i\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(L\cdot\hat{p}+L_z)] \\ \hat{J}_-(\vec{p},1;R,L):=e^{i\vec{\omega}\cdot R}e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}(R_x-iR_y)e^{ln[\gamma_v(1+v)]L_z}e^{-i\vec{\omega}\cdot R} \\ =\frac{E}{m}[(R_x-iR_y)-\frac{\hat{p}_x-i\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(R\cdot\hat{p}+R_z)]+\frac{|\vec{p}|}{m}[(L_x-iL_y)-\frac{\hat{p}_x-i\hat{p}_y}{1+\hat{p}_z}(L\cdot\hat{p}+L_z)] \\ \hat{J}_z(\vec{p},1;R,L):=e^{i\vec{\omega}\cdot R}e^{-ln[\gamma_v(1+v)]L_z}R_z e^{ln[\gamma_v(1+v)]L_z}e^{-i\vec{\omega}\cdot R}=R\cdot\hat{p} \end{cases}$$

推论2.5.4.

$$\begin{cases} \hat{J}_+(\vec{p},1;R,L)\varepsilon(\vec{p},h)=\sqrt{2-h(h+1)}\varepsilon(\vec{p},h+1),-1\le h\le 1 \\ \hat{J}_-(\vec{p},1;R,L)\varepsilon_(\vec{p},h)=\sqrt{2-h(h+1)}\varepsilon(\vec{p},h-1),-1\le h\le 1 \\ \hat{J}_z(\vec{p},1;R,L)\varepsilon(\vec{p},h)=h\varepsilon(\vec{p},h),-1\le h\le 1 \end{cases}$$

2.6 定义-自旋基分解:$n=(n-1)\oplus 1$

定义2.6.1. $-n\le h\le n$

$$\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h):=\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_c(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_c(\vec{p},-1)$$

定义2.6.2. $-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}$

$$\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{n+1/2+h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

推论2.6.1.

$$\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\bar{\varepsilon}_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_c(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\bar{\varepsilon}_c(\vec{p},-1)$$

推论2.6.2.

$$\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=1}^{-1}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1+h'}C_{n-h}^{1-h'}}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h-h')\varepsilon_c(\vec{p},h'),\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=1}^{-1}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1+h'}C_{n-h}^{1-h'}}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h-h')\bar{\varepsilon}_c(\vec{p},h')$$

2.7 推论-$\varepsilon_{a\cdot\cdot bc}(\vec{p},h)$是自旋本征态

定义2.7.1. $\Omega(n;R):=R\otimes I_{4^{n-1}}+I_4\otimes R\otimes I_{4^{n-2}}+\cdot\cdot+I_{4^{n-1}}\otimes R$

定理2.7.1. $[\Omega(n;R)\cdot\hat{p}]\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{p},h)=h\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{p},h),-n\le h\le n$

证明: $[\Omega(n;R)\cdot\hat{p}]\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{p},h)$

$=[\Omega(n-1;R)\otimes I_4+I_{4^{n-1}}\otimes R]\cdot\hat{p}$

$$[\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},-1)]$$

$$= [\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}} h\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},1) + \frac{\sqrt{C_{n+h}^1 C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}} h\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},0) + \frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}} h\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},-1)]$$

$$= h\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{p},h), -n \le h \le n$$ □

定理2.7.2. $\Omega^2(n;R)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{p},h) = n(n+1)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{p},h)$

以上定理可以用全对称的表象变换方法可以很容易得到证明？好像不容易，但可以用下面章节的上升和下降算符方法证明($\hat{p}_z = 1$才成立)。由上可知$\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)$是自旋本征态，所以展开系数是CG 系数，实际计算结果也表明确实就是对应的CG 系数。从而也提供了一种规范、统一、直观和完整的计算CG系数新方法。

2.8 Klein-Gordon方程自旋基的升降算符

定义2.8.1.

$$\begin{cases} \hat{J}(\vec{p},n;R,L) := \underbrace{\hat{J}(\vec{p},1;R,L)\otimes I_4\otimes\cdot\cdot\otimes I_4}_{n} + \underbrace{I_4\otimes\hat{J}(\vec{p},1;R,L)\otimes\cdot\cdot\otimes I_4}_{n} + \cdots + \underbrace{I_4\otimes\cdot\cdot\otimes I_4\otimes\hat{J}(\vec{p},1;R,L)}_{n} \\ \hat{Q}(\vec{p},n;R,L) := \underbrace{\hat{Q}(\vec{p},1;R,L)\otimes I_4\otimes\cdot\cdot\otimes I_4}_{n} + \underbrace{I_4\otimes\hat{Q}(\vec{p},1;R,L)\otimes\cdot\cdot\otimes I_4}_{n} + \cdots + \underbrace{I_4\otimes\cdot\cdot\otimes I_4\otimes\hat{Q}(\vec{p},1;R,L)}_{n} \end{cases}$$

推论2.8.1. $[\hat{J}_i(\vec{p},n;R,L), \hat{J}_j(\vec{p},n;R,L)] = {\varepsilon_{ij}}^k \hat{J}_k(\vec{p},n;R,L)$

定理2.8.1. $\hat{J}_+(\vec{p},n;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{p},h) = \sqrt{n(n+1)-h(h+1)}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{p},h+1), -n \le h \le n$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$n' = 1$时成立：

$\hat{J}_+(\vec{p},1;R,L)\varepsilon(\vec{p},h) = \sqrt{2-h(h+1)}\varepsilon(\vec{p},h+1), -1 \le h \le 1$

第二步：假设$n' = n-1$时成立：

$\hat{J}_+(\vec{p},n-1;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h) = \sqrt{(n-1)n-h(h+1)}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h+1), -n+1 \le h \le n-1$

第三步：$n' = n$时： $-n \le h \le n, \hat{J}_+(\vec{p},n;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{p},h)$

$$= \frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}[\hat{J}_+(\vec{p},n-1;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)]\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},1) + \frac{\sqrt{C_{n+h}^1 C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}[\hat{J}_+(\vec{p},n-1;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h)]\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},0)$$

$$+ \frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}[\hat{J}_+(\vec{p},n-1;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)]\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},-1) + \frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\hat{J}_+(\vec{p},\tfrac{1}{2};R,L)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},1)$$

$$+ \frac{\sqrt{C_{n+h}^1 C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h)\hat{J}_+(\vec{p},\tfrac{1}{2};R,L)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},0) + \frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\hat{J}_+(\vec{p},\tfrac{1}{2};R,L)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},-1)$$

$$= \frac{\sqrt{C_{n+h}^2}\sqrt{(n-1)n-(h-1)h}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},1) + \frac{\sqrt{C_{n+h}^1 C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h)\sqrt{2}\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},1)$$

$$+ \frac{\sqrt{C_{n+h}^1 C_{n-h}^1}\sqrt{(n-1)n-h(h+1)}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},0) + \frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\sqrt{2}\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},0)$$

$$+ \frac{\sqrt{C_{n-h}^2}\sqrt{(n-1)n-(h+1)(h+2)}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h+2)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},-1)$$

$$= \frac{\sqrt{n(n+1)-h(h+1)}\sqrt{C_{n+h+1}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},1) + \frac{\sqrt{n(n+1)-h(h+1)}\sqrt{C_{n+h+1}^1 C_{n-h-1}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},0)$$

$$+ \frac{\sqrt{n(n+1)-h(h+1)}\sqrt{C_{n-h-1}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h+2)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},-1)$$

$$= \sqrt{n(n+1)-h(h+1)}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{p},h+1)$$

此步证明了$n' = n$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

定理2.8.2. $\hat{J}_-(\vec{p},n;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{p},h)=\sqrt{n(n+1)-h(h-1)}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{p},h-1),-n\le h\le n$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$n'=1$时成立：

$\hat{J}_-(\vec{p},1;R,L)\varepsilon(\vec{p},h)=\sqrt{2-h(h-1)}\varepsilon(\vec{p},h-1),-1\le h\le 1$

第二步：假设$n'=n-1$时成立：

$\hat{J}_-(\vec{p},n-1;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h)=\sqrt{(n-1)n-h(h-1)}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h-1),-n+1\le h\le n-1$

第三步：$n'=n$时：$-n\le h\le n,\hat{J}_-(\vec{p},n;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{p},h)$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\sqrt{C^2_{n+h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}[\hat{J}_-(\vec{p},n-1;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)]\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C^1_{n+h}C^1_{n-h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}[\hat{J}_-(\vec{p},n-1;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h)]\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},0)\\
&+\frac{\sqrt{C^2_{n-h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}[\hat{J}_-(\vec{p},n-1;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)]\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},-1)+\frac{\sqrt{C^2_{n+h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\hat{J}_-(\vec{p},\tfrac{1}{2};R,L)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},1)\\
&+\frac{\sqrt{C^1_{n+h}C^1_{n-h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h)\hat{J}_-(\vec{p},\tfrac{1}{2};R,L)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C^2_{n-h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\hat{J}_-(\vec{p},\tfrac{1}{2};R,L)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},-1)\\
&=\frac{\sqrt{C^2_{n+h}}\sqrt{(n-1)n-(h-1)(h-2)}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h-2)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},1)\\
&+\frac{\sqrt{C^1_{n+h}C^1_{n-h}}\sqrt{(n-1)n-h(h-1)}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C^2_{n+h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\sqrt{2}\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},0)\\
&+\frac{\sqrt{C^2_{n-h}}\sqrt{(n-1)n-(h+1)h}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},-1)+\frac{\sqrt{C^1_{n+h}C^1_{n-h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h)\sqrt{2}\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},-1)\\
&=\frac{\sqrt{n(n+1)-h(h-1)}\sqrt{C^2_{n+h-1}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h-2)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{n(n+1)-h(h-1)}\sqrt{C^1_{n+h-1}C^1_{n-h+1}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},0)\\
&+\frac{\sqrt{n(n+1)-h(h-1)}\sqrt{C^2_{n-h+1}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_{\otimes c}(\vec{p},-1)\\
&=\sqrt{n(n+1)-h(h-1)}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{p},h-1)
\end{aligned}
$$

此步证明了$n'=n$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

推论2.8.2. $\hat{J}^2(\vec{p},n;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{p},h)=n(n+1)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{p},h),-n\le h\le n$

推论2.8.3.

$$
\begin{cases}
\hat{J}_+(\vec{p},n;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes b\otimes ..}_{n}}(\vec{p},h)=\sqrt{n(n+1)-h(h+1)}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes b\otimes ..}_{n}}(\vec{p},h+1),-n\le h\le n\\
\hat{J}_-(\vec{p},n;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes b\otimes ..}_{n}}(\vec{p},h)=\sqrt{n(n+1)-h(h-1)}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes b\otimes ..}_{n}}(\vec{p},h-1),-n\le h\le n\\
\hat{J}_z(\vec{p},n;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes b\otimes ..}_{n}}(\vec{p},h)=h\varepsilon_{\underbrace{a\otimes b\otimes ..}_{n}}(\vec{p},h),-n\le h\le n
\end{cases}
$$

推论2.8.4.

$$
\begin{cases}
\hat{J}^2(\vec{p},n;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes b\otimes ..}_{n}}(\vec{p},h)=n(n+1)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes b\otimes ..}_{n}}(\vec{p},h),\hat{J}^2(\vec{p},*1;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes b\otimes ..}_{n}}(\vec{p},h)=2\varepsilon_{\underbrace{a\otimes b\otimes ..}_{n}}(\vec{p},h)\\
\hat{J}_z(\vec{p},n;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes b\otimes ..}_{n}}(\vec{p},h)=h\varepsilon_{\underbrace{a\otimes b\otimes ..}_{n}}(\vec{p},h),\hat{J}^2=\hat{J}_z^2+\frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_-+\hat{J}_+\hat{J}_-),-n\le h\le n\\
\delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\,..}_{n}}(\vec{p},h)=0,p^a\varepsilon_{\underbrace{ab\,..}_{n}}(\vec{p},h)=0,\varepsilon_{\underbrace{ab\,..}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{n!}\varepsilon_{\underbrace{\{ab\,..\}}_{n}}(\vec{p},h)
\end{cases}
$$

引理2.8.1. $(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)=(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)=4im\delta^b_a$

定理2.8.3. $\hat{J}(\vec{p},s;R,L)=\frac{1}{(i4m)^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\otimes\xi_\varsigma\otimes}\cdot\cdot}^{n}\hat{J}(\vec{p},s;\gamma_a)\underbrace{\mathbb{X}^{a'}_{\lambda'_\varsigma\otimes\mu'_\varsigma\otimes}(p)\mathbb{X}^{b'}_{\eta'_\varsigma\otimes\xi'_\varsigma\otimes}(p)\cdot\cdot}_{n}$

证明: $\hat{J}_+(\vec{p},s;\gamma_a)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)=\sqrt{s(s+1)-h(h+1)}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h+1)$

$\Rightarrow\frac{1}{(i\sqrt{2})^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\otimes\xi_\varsigma\otimes}\cdot\cdot}^{n}\hat{J}_+(\vec{p},s;\gamma_a)\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^n}\underbrace{\mathbb{X}^{a'}_{\lambda'_\varsigma\otimes\mu'_\varsigma\otimes}(p)\mathbb{X}^{b'}_{\eta'_\varsigma\otimes\xi'_\varsigma\otimes}(p)\cdot\cdot}_{n}\varepsilon_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h)$

$=\sqrt{s(s+1)-h(h+1)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+1)$

$\Rightarrow\hat{J}_+(\vec{p},s;R,L)=\frac{1}{(i4m)^n}\overbrace{(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\otimes\xi_\varsigma\otimes}\cdot\cdot}^{n}\hat{J}_+(\vec{p},s;\gamma_a)\underbrace{\mathbb{X}^{a'}_{\lambda'_\varsigma\otimes\mu'_\varsigma\otimes}(p)\mathbb{X}^{b'}_{\eta'_\varsigma\otimes\xi'_\varsigma\otimes}(p)\cdot\cdot}_{n}$ □

2.9 推论-$\varepsilon_{ab\cdot\cdot c}(\vec{p},h)$的正交性

定义2.9.1. $\bar{\varepsilon}^a(\vec{p},h)\varepsilon_a(\vec{p},h')=\delta_{hh'},-1\le h',h\le 1$

定义2.9.2. $\sum\limits_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_b(\vec{p},h)=\delta_{ab}+\frac{p_ap_b}{m^2}$

定理2.9.1. $\bar{\varepsilon}^{\overbrace{a\cdot\cdot bc}^{n}}(\vec{p},h')\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)=\delta_{hh'},-n\le h',h\le n$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$n'=1$时成立：

$\bar{\varepsilon}^a(\vec{p},h')\varepsilon_a(\vec{p},h)=\delta_{hh'},-1\le h',h\le 1$

第二步：假设$n'=n-1$时成立：

$\bar{\varepsilon}^{\overbrace{a\cdot\cdot b}^{n-1}}(\vec{p},h')\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h)=\delta_{hh'},-n+1\le h',h\le n-1$

第三步：$n'=n$时：$\bar{\varepsilon}^{\overbrace{a\cdot\cdot bc}^{n}}(\vec{p},h')\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h),-n\le h',h\le n$

$=[\frac{\sqrt{C^2_{n+h'}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\bar{\varepsilon}^{\overbrace{a\cdot\cdot b}^{n-1}}(\vec{p},h'-1)\bar{\varepsilon}^c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C^1_{n+h'}C^1_{n-h'}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\bar{\varepsilon}^{\overbrace{a\cdot\cdot b}^{n-1}}(\vec{p},h')\bar{\varepsilon}^c(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C^2_{n-h'}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\bar{\varepsilon}^{\overbrace{a\cdot\cdot b}^{n-1}}(\vec{p},h'+1)\bar{\varepsilon}^c(\vec{p},-1)]$

$[\frac{\sqrt{C^2_{n+h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C^1_{n+h}C^1_{n-h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_c(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C^2_{n-h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_c(\vec{p},-1)]$

$=\frac{\sqrt{C^2_{n+h'}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\frac{\sqrt{C^2_{n+h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\delta_{hh'}+\frac{\sqrt{C^1_{n+h'}C^1_{n-h'}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\frac{\sqrt{C^1_{n+h}C^1_{n-h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\delta_{hh'}+\frac{\sqrt{C^2_{n-h'}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\frac{\sqrt{C^2_{n-h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\delta_{hh'}=\delta_{hh'}$

此步证明了$n'=n$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

2.10 推论-$p^a\varepsilon_{ab\cdot\cdot c}(\vec{p},h)$的零性

定义2.10.1. $p^a\varepsilon_a(\vec{p},h)=0,-1\le h',h\le 1$

定理2.10.1. $p^a\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)=0,-n\le h\le n$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$n'=1$时成立：

$p^a\varepsilon_a(\vec{p},h)=\delta_{hh'},-1\le h\le 1$

第二步：假设$n'=n-1$时成立：

$p^a\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h)=0,-n+1\le h\le n-1$

第三步：$n'=n$时：$p^a\varepsilon_{\underbrace{a\cdots bc}_{n}}(\vec{p},h),-n\le h\le n$

$=p^a[\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots b}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_c(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_c(\vec{p},-1)]$

$=0+0+0=0$

此步证明了$n'=n$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

2.11 推论-$\varepsilon_{ab\cdots c}(\vec{p},h)$的无迹性

定义2.11.1. $\bar{\varepsilon}_a(\vec{p},h)=(-1)^h\varepsilon_a(\vec{p},-h),-1\le h\le 1$

引理2.11.1. $\delta^{ab}\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)=0,-2\le h\le 2$

证明: $\delta^{ab}\varepsilon_{ab}(\vec{p},h),-2\le h\le 2$

$=\delta^{ab}[\frac{\sqrt{C_{2+h}^2}}{\sqrt{C_4^2}}\varepsilon_a(\vec{p},h-1)\varepsilon_b(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{2+h}^1C_{2-h}^1}}{\sqrt{C_4^2}}\varepsilon_a(\vec{p},h)\varepsilon_b(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{2-h}^2}}{\sqrt{C_4^2}}\varepsilon_a(\vec{p},h+1)\varepsilon_b(\vec{p},-1)]$

$$=\begin{cases}\delta^{ab}\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},1)=0;h=2\\ \delta^{ab}\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon_b(\vec{p},-1)=0;h=-2\\ \delta^{ab}[\frac{\sqrt{C_3^2}}{\sqrt{C_4^2}}\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_3^1C_1^1}}{\sqrt{C_4^2}}\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},0)]=0;h=1\\ \delta^{ab}[\frac{\sqrt{C_3^1C_1^1}}{\sqrt{C_4^2}}\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_3^2}}{\sqrt{C_4^2}}\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},-1)]=0;h=-1\\ \delta^{ab}[\frac{\sqrt{C_2^2}}{\sqrt{C_4^2}}\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon_b(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_2^1C_2^1}}{\sqrt{C_4^2}}\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_2^2}}{\sqrt{C_4^2}}\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},-1)]=0;h=0\end{cases}$$ □

定理2.11.1. $\delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots c}_{n}}(\vec{p},h)=0,n\ge 2,-n\le h\le n$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$n'=2$时成立：

$\delta^{ab}\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)=0,-2\le h\le 2$

第二步：假设$2\le n'=n-1$时成立：

$\delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n-1}}(\vec{p},h)=0,-n+1\le h\le n-1$

第三步：$3\le n'=n$时：$\delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots c}_{n}}(\vec{p},h),-n\le h\le n$

$=\delta^{ab}[\frac{\sqrt{C_{n+h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^1C_{n-h}^1}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_c(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^2}}{\sqrt{C_{2n}^2}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_c(\vec{p},-1)]$

$=0+0+0=0$

此步证明了$n'=n$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

2.12 推论-自旋基分解:$2=1\oplus 1$

推论2.12.1. $\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)=\sum_{h'=1}^{-1}\frac{\sqrt{C_{2+h}^{1+h'}C_{2-h}^{1-h'}}}{\sqrt{C_4^2}}\varepsilon_a(\vec{p},h-h')\varepsilon_b(\vec{p},h')$

$$=\begin{cases}\varepsilon_{ab}(\vec{p},2)=\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},1)\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},1)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},0)+\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},1)]\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},0)=\frac{1}{\sqrt{6}}[\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},-1)+\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon_b(\vec{p},1)+2\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},0)]\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon_b(\vec{p},0)+\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},-1)]\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},-2)=\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon_b(\vec{p},-1)\end{cases}$$

推论2.12.2. $\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)=\varepsilon_{ba}(\vec{p},h),-2\le h\le 2$

2.13 推论-自旋基分解:$n=(n-2)\oplus 2$

定理2.13.1. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=2}^{-2}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{2+h'}C_{n-h}^{2-h'}}}{\sqrt{C_{2n}^{4}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h-h')\varepsilon_{bc}(\vec{p},h')$

证明: $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)$

$$=\frac{\sqrt{C_{n+h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_c(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1}C_{n-h}^{1}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_c(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_c(\vec{p},-1)$$

$$=\frac{\sqrt{C_{n+h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_c(\vec{p},1)$$
$$[\frac{\sqrt{C_{n+h-2}^{2}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h-2)\varepsilon_b(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h-2}^{1}C_{n-h}^{1}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_b(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h)\varepsilon_b(\vec{p},-1)]$$
$$+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1}C_{n-h}^{1}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_c(\vec{p},0)$$
$$[\frac{\sqrt{C_{n+h-1}^{2}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_b(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h-1}^{1}C_{n-h-1}^{1}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h)\varepsilon_b(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h-1}^{2}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_b(\vec{p},-1)]$$
$$+\frac{\sqrt{C_{n-h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_c(\vec{p},-1)$$
$$[\frac{\sqrt{C_{n+h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h)\varepsilon_b(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1}C_{n-h-2}^{1}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_b(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n-h-2}^{2}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h+2)\varepsilon_b(\vec{p},-1)]$$

$$=[\frac{\sqrt{C_{n+h-2}^{2}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h-2)\varepsilon_b(\vec{p},1)\varepsilon_c(\vec{p},1)$$
$$+[\frac{\sqrt{C_{n+h-1}^{2}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1}C_{n-h}^{1}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_b(\vec{p},1)\varepsilon_c(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n+h-2}^{1}C_{n-h}^{1}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_b(\vec{p},0)\varepsilon_c(\vec{p},1)]$$
$$+[\frac{\sqrt{C_{n+h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\frac{\sqrt{C_{n-h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h)\varepsilon_b(\vec{p},1)\varepsilon_c(\vec{p},-1)+\frac{\sqrt{C_{n-h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h)\varepsilon_b(\vec{p},-1)\varepsilon_c(\vec{p},1)]$$
$$+\frac{\sqrt{C_{n+h-1}^{1}C_{n-h-1}^{1}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1}C_{n-h}^{1}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h)\varepsilon_b(\vec{p},0)\varepsilon_c(\vec{p},0)$$
$$+[\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1}C_{n-h-2}^{1}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\frac{\sqrt{C_{n-h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_b(\vec{p},0)\varepsilon_c(\vec{p},-1)+\frac{\sqrt{C_{n-h-1}^{2}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1}C_{n-h}^{1}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_b(\vec{p},-1)\varepsilon_c(\vec{p},0)]$$
$$+\frac{\sqrt{C_{n-h-2}^{2}}}{\sqrt{C_{2n-2}^{2}}}\frac{\sqrt{C_{n-h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h+2)\varepsilon_b(\vec{p},-1)\varepsilon_c(\vec{p},-1)]$$

$$=\frac{1}{2!}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{4}C_{4}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{4}C_{4}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h-2)\varepsilon_{\{b}(\vec{p},1)\varepsilon_{c\}}(\vec{p},1)+\frac{1}{2!}\frac{\sqrt{C_{n-h}^{4}C_{4}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{4}C_{4}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h+2)\varepsilon_{\{b}(\vec{p},-1)\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)$$
$$+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{3}C_{n-h}^{1}C_{3}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{4}C_{4}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_{\{b}(\vec{p},1)\varepsilon_{c\}}(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1}C_{n-h}^{3}C_{3}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{4}C_{4}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_{\{b}(\vec{p},0)\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)$$
$$+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{2}C_{n-h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{4}C_{4}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h)\varepsilon_{\{b}(\vec{p},1)\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{2}C_{n-h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{4}C_{4}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h)\varepsilon_{\{b}(\vec{p},0)\varepsilon_{c\}}(\vec{p},0)$$

$$=\frac{\sqrt{C_{n+h}^{4}C_{n-h}^{0}}}{\sqrt{2^{2}C_{2n}^{4}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h-2)\varepsilon_{\{b}(\vec{p},1)\varepsilon_{c\}}(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{0}C_{n-h}^{4}}}{\sqrt{2^{2}C_{2n}^{4}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h+2)\varepsilon_{\{b}(\vec{p},-1)\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)$$
$$+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{3}C_{n-h}^{1}}}{\sqrt{2^{1}C_{2n}^{4}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_{\{b}(\vec{p},1)\varepsilon_{c\}}(\vec{p},0)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1}C_{n-h}^{3}}}{\sqrt{2^{1}C_{2n}^{4}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_{\{b}(\vec{p},0)\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)$$
$$+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{2}C_{n-h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{4}C_{4}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h)\varepsilon_{\{b}(\vec{p},1)\varepsilon_{c\}}(\vec{p},-1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{2}C_{n-h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{4}C_{4}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h)\varepsilon_{\{b}(\vec{p},0)\varepsilon_{c\}}(\vec{p},0)$$

$$=\frac{\sqrt{C_{n+h}^{4}C_{n-h}^{0}}}{\sqrt{C_{2n}^{4}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h-2)\varepsilon_{bc}(\vec{p},2)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{0}C_{n-h}^{4}}}{\sqrt{C_{2n}^{4}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h+2)\varepsilon_{bc}(\vec{p},-2)$$
$$+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{3}C_{n-h}^{1}}}{\sqrt{C_{2n}^{4}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h-1)\varepsilon_{bc}(\vec{p},1)+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1}C_{n-h}^{3}}}{\sqrt{C_{2n}^{4}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h+1)\varepsilon_{bc}(\vec{p},-1)$$
$$+\frac{\sqrt{C_{n+h}^{2}C_{n-h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n}^{4}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h)\varepsilon_{bc}(\vec{p},0)$$

$$= \sum_{h'=2}^{-2} \frac{\sqrt{C_{n+h}^{2+h'} C_{n-h}^{2-h'}}}{\sqrt{C_{2n}^{4}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p}, h-h') \varepsilon_{bc}(\vec{p}, h') \qquad \square$$

推论2.13.1. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p}, h) = \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot cb}_{n}}(\vec{p}, h), n \geq 2, -n \leq h \leq n$

2.14 推论-自旋基分解:$n + n' = n \oplus n'$

定理2.14.1. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}\underbrace{b\cdot\cdot c}_{n'}}(\vec{p}, h) = \sum_{h'=n'}^{-n'} \frac{\sqrt{C_{n+n'+h}^{n'+h'} C_{n+n'-h}^{n'-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2n'}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}, h-h') \varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot c}_{n'}}(\vec{p}, h')$

证明: 对n'采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$n''=1$时成立：

$$\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}\underbrace{b\cdot\cdot}_{1}}(\vec{p}, h) = \sum_{h'=1}^{-1} \frac{\sqrt{C_{n+1+h}^{1+h'} C_{n+1-h}^{1-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2}^{2}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}, h-h') \varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{1}}(\vec{p}, h'), -n-1 \leq h \leq n+1$$

第二步：假设$s''=s'-\frac{1}{2}$时成立：

$$\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h) = \sum_{h'=n'-1}^{-n'+1} \frac{\sqrt{C_{n+n'-1+h}^{n'-1+h'} C_{n+n'-1-h}^{n'-1-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2n'-2}^{2n'-2}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}, h-h') \varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h'), -n-n'+1 \leq h \leq n+n'+1$$

第三步：$n''=n'$时：$-n-n' \leq h \leq n+n', \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}\underbrace{b\cdot\cdot c}_{n'}}(\vec{p}, h)$

$$= \frac{\sqrt{C_{n+n'+h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h-1)\varepsilon_c(\vec{p}, 1) + \frac{\sqrt{C_{n+n'+h}^{1} C_{n+n'-h}^{1}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h)\varepsilon_c(\vec{p}, 0) + \frac{\sqrt{C_{n+n'-h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h+1)\varepsilon_c(\vec{p}, -1)$$

$$= \frac{\sqrt{C_{n+n'+h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2}}} \sum_{h'=n'-1}^{-n'+1} \frac{\sqrt{C_{n+n'-2+h}^{n'-1+h'} C_{n+n'-h}^{n'-1-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2n'}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}, h-1-h') \varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h')\varepsilon_c(\vec{p}, 1)$$

$$+ \frac{\sqrt{C_{n+n'+h}^{1} C_{n+n'-h}^{1}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2}}} \sum_{h'=n'-1}^{-n'+1} \frac{\sqrt{C_{n+n'-1+h}^{n'-1+h'} C_{n+n'-1-h}^{n'-1-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2n'-2}^{2n'-2}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}, h-h') \varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h')\varepsilon_c(\vec{p}, 0)$$

$$+ \frac{\sqrt{C_{n+n'-h}^{2}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2}}} \sum_{h'=n'-1}^{-n'+1} \frac{\sqrt{C_{n+n'+h}^{n'-1+h'} C_{n+n'-2-h}^{n'-1-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2n'-2}^{2n'-2}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}, h+1-h') \varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h')\varepsilon_c(\vec{p}, -1)$$

$$= \sum_{h'=n'-1}^{-n'+1} \frac{\sqrt{C_{n+n'+h}^{n'+1+h'} C_{n+n'-h}^{n'-1-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2n'}}} \frac{\sqrt{C_{n'+1+h'}^{2}}}{\sqrt{C_{2n'}^{2}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}, h-1-h') \varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h')\varepsilon_c(\vec{p}, 1)$$

$$+ \sum_{h'=n'-1}^{-n'+1} \frac{\sqrt{C_{n+n'+h}^{n'+h'} C_{n+n'-h}^{n'-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2n'}}} \frac{\sqrt{C_{n'+h'}^{1} C_{n'-h'}^{1}}}{\sqrt{C_{2n'}^{2}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}, h-h') \varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h')\varepsilon_c(\vec{p}, 0)$$

$$+ \sum_{h'=n'-1}^{-n'+1} \frac{\sqrt{C_{n+n'+h}^{n'-1+h'} C_{n+n'-h}^{n'+1-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2n'}}} \frac{\sqrt{C_{n'+1-h'}^{2}}}{\sqrt{C_{2n'}^{2}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}, h+1-h') \varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h')\varepsilon_c(\vec{p}, -1)$$

$$= \sum_{h'=n'}^{-n'+2} \frac{\sqrt{C_{n+n'+h}^{n'+h'} C_{n+n'-h}^{n'-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2n'}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}, h-h') \frac{\sqrt{C_{n'+h'}^{2}}}{\sqrt{C_{2n'}^{2}}} \varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h'-1)\varepsilon_c(\vec{p}, 1)$$

$$+ \sum_{h'=n'-1}^{-n'+1} \frac{\sqrt{C_{n+n'+h}^{n'+h'} C_{n+n'-h}^{n'-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2n'}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}, h-h') \frac{\sqrt{C_{n'+h'}^{1} C_{n'-h'}^{1}}}{\sqrt{C_{2n'}^{2}}} \varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h')\varepsilon_c(\vec{p}, 0)$$

$$+ \sum_{h'=n'-2}^{-n'} \frac{\sqrt{C_{n+n'+h}^{n'+h'} C_{n+n'-h}^{n'-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2n'}}} \frac{\sqrt{C_{n'-h'}^{2}}}{\sqrt{C_{2n'}^{2}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}, h-h') \varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h'+1)\varepsilon_c(\vec{p}, -1)$$

$$= \sum_{h'=n'}^{-n'} \frac{\sqrt{C_{n+n'+h}^{n'+h'} C_{n+n'-h}^{n'-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2n'}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}, h-h') \frac{\sqrt{C_{n'+h'}^{2}}}{\sqrt{C_{2n'}^{2}}} \varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h'-1)\varepsilon_c(\vec{p}, 1)$$

$$+ \sum_{h'=n'}^{-n'} \frac{\sqrt{C_{n+n'+h}^{n'+h'} C_{n+n'-h}^{n'-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2n'}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}, h-h') \frac{\sqrt{C_{n'+h'}^{1} C_{n'-h'}^{1}}}{\sqrt{C_{2n'}^{2}}} \varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h')\varepsilon_c(\vec{p}, 0)$$

$$+ \sum_{h'=n'}^{-n'} \frac{\sqrt{C_{n+n'+h}^{n'+h'} C_{n+n'-h}^{n'-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2n'}}} \frac{\sqrt{C_{n'-h'}^{2}}}{\sqrt{C_{2n'}^{2}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}, h-h') \varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'-1}}(\vec{p}, h'+1)\varepsilon_c(\vec{p}, -1)$$

$$= \sum_{h'=n'}^{-n'} \frac{\sqrt{C_{n+n'+h}^{n'+h'} C_{n+n'-h}^{n'-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2n'}^{2n'}}} \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}, h-h') \varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot c}_{n'}}(\vec{p}, h')$$

此步证明了$n''=n'$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

推论2.14.1. $-n_1-n_2\le h\le n_1+n_2$

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}}(\vec p,h)=\sum\limits_{h_1=n_1}^{-n_1}\sum\limits_{h_2=n_2}^{-n_2}\frac{\sqrt{C^{n_2+h_2}_{n_1+n_2+h}C^{n_2-h_2}_{n_1+n_2-h}}}{\sqrt{C^{2n_2}_{2n_1+2n_2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}}(\vec p,h_1)\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}}(\vec p,h_2)\delta(h-h_1-h_2)\\ \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}}(\vec p,h)=\sum\limits_{h_1=n_1}^{-n_1}\sum\limits_{h_2=n_2}^{-n_2}\frac{\sqrt{C^{n_1+h_1}_{n_1+n_2+h}C^{n_1-h_1}_{n_1+n_2-h}}}{\sqrt{C^{2n_1}_{2n_1+2n_2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}}(\vec p,h_1)\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}}(\vec p,h_2)\delta(h-h_1-h_2)\end{cases}$$

推论2.14.2. $-n_1-n_2\le h\le n_1+n_2,\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}}(\vec p,h)$

$$=\sum_{h_1=n_1}^{-n_1}\sum_{h_2=n_2}^{-n_2}[\tfrac{(2n_1)!(2n_2)!}{(2n_1+2n_2)!}\tfrac{(n_1+h_1+n_2+h_2)!}{(n_1+h_1)!(n_2+h_2)!}\tfrac{(n_1-h_1+n_2-h_2)!}{(n_1-h_1)!(n_2-h_2)!}]^{1/2}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}}(\vec p,h_1)\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}}(\vec p,h_2)\delta(h-h_1-h_2)$$

2.15 推论-自旋基反向合成

推论2.15.1. $\frac{\sqrt{C^{n'+h'}_{n+n'+h}C^{n'-h'}_{n+n'-h}}}{\sqrt{C^{2n'}_{2n+2n'}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec p,h-h')=\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}\underbrace{b\cdot\cdot c}_{n'}}(\vec p,h)\bar\varepsilon^{\overbrace{b\cdot\cdot c}^{n'}}(\vec p,h')$

推论2.15.2. $\frac{\sqrt{C^{n'+h'}_{n+n'+h}C^{n'-h'}_{n+n'-h}}}{\sqrt{C^{2n'}_{2n+2n'}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec p,h-h')=\bar\varepsilon^{\overbrace{b\cdot\cdot c}^{n'}}(\vec p,h')\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot c}_{n'}\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec p,h)$

2.16 推论-自旋基分解:$n_1+n_2\cdot\cdot+n_n=n_1\oplus n_2\cdot\cdot\oplus n_n$

推论2.16.1. $-\sum\limits_{i=1}^{n}n_i\le h\le\sum\limits_{i=1}^{n}n_i,\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}\cdot\cdot\underbrace{c\cdot\cdot}_{n_n}}(\vec p,h)$

$$=\sum_{h_1=n_1}^{-n_1}\sum_{h_2=n_2}^{-n_2}\cdot\cdot\sum_{h_n=n_n}^{-n_n}[\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(2n_i)!}{[\sum\limits_{i=1}^{n}(2n_i)]!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(n_i+h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(n_i+h_i)!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(n_i-h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(n_i-h_i)!}]^{\frac12}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}}(\vec p,h_1)\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}}(\vec p,h_2)\cdot\cdot\varepsilon_{\underbrace{c\cdot\cdot}_{n_n}}(\vec p,h_n)\delta(h-\sum_{i=1}^{n}h_i)$$

2.17 一个重要的数学推论

推论2.17.1. $\sum\limits_{h_1=n_1}^{-n_1}\sum\limits_{h_2=n_2}^{-n_2}\cdot\cdot\sum\limits_{h_n=n_n}^{-n_n}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(n_i+h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(n_i+h_i)!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(n_i-h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(n_i-h_i)!}\delta(h-\sum\limits_{i=1}^{n}h_i)=\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(2n_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(2n_i)!},-\sum\limits_{i=1}^{n}n_i\le h\le\sum\limits_{i=1}^{n}n_i$

2.18 推论-自旋基分解:$s=1\oplus1\cdot\cdot\oplus1$

推论2.18.1. $-n\le h\le n$

$$\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}(\vec p,h)=\sum_{h_1=1}^{-1}\sum_{h_2=1}^{-1}\cdot\cdot\sum_{h_n=1}^{-1}[\frac{2^n(n+h)!(n-h)!}{(2n)!\prod\limits_{i=1}^{n}(1+h_i)!\prod\limits_{i=1}^{n}(1-h_i)!}]^{\frac12}\underbrace{\varepsilon_a(\vec p,h_1)\varepsilon_b(\vec p,h_2)\cdot\cdot\varepsilon_c(\vec p,h_n)}_{n}\delta(h-\sum_{i=1}^{n}h_i)$$

推论2.18.2. $-n\le h\le n,\forall n$

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c\cdot\cdot}_{n}}(\vec p,n-2k)=\frac{1}{\sqrt{C^{2k}_{2n}}}\sum\limits_{i=0}^{\min(k,n-k)}\frac{2^i}{(n-k-i)!(2i)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec p,1)\cdot\cdot}_{n-k-i}\underbrace{\varepsilon_b(\vec p,0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec p,-1)}_{k-i}\\ \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c\cdot\cdot}_{n}}(\vec p,n-2k-1)=\frac{1}{\sqrt{C^{2k+1}_{2n}}}\sum\limits_{i=0}^{\min(k,n-1-k)}\frac{2^i\sqrt2}{(n-k-i-1)!(2i+1)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec p,1)\cdot\cdot}_{n-k-i-1}\underbrace{\varepsilon_b(\vec p,0)\cdot\cdot}_{2i+1}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec p,-1)}_{k-i}\end{cases}$$

推论2.18.3. $-n\le h\le n,\forall n$

$$\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec p,h)=\frac{\sqrt{C^2_{n+h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec p,h-1)\varepsilon_c(\vec p,1)+\frac{\sqrt{C^1_{n+h}C^1_{n-h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec p,h)\varepsilon_c(\vec p,0)+\frac{\sqrt{C^2_{n-h}}}{\sqrt{C^2_{2n}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec p,h+1)\varepsilon_c(\vec p,-1)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c\cdot\cdot}_{n}}(\vec p,n-2k)=\frac{1}{\sqrt{C^{2k}_{2n}}}\sum\limits_{i=0}^{\min(k,n-k)}\frac{2^i}{(n-k-i)!(2i)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec p,1)\cdot\cdot}_{n-k-i}\underbrace{\varepsilon_b(\vec p,0)\cdot\cdot}_{2i}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec p,-1)}_{k-i}\\ \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b\cdot\cdot c\cdot\cdot}_{n}}(\vec p,n-2k-1)=\frac{1}{\sqrt{C^{2k+1}_{2n}}}\sum\limits_{i=0}^{\min(k,n-1-k)}\frac{2^i\sqrt2}{(n-k-i-1)!(2i+1)!(k-i)!}\underbrace{\varepsilon_{\{a}(\vec p,1)\cdot\cdot}_{n-k-i-1}\underbrace{\varepsilon_b(\vec p,0)\cdot\cdot}_{2i+1}\underbrace{\varepsilon_{c\}}(\vec p,-1)}_{k-i}\end{cases}$$

2.19 推论-$\varepsilon_{ab\cdot\cdot c}(\vec{p},h)$的全对称性

定理2.19.1. $\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{n!}\varepsilon_{\underbrace{\{ab\cdot\cdot c\}}_{n}}(\vec{p},h),-n\le h\le n$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$n'=1,2$时成立：

$\varepsilon_a(\vec{p},h)=\frac{1}{1!}\varepsilon_a(\vec{p},h),-1\le h\le 1;\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)=\frac{1}{2!}\varepsilon_{\{ab\}}(\vec{p},h),-2\le h\le 2$

第二步：假设$n'=n-1$时成立：

$\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(n-1)!}\varepsilon_{\underbrace{\{a\cdot\cdot b\}}_{n-1}}(\vec{p},h),-n+1\le h\le n-1$

第三步：$2\le n'=n$时：$-n\le h\le n,\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)$

$=\sum_{h'=1}^{-1}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1+h'}C_{n+h}^{1-h'}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot b}_{n-1}}(\vec{p},h-h')\varepsilon_c(\vec{p},h')=\sum_{h'=2}^{-2}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{2+h'}C_{n-h}^{2-h'}}}{\sqrt{C_{2n}^{4}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n-2}}(\vec{p},h-h')\varepsilon_{bc}(\vec{p},h')$

$\Rightarrow\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(n-1)!}\varepsilon_{\underbrace{\{a\cdot\cdot b\}c}_{n}}(\vec{p},h),\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)=\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot cb}_{n}}(\vec{p},h),-n\le h\le n$

$\Leftrightarrow\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{n!}\varepsilon_{\underbrace{\{a\cdot\cdot bc\}}_{n}}(\vec{p},h),-n\le h\le n$

此步证明了$n'=n$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

2.20 $\varepsilon_{ab\cdot\cdot c}(\vec{p},h)$性质的小结

定理2.20.1.

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}(\vec{p},h)=\sum_{h'=1}^{-1}\frac{\sqrt{C_{n+h}^{1+h'}C_{n+h}^{1-h'}}}{\sqrt{C_{2n}^{2}}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-1}}(\vec{p},h-h')\varepsilon_c(\vec{p},h')\\ \bar{\varepsilon}_a(\vec{p},h)=(-1)^h\varepsilon_a(\vec{p},-h),p^a\varepsilon_a(\vec{p},h)=0,\bar{\varepsilon}^a(\vec{p},h)\varepsilon_a(\vec{p},h')=\delta_{hh'},-1\le h',h\le 1\end{cases}$$
$$\Rightarrow$$
$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}(\vec{p},h)=\frac{1}{n!}\varepsilon_{\underbrace{\{ab\cdot\cdot c\}}_{n}}(\vec{p},h),\delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}(\vec{p},h)=0,p^a\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}(\vec{p},h)=0\\ \bar{\varepsilon}^{\overbrace{ab\cdot\cdot c}^{n}}(\vec{p},h')\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}}(\vec{p},h)=\delta_{hh'},-n\le h',h\le n\end{cases}$$

2.21 Klein-Gordon方程平面波解的算子表述

定理2.21.1. $(-\partial^c\partial_c+m^2)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=0,\delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=0,\partial^a A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=0,A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=\frac{1}{n!}A_{\underbrace{\{ab\cdot\cdot\}}_{n}}(x)$

$$A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}\sum_{h=n}^{-n}\frac{\hat{j}_-^{n-h}(\vec{p},n;R,L)}{(n-h)!\sqrt{C_{2n}^{n-h}}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},n)[a(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+(-1)^nb^+(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

$$A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}\sum_{h=n}^{-n}\frac{\hat{j}_+^{n+h}(\vec{p},n;R,L)}{(n+h)!\sqrt{C_{2n}^{n+h}}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},-n)[a(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+(-1)^nb^+(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

3 Rarita-Schwinger方程自旋基的重新梳理分析

3.1 定义-自旋基分解:$n+\frac{1}{2}=n\oplus\frac{1}{2}$

定义3.1.1. $-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}$

$\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{n+1/2+h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

推论3.1.1. $\bar{\varepsilon}^{\overbrace{ab\cdot\cdot}^{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h')\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\delta_{hh'},-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}$

推论3.1.2. $p^a\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=0,-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}$

推论3.1.3. $\delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=0,-\frac{5}{2}\le h\le\frac{5}{2}$

3.2 推论-$\varepsilon_{ab\cdot\cdot c\tau_\varsigma}(\vec{p},h)$是自旋本征态

定理3.2.1. $[\Omega(n;R)\otimes I_4+I_{4^n}\otimes\hat{J}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)]\cdot\hat{p}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n}\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=h\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n}\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},h),-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}$

猜想3.2.1. $[\Omega(n;R)\otimes I_4+I_{4^n}\otimes\hat{J}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)]^2\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n}\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b}_{n}\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},h)$

3.3 Rarita-Schwinger方程自旋基的升降算符

定义3.3.1. $\hat{J}(\vec{p},n+\frac{1}{2};R,L,\gamma_a):=[\hat{J}(\vec{p},n;R,L)\otimes I_4+I_{4^n}\otimes\hat{J}(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)]$

推论3.3.1. $[\hat{J}_i(\vec{p},n+\frac{1}{2};R,L,\gamma_a),\hat{J}_j(\vec{p},n+\frac{1}{2};R,L,\gamma_a)]=\varepsilon_{ij}{}^{k}\hat{J}_k(\vec{p},n+\frac{1}{2};R,L,\gamma_a)$

定理3.3.1.

$$\begin{cases}\hat{J}_+(\vec{p},n+\frac{1}{2};R,L,\gamma_a)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot}_{n}\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\sqrt{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})-h(h+1)}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot}_{n}\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},h+1),-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}\\ \hat{J}_-(\vec{p},n+\frac{1}{2};R,L,\gamma_a)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot}_{n}\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\sqrt{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})-h(h-1)}\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot}_{n}\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},h-1),-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}\\ \hat{J}_z(\vec{p},n+\frac{1}{2};R,L,\gamma_a)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot}_{n}\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=h\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot}_{n}\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},h-1),-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}\end{cases}$$

证明: $-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}$

$\hat{J}_+(\vec{p},n+\frac{1}{2};R,L,\gamma_a)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)$

$=[\hat{J}_+(\vec{p},n;R,L)\otimes I_4+I_{4^n}\otimes\hat{J}_+(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)][\frac{\sqrt{n+1/2+h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$

$=[\frac{\sqrt{n+1/2+h}}{\sqrt{2n+1}}\hat{J}_+(\vec{p},n;R,L,\gamma_a)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}\hat{J}_+(\vec{p},n;R,L,\gamma_a)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$

$+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})\hat{J}_+(\vec{p},\frac{1}{2};R,L,\gamma_a)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$

$=\frac{\sqrt{n+1/2+h}\sqrt{n(n+1)-(h-\frac{1}{2})(h+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$

$+\frac{\sqrt{n+1/2-h}\sqrt{n(n+1)-(h+\frac{1}{2})(h+\frac{3}{2})}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\frac{3}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=\frac{\sqrt{n+1/2+(h+1)}\sqrt{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})-h(h+1)}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$

$+\frac{\sqrt{n+1/2-(h+1)}\sqrt{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})-h(h+1)}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\frac{3}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=\sqrt{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})-h(h+1)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h+1)$ □

证明: $-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}$

$\hat{J}_-(\vec{p},n+\frac{1}{2};R,L,\gamma_a)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)$

$=[\hat{J}_-(\vec{p},n;R,L)\otimes I_4+I_{4^n}\otimes\hat{J}_-(\vec{p},\frac{1}{2};\gamma_a)][\frac{\sqrt{n+1/2+h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$

$=[\frac{\sqrt{n+1/2+h}}{\sqrt{2n+1}}\hat{J}_-(\vec{p},n;R,L,\gamma_a)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}\hat{J}_-(\vec{p},n;R,L,\gamma_a)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$

$+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})\hat{J}_-(\vec{p},\frac{1}{2};R,L,\gamma_a)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$

$$= \frac{\sqrt{n+1/2+h}\sqrt{n(n+1)-(h-\frac{1}{2})(h-\frac{3}{2})}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\tfrac{3}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

$$+\frac{\sqrt{n+1/2-h}\sqrt{n(n+1)-(h+\frac{1}{2})(h-\frac{1}{2})}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1/2+h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{\sqrt{n+1/2+(h-1)}\sqrt{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})-h(h-1)}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\tfrac{3}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

$$+\frac{\sqrt{n+1/2-(h-1)}\sqrt{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})-h(h-1)}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$=\sqrt{(n+\tfrac{1}{2})(n+\tfrac{3}{2})-h(h-1)}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h-1) \qquad \square$$

证明: $-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}$

$$\hat{J}_z(\vec{p},n+\tfrac{1}{2};R,L,\gamma_a)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)$$

$$=[\hat{J}_z(\vec{p},n;R,L)\otimes I_4+I_{4^n}\otimes\hat{J}_z(\vec{p},\tfrac{1}{2};\gamma_a)][\frac{\sqrt{n+1/2+h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$

$$=[\frac{\sqrt{n+1/2+h}}{\sqrt{2n+1}}\hat{J}_z(\vec{p},n;R,L)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}\hat{J}_z(\vec{p},n;R,L)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$

$$+[\frac{\sqrt{n+1/2+h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})\hat{J}_z(\vec{p},\tfrac{1}{2};\gamma_a)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2})\hat{J}_z(\vec{p},\tfrac{1}{2};\gamma_a)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$

$$=[\frac{\sqrt{n+1/2+h}}{\sqrt{2n+1}}(h-\tfrac{1}{2})\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}(h+\tfrac{1}{2})\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$

$$+[\frac{\sqrt{n+1/2+h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$

$$=h[\frac{\sqrt{n+1/2+h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$

$$=h\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h) \qquad \square$$

推论3.3.2. $\hat{J}^2=\hat{J}_z^2+\frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_-+\hat{J}_+\hat{J}_-)$

$$\begin{cases}\hat{J}^2(\vec{p},n+\frac{1}{2};R,L,\gamma_a)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes b\otimes\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})\varepsilon_{\underbrace{a\otimes b\otimes\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h),-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}\\ \hat{J}_z(\vec{p},n+\frac{1}{2};R,L,\gamma_a)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot}_{n}\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=h\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot}_{n}\otimes\tau_\varsigma}(\vec{p},h-1),-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}\end{cases}$$

3.4 推论-$\varepsilon_{ab\cdot\cdot c\tau_\varsigma}(\vec{p},h)$的正交性

定理3.4.1. $\bar{\varepsilon}^{\overbrace{a\cdot\cdot bc}^{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h')\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\delta_{hh'},-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}$

3.5 推论-$p^a\varepsilon_{ab\cdot\cdot c\tau_\varsigma}(\vec{p},h)$的零性

定理3.5.1. $p^a\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=0,\gamma^a\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot bc}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p},h)=0,-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}$

3.6 推论-$\varepsilon_{ab\cdot\cdot c\tau_\varsigma}(\vec{p},h)$的无迹性

定理3.6.1. $\delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=0,n\ge 2,-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}$

3.7 推论-$\varepsilon_{ab\cdot\cdot c\tau_\varsigma}(\vec{p},h)$的全对称性

定理3.7.1. $\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot c}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{n!}\varepsilon_{\underbrace{\{ab\cdot\cdot c\}}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h),-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2}$

3.8 推论-自旋基分解:$n+n'+\frac{1}{2}=n\oplus n'+\frac{1}{2}$

定理3.8.1. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\sum\limits_{h'=n'+1/2}^{-n'-1/2}\frac{\sqrt{C_{n+n'+1/2+h}^{n'+1/2+h'}C_{n+n'+1/2-h}^{n'+1/2-h'}}}{\sqrt{C_{2n+2n'+1}^{2n'+1}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-h')\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'}\tau_\varsigma}(\vec{p},h')$

推论3.8.1. $-n_1-n_2-\frac{1}{2}\le h\le n_1+n_2+\frac{1}{2}$

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\sum\limits_{h_1=n_1}^{-n_1}\sum\limits_{h_2=n_2+1/2}^{-n_2-1/2}\frac{\sqrt{C_{n_1+n_2+1/2+h}^{n_2+1/2+h_2}C_{n_1+n_2+1/2-h}^{n_2+1/2-h_2}}}{\sqrt{C_{2n_1+2n_2+1}^{2n_2+1}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}}(\vec{p},h_1)\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}\tau_\varsigma}(\vec{p},h_2)\delta(h-h_1-h_2)\\ \varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\sum\limits_{h_1=n_1}^{-n_1}\sum\limits_{h_2=n_2+1/2}^{-n_2-1/2}\frac{\sqrt{C_{n_1+n_2+1/2+h}^{n_1+h_1}C_{n_1+n_2+1/2-h}^{n_1-h_1}}}{\sqrt{C_{2n_1+2n_2+1}^{2n_1}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}}(\vec{p},h_1)\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}\tau_\varsigma}(\vec{p},h_2)\delta(h-h_1-h_2)\end{cases}$$

推论3.8.2. $-n_1-n_2-\frac{1}{2}\le h\le n_1+n_2+\frac{1}{2},\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)$

$$=\sum_{h_1=n_1}^{-n_1}\sum_{h_2=n_2+1/2}^{-n_2-1/2}[\tfrac{(2n_1)!(2n_2+1)!}{(2n_1+2n_2+1)!}\tfrac{(n_1+h_1+n_2+1/2+h_2)!}{(n_1+h_1)!(n_2+1/2+h_2)!}\tfrac{(n_1-h_1+n_2+1/2-h_2)!}{(n_1-h_1)!(n_2+1/2-h_2)!}]^{1/2}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}}(\vec{p},h_1)\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}\tau_\varsigma}(\vec{p},h_2)\delta(h-h_1-h_2)$$

3.9 推论-自旋基反向合成

推论3.9.1. $\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p},h-h')=\frac{\sqrt{C_{2n+2n'+1}^{2n'+1}}}{\sqrt{C_{n+n'+1/2+h}^{n'+1/2+h'}C_{n+n'+1/2-h}^{n'+1/2-h'}}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n'}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}^{\overbrace{b\cdot\cdot}^{n'}\tau_\varsigma}(\vec{p},h')$

3.10 推论-自旋基分解:$n_1+n_2\cdot\cdot+n_n+\frac{1}{2}=n_1\oplus n_2\cdot\cdot\oplus n_n\oplus\frac{1}{2}$

推论3.10.1. $-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2},n_0=\frac{1}{2};\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}\cdot\cdot\underbrace{c\cdot\cdot}_{n_n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)$

$$=\sum_{h_0=n_0}^{-n_0}\sum_{h_1=n_1}^{-n_1}\cdot\cdot\sum_{h_n=n_n}^{-n_n}[\tfrac{\prod_{i=0}^{n}(2n_i)!}{[\sum_{i=0}^{n}(2n_i)]!}\tfrac{[\sum_{i=0}^{n}(n_i+h_i)]!}{\prod_{i=0}^{n}(n_i+h_i)!}\tfrac{[\sum_{i=0}^{n}(n_i-h_i)]!}{\prod_{i=0}^{n}(n_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}}(\vec{p},h_1)\cdot\cdot\varepsilon_{\underbrace{c\cdot\cdot}_{n_n}}(\vec{p},h_n)\delta(h-\sum_{i=0}^{n}h_i)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h_0)$$

证明: $-n-\frac{1}{2}\le h\le n+\frac{1}{2},n_0=\frac{1}{2}$

$$\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}\cdot\cdot\underbrace{c\cdot\cdot}_{n_n}\tau_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{n+1/2+h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}\cdot\cdot\underbrace{c\cdot\cdot}_{n_n}}(\vec{p},h-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{b\cdot\cdot}_{n_2}\cdot\cdot\underbrace{c\cdot\cdot}_{n_n}}(\vec{p},h+\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$=\frac{\sqrt{n+1/2+h}}{\sqrt{2n+1}}\sum_{h_1=n_1}^{-n_1}\cdot\cdot\sum_{h_n=n_n}^{-n_n}[\tfrac{\prod_{i=1}^{n}(2n_i)!}{[\sum_{i=1}^{n}(2n_i)]!}\tfrac{[\sum_{i=1}^{n}(n_i+h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(n_i+h_i)!}\tfrac{[\sum_{i=1}^{n}(n_i-h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(n_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}}(\vec{p},h_1)\cdot\cdot\varepsilon_{\underbrace{c\cdot\cdot}_{n_n}}(\vec{p},h_n)\delta(h-\tfrac{1}{2}-\sum_{i=1}^{n}h_i)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})$$

$$+\frac{\sqrt{n+1/2-h}}{\sqrt{2n+1}}\sum_{h_1=n_1}^{-n_1}\cdot\cdot\sum_{h_n=n_n}^{-n_n}[\tfrac{\prod_{i=1}^{n}(2n_i)!}{[\sum_{i=1}^{n}(2n_i)]!}\tfrac{[\sum_{i=1}^{n}(n_i+h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(n_i+h_i)!}\tfrac{[\sum_{i=1}^{n}(n_i-h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(n_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}}(\vec{p},h_1)\cdot\cdot\varepsilon_{\underbrace{c\cdot\cdot}_{n_n}}(\vec{p},h_n)\delta(h+\tfrac{1}{2}-\sum_{i=1}^{n}h_i)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$=\sum_{h_0=n_0}^{-n_0}\sum_{h_1=n_1}^{-n_1}\cdot\cdot\sum_{h_n=n_n}^{-n_n}[\tfrac{\prod_{i=0}^{n}(2n_i)!}{[\sum_{i=0}^{n}(2n_i)]!}\tfrac{[\sum_{i=0}^{n}(n_i+h_i)]!}{\prod_{i=0}^{n}(n_i+h_i)!}\tfrac{[\sum_{i=0}^{n}(n_i-h_i)]!}{\prod_{i=0}^{n}(n_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{n_1}}(\vec{p},h_1)\cdot\cdot\varepsilon_{\underbrace{c\cdot\cdot}_{n_n}}(\vec{p},h_n)\delta(h-\sum_{i=0}^{n}h_i)u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h_0)$$ □

3.11 Rarita-Schwinger方程平面波解的算子表述

定理3.11.1. $s:=n+\frac{1}{2}$

$(\gamma^c\partial_c+m)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(x)=0,\delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(x)=0,\gamma^aA_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}(x)=0,A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x)=\frac{1}{n!}A_{\underbrace{\{ab\cdot\cdot\}}_{n}\tau_\varsigma}(x)$

$$A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE}}\sum_{h=s}^{-s}\frac{\hat{j}_-^{s-h}(\vec{p},s;R,L,\gamma_a)}{(s-h)!\sqrt{C_{2s}^{s-h}}}[a(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},s)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},s)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

$$A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE}}\sum_{h=s}^{-s}\frac{\hat{j}_+^{s+h}(\vec{p},s;R,L,\gamma_a)}{(s+h)!\sqrt{C_{2s}^{s+h}}}[a(\vec{p},h)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},-s)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p},-s)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

4 Penrose方程自旋基的重新梳理分析

4.1 中微子自旋基是自旋、螺旋度的共同本征态

性质4.1.1. $\begin{cases}\sigma^2(\frac{1}{2})\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\\ \sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})=\frac{\varsigma}{2}\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\end{cases}$

4.2 定义-自旋基分解:$s=(s-\frac{1}{2})\oplus\frac{1}{2}$

定义4.2.1. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h)=\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma}_{2s-1}}(\hat{p},h-\frac{1}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma}_{2s-1}}(\hat{p},h+\frac{1}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\frac{1}{2}),-s\le h\le s$

推论4.2.1. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h)=\sum_{h'=1/2}^{-1/2}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+h'}C_{s-h}^{1/2-h'}}}{\sqrt{C_{2s}^{1}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma}_{2s-1}}(\hat{p},h-h')\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},h'),-s\le h\le s$

4.3 推论-$\lambda_{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma}(\hat{p},h)$是自旋本征态

定理4.3.1. $[\Omega(s)\cdot\hat{p}]\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h)=h\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h),-s\le h\le s$

证明: $[\Omega(s)\cdot\hat{p}]\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h)$

$=[\Omega(s-\frac{1}{2})\otimes I+I_{2^{2s-1}}\otimes\sigma(\frac{1}{2})]\cdot\hat{p}$

$[\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\hat{p},h-\frac{1}{2})\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\hat{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\hat{p},h+\frac{1}{2})\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\hat{p},-\frac{1}{2})],-s\le h\le s$

$=[\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}h\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\hat{p},h-\frac{1}{2})\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\hat{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}h\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\hat{p},h+\frac{1}{2})\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\hat{p},-\frac{1}{2})],-s\le h\le s$

$=h\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h),-s\le h\le s$ □

定理4.3.2. $\Omega^2(s)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h)=s(s+1)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h),-s\le h\le s$

以上定理可以用全对称的表象变换方法可以很容易得到证明。由上可知$\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h)$ 是自旋本征态，所以展开系数是**CG** 系数，实际计算结果也表明确实就是对应的**CG**系数。从而也提供了一种规范、统一、直观和完整的计算**CG**系数新方法。

4.4 Penrose方程自旋基的升降算符

定理4.4.1.

$$\begin{cases}e^{i\vec{\omega}\cdot\Omega(s)}\Omega_x(s)e^{-i\vec{\omega}\cdot\Omega(s)}=\Omega_x(s)-\hat{p}_x\frac{\Omega(s)\cdot\hat{p}+\Omega_z(s)}{(1+\hat{p}_z)}\\ e^{i\vec{\omega}\cdot\Omega(s)}\Omega_y(s)e^{-i\vec{\omega}\cdot\Omega(s)}=\Omega_y(s)-\hat{p}_y\frac{\Omega(s)\cdot\hat{p}+\Omega_z(s)}{(1+\hat{p}_z)}\\ e^{i\vec{\omega}\cdot\Omega(s)}\Omega_z(s)e^{-i\vec{\omega}\cdot\Omega(s)}=\Omega(s)\cdot\hat{p}\end{cases}$$

定义4.4.1.

$$\begin{cases}\hat{J}_x(\hat{p},\Omega(s)):=\{\Omega_x(s)-\frac{\hat{p}_x}{(1+\hat{p}_z)}[\Omega(s)\cdot\hat{p}+\Omega_z(s)]\}\\ \hat{J}_y(\hat{p},\Omega(s)):=\{\Omega_y(s)-\frac{\hat{p}_y}{(1+\hat{p}_z)}[\Omega(s)\cdot\hat{p}+\Omega_z(s)]\}\\ \hat{J}_z(\hat{p},\Omega(s)):=\Omega(s)\cdot\hat{p}\end{cases}$$

推论4.4.1.

$$\begin{cases}\hat{J}_x^2(\hat{p},\Omega(\frac{1}{2}))=\frac{1}{4},\hat{J}_y^2(\hat{p},\Omega(\frac{1}{2}))=\frac{1}{4},\hat{J}_z^2(\hat{p},\Omega(\frac{1}{2}))=\frac{1}{4}\\ [\hat{J}_i(\hat{p},\Omega(s)),\hat{J}_j(\hat{p},\Omega(s))]=\varepsilon_{ij}{}^k\hat{J}_k(\hat{p},\Omega(s))\end{cases}$$

推论4.4.2.

$$\begin{cases}\hat{J}_+(\hat{p},\Omega(s)):=\{[\Omega_x(s)+i\Omega_y(s)]-\frac{(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)}{(1+\hat{p}_z)}[\Omega(s)\cdot\hat{p}+\Omega_z(s)]\}\\ \hat{J}_-(\hat{p},\Omega(s)):=\{[\Omega_x(s)-i\Omega_y(s)]-\frac{(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)}{(1+\hat{p}_z)}[\Omega(s)\cdot\hat{p}+\Omega_z(s)]\}\\ \hat{J}_z(\hat{p},\Omega(s)):=\Omega(s)\cdot\hat{p}\end{cases}$$

推论4.4.3. $\hat{J}(\hat{p},\Omega(s)) := \underbrace{\hat{J}(\vec{p},\sigma(\frac{1}{2}))\otimes I_4\otimes\cdot\cdot\otimes I_4}_{2s}+\underbrace{I_4\otimes\hat{J}(\vec{p},\sigma(\frac{1}{2}))\otimes\cdot\cdot\otimes I_4}_{2s}+\cdots+\underbrace{I_4\otimes\cdot\cdot\otimes I_4\otimes\hat{J}(\vec{p},\sigma(\frac{1}{2}))}_{2s}$

定理4.4.2. $\hat{J}_+(\hat{p},\Omega(s))\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sqrt{s(s+1)-h(h+1)}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h+1)$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$s'=\frac{1}{2}$时成立：

$\hat{J}_+(\vec{p},\sigma(\frac{1}{2}))\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},h)=\sqrt{\frac{3}{4}-h(h+1)}\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},h+1),-\frac{1}{2}\le h\le\frac{1}{2}$

第二步：假设$s'=s-\frac{1}{2}$时成立：

$\hat{J}_+(\vec{p},s-\frac{1}{2};\sigma)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)=\sqrt{(s-\frac{1}{2})(s+\frac{1}{2})-h(h+1)}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h),-s+\frac{1}{2}\le h\le s-\frac{1}{2}$

第三步：$s'=s$时：$-s\le h\le s,\hat{J}_+(\hat{p},\Omega(s))\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$

$=\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}[\hat{J}_+(\vec{p},s-\frac{1}{2};\sigma)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})]\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}[\hat{J}_+(\vec{p},s-\frac{1}{2};\sigma)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})]\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$+\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})\hat{J}_+(\vec{p},\sigma(\frac{1}{2}))\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})\hat{J}_+(\vec{p},\sigma(\frac{1}{2}))\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=\frac{\sqrt{s+h}\sqrt{(s+\frac{1}{2})(s-\frac{1}{2})-(h-\frac{1}{2})(h+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$

$+\frac{\sqrt{s-h}\sqrt{(s+\frac{1}{2})(s-\frac{1}{2})-(h+1-\frac{1}{2})(h+1+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{3}{2})]\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=\frac{\sqrt{(s-h)(s+h+1)}\sqrt{s+h+1}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{(s-h)(s+h+1)}\sqrt{s-h-1}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{3}{2})\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=\sqrt{s(s+1)-h(h+1)}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h+1)$

此步证明了$s'=s$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

定理4.4.3. $\hat{J}_-(\hat{p},\Omega(s))\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sqrt{s(s+1)-h(h-1)}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h-1)$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$s'=\frac{1}{2}$时成立：

$\hat{J}_-(\vec{p},\sigma(\frac{1}{2}))\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},h)=\sqrt{\frac{3}{4}-h(h-1)}\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},h-1),-\frac{1}{2}\le h\le\frac{1}{2}$

第二步：假设$s'=s-\frac{1}{2}$时成立：

$\hat{J}_-(\vec{p},s-\frac{1}{2};\sigma)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h)=\sqrt{(s-\frac{1}{2})(s+\frac{1}{2})-h(h-1)}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-1),-s+\frac{1}{2}\le h\le s-\frac{1}{2}$

第三步：$s'=s$时：$-s\le h\le s,\hat{J}_-(\hat{p},\Omega(s))\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$

$=\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}[\hat{J}_-(\vec{p},s-\frac{1}{2};\sigma)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})]\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}[\hat{J}_-(\vec{p},s-\frac{1}{2};\sigma)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})]\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$+\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})\hat{J}_-(\vec{p},\sigma(\frac{1}{2}))\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}\hat{J}_-(\vec{p},s-\frac{1}{2};\sigma)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})\hat{J}_-(\vec{p},\sigma(\frac{1}{2}))\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=\frac{\sqrt{s+h}\sqrt{(s+\frac{1}{2})(s-\frac{1}{2})-(h-1-\frac{1}{2})(h-1+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{3}{2})\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$

$+\frac{\sqrt{s-h}\sqrt{(s+\frac{1}{2})(s-\frac{1}{2})-(h-\frac{1}{2})(h+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})]\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=\frac{\sqrt{s+h}\sqrt{(s+h-1)(s-h+1)}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{3}{2})\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$

$+\frac{\sqrt{s-h}\sqrt{(s+h)(s-h)}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})]\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=\frac{\sqrt{(s+h)(s-h+1)}\sqrt{(s+h-1)}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{3}{2})\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{(s+h)(s-h+1)}\sqrt{s-h+1}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})\lambda_{\otimes C_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$=\sqrt{s(s+1)-h(h-1)}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h-1)$

此步证明了$s'=s$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

推论4.4.4.

$$\begin{cases}\hat{J}_+(\hat{p},\Omega(s))\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)=\sqrt{s(s+1)-h(h+1)}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h+1),-s\le h\le s\\ \hat{J}_-(\hat{p},\Omega(s))\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)=\sqrt{s(s+1)-h(h-1)}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h-1),-s\le h\le s\\ \hat{J}_z(\hat{p},\Omega(s))\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)=h\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h),-s\le h\le s\end{cases}$$

推论4.4.5. $\hat{J}^2=\hat{J}_z^2+\frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_-+\hat{J}_+\hat{J}_-)$

$$\begin{cases}\hat{J}^2(\hat{p},\Omega(s))\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)=s(s+1)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h),\hat{J}_z(\hat{p},\Omega(s))\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)=h\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)\\ \hat{J}^2(\hat{p},*\sigma(\frac{1}{2}))\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{3}{4}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h),\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2s)!}\lambda_{\underbrace{\{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot\}}_{2s}}(\vec{p},h),-s\le h\le s\end{cases}$$

4.5 推论-$\lambda_{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma}(\hat{p},h)$的正交性

定义4.5.1. $\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},h')\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},h)=\delta_{hh'},-\frac{1}{2}\le h,h'\le\frac{1}{2}$

定理4.5.1. $\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma}^{2s}}(\hat{p},h')\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h)=\delta_{hh'},-s\le h',h\le s$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$s'=\frac{1}{2}$时成立：

$\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},h')\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},h)=\delta_{hh'},-\frac{1}{2}\le h,h'\le\frac{1}{2}$

第二步：假设$s'=s-\frac{1}{2}$时成立：

$\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma}^{2s-1}}(\hat{p},h')\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma}_{2s-1}}(\hat{p},h)=\delta_{hh'},-s+\frac{1}{2}\le h',h\le s-\frac{1}{2}$

第三步：$s'=s$时：$\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma}^{2s}}(\hat{p},h')\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h),-s\le h',h\le s$

$=[\sum_{\bar{h}'=1/2}^{-1/2}\frac{\sqrt{C_{s+h'}^{1/2+\bar{h}'}C_{s-h'}^{1/2-\bar{h}'}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma}^{2s-1}}(\hat{p},h'-\bar{h}')\lambda^{+C_\varsigma}(\hat{p},\bar{h}')][\sum_{\bar{h}=1/2}^{-1/2}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+\bar{h}}C_{s-h}^{1/2-\bar{h}}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma}_{2s-1}}(\hat{p},h-\bar{h})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},\bar{h})]$

$=\sum_{\bar{h}',\bar{h}=1/2}^{-1/2}[\frac{\sqrt{C_{s+h'}^{1/2+\bar{h}'}C_{s-h'}^{1/2-\bar{h}'}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+\bar{h}}C_{s-h}^{1/2-\bar{h}}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma}^{2s-1}}(\hat{p},h'-\bar{h}')\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma}_{2s-1}}(\hat{p},h-\bar{h})\delta_{\bar{h}\bar{h}'}]$

$=\sum_{\bar{h}=1/2}^{-1/2}[\frac{\sqrt{C_{s+h'}^{1/2+\bar{h}}C_{s-h'}^{1/2-\bar{h}}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+\bar{h}}C_{s-h}^{1/2-\bar{h}}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma}^{2s-1}}(\hat{p},h'-\bar{h})\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma}_{2s-1}}(\hat{p},h-\bar{h})]$

$=\sum_{\bar{h}=1/2}^{-1/2}[\frac{\sqrt{C_{s+h'}^{1/2+\bar{h}}C_{s-h'}^{1/2-\bar{h}}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+\bar{h}}C_{s-h}^{1/2-\bar{h}}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\delta_{hh'}]$

$=\sum_{\bar{h}=1/2}^{-1/2}[\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+\bar{h}}C_{s-h}^{1/2-\bar{h}}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+\bar{h}}C_{s-h}^{1/2-\bar{h}}}}{\sqrt{C_{2s}^1}}]\delta_{hh'}$

$=\delta_{hh'}$

此步证明了$s'=s$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

4.6 推论-自旋基分解:$1=\frac{1}{2}\oplus\frac{1}{2}$

推论4.6.1. $\lambda_{A_\varsigma B_\varsigma}(\hat{p},h)=\frac{\sqrt{1+h}}{\sqrt{2}}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},h-\frac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{1-h}}{\sqrt{2}}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},h+\frac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{1}{2})$

$$=\begin{cases}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},\frac{1}{2}),h=1\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_{\{A_\varsigma}(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma\}}(\hat{p},-\frac{1}{2}),h=0\\ \lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{1}{2}),h=-1\end{cases}$$

推论4.6.2. $\lambda_{A_\varsigma B_\varsigma}(\hat{p},h)=\lambda_{B_\varsigma A_\varsigma}(\hat{p},h),-1\leq h\leq 1$

性质4.6.1. $\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})=\frac{i}{2}(\sigma,i\varsigma)^a\hat{p}_a\sigma_y$

推论4.6.3. $[(\sigma\otimes I)\cdot(I\otimes\sigma)][\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})+\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]=[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})+\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]$

证明: $\sigma\cdot[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})+\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]\sigma^T$

$=\frac{i}{2}\sigma\cdot[(\sigma,-i\varsigma)^a\hat{p}_a\sigma_y+(\sigma,i\varsigma)^a\hat{p}_a\sigma_y]\sigma^T$

$=\sigma\cdot[i(\sigma\cdot\hat{p})\sigma_y]\sigma^T$

$=[\sigma_x i(\sigma\cdot\hat{p})\sigma_y\sigma_x^T+\sigma_y i(\sigma\cdot\hat{p})\sigma_y\sigma_y^T+\sigma_z i(\sigma\cdot\hat{p})\sigma_y\sigma_z^T]$

$=[\sigma_x i(\sigma\cdot\hat{p})\sigma_y\sigma_x^T+\sigma_y i(\sigma\cdot\hat{p})\sigma_y\sigma_y^T+\sigma_z i(\sigma\cdot\hat{p})\sigma_y\sigma_z^T]$

$=i(\sigma\cdot\hat{p})\sigma_y=[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})+\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]$ □

推论4.6.4.

$$\begin{cases}[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]^2[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})+\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]=2[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})+\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]\\ [\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]\cdot\hat{p}[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})+\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]=0[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})+\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]\end{cases}$$

4.7 推论-自旋基分解:$0=\frac{1}{2}\ominus\frac{1}{2}$

推论4.7.1. $F_{A_\varsigma B_\varsigma}(\hat{p},h)=\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_{[A_\varsigma}(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma]}(\hat{p},-\frac{1}{2}),h=0$

推论4.7.2. $[(\sigma\otimes I)\cdot(I\otimes\sigma)][\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]=-3[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]$

证明: $\sigma\cdot[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]\sigma^T$

$=\frac{i}{2}\sigma\cdot[(\sigma,-i\varsigma)^a\hat{p}_a\sigma_y-(\sigma,i\varsigma)^a\hat{p}_a\sigma_y]\sigma^T$

$=\sigma\cdot(i\varsigma\sigma_y)\sigma^T$

$=\sigma_x(i\varsigma\sigma_y)\sigma_x^T+\sigma_y(i\varsigma\sigma_y)\sigma_y^T+\sigma_z(i\varsigma\sigma_y)\sigma_z^T$

$=-3(i\varsigma\sigma_y)=-3[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^T(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]$ □

推论4.7.3.

$$\begin{cases}[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]^2[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]=0[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]\\ [\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]\cdot\hat{p}[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]=0[\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{-\varsigma}{2})-\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})]\end{cases}$$

推论4.7.4. $u(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})}{\sqrt{2m(E+\kappa\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}m\\ \varsigma E+\kappa|\vec{p}|\end{bmatrix},v(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})}{\sqrt{2m(E+\kappa\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}-m\\ \varsigma E+\kappa|\vec{p}|\end{bmatrix}$

4.8 推论-自旋基分解:$s=(s-1)\oplus 1$

定理4.8.1. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots B_\varsigma C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h)=\sum_{h'=1}^{-1}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1+h'}C_{s-h}^{1-h'}}}{\sqrt{C_{2s}^2}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2(s-1)}}(\hat{p},h-h')\lambda_{B_\varsigma C_\varsigma}(\hat{p},h'),s\geq 1,-s\leq h\leq s$

证明: $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots B_\varsigma C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h)$

$$= \frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots B_\varsigma}_{2s-1}}(\hat{p},h-\tfrac{1}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},\tfrac{1}{2}) + \frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots B_\varsigma}_{2s-1}}(\hat{p},h+\tfrac{1}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}[\frac{\sqrt{s+h-1}}{\sqrt{2s-1}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s-2}}(\hat{p},h-1)\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},\tfrac{1}{2}) + \frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s-1}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(\hat{p},h)\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})]\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},\tfrac{1}{2})$$

$$+ \frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}[\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s-1}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s-2}}(\hat{p},h)\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},\tfrac{1}{2}) + \frac{\sqrt{s-h-1}}{\sqrt{2s-1}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(\hat{p},h+1)\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})]\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$= [\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}\frac{\sqrt{s+h-1}}{\sqrt{2s-1}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s-2}}(\hat{p},h-1)\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},\tfrac{1}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},\tfrac{1}{2}) + \frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s-1}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(\hat{p},h)\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},\tfrac{1}{2})]$$

$$+ [\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s-1}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s-2}}(\hat{p},h)\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},\tfrac{1}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{1}{2}) + \frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}\frac{\sqrt{s-h-1}}{\sqrt{2s-1}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(\hat{p},h+1)\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})]$$

$$= \frac{\sqrt{C^2_{s+h}C^0_{s-h}}}{\sqrt{C^2_{2s}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s-2}}(\hat{p},h-1)\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},\tfrac{1}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},\tfrac{1}{2}) + \frac{\sqrt{C^1_{s+h}C^1_{s-h}}}{\sqrt{C^2_{2s}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s-2}}(\hat{p},h)\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_{\{B_\varsigma}(\hat{p},\tfrac{1}{2})\lambda_{C_\varsigma\}}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$+ \frac{\sqrt{C^0_{s+h}C^2_{s-h}}}{\sqrt{C^2_{2s}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(\hat{p},h+1)\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{\sqrt{C^2_{s+h}C^0_{s-h}}}{\sqrt{C^2_{2s}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s-2}}(\hat{p},h-1)\lambda_{B_\varsigma C_\varsigma}(\hat{p},1) + \frac{\sqrt{C^1_{s+h}C^1_{s-h}}}{\sqrt{C^2_{2s}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s-2}}(\hat{p},h)\lambda_{B_\varsigma C_\varsigma}(\hat{p},0)$$

$$+ \frac{\sqrt{C^0_{s+h}C^2_{s-h}}}{\sqrt{C^2_{2s}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(\hat{p},h+1)\lambda_{B_\varsigma C_\varsigma}(\hat{p},-1)$$

$$= \sum_{h'=1}^{-1}\frac{\sqrt{C^{1+h'}_{s+h}C^{1-h'}_{s-h}}}{\sqrt{C^2_{2s}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2(s-1)}}(\hat{p},h-h')\lambda_{B_\varsigma C_\varsigma}(\hat{p},h')$$ □

推论4.8.1. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots B_\varsigma C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h) = \lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots C_\varsigma B_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h), s\geq 1, -s\leq h\leq s$

4.9 推论-自旋基分解:$s+s'=s\oplus s'$

定理4.9.1. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{B_\varsigma\cdots C_\varsigma}_{2s'}}(\hat{p},h) = \sum_{h'=s'}^{-s'}\frac{\sqrt{C^{s'+h'}_{s+s'+h}C^{s'-h'}_{s+s'-h}}}{\sqrt{C^{2s'}_{2(s+s')}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},h-h')\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdots C_\varsigma}_{2s'}}(\hat{p},h'), -s-s'\leq h\leq s+s'$

证明: 对s'采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$s''=\frac{1}{2}$时成立：

$$\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{C_\varsigma}_{1}}(\hat{p},h) = \sum_{h'=1/2}^{-1/2}\frac{\sqrt{C^{1/2+h'}_{s+1/2+h}C^{1/2-h'}_{s+1/2-h}}}{\sqrt{C^1_{2(s+1/2)}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},h-h')\lambda_{\underbrace{C_\varsigma}_{1}}(\hat{p},h'), -s-\tfrac{1}{2}\leq h\leq s+\tfrac{1}{2}$$

第二步：假设$s''=s'-\frac{1}{2}$时成立：

$$\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{B_\varsigma\cdots}_{2s'-1}}(\hat{p},h) = \sum_{h'=s'-1/2}^{-s'+1/2}\frac{\sqrt{C^{s'-1/2+h'}_{s+s'-1/2+h}C^{s'-1/2-h'}_{s+s'-1/2-h}}}{\sqrt{C^{2s'-1}_{2(s+s')-1}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},h-h')\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdots}_{2s'-1}}(\hat{p},h')$$

$$-s-s'+\tfrac{1}{2}\leq h\leq s+s'-\tfrac{1}{2}$$

第三步：$s''=s'$时：$-s-s'\leq h\leq s+s', \lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{B_\varsigma\cdots C_\varsigma}_{2s'}}(\hat{p},h)$

$$= \frac{\sqrt{s+s'+h}}{\sqrt{2(s+s')}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{B_\varsigma\cdots}_{2s'-1}}(\hat{p},h-\tfrac{1}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},\tfrac{1}{2}) + \frac{\sqrt{s+s'-h}}{\sqrt{2(s+s')}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{B_\varsigma\cdots}_{2s'-1}}(\hat{p},h+\tfrac{1}{2})\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{\sqrt{s+s'+h}}{\sqrt{2(s+s')}}[\sum_{h'=s'-1/2}^{-s'+1/2}\frac{\sqrt{C^{s'-1/2+h'}_{s+s'-1+h}C^{s'-1/2-h'}_{s+s'-h}}}{\sqrt{C^{2s'-1}_{2(s+s')-1}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},h-\tfrac{1}{2}-h')\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdots}_{2s'-1}}(\hat{p},h')]\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},\tfrac{1}{2})$$

$$+ [\sum_{h'=s'-1/2}^{-s'+1/2}\frac{\sqrt{C^{s'-1/2+h'}_{s+s'+h}C^{s'-1/2-h'}_{s+s'-1-h}}}{\sqrt{C^{2s'-1}_{2(s+s')-1}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},h+\tfrac{1}{2}-h')\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdots}_{2s'-1}}(\hat{p},h')]\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$= [\sum_{h'=s'}^{-s'+1}\frac{\sqrt{C^{s'-1+h'}_{s+s'-1+h}C^{s'-h'}_{s+s'-h}}}{\sqrt{C^{2s'}_{2(s+s')}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},h-h')\frac{\sqrt{s+s'+h}}{\sqrt{2s'}}\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdots}_{2s'-1}}(\hat{p},h'-\tfrac{1}{2})]\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},\tfrac{1}{2})$$

$$+[\sum_{h'=s'-1}^{-s'}\frac{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-1-h}^{s'-1-h'}}}{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\hat{p},h-h')\frac{\sqrt{s+s'-h}}{\sqrt{2s'}}\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\hat{p},h'+\tfrac{1}{2})]\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$=[\sum_{h'=s'}^{-s'+1}\frac{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-h}^{s'-h'}}}{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\hat{p},h-h')\frac{\sqrt{s'+h'}}{\sqrt{2s'}}\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\hat{p},h'-\tfrac{1}{2})]\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},\tfrac{1}{2})$$

$$+[\sum_{h'=s'-1}^{-s'}\frac{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-h}^{s'-h'}}}{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\hat{p},h-h')\frac{\sqrt{s'-h'}}{\sqrt{2s'}}\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\hat{p},h'+\tfrac{1}{2})]\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$=[\sum_{h'=s'}^{-s'}\frac{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-h}^{s'-h'}}}{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\hat{p},h-h')\frac{\sqrt{s'+h'}}{\sqrt{2s'}}\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\hat{p},h'-\tfrac{1}{2})]\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},\tfrac{1}{2})$$

$$+[\sum_{h'=s'}^{-s'}\frac{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-h}^{s'-h'}}}{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\hat{p},h-h')\frac{\sqrt{s'-h'}}{\sqrt{2s'}}\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'-1}}(\hat{p},h'+\tfrac{1}{2})]\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{1}{2})$$

$$=\sum_{h'=s'}^{-s'}\frac{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-h}^{s'-h'}}}{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\hat{p},h-h')\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s'}}(\hat{p},h'),-s-s'\le h\le s+s'$$

此步证明了$s''=s'$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

推论4.9.1. $-s_1-s_2\le h\le s_1+s_2$

$$\begin{cases}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\hat{p},h)=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\frac{\sqrt{C_{s_1+s_2+h}^{s_2+h_2}C_{s_1+s_2-h}^{s_2-h_2}}}{\sqrt{C_{2(s_1+s_2)}^{2s_2}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\hat{p},h_1)\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\hat{p},h_2)\delta(h-h_1-h_2)\\ \lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\hat{p},h)=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\frac{\sqrt{C_{s_1+s_2+h}^{s_1+h_1}C_{s_1+s_2-h}^{s_1-h_1}}}{\sqrt{C_{2(s_1+s_2)}^{2s_1}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\hat{p},h_1)\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\hat{p},h_2)\delta(h-h_1-h_2)\end{cases}$$

推论4.9.2. $-s_1-s_2\le h\le s_1+s_2,\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\hat{p},h)$

$$=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}[\frac{(2s_1)!(2s_2)!}{(2s_1+2s_2)!}\frac{(s_1+h_1+s_2+h_2)!}{(s_1+h_1)!(s_2+h_2)!}\frac{(s_1-h_1+s_2-h_2)!}{(s_1-h_1)!(s_2-h_2)!}]^{1/2}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\hat{p},h_1)\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\hat{p},h_2)\delta(h-h_1-h_2)$$

4.10 推论-自旋基反向合成

推论4.10.1. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\hat{p},h-h')=\frac{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-h}^{s'-h'}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s'}}(\hat{p},h)\lambda^{+\overbrace{B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}^{2s'}}(\hat{p},h'),-s-s'\le h\le s+s'$

推论4.10.2. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\hat{p},h-h')=\frac{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-h}^{s'-h'}}}\lambda^{+\overbrace{B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}^{2s'}}(\hat{p},h')\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s'}\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\hat{p},h),-s-s'\le h\le s+s'$

4.11 推论-自旋基分解:$s_1+s_2+s_3=s_1\oplus s_2\oplus s_3$

推论4.11.1. $-s_1-s_2-s_3\le h\le s_1+s_2+s_3,\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}\underbrace{C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_3}}(\hat{p},h)$

$$=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\sum_{h_3=s_3}^{-s_3}[\frac{(2s_1)!(2s_2)!(2s_3)!}{(2s_1+2s_2+2s_3)!}\frac{(s_1+h_1+s_2+h_2+s_3+h_3)!}{(s_1+h_1)!(s_2+h_2)!(s_3+h_3)!}\frac{(s_1-h_1+s_2-h_2+s_3-h_3)!}{(s_1-h_1)!(s_2-h_2)!(s_3-h_3)!}]^{1/2}$$
$$\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\hat{p},h_1)\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\hat{p},h_2)\lambda_{\underbrace{C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_3}}(\hat{p},h_3)\delta(h-h_1-h_2-h_3)$$

证明: $-s_1-s_2-s_3\le h\le s_1+s_2+s_3,\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}\underbrace{C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_3}}(\hat{p},h)$

$$=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_{23}=s_2+s_3}^{-s_2-s_3}[\frac{(2s_1)!(2s_2+2s_3)!}{(2s_1+2s_2+2s_3)!}\frac{(s_1+h_1+s_2+s_3+h_{23})!}{(s_1+h_1)!(s_2+s_3+h_{23})!}\frac{(s_1-h_1+s_2+s_3-h_{23})!}{(s_1-h_1)!(s_2+s_3-h_{23})!}]^{1/2}$$
$$\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\hat{p},h_1)\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}\underbrace{C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_3}}(\hat{p},h_{23})\delta(h-h_1-h_{23})$$

$$=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_{23}=s_2+s_3}^{-s_2-s_3}[\frac{(2s_1)!(2s_2+2s_3)!}{(2s_1+2s_2+2s_3)!}\frac{(s_1+h_1+s_2+s_3+h_{23})!}{(s_1+h_1)!(s_2+s_3+h_{23})!}\frac{(s_1-h_1+s_2+s_3-h_{23})!}{(s_1-h_1)!(s_2+s_3-h_{23})!}]^{1/2}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\hat{p},h_1)\delta(h-h_1-h_{23})$$

$$\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\sum_{h_3=s_3}^{-s_3}[\frac{(2s_2)!(2s_3)!}{(2s_2+2s_3)!}\frac{(s_2+h_2+s_3+h_3)!}{(s_2+h_2)!(s_3+h_3)!}\frac{(s_2-h_2+s_3-h_3)!}{(s_2-h_2)!(s_3-h_3)!}]^{1/2}\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\hat{p},h_2)\lambda_{\underbrace{C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_3}}(\hat{p},h_3)\delta(h_{23}-h_2-h_3)$$

$$=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\sum_{h_3=s_3}^{-s_3}[\frac{(2s_1)!(2s_2)!(2s_3)!}{(2s_1+2s_2+2s_3)!}\frac{(s_1+h_1+s_2+h_2+s_3+h_3)!}{(s_1+h_1)!(s_2+h_2)!(s_3+h_3)!}\frac{(s_1-h_1+s_2-h_2+s_3-h_3)!}{(s_1-h_1)!(s_2-h_2)!(s_3-h_3)!}]^{1/2}$$

$$\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\hat{p},h_1)\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\hat{p},h_2)\lambda_{\underbrace{C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_3}}(\hat{p},h_3)\delta(h-h_1-h_2-h_3)$$ □

4.12 推论-自旋基分解:$s_1+s_2\cdot\cdot+s_n=s_1\oplus s_2\cdot\cdot\oplus s_n$

推论4.12.1. $-\sum_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum_{i=1}^{n}s_i,\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}\cdot\cdot\underbrace{C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}(\hat{p},h)$

$$=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\cdot\cdot\sum_{h_n=s_n}^{-s_n}[\frac{\prod_{i=1}^{n}(2s_i)!}{[\sum_{i=1}^{n}(2s_i)]!}\frac{[\sum_{i=1}^{n}(s_i+h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(s_i+h_i)!}\frac{[\sum_{i=1}^{n}(s_i-h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(s_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\hat{p},h_1)\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\hat{p},h_2)\cdot\cdot\lambda_{\underbrace{C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}(\hat{p},h_n)\delta(h-\sum_{i=1}^{n}h_i)$$

4.13 一个重要的数学推论

推论4.13.1. $\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\cdot\cdot\sum_{h_n=s_n}^{-s_n}\frac{[\sum_{i=1}^{n}(s_i+h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(s_i+h_i)!}\frac{[\sum_{i=1}^{n}(s_i-h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(s_i-h_i)!}\delta(h-\sum_{i=1}^{n}h_i)=\frac{[\sum_{i=1}^{n}(2s_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(2s_i)!},-\sum_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum_{i=1}^{n}s_i$

4.14 推论-自旋基分解:$s=\frac{1}{2}\oplus\frac{1}{2}\cdot\cdot\oplus\frac{1}{2}$

推论4.14.1. $-s\le h\le s$

$$\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\sum_{h_1=1/2}^{-1/2}\sum_{h_2=1/2}^{-1/2}\cdot\cdot\sum_{h_n=1/2}^{-1/2}[\frac{(s+h)!(s-h)!}{(2s)!}]^{\frac{1}{2}}\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\vec{p},h_1)\lambda_{B_\varsigma}(\vec{p},h_2)\cdot\cdot\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p},h_n)}_{2s}\delta(h-\sum_{i=1}^{n}h_i)$$

推论4.14.2. $-s\le h\le s$

$$\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2s)!}\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\lambda_{\{\underbrace{A_\varsigma(\vec{p},\frac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot}_{s+h}\underbrace{\cdot\cdot\lambda_{C_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\lambda_{D_\varsigma\}}(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{s-h}}$$

推论4.14.3. $-s\le h\le s,\forall s$

$$\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h-\frac{1}{2})\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p},h+\frac{1}{2})\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$$

$\Leftrightarrow$

$$\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{(2s)!}\sqrt{C_{2s}^{s-h}}\lambda_{\{\underbrace{A_\varsigma(\vec{p},\frac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot}_{s+h}\underbrace{\cdot\cdot\lambda_{C_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\lambda_{D_\varsigma\}}(\vec{p},-\frac{1}{2})}_{s-h}}$$

4.15 推论-$\lambda_{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma}(\hat{p},h)$的全对称性

定理4.15.1. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h)=\frac{1}{(2s)!}\lambda_{\underbrace{\{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma\}}_{2s}}(\hat{p},h),-s\le h\le s$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$s'=\frac{1}{2},1$时成立：

$\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},h)=\frac{1}{1!}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},h),-\frac{1}{2}\le h\le\frac{1}{2};\lambda_{A_\varsigma B_\varsigma}(\hat{p},h)=\frac{1}{2!}\lambda_{\{A_\varsigma B_\varsigma\}}(\hat{p},h),-1\le h\le 1$

第二步：假设$s'=s-\frac{1}{2}$时成立：

$\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma}_{2s-1}}(\hat{p},h)=\frac{1}{(2s-1)!}\lambda_{\underbrace{\{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma\}}_{2s-1}}(\hat{p},h),-s+\frac{1}{2}\le h\le s-\frac{1}{2}$

第三步：$1\le s'=s$时：$-s\le h\le s,\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h)$

$$=\sum_{h'=1/2}^{-1/2}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1/2+h'}C_{s-h}^{1/2-h'}}}{\sqrt{C_{2s}^{1}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma}_{2s-1}}(\hat{p},h-h')\lambda_{C_\varsigma}(\hat{p},h')=\sum_{h'=1}^{-1}\frac{\sqrt{C_{s+h}^{1+h'}C_{s-h}^{1-h'}}}{\sqrt{C_{2s}^{2}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2(s-1)}}(\hat{p},h-h')\lambda_{B_\varsigma C_\varsigma}(\hat{p},h')$$

$$\Rightarrow\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h)=\frac{1}{(2s-1)!}\lambda_{\underbrace{\{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma\}C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h),\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h)=\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma B_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h),-s\le h\le s$$

$$\Leftrightarrow\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma}_{2s}}(\hat{p},h)=\frac{1}{(2s)!}\lambda_{\underbrace{\{A_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma B_\varsigma\}}_{2s}}(\hat{p},h),-s\le h\le s$$

此步证明了$s'=s$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

5 自旋方程自旋基的重新梳理分析

5.1 定义-自旋基分解:$s=(s-\frac{1}{2})\oplus\frac{1}{2}$

定义5.1.1. $-s\le h\le s$

$$\lambda_{k_\varsigma}(\hat p,h;s)=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma\cdots B_\varsigma}^{2s+1}}_{k_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s}}[\tfrac{\sqrt{s+h}}{\sqrt{2s}}\lambda_{l_\varsigma}(\hat p,h-\tfrac{1}{2};s-\tfrac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,\tfrac{1}{2})+\tfrac{\sqrt{s-h}}{\sqrt{2s}}\lambda_{l_\varsigma}(\hat p,h+\tfrac{1}{2};s-\tfrac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,-\tfrac{1}{2})]$$

推论5.1.1. $\lambda(\hat p,h;s)=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma\cdots B_\varsigma}^{2s+1}}_{k_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma\cdots}_{2s}}\sum_{h'=1/2}^{-1/2}\frac{\sqrt{C^{1/2+h'}_{s+h}C^{1/2-h'}_{s-h}}}{\sqrt{C^1_{2s}}}\lambda(\hat p,h-h';s-\frac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat p,h'),-s\le h\le s$

推论5.1.2. $\lambda(\hat p,h;s)=N^{A_\varsigma}(s)\sum_{h'=1/2}^{-1/2}\frac{\sqrt{C^{1/2+h'}_{s+h}C^{1/2-h'}_{s-h}}}{\sqrt{C^1_{2s}}}\lambda(\hat p,h-h';s-\frac{1}{2})\lambda_{A_\varsigma}(\hat p,h'),-s\le h\le s$

5.2 推论-$\lambda(\hat p,h;s)$是自旋本征态

定理5.2.1. $[\sigma(s)\cdot\hat p]\lambda(\hat p,h;s)=h\lambda(\hat p,h;s),-s\le h\le s$

定理5.2.2. $\sigma^2(s)\lambda(\hat p,h;s)=s(s+1)\lambda(\hat p,h;s),-s\le h\le s$

所以$\lambda(\hat p,h;s)$是自旋本征态，所以展开系数是**CG** 系数。

5.3 推论-自旋本征态$\lambda(\hat p,h;s)$的升降算符

定理5.3.1.

$$\begin{cases}e^{i\vec\omega\cdot\sigma(s)}\sigma_x(s)e^{-i\vec\omega\cdot\sigma(s)}=\sigma_x(s)-\hat p_x\frac{\sigma(s)\cdot\hat p+\sigma_z(s)}{(1+\hat p_z)}\\ e^{i\vec\omega\cdot\sigma(s)}\sigma_y(s)e^{-i\vec\omega\cdot\sigma(s)}=\sigma_y(s)-\hat p_y\frac{\sigma(s)\cdot\hat p+\sigma_z(s)}{(1+\hat p_z)}\\ e^{i\vec\omega\cdot\sigma(s)}\sigma_z(s)e^{-i\vec\omega\cdot\sigma(s)}=\sigma(s)\cdot\hat p\end{cases}$$

证明: $e^{i\vec\omega\cdot\sigma(s)}\sigma_i(s)e^{-i\vec\omega\cdot\sigma(s)}=(e^{-i\vec\omega\cdot\gamma})_i{}^j\sigma_j(s)$

$=[1-i(\gamma\times\hat p)_z-(\gamma\times\hat p)_z^2/(1+\hat p_z)]_i{}^j\sigma_j(s)$

$=[1-i(\gamma_x\hat p_y-\gamma_y\hat p_x)-(\gamma_x\hat p_y-\gamma_y\hat p_x)^2/(1+\hat p_z)]_i{}^j\sigma_j(s)$

$$=[1-i\begin{bmatrix}0&0&-i\hat p_x\\0&0&-i\hat p_y\\i\hat p_x&i\hat p_y&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\hat p_x^2&\hat p_x\hat p_y&0\\\hat p_x\hat p_y&\hat p_y^2&0\\0&0&\hat p_x^2+\hat p_y^2\end{bmatrix}/(1+\hat p_z)]_i{}^j\sigma_j(s)$$

$$=[1-\begin{bmatrix}\hat p_x^2&\hat p_x\hat p_y&\hat p_x(1+\hat p_z)\\\hat p_x\hat p_y&\hat p_y^2&\hat p_y(1+\hat p_z)\\-\hat p_x(1+\hat p_z)&-\hat p_y(1+\hat p_z)&\hat p_x^2+\hat p_y^2\end{bmatrix}/(1+\hat p_z)]_i{}^j\sigma_j(s)$$

$$=\sigma_i(s)-[\begin{bmatrix}\hat p_x^2&\hat p_x\hat p_y&\hat p_x\hat p_z+\hat p_x\\\hat p_x\hat p_y&\hat p_y^2&\hat p_y\hat p_z+\hat p_y\\-\hat p_x(1+\hat p_z)&-\hat p_y(1+\hat p_z)&(1-\hat p_z)(1+\hat p_z)\end{bmatrix}/(1+\hat p_z)]_i{}^j\sigma_j(s)$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma_x(s)-\hat p_x[\sigma_z(s)+\sigma(s)\cdot\hat p]/(1+\hat p_z)\\\sigma_y(s)-\hat p_y[\sigma_z(s)+\sigma(s)\cdot\hat p]/(1+\hat p_z)\\\sigma(s)\cdot\hat p\end{bmatrix}_i$$ □

定义5.3.1.

$$\begin{cases}\hat J_x(\hat p,\sigma(s)):=\bar\Gamma(s)\hat J_x(\hat p,\Omega(s))\Gamma(s)=\{\sigma_x(s)-\frac{\hat p_x}{(1+\hat p_z)}[\sigma(s)\cdot\hat p+\sigma_z(s)]\}\\ \hat J_y(\hat p,\sigma(s)):=\bar\Gamma(s)\hat J_y(\hat p,\Omega(s))\Gamma(s)=\{\sigma_y(s)-\frac{\hat p_y}{(1+\hat p_z)}[\sigma(s)\cdot\hat p+\sigma_z(s)]\}\\ \hat J_z(\hat p,\sigma(s)):=\bar\Gamma(s)\hat J_z(\hat p,\Omega(s))\Gamma(s)=\sigma(s)\cdot\hat p\end{cases}$$

推论5.3.1.

$$\begin{cases}\hat J_x^2(\hat p,\sigma(\frac{1}{2}))=\frac{1}{4},\hat J_y^2(\hat p,\sigma(\frac{1}{2}))=\frac{1}{4},\hat J_z^2(\hat p,\sigma(\frac{1}{2}))=\frac{1}{4}\\ [\hat J_i(\hat p,\sigma(s)),\hat J_j(\hat p,\sigma(s))]=\varepsilon_{ij}{}^k\hat J_k(\hat p,\sigma(s)),\hat J^2(\hat p,\sigma(s))=s(s+1)\end{cases}$$

推论5.3.2.

$$\begin{cases}\hat{J}_+(\hat{p},\sigma(s)) := \bar{\Gamma}(s)\hat{J}_+(\hat{p},\Omega(s))\Gamma(s) = \{[\sigma_x(s)+i\sigma_y(s)] - \frac{(\hat{p}_x+i\hat{p}_y)}{(1+\hat{p}_z)}[\sigma(s)\cdot\hat{p}+\sigma_z(s)]\} \\ \hat{J}_-(\hat{p},\sigma(s)) := \bar{\Gamma}(s)\hat{J}_-(\hat{p},\Omega(s))\Gamma(s) = \{[\sigma_x(s)-i\sigma_y(s)] - \frac{(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)}{(1+\hat{p}_z)}[\sigma(s)\cdot\hat{p}+\sigma_z(s)]\} \\ \hat{J}_z(\hat{p},\sigma(s)) := \bar{\Gamma}(s)\hat{J}_z(\hat{p},\Omega(s))\Gamma(s) = \sigma(s)\cdot\hat{p}\end{cases}$$

推论5.3.3.

$$\begin{cases}\hat{J}_+(\hat{p},\sigma(s))\lambda(\vec{p},h;s) = \sqrt{s(s+1)-h(h+1)}\lambda(\vec{p},h+1;s), -s\le h\le s \\ \hat{J}_-(\hat{p},\sigma(s))\lambda(\vec{p},h;s) = \sqrt{s(s+1)-h(h-1)}\lambda(\vec{p},h-1;s), -s\le h\le s \\ \hat{J}_z(\hat{p},\sigma(s))\lambda(\vec{p},h;s) = h\lambda(\vec{p},h;s), -s\le h\le s\end{cases}$$

推论5.3.4. $\hat{J}^2 = \hat{J}_z^2 + \frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_+\hat{J}_-)$

$$\begin{cases}\hat{J}^2(\hat{p},\sigma(s))\lambda(\vec{p},h;s) = s(s+1)\lambda(\vec{p},h;s), -s\le h\le s \\ \hat{J}_z(\hat{p},\sigma(s))\lambda(\vec{p},h;s) = h\lambda(\vec{p},h;s), -s\le h\le s\end{cases}$$

5.4 推论-$\lambda_{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma C_\varsigma}(\hat{p},h)$的正交性

定理5.4.1. $\lambda^+(\hat{p},h';s)\lambda(\hat{p},h;s) = \delta_{hh'}, -s\le h\le s$

5.5 推论-自旋基分解:$1 = \frac{1}{2}\oplus\frac{1}{2}$

推论5.5.1.

$$\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},h;1) = \Gamma_{k_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma}[\frac{\sqrt{1+h}}{\sqrt{2}}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},h-\frac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{1-h}}{\sqrt{2}}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},h+\frac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{1}{2})], -1\le h\le 1$$

5.6 推论-自旋基分解:$s+s' = s\oplus s'$

定理5.6.1.

$$\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},h;s+s') = \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma\cdot\cdot}^{2s+2s'}}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s'}}\sum_{h'=s'}^{-s'}\frac{\sqrt{C_{s+s'+h}^{s'+h'}C_{s+s'-h}^{s'-h'}}}{\sqrt{C_{2(s+s')}^{2s'}}}\lambda_{l_\varsigma}(\hat{p},h-h';s)\lambda_{m_\varsigma}(\hat{p},h';s'), -s-s'\le h\le s+s'$$

5.7 推论-自旋基分解:$s_1+s_2\cdot\cdot+s_n = s_1\oplus s_2\cdot\cdot\oplus s_n$

推论5.7.1. $-\sum_{i=1}^n s_i\le h\le\sum_{i=1}^n s_i, \lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},h;\sum_{i=1}^n s_i) = \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}^{2s_1}\overbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}^{2s_2}\cdots\overbrace{C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s_n}}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}\cdots\Gamma^{n_\varsigma}_{\underbrace{C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}$

$$\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\cdot\cdot\sum_{h_n=s_n}^{-s_n}[\frac{\prod_{i=1}^n(2s_i)!}{[\sum_{i=1}^n(2s_i)]!}\frac{[\sum_{i=1}^n(s_i+h_i)]!}{\prod_{i=1}^n(s_i+h_i)!}\frac{[\sum_{i=1}^n(s_i-h_i)]!}{\prod_{i=1}^n(s_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}\lambda_{l_\varsigma}(\hat{p},h_1;s_1)\lambda_{m_\varsigma}(\hat{p},h_2;s_2)\cdot\cdot\lambda_{n_\varsigma}(\hat{p},h_n;s_n)\delta(h-\sum_{i=1}^n h_i)$$

5.8 引入一个新的常数不变张量

定义5.8.1. $\Gamma_{k_\varsigma}^{l_\varsigma m_\varsigma\cdot\cdot n_\varsigma} := \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}^{2s_1}\overbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}^{2s_2}\cdots\overbrace{C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s_n}}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}\cdots\Gamma^{n_\varsigma}_{\underbrace{C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}$

推论5.8.1. $-\sum_{i=1}^n s_i\le h\le\sum_{i=1}^n s_i, \lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},h;\sum_{i=1}^n s_i) = \sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\cdot\cdot\sum_{h_n=s_n}^{-s_n}$

$$[\frac{\prod_{i=1}^n(2s_i)!}{[\sum_{i=1}^n(2s_i)]!}\frac{[\sum_{i=1}^n(s_i+h_i)]!}{\prod_{i=1}^n(s_i+h_i)!}\frac{[\sum_{i=1}^n(s_i-h_i)]!}{\prod_{i=1}^n(s_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}\Gamma_{k_\varsigma}^{l_\varsigma m_\varsigma\cdot\cdot n_\varsigma}\lambda_{l_\varsigma}(\hat{p},h_1;s_1)\lambda_{m_\varsigma}(\hat{p},h_2;s_2)\cdot\cdot\lambda_{n_\varsigma}(\hat{p},h_n;s_n)\delta(h-\sum_{i=1}^n h_i)$$

6 关于自旋基的幺正变换

6.1 常数不变张量:动量变换等价于幺正变换

定义6.1.1. $\hat{p}' = A(\hat{p}\to\hat{p}')\hat{p}, A(\hat{p}\to\hat{p}') := exp\{i\frac{(\gamma\times\hat{p}')_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z'^2}}arccos\hat{p}_z'\}exp\{-i\frac{(\gamma\times\hat{p})_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}$

$= [1+i(\gamma\times\hat{p}')_z - (\gamma\times\hat{p}')_z^2/(1+\hat{p}_z')][1-i(\gamma\times\hat{p})_z - (\gamma\times\hat{p})_z^2/(1+\hat{p}_z)]$

推论6.1.1.

$$\begin{cases}[\sigma(s)\cdot\hat{p}']=[\sigma(s)\cdot A(\hat{p}\to\hat{p}')\hat{p}]=[A(\hat{p}'\to\hat{p})\sigma(s)\cdot\hat{p}]\\ =exp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}']_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z'^2}}arccos\hat{p}_z'\}exp\{-i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}[\sigma(s)\cdot\hat{p}]exp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}exp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}']_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z'^2}}arccos\hat{p}_z'\}\\ [\Omega(s)\cdot\hat{p}']=[\Omega(s)\cdot A(\hat{p}\to\hat{p}')\hat{p}]=[A(\hat{p}'\to\hat{p})\Omega(s)\cdot\hat{p}]\\ =exp\{i\frac{[\Omega(s)\times\hat{p}']_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z'^2}}arccos\hat{p}_z'\}exp\{-i\frac{[\Omega(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}[\Omega(s)\cdot\hat{p}]exp\{i\frac{[\Omega(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}exp\{i\frac{[\Omega(s)\times\hat{p}']_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z'^2}}arccos\hat{p}_z'\}\end{cases}$$

推论6.1.2.

$$\begin{cases}[\Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\cdot\hat{p}']=[\Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\cdot A(\hat{p}\to\hat{p}')\hat{p}]=[A(\hat{p}'\to\hat{p})\Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\cdot\hat{p}]\\ =exp\{i\frac{[\Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\times\hat{p}']_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z'^2}}arccos\hat{p}_z'\}exp\{-i\frac{[\Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}[\Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\cdot\hat{p}]\\ exp\{i\frac{[\Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}exp\{i\frac{[\Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\times\hat{p}']_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z'^2}}arccos\hat{p}_z'\}\\ [\Omega(s;R)\cdot\hat{p}']=[\Omega(s;R)\cdot A(\hat{p}\to\hat{p}')\hat{p}]=[A(\hat{p}'\to\hat{p})\Omega(s;R)\cdot\hat{p}]\\ =exp\{i\frac{[\Omega(s;R)\times\hat{p}']_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z'^2}}arccos\hat{p}_z'\}exp\{-i\frac{[\Omega(s;R)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}[\Omega(s;R)\cdot\hat{p}]\\ exp\{i\frac{[\Omega(s;R)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}exp\{i\frac{[\Omega(s;R)\times\hat{p}']_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z'^2}}arccos\hat{p}_z'\}\end{cases}$$

推论6.1.3.

$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\hat{p}=e^{i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)}\sigma_z e^{-i\vec{\omega}\cdot\sigma(s)},\Omega(s)\cdot\hat{p}=e^{i\vec{\omega}\cdot\Omega(s)}\Omega_z(s)e^{-i\vec{\omega}\cdot\Omega(s)}\\ \Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\cdot\hat{p}=e^{i\vec{\omega}\cdot\Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)}\Omega_z(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)e^{-i\vec{\omega}\cdot\Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)}\\ \Omega(s;R)\cdot\hat{p}=e^{i\vec{\omega}\cdot\Omega(s;R)}\Omega_z(s;R)e^{-i\vec{\omega}\cdot\Omega(s;R)}\end{cases}$$

推论6.1.4.

$$\begin{cases}\sigma(s)\cdot\hat{p}=exp\{i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\sigma_z exp\{-i\frac{[\sigma(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\\ \Omega(s)\cdot\hat{p}=exp\{i\frac{[\Omega(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\Omega_z(s)exp\{-i\frac{[\Omega(s)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\\ \Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\cdot\hat{p}=exp\{i\frac{[\Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\Omega_z(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)exp\{-i\frac{[\Omega(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\\ \Omega(s;R)\cdot\hat{p}=exp\{i\frac{[\Omega(s;R)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\Omega_z(s;R)exp\{-i\frac{[\Omega(s;R)\times\hat{p}]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_z^2}}arccos\hat{p}_z\}\end{cases}$$

6.2 物理自旋基分解:$1=\frac{1}{2}\oplus\frac{1}{2}$

推论6.2.1. $\lambda_{A_\varsigma B_\varsigma}(\hat{p}',\hat{p},h)=\frac{\sqrt{1+h}}{\sqrt{2}}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}',h-\frac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{1-h}}{\sqrt{2}}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}',h+\frac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{1}{2})$

推论6.2.2. $\lambda_{A_\varsigma B_\varsigma}(\hat{p}',\hat{p},h)=\begin{cases}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}',\frac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},\frac{1}{2}),h=1\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_{\{A_\varsigma}(\hat{p}',\frac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma\}}(\hat{p},-\frac{1}{2}),h=0\\ \lambda_{A_\varsigma}(\hat{p}',-\frac{1}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{1}{2}),h=-1\end{cases}$

推论6.2.3. $\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)$对 $=\begin{cases}\lambda(\hat{p}',\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2}),h=1\\ \frac{1}{\sqrt{2}}[\lambda(\hat{p}',\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})+\lambda(\hat{p}',-\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})],h=0\\ \lambda(\hat{p}',-\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2}),h=-1\end{cases}$

推论6.2.4. $\lambda^+(\hat{p}',\hat{p},h')\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)=\delta_{hh'}$

推论6.2.5. $\tilde{\lambda}(\hat{p}',\hat{p},h)$不对 $=\begin{cases}\lambda(\hat{p}',\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})+\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p}',\frac{1}{2}),h=1\\ \lambda(\hat{p}',\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})+\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p}',\frac{1}{2}),h=0\\ \lambda(\hat{p}',-\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})+\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\otimes\lambda(\hat{p}',-\frac{1}{2}),h=-1\end{cases}$

推论6.2.6.

$$\begin{cases}\{[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}']\otimes I+I\otimes[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]\}\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)=h\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)\\ \{[A(\hat{p}'\to\hat{p})\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]\otimes I+I\otimes[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]\}\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)=h\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)\end{cases}$$

推论6.2.7.

$$\begin{cases}[A(\hat{p}'\to\hat{p})\sigma(\frac{1}{2})]\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p}',h)=h\lambda(\hat{p}',h),-\frac{1}{2}\le h\le\frac{1}{2}\\ [A(\hat{p}'\to\hat{p})\sigma(\frac{1}{2})]^2\lambda(\hat{p}',h)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\lambda(\hat{p}',h)\end{cases}\quad\begin{cases}[\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}]\lambda(\hat{p},h)=h\lambda(\hat{p},h),-\frac{1}{2}\le h\le\frac{1}{2}\\ [\sigma(\frac{1}{2})]^2\lambda(\hat{p},h)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\lambda(\hat{p},h)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\{[A(\hat{p}'\to\hat{p})\sigma(\frac{1}{2})]\otimes I\}\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)=\frac{h}{2}\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)\\ \{[A(\hat{p}'\to\hat{p})\sigma(\frac{1}{2})]\otimes I\}^2\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)\end{cases}\quad\begin{cases}\{I\otimes\sigma(\frac{1}{2})\}\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)=\frac{h}{2}\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)\\ \{I\otimes\sigma(\frac{1}{2})\}^2\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\{[A(\hat{p}'\to\hat{p})\sigma(\frac{1}{2})]\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})\}\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)=h\lambda(\hat{p}',\hat{p},h),-1\le h\le 1\\ \{[A(\hat{p}'\to\hat{p})\sigma(\frac{1}{2})]\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})\}^2\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)=1(1+1)\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)\end{cases}$$

推论6.2.8. $\lambda^+(\hat{p}',\hat{p},h)\{[A(\hat{p}'\to\hat{p})\sigma(\frac{1}{2})]\otimes I\}\cdot\{I\otimes\sigma(\frac{1}{2})\}\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)=\frac{1}{4}\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)$

推论6.2.9. $\{[A(\hat{p}'\to\hat{p})\sigma(\frac{1}{2})]\otimes I\}\cdot\{I\otimes\sigma(\frac{1}{2})\}\lambda(\hat{p}',\hat{p},h)=?$

推论6.2.10. $H=-\sum\limits_{i,j}k_{ij}[A(\hat{p}_i)\sigma_i(\frac{1}{2})]\cdot[A(\hat{p}_j)\sigma_j(\frac{1}{2})]$

6.3 幺正变换→B-W方程自旋基分解的z-方向表象:$s_1+s_2\cdot\cdot+s_n=s_1\oplus s_2\cdot\cdot\oplus s_n$

定义6.3.1. $-\sum\limits_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum\limits_{i=1}^{n}s_i,U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}\cdot\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h):=\sum\limits_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum\limits_{h_2=s_2}^{-s_2}\cdot\cdot\sum\limits_{h_n=s_n}^{-s_n}$

$$[\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(2s_i)!}{[\sum\limits_{i=1}^{n}(2s_i)]!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s_i+h_i)!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i-h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h_1)U_{\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h_2)\cdot\cdot U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h_n)\delta(h-\sum\limits_{i=1}^{n}h_i)$$

推论6.3.1.
$$\begin{cases}\Omega^2(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h)=s(s+1)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h),-s\le h\le s\\ \Omega_z(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h)=hU_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h),-s\le h\le s\end{cases}$$

定义6.3.2. $-\sum\limits_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum\limits_{i=1}^{n}s_i,V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}\cdot\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h):=\sum\limits_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum\limits_{h_2=s_2}^{-s_2}\cdot\cdot\sum\limits_{h_n=s_n}^{-s_n}$

$$[\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(2s_i)!}{[\sum\limits_{i=1}^{n}(2s_i)]!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s_i+h_i)!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i-h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h_1)V_{\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h_2)\cdot\cdot V_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h_n)\delta(h-\sum\limits_{i=1}^{n}h_i)$$

推论6.3.2.
$$\begin{cases}\Omega^2(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h)=s(s+1)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h),-s\le h\le s\\ \Omega_z(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h)=hV_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h),-s\le h\le s\end{cases}$$

6.4 幺正变换→B-W方程自旋基分解的静止表象:$s_1+s_2\cdot\cdot+s_n=s_1\oplus s_2\cdot\cdot\oplus s_n$

定义6.4.1. $-\sum\limits_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum\limits_{i=1}^{n}s_i,U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}\cdot\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}(\vec{0},h):=\sum\limits_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum\limits_{h_2=s_2}^{-s_2}\cdot\cdot\sum\limits_{h_n=s_n}^{-s_n}$

$$[\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(2s_i)!}{[\sum\limits_{i=1}^{n}(2s_i)]!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s_i+h_i)!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i-h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\vec{0},h_1)U_{\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\vec{0},h_2)\cdot\cdot U_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}(\vec{0},h_n)\delta(h-\sum\limits_{i=1}^{n}h_i)$$

推论6.4.1.
$$\begin{cases}\Omega^2(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{0},h)=s(s+1)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{0},h),-s\le h\le s\\ \Omega_z(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{0},h)=hU_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{0},h),-s\le h\le s\end{cases}$$

定义6.4.2. $-\sum\limits_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum\limits_{i=1}^{n}s_i,V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}\cdot\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}(\vec{0},h):=\sum\limits_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum\limits_{h_2=s_2}^{-s_2}\cdot\cdot\sum\limits_{h_n=s_n}^{-s_n}$

$$[\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(2s_i)!}{[\sum\limits_{i=1}^{n}(2s_i)]!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s_i+h_i)!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i-h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\vec{0},h_1)V_{\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\vec{0},h_2)\cdot\cdot V_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}(\vec{0},h_n)\delta(h-\sum\limits_{i=1}^{n}h_i)$$

推论6.4.2. $$\begin{cases}\Omega^2(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{0},h)=s(s+1)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{0},h),-s\le h\le s\\ \Omega_z(s;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{0},h)=hV_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{0},h),-s\le h\le s\end{cases}$$

6.5 幺正变换→K-G方程自旋基分解的z-方向表象:$s_1+s_2\cdot\cdot+s_n=s_1\oplus s_2\cdot\cdot\oplus s_n$

定义6.5.1. $-\sum\limits_{i=1}^{n}n_i\le h\le\sum\limits_{i=1}^{n}n_i,\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{2n_1}\underbrace{b\cdot\cdot}_{2n_2}\cdot\cdot\underbrace{c\cdot\cdot}_{2n_n}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h)$

$$:=\sum_{h_1=n_1}^{-n_1}\sum_{h_2=n_2}^{-n_2}\cdot\cdot\sum_{h_n=n_n}^{-n_n}[\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(2n_i)!}{[\sum\limits_{i=1}^{n}(2n_i)]!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(n_i+h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(n_i+h_i)!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(n_i-h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(n_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{2n_1}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h_1)\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{2n_2}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h_2)\cdot\cdot\varepsilon_{\underbrace{c\cdot\cdot}_{2n_n}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h_n)\delta(h-\sum_{i=1}^{n}h_i)$$

推论6.5.1. $$\begin{cases}\Omega^2(n;R)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h)=n(n+1)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h),-n\le h\le n\\ \Omega_z(n;R)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h)=h\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\begin{bmatrix}0\\0\\p\end{bmatrix},h),-n\le h\le n\end{cases}$$

6.6 幺正变换→K-G方程自旋基分解的静止表象:$s_1+s_2\cdot\cdot+s_n=s_1\oplus s_2\cdot\cdot\oplus s_n$

定义6.6.1. $-\sum\limits_{i=1}^{n}n_i\le h\le\sum\limits_{i=1}^{n}n_i,\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{2n_1}\underbrace{b\cdot\cdot}_{2n_2}\cdot\cdot\underbrace{c\cdot\cdot}_{2n_n}}(\vec{0},h)$

$$:=\sum_{h_1=n_1}^{-n_1}\sum_{h_2=n_2}^{-n_2}\cdot\cdot\sum_{h_n=n_n}^{-n_n}[\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(2n_i)!}{[\sum\limits_{i=1}^{n}(2n_i)]!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(n_i+h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(n_i+h_i)!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(n_i-h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(n_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdot\cdot}_{2n_1}}(\vec{0},h_1)\varepsilon_{\underbrace{b\cdot\cdot}_{2n_2}}(\vec{0},h_2)\cdot\cdot\varepsilon_{\underbrace{c\cdot\cdot}_{2n_n}}(\vec{0},h_n)\delta(h-\sum_{i=1}^{n}h_i)$$

推论6.6.1. $$\begin{cases}\Omega^2(n;R)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{0},h)=n(n+1)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{0},h),-n\le h\le n\\ \Omega_z(n;R)\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{0},h)=h\varepsilon_{\underbrace{a\otimes\cdot\cdot\otimes b\otimes c}_{n}}(\vec{0},h),-n\le h\le n\end{cases}$$

6.7 幺正变换→Penrose方程自旋基分解的z-方向表象:$s_1+s_2\cdot\cdot+s_n=s_1\oplus s_2\cdot\cdot\oplus s_n$

定义6.7.1. $-\sum\limits_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum\limits_{i=1}^{n}s_i,\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}\cdot\cdot\underbrace{C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h):=\sum\limits_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum\limits_{h_2=s_2}^{-s_2}\cdot\cdot\sum\limits_{h_n=s_n}^{-s_n}$

$$[\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(2s_i)!}{[\sum\limits_{i=1}^{n}(2s_i)]!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s_i+h_i)!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i-h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h_1)\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h_2)\cdot\cdot\lambda_{\underbrace{C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h_n)\delta(h-\sum_{i=1}^{n}h_i)$$

推论6.7.1. $$\begin{cases}\Omega^2(s)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h)=s(s+1)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h),-s\le h\le s\\ \Omega_z(s)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h)=h\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes\cdot\cdot\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma}_{2s}}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h),-s\le h\le s\end{cases}$$

6.8 幺正变换→自旋方程之自旋基分解的z-方向表象:$s_1+s_2\cdot\cdot+s_n=s_1\oplus s_2\cdot\cdot\oplus s_n$

定义6.8.1. $-\sum\limits_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum\limits_{i=1}^{n}s_i,\lambda_{k_\varsigma}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;\sum\limits_{i=1}^{n}s_i):=\sum\limits_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum\limits_{h_2=s_2}^{-s_2}\cdot\cdot\sum\limits_{h_n=s_n}^{-s_n}$

$$[\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(2s_i)!}{[\sum\limits_{i=1}^{n}(2s_i)]!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s_i+h_i)!}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i-h_i)]!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}\Gamma_{k_\varsigma}^{l_\varsigma m_\varsigma\cdot\cdot n_\varsigma}\lambda_{l_\varsigma}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h_1;s_1)\lambda_{m_\varsigma}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h_2;s_2)\cdot\cdot\lambda_{n_\varsigma}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h_n;s_n)\delta(h-\sum_{i=1}^{n}h_i)$$

推论6.8.1. $$\begin{cases}\sigma^2(s)\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)=s(s+1)\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s),-s\le h\le s\\ \sigma_z(s)\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s)=h\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h;s),-s\le h\le s\end{cases}$$

7 幺正变换→自旋基分解的真实物理表象:$s_1+s_2\cdot\cdot+s_n=s_1\oplus s_2\cdot\cdot\oplus s_n$

7.1 有质量任意自旋粒子情形

定义7.1.1.

$$\begin{cases}\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h):=\prod_{i=1}^{n}[\otimes exp\{i\frac{[(\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\times\hat{p}_i]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_{iz}^2}}arccos\hat{p}_{iz}\}\frac{E+m-i|\vec{p}_i|\gamma_z\gamma_4}{\sqrt{2m(E+m)}}]^{2s_i}\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\vec{0},\sum_{i=1}^{n}s_i;h)\\ \hat{J}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a):=\prod_{i=1}^{n}[\otimes exp\{i\frac{[(\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\times\hat{p}_i]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_{iz}^2}}arccos\hat{p}_{iz}\}\frac{E+m-i|\vec{p}_i|\gamma_z\gamma_4}{\sqrt{2m(E+m)}}]^{2s_i}\\ \Omega(\sum_{i=1}^{n}s_i;\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\prod_{i=1}^{n}[\otimes\frac{E+m+i|\vec{p}_i|\gamma_z\gamma_4}{\sqrt{2m(E+m)}}exp\{-i\frac{[(\sigma(\frac{1}{2})\otimes I)\times\hat{p}_i]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_{iz}^2}}arccos\hat{p}_{iz}\}]^{2s_i}\end{cases}$$

推论7.1.1. $-\sum_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum_{i=1}^{n}s_i,\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}}_{2s_1}\underbrace{_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}}_{2s_2}\cdot\underbrace{_{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}}_{2s_n}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h):=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\cdot\cdot\sum_{h_n=s_n}^{-s_n}$

$$[\frac{\prod_{i=1}^{n}(2s_i)!}{[\sum_{i=1}^{n}(2s_i)]!}\frac{[\sum_{i=1}^{n}(s_i+h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(s_i+h_i)!}\frac{[\sum_{i=1}^{n}(s_i-h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(s_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}}_{2s_1}(\vec{p}_1,h_1)\underbrace{U_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}}_{2s_2}(\vec{p}_2,h_2)\cdot\cdot\underbrace{U_{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}}_{2s_n}(\vec{p}_n,h_n)\delta(h-\sum_{i=1}^{n}h_i)$$

推论7.1.2.

$$\begin{cases}\hat{J}_+(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a)\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)=\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}s_i)(\sum_{i=1}^{n}s_i+1)-h(h+1)}\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h+1)\\ \hat{J}_-(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a)\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)=\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}s_i)(\sum_{i=1}^{n}s_i+1)-h(h-1)}\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h-1)\\ \hat{J}_z(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a)\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)=h\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h),-\sum_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum_{i=1}^{n}s_i\\ \hat{Q}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a)\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)=-2s\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)\end{cases}$$

推论7.1.3.

$$\begin{cases}\hat{J}^2(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a)\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)=(\sum_{i=1}^{n}s_i)(\sum_{i=1}^{n}s_i+1)\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)\\ \hat{J}^2(\vec{p}_i,*\frac{1}{2};\gamma_a)\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)\\ \hat{J}_z(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a)\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)=h\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)\\ \hat{Q}(\vec{p}_i,*\frac{1}{2};\gamma_a)\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)=-\underbrace{U_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot}}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)\\ [\hat{J}_\alpha(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a),\hat{J}_\beta(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a)]=\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\hat{J}_\gamma(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a),-\sum_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum_{i=1}^{n}s_i\end{cases}$$

− −

推论7.1.4. $-\sum_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum_{i=1}^{n}s_i,\underbrace{V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}}_{2s_1}\underbrace{_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}}_{2s_2}\cdot\underbrace{_{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}}_{2s_n}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h):=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\cdot\cdot\sum_{h_n=s_n}^{-s_n}$

$$[\frac{\prod_{i=1}^{n}(2s_i)!}{[\sum_{i=1}^{n}(2s_i)]!}\frac{[\sum_{i=1}^{n}(s_i+h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(s_i+h_i)!}\frac{[\sum_{i=1}^{n}(s_i-h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(s_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}\underbrace{V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}}_{2s_1}(\vec{p}_1,h_1)\underbrace{V_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}}_{2s_2}(\vec{p}_2,h_2)\cdot\cdot\underbrace{V_{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\cdot\cdot}}_{2s_n}(\vec{p}_n,h_n)\delta(h-\sum_{i=1}^{n}h_i)$$

推论7.1.5.

$$\begin{cases}\hat{J}_+(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdots}_{2(s_1+\cdots+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)=\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}s_i)(\sum_{i=1}^{n}s_i+1)-h(h+1)}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdots}_{2(s_1+\cdots+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h+1)\\ \hat{J}_-(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdots}_{2(s_1+\cdots+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)=\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}s_i)(\sum_{i=1}^{n}s_i+1)-h(h-1)}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdots}_{2(s_1+\cdots+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h-1)\\ \hat{J}_z(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdots}_{2(s_1+\cdots+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)=hV_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdots}_{2(s_1+\cdots+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h),-\sum_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum_{i=1}^{n}s_i\\ \hat{Q}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdots}_{2(s_1+\cdots+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)=2sV_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdots}_{2(s_1+\cdots+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)\end{cases}$$

推论7.1.6.

$$\begin{cases}\hat{J}^2(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdots}_{2(s_1+\cdots+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)=(\sum_{i=1}^{n}s_i)(\sum_{i=1}^{n}s_i+1)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdots}_{2(s_1+\cdots+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)\\ \hat{J}^2(\vec{p}_i,*\frac{1}{2};\gamma_a)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdots}_{2(s_1+\cdots+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdots}_{2(s_1+\cdots+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)\\ \hat{J}_z(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdots}_{2(s_1+\cdots+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)=hV_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdots}_{2(s_1+\cdots+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)\\ \hat{Q}(\vec{p}_i,*\frac{1}{2};\gamma_a)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdots}_{2(s_1+\cdots+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)=V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdots}_{2(s_1+\cdots+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);h)\\ [\hat{J}_\alpha(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a),\hat{J}_\beta(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a)]=\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\hat{J}_\gamma(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,s_i);\gamma_a),-\sum_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum_{i=1}^{n}s_i\end{cases}$$

7.2 有质量整数自旋粒子情形

定义7.2.1.

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots}_{l_1}\underbrace{b\cdots}_{l_2}\cdots\underbrace{c\cdots}_{l_n}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);h):=\prod_{i=1}^{n}[\otimes exp\{i\frac{[R\times\hat{p}_i]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_{iz}^2}}arccos\hat{p}_{iz}\}\frac{m-|\vec{p}_i|L_z+(E_i-m)L_z^2}{m}]^{l_i}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots}_{l_1}\underbrace{b\cdots}_{l_2}\cdots\underbrace{c\cdots}_{l_n}}(\vec{0},h)\\ \hat{J}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);R):=\prod_{i=1}^{n}[\otimes exp\{i\frac{[R\times\hat{p}_i]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_{iz}^2}}arccos\hat{p}_{iz}\}\frac{m-|\vec{p}_i|L_z+(E_i-m)L_z^2}{m}]^{l_i}\\ \Omega(\sum_{i=1}^{n}l_i;R)\prod_{i=1}^{n}[\otimes\frac{m+|\vec{p}_i|L_z+(E_i-m)L_z^2}{m}exp\{-i\frac{[R\times\hat{p}_i]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_{iz}^2}}arccos\hat{p}_{iz}\}]^{l_i}\end{cases}$$

推论7.2.1. $-\sum_{i=1}^{n}l_i\le h\le\sum_{i=1}^{n}l_i,\varepsilon_{\underbrace{a\cdots}_{l_1}\underbrace{b\cdots}_{l_2}\cdots\underbrace{c\cdots}_{l_n}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);h)$

$$:=\sum_{h_1=l_1}^{-l_1}\sum_{h_2=l_2}^{-l_2}\cdots\sum_{h_n=l_n}^{-l_n}[\frac{\prod_{i=1}^{n}(2l_i)!}{[\sum_{i=1}^{n}(2l_i)]!}\frac{[\sum_{i=1}^{n}(l_i+h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(l_i+h_i)!}\frac{[\sum_{i=1}^{n}(l_i-h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(l_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots}_{l_1}}(\vec{p}_1,h_1)\varepsilon_{\underbrace{b\cdots}_{l_2}}(\vec{p}_2,h_2)\cdots\varepsilon_{\underbrace{c\cdots}_{l_n}}(\vec{p}_n,h_n)\delta(h-\sum_{i=1}^{n}h_i)$$

推论7.2.2.

$$\begin{cases}\hat{J}_+(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);R)\varepsilon_{\underbrace{a\cdots}_{l_1}\underbrace{b\cdots}_{l_2}\cdots\underbrace{c\cdots}_{l_n}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);h)=\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}l_i)(\sum_{i=1}^{n}l_i+1)-h(h+1)}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots}_{l_1}\underbrace{b\cdots}_{l_2}\cdots\underbrace{c\cdots}_{l_n}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);h+1)\\ \hat{J}_-(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);R)\varepsilon_{\underbrace{a\cdots}_{l_1}\underbrace{b\cdots}_{l_2}\cdots\underbrace{c\cdots}_{l_n}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);h)=\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}l_i)(\sum_{i=1}^{n}l_i+1)-h(h-1)}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots}_{l_1}\underbrace{b\cdots}_{l_2}\cdots\underbrace{c\cdots}_{l_n}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);h-1)\\ \hat{J}_z(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);R)\varepsilon_{\underbrace{a\cdots}_{l_1}\underbrace{b\cdots}_{l_2}\cdots\underbrace{c\cdots}_{l_n}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);h)=h\varepsilon_{\underbrace{a\cdots}_{l_1}\underbrace{b\cdots}_{l_2}\cdots\underbrace{c\cdots}_{l_n}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);h),-\sum_{i=1}^{n}l_i\le h\le\sum_{i=1}^{n}l_i\end{cases}$$

推论7.2.3.

$$\begin{cases}\hat{J}^2(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);R)\varepsilon_{\underbrace{a\cdots}_{l_1}\underbrace{b\cdots}_{l_2}\cdots\underbrace{c\cdots}_{l_n}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);h)=(\sum_{i=1}^{n}l_i)(\sum_{i=1}^{n}l_i+1)\varepsilon_{\underbrace{a\cdots}_{l_1}\underbrace{b\cdots}_{l_2}\cdots\underbrace{c\cdots}_{l_n}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);h)\\ \hat{J}^2(\vec{p}_i,*1;R,L)\varepsilon_{\underbrace{a\cdots}_{l_1}\underbrace{b\cdots}_{l_2}\cdots\underbrace{c\cdots}_{l_n}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);h)=1(1+1)\varepsilon_{\underbrace{a\cdots}_{l_1}\underbrace{b\cdots}_{l_2}\cdots\underbrace{c\cdots}_{l_n}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);h)\\ \hat{J}_z(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);R)\varepsilon_{\underbrace{a\cdots}_{l_1}\underbrace{b\cdots}_{l_2}\cdots\underbrace{c\cdots}_{l_n}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);h)=h\varepsilon_{\underbrace{a\cdots}_{l_1}\underbrace{b\cdots}_{l_2}\cdots\underbrace{c\cdots}_{l_n}}(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);h)\\ [\hat{J}_\alpha(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);R),\hat{J}_\beta(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);R)]=\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\hat{J}_\gamma(\prod_{i=1}^{n}(\vec{p}_i,l_i);R),-\sum_{i=1}^{n}l_i\le h\le\sum_{i=1}^{n}l_i\end{cases}$$

7.3 无质量任意自旋粒子情形

定义7.3.1.

$$\begin{cases}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);h):=\prod_{i=1}^{n}\otimes exp\{i\frac{[\sigma(\frac{1}{2})\times\hat{p}_i]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_{iz}^2}}arccos\hat{p}_{iz}\}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}}(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h)\\ \hat{J}(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);\sigma(\frac{1}{2})):=\prod_{i=1}^{n}\otimes exp\{i\frac{[\sigma(\frac{1}{2})\times\hat{p}_i]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_{iz}^2}}arccos\hat{p}_{iz}\}\Omega(s)\prod_{i=1}^{n}\otimes exp\{-i\frac{[\sigma(\frac{1}{2})\times\hat{p}_i]_z}{\sqrt{1-\hat{p}_{iz}^2}}arccos\hat{p}_{iz}\}\end{cases}$$

推论7.3.1. $-\sum_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum_{i=1}^{n}s_i,\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}\cdot\cdot\underbrace{C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);h)$

$$:=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\cdot\cdot\sum_{h_n=s_n}^{-s_n}[\frac{\prod_{i=1}^{n}(2s_i)!}{[\sum_{i=1}^{n}(2s_i)]!}\frac{[\sum_{i=1}^{n}(s_i+h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(s_i+h_i)!}\frac{[\sum_{i=1}^{n}(s_i-h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(s_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_1}}(\hat{p}_1,h_1)\lambda_{\underbrace{B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_2}}(\hat{p}_2,h_2)\cdot\cdot\lambda_{\underbrace{C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s_n}}(\hat{p}_n,h_n)\delta(h-\sum_{i=1}^{n}h_i)$$

推论7.3.2.

$$\begin{cases}\hat{J}_+(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);\sigma(\frac{1}{2}))\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);h)=\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}s_i)(\sum_{i=1}^{n}s_i+1)-h(h+1)}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);h+1)\\ \hat{J}_-(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);\sigma(\frac{1}{2}))\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);h)=\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}s_i)(\sum_{i=1}^{n}s_i+1)-h(h-1)}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);h-1)\\ \hat{J}_z(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);\sigma(\frac{1}{2}))\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);h)=h\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);h),-\sum_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum_{i=1}^{n}s_i\end{cases}$$

推论7.3.3.

$$\begin{cases}\hat{J}^2(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);\sigma(\frac{1}{2}))\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);h)=(\sum_{i=1}^{n}s_i)(\sum_{i=1}^{n}s_i+1)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);h)\\ \hat{J}^2(\hat{p}_i,*\sigma(\frac{1}{2}))\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);h)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);h)\\ \hat{J}_z(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);\sigma(\frac{1}{2}))\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);h)=h\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2(s_1+\cdot\cdot+s_n)}}(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);h),-\sum_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum_{i=1}^{n}s_i\\ [\hat{J}_\alpha(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);\sigma(\frac{1}{2})),\hat{J}_\beta(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);\sigma(\frac{1}{2}))]=\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\hat{J}_\gamma(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);\sigma(\frac{1}{2}))\end{cases}$$

推论7.3.4. $-\sum_{i=1}^{n}s_i\le h\le\sum_{i=1}^{n}s_i,\lambda_{k_\varsigma}(\prod_{i=1}^{n}(\hat{p}_i,s_i);h;\sum_{i=1}^{n}s_i):=\sum_{h_1=s_1}^{-s_1}\sum_{h_2=s_2}^{-s_2}\cdot\cdot\sum_{h_n=s_n}^{-s_n}$

$$[\frac{\prod_{i=1}^{n}(2s_i)!}{[\sum_{i=1}^{n}(2s_i)]!}\frac{[\sum_{i=1}^{n}(s_i+h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(s_i+h_i)!}\frac{[\sum_{i=1}^{n}(s_i-h_i)]!}{\prod_{i=1}^{n}(s_i-h_i)!}]^{\frac{1}{2}}\Gamma_{k_\varsigma}^{l_\varsigma m_\varsigma\cdot\cdot n_\varsigma}\lambda_{l_\varsigma}(\hat{p}_1,h_1;s_1)\lambda_{m_\varsigma}(\hat{p}_2,h_2;s_2)\cdot\cdot\lambda_{n_\varsigma}(\hat{p}_n,h_n;s_n)\delta(h-\sum_{i=1}^{n}h_i)$$

7.4 自我评述

以上各种自旋基是对应的等动量情形通过幺正变换而得来的，除了全对称性破缺之外，其余性质仍全部满足。事实上其全对称性也仍然存在，只是通过幺正变换后被隐藏起来了而已。本质上仍满足全对称性，只是表观上破缺而已。以上自旋基也可以通过反变换回到等动量情形（特别是z-轴方向），所以这也表明多粒子系统总自旋与各个粒子速度无关，完全由粒子内部自由度决定。幺正变换后只有几率是不变、真实的，但物理图像不一定是真实的，比如动量被改变了；也可以换种观点等价认为动量不变，表象改变了，但这样不直观、不自然。我更倾向于前者，更自然更符合物理直观，可以认为此时表达式中动量就是物理、真实的动量，所以此时的自旋基也是物理、真实的自旋基，这些物理自旋基是接下来纠缠态分析的一个有力的数学工具。以上章节的自旋变换关系表达了如下的一个物理系统：多个不同自旋粒子复合成最大总自旋的物理体系，如果局域在足够小的空间，那么它们完全等价于一个高自旋粒子。反之就是纠缠多粒子系统，故纠缠系统是处于完全自由系统和完全束缚系统中间的一个状态，也许各种基本粒子就是通过量子纠缠合成的。这样的自旋基已不再满足原来的方程，而满足新的方程，但新的方程是什么样子的呢？可以进一步研究，也许隐含新的物理内容。

8 自旋耦合和CG系数的一般理论 [37, 44–46]

8.1 单自旋本征态

公理8.1.1. $\begin{cases} \sigma(s)\times\sigma(s)=i\sigma(s), \sigma^2(s)=s(s+1) \\ \sigma^2(s)|s,m=s,\cdots,-s\rangle=s(s+1)|s,m=s,\cdots,-s\rangle \\ \sigma_z(s)|s,m=s,\cdots,-s\rangle=m|s,m=s,\cdots,-s\rangle \end{cases}$

公理8.1.2. $\begin{cases} \hat{J}_k\times\hat{J}_k=i\hat{J}_k \\ \hat{J}_k^2|(j_k,m_k)\rangle=j_k(j_k+1)|(j_k,m_k)\rangle \\ J_{kz}|(j_k,m_k)\rangle=m_k|(j_k,m_k)\rangle \end{cases}, \begin{cases} \hat{J}_k=\sigma(j_k) \\ |(j_k,m_k)\rangle\sim e^{(i\omega+\varsigma\varepsilon)\cdot\sigma(j_k)} \end{cases}$

公理8.1.3. $\langle(j_k,m'_k)|(j_k,m_k)\rangle=\delta_{m'_k m_k}, \sum\limits_{m_k}|(j_k,m_k)\rangle\langle(j_k,m_k)|=1$

8.2 多自旋耦合本征态

定义8.2.1. $|(j_1,m_1);\cdots;(j_n,m_n)\rangle:=|(j_1,m_1)\rangle\otimes\cdots\otimes|(j_n,m_n)\rangle$

定义8.2.2. $\hat{J}_k:=I_{2j_1+1}\otimes\cdots\otimes I_{2j_{k-1}+1}\otimes\sigma(j_k)\otimes I_{2j_{k+1}+1}\otimes\cdots\otimes I_{2j_n+1}, \hat{J}=\sum\limits_{k=1}^{n}\hat{J}_k$

定义8.2.3. $\begin{cases} \hat{J}_k^2|(j_1,m_1);\cdots;(j_n,m_n)\rangle=j_k(j_k+1)|(j_1,m_1);\cdots;(j_n,m_n)\rangle \\ J_{kz}|(j_1,m_1);\cdots;(j_n,m_n)\rangle=m_k|(j_1,m_1);\cdots;(j_n,m_n)\rangle \end{cases}$

定义8.2.4. $\begin{cases} \hat{J}_k^2|j_1,j_2\cdots j_n;(j,m)\rangle=j_k(j_k+1)|j_1,j_2\cdots j_n;(j,m)\rangle \\ \hat{J}^2|j_1,j_2\cdots j_n;(j,m)\rangle=j(j+1)|j_1,j_2\cdots j_n;(j,m)\rangle \\ J_z|j_1,j_2\cdots j_n;(j,m)\rangle=m|j_1,j_2\cdots j_n;(j,m)\rangle \end{cases}$

8.3 自旋本征态展开

推论8.3.1. $\begin{cases} |j_1,j_2\cdots j_n;(j,m)\rangle=\sum\limits_{m_k}|(j_1,m_1);\cdots;(j_n,m_n)\rangle\langle(j_1,m_1);\cdots;(j_n,m_n)|j_1,j_2\cdots j_n;(j,m)\rangle \\ |j_1,j_2;(j,m)\rangle=\sum\limits_{m_k}|(j_1,m_1);(j_2,m_2)\rangle\langle(j_1,m_1);(j_2,m_2)|j_1,j_2;(j,m)\rangle \end{cases}$

$$[\Updownarrow]$$

推论8.3.2. $\begin{cases} |(j_1,m_1);\cdots;(j_n,m_n)\rangle=\sum\limits_{m_k}|j_1,j_2\cdots j_n;(j,m)\rangle\langle j_1,j_2\cdots j_n;(j,m)|(j_1,m_1);\cdots;(j_n,m_n)\rangle \\ |(j_1,m_1);(j_2,m_2)\rangle=\sum\limits_{m_k}|j_1,j_2;(j,m)\rangle\langle j_1,j_2;(j,m)|(j_1,m_1);(j_2,m_2)\rangle \end{cases}$

8.4 自旋本征态的矩阵变换

推论8.4.1. $\begin{cases} |j_1,j_2\cdots j_n;(j,m)\rangle=S_{1\cdots n}|(j_1,m_1);\cdots;(j_n,m_n)\rangle \\ |j_1,j_2;(j,m)\rangle=S_{12}|(j_1,m_1);(j_2,m_2)\rangle \end{cases}$

$$[\Updownarrow]$$

推论8.4.2. $\begin{cases} |(j_1,m_1);\cdots;(j_n,m_n)\rangle=S_{1\cdots n}^{-1}|j_1,j_2\cdots j_n;(j,m)\rangle \\ |(j_1,m_1);(j_2,m_2)\rangle=S_{12}^{-1}|j_1,j_2;(j,m)\rangle \end{cases}$

8.5 自旋本征态的正交性

推论8.5.1. $\begin{cases}\langle (j_1,m_1');\cdots;(j_n,m_n')|(j_1,m_1);\cdots;(j_n,m_n)\rangle=\delta_{m_1'm_1}\cdot\cdot\delta_{m_n'm_n}\\ \langle (j_1,m_1');(j_2,m_2')|(j_1,m_1);(j_2,m_2)\rangle=\delta_{m_1'm_1}\delta_{m_2'm_2}\end{cases}$

$$[\Updownarrow]$$

推论8.5.2. $\begin{cases}\langle j_1,j_2\cdots j_n;(j,m')|j_1,j_2\cdots j_n;(j,m)\rangle=\delta_{m'm}\\ \langle j_1,j_2;(j,m')|j_1,j_2;(j,m)\rangle=\delta_{m'm}\end{cases}$

8.6 自旋本征态的完备性

推论8.6.1. $\begin{cases}\sum\limits_{m_k}|(j_1,m_1);\cdots;(j_n,m_n)\rangle\langle (j_1,m_1);\cdots;(j_n,m_n)|=1\\ \sum\limits_{m_k}|(j_1,m_1);(j_2,m_2)\rangle\langle (j_1,m_1);(j_2,m_2)|=1\end{cases}$

$$[\Updownarrow]$$

推论8.6.2. $\begin{cases}\sum\limits_{m_k}|j_1,j_2\cdots j_n;(j,m)\rangle\langle j_1,j_2\cdots j_n;(j,m)|=1\\ \sum\limits_{m_k}|j_1,j_2;(j,m)\rangle\langle j_1,j_2;(j,m)|=1\end{cases}$

8.7 两个角动量耦合CG系数的一般Racah公式

定理8.7.1. $|j_1,j_2;(j_3,m_3)\rangle=\sum\limits_{m_1=j_1}^{-j_1}\sum\limits_{m_2=j_2}^{-j_2}|(j_1,m_1);(j_2,m_2)\rangle\langle (j_1,m_1);(j_2,m_2)|j_1,j_2;(j_3,m_3)\rangle$

$CG_{Racah}=\langle (j_1,m_1);(j_2,m_2)|j_1,j_2;(j_3,m_3)\rangle=\delta(m_1+m_2-m_3)$

$\{(2j_3+1)\frac{(j_1+j_2-j_3)!(j_1-j_2+j_3)!(-j_1+j_2+j_3)!}{(j_1+j_2+j_3+1)!}(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j_3+m_3)!(j_3-m_3)!\}^{1/2}$

$[\sum\limits_r(-1)^r r!(j_1+j_2-j_3-r)!(j_1-m_1-r)!(j_3-j_1-m_2+r)!(j_2+m_2-r)!(j_3-j_2+m_1+r)!]^{-1}$

8.8 两个粒子合成一个粒子CG系数的Racah公式

定理8.8.1. $|j_1,j_2;(j_1+j_2,m_3)\rangle=\sum\limits_{m_1=j_1}^{-j_1}\sum\limits_{m_2=j_2}^{-j_2}|(j_1,m_1);(j_2,m_2)\rangle\langle (j_1,m_1);(j_2,m_2)|j_1,j_2;(j_1+j_2,m_3)\rangle$

$\langle (j_1,m_1);(j_2,m_2)|j_1,j_2;(j_1+j_2,m_3)\rangle=\delta(m_1+m_2-m_3)\{\frac{(2j_1)!(2j_2)!(j_1+j_2+m_3)!(j_1+j_2-m_3)!}{(2j_1+2j_2)!(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}\}^{1/2}$

证明: $\langle (j_1,m_1);(j_2,m_2)|j_1,j_2;(j_1+j_2,m_3)\rangle$

$=\delta(m_1+m_2-m_3)\{\frac{(2j_1)!(2j_2)!}{(2j_1+2j_2)!}(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j_3+m_3)!(j_3-m_3)!\}^{1/2}$

$[(j_1-m_1)!(j_2-m_2)!(j_2+m_2)!(j_1+m_1)!]^{-1}$

$=\delta(m_1+m_2-m_3)\{\frac{(2j_1)!(2j_2)!(j_1+j_2+m_3)!(j_1+j_2-m_3)!}{(2j_1+2j_2)!(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}\}^{1/2}$ □

推论8.8.1. $|n,1;(n+1,m_3)\rangle=\sum\limits_{m_1=n}^{-n}\sum\limits_{m_2=1}^{-1}|(n,m_1);(1,m_2)\rangle\langle (n,m_1);(1,m_2)|n,1;(n+1,m_3)\rangle$

$\langle (n,m_1);(1,m_2)|n,1;(n+1,m_3)\rangle$

$=\delta(m_1+m_2-m_3)\{\frac{(2n)!2!(n+1+m_3)!(n+1-m_3)!}{(2n+2)!(n+m_1)!(n-m_1)!(1+m_2)!(1-m_2)!}\}^{1/2}=\delta(m_1+m_2-m_3)\{\frac{2!C_{2n}^{n-m_1}}{(1+m_2)!(1-m_2)!C_{2n+2}^{n+1-m_3}}\}^{1/2}$

推论8.8.2.

$$\begin{cases}|n,1;(n+1,n+1)\rangle=\frac{\sqrt{C_{2n}^0}}{\sqrt{C_{2n+2}^0}}|(n,n);(1,1)\rangle\\ |n,1;(n+1,n)\rangle=\frac{\sqrt{C_{2n}^1}}{\sqrt{C_{2n+2}^1}}|(n,n-1);(1,1)\rangle+\frac{\sqrt{2C_{2n}^0}}{\sqrt{C_{2n+2}^1}}|(n,n);(1,0)\rangle\\ |n,1;(n+1,n-1)\rangle=\frac{\sqrt{C_{2n}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}|(n,n-2);(1,1)\rangle+\frac{\sqrt{2C_{2n}^1}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}|(n,n-1);(1,0)\rangle+\frac{\sqrt{C_{2n}^0}}{\sqrt{C_{2n+2}^2}}|(n,n);(1,-1)\rangle\\ |n,1;(n+1,n-2)\rangle=\frac{\sqrt{C_{2n}^3}}{\sqrt{C_{2n+2}^3}}|(n,n-3);(1,1)\rangle+\frac{\sqrt{2C_{2n}^2}}{\sqrt{C_{2n+2}^3}}|(n,n-2);(1,0)\rangle+\frac{\sqrt{C_{2n}^1}}{\sqrt{C_{2n+2}^3}}|(n,n-1);(1,-1)\rangle\\ |n,1;(n+1,n+1-l)\rangle=\frac{\sqrt{C_{2n}^l}}{\sqrt{C_{2n+2}^l}}|(n,n-l);(1,1)\rangle+\frac{\sqrt{2C_{2n}^{l-1}}}{\sqrt{C_{2n+2}^l}}|(n,n+1-l);(1,0)\rangle+\frac{\sqrt{C_{2n}^{l-2}}}{\sqrt{C_{2n+2}^l}}|(n,n+2-l);(1,-1)\rangle\end{cases}$$

8.9 两个粒子合成一个粒子CG系数的具体表述

定理8.9.1. $\langle (j_1,m_1);(j_2,m_2)|j_1,j_2;(j_1+j_2,m_3)\rangle = \delta(m_1+m_2-m_3)\{\frac{(2j_1)!(2j_2)!(j_1+j_2+m_3)!(j_1+j_2-m_3)!}{(2j_1+2j_2)!(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}\}^{1/2}$ $=\delta(m_1+m_2-m_3)\{\frac{}{C_{2j_1+2j_2}^{2j_1}}\}^{1/2}$

推论8.9.1.

$$\begin{cases}\langle (j_1,j_1);(j_2,j_2)|j_1,j_2;(j_1+j_2,j_1+j_2)\rangle = 1\\ \langle (j_1,j_1);(j_2,j_2-1)|j_1,j_2;(j_1+j_2,j_1+j_2-1)\rangle = \frac{\sqrt{2j_2}}{\sqrt{2j_1+2j_2}}\\ \langle (j_1,j_1-1);(j_2,j_2)|j_1,j_2;(j_1+j_2,j_1+j_2-1)\rangle = \frac{\sqrt{2j_1}}{\sqrt{2j_1+2j_2}}\\ \langle (j_1,j_1);(j_2,j_2-2)|j_1,j_2;(j_1+j_2,j_1+j_2-2)\rangle = \frac{\sqrt{2j_2(2j_2-1)}}{\sqrt{(2j_1+2j_2)(2j_1+2j_2-1)}}\\ \langle (j_1,j_1-1);(j_2,j_2-1)|j_1,j_2;(j_1+j_2,j_1+j_2-2)\rangle = \frac{2\sqrt{2j_1j_2}}{\sqrt{(2j_1+2j_2)(2j_1+2j_2-1)}}\\ \langle (j_1,j_1-2);(j_2,j_2)|j_1,j_2;(j_1+j_2,j_1+j_2-2)\rangle = \frac{\sqrt{2j_1(2j_1-1)}}{\sqrt{(2j_1+2j_2)(2j_1+2j_2-1)}}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \langle (j_1,-j_1);(j_2,-j_2+2)|j_1,j_2;(j_1+j_2,-j_1-j_2+2)\rangle = \frac{\sqrt{2j_2(2j_2-1)}}{\sqrt{(2j_1+2j_2)(2j_1+2j_2-1)}}\\ \langle (j_1,-j_1+1);(j_2,-j_2+1)|j_1,j_2;(j_1+j_2,-j_1-j_2+2)\rangle = \frac{2\sqrt{2j_1j_2}}{\sqrt{(2j_1+2j_2)(2j_1+2j_2-1)}}\\ \langle (j_1,-j_1+2);(j_2,-j_2)|j_1,j_2;(j_1+j_2,-j_1-j_2+2)\rangle = \frac{\sqrt{2j_1(2j_1-1)}}{\sqrt{(2j_1+2j_2)(2j_1+2j_2-1)}}\\ \langle (j_1,-j_1);(j_2,-j_2+1)|j_1,j_2;(j_1+j_2,-j_1-j_2+1)\rangle = \frac{\sqrt{2j_2}}{\sqrt{2j_1+2j_2}}\\ \langle (j_1,-j_1+1);(j_2,-j_2)|j_1,j_2;(j_1+j_2,-j_1-j_2+1)\rangle = \frac{\sqrt{2j_1}}{\sqrt{2j_1+2j_2}}\\ \langle (j_1,-j_1);(j_2,-j_2)|j_1,j_2;(j_1+j_2,-j_1-j_2)\rangle = 1\end{cases}$$

推论8.9.2. $\langle (1,m_1);(1,m_2)|1,1;(2,m_3)\rangle = \delta(m_1+m_2-m_3)\{\frac{2!2!(2+m_3)!(2-m_3)!}{4!(1+m_1)!(1-m_1)!(1+m_2)!(1-m_2)!}\}^{1/2}$

推论8.9.3.

$$\begin{cases}\langle (1,1);(1,1)|1,1;(2,2)\rangle = 1\\ \langle (1,1);(1,0)|1,1;(2,1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \langle (1,0);(1,1)|1,1;(2,1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \langle (1,1);(1,-1)|1,1;(2,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}, \langle (1,0);(1,0)|1,1;(2,0)\rangle = \frac{2}{\sqrt{6}}, \langle (1,-1);(1,1)|1,1;(2,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \langle (1,-1);(1,0)|1,1;(2,-1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \langle (1,0);(1,-1)|1,1;(2,-1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \langle (1,-1);(1,-1)|1,1;(2,-2)\rangle = 1\end{cases}$$

推论8.9.4. $\langle (2,m_1);(1,m_2)|2,1;(3,m_3)\rangle = \delta(m_1+m_2-m_3)\{\frac{4!2!(3+m_3)!(3-m_3)!}{6!(2+m_1)!(2-m_1)!(1+m_2)!(1-m_2)!}\}^{1/2}$

推论8.9.5.

$$\begin{cases}\langle (2,2);(1,1)|2,1;(3,3)\rangle = 1\\ \langle (2,2);(1,0)|2,1;(3,2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}, \langle (2,1);(1,1)|2,1;(3,2)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ \langle (2,2);(1,-1)|2,1;(3,1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}}, \langle (2,1);(1,0)|2,1;(3,1)\rangle = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}}, \langle (2,0);(1,1)|2,1;(3,1)\rangle = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}\\ \langle (2,1);(1,-1)|2,1;(3,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}, \langle (2,0);(1,0)|2,1;(3,0)\rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}, \langle (2,-1);(1,1)|2,1;(3,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \langle (2,-2);(1,1)|2,1;(3,-1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}}, \langle (2,-1);(1,0)|2,1;(3,-1)\rangle = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}}, \langle (2,0);(1,-1)|2,1;(3,-1)\rangle = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}\\ \langle (2,-2);(1,0)|2,1;(3,-2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}, \langle (2,-1);(1,-1)|2,1;(3,-2)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ \langle (2,-2);(1,-1)|2,1;(3,-3)\rangle = 1\end{cases}$$

9 多个粒子合成一个粒子的CG系数公式 [37,44–46]

9.1 多个光子合成一个粒子的CG系数公式

引理9.1.1. $|(n+1,m_3)\rangle=|n,1;(n+1,m_3)\rangle=\sum_{m_1=n}^{-n}\sum_{m_2=1}^{-1}|(n,m_1);(1,m_2)\rangle\langle(n,m_1);(1,m_2)|n,1;(n+1,m_3)\rangle$
$=\sum_{m_1=n}^{-n}\sum_{m_2=1}^{-1}\delta(m_1+m_2-m_3)\{\frac{(2n)!2!(n+1+m_3)!(n+1-m_3)!}{(2n+2)!(n+m_1)!(n-m_1)!(1+m_2)!(1-m_2)!}\}^{1/2}|(n,m_1);(1,m_2)\rangle$

定理9.1.1. $|\overbrace{1,\cdot\cdot,1}^{n+1};(n+1,m_{n+1})\rangle=\sum_{m_n=n}^{-n}\cdot\cdot\sum_{m_1=1}^{-1}\sum_{l_1,\cdot\cdot,l_n=1}^{-1}|(1,m_1);(1,l_n);\cdot\cdot;(1,l_1)\rangle$
$\delta(m_n+l_1-m_{n+1})\cdots\delta(m_1+l_n-m_2)\{\frac{2!^{n+1}}{(2n+2)!}\}^{1/2}\{\frac{(n+1+m_{n+1})!(n+1-m_{n+1})!}{(1+m_1)!(1-m_1)!(1+l_1)!(1-l_1)!\cdot\cdot(1+l_n)!(1-l_n)!}\}^{1/2}$

证明: $|\overbrace{1,\cdot\cdot,1}^{n+1};(n+1,m_{n+1})\rangle=\sum_{m_n=n}^{-n}\sum_{l_1=1}^{-1}|(n,m_n);(1,l_1)\rangle\langle(n,m_n);(1,l_1)|n,1;(n+1,m_{n+1})\rangle$
$=\sum_{m_n=n}^{-n}\sum_{l_1=1}^{-1}\delta(m_n+l_1-m_{n+1})\{\frac{(2n)!2!(n+1+m_{n+1})!(n+1-m_{n+1})!}{(2n+2)!(n+m_n)!(n-m_n)!(1+l_1)!(1-l_1)!}\}^{1/2}|(n,m_n);(1,l_1)\rangle$
$=\sum_{m_n=n}^{-n}\sum_{m_{n-1}=n-1}^{-(n-1)}\sum_{l_1,l_2=1}^{-1}|(n-1,m_{n-1});(1,l_2);(1,l_1)\rangle$
$\delta(m_n+l_1-m_{n+1})\delta(m_{n-1}+l_2-m_n)$
$\{\frac{(2n)!2!(n+1+m_{n+1})!(n+1-m_{n+1})!}{(2n+2)!(n+m_n)!(n-m_n)!(1+l_1)!(1-l_1)!}\}^{1/2}\{\frac{(2n-2)!2!(n+m_n)!(n-m_n)!}{(2n)!(n-1+m_{n-1})!(n-1-m_{n-1})!(1+l_2)!(1-l_2)!}\}^{1/2}$
$=\sum_{m_n=n}^{-n}\sum_{m_{n-1}=n-1}^{-(n-1)}\sum_{l_1,l_2=1}^{-1}|(n-1,m_{n-1});(1,l_2);(1,l_1)\rangle\delta(m_n+l_1-m_{n+1})\delta(m_{n-1}+l_2-m_n)\delta(m_{n-2}+l_3-m_{n-1})$
$\{\frac{(2n)!2!(n+1+m_{n+1})!(n+1-m_{n+1})!}{(2n+2)!(n+m_n)!(n-m_n)!(1+l_1)!(1-l_1)!}\}^{1/2}\{\frac{(2n-2)!2!(n+m_n)!(n-m_n)!}{(2n)!(n-1+m_{n-1})!(n-1-m_{n-1})!(1+l_2)!(1-l_2)!}\}^{1/2}$
$\{\frac{(2n-4)!2!(n-1+m_{n-1})!(n-1-m_{n-1})!}{(2n-2)!(n-2+m_{n-2})!(n-2-m_{n-2})!(1+l_3)!(1-l_3)!}\}^{1/2}$
$=\sum_{m_n=n}^{-n}\sum_{m_{n-1}=n-1}^{-(n-1)}\sum_{m_{n-2}=n-2}^{-(n-2)}\sum_{l_1,l_2=1}^{-1}|(n-2,m_{n-2});(1,l_3);(1,l_2);(1,l_1)\rangle$
$\delta(m_n+l_1-m_{n+1})\delta(m_{n-1}+l_2-m_n)\delta(m_{n-2}+l_3-m_{n-1})$
$\{\frac{(2n-4)!2!^3}{(2n+2)!}\}^{1/2}\{\frac{(n+1+m_{n+1})!(n+1-m_{n+1})!}{(n-2+m_{n-2})!(n-2-m_{n-2})!}\}^{1/2}\{\frac{1}{(1+l_1)!(1-l_1)!(1+l_2)!(1-l_2)!(1+l_3)!(1-l_3)!}\}^{1/2}$
$=\sum_{m_n=n}^{-n}\sum_{m_{n-1}=n-1}^{-(n-1)}\cdot\cdot\sum_{m_1=1}^{-1}\sum_{l_1,\cdot\cdot,l_n=1}^{-1}|(1,m_1);(1,l_n);\cdot\cdot;(1,l_1)\rangle$
$\delta(m_n+l_1-m_{n+1})\delta(m_{n-1}+l_2-m_n)\cdots\delta(m_1+l_n-m_2)\{\frac{2!^{n+1}}{(2n+2)!}\}^{1/2}\{\frac{(n+1+m_{n+1})!(n+1-m_{n+1})!}{(1+m_1)!(1-m_1)!(1+l_1)!(1-l_1)!\cdot\cdot(1+l_n)!(1-l_n)!}\}^{1/2}$
$=\sum_{m_1=1}^{-1}\sum_{l_1,\cdot\cdot,l_n=1}^{-1}|(1,m_1);(1,l_n);\cdot\cdot;(1,l_1)\rangle$
$\delta(m_{n+1}-m_1-l_1\cdot\cdot-l_n)\{\frac{2!^{n+1}}{(2n+2)!}\}^{1/2}\{\frac{(n+1+m_{n+1})!(n+1-m_{n+1})!}{(1+m_1)!(1-m_1)!(1+l_1)!(1-l_1)!\cdot\cdot(1+l_n)!(1-l_n)!}\}^{1/2}$ □

推论9.1.1. $|\overbrace{1,\cdot\cdot,1}^{n+1};(n+1,m_{n+1})\rangle=\sum_{m_n=n}^{-n}\cdot\cdot\sum_{m_1=1}^{-1}\sum_{l_1,\cdot\cdot,l_n=1}^{-1}|(1,m_1);(1,l_n);\cdot\cdot;(1,l_1)\rangle$
$\delta(m_n+l_1-m_{n+1})\cdots\delta(m_1+l_n-m_2)\{\frac{2!^{n+1}}{(2n+2)!}\}^{1/2}\{\frac{(n+1+m_{n+1})!(n+1-m_{n+1})!}{(1+m_1)!(1-m_1)!(1+l_1)!(1-l_1)!\cdot\cdot(1+l_n)!(1-l_n)!}\}^{1/2}$
$=\sum_{l_1,\cdot\cdot,l_n=1}^{-1}|(1,m_1);(1,l_1);\cdot\cdot;(1,l_n)\rangle\{\frac{2!^{n+1}}{(2n+2)!}\}^{1/2}\{\frac{(n+1+m_{n+1})!(n+1-m_{n+1})!}{(1+m_1)!(1-m_1)!(1+l_1)!(1-l_1)!\cdot\cdot(1+l_n)!(1-l_n)!}\}^{1/2};m_1=m_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}l_i$
$=\frac{\sqrt{(2!)^{n+1}}}{\sqrt{(2n+2)!}}\sum_{h_2=1}^{-1}\cdot\cdot\sum_{h_{n+1}=1}^{-1}|(1,h_1);\cdot\cdot;(1,h_{n+1})\rangle\frac{\sqrt{(n+1+h)!}}{\sqrt{(1+h_1)!\cdot\cdot(1+h_{n+1})!}}\frac{\sqrt{(n+1-h)!}}{\sqrt{(1-h_1)!\cdot\cdot(1-h_{n+1})!}};h=m_{n+1},h_1=h-\sum_{i=2}^{n+1}h_i$

证明: $|\overbrace{1,\cdot\cdot,1}^{n+1};(n+1,m_{n+1})\rangle=\sum_{m_n=n}^{-n}\cdot\cdot\sum_{m_1=1}^{-1}\sum_{l_1,\cdot\cdot,l_n=1}^{-1}|(1,m_1);(1,l_n);\cdot\cdot;(1,l_1)\rangle$
$\delta(m_n+l_1-m_{n+1})\cdots\delta(m_1+l_n-m_2)\{\frac{2!^{n+1}}{(2n+2)!}\}^{1/2}\{\frac{(n+1+m_{n+1})!(n+1-m_{n+1})!}{(1+m_1)!(1-m_1)!(1+l_1)!(1-l_1)!\cdot\cdot(1+l_n)!(1-l_n)!}\}^{1/2}$
$=\sum_{l_1,\cdot\cdot,l_n=1}^{-1}|(1,m_1);(1,l_1);\cdot\cdot;(1,l_n)\rangle\{\frac{2!^{n+1}}{(2n+2)!}\}^{1/2}\{\frac{(n+1+m_{n+1})!(n+1-m_{n+1})!}{(1+m_1)!(1-m_1)!(1+l_1)!(1-l_1)!\cdot\cdot(1+l_n)!(1-l_n)!}\}^{1/2};m_1=m_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}l_i$
$=\frac{\sqrt{(2!)^{n+1}}}{\sqrt{(2n+2)!}}\sum_{h_2=1}^{-1}\cdot\cdot\sum_{h_{n+1}=1}^{-1}|(1,h_1);\cdot\cdot;(1,h_{n+1})\rangle\frac{\sqrt{(n+1+h)!}}{\sqrt{(1+h_1)!\cdot\cdot(1+h_{n+1})!}}\frac{\sqrt{(n+1-h)!}}{\sqrt{(1-h_1)!\cdot\cdot(1-h_{n+1})!}};h=m_{n+1},h_1=h-\sum_{i=2}^{n+1}h_i$

$$\begin{cases} m_n + l_1 - m_{n+1} = 0 \\ m_{n-1} + l_2 - m_n = 0 \\ \cdots \\ m_2 + l_{n-1} - m_3 = 0 \\ m_1 + l_n - m_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_n = m_{n+1} - \sum\limits_{i=1}^{1} l_i \\ \cdots \\ m_3 = m_{n+1} - \sum\limits_{i=1}^{n-2} l_i \\ m_2 = m_{n+1} - \sum\limits_{i=1}^{n-1} l_i \\ m_1 = m_{n+1} - \sum\limits_{i=1}^{n} l_i \end{cases} \qquad \square$$

以上的证明开始主要通过头脑思考和具体验证解决的，排列组合的东西有的时候虽然可以想明白，但很难清清楚楚，明明白白地写出来。后来找到了以上比较严格的方法证明了它。

9.2 特殊情形下多个角动量耦合的CG系数公式

多个角动量耦合的CG系数原则上可以通过Racah公式的反复使用得到吗？好像只有特殊的单粒子情形下才可行。最一般的情形Racah和Wigner早已经解决了，数学上属于中等难度，只是繁复而已，公式很复杂，物理上使用起来很不方便，所以有些情况下重新获得便利的表述方式还是很有必要的。

定义9.2.1. $j_{k+1} = n_1 + \cdot\cdot + n_k + n_{k+1}, j_k = n_2 + \cdot\cdot + n_k + n_{k+1}, \cdots, j_2 = n_k + n_{k+1}, j_1 = n_{k+1},$

引理9.2.1.
$\langle (j_{k-1}, m_{k-1}); (n_2, l_2) | j_{k-1}, n_2; (j_k, m_k) \rangle = \delta(m_{k-1} + l_k - m_k) \{ \frac{(2j_{k-1})!(2n_2)!(j_k+m_k)!(j_k-m_k)!}{(2j_k)!(j_{k-1}+m_{k-1})!(j_{k-1}-m_{k-1})!(n_2+l_2)!(n_2-l_2)!} \}^{1/2}$

定理9.2.1. $|j_1, n_k, \cdot\cdot, n_2, n_1; (j, m)\rangle = |j_k, n_1; (j, m)\rangle = |(j, m)\rangle$
$= \sum\limits_{m_k=j_k}^{-j_k} \cdot\cdot \sum\limits_{m_1=j_1}^{-j_1} \sum\limits_{l_1=n_1}^{-n_1} \cdot\cdot \sum\limits_{l_k=n_k}^{-n_k} |(j_1, m_1); (n_k, l_k); \cdot\cdot; (n_2, l_2); (n_1, l_1)\rangle$
$\delta(m_k + l_1 - m)\delta(m_{k-1} + l_2 - m_k) \cdot\cdot \delta(m_1 + l_k - m_2)$
$\{(2j+1)\frac{(j_k+n_1-j)!(j_k-n_1+j)!(-j_k+n_1+j)!}{(j_k+n_1+j+1)!}(j_k+m_k)!(j_k-m_k)!(n_1+l_1)!(n_1-l_1)!(j+m)!(j-m)!\}^{1/2}$
$[\sum\limits_r (-1)^r (j_k+n_1-j-r)!(j_k-m_k-r)!(j-j_k-l_1+r)!(n_1+l_1-r)!(j-n_1+m_k-r)!]^{-1}$
$\{\frac{(2j_1)!(j_k+m_k)!(j_k-m_k)!}{(2j_k)!(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!} \frac{(2n_2)!\cdot\cdot(2n_k)!}{(n_2+l_2)!(n_2-l_2)!\cdot\cdot(n_k+l_k)!(n_k-l_k)!}\}^{1/2}$

证明: $|j_k, n_1; (j, m)\rangle = \sum\limits_{m_k=j_k}^{-j_k} \sum\limits_{l_1=n_1}^{-n_1} |(j_k, m_k); (n_1, l_1)\rangle \langle (j_k, m_k); (n_1, l_1) | j_k, n_1; (j, m)\rangle$
$= \sum\limits_{m_k=j_k}^{-j_k} \sum\limits_{l_1=n_1}^{-n_1} |(j_k, m_k); (n_1, l_1)\rangle \delta(m_k + l_1 - m)$
$\{(2j+1)\frac{(j_k+n_1-j)!(j_k-n_1+j)!(-j_k+n_1+j)!}{(j_k+n_1+j+1)!}(j_k+m_k)!(j_k-m_k)!(n_1+l_1)!(n_1-l_1)!(j+m)!(j-m)!\}^{1/2}$
$[\sum\limits_r (-1)^r (j_k+n_1-j-r)!(j_k-m_k-r)!(j-j_k-l_1+r)!(n_1+l_1-r)!(j-n_1+m_k-r)!]^{-1}$
$= \sum\limits_{m_k=j_k}^{-j_k} \sum\limits_{m_{k-1}=j_{k-1}}^{-j_{k-1}} \sum\limits_{l_1=n_1}^{-n_1} \sum\limits_{l_2=n_2}^{-n_2} |(j_{k-1}, m_{k-1}); (n_2, l_2); (n_1, l_1)\rangle \delta(m_k + l_1 - m)\delta(m_{k-1} + l_2 - m_k)$
$\{(2j+1)\frac{(j_k+n_1-j)!(j_k-n_1+j)!(-j_k+n_1+j)!}{(j_k+n_1+j+1)!}(j_k+m_k)!(j_k-m_k)!(n_1+l_1)!(n_1-l_1)!(j+m)!(j-m)!\}^{1/2}$
$[\sum\limits_r (-1)^r (j_k+n_1-j-r)!(j_k-m_k-r)!(j-j_k-l_1+r)!(n_1+l_1-r)!(j-n_1+m_k-r)!]^{-1}$
$\{\frac{(2j_{k-1})!(2n_2)!(j_k+m_k)!(j_k-m_k)!}{(2j_k)!(j_{k-1}+m_{k-1})!(j_{k-1}-m_{k-1})!(n_2+l_2)!(n_2-l_2)!}\}^{1/2}$
$= \sum\limits_{m_k=j_k}^{-j_k} \sum\limits_{m_{k-1}=j_{k-1}}^{-j_{k-1}} \sum\limits_{m_{k-2}=j_{k-2}}^{-j_{k-2}} \sum\limits_{l_1=n_1}^{-n_1} \sum\limits_{l_2=n_2}^{-n_2} \sum\limits_{l_3=n_3}^{-n_3} |j_{k-2}, m_{k-2}; (n_3, l_3); (n_2, l_2); (n_1, l_1)\rangle$
$\delta(m_k + l_1 - m)\delta(m_{k-1} + l_2 - m_k)\delta(m_{k-2} + l_3 - m_{k-1})$
$\{(2j+1)\frac{(j_k+n_1-j)!(j_k-n_1+j)!(-j_k+n_1+j)!}{(j_k+n_1+j+1)!}(j_k+m_k)!(j_k-m_k)!(n_1+l_1)!(n_1-l_1)!(j+m)!(j-m)!\}^{1/2}$
$[\sum\limits_r (-1)^r (j_k+n_1-j-r)!(j_k-m_k-r)!(j-j_k-l_1+r)!(n_1+l_1-r)!(j-n_1+m_k-r)!]^{-1}$
$\{\frac{(2j_{k-1})!(2n_2)!(j_k+m_k)!(j_k-m_k)!}{(2j_k)!(j_{k-1}+m_{k-1})!(j_{k-1}-m_{k-1})!(n_2+l_2)!(n_2-l_2)!}\}^{1/2}\{\frac{(2j_{k-2})!(2n_3)!(j_{k-1}+m_{k-1})!(j_{k-1}-m_{k-1})!}{(2j_{k-1})!(j_{k-2}+m_{k-2})!(j_{k-2}-m_{k-2})!(n_3+l_3)!(n_3-l_3)!}\}^{1/2}$
$= \sum\limits_{m_k=j_k}^{-j_k} \sum\limits_{m_{k-1}=j_{k-1}}^{-j_{k-1}} \sum\limits_{m_{k-2}=j_{k-2}}^{-j_{k-2}} \sum\limits_{l_1=n_1}^{-n_1} \sum\limits_{l_2=n_2}^{-n_2} \sum\limits_{l_3=n_3}^{-n_3} |j_{k-2}, m_{k-2}; (n_3, l_3); (n_2, l_2); (n_1, l_1)\rangle$

$\delta(m_k+l_1-m)\delta(m_{k-1}+l_2-m_k)\delta(m_{k-2}+l_3-m_{k-1})$
$\{(2j+1)\frac{(j_k+n_1-j)!(j_k-n_1+j)!(-j_k+n_1+j)!}{(j_k+n_1+j+1)!}(j_k+m_k)!(j_k-m_k)!(n_1+l_1)!(n_1-l_1)!(j+m)!(j-m)!\}^{1/2}$
$[\sum_r(-1)^r(j_k+n_1-j-r)!(j_k-m_k-r)!(j-j_k-l_1+r)!(n_1+l_1-r)!(j-n_1+m_k-r)!]^{-1}$
$\{\frac{(2j_{k-2})!(j_k+m_k)!(j_k-m_k)!}{(2j_k)!(j_{k-2}+m_{k-2})!(j_{k-2}-m_{k-2})!}\frac{(2n_2)!(2n_3)!}{(n_2+l_2)!(n_2-l_2)!(n_3+l_3)!(n_3-l_3)!}\}^{1/2}$
$=\sum_{m_k=j_k}^{-j_k}\cdot\cdot\sum_{m_1=j_1}^{-j_1}\sum_{l_1=n_1}^{-n_1}\cdot\cdot\sum_{l_k=n_k}^{-n_k}|(j_1,m_1);(n_k,l_k);\cdot\cdot;(n_2,l_2);(n_1,l_1)\rangle$
$\delta(m_k+l_1-m)\delta(m_{k-1}+l_2-m_k)\cdot\cdot\delta(m_1+l_k-m_2)$
$\{(2j+1)\frac{(j_k+n_1-j)!(j_k-n_1+j)!(-j_k+n_1+j)!}{(j_k+n_1+j+1)!}(j_k+m_k)!(j_k-m_k)!(n_1+l_1)!(n_1-l_1)!(j+m)!(j-m)!\}^{1/2}$
$[\sum_r(-1)^r(j_k+n_1-j-r)!(j_k-m_k-r)!(j-j_k-l_1+r)!(n_1+l_1-r)!(j-n_1+m_k-r)!]^{-1}$
$\{\frac{(2j_1)!(j_k+m_k)!(j_k-m_k)!}{(2j_k)!(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!}\frac{(2n_2)!\cdot\cdot(2n_k)!}{(n_2+l_2)!(n_2-l_2)!\cdot\cdot(n_k+l_k)!(n_k-l_k)!}\}^{1/2}$ □

9.3 多个粒子合成一个粒子的CG系数公式

定理9.3.1. $|j_1,n_k,\cdot\cdot,n_1;(j_{k+1},m_{k+1})\rangle ?=|(j_{k+1},m_{k+1})\rangle$
$=\sum_{m_k=j_k}^{-j_k}\cdot\cdot\sum_{m_1=j_1}^{-j_1}\sum_{l_1=n_1}^{-n_1}\cdot\cdot\sum_{l_k=n_k}^{-n_k}|(j_1,m_1);(n_k,l_k);\cdot\cdot;(n_1,l_1)\rangle$
$\delta(m_k+l_1-m_{k+1})\delta(m_{k-1}+l_2-m_k)\cdot\cdot\delta(m_1+l_k-m_2)\{\frac{(2j_1)!(j_{k+1}+m_{k+1})!(j_{k+1}-m_{k+1})!}{(2j_{k+1})!(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!}\frac{(2n_1)!\cdot\cdot(2n_k)!}{(n_1+l_1)!(n_1-l_1)!\cdot\cdot(n_k+l_k)!(n_k-l_k)!}\}^{1/2}$
$=\sum_{l_1=n_1}^{-n_1}\cdot\cdot\sum_{l_k=n_k}^{-n_k}|(j_1,m_1);(n_k,l_k);\cdot\cdot;(n_1,l_1)\rangle\{\frac{(2j_1)!(2n_1)!\cdot\cdot(2n_k)!}{(2j_{k+1})!(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!}\frac{(j_{k+1}+m_{k+1})!(j_{k+1}-m_{k+1})!}{(n_1+l_1)!(n_1-l_1)!\cdot\cdot(n_k+l_k)!(n_k-l_k)!}\}^{1/2}$
$;m_1=m_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}l_i$

$$\begin{cases}m_k+l_1-m_{k+1}=0\\ m_{k-1}+l_2-m_k=0\\ \cdots\\ m_2+l_{k-1}-m_3=0\\ m_1+l_k-m_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m_k=m_{k+1}-\sum_{i=1}^{1}l_i\\ \cdots\\ m_3=m_{k+1}-\sum_{i=1}^{k-2}l_i\\ m_2=m_{k+1}-\sum_{i=1}^{k-1}l_i\\ m_1=m_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}l_i\end{cases}$$

多个光子合成一个粒子的CG系数公式只是它的一个特例。

10 两个角动量耦合CG系数的一些特例

10.1 特例：$\frac{1}{2}\oplus\frac{1}{2}=(0,0)$

定理10.1.1. $|j_1,j_2;(j_3,m_3)\rangle=\sum_{m_1=j_1}^{-j_1}\sum_{m_2=j_2}^{-j_2}|(j_1,m_1);(j_2,m_2)\rangle\langle(j_1,m_1);(j_2,m_2)|j_1,j_2;(j_3,m_3)\rangle$
$CG_{Racah}=\langle(j_1,m_1);(j_2,m_2)|j_1,j_2;(j_3,m_3)\rangle=\delta(m_1+m_2-m_3)$
$\{(2j_3+1)\frac{(j_1+j_2-j_3)!(j_1-j_2+j_3)!(-j_1+j_2+j_3)!}{(j_1+j_2+j_3+1)!}(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j_3+m_3)!(j_3-m_3)!\}^{1/2}$
$[\sum_r(-1)^r r!(j_1+j_2-j_3-r)!(j_1-m_1-r)!(j_3-j_1-m_2+r)!(j_2+m_2-r)!(j_3-j_2+m_1+r)!]^{-1}$

推论10.1.1. $|j_1,\frac{1}{2};(j_3,m_3)\rangle=\sum_{m_1=j_1}^{-j_1}\sum_{m_2=\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}|(j_1,m_1);(\frac{1}{2},m_2)\rangle\langle(j_1,m_1);(\frac{1}{2},m_2)|j_1,\frac{1}{2};(j_3,m_3)\rangle$
$CG_{Racah}=\langle(j_1,m_1);(\frac{1}{2},m_2)|j_1,\frac{1}{2};(j_3,m_3)\rangle=\delta(m_1+m_2-m_3)$
$\{(2j_3+1)\frac{(j_1+\frac{1}{2}-j_3)!(j_1-\frac{1}{2}+j_3)!(-j_1+\frac{1}{2}+j_3)!}{(j_1+\frac{1}{2}+j_3+1)!}(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_3+m_3)!(j_3-m_3)!\}^{1/2}$
$[\sum_r(-1)^r r!(j_1+\frac{1}{2}-j_3-r)!(j_1-m_1-r)!(j_3-j_1-m_2+r)!(\frac{1}{2}+m_2-r)!(j_3-\frac{1}{2}+m_1+r)!]^{-1}$

推论10.1.2.

$$\begin{cases} CG_{Racah} = \langle (j_1, m_1); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) | j_1, \frac{1}{2}; (j_1 + \frac{1}{2}, m_3) \rangle = \delta(m_1 + \frac{1}{2} - m_3) \{ \frac{j_1 + \frac{1}{2} + m_3}{2j_1 + 1} \}^{1/2} \\ CG_{Racah} = \langle (j_1, m_1); (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) | j_1, \frac{1}{2}; (j_1 + \frac{1}{2}, m_3) \rangle = \delta(m_1 - \frac{1}{2} - m_3) \{ \frac{j_1 + \frac{1}{2} - m_3}{2j_1 + 1} \}^{1/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} CG_{Racah} = \langle (j_1, m_1); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) | j_1, \frac{1}{2}; (j_1 - \frac{1}{2}, m_3) \rangle = -\delta(m_1 + \frac{1}{2} - m_3) \{ \frac{j_1 + \frac{1}{2} - m_3}{2j_1 + 1} \}^{1/2} \\ CG_{Racah} = \langle (j_1, m_1); (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) | j_1, \frac{1}{2}; (j_1 - \frac{1}{2}, m_3) \rangle = \delta(m_1 - \frac{1}{2} - m_3) \{ \frac{j_1 + \frac{1}{2} + m_3}{2j_1 + 1} \}^{1/2} \end{cases}$$

定理10.1.2. $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; (0,0)\rangle = \sum_{m_1=1/2}^{-1/2} \sum_{m_2=1/2}^{-1/2} |(\frac{1}{2}, m_1); (\frac{1}{2}, m_2)\rangle \langle (\frac{1}{2}, m_1); (\frac{1}{2}, m_2) | \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; (0,0)\rangle$

$CG_{Racah} = \langle (\frac{1}{2}, m_1); (\frac{1}{2}, m_2) | \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; (0,0)\rangle = \delta(m_1 + m_2 - 0)$

$\{(2 \cdot 0 + 1) \frac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0)!(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0)!(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0)!}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0+1)!} (\frac{1}{2} + m_1)!(\frac{1}{2} - m_1)!(\frac{1}{2} + m_2)!(\frac{1}{2} - m_2)!(0+0)!(0-0)!\}^{1/2}$

$[\sum_r (-1)^r r!(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 - r)!(\frac{1}{2} - m_1 - r)!(0 - \frac{1}{2} - m_2 + r)!(\frac{1}{2} + m_2 - r)!(0 - \frac{1}{2} + m_1 + r)!]^{-1}$

$= \delta(m_1 + m_2)\{\frac{1}{2!}(\frac{1}{2} + m_1)!(\frac{1}{2} - m_1)!(\frac{1}{2} + m_2)!(\frac{1}{2} - m_2)!\}^{1/2}$

$[\sum_r (-1)^r r!(1 - r)!(\frac{1}{2} - m_1 - r)!(-\frac{1}{2} - m_2 + r)!(\frac{1}{2} + m_2 - r)!(-\frac{1}{2} + m_1 + r)!]^{-1}$

$= \delta(m_1 + m_2)\frac{1}{\sqrt{2!}}(\frac{1}{2} + m_1)!(\frac{1}{2} - m_1)![\sum_r (-1)^r r!(1 - r)![(\frac{1}{2} - m_1 - r)!]^2[(-\frac{1}{2} + m_1 + r)!]^2]^{-1}$

推论10.1.3.

$$\begin{cases} \langle (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) | \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; (0,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) | \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; (0,0)\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; (0,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\rangle$$

10.2 特例：$1 \oplus 1 = (0,0)$

定理10.2.1. $|1, 1; (0,0)\rangle = \sum_{m_1=1}^{-1} \sum_{m_2=1}^{-1} |(1, m_1); (1, m_2)\rangle \langle (1, m_1); (1, m_2) | 1, 1; (0,0)\rangle$

$CG_{Racah} = \langle (1, m_1); (1, m_2) | 1, 1; (0,0)\rangle = \delta(m_1 + m_2 - 0)$

$\{(2 \cdot 0 + 1) \frac{(1+1-0)!(1-1+0)!(-1+1+0)!}{(1+1+0+1)!} (1 + m_1)!(1 - m_1)!(1 + m_2)!(1 - m_2)!(0+0)!(0-0)!\}^{1/2}$

$[\sum_r (-1)^r r!(1 + 1 - 0 - r)!(1 - m_1 - r)!(0 - 1 - m_2 + r)!(1 + m_2 - r)!(0 - 1 + m_1 + r)!]^{-1}$

$= \delta(m_1 + m_2)\frac{1}{\sqrt{3}}(1 + m_1)!(1 - m_1)![\sum_r (-1)^r r!(2 - r)![(1 - m_1 - r)!]^2[(-1 + m_1 + r)!]^2]^{-1}$

推论10.2.1.

$$\begin{cases} \langle (1,1); (1,-1) | 1, 1; (0,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \langle (1,0); (1,0) | 1, 1; (0,0)\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \langle (1,-1); (1,1) | 1, 1; (0,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad |1, 1; (0,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|(1,1); (1,-1)\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|(1,0); (1,0)\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|(1,-1); (1,1)\rangle$$

10.3 特例：$1 \oplus 1 = (1,0)$

定理10.3.1. $|1, 1; (1, m_3)\rangle = \sum_{m_1=1}^{-1} \sum_{m_2=1}^{-1} |(1, m_1); (1, m_2)\rangle \langle (1, m_1); (1, m_2) | 1, 1; (1, m_3)\rangle$

$CG_{Racah} = \langle (1, m_1); (1, m_2) | 1, 1; (1, m_3)\rangle = \delta(m_1 + m_2 - m_3)$

$\{(2 \cdot 1 + 1) \frac{(1+1-1)!(1-1+1)!(-1+1+1)!}{(1+1+1+1)!} (1 + m_1)!(1 - m_1)!(1 + m_2)!(1 - m_2)!(1 + m_3)!(1 - m_3)!\}^{1/2}$

$[\sum_r (-1)^r r!(1 + 1 - 1 - r)!(1 - m_1 - r)!(1 - 1 - m_2 + r)!(1 + m_2 - r)!(1 - 1 + m_1 + r)!]^{-1}$

$= \delta(m_1 + m_2 - m_3)\{\frac{3}{4!}(1 + m_1)!(1 - m_1)!(1 + m_2)!(1 - m_2)!(1 + m_3)!(1 - m_3)!\}^{1/2}$

$[\sum_r (-1)^r r!(1 - r)!(1 - m_1 - r)!(-m_2 + r)!(1 + m_2 - r)!(m_1 + r)!]^{-1}$

推论10.3.1. $\langle (1, m_1); (1, m_2) | 1, 1; (1, m_3)\rangle$

$= \delta(m_1 + m_2 - m_3)\{\frac{3}{4!}(1 + m_1)!(1 - m_1)!(1 + m_2)!(1 - m_2)!(1 + m_3)!(1 - m_3)!\}^{1/2}$

$[\sum_r (-1)^r r!(1 - r)!(1 - m_1 - r)!(-m_2 + r)!(1 + m_2 - r)!(m_1 + r)!]^{-1}$

推论10.3.2. $\langle (1, m_1); (1, m_2) | 1, 1; (1, 0)\rangle$

$= \delta(m_1 + m_2)\frac{1}{\sqrt{8}}(1 + m_1)!(1 - m_1)![\sum_r (-1)^r r!(1 - r)![(1 - m_1 - r)!(m_1 + r)!]^2]^{-1}$

推论10.3.3.

$$\begin{cases}\langle(1,1);(1,-1)|1,1;(1,0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \langle(1,0);(1,0)|1,1;(1,0)\rangle=0\\ \langle(1,-1);(1,1)|1,1;(1,0)\rangle=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\quad |1,1;(1,0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|(1,1);(1,-1)\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|(1,-1);(1,1)\rangle$$

10.4 特例：$1\oplus 1=(1,1)$

推论10.4.1. $\langle(1,m_1);(1,m_2)|1,1;(1,m_3)\rangle$

$=\delta(m_1+m_2-m_3)\{\frac{3}{4!}(1+m_1)!(1-m_1)!(1+m_2)!(1-m_2)!(1+m_3)!(1-m_3)!\}^{1/2}$

$[\sum\limits_r(-1)^r r!(1-r)!(1-m_1-r)!(-m_2+r)!(1+m_2-r)!(m_1+r)!]^{-1}$

推论10.4.2. $\langle(1,m_1);(1,m_2)|1,1;(1,1)\rangle$

$=\delta(m_1+m_2-1)\{\frac{1}{4}(1+m_1)!(1-m_1)!(1+m_2)!(1-m_2)!\}^{1/2}$

$[\sum\limits_r(-1)^r r!(1-r)!(1-m_1-r)!(-m_2+r)!(1+m_2-r)!(m_1+r)!]^{-1}$

推论10.4.3.

$$\begin{cases}\langle(1,1);(1,0)|1,1;(1,1)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \langle(1,0);(1,1)|1,1;(1,1)\rangle=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\quad |1,1;(1,1)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|(1,1);(1,0)\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|(1,0);(1,1)\rangle$$

10.5 特例：$1\oplus 1=(1,-1)$

推论10.5.1. $\langle(1,m_1);(1,m_2)|1,1;(1,m_3)\rangle$

$=\delta(m_1+m_2-m_3)\{\frac{3}{4!}(1+m_1)!(1-m_1)!(1+m_2)!(1-m_2)!(1+m_3)!(1-m_3)!\}^{1/2}$

$[\sum\limits_r(-1)^r r!(1-r)!(1-m_1-r)!(-m_2+r)!(1+m_2-r)!(m_1+r)!]^{-1}$

推论10.5.2. $\langle(1,m_1);(1,m_2)|1,1;(1,-1)\rangle$

$=\delta(m_1+m_2+1)\{\frac{1}{4}(1+m_1)!(1-m_1)!(1+m_2)!(1-m_2)!\}^{1/2}$

$[\sum\limits_r(-1)^r r!(1-r)!(1-m_1-r)!(-m_2+r)!(1+m_2-r)!(m_1+r)!]^{-1}$

推论10.5.3.

$$\begin{cases}\langle(1,-1);(1,0)|1,1;(1,-1)\rangle=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \langle(1,0);(1,-1)|1,1;(1,-1)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\quad |1,1;(1,-1)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|(1,0);(1,-1)\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|(1,-1);(1,0)\rangle$$

10.6 特例：$1\oplus 1=(1,-1)$

推论10.6.1.

$$\begin{cases}\hat{J}_+|s,h\rangle=\sqrt{s(s+1)-h(h+1)}|s,h+1\rangle=\sqrt{(s-h)(s+h+1)}|s,h+1\rangle,-s\le h\le s\\ \hat{J}_-|s,h\rangle=\sqrt{s(s+1)-h(h-1)}|s,h-1\rangle=\sqrt{(s-h+1)(s+h)}|s,h-1\rangle,-s\le h\le s\\ \hat{J}_z|s,h\rangle=h|s,h-1\rangle,-s\le h\le s\end{cases}$$

11 几个粒子的自旋耦合例子

11.1 两个电子自旋的对角耦合表象

推论11.1.1. 对角耦合表象

$$\begin{cases}[\sigma(1)\oplus\sigma(0)]^2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},[\sigma(1)\oplus\sigma(0)]_z\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\\ [\sigma(1)\oplus\sigma(0)]^2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},[\sigma(1)\oplus\sigma(0)]_z\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\\ [\sigma(1)\oplus\sigma(0)]^2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},[\sigma(1)\oplus\sigma(0)]_z\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\\ [\sigma(1)\oplus\sigma(0)]^2\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},[\sigma(1)\oplus\sigma(0)]_z\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\end{cases}$$

11.2 两个电子自旋的分离非耦合表象

推论11.2.1. 分离非耦合表象

$$\begin{cases}[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I]^2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{3}{4}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},[I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]^2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{3}{4}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I]_z\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},[I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]_z\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\\ [\sigma(\frac{1}{2})\otimes I]^2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{3}{4}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},[I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]^2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{3}{4}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I]_z\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},[I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]_z\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\\ [\sigma(\frac{1}{2})\otimes I]^2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{3}{4}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},[I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]^2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{3}{4}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I]_z\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},[I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]_z\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\\ [\sigma(\frac{1}{2})\otimes I]^2\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{3}{4}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},[I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]^2\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{3}{4}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I]_z\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},[I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]_z\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\end{cases}$$

11.3 两个电子自旋的分离耦合表象

推论11.3.1. $\hat{S}(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0&0\\0&\sqrt{1}&\sqrt{1}&0\\0&0&0&\sqrt{2}\\0&-\sqrt{1}&\sqrt{1}&0\end{bmatrix},\hat{S}^{+}(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0&0\\0&\sqrt{1}&0&-\sqrt{1}\\0&\sqrt{1}&0&\sqrt{1}\\0&0&\sqrt{2}&0\end{bmatrix}$

推论11.3.2. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0&0\\0&\sqrt{1}&0&\sqrt{1}\\0&0&\sqrt{2}&0\\0&\sqrt{1}&0&-\sqrt{1}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0&0\\0&\sqrt{1}&\sqrt{1}&0\\0&0&0&\sqrt{2}\\0&-\sqrt{1}&\sqrt{1}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$

推论11.3.3. $\begin{cases}|\frac{1}{2}\rangle=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},|\frac{-1}{2}\rangle=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{cases}\quad\begin{cases}|1\rangle=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},|0\rangle=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},|-1\rangle=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\end{cases}$

定理11.3.1. $S(1)[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]S^{+}(1)=\sigma(1)\oplus\sigma(0)$

推论11.3.4. 分离耦合表象

$$\begin{cases}\frac{[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I]^2}{[I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]^2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{3}{4}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]^2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]_z\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\\ \frac{[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I]^2}{[I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]^2}\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}=\frac{3}{4}\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix},[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]^2\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix},[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]_z\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}=0\\ \frac{[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I]^2}{[I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]^2}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{3}{4}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]^2\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]_z\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\\ \frac{[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I]^2}{[I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]^2}\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}=\frac{3}{4}\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix},[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]^2\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}=0,[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I+I\otimes\sigma(\frac{1}{2})]_z\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}=0\end{cases}$$

推论11.3.5. $\hat{S}^{+}(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0&0\\0&\sqrt{1}&0&-\sqrt{1}\\0&\sqrt{1}&0&\sqrt{1}\\0&0&\sqrt{2}&0\end{bmatrix}\Rightarrow|s,m\rangle=\begin{cases}\hat{S}^{+}(1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=|1,1\rangle=|\frac{1}{2}\rangle\otimes|\frac{1}{2}\rangle;\\ \hat{S}^{+}(1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=|1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{-1}{2}\rangle\otimes|\frac{1}{2}\rangle+|\frac{1}{2}\rangle\otimes|\frac{-1}{2}\rangle);\\ \hat{S}^{+}(1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}=|1,-1\rangle=|\frac{-1}{2}\rangle\otimes|\frac{-1}{2}\rangle;\\ \hat{S}^{+}(1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=|0,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(-|\frac{-1}{2}\rangle\otimes|\frac{1}{2}\rangle+|\frac{1}{2}\rangle\otimes|\frac{-1}{2}\rangle);\end{cases}$

推论11.3.6. $\begin{bmatrix}|1,1\rangle\\|1,0\rangle\\|1,-1\rangle\\|0,0\rangle\end{bmatrix}=[\hat{S}^{+}(1)\otimes I_4]\begin{bmatrix}|\frac{1}{2}\rangle\\|\frac{-1}{2}\rangle\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}|\frac{1}{2}\rangle\\|\frac{-1}{2}\rangle\end{bmatrix}=[I_4\otimes\hat{S}(1)]\begin{bmatrix}|\frac{1}{2}\rangle\\|\frac{-1}{2}\rangle\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}|\frac{1}{2}\rangle\\|\frac{-1}{2}\rangle\end{bmatrix}$

推论11.3.7. $\begin{bmatrix}|\frac{1}{2}\rangle\otimes|\frac{1}{2}\rangle\\|\frac{1}{2}\rangle\otimes|\frac{-1}{2}\rangle\\|\frac{-1}{2}\rangle\otimes|\frac{-1}{2}\rangle\\|\frac{-1}{2}\rangle\otimes|\frac{1}{2}\rangle\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0&0\\0&\sqrt{1}&0&\sqrt{1}\\0&0&\sqrt{2}&0\\0&\sqrt{1}&0&-\sqrt{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|1,1\rangle\\|1,0\rangle\\|1,-1\rangle\\|0,0\rangle\end{bmatrix},\begin{bmatrix}|1,1\rangle\\|1,0\rangle\\|1,-1\rangle\\|0,0\rangle\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0&0\\0&\sqrt{1}&0&\sqrt{1}\\0&0&\sqrt{2}&0\\0&\sqrt{1}&0&-\sqrt{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|\frac{1}{2}\rangle\otimes|\frac{1}{2}\rangle\\|\frac{1}{2}\rangle\otimes|\frac{-1}{2}\rangle\\|\frac{-1}{2}\rangle\otimes|\frac{-1}{2}\rangle\\|\frac{-1}{2}\rangle\otimes|\frac{1}{2}\rangle\end{bmatrix}$

推论11.3.8. $\begin{bmatrix}|\frac{1}{2}\rangle\otimes|\frac{1}{2}\rangle\\|\frac{-1}{2}\rangle\otimes|\frac{1}{2}\rangle\\|\frac{-1}{2}\rangle\otimes|\frac{-1}{2}\rangle\\|\frac{1}{2}\rangle\otimes|\frac{-1}{2}\rangle\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0&0\\0&-\sqrt{1}&0&\sqrt{1}\\0&0&\sqrt{2}&0\\0&\sqrt{1}&0&\sqrt{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|1,1\rangle\\|0,0\rangle\\|1,-1\rangle\\|1,0\rangle\end{bmatrix},\begin{bmatrix}|1,1\rangle\\|0,0\rangle\\|1,-1\rangle\\|1,0\rangle\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0&0\\0&-\sqrt{1}&0&\sqrt{1}\\0&0&\sqrt{2}&0\\0&\sqrt{1}&0&\sqrt{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|\frac{1}{2}\rangle\otimes|\frac{1}{2}\rangle\\|\frac{-1}{2}\rangle\otimes|\frac{1}{2}\rangle\\|\frac{-1}{2}\rangle\otimes|\frac{-1}{2}\rangle\\|\frac{1}{2}\rangle\otimes|\frac{-1}{2}\rangle\end{bmatrix}$

推论11.3.9. $\begin{bmatrix} |\frac{1}{2}\rangle\otimes|\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{-1}{2}\rangle\otimes|\frac{-1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}\rangle\otimes|\frac{-1}{2}\rangle \\ |\frac{-1}{2}\rangle\otimes|\frac{1}{2}\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1} & \sqrt{1} \\ 0 & 0 & \sqrt{1} & -\sqrt{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |1,1\rangle \\ |1,-1\rangle \\ |1,0\rangle \\ |0,0\rangle \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} |1,1\rangle \\ |1,-1\rangle \\ |1,0\rangle \\ |0,0\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1} & \sqrt{1} \\ 0 & 0 & \sqrt{1} & -\sqrt{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |\frac{1}{2}\rangle\otimes|\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{-1}{2}\rangle\otimes|\frac{-1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}\rangle\otimes|\frac{-1}{2}\rangle \\ |\frac{-1}{2}\rangle\otimes|\frac{1}{2}\rangle \end{bmatrix}$

11.4 两个有质量光子的自旋耦合表象

定理11.4.1. $S(1\otimes 1)[\sigma(1)\otimes I_3 + I_3\otimes\sigma(1)]S^+(1\otimes 1) = \sigma(2)\oplus\sigma(1)\oplus\sigma(0)$

推论11.4.1.

$$S(1\otimes 1) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1} & 0 & \sqrt{4} & 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, S^+(1\otimes 1) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

推论11.4.2.

$$\begin{cases} \begin{cases} |2,2\rangle = |1\rangle\otimes|1\rangle; \\ |2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle\otimes|0\rangle) + |0\rangle\otimes|1\rangle; \\ |2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|1\rangle\otimes|-1\rangle + 2|0\rangle\otimes|0\rangle + |-1\rangle\otimes|1\rangle); \\ |2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\otimes|-1\rangle) + |-1\rangle\otimes|0\rangle; \\ |2,-2\rangle = |-1\rangle\otimes|-1\rangle; \end{cases} \\ \begin{cases} |2;1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle\otimes|0\rangle) - |0\rangle\otimes|1\rangle; \\ |2;1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle\otimes|-1\rangle) - |-1\rangle\otimes|1\rangle; \\ |2;1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\otimes|-1\rangle) - |-1\rangle\otimes|0\rangle; \end{cases} \\ \begin{cases} |2;0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle\otimes|-1\rangle) - |0\rangle\otimes|0\rangle + |-1\rangle\otimes|1\rangle; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} |1\rangle\otimes|1\rangle = |2,2\rangle; \\ |0\rangle\otimes|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,1\rangle - |1,1\rangle); \\ |-1\rangle\otimes|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|2,0\rangle - \sqrt{3}|1,0\rangle + \sqrt{2}|0,0\rangle); \\ |1\rangle\otimes|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,1\rangle + |1,1\rangle); \\ |0\rangle\otimes|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}|2,0\rangle - |0,0\rangle); \end{cases} \\ \begin{cases} |-1\rangle\otimes|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,-1\rangle - |1,-1\rangle); \\ |1\rangle\otimes|-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|2,0\rangle + \sqrt{3}|1,0\rangle + \sqrt{2}|0,0\rangle); \\ |0\rangle\otimes|-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,-1\rangle + |1,-1\rangle); \end{cases} \\ \begin{cases} |-1\rangle\otimes|-1\rangle = |2,-2\rangle; \end{cases} \end{cases}$$

推论11.4.3.

$$\begin{cases} \begin{cases} |2,2\rangle = |1\rangle\otimes|1\rangle; \\ |2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle\otimes|0\rangle) + |0\rangle\otimes|1\rangle; \\ |2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|1\rangle\otimes|-1\rangle + 2|0\rangle\otimes|0\rangle + |-1\rangle\otimes|1\rangle); \\ |2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\otimes|-1\rangle) + |-1\rangle\otimes|0\rangle; \\ |2,-2\rangle = |-1\rangle\otimes|-1\rangle; \end{cases} \\ \begin{cases} |2;1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle\otimes|0\rangle) - |0\rangle\otimes|1\rangle; \\ |2;1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle\otimes|-1\rangle) - |-1\rangle\otimes|1\rangle; \\ |2;1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\otimes|-1\rangle) - |-1\rangle\otimes|0\rangle; \end{cases} \\ \begin{cases} |2;0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle\otimes|-1\rangle) - |0\rangle\otimes|0\rangle + |-1\rangle\otimes|1\rangle; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} |1\rangle\otimes|1\rangle = |2,2\rangle; \\ |1\rangle\otimes|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,1\rangle + |1,1\rangle); \\ |1\rangle\otimes|-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|2,0\rangle + \sqrt{3}|1,0\rangle + \sqrt{2}|0,0\rangle); \\ |0\rangle\otimes|-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,-1\rangle + |1,-1\rangle); \\ |-1\rangle\otimes|-1\rangle = |2,-2\rangle; \end{cases} \\ \begin{cases} |0\rangle\otimes|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,1\rangle - |1,1\rangle); \\ |0\rangle\otimes|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}|2,0\rangle - |0,0\rangle); \\ |-1\rangle\otimes|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,-1\rangle - |1,-1\rangle); \end{cases} \\ \begin{cases} |-1\rangle\otimes|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|2,0\rangle - \sqrt{3}|1,0\rangle + \sqrt{2}|0,0\rangle); \end{cases} \end{cases}$$

推论11.4.4.

$$\begin{cases}\begin{cases}|2,2\rangle=|1\rangle\otimes|1\rangle;\\|2,-2\rangle=|-1\rangle\otimes|-1\rangle;\end{cases}\\\begin{cases}|2,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle\otimes|0\rangle)+|0\rangle\otimes|1\rangle;\\|1,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle\otimes|0\rangle)-|0\rangle\otimes|1\rangle;\\|1,-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\otimes|-1\rangle)-|-1\rangle\otimes|0\rangle;\\|2,-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\otimes|-1\rangle)+|-1\rangle\otimes|0\rangle;\end{cases}\\\begin{cases}|2,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(|1\rangle\otimes|-1\rangle+2|0\rangle\otimes|0\rangle+|-1\rangle\otimes|1\rangle);\\|1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle\otimes|-1\rangle)-|-1\rangle\otimes|1\rangle;\\|0,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle\otimes|-1\rangle)-|0\rangle\otimes|0\rangle+|-1\rangle\otimes|1\rangle;\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\begin{cases}|1\rangle\otimes|1\rangle=|2,2\rangle;\\|-1\rangle\otimes|-1\rangle=|2,-2\rangle;\end{cases}\\\begin{cases}|1\rangle\otimes|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|2,1\rangle+|1,1\rangle);\\|0\rangle\otimes|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|2,1\rangle-|1,1\rangle);\\|-1\rangle\otimes|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|2,-1\rangle-|1,-1\rangle);\\|0\rangle\otimes|-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|2,-1\rangle+|1,-1\rangle);\end{cases}\\\begin{cases}|1\rangle\otimes|-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(|2,0\rangle+\sqrt{3}|1,0\rangle+\sqrt{2}|0,0\rangle);\\|0\rangle\otimes|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}|2,0\rangle-|0,0\rangle);\\|-1\rangle\otimes|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(|2,0\rangle-\sqrt{3}|1,0\rangle+\sqrt{2}|0,0\rangle);\end{cases}\end{cases}$$

推论11.4.5.

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}|2,2\rangle\\|2,-2\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|1\rangle\otimes|1\rangle\\|-1\rangle\otimes|-1\rangle\end{bmatrix},\begin{bmatrix}|1\rangle\otimes|1\rangle\\|-1\rangle\otimes|-1\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|2,2\rangle\\|2,-2\rangle\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}|2,1\rangle\\|1,1\rangle\\|1,-1\rangle\\|2,-1\rangle\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|1\rangle\otimes|0\rangle\\|0\rangle\otimes|1\rangle\\|-1\rangle\otimes|0\rangle\\|0\rangle\otimes|-1\rangle\end{bmatrix},\begin{bmatrix}|1\rangle\otimes|0\rangle\\|0\rangle\otimes|1\rangle\\|-1\rangle\otimes|0\rangle\\|0\rangle\otimes|-1\rangle\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|2,1\rangle\\|1,1\rangle\\|1,-1\rangle\\|2,-1\rangle\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}|2,0\rangle\\|1,0\rangle\\|0,0\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|1\rangle\otimes|-1\rangle\\|0\rangle\otimes|0\rangle\\|-1\rangle\otimes|1\rangle\end{bmatrix},\begin{bmatrix}|1\rangle\otimes|-1\rangle\\|0\rangle\otimes|0\rangle\\|-1\rangle\otimes|1\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|2,0\rangle\\|1,0\rangle\\|0,0\rangle\end{bmatrix}\end{cases}$$

推论11.4.6.

$$S^{+}(1\otimes 1)\Rightarrow|s,m\rangle=\begin{cases}\begin{cases}|2,2\rangle=|1\rangle\otimes|1\rangle;\\|2,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\otimes|1\rangle+|1\rangle\otimes|0\rangle);\\|2,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(|-1\rangle\otimes|1\rangle+2|0\rangle\otimes|0\rangle+|1\rangle\otimes|-1\rangle);\\|2,-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|-1\rangle\otimes|0\rangle+|0\rangle\otimes|-1\rangle);\\|2,-2\rangle=|-1\rangle\otimes|-1\rangle;\end{cases}\\\begin{cases}|2;1,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(-|0\rangle\otimes|1\rangle+|1\rangle\otimes|0\rangle);\\|2;1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(-|-1\rangle\otimes|1\rangle+|1\rangle\otimes|-1\rangle);\\|2;1,-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(-|-1\rangle\otimes|0\rangle+|0\rangle\otimes|-1\rangle);\end{cases}\\\begin{cases}|2;0,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|-1\rangle\otimes|1\rangle-|0\rangle\otimes|0\rangle+|1\rangle\otimes|-1\rangle);\end{cases}\end{cases}$$

推论11.4.7. $\begin{bmatrix}|2,2\rangle\\|2,1\rangle\\|2,0\rangle\\|2,-1\rangle\\|2,-2\rangle\\|1,1\rangle\\|1,0\rangle\\|1,-1\rangle\\|0,0\rangle\end{bmatrix}=[S^{+}(1\otimes 1)\otimes I_9]\begin{bmatrix}|1\rangle\\|0\rangle\\|-1\rangle\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}|1\rangle\\|0\rangle\\|-1\rangle\end{bmatrix}=[I_9\otimes S(1\otimes 1)]\begin{bmatrix}|1\rangle\\|0\rangle\\|-1\rangle\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}|1\rangle\\|0\rangle\\|-1\rangle\end{bmatrix}$

11.5 两个无质量光子的自旋耦合

推论11.5.1. 对角耦合表象

$$[\sigma(2)\oplus\sigma(1)\oplus\sigma(0)]^2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},[\sigma(2)\oplus\sigma(1)\oplus\sigma(0)]_z\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$[\sigma(2)\oplus\sigma(1)\oplus\sigma(0)]^2\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},[\sigma(2)\oplus\sigma(1)\oplus\sigma(0)]_z\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$[\sigma(2)\oplus\sigma(1)\oplus\sigma(0)]^2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},[\sigma(2)\oplus\sigma(1)\oplus\sigma(0)]_z\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=0$$

$$[\sigma(2)\oplus\sigma(1)\oplus\sigma(0)]^2\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},[\sigma(2)\oplus\sigma(1)\oplus\sigma(0)]_z\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=0$$

$$[\sigma(2)\oplus\sigma(1)\oplus\sigma(0)]^2\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=0,[\sigma(2)\oplus\sigma(1)\oplus\sigma(0)]_z\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=0$$

推论11.5.2. 非对角耦合表象

$$[\sigma(1)\otimes I_3+I_3\otimes\sigma(1)]^2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},[\sigma(1)\otimes I_3+I_3\otimes\sigma(1)]_z\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$[\sigma(1)\otimes I_3+I_3\otimes\sigma(1)]^2\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix},[\sigma(1)\otimes I_3+I_3\otimes\sigma(1)]_z\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$[\sigma(1)\otimes I_3+I_3\otimes\sigma(1)]^2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\2\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\2\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},[\sigma(1)\otimes I_3+I_3\otimes\sigma(1)]_z\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\2\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=0$$

$$[\sigma(1)\otimes I_3+I_3\otimes\sigma(1)]^2\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},[\sigma(1)\otimes I_3+I_3\otimes\sigma(1)]_z\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=0$$

$$[\sigma(1)\otimes I_3+I_3\otimes\sigma(1)]^2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=0,[\sigma(1)\otimes I_3+I_3\otimes\sigma(1)]_z\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=0$$

推论11.5.3. $S^+(2)\Rightarrow|s,m\rangle=\begin{cases}\begin{cases}|2,2\rangle=|1\rangle\otimes|1\rangle;\\\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}|2,0\rangle+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|2;0,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|-1\rangle\otimes|1\rangle+|1\rangle\otimes|-1\rangle);\\|2,-2\rangle=|-1\rangle\otimes|-1\rangle;\end{cases}\\\begin{cases}|2;1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(-|-1\rangle\otimes|1\rangle+|1\rangle\otimes|-1\rangle);\end{cases}\end{cases}$

推论11.5.4. $\begin{cases}|1\rangle\otimes|1\rangle=|2,2\rangle;\\|-1\rangle\otimes|1\rangle)=\frac{1}{\sqrt{6}}|2,0\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|2;1,0\rangle+\frac{1}{\sqrt{3}}|2;0,0\rangle;\\|1\rangle\otimes|-1\rangle)=\frac{1}{\sqrt{6}}|2,0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|2;1,0\rangle+\frac{1}{\sqrt{3}}|2;0,0\rangle;\\|-1\rangle\otimes|-1\rangle=|2,-2\rangle;\end{cases}$

推论11.5.5. $\begin{cases}\begin{cases}|2,2\rangle=|1\rangle\otimes|1\rangle e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)};\\\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}|2,0\rangle+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|2;0,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|-1\rangle\otimes|1\rangle e^{-2i\varsigma pt}+|1\rangle\otimes|-1\rangle e^{2i\varsigma pt})e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)};\\|2,-2\rangle=|-1\rangle\otimes|-1\rangle e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)};\end{cases}\\\begin{cases}|2;1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(-|-1\rangle\otimes|1\rangle e^{-2i\varsigma pt}+|1\rangle\otimes|-1\rangle e^{2i\varsigma pt})e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)};\end{cases}\end{cases}$

$$= [I_9 \otimes \hat{S}(1)] \begin{bmatrix} |1\rangle e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}_1+\varsigma pt)} \\ |-1\rangle e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}_1-\varsigma pt)} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} |1\rangle e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}_2+\varsigma pt)} \\ |-1\rangle e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}_2-\varsigma pt)} \end{bmatrix}$$

推论11.5.6.

$$\begin{cases} \begin{cases} |2,2\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle; \\ i|2;1,0\rangle sin(2\varsigma pt) + (\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}|2,0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|2;0,0\rangle)cos(2\varsigma pt) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-1\rangle \otimes |1\rangle e^{-2i\varsigma pt} + |1\rangle \otimes |-1\rangle e^{2i\varsigma pt}); \\ |2,-2\rangle = |-1\rangle \otimes |-1\rangle; \end{cases} \\ \begin{cases} |2;1,0\rangle cos(2\varsigma pt) + i(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}|2,0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|2;0,0\rangle)sin(2\varsigma pt) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|-1\rangle \otimes |1\rangle e^{-2i\varsigma pt} + |1\rangle \otimes |-1\rangle e^{2i\varsigma pt}); \end{cases} \end{cases}$$

$$= [I_9 \otimes \hat{S}(1)] \begin{bmatrix} |1\rangle e^{i\varsigma pt} \\ |-1\rangle e^{-i\varsigma pt} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} |1\rangle e^{-i\varsigma pt} \\ |-1\rangle e^{i\varsigma pt} \end{bmatrix}$$

推论11.5.7. $\begin{bmatrix} |2,2\rangle \\ \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}|2,0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0,0\rangle \\ |2,-2\rangle \\ |1,0\rangle \end{bmatrix} = [I_9 \otimes \hat{S}(1)] \begin{bmatrix} |1\rangle \\ |-1\rangle \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} |1\rangle \\ |-1\rangle \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} |1,1\rangle \\ |1,0\rangle \\ |1,-1\rangle \\ |0,0\rangle \end{bmatrix} = [I_4 \otimes \hat{S}(1)] \begin{bmatrix} |\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{-1}{2}\rangle \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} |\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{-1}{2}\rangle \end{bmatrix}$

推论11.5.8. $\begin{bmatrix} |2,2\rangle \\ \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}|2,0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0,0\rangle \\ |2,-2\rangle \\ |1,0\rangle \end{bmatrix} = [\hat{S}^{+}(1) \otimes I_9] \begin{bmatrix} |1\rangle \otimes |1\rangle \\ \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}|-1\rangle \otimes |1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|-1\rangle \otimes |-1\rangle \\ |0\rangle \otimes |0\rangle \\ |1\rangle \otimes |-1\rangle \end{bmatrix} = [I_9 \otimes \hat{S}(1)] \begin{bmatrix} |1\rangle \\ |-1\rangle \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} |1\rangle \\ |-1\rangle \end{bmatrix}$

11.6 三个电子的自旋耦合

推论11.6.1. $\hat{S}(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & -\sqrt{4} & \sqrt{1} & 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{1} & 0 & -\sqrt{1} & \sqrt{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{S}^{+}(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -\sqrt{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{1} & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -\sqrt{1} & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{1} & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

推论11.6.2. $\hat{S}^{+}(\frac{3}{2}) \Rightarrow$

$$|s,m\rangle = \begin{cases} \begin{cases} |\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = |\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle; \\ |\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle); \\ |\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle + |\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle); \\ |-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle = |\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle; \end{cases} \\ \begin{cases} |\frac{3}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2|\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle); \\ |\frac{3}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-|\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle - |\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle + 2|\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle); \end{cases} \\ \begin{cases} |\frac{3}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle); \\ |\frac{3}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle + |\frac{-1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{-1}{2}\rangle); \end{cases} \end{cases}$$

推论11.6.3. $\begin{bmatrix} |\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2},\frac{-3}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle_1 \\ |\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\rangle_1 \\ |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle_2 \\ |\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\rangle_2 \end{bmatrix} = [\hat{S}^{+}(\frac{3}{2}) \otimes I_8] \begin{bmatrix} |\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{-1}{2}\rangle \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} |\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{-1}{2}\rangle \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} |\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{-1}{2}\rangle \end{bmatrix} = [I_8 \otimes \hat{S}(\frac{3}{2})] \begin{bmatrix} |\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{-1}{2}\rangle \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} |\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{-1}{2}\rangle \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} |\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{-1}{2}\rangle \end{bmatrix}$

12 不变张量算符

12.1 不变张量算符

推论12.1.1.

$$\begin{cases}\hat{J}^2=U(\omega)\hat{J}^2U^+(\omega)\Leftrightarrow U(-\omega)\hat{J}^2U^+(-\omega)=\hat{J}^2\\ \hat{J}_i=e^{i\omega R}|_i{}^j U(\omega)\hat{J}_jU^+(\omega)\Leftrightarrow U(-\omega)\hat{J}_iU^+(-\omega)=e^{i\omega R}|_i{}^j\hat{J}_j\\ T_{ij}=e^{i\omega R}|_i{}^k e^{i\omega R}|_j{}^l U(\omega)T_{kl}U^+(\omega)\Leftrightarrow U(-\omega)T_{ij}U^+(-\omega)=e^{i\omega R}|_i{}^k e^{i\omega R}|_j{}^l T_{kl}\\ T_{i\cdot\cdot j}=e^{i\omega R}|_i{}^k\cdot\cdot e^{i\omega R}|_j{}^l U(\omega)T_{k\cdot\cdot l}U^+(\omega)\Leftrightarrow U(-\omega)T_{i\cdot\cdot j}U^+(-\omega)=e^{i\omega R}|_i{}^k e^{i\omega R}|_j{}^l T_{k\cdot\cdot l}\end{cases}$$

13 球谐函数

13.1 数学准备

定义13.1.1. $$\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \theta=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \varphi=\arctan\frac{y}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$$

定义13.1.2. $$\begin{cases}\hat{L}_x=-i\hbar(y\partial_z-z\partial_y)=i\hbar(\sin\varphi\partial_\theta+\cot\theta\cos\varphi\partial_\varphi)\\ \hat{L}_y=-i\hbar(z\partial_x-x\partial_z)=-i\hbar(\cos\varphi\partial_\theta-\cot\theta\sin\varphi\partial_\varphi)\\ \hat{L}_z=-i\hbar(x\partial_y-y\partial_z)=-i\hbar\partial_\varphi\end{cases}\quad\begin{cases}\nabla^2_{\theta,\varphi}=\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\sin\theta\partial_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial^2_\theta\\ \nabla^2=\frac{1}{r}\partial^2_r r+\frac{1}{r^2}\nabla^2_{\theta,\varphi}\\ \hat{L}^2=-\hbar^2\nabla^2_{\theta,\varphi},\hat{L}_z=-i\hbar\partial_\varphi\end{cases}$$

定义13.1.3. $$\begin{cases}P_l(\xi)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{d\xi^l}(\xi^2-1)^l,-1\le\xi\le1\\ P_l^{|m|}(\xi)=(1-\xi^2)^{|m|/2}[\frac{d^{|m|}}{d\xi^{|m|}}P_l(\xi)-\frac{1}{2^l l!}\frac{d^{l+|m|}}{d\xi^{l+|m|}}(\xi^2-1)^l],-1\le\xi\le1\end{cases}$$

13.2 球谐函数

定义13.2.1.

$$\begin{cases}\hat{L}^2\psi=L^2\psi\\ \hat{L}_z\psi=L_z\psi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{L}^2Y_{lm}(\theta,\varphi)=l(l+1)Y_{lm}(\theta,\varphi),\hat{L}_zY_{lm}(\theta,\varphi)=mY_{lm}(\theta,\varphi)\\ \psi(\theta,\varphi)=Y_{lm}(\theta,\varphi):=A_{lm}P_l^{|m|}(cos\theta)e^{im\varphi}\end{cases}$$

推论13.2.1.

$$\begin{cases}\hat{L}_xY_{lm}(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}[\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}Y_{l,m+1}(\theta,\varphi)+\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}Y_{l,m-1}(\theta,\varphi)]\\ \hat{L}_yY_{lm}(\theta,\varphi)=-\frac{i}{2}[\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}Y_{l,m+1}(\theta,\varphi)-\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}Y_{l,m-1}(\theta,\varphi)]\end{cases}$$

推论13.2.2.

$$\begin{cases}\hat{L}_+Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}Y_{l,m+1}(\theta,\varphi)=\sqrt{(l-m)(l+m+1)}Y_{l,m+1}(\theta,\varphi),\hat{L}_+:=\hat{L}_x+i\hat{L}_y\\ \hat{L}_-Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}Y_{l,m-1}(\theta,\varphi)=\sqrt{(l+m)(l-m+1)}Y_{l,m+1}(\theta,\varphi),\hat{L}_-:=\hat{L}_x-i\hat{L}_y\end{cases}$$

推论13.2.3.

$$\begin{cases}\int Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)Y_{lm}(\theta,\varphi)d\Omega=\delta_{l'l}\delta_{m'm}\\ \int d\Omega'\sum_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{lm}(\theta',\varphi')|f(\theta',\varphi')?=\int d\Omega'\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')|f(\theta',\varphi')\end{cases}$$

推论13.2.4.

$$\begin{cases}[\hat{L}^2]_{m'm}=\int Y^*_{lm'}(\theta,\varphi)\hat{L}^2Y_{lm}(\theta,\varphi)d\Omega=\int l(l+1)Y^*_{lm'}(\theta,\varphi)Y_{lm}(\theta,\varphi)d\Omega=l(l+1)\delta_{m'm}\\ [\hat{L}_z]_{m'm}=\int Y^*_{lm'}(\theta,\varphi)\hat{L}_zY_{lm}(\theta,\varphi)d\Omega=\int mY^*_{lm'}(\theta,\varphi)Y_{lm}(\theta,\varphi)d\Omega=m\delta_{m'm}\\ [\hat{L}_x+i\hat{L}_y]_{m'm}=\int Y^*_{lm'}(\theta,\varphi)[\hat{L}_x+i\hat{L}_y]Y_{lm}(\theta,\varphi)d\Omega=\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\delta_{m'(m+1)}\\ [\hat{L}_x-i\hat{L}_y]_{m'm}=\int Y^*_{lm'}(\theta,\varphi)[\hat{L}_x-i\hat{L}_y]Y_{lm}(\theta,\varphi)d\Omega=\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\delta_{m'(m-1)}\end{cases}$$

推论13.2.5.

$$\begin{cases}[\hat{L}_x]_{m'm}=\frac{1}{2}[\sqrt{(l+m'+1)(l-m')}\delta_{m'(m-1)}+\sqrt{(l-m'+1)(l+m')}\delta_{m'(m+1)}]\\ [\hat{L}_y]_{m'm}=\frac{i}{2}[\sqrt{(l+m'+1)(l-m')}\delta_{m'(m-1)}-\sqrt{(l-m'+1)(l+m')}\delta_{m'(m+1)}]\\ [\hat{L}_z]_{m'm}=m'\delta_{m'm}\end{cases}$$

推论13.2.6. $A_n=\sqrt{n}\cdot\sqrt{2l+1-n},n=1,2,\cdots,2l$

$$[\hat{L}]=(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&A_1&0&0&0\\A_1&0&A_2&0&0\\0&A_2&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&A_{2l}\\0&0&0&A_{2l}&0\end{bmatrix},\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0&-A_1&0&0&0\\A_1&0&-A_2&0&0\\0&A_2&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&-A_{2l}\\0&0&0&A_{2l}&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}l&0&0&0&0\\0&l-1&0&0&0\\0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&-(l-1)&0\\0&0&0&0&-l\end{bmatrix})$$

13.3 一般算子方法 [37]

定义13.3.1. $\vec{J}\times\vec{J}=i\vec{J},\vec{J}^2=J_x^2+J_y^2+J_z^2;[J_i,J_j]=\varepsilon_{ij}{}^kJ_k,[\vec{J}^2,J_i]=0$

定义13.3.2. $$\begin{cases}J_+:=J_x+iJ_y,J_-:=J_x-iJ_y,\hat{J}^2=\frac{1}{2}(J_+J_-+J_+J_-)+J_z^2\\ [J_z,J_+]=J_+,[J_z,J_-]=-J_-,[J_+,J_-]=2J_z\\ J_+J_-=\hat{J}^2-J_z(J_z-1),J_-J_+=\hat{J}^2-J_z(J_z+1)\end{cases}$$

性质13.3.1. $\hat{J}^2|j,m\rangle=j(j+1)|j,m\rangle,J_z|j,m\rangle=m|j,m\rangle$

$J_+|j,m\rangle=\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}|j,m+1\rangle,J_-|j,m\rangle=\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}|j,m-1\rangle$

解1-薛定谔氢原子： $\{\hat{L};|l,m\rangle\}=\{-i\vec{r}\times\nabla;Y_{lm}(\theta,\varphi)\}$

解2-自旋单态： $\{\sigma(s);|s,h\rangle\}=\{\sigma(s);\lambda(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},h)\}$

解3-狄拉克氢原子： $\{\hat{J};|j,m\rangle\}=\{\hat{L}+\frac{1}{2}\sigma;\begin{bmatrix}g(\vec{r})\phi_{jl_A}^{m_j}(\theta,\varphi)\\if(\vec{r})\phi_{jl_B}^{m_j}(\theta,\varphi)\end{bmatrix}\}$

解4-狄拉克s原子： $\{\hat{J};|l,s,m\rangle\}=\{\hat{L}+\hat{s};Y_{lsm}(\theta,\varphi)\}$

14 一般自旋算符的重构

14.1 一般单自旋态算符定义及其推论

定义14.1.1. $\hat{J}(s)\times\hat{J}(s)=i\hat{J}(s),\hat{J}^2(s):=\hat{J}_x^2(s)+\hat{J}_y^2(s)+\hat{J}_z^2(s);\hat{J}_+(s):=\hat{J}_x(s)+i\hat{J}_y(s),\hat{J}_-(s):=\hat{J}_x(s)-i\hat{J}_y(s)$

推论14.1.1. $[\hat{J}_i(s),\hat{J}_j(s)]=\varepsilon_{ij}{}^k\hat{J}_k(s),[\hat{J}^2(s),\hat{J}_i(s)]=0,\hat{J}^2(s):=\hat{J}_x^2(s)+\hat{J}_y^2(s)+\hat{J}_z^2(s)$

$$[\Leftrightarrow]\begin{cases}[\hat{J}_z(s),\hat{J}_+(s)]=\hat{J}_+(s),[\hat{J}_z(s),\hat{J}_-(s)]=-\hat{J}_-(s),[\hat{J}_+(s),\hat{J}_-(s)]=2\hat{J}_z(s)\\ \hat{J}_+(s)\hat{J}_-(s)=\hat{J}^2(s)-\hat{J}_z(s)[\hat{J}_z(s)-1],\hat{J}_-(s)\hat{J}_+(s)=\hat{J}^2(s)-\hat{J}_z(s)[\hat{J}_z(s)+1]\\ [\hat{J}^2(s),\hat{J}_+(s)]=0,[\hat{J}^2(s),\hat{J}_-(s)]=0,[\hat{J}^2(s),\hat{J}_z(s)]=0,\hat{J}^2(s)=\frac{1}{2}[\hat{J}_+(s)\hat{J}_-(s)+\hat{J}_-(s)\hat{J}_+(s)]+\hat{J}_z^2(s)\end{cases}$$

14.2 螺旋度h标记的单自旋态及其升降关系

定义14.2.1. $-s\le h\le s$

$$\begin{cases}\hat{J}_+(s)|h\rangle'=\sqrt{s+h+1}\sqrt{s-h}|h-1\rangle'\\ \hat{J}_-(s)|h\rangle'=\sqrt{s+h}\sqrt{s-h+1}|h+1\rangle'\\ \hat{J}^2(s)|h\rangle'=s(s+1)|h\rangle,\hat{J}_z(s)|h\rangle=h|h\rangle'\\ \langle h'|h\rangle'=\delta_{h'h},\sum_{h=s}^{-s}|h\rangle'\langle h|'=1\end{cases}[\Leftrightarrow]\begin{cases}|h\rangle'=\frac{\hat{J}_+^{s+h}(s)}{(s+h)!\sqrt{C_{2s}^{s+h}}}|-s\rangle',\hat{J}_+^{2s+1}(s)|-s\rangle'=0\\ |h\rangle'=\frac{\hat{J}_-^{s-h}(s)}{(s-h)!\sqrt{C_{2s}^{s-h}}}|s\rangle',\hat{J}_-^{2s+1}(s)|s\rangle'=0\\ \hat{J}^2(s)|h\rangle'=s(s+1)|h\rangle',\hat{J}_z(s)|h\rangle'=h|h\rangle'\\ \langle h'|h\rangle'=\delta_{h'h},\sum_{h=s}^{-s}|h\rangle'\langle h|'=1\end{cases}$$

14.3 粒子数n标记的单自旋态及其升降关系

定义14.3.1. $|n\rangle:=|s-n\rangle',|s-h\rangle:=|h\rangle'[\Leftrightarrow]|h\rangle':=|s-h\rangle,|s-n\rangle':=|n\rangle$

推论14.3.1. $0 \le n \le 2s$

$$\begin{cases}\hat{J}_+(s)|n\rangle = \sqrt{2s+1-n}\sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{J}_-(s)|n\rangle = \sqrt{2s-n}\sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ \hat{J}^2(s)|n\rangle = s(s+1)|n\rangle, \hat{J}_z(s)|n\rangle = (s-n)|n\rangle \\ \langle n'|n\rangle = \delta_{n'n}, \sum_{n=0}^{2s}|n\rangle\langle n| = 1\end{cases} [\Leftrightarrow] \begin{cases}|2s-n\rangle = \frac{\hat{J}_+^n(s)}{n!\sqrt{C_{2s}^n}}|2s\rangle, \hat{J}_+^{2s+1}(s)|2s\rangle = 0 \\ |n\rangle = \frac{\hat{J}_-^n(s)}{n!\sqrt{C_{2s}^n}}|0\rangle, \hat{J}_-^{2s+1}(s)|0\rangle = 0 \\ \hat{J}^2(s)|n\rangle = s(s+1)|n\rangle, \hat{J}_z(s)|n\rangle = (s-n)|n\rangle \\ \langle n'|n\rangle = \delta_{n'n}, \sum_{n=0}^{2s}|n\rangle\langle n| = 1\end{cases}$$

14.4 由产生和湮灭算符重构自旋算符—HP变换 [47]

定义14.4.1.

$$HP\text{变换}: \begin{cases}\hat{J}_+(s) := (\sqrt{2s-a^+a})a, \hat{J}_-(s) := a^+(\sqrt{2s-a^+a}), \hat{J}_z(s) := s-a^+a \\ [a,a^+] = 1, [a,a] = 0, [a^+,a^+] = 0, a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle; 0 \le n \le 2s\end{cases}$$

推论14.4.1. $[a,a^+] = 1, [a,a] = 0, [a^+,a^+] = 0$

$\Rightarrow [\hat{J}_z(s), \hat{J}_+(s)] = \hat{J}_+(s), [\hat{J}_z(s), \hat{J}_-(s)] = -\hat{J}_-(s), [\hat{J}_+(s), \hat{J}_-(s)] = 2\hat{J}_z(s)$

证明: $[\hat{J}_z(s), \hat{J}_+(s)]$

$= (s-a^+a)(\sqrt{2s-a^+a})a - (\sqrt{2s-a^+a})a(s-a^+a)$

$= (s-a^+a)(\sqrt{2s-a^+a})a - (\sqrt{2s-a^+a})(sa-a^+aa-a)$

$= (s-a^+a)(\sqrt{2s-a^+a})a - (\sqrt{2s-a^+a})(s-a^+a)a + (\sqrt{2s-a^+a})a$

$= (\sqrt{2s-a^+a})a$ □

证明: $[\hat{J}_z(s), \hat{J}_-(s)]$

$= (s-a^+a)a^+(\sqrt{2s-a^+a}) - a^+(\sqrt{2s-a^+a})(s-a^+a)$

$= (a^+s-a^+a^+a-a^+)(\sqrt{2s-a^+a}) - a^+(\sqrt{2s-a^+a})(s-a^+a)$

$= -a^+(\sqrt{2s-a^+a}) + a^+(s-a^+a)(\sqrt{2s-a^+a}) - a^+(\sqrt{2s-a^+a})(s-a^+a)$

$= -a^+(\sqrt{2s-a^+a})$ □

证明: $[\hat{J}_+(s), \hat{J}_-(s)]$

$= (\sqrt{2s-a^+a})aa^+(\sqrt{2s-a^+a}) - a^+(\sqrt{2s-a^+a})(\sqrt{2s-a^+a})a$

$= (\sqrt{2s-a^+a})(a^+a+1)(\sqrt{2s-a^+a}) - a^+(2s-a^+a)a$

$= (\sqrt{2s-a^+a})(a^+a+1)(\sqrt{2s-a^+a}) - (2sa^+a-a^+aa^+a+a^+a)$

$= (a^+a+1)(\sqrt{2s-a^+a})(\sqrt{2s-a^+a}) - [a^+a(2s-a^+a)+a^+a]$

$= 2s-2a^+a = 2\hat{J}_z(s)$ □

推论14.4.2. $0 \le n \le 2s$

$$\begin{cases}a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\hat{J}_+(s)|n\rangle = \sqrt{2s+1-n}\sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{J}_-(s)|n\rangle = \sqrt{2s-n}\sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ \hat{J}^2(s)|n\rangle = s(s+1)|n\rangle, \hat{J}_z(s)|n\rangle = (s-n)|n\rangle\end{cases}$$

证明: $\hat{J}_-(s)|n\rangle := a^+(\sqrt{2s-a^+a})|n\rangle = a^+\sqrt{2s-n}|n\rangle = \sqrt{2s-n}\sqrt{n+1}|n+1\rangle; 0 \le n \le 2s$ □

证明: $\hat{J}_+(s)|n\rangle = (\sqrt{2s-a^+a})a|n\rangle = (\sqrt{2s-a^+a})\sqrt{n}|n-1\rangle = \sqrt{2s+1-n}\sqrt{n}|n-1\rangle; 0 \le n \le 2s$ □

证明: $\hat{J}_z(s)|n\rangle = (s-a^+a)|n\rangle = (s-n)|n\rangle; 0 \le n \le 2s$ □

证明: $\hat{J}^2(s)|n\rangle = \{\frac{1}{2}[\hat{J}_+(s)\hat{J}_-(s) + \hat{J}_-(s)\hat{J}_+(s)] + \hat{J}_z^2(s)\}|n\rangle = s(s+1)|n\rangle; 0 \le n \le 2s$ □

推论14.4.3. $0 \le n \le 2s$

$$\begin{cases} \hat{J}_+(s) := (\sqrt{2s - a^+a})a, \hat{J}_-(s) := a^+(\sqrt{2s - a^+a}), \hat{J}_z(s) := s - a^+a \\ [a, a^+] = 1, [a, a] = 0, [a^+, a^+] = 0, a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ \langle n'|n\rangle = \delta_{n'n}, \sum\limits_{n=0}^{2s} |n\rangle\langle n| = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} [\hat{J}_z(s), \hat{J}_+(s)] = \hat{J}_+(s), [\hat{J}_z(s), \hat{J}_-(s)] = -\hat{J}_-(s), [\hat{J}_+(s), \hat{J}_-(s)] = 2\hat{J}_z(s) \\ \hat{J}_+(s)|n\rangle = \sqrt{2s+1-n}\sqrt{n}|n-1\rangle, \hat{J}_-(s)|n\rangle = \sqrt{2s-n}\sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ \hat{J}^2(s)|n\rangle = s(s+1)|n\rangle, \hat{J}_z(s)|n\rangle = (s-n)|n\rangle, \langle n'|n\rangle = \delta_{n'n}, \sum\limits_{n=0}^{2s} |n\rangle\langle n| = 1 \end{cases}$$

第三十二章　B-F公式和投影算子猜想

自我评述：在本章中我推广发展了全对称指标的多项式定理，为上一步按新的程式统一量子化有质量粒子提供了数学支持，同时基于历史上**Behrends**和**Fronsdal**构造出来的公式，并结合自己新的结论，得到了一个十分有意义的投影算子猜想。

1 多项式定理及其全对称指标推广

1.1 零阶全对称指标二项式展开

性质1.1.1.

$$\begin{cases}(A+B)^2=A^2+2AB+B^2\\(A-B)^2=A^2-2AB+B^2\\(A+B)(A-B)=A^2-B^2\\(A-B)(A+B)=A^2-B^2\end{cases}$$

定理1.1.1. $(A+B)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^iA^iB^{n-i}$

1.2 零阶全对称指标多项式展开

定理1.2.1. $(A_1+\cdot\cdot+A_l)^n=\sum\limits_{n_1n_2\cdot\cdot n_l}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}A_1^{n_1}A_2^{n_2}\cdot\cdot A_l^{n_1},n_1+n_2+\cdot\cdot+n_l=n$

1.3 一阶全对称指标二项式展开

性质1.3.1.

$$\begin{cases}[A_{\{a_1}+B_{\{a_1}][A_{a_2\}}+B_{a_2\}}]=A_{\{a_1}A_{a_2\}}+2A_{\{a_1}B_{a_2\}}+B_{\{a_1}B_{a_2\}}\\[A_{\{a_1}-B_{\{a_1}][A_{a_2\}}-B_{a_2\}}]=A_{\{a_1}A_{a_2\}}-2A_{\{a_1}B_{a_2\}}+B_{\{a_1}B_{a_2\}}\\[A_{\{a_1}+B_{\{a_1}][A_{a_2\}}-B_{a_2\}}]=A_{\{a_1}A_{a_2\}}-B_{\{a_1}B_{a_2\}}\\[A_{\{a_1}-B_{\{a_1}][A_{a_2\}}+B_{a_2\}}]=A_{\{a_1}A_{a_2\}}-B_{\{a_1}B_{a_2\}}\\A_{\{a_1}B_{a_2\}}=A_{\{a_2}B_{a_1\}},A_{\{\cdot\cdot a_i\cdot\cdot a_j\cdot\cdot\}}=A_{\{\cdot\cdot a_j\cdot\cdot a_i\cdot\cdot\}}\end{cases}$$

定理1.3.1. $[A_{\{a_1}+B_{\{a_1}]\cdot\cdot[A_{a_n\}}+B_{a_n\}}]=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_i}][B_{a_{i+1}}\cdot\cdot B_{a_n\}}]$

推论1.3.1. $(A_a+B_a)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^iA_a^iB_a^{n-i}$

1.4 一阶全对称指标多项式展开

定理1.4.1. $[A_{1\{a_1}+\cdot\cdot+A_{l\{a_1}]\cdot\cdot[A_{1a_n\}}+\cdot\cdot+A_{la_n\}}],n_1+n_2+\cdot\cdot+n_l=n$
$=\sum\limits_{n_1n_2\cdot\cdot n_l}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}[A_{1\{a_1}\cdot\cdot A_{1a_{n_1}}][A_{2a_{n_1+1}}\cdot\cdot A_{2a_{n_1+n_2}}]\cdot\cdot[A_{la_{n_1+\cdot\cdot+n_{l-1}+1}}\cdot\cdot A_{la_n\}}]$

推论1.4.1. $(A_{1a}+\cdot\cdot+A_{la})^n=\sum\limits_{n_1n_2\cdot\cdot n_l}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}A_{1a}^{n_1}A_2^{n_2}\cdot\cdot A_{la}^{n_1},n_1+n_2+\cdot\cdot+n_l=n$

1.5 二阶全对称指标二项式展开

性质1.5.1.

$$\begin{cases}[A_{\{a_1(b_1}+B_{\{a_1(b_1}][A_{a_2\}b_2)}+B_{a_2\}b_2)}]=A_{\{a_1(b_1}A_{a_2\}b_2)}+2A_{\{a_1(b_1}B_{a_2\}b_2)}+B_{\{a_1(b_1}B_{a_2\}b_2)}\\[A_{\{a_1(b_1}-B_{\{a_1(b_1}][A_{a_2\}b_2)}-B_{a_2\}b_2)}]=A_{\{a_1(b_1}A_{a_2\}b_2)}-2A_{\{a_1(b_1}B_{a_2\}b_2)}+B_{\{a_1(b_1}B_{a_2\}b_2)}\\[A_{\{a_1(b_1}+B_{\{a_1(b_1}][A_{a_2\}b_2)}-B_{a_2\}b_2)}]=A_{\{a_1(b_1}A_{a_2\}b_2)}-B_{\{a_1(b_1}B_{a_2\}b_2)}\\[A_{\{a_1(b_1}-B_{\{a_1(b_1}][A_{a_2\}b_2)}+B_{a_2\}b_2)}]=A_{\{a_1(b_1}A_{a_2\}b_2)}-B_{\{a_1(b_1}B_{a_2\}b_2)}\end{cases}$$

定理1.5.1. $[A_{\{a_1(b_1}+B_{\{a_1(b_1}]\cdot\cdot[A_{a_n\}b_n)}+B_{a_n\}b_n)}]=\sum_{i=0}^{n}C_n^i[A_{\{a_1(b_1}\cdot\cdot A_{a_ib_i}][B_{a_{i+1}b_{i+1}}\cdot\cdot B_{a_n\}b_n)}]$

推论1.5.1. $(A_{ab}+B_{ab})^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^iA_{ab}^iB_{ab}^{n-i}$

1.6 二阶全对称指标多项式展开

定理1.6.1. $[A_{1\{a_1(b_1}+\cdot\cdot+A_{l\{a_1(b_1}]\cdot\cdot[A_{1a_n\}b_n)}+\cdot\cdot+A_{la_n\}b_n)}],n_1+n_2+\cdot\cdot+n_l=n$
$=\sum_{n_1n_2\cdot\cdot n_l}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}[A_{1\{a_1(b_1}\cdot\cdot A_{1a_{n_1}b_{n_1}}][A_{2a_{n_1+1}b_{n_1+1}}\cdot\cdot A_{2a_{n_1+n_2}b_{n_1+n_2}}]\cdot\cdot[A_{la_{n_1+\cdot\cdot+n_{l-1}+1}b_{n_1+\cdot\cdot+n_{l-1}+1}}\cdot\cdot A_{la_n\}b_n)}]$

推论1.6.1. $(A_{1ab}+\cdot\cdot+A_{lab})^n=\sum_{n_1n_2\cdot\cdot n_l}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}A_{1ab}^{n_1}A_{2ab}^{n_2}\cdot\cdot A_{lab}^{n_l},n_1+n_2+\cdot\cdot+n_l=n$

1.7 多阶全对称指标多项式展开

定理1.7.1. $[A_{1\{a_1\cdot\cdot(b_1}+\cdot\cdot+A_{l\{a_1\cdot\cdot(b_1}]\cdot\cdot[A_{1a_n\}\cdot\cdot b_n)}+\cdot\cdot+A_{la_n\}\cdot\cdot b_n)}],n_1+n_2+\cdot\cdot+n_l=n$
$=\sum_{n_1n_2\cdot\cdot n_l}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}[A_{1\{a_1\cdot\cdot(b_1}\cdot\cdot A_{1a_{n_1}\cdot\cdot b_{n_1}}][A_{2a_{n_1+1}\cdot\cdot b_{n_1+1}}\cdot\cdot A_{2a_{n_1+n_2}\cdot\cdot b_{n_1+n_2}}]\cdot\cdot[A_{la_{n_1+\cdot\cdot+n_{l-1}+1}\cdot\cdot b_{n_1+\cdot\cdot+n_{l-1}+1}}\cdot\cdot A_{la_n\}\cdot\cdot b_n)}]$

推论1.7.1. $(A_{1a\cdot\cdot b}+\cdot\cdot+A_{la\cdot\cdot b})^n=\sum_{n_1n_2\cdot\cdot n_l}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}A_{1ab}^{n_1}A_{2a\cdot\cdot b}^{n_2}\cdot\cdot A_{la\cdot\cdot b}^{n_l},n_1+n_2+\cdot\cdot+n_l=n$

1.8 全对称指标多项式性质

推论1.8.1.
$[A_{\{a_1}B_{(b_1}+B_{\{a_1}A_{(b_1}][A_{a_2\}}B_{b_2)}+B_{a_2\}}A_{b_2)}]=A_{\{a_1}A_{a_2\}}B_{(b_1}B_{b_2)}+2A_{\{a_1}B_{a_2\}}A_{(b_1}B_{b_2)}+B_{\{a_1}B_{a_2\}}A_{(b_1}A_{b_2)}$

推论1.8.2.
$[A_{\{a_1}B_{(b_1}-B_{\{a_1}A_{(b_1}][A_{a_2\}}B_{b_2)}-B_{a_2\}}A_{b_2)}]=A_{\{a_1}A_{a_2\}}B_{(b_1}B_{b_2)}-2A_{\{a_1}B_{a_2\}}A_{(b_1}B_{b_2)}+B_{\{a_1}B_{a_2\}}A_{(b_1}A_{b_2)}$

推论1.8.3. $[A_{\{a_1}B_{(b_1}+B_{\{a_1}A_{(b_1}][A_{a_2\}}B_{b_2)}-B_{a_2\}}A_{b_2)}]=A_{\{a_1}A_{a_2\}}B_{(b_1}B_{b_2)}-B_{\{a_1}B_{a_2\}}A_{(b_1}A_{b_2)}$

推论1.8.4. $[A_{\{a_1}B_{(b_1}-B_{\{a_1}A_{(b_1}][A_{a_2\}}B_{b_2)}+B_{a_2\}}A_{b_2)}]=A_{\{a_1}A_{a_2\}}B_{(b_1}B_{b_2)}-B_{\{a_1}B_{a_2\}}A_{(b_1}A_{b_2)}$

定理1.8.1. $[A_{\{a_1}B_{(b_1}+B_{\{a_1}A_{(b_1}]\cdot\cdot[A_{a_n\}}B_{b_n)}+B_{a_n\}}A_{b_n)}]=\sum_{i=0}^{n}C_n^i[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_i}B_{a_{i+1}}\cdot\cdot B_{a_n\}}][B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_i}A_{b_{i+1}}\cdot\cdot A_{b_n)}]$

定理1.8.2. $[A_{\{a_1}B_{(b_1}-B_{\{a_1}A_{(b_1}]\cdot\cdot[A_{a_n\}}B_{b_n)}-B_{a_n\}}A_{b_n)}]$
$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_i}B_{a_{i+1}}\cdot\cdot B_{a_n\}}][B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_i}A_{b_{i+1}}\cdot\cdot A_{b_n)}]$

定理1.8.3. $[A_{\{a_1}B_{(b_1}+B_{\{a_1}A_{(b_1}+C_{\{a_1}C_{(b_1}]\cdot\cdot[A_{a_n\}}B_{b_n)}+B_{a_n\}}A_{b_n)}+C_{a_n\}}C_{b_n)}]$
$=\sum_{n_1n_2\cdot\cdot n_l}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n_1}}B_{a_{n_1+1}}\cdot\cdot B_{n_1+n_2}C_{a_{n_1+n_2+1}}\cdot\cdot C_{a_n\}}][B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n_1}}A_{b_{n_1+1}}\cdot\cdot A_{n_1+n_2}C_{b_{n_1+n_2+1}}\cdot\cdot C_{b_n)}]$

推论1.8.5. $[A_{\{a_1}B_{(b_1}+B_{\{a_1}A_{(b_1}+C_{\{a_1}C_{(b_1}][A_{a_2\}}B_{b_2)}+B_{a_2\}}A_{b_2)}+C_{a_2\}}C_{b_2)}]$
$=[A_{\{a_1}B_{(b_1}+B_{\{a_1}A_{(b_1}][A_{a_2\}}B_{b_2)}+B_{a_2\}}A_{b_2)}]+2[A_{\{a_1}B_{(b_1}+B_{\{a_1}A_{(b_1}]C_{a_2\}}C_{b_2)}+[C_{\{a_1}C_{a_2\}}][C_{(b_1}C_{b_2)}]$
$=A_{\{a_1}A_{a_2\}}B_{(b_1}B_{b_2)}+B_{\{a_1}B_{a_2\}}A_{(b_1}A_{b_2)}+C_{\{a_1}C_{a_2\}}C_{(b_1}C_{b_2)}$
$+2A_{\{a_1}B_{a_2\}}A_{(b_1}B_{b_2)}+2A_{\{a_1}C_{a_2\}}B_{(b_1}C_{b_2)}+2B_{\{a_1}C_{a_2\}}A_{(b_1}C_{b_2)}$

2 多项式定理及其反对称指标推广

2.1 一阶全对称指标二项式展开

性质2.1.1.

$$\begin{cases}[A_{[a_1}+B_{[a_1}][A_{a_2]}+B_{a_2]}]=0\\ [A_{[a_1}-B_{[a_1}][A_{a_2]}-B_{a_2]}]=0\\ [A_{[a_1}+B_{[a_1}][A_{a_2]}-B_{a_2]}]=2B_{[a_1}A_{a_2]}\\ [A_{[a_1}-B_{[a_1}][A_{a_2]}+B_{a_2]}]=2A_{[a_1}B_{a_2]}\end{cases}$$

定理2.1.1. $[A_{[a_1}+B_{[a_1}]\cdot\cdot[A_{a_n]}+B_{a_n]}]=0$

2.2 一阶全对称指标多项式展开

定理2.2.1. $[A_{1[a_1}+\cdot\cdot+A_{l[a_1]}\cdot\cdot[A_{1a_n]}+\cdot\cdot+A_{la_n]}]=0$

2.3 反对称指标二项式展开

性质2.3.1.

$$\begin{cases}[A_{[a_1\langle b_1}+B_{[a_1\langle b_1}][A_{a_2]b_2\rangle}+B_{a_2]b_2\rangle}]=A_{[a_1\langle b_1}A_{a_2]b_2\rangle}+2A_{[a_1\langle b_1}B_{a_2]b_2\rangle}+B_{[a_1\langle b_1}B_{a_2]b_2\rangle}\\ [A_{[a_1\langle b_1}-B_{[a_1\langle b_1}][A_{a_2]b_2\rangle}-B_{a_2]b_2\rangle}]=A_{[a_1\langle b_1}A_{a_2]b_2\rangle}-2A_{[a_1\langle b_1}B_{a_2]b_2\rangle}+B_{[a_1\langle b_1}B_{a_2]b_2\rangle}\\ [A_{[a_1\langle b_1}+B_{[a_1\langle b_1}][A_{a_2]b_2\rangle}-B_{a_2]b_2\rangle}]=A_{[a_1\langle b_1}A_{a_2]b_2\rangle}-B_{[a_1\langle b_1}B_{a_2]b_2\rangle}\\ [A_{[a_1\langle b_1}-B_{[a_1\langle b_1}][A_{a_2]b_2\rangle}+B_{a_2]b_2\rangle}]=A_{[a_1\langle b_1}A_{a_2]b_2\rangle}-B_{[a_1\langle b_1}B_{a_2]b_2\rangle}\end{cases}$$

定理2.3.1. $[A_{[a_1\langle b_1}+B_{[a_1\langle b_1}]\cdot\cdot[A_{a_n]b_n\rangle}+B_{a_n]b_n\rangle}]=\sum\limits_{i=1}^{n}C_n^i[A_{[a_1\langle b_1}\cdot\cdot A_{a_ib_i}][B_{a_{i+1}b_{i+1}}\cdot\cdot B_{a_n]b_n\rangle}]$

推论2.3.1. $[A_{[a_1}B_{\langle b_1}+B_{[a_1}A_{\langle b_1}+C_{[a_1}C_{\langle b_1}][A_{a_2]}B_{b_2\rangle}+B_{a_2]}A_{b_2\rangle}+C_{a_2]}C_{b_2\rangle}]$
$=2A_{[a_1}B_{a_2]}A_{\langle b_1}B_{b_2\rangle}+2A_{[a_1}C_{a_2]}B_{\langle b_1}C_{b_2\rangle}+2B_{[a_1}C_{a_2]}A_{\langle b_1}C_{b_2\rangle}$

2.4 反对称指标多项式展开(错的?)

定理2.4.1. $[A_{1[a_1\langle b_1}+\cdot\cdot+A_{l[a_1\langle b_1}]\cdot\cdot[A_{1a_n]b_n\rangle}+\cdot\cdot+A_{la_n]b_n\rangle}],n_1+n_2+\cdot\cdot+n_l=n$
$=\sum\limits_{n_1n_2\cdot\cdot n_l}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}[A_{1[a_1\langle b_1}\cdot\cdot A_{1a_{n_1}b_{n_1}}][A_{2a_{n_1+1}b_{n_1+1}}\cdot\cdot A_{2a_{n_1+n_2}b_{n_1+n_2}}]\cdot\cdot[A_{la_{n_1+\cdot\cdot+n_{l-1}+1}b_{n_1+\cdot\cdot+n_{l-1}+1}}\cdot\cdot A_{la_n]b_n\rangle}]$

定理2.4.2. 偶数指标：$[A_{1[a_1\cdot\cdot\langle b_1}+\cdot\cdot+A_{l[a_1\cdot\cdot\langle b_1}]\cdot\cdot[A_{1a_n]\cdot\cdot b_n\rangle}+\cdot\cdot+A_{la_n]\cdot\cdot b_n\rangle}],n_1+n_2+\cdot\cdot+n_l=n$
$=\sum\limits_{n_1n_2\cdot\cdot n_l}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}[A_{1[a_1\cdot\cdot\langle b_1}\cdot\cdot A_{1a_{n_1}\cdot\cdot b_{n_1}}][A_{2a_{n_1+1}\cdot\cdot b_{n_1+1}}\cdot\cdot A_{2a_{n_1+n_2}\cdot\cdot b_{n_1+n_2}}]\cdot\cdot[A_{la_{n_1+\cdot\cdot+n_{l-1}+1}\cdot\cdot b_{n_1+\cdot\cdot+n_{l-1}+1}}\cdot\cdot A_{la_n]\cdot\cdot b_n\rangle}]$

3 自旋-n粒子Klein-Gordon方程 [23]投影算子

3.1 自旋-n粒子Klein-Gordon方程投影算子的经典表述

推论3.1.1. $\sum\limits_{h=2}^{-2}(-1)^h\varepsilon_{\{a_1a_2\}}(\vec p,h)\varepsilon_{(b_1b_2)}(\vec p,-h)$
$=[\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{\{a_1}(\vec p,h)\varepsilon_{(b_1}(\vec p,-h)][\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{a_2\}}(\vec p,h)\varepsilon_{b_2)}(\vec p,-h)]$
$-\frac{1}{3}[\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{\{a_1}(\vec p,h)\varepsilon_{a_2\}}(\vec p,-h)][\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{(b_1}(\vec p,h)\varepsilon_{b_2)}(\vec p,-h)]$

推论3.1.2. $\sum\limits_{h=3}^{-3}(-1)^h\varepsilon_{\{a_1a_2a_3\}}(\vec p,h)\varepsilon_{(b_1b_2b_3)}(\vec p,-h)$
$=[\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{\{a_1}(\vec p,h)\varepsilon_{(b_1}(\vec p,-h)][\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{a_2}(\vec p,h)\varepsilon_{b_2}(\vec p,-h)][\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{a_3\}}(\vec p,h)\varepsilon_{b_3)}(\vec p,-h)]$
$-\frac{3}{5}[\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{\{a_1}(\vec p,h)\varepsilon_{a_2}(\vec p,-h)][\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{(b_1}(\vec p,h)\varepsilon_{b_2}(\vec p,-h)][\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{a_3\}}(\vec p,h)\varepsilon_{b_3)}(\vec p,-h)]$

推论3.1.3. $\sum\limits_{h=4}^{-4}(-1)^h\varepsilon_{\{a_1a_2a_3a_4\}}(\vec p,h)\varepsilon_{(b_1b_2b_3b_4)}(\vec p,-h)$
$=[\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{\{a_1}(\vec p,h)\varepsilon_{(b_1}(\vec p,-h)][\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{a_2}(\vec p,h)\varepsilon_{b_2}(\vec p,-h)][\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{a_3}(\vec p,h)\varepsilon_{b_3}(\vec p,-h)]$
$[\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{a_4\}}(\vec p,h)\varepsilon_{b_4)}(\vec p,-h)]-\frac{6}{7}[\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{\{a_1}(\vec p,h)\varepsilon_{a_2}(\vec p,-h)][\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{(b_1}(\vec p,h)\varepsilon_{b_2}(\vec p,-h)]$
$[\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{a_3}(\vec p,h)\varepsilon_{b_3}(\vec p,-h)][\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{a_4\}}(\vec p,h)\varepsilon_{b_4)}(\vec p,-h)]+\frac{3}{35}[\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{\{a_1}(\vec p,h)\varepsilon_{a_2}(\vec p,-h)]$
$[\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{(b_1}(\vec p,h)\varepsilon_{b_2}(\vec p,-h)][\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{a_3}(\vec p,h)\varepsilon_{a_4\}}(\vec p,-h)][\sum\limits_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{b_3}(\vec p,h)\varepsilon_{b_4)}(\vec p,-h)]$

猜想3.1.1. $\sum_{h=n}^{-n}(-1)^h\varepsilon_{\{a_1a_2\cdot\cdot a_n\}}(\vec{p},h)\varepsilon_{(b_1b_2\cdot\cdot b_n)}(\vec{p},-h)=\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$

$\{[\sum_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{\{a_1}(\vec{p},h)\varepsilon_{a_2}(\vec{p},-h)][\sum_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{(b_1}(\vec{p},h)\varepsilon_{b_2}(\vec{p},-h)]\cdot\cdot$

$[\sum_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{a_{2r-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_{a_{2r}}(\vec{p},-h)][\sum_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{b_{2r-1}}(\vec{p},h)\varepsilon_{b_{2r}}(\vec{p},-h)]\}$

$[\sum_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{a_{2r+1}}(\vec{p},h)\varepsilon_{b_{2r+1}}(\vec{p},-h)]\cdot\cdot[\sum_{h=1}^{-1}(-1)^h\varepsilon_{a_n\}}(\vec{p},h)\varepsilon_{b_n\}}(\vec{p},-h)]$

$=\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$

$\{[C_{\{a_1}C_{a_2}-A_{\{a_1}B_{a_2}-B_{\{a_1}A_{a_2}][C_{(b_1}C_{b_2}-A_{(b_1}B_{b_2}-B_{(b_1}A_{b_2}]\cdot\cdot$

$[C_{a_{2r-1}}C_{a_{2r}}-A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}-B_{a_{2r-1}}A_{a_{2r}}][C_{b_{2r-1}}C_{b_{2r}}-A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}-B_{b_{2r-1}}A_{b_{2r}}]\}$

$[C_{a_{2r+1}}C_{b_{2r+1}}-A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}-B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[C_{a_n\}}C_{b_n)}-A_{a_n\}}B_{b_n)}-B_{a_n\}}A_{b_n)}]$

以上猜想是从Behrends和Fronsdal构造出来的公式 [29,30]等价变形过来的，并没有严格地被证明，本质上还是一个猜想，它是后面很多重要结论的前提条件。

3.2 自旋-n粒子Klein-Gordon方程投影算子的定义表述

特别声明一点，本节使用了前面章节的结论，然后利用它们导出了重要猜想。

定义3.2.1. $A=\varepsilon(\vec{p},1),B=\varepsilon(\vec{p},-1),C=\varepsilon(\vec{p},0)$

推论3.2.1. $A_{r,n}=(-\frac{1}{2})^r\frac{n!(2n-2r-1)!!}{r!(n-2r)!(2n-1)!!}=(-1)^r\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$

定理3.2.1. $\varepsilon_{\{a_1a_2\cdot\cdot a_n\}}(\vec{p},n-2k)$

$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k}}}\sum_{i=0}^{k|(n-k)}\frac{(\sqrt{2})^{2i}n!}{(n-k-i)!(k-i)!(2i)!}[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i}}][B_{a_{n+1-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i}}][C_{a_{n+1-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]$

定理3.2.2. $\varepsilon_{\{a_1a_2\cdot\cdot a_n\}}(\vec{p},n-2k-1)$

$=\frac{1}{\sqrt{C_{2n}^{2k+1}}}\sum_{i=0}^{k|(n-1-k)}\frac{(\sqrt{2})^{2i+1}n!}{(n-k-i-1)!(k-i)!(2i+1)!}[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i-1}}][B_{a_{n-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i-1}}][C_{a_{n-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]$

定理3.2.3. $\varepsilon_{\{a_1a_2\cdot\cdot a_n\}}(\vec{p},n-2k)\varepsilon_{(b_1b_2\cdot\cdot b_n)}(\vec{p},n-2(n-k))$

$=\frac{1}{C_{2n}^{2k}}\sum_{i,j=0}^{k|(n-k)}\frac{2^{i+j}n!n!}{(n-k-i)!(n-k-j)!(k-i)!(k-j)!(2i)!(2j)!}$

$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i}}][B_{a_{n+1-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i}}][C_{a_{n+1-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-j}}][A_{b_{n+1-k-j}}\cdot\cdot A_{b_{n-2j}}][C_{b_{n+1-2j}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$

定理3.2.4. $\varepsilon_{\{a_1a_2\cdot\cdot a_n\}}(\vec{p},n-2k-1)\varepsilon_{(b_1b_2\cdot\cdot b_n)}(\vec{p},n-2(n-1-k)-1)$

$=\frac{1}{C_{2n}^{2k+1}}\sum_{i,j=0}^{k|(n-1-k)}\frac{2^{i+j+1}n!n!}{(n-k-i-1)!(n-k-j-1)!(k-i)!(k-j)!(2i+1)!(2j+1)!}$

$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i-1}}][B_{a_{n-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i-1}}][C_{a_{n-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-j-1}}][A_{b_{n-k-j}}\cdot\cdot A_{b_{n-2j-1}}][C_{b_{n-2j}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$

定理3.2.5. $\sum_{h=n}^{-n}(-1)^h\varepsilon_{\{a_1a_2\cdot\cdot a_n\}}(\vec{p},h)\varepsilon_{(b_1b_2\cdot\cdot b_n)}(\vec{p},-h)$

$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{C_{2n}^{2k}}\sum_{i,j=0}^{k|(n-k)}\frac{2^{i+j}n!n!}{(n-k-i)!(n-k-j)!(k-i)!(k-j)!(2i)!(2j)!}$

$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i}}][B_{a_{n+1-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i}}][C_{a_{n+1-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-j}}][A_{b_{n+1-k-j}}\cdot\cdot A_{b_{n-2j}}][C_{b_{n+1-2j}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$

$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^n}{C_{2n}^{2k+1}}\sum_{i,j=0}^{k|(n-1-k)}\frac{2^{i+j+1}n!n!}{(n-k-i-1)!(n-k-j-1)!(k-i)!(k-j)!(2i+1)!(2j+1)!}$

$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i-1}}][B_{a_{n-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i-1}}][C_{a_{n-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-j-1}}][A_{b_{n-k-j}}\cdot\cdot A_{b_{n-2j-1}}][C_{b_{n-2j}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$

以上这些定理是我本人通过归纳试探提出来的，并已经在前面章节严格证明了它们。

3.3 自旋-n粒子Klein-Gordon方程投影算子的重要猜想

猜想3.3.1. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$

$\{[C_{\{a_1}C_{a_2}-A_{\{a_1}B_{a_2}-B_{\{a_1}A_{a_2}][C_{(b_1}C_{b_2}-A_{(b_1}B_{b_2}-B_{(b_1}A_{b_2}]\cdot\cdot$

$[C_{a_{2r-1}}C_{a_{2r}}-A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}-B_{a_{2r-1}}A_{a_{2r}}][C_{b_{2r-1}}C_{b_{2r}}-A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}-B_{b_{2r-1}}A_{b_{2r}}]\}$
$[C_{a_{2r+1}}C_{b_{2r+1}}-A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}-B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[C_{a_n\}}C_{b_n)}-A_{a_n\}}B_{b_n)}-B_{a_n\}}A_{b_n)}]$
$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{C_{2n}^{2k}}\sum_{i,j=0}^{k|(n-k)}\frac{2^{i+j}n!n!}{(n-k-i)!(n-k-j)!(k-i)!(k-j)!(2i)!(2j)!}$
$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i}}][B_{a_{n+1-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i}}][C_{a_{n+1-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-j}}][A_{b_{n+1-k-j}}\cdot\cdot A_{b_{n-2j}}][C_{b_{n+1-2j}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$
$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^n}{C_{2n}^{2k+1}}\sum_{i,j=0}^{k|(n-1-k)}\frac{2^{i+j+1}n!n!}{(n-k-i-1)!(n-k-j-1)!(k-i)!(k-j)!(2i+1)!(2j+1)!}$
$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i-1}}][B_{a_{n-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i-1}}][C_{a_{n-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-j-1}}][A_{b_{n-k-j}}\cdot\cdot A_{b_{n-2j-1}}][C_{b_{n-2j}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$

以上猜想是从Behrends和Fronsdal构造出来的公式(猜想) [29, 30]和我本人上节提出的定理相结合而得到的，它是后面很多重要结论的前提条件，很多情形下验证都是正确的，目前还没遇到反例。但如果要严格证明它，却需要先证明Behrends和Fronsdal构造出来的公式，目前我还做不到这一点。当然如果此猜想通过其他方法得到证明，那么Behrends和Fronsdal构造出来的公式就可以得到严格的证明。

4 从物理到数学抽象：投影算子猜想

本节A,B,C不再特指，泛指一般对易变量。

4.1 从自旋-n粒子Klein-Gordon方程投影算子引出的数学猜想

猜想4.1.1. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$
$\{[A_{\{a_1}B_{a_2}+B_{\{a_1}A_{a_2}+C_{\{a_1}C_{a_2}][A_{(b_1}B_{b_2}+B_{(b_1}A_{b_2}+C_{(b_1}C_{b_2}]\cdot\cdot$
$[A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}+B_{a_{2r-1}}A_{a_{2r}}+C_{a_{2r-1}}C_{a_{2r}}][A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}+B_{b_{2r-1}}A_{b_{2r}}+C_{b_{2r-1}}C_{b_{2r}}]\}$
$[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}+B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}+C_{a_{2r+1}}C_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_n\}}B_{b_n)}+B_{a_n\}}A_{b_n)}+C_{a_n\}}C_{b_n)}]$
$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_{2n}^{2k}}\sum_{i,j=0}^{k|(n-k)}\frac{(-2)^{i+j}n!n!}{(n-k-i)!(n-k-j)!(k-i)!(k-j)!(2i)!(2j)!}$
$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i}}][B_{a_{n+1-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i}}][C_{a_{n+1-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-j}}][A_{b_{n+1-k-j}}\cdot\cdot A_{b_{n-2j}}][C_{b_{n+1-2j}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$
$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{C_{2n}^{2k+1}}\sum_{i,j=0}^{k|(n-1-k)}\frac{(-2)^{i+j+1}n!n!}{(n-k-i-1)!(n-k-j-1)!(k-i)!(k-j)!(2i+1)!(2j+1)!}$
$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i-1}}][B_{a_{n-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i-1}}][C_{a_{n-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-i-1}}][A_{b_{n-k-i}}\cdot\cdot A_{b_{n-2i-1}}][C_{b_{n-2i}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$

以上是更一般的猜想，如果它成立，则上节的猜想自然成立。

推论4.1.1. $C=0\Rightarrow$
$\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$
$\{[A_{\{a_1}B_{a_2}+B_{\{a_1}A_{a_2}][A_{(b_1}B_{b_2}+B_{(b_1}A_{b_2}]\cdot\cdot[A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}+B_{a_{2r-1}}A_{a_{2r}}][A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}+B_{b_{2r-1}}A_{b_{2r}}]\}$
$[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}+B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_n\}}B_{b_n)}+B_{a_n\}}A_{b_n)}]$
$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{k!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!}[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k}}B_{a_{n+1-k}}\cdot\cdot B_{a_n\}}][B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k}}A_{b_{n+1-k}}\cdot\cdot A_{b_n)}]$

4.2 投影算子猜想得到的新组合学恒等式

推论4.2.1. $A=0,B=0,C=\pm1\Rightarrow\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}=2^n$

推论4.2.2. $A=\pm1,B=\pm1,C=0\Rightarrow\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^n}\frac{(2k)!}{k!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!}=2^n$

推论4.2.3. $\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{k!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n}C_{2k}^{k}C_{2n-2k}^{n-k}=2^{2n},\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!}=1$

4.3 以上组合学恒等式的推论

推论4.3.1. $\sum_{k=0}^{n}C_{2k}^{k}C_{2n-2k}^{n-k}=2^{2n}\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{n}\frac{(C_n^k)^2}{C_{2n}^{2k}}=\frac{2^{2n}}{C_{2n}^{n}}$

推论4.3.2. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} = 2^{2n} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k}}{n-k+1} = \frac{1}{2} C_{2n+2}^{n+1} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k}}{k+1} = \frac{1}{2} C_{2n+2}^{n+1}$

证明: $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} = 2^{2n}$

$\Leftrightarrow 2^{2n+2} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} C_{2k}^{k} C_{2n+2-2k}^{n+1-k}$

$= C_{2n+2}^{n+1} C_0^0 + \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2n+2-2k}^{n+1-k}$

$= C_{2n+2}^{n+1} C_0^0 + \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} \frac{(2n+2-2k)(2n+1-2k)}{(n+1-k)^2}$

$= C_{2n+2}^{n+1} C_0^0 + \sum\limits_{k=0}^{n} 2 C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} (2 - \frac{1}{n+1-k})$

$= C_{2n+2}^{n+1} C_0^0 + 2^{2n+2} - \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} \frac{2}{n+1-k}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} \frac{2}{n+1-k} = C_{2n+2}^{n+1} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} \frac{2}{k+1} = C_{2n+2}^{n+1}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k}}{n-k+1} = \frac{1}{2} C_{2n+2}^{n+1} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k}}{k+1} = \frac{1}{2} C_{2n+2}^{n+1}$ □

推论4.3.3. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} = 2^{2n} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k}}{k+1} = \frac{1}{2} C_{2n+2}^{n+1} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k}}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{1}{n+2} C_{2n+2}^{n+1}$(卡特兰数)

证明: $C_{2n+4}^{n+2} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} C_{2k}^{k} C_{2n+2-2k}^{n+1-k} \frac{2}{k+1}$

$= C_{2n+2}^{n+1} C_0^0 \frac{2}{n+2} + \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2n+2-2k}^{n+1-k} \frac{2}{k+1}$

$= C_{2n+2}^{n+1} C_0^0 \frac{2}{n+2} + \sum\limits_{k=0}^{n} 2 C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} (2 - \frac{1}{n+1-k}) \frac{1}{k+1}$

$= C_{2n+2}^{n+1} C_0^0 \frac{2}{n+2} + \sum\limits_{k=0}^{n} 4 C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} \frac{2}{k+1} - \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} \frac{2}{n+1-k} \frac{2}{k+1}$

$= C_{2n+2}^{n+1} \frac{2}{n+2} + 4 C_{2n+2}^{n+1} - \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} \frac{2}{n+1-k} \frac{2}{k+1}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} \frac{2}{n+1-k} \frac{2}{k+1} = C_{2n+2}^{n+1} \frac{2}{n+2} + 4 C_{2n+2}^{n+1} - C_{2n+4}^{n+2}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k} \frac{2}{k+1} \frac{2}{n-k+1} = \frac{4}{n+2} C_{2n+2}^{n+1}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_{2k}^{k} C_{2n-2k}^{n-k}}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{1}{n+2} C_{2n+2}^{n+1}$(卡特兰数，肯定成立；反推，则相关命题全都成立。) □

推论4.3.4. $\sum\limits_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!} = 2^n \Leftrightarrow \sum\limits_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n+1-2r)!} = (-1)^{[n/2]} \frac{(n-2[n/2])}{2n} C_{2[n/2]+2}^{[n/2]+1}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n+2-2r)!} = (-1)^{[n/2]} \frac{(n-2[n/2])}{2n} C_{2[n/2]+2}^{[n/2]+1} + (-1)^{[(n+1)/2]} \frac{(n+1-2[(n+1)/2])}{(2n+2)(2n-2)} C_{2[(n+1)/2]+2}^{[(n+1)/2]+1}$

证明: $2^{n+1} = \sum\limits_{r=0}^{[(n+1)/2]} (-1)^r \frac{(2n+2-2r)!}{r!(n+1-r)!(n+1-2r)!}$

$= \sum\limits_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{(2n+2-2r)!}{r!(n+1-r)!(n+1-2r)!} + \sum\limits_{r=[n/2]+1}^{[(n+1)/2]} (-1)^r \frac{(2n+2-2r)!}{r!(n+1-r)!(n+1-2r)!}$

$= \sum\limits_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{(2n+2-2r)(2n+1-2r)(2n-2r)!}{r!(n+1-r)(n-r)!(n+1-2r)(n-2r)!} + (-1)^{[n/2]+1} \frac{(n-2[n/2])(2[n/2]+2)!}{([n/2]+1)!([n/2]+1)!}$

$= \sum\limits_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{2(2n+1-2r)}{(n+1-2r)} \frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!} + (-1)^{[n/2]+1} \frac{(n-2[n/2])(2[n/2]+2)!}{([n/2]+1)!([n/2]+1)!}$

$= \sum\limits_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r [2 + \frac{2n}{(n+1-2r)}] \frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!} + (-1)^{[n/2]+1} \frac{(n-2[n/2])(2[n/2]+2)!}{([n/2]+1)!([n/2]+1)!}$

$= 2^{n+1} + \sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r \frac{2n}{(n+1-2r)}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!} + (-1)^{[n/2]+1}\frac{(n-2[n/2])(2[n/2]+2)!}{([n/2]+1)!([n/2]+1)!}$

$\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r \frac{2n}{(n+1-2r)}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!} = (-1)^{[n/2]}\frac{(n-2[n/2])(2[n/2]+2)!}{([n/2]+1)!([n/2]+1)!}$

$\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r \frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n+1-2r)!} = (-1)^{[n/2]}\frac{(n-2[n/2])(2[n/2]+2)!}{2n([n/2]+1)!([n/2]+1)!}$

$\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r \frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n+1-2r)!} = (-1)^{[n/2]}\frac{(n-2[n/2])}{2n}C_{2[n/2]+2}^{[n/2]+1}$ □

证明： $(-1)^{[(n+1)/2]}\frac{(n+1-2[(n+1)/2])}{2n+2}C_{2[(n+1)/2]+2}^{[(n+1)/2]+1}$

$= \sum_{r=0}^{[(n+1)/2]}(-1)^r \frac{(2n+2-2r)!}{r!(n+1-r)!(n+2-2r)!}$

$= \sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r \frac{(2n+2-2r)!}{r!(n+1-r)!(n+2-2r)!} + \sum_{r=[n/2]+1}^{[(n+1)/2]}(-1)^r \frac{(2n+2-2r)!}{r!(n+1-r)!(n+2-2r)!}$

$= \sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r \frac{(2n+2-2r)!}{r!(n+1-r)!(n+2-2r)!} + (-1)^{[n/2]+1}(n-2[n/2])C_{2[n/2]+2}^{[n/2]+1}$

$= \sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r \frac{(2n+2-2r)(2n+1-2r)(2n-2r)!}{r!(n+1-r)(n-r)!(n+2-2r)(n+1-2r)!} + (-1)^{[n/2]+1}(n-2[n/2])C_{2[n/2]+2}^{[n/2]+1}$

$= \sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r [2+\frac{2(n-1)}{(n+2-2r)}]\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n+1-2r)!} + (-1)^{[n/2]+1}(n-2[n/2])C_{2[n/2]+2}^{[n/2]+1}$

$= \sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r \frac{2(n-1)(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n+2-2r)!} + (-1)^{[n/2]}\frac{(n-2[n/2])}{n}C_{2[n/2]+2}^{[n/2]+1} + (-1)^{[n/2]+1}(n-2[n/2])C_{2[n/2]+2}^{[n/2]+1}$

$= \sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r \frac{2(n-1)(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n+2-2r)!} - (-1)^{[n/2]}\frac{(n-1)(n-2[n/2])}{n}C_{2[n/2]+2}^{[n/2]+1}$

$\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r \frac{2(n-1)(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n+2-2r)!} = (-1)^{[n/2]}\frac{(n-1)(n-2[n/2])}{n}C_{2[n/2]+2}^{[n/2]+1} + (-1)^{[(n+1)/2]}\frac{(n+1-2[(n+1)/2])}{2n+2}C_{2[(n+1)/2]+2}^{[(n+1)/2]+1}$

$\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r \frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n+2-2r)!} = (-1)^{[n/2]}\frac{(n-2[n/2])}{2n}C_{2[n/2]+2}^{[n/2]+1} + (-1)^{[(n+1)/2]}\frac{(n+1-2[(n+1)/2])}{(2n+2)(2n-2)}C_{2[(n+1)/2]+2}^{[(n+1)/2]+1}$ □

4.4 卡特兰数

引理4.4.1. $g(x) := \frac{1-(1-4x)^{1/2}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{2k}^k}{k+1}x^{k+1}, g'(x) := (1-4x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}C_{2k}^k x^k$

4.5 投影算子猜想的C(2i,2j)项情形

定理4.5.1. $\sum_{r=0}^{[n/2]}\sum_{l\geq 0, i|j-r}^{\leq i,j,n/2-r}(-1)^r \frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$

$C_r^{i-l}\{[C_{\{a_1}C_{a_2}]\cdot\cdot[C_{a_{2i-2l-1}}C_{a_{2i-2l}}][A_{a_{2i-2l+1}}B_{a_{2i-2l+2}}+B_{a_{2i-2l+1}}A_{a_{2i-2l+2}}]\cdot\cdot[A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}+B_{a_{2r-1}}A_{a_{2r}}]$

$C_r^{j-l}[C_{(b_1}C_{b_2}]\cdot\cdot[C_{b_{2j-2l-1}}C_{b_{2j-2l}}][A_{b_{2j-2l+1}}B_{b_{2j-2l+2}}+B_{b_{2j-2l+1}}A_{b_{2j-2l+2}}]\cdot\cdot[A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}+B_{b_{2r-1}}A_{b_{2r}}]\}$

$C_{n-2r}^{2l}[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}+B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_{n-2l}}B_{b_{n-2l}}+B_{a_{n-2l}}A_{b_{n-2l}}][C_{a_{n-2l+1}}C_{b_{n-2l+1}}]\cdot\cdot[C_{a_n\}}C_{b_n)}]$

$= \frac{n!n!}{(2n)!}\sum_{k\geq i|j}^{\leq n-i|j}\frac{(-2)^{i+j}}{(2i)!(2j)!}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}$

$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i}}][B_{a_{n+1-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i}}][C_{a_{n+1-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-j}}][A_{b_{n+1-k-j}}\cdot\cdot A_{b_{n-2j}}][C_{b_{n+1-2j}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$

以上是关于$(AB+BA), CC$型的二项式展开后分母含$(2i)!(2j)!$项的恒等式。

推论4.5.1. $\sum_{r=0}^{[n/2]}\sum_{l\geq 0, i|j-r}^{\leq i,j,n/2-r}(-1)^r \frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}C_r^{i-l}2^{r+l-i}C_r^{j-l}2^{r+l-j}C_{n-2r}^{2l}$

$[C_{\{a_1}C_{a_2}]\cdot\cdot[C_{a_{2i-2l-1}}C_{a_{2i-2l}}][A_{a_{2i-2l+1}}B_{a_{2i-2l+2}}]\cdot\cdot[A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}]$

$[C_{(b_1}C_{b_2}]\cdot\cdot[C_{b_{2j-2l-1}}C_{b_{2j-2l}}][A_{b_{2j-2l+1}}B_{b_{2j-2l+2}}]\cdot\cdot[A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}]$

$[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}+B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_{n-2l}}B_{b_{n-2l}}+B_{a_{n-2l}}A_{b_{n-2l}}][C_{a_{n-2l+1}}C_{b_{n-2l+1}}]\cdot\cdot[C_{a_n\}}C_{b_n)}]$

$= \frac{n!n!}{(2n)!}\sum_{k\geq i|j}^{\leq n-i|j}\frac{(-2)^{i+j}}{(2i)!(2j)!}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}$

$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i}}][B_{a_{n+1-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i}}][C_{a_{n+1-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-j}}][A_{b_{n+1-k-j}}\cdot\cdot A_{b_{n-2j}}][C_{b_{n+1-2j}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$

推论4.5.2. $A=1,B=1,C=1\Rightarrow$
$$\sum_{r=0}^{[n/2]}\sum_{l\geq 0,i|j-r}^{\leq i,j,n/2-r}(-1)^{r+i+j}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}C_r^{i-l}C_r^{j-l}C_{n-2r}^{2l}=\sum_{k\geq i|j}^{\leq n-i|j}\frac{2^{2i+2j-n}}{(2i)!(2j)!}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}$$

推论4.5.3. $\sum_{r=0}^{[n/2]}[\sum_{l\geq 0,i|j-r}^{\leq i,j,k-r,n-r-k}](-1)^r\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}C_r^{i-l}2^{r+l-i}C_r^{j-l}2^{r+l-j}C_{n-2r}^{2l}C_{n-2r-2l}^{k-r-l}$
$[C_{\{a_1}C_{a_2}]\cdot\cdot[C_{a_{2i-2l-1}}C_{a_{2i-2l}}][A_{a_{2i-2l+1}}B_{a_{2i-2l+2}}]\cdot\cdot[A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}]$
$[C_{(b_1}C_{b_2}]\cdot\cdot[C_{b_{2j-2l-1}}C_{b_{2j-2l}}][A_{b_{2j-2l+1}}B_{b_{2j-2l+2}}]\cdot\cdot[A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}]$
$[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_{n+r-l-k}}B_{b_{n+r-l-k}}][B_{a_{n+r-l-k+1}}A_{b_{n+r-l-k+1}}]\cdot\cdot[B_{a_{n-2l}}A_{b_{n-2l}}][C_{a_{n-2l+1}}C_{b_{n-2l+1}}]\cdot\cdot[C_{a_n\}}C_{b_n)}]$
$=\frac{n!n!}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^{i+j}}{(2i)!(2j)!}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}$
$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i}}][B_{a_{n+1-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i}}][C_{a_{n+1-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-j}}][A_{b_{n+1-k-j}}\cdot\cdot A_{b_{n-2j}}][C_{b_{n+1-2j}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$
$\Leftrightarrow\sum_{r=0}^{[n/2]}[\sum_{l\geq 0,i|j-r}^{\leq i,j,k-r,n-r-k}](-1)^{r+i+j}2^{2r+2l}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}C_r^{i-l}C_r^{j-l}C_{n-2r}^{2l}C_{n-2r-2l}^{k-r-l}=\frac{2^{2i+2j}}{(2i)!(2j)!}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}$

以上最后一式是关于第k项的恒等式。

4.6 投影算子猜想的C(2i+1,2j+1)项情形

定理4.6.1. $\sum_{r=0}^{[n/2]}\sum_{l\geq 0,i|j-r}^{\leq i,j,(n-1)/2-r}(-1)^r\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$
$C_r^{i-l}\{[C_{\{a_1}C_{a_2}]\cdot\cdot[C_{a_{2i-2l-1}}C_{a_{2i-2l}}][A_{a_{2i-2l+1}}B_{a_{2i-2l+2}}+B_{a_{2i-2l+1}}A_{a_{2i-2l+2}}]\cdot\cdot[A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}+B_{a_{2r-1}}A_{a_{2r}}]$
$C_r^{j-l}[C_{(b_1}C_{b_2}]\cdot\cdot[C_{b_{2j-2l-1}}C_{b_{2j-2l}}][A_{b_{2j-2l+1}}B_{b_{2j-2l+2}}+B_{b_{2j-2l+1}}A_{b_{2j-2l+2}}]\cdot\cdot[A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}+B_{b_{2r-1}}A_{b_{2r}}]\}$
$C_{n-2r}^{2l+1}[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}+B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_{n-2l-1}}B_{b_{n-2l-1}}+B_{a_{n-2l-1}}A_{b_{n-2l-1}}][C_{a_{n-2l}}C_{b_{n-2l}}]\cdot\cdot[C_{a_n\}}C_{b_n)}]$
$=-\sum_{k\geq i|j}^{\leq n-1-i|j}\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(-2)^{i+j+1}}{(2i+1)!(2j+1)!}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-k-i-1)!(n-k-j-1)!}$
$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i-1}}][B_{a_{n-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i-1}}][C_{a_{n-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-j-1}}][A_{b_{n-k-j}}\cdot\cdot A_{b_{n-2j-1}}][C_{b_{n-2j}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$

以上是关于$(AB+BA),CC$型的二项式展开后分母含$(2i+1)!(2j+1)!$项的恒等式。

推论4.6.1. $\sum_{r=0}^{[n/2]}\sum_{l\geq 0,i|j-r}^{\leq i,j,(n-1)/2-r}(-1)^r\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}C_r^{i-l}2^{r+l-i}C_r^{j-l}2^{r+l-j}C_{n-2r}^{2l+1}$
$[C_{\{a_1}C_{a_2}]\cdot\cdot[C_{a_{2i-2l-1}}C_{a_{2i-2l}}][A_{a_{2i-2l+1}}B_{a_{2i-2l+2}}]\cdot\cdot[A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}]$
$[C_{(b_1}C_{b_2}]\cdot\cdot[C_{b_{2j-2l-1}}C_{b_{2j-2l}}][A_{b_{2j-2l+1}}B_{b_{2j-2l+2}}]\cdot\cdot[A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}]$
$[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}+B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_{n-2l-1}}B_{b_{n-2l-1}}+B_{a_{n-2l-1}}A_{b_{n-2l-1}}][C_{a_{n-2l}}C_{b_{n-2l}}]\cdot\cdot[C_{a_n\}}C_{b_n)}]$
$=-\sum_{k\geq i|j}^{\leq n-1-i|j}\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(-2)^{i+j+1}}{(2i+1)!(2j+1)!}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-k-i-1)!(n-k-j-1)!}$
$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i-1}}][B_{a_{n-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i-1}}][C_{a_{n-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-j-1}}][A_{b_{n-k-j}}\cdot\cdot A_{b_{n-2j-1}}][C_{b_{n-2j}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$

推论4.6.2. $A=1,B=1,C=1\Rightarrow$
$$\sum_{r=0}^{[n/2]}\sum_{l\geq 0,i|j-r}^{\leq i,j,(n-1)/2-r}(-1)^{r+i+j}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}C_r^{i-l}C_r^{j-l}C_{n-2r}^{2l+1}=\sum_{k\geq i|j}^{\leq n-1-i|j}\frac{2^{2i+2j+2-n}}{(2i+1)!(2j+1)!}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-k-i-1)!(n-k-j-1)!}$$

推论4.6.3. $\sum_{r=0}^{[n/2]}[\sum_{l\geq 0,i|j-r}^{\leq i,j,k-r,n-1-r-k}](-1)^r\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}C_r^{i-l}2^{r+l-i}C_r^{j-l}2^{r+l-j}C_{n-2r}^{2l+1}C_{n-2r-2l-1}^{k-r-l}$
$[C_{\{a_1}C_{a_2}]\cdot\cdot[C_{a_{2i-2l-1}}C_{a_{2i-2l}}][A_{a_{2i-2l+1}}B_{a_{2i-2l+2}}]\cdot\cdot[A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}]$
$[C_{(b_1}C_{b_2}]\cdot\cdot[C_{b_{2j-2l-1}}C_{b_{2j-2l}}][A_{b_{2j-2l+1}}B_{b_{2j-2l+2}}]\cdot\cdot[A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}]$
$[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_{n+r-l-k-1}}B_{b_{n+r-l-k-1}}][B_{a_{n+r-l-k}}A_{b_{n+r-l-k}}]\cdot\cdot[B_{a_{n-2l-1}}A_{b_{n-2l-1}}][C_{a_{n-2l}}C_{b_{n-2l}}]\cdot\cdot[C_{a_n\}}C_{b_n)}]$
$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(-2)^{i+j+1}}{(2i+1)!(2j+1)!}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-k-i-1)!(n-k-j-1)!}$
$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i-1}}][B_{a_{n-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i-1}}][C_{a_{n-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-j-1}}][A_{b_{n-k-j}}\cdot\cdot A_{b_{n-2j-1}}][C_{b_{n-2j}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$
$\Leftrightarrow\sum_{r=0}^{[n/2]}[\sum_{l\geq 0,i|j-r}^{\leq i,j,k-r,n-1-r-k}](-1)^{r+i+j}2^{2r+2l}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}C_r^{i-l}C_r^{j-l}C_{n-2r}^{2l+1}C_{n-2r-2l-1}^{k-r-l}$
$=\frac{2^{2i+2j+1}}{(2i+1)!(2j+1)!}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-k-i-1)!(n-k-j-1)!}$

以上最后一式是关于第k项的恒等式。

4.7 与投影算子猜想等价的组合学恒等式

定理4.7.1. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$
$\{[C_{\{a_1}C_{a_2}-A_{\{a_1}B_{a_2}-B_{\{a_1}A_{a_2}][C_{(b_1}C_{b_2}-A_{(b_1}B_{b_2}-B_{(b_1}A_{b_2}]\cdot\cdot$
$[C_{a_{2r-1}}C_{a_{2r}}-A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}-B_{a_{2r-1}}A_{a_{2r}}][C_{b_{2r-1}}C_{b_{2r}}-A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}-B_{b_{2r-1}}A_{b_{2r}}]\}$
$[C_{a_{2r+1}}C_{b_{2r+1}}-A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}-B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[C_{a_n\}}C_{b_n)}-A_{a_n\}}B_{b_n)}-B_{a_n\}}A_{b_n)}]$
$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{C_{2n}^{2k}}\sum_{i,j=0}^{k|(n-k)}\frac{2^{i+j}n!n!}{(n-k-i)!(n-k-j)!(k-i)!(k-j)!(2i)!(2j)!}$
$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i}}][B_{a_{n+1-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i}}][C_{a_{n+1-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-j}}][A_{b_{n+1-k-j}}\cdot\cdot A_{b_{n-2j}}][C_{b_{n+1-2j}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$
$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^n}{C_{2n}^{2k+1}}\sum_{i,j=0}^{k|(n-1-k)}\frac{2^{i+j+1}n!n!}{(n-k-i-1)!(n-k-j-1)!(k-i)!(k-j)!(2i+1)!(2j+1)!}$
$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-i-1}}][B_{a_{n-k-i}}\cdot\cdot B_{a_{n-2i-1}}][C_{a_{n-2i}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-j-1}}][A_{b_{n-k-j}}\cdot\cdot A_{b_{n-2j-1}}][C_{b_{n-2j}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$
$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\sum_{r=0}^{[n/2]}[\sum_{l\geq 0,i|j-r}^{\leq i,j,k-r,n-r-k}](-1)^{r+i+j}2^{2r+2l}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}C_r^{i-l}C_r^{j-l}C_{n-2r}^{2l}C_{n-2r-2l}^{k-r-l}\\ =\frac{2^{2i+2j}}{(2i)!(2j)!}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}\\ \sum_{r=0}^{[n/2]}[\sum_{l\geq 0,i|j-r}^{\leq i,j,k-r,n-1-r-k}](-1)^{r+i+j}2^{2r+2l}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}C_r^{i-l}C_r^{j-l}C_{n-2r}^{2l+1}C_{n-2r-2l-1}^{k-r-l}\\ =\frac{2^{2i+2j+1}}{(2i+1)!(2j+1)!}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-k-i-1)!(n-k-j-1)!}\end{cases}$$

如果以上两个组合学恒等式成立，则投影算子猜想和前节的重要猜想都自然成立。

4.8 投影算子组合学恒等式的等价分析

推论4.8.1.

$$\begin{cases}\sum_{r=0}^{[n/2]}[\sum_{l\geq 0,i|j-r}^{\leq i,j,k-r,n-r-k}](-1)^{r+i+j}\frac{2^{2r+2l}(2n-2r)!}{(n-r)!(n-k-r-l)!(k-r-l)!(2l)!}\frac{r!}{(i-l)!(j-l)!(r+l-i)!(r+l-j)!}\\ =\frac{2^{2i+2j}}{(2i)!(2j)!}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}\\ \sum_{r=0}^{[n/2]}[\sum_{l\geq 0,i|j-r}^{\leq i,j,k-r,n-1-r-k}](-1)^{r+i+j}\frac{2^{2r+2l}(2n-2r)!}{(n-r)!(n-k-r-l-1)!(k-r-l)!(2l+1)!}\frac{r!}{(i-l)!(j-l)!(r+l-i)!(r+l-j)!}\\ =\frac{2^{2i+2j+1}}{(2i+1)!(2j+1)!}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-k-i-1)!(n-k-j-1)!}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\sum_{r=0}^{k|(n-k)}[\sum_{l\geq 0,i|j-r}^{\leq i,j,k-r,n-r-k}](-4)^{r}\frac{4^{l}(2n-2r)!}{(n-r)!(n-k-r-l)!(k-r-l)!(2l)!}\frac{r!}{(i-l)!(j-l)!(r+l-i)!(r+l-j)!}\\ =\frac{(-4)^{i+j}}{(2i)!(2j)!}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}\\ \sum_{r=0}^{k|(n-k)}[\sum_{l\geq 0,i|j-r}^{\leq i,j,k-r,n-r-k}](-4)^{r}\frac{4^{l}(2n-2r+1)!}{(n-r)!(n-k-r-l)!(k-r-l)!(2l+1)!}\frac{r!}{(i-l)!(j-l)!(r+l-i)!(r+l-j)!}\\ =\frac{(-4)^{i+j}}{(2i+1)!(2j+1)!}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}(n-1\to n)\end{cases}$$

如果以上两个组合学恒等式成立，则投影算子猜想和前节的重要猜想都自然成立。这样猜想明显得到了极大简化，下一步就是要努力证明以上两个组合学恒等式，等我有时间再来做这件事。

4.9 投影算子组合学恒等式的严格证明试探？？？

定理4.9.1.

$$\sum_{r=0}^{k|(n-k)}[\sum_{l\geq 0,(i|j)-r}^{\leq i,j,k-r,n-r-k}]\frac{(-4)^r4^l(2n-2r)!}{(n-r)!(n-k-r-l)!(k-r-l)!(2l)!}\frac{r!}{(i-l)!(j-l)!(r+l-i)!(r+l-j)!}=\frac{(-4)^{i+j}}{(2i)!(2j)!}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}$$

证明: $k\leq n-k,i\geq j;$反之，则等价替换：$k'\leq n-k',i'\geq j',k'=n-k,i'=j,j'=i$

$$\sum_{r=0}^{k|(n-k)}\sum_{l=0}^{i|j}(-4)^r4^l\frac{(2n-2r)!}{(n-r)!(n-k-r-l)!(k-r-l)!(2l)!}\frac{r!}{(i-l)!(j-l)!(r+l-i)!(r+l-j)!}$$
$$=\sum_{l=0}^{j}\sum_{r=0}^{k}(-4)^r4^l\frac{(2n-2r)!}{(n-r)!(n-k-r-l)!(k-r-l)!(2l)!}\frac{r!}{(i-l)!(j-l)!(r+l-i)!(r+l-j)!}$$

$$= \sum_{l=0}^{j} \frac{4^l}{(i-l)!(j-l)!(2l)!} \sum_{r=i-l}^{k} (-4)^r \frac{(2n-2r)!}{(n-r)!(n-k-r-l)!(k-r-l)!} \frac{r!}{(r+l-i)!(r+l-j)!}$$
$$= \sum_{l=0}^{j} \frac{4^l}{(i-l)!(j-l)!(2l)!} \sum_{r=0}^{k+l-i} (-4)^{r-l+i} \frac{(2n+2l-2r-2i)!}{(n+l-r-i)!(n-k-r-l+l-i)!(k-r-l+l-i)!} \frac{(r-l+i)!}{(r+l-i-l+i)!(r+l-j-l+i)!}$$
$$= \sum_{l=0}^{j} \frac{(-1)^l(-4)^i}{(i-l)!(j-l)!(2l)!} \sum_{r=0}^{k-i} (-4)^r \frac{(2n+2l-2r-2i)!}{(n+l-r-i)!(n-k-r-i)!(k-r-i)!} \frac{(r-l+i)!}{r!(r+i-j)!}$$
$$= \sum_{l=0}^{j} \frac{(-1)^l(-4)^i}{(i-l)!(j-l)!(2l)!(k-i)!} \sum_{r=0}^{k-i} (-1)^r C_{k-i}^r 4^r \frac{(2n+2l-2r-2i)!}{(n+l-r-i)!(n-k-r-i)!} \frac{(r-l+i)!}{(r+i-j)!}$$
$$\Rightarrow t_r = 4^r \frac{(2n+2l-2r-2i)!}{(n+l-r-i)!(n-k-r-i)!} \frac{(r-l+i)!}{(r+i-j)!}, t_0 = \frac{(2n+2l-2i)!}{(n+l-i)!(n-k-i)!} \frac{(i-l)!}{(i-j)!},$$
$$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{4^{r+1} \frac{(2n+2l-2r-2i-2)!}{(n+l-r-i-1)!(n-k-r-i-1)!} \frac{(r-l+i+1)!}{(r+i-j+1)!}}{4^r \frac{(2n+2l-2r-2i)!}{(n+l-r-i)!(n-k-r-i)!} \frac{(r-l+i)!}{(r+i-j)!}} = \frac{4 \frac{(r-l+i+1)}{(r+i-j+1)}}{\frac{(2n+2l-2r-2i)(2n+2l-2r-2i-1)}{(n+l-r-i)(n-k-r-i)}} = \frac{(i-l+1+r)(i+k-n+r)}{(i-j+1+r)(i+1/2-n-l+r)}$$
$$\Rightarrow t_r = \frac{(i-l+1)^{(r)}(i+k-n)^{(r)}}{(i-j+1)^{(r)}(i+1/2-n-l)^{(r)}} \frac{(2n+2l-2i)!}{(n+l-i)!(n-k-i)!} \frac{(i-l)!}{(i-j)!}$$ □

定理4.9.2.

$$\sum_{r=0}^{k|(n-k)} [\sum_{l\geq 0,(i|j)-r}^{\leq i,j,k-r,n-r-k}] \frac{(-4)^r 4^l (2n-2r+1)!}{(n-r)!(n-k-r-l)!(k-r-l)!(2l+1)!} \frac{r!}{(i-l)!(j-l)!(r+l-i)!(r+l-j)!} = \frac{(-4)^{i+j}}{(2i+1)!(2j+1)!} \frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!} \frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}$$

证明: $k \leq n-k, i \geq j$; 反之，则等价替换：$k' \leq n-k', i' \geq j', k' = n-k, i' = j, j' = i$

$$\sum_{r=0}^{k|(n-k)} \sum_{l=0}^{i|j} (-4)^r 4^l \frac{(2n-2r+1)!}{(n-r)!(n-k-r-l)!(k-r-l)!(2l+1)!} \frac{r!}{(i-l)!(j-l)!(r+l-i)!(r+l-j)!}$$
$$= \sum_{l=0}^{j} \sum_{r=0}^{k} (-4)^r 4^l \frac{(2n-2r+1)!}{(n-r)!(n-k-r-l)!(k-r-l)!(2l+1)!} \frac{r!}{(i-l)!(j-l)!(r+l-i)!(r+l-j)!}$$
$$= \sum_{l=0}^{j} \frac{4^l}{(i-l)!(j-l)!(2l+1)!} \sum_{r=i-l}^{k} (-4)^r \frac{(2n-2r+1)!}{(n-r)!(n-k-r-l)!(k-r-l)!} \frac{r!}{(r+l-i)!(r+l-j)!}$$
$$= \sum_{l=0}^{j} \frac{4^l}{(i-l)!(j-l)!(2l+1)!} \sum_{r=0}^{k+l-i} (-4)^{r-l+i} \frac{(2n+2l-2r-2i+1)!}{(n+l-r-i)!(n-k-r-l+l-i)!(k-r-l+l-i)!} \frac{(r-l+i)!}{(r+l-i-l+i)!(r+l-j-l+i)!}$$
$$= \sum_{l=0}^{j} \frac{(-1)^l(-4)^i}{(i-l)!(j-l)!(2l+1)!} \sum_{r=0}^{k-i} (-4)^r \frac{(2n+2l-2r-2i+1)!}{(n+l-r-i)!(n-k-r-i)!(k-r-i)!} \frac{(r-l+i)!}{r!(r+i-j)!}$$
$$= \sum_{l=0}^{j} \frac{(-1)^l(-4)^i}{(i-l)!(j-l)!(2l+1)!(k-i)!} \sum_{r=0}^{k-i} (-1)^r C_{k-i}^r 4^r \frac{(2n+2l-2r-2i+1)!}{(n+l-r-i)!(n-k-r-i)!} \frac{(r-l+i)!}{(r+i-j)!}$$
$$\Rightarrow t_r = 4^r \frac{(2n+2l-2r-2i+1)!}{(n+l-r-i)!(n-k-r-i)!} \frac{(r-l+i)!}{(r+i-j)!}, t_0 = \frac{(2n+2l-2i+1)!}{(n+l-i)!(n-k-i)!} \frac{(i-l)!}{(i-j)!},$$
$$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{4^{r+1} \frac{(2n+2l-2r-2i-1)!}{(n+l-r-i-1)!(n-k-r-i-1)!} \frac{(r-l+i+1)!}{(r+i-j+1)!}}{4^r \frac{(2n+2l-2r-2i+1)!}{(n+l-r-i)!(n-k-r-i)!} \frac{(r-l+i)!}{(r+i-j)!}} = \frac{4 \frac{(r-l+i+1)}{(r+i-j+1)}}{\frac{(2n+2l-2r-2i)(2n+2l-2r-2i+1)}{(n+l-r-i)(n-k-r-i)}} = \frac{(i-l+1+r)(i+k-n+r)}{(i-j+1+r)(i-1/2-n-l+r)}$$
$$\Rightarrow t_r = \frac{(i-l+1)^{(r)}(i+k-n)^{(r)}}{(i-j+1)^{(r)}(i-1/2-n-l)^{(r)}} \frac{(2n+2l-2i+1)!}{(n+l-i)!(n-k-i)!} \frac{(i-l)!}{(i-j)!}$$ □

4.10 投影算子组合学恒等式特例的试探

证明: $\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!} \frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!} = \frac{(2n+2)!}{(n-2i)!(n-2j)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n-2i}^{k-i} C_{n-2j}^{k-j}}{C_{2n+2}^{2k}}$

$$= \sum_{k=0}^{n} (2k+1)(2n-2k+1) \frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!} \frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!} =?$$ □

证明: $\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!} \frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!} = \frac{(2n)!}{(n-2i)!(n-2j)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n-2i}^{k-i} C_{n-2j}^{k-j}}{C_{2n}^{2k}}$ □

证明: $\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(k-i)!(k-i)!} \frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-i)!} = \frac{(2n)!}{(n-2i)!(n-2i)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(C_{n-2i}^{k-i})^2}{C_{2n}^{2k}}$ □

证明: $\sum_{k=0}^{2l} \frac{(2k)!}{(k-i)!(k-i)!} \frac{(4l-2k)!}{(2l-k-i)!(2l-k-i)!} =?$ □

证明: $\sum_{k=0}^{2l}\frac{(2k)!}{(k-l)!(k-l)!}\frac{(4l-2k)!}{(2l-k-l)!(2l-k-l)!}$
$=\sum_{k=0}^{2l}\frac{(2k)!}{(k-l)!(k-l)!}\frac{(4l-2k)!}{(l-k)!(l-k)!}=\sum_{k=0}^{2l}\frac{(C_0^{k-l})^2}{C_{4l}^{2k}}\frac{(4l)!}{0!0!}$
$=\frac{(2l)!}{(l-l)!(l-l)!}\frac{(4l-2l)!}{(l-l)!(l-l)!}=[(2l)!]^2$ □

证明: $\sum_{k=0}^{2l}\frac{(2k)!}{(k-l+1)!(k-l+1)!}\frac{(4l-2k)!}{(2l-k-l+1)!(2l-k-l+1)!}$
$=\sum_{k=0}^{2l}\frac{(2k)!}{(k-l+1)!(k-l+1)!}\frac{(4l-2k)!}{(l+1-k)!(l+1-k)!}=\sum_{k=0}^{2l}\frac{(C_2^{k-l+1})^2}{C_{4l}^{2k}}\frac{(4l)!}{2!2!}$
$=\frac{(2l-2)!}{0!0!}\frac{(2l+2)!}{2!2!}+\frac{(2l)!}{1!1!}\frac{(2l)!}{1!1!}+\frac{(2l+2)!}{2!2!}\frac{(2l-2)!}{0!0!}$ □

证明: $\sum_{k=0}^{2l}\frac{(2k)!}{(k-l+2)!(k-l+2)!}\frac{(4l-2k)!}{(2l-k-l+2)!(2l-k-l+2)!}$
$=\sum_{k=0}^{2l}\frac{(2k)!}{(k-l+2)!(k-l+2)!}\frac{(4l-2k)!}{(l+2-k)!(l+2-k)!}=\sum_{k=0}^{2l}\frac{(C_4^{k-l+2})^2}{C_{4l}^{2k}}\frac{(4l)!}{4!4!}$
$=\frac{(2l-4)!}{0!0!}\frac{(2l+4)!}{4!4!}+\frac{(2l-2)!}{1!1!}\frac{(2l+2)!}{3!3!}+\frac{(2l)!}{2!2!}\frac{(2l)!}{2!2!}+\frac{(2l+2)!}{3!3!}\frac{(2l-2)!}{1!1!}+\frac{(2l+4)!}{4!4!}\frac{(2l-4)!}{0!0!}$ □

5 投影算子猜想具体情形表述和验证

5.1 取值范围分析

推论5.1.1.
$$\sum_{r=0}^{[n/2]}[\sum_{l\geq 0,i|j-r}^{\leq i,j,k-r,n-r-k}](-1)^{r+i+j}2^{2r+2l}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}C_r^{i-l}C_r^{j-l}C_{n-2r}^{2l}C_{n-2r-2l}^{k-r-l}=\frac{2^{2i+2j}}{(2i)!(2j)!}\frac{(2k)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k-i)!(n-k-j)!}$$

推论5.1.2. $0,i|j-r\leq l\leq i,j,k-r,n-r-k\Rightarrow|i-j|\leq r\leq k|(n-k),i|j\leq k\leq n-i|j$

推论5.1.3. $\sum_{r=0}^{[n/2]}[\sum_{l\geq 0,i|j-r}^{\leq i,j,k-r,n-1-r-k}](-1)^{r+i+j}2^{2r+2l}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}C_r^{i-l}C_r^{j-l}C_{n-2r}^{2l+1}C_{n-2r-2l-1}^{k-r-l}$
$=\frac{2^{2i+2j+1}}{(2i+1)!(2j+1)!}\frac{(2k+1)!}{(k-i)!(k-j)!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-k-i-1)!(n-k-j-1)!}$

推论5.1.4. $0,i|j-r\leq l\leq i,j,k-r,n-1-r-k\Rightarrow|i-j|\leq r\leq k|(n-1-k),i|j\leq k\leq n-1-i|j$

5.2 i=0,j=0情形

5.2.1 C(2i,2j)=(0,0)项情形

推论5.2.1. $i=0,j=0\Rightarrow l=0,r\leq k|(n-k),0\leq k\leq n$

推论5.2.2. $\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2k)!}{k!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!}$

推论5.2.3. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$
$\{[A_{\{a_1}B_{a_2}+B_{\{a_1}A_{a_2}][A_{(b_1}B_{b_2}+B_{(b_1}A_{b_2}]\cdot\cdot[A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}+B_{a_{2r-1}}A_{a_{2r}}][A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}+B_{b_{2r-1}}A_{b_{2r}}]\}$
$[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}+B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_n\}}B_{b_n)}+B_{a_n\}}A_{b_n)}]$
$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{k!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!}[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k}}B_{a_{n+1-k}}\cdot\cdot B_{a_n\}}][B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k}}A_{b_{n+1-k}}\cdot\cdot A_{b_n)}]$
$\Leftrightarrow\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2k)!}{k!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!}$

推论5.2.4. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!2^n}{r!(n-r)!(n-2r)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{k!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!}=2^{2n}$

证明: $\sum_{r=0}^{(k+1)|(n-k-1)}(-4)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k+1-r)!(n-k-1-r)!}$
$=\sum_{r=0}^{(k+1)|(n-k-1)}(-4)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}\frac{n-k-r}{k+1-r}$ □

5.2.2 C(2i+1,2j+1)=(1,1)项情形

推论5.2.5. $i=0,j=0\Rightarrow l=0,r\le k|(n-1-k),0\le k\le n-1$

推论5.2.6. $\sum_{r=0}^{k|(n-1-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r-1)!}{r!(n-1-r)!(k-r)!(n-1-k-r)!}=\frac{(2k+1)!}{k!k!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-1-k)!(n-1-k)!}$

定理5.2.1. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$

$\{[A_{\{a_1}B_{a_2}+B_{\{a_1}A_{a_2}][A_{(b_1}B_{b_2}+B_{(b_1}A_{b_2}]\cdot\cdot[A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}+B_{a_{2r-1}}A_{a_{2r}}][A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}+B_{b_{2r-1}}A_{b_{2r}}]\}$

$C^1_{n-2r}[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}+B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_{n-1}}B_{b_{n-1}}+B_{a_{n-1}}A_{b_{n-1}}][C_{a_n\}}C_{b_n)}]$

$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{C_{2n}^{2k+1}}\frac{n!n!}{(n-k-1)!(n-k-1)!k!k!1!1!}\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-1}}][B_{a_{n-k}}\cdot\cdot B_{a_{n-1}}][C_{a_n\}}]\}\{[B_{\{b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-1}}][A_{b_{n-k}}\cdot\cdot A_{b_{n-1}}][C_{b_n\}}]\}$

$\Leftrightarrow\sum_{r=0}^{k|(n-1-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r-1)!}{r!(n-1-r)!(k-r)!(n-1-k-r)!}=\frac{(2k+1)!}{k!k!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-1-k)!(n-1-k)!}$

推论5.2.7. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!(n-2r)2^{n-2}}{r!(n-r)!(n-2r)!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k+1)!}{k!k!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-1-k)!(n-1-k)!}=2^{2n-3}n(n+1)$

5.2.3 (1,1)⇒(0,0)

定理5.2.2.
$\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r+1)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2k+1)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k)!(n-k)!}\Rightarrow\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2k)!}{k!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!}$
$n\ge 0,0\le k\le n$

证明: $\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r+1)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2k+1)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k)!(n-k)!},n\ge 0,0\le k\le n$

$\Leftrightarrow\sum_{r=0}^{k|(n-k-2)}(-4)^r\frac{(2n-2r-3)!}{r!(n-r-2)!(k-r)!(n-k-r-2)!}=\frac{(2k+1)!}{k!k!}\frac{(2n-2k-3)!}{(n-k-2)!(n-k-2)!},n\ge 2,0\le k\le n-2$

$\Leftrightarrow\sum_{r=1}^{(k+1)|(n-k-1)}(-4)^{r-1}\frac{(2n-2r-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!(k-r+1)!(n-k-r-1)!}=\frac{(2k+1)!}{k!k!}\frac{(2n-2k-3)!}{(n-k-2)!(n-k-2)!},n\ge 2,0\le k\le n-2$

$\Leftrightarrow\sum_{r=1}^{k|(n-k)}(-4)^{r-1}\frac{(2n-2r-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2k-1)!}{(k-1)!(k-1)!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-k-1)!(n-k-1)!},n\ge 2,1\le k\le n-1$

$\Leftrightarrow\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2r)(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=-\frac{(2n-2k)(2k)!}{k!k!}\frac{(2k)(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!},n\ge 2,1\le k\le n-1$

$\Leftrightarrow\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2r)(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=-\frac{(2n-2k)(2k)!}{k!k!}\frac{(2k)(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!},n\ge 2,0\le k\le n$

$\Leftrightarrow\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2r)(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=-\frac{(2n-2k)(2k)!}{k!k!}\frac{(2k)(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!},n\ge 0,0\le k\le n$

$\Leftrightarrow\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r+1)!-(2n+1)(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2n-2k)(2k)!}{k!k!}\frac{(2k)(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!},n\ge 0,0\le k\le n$

$\Rightarrow\frac{(2k+1)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k)!(n-k)!}-\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n+1)(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2n-2k)(2k)!}{k!k!}\frac{(2k)(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!},n\ge 0,0\le k\le n$

$\Leftrightarrow\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2k)!}{k!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!},n\ge 0,0\le k\le n$ □

5.2.4 小结

推论5.2.8. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}=2^n,\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!(n-2r)}{r!(n-r)!(n-2r)!}=n(n+1)2^{n-1}$

推论5.2.9. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{r(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}=-n(n-1)2^{n-2},\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(n-r)(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}=n(n+3)2^{n-2}$

推论5.2.10. $\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!}=1,\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\frac{(2n-2k+1)!!}{(2n-2k)!!}=C^2_{n+2}$

推论5.2.11.
$\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2k)!}{k!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!},\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r+1)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2k+1)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k)!(n-k)!}$

5.3 利用范德蒙恒等式严格证明$[i=0,j=0]$情形

推论5.3.1.
$\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2k)!}{k!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!},\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r+1)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2k+1)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k)!(n-k)!}$

证明: $k\le n-k,\sum_{r=0}^{k}(-4)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}$
$=\sum_{r=0}^{k}(-1)^rC_k^r4^r\frac{(2n-2r)!}{k!(n-r)!(n-k-r)!}=\sum_{r=0}^{k}(-1)^rC_k^r4^rC_{2n-2r}^{n-r}C_{n-r}^{k}$
$\Rightarrow$ 令$t_r=4^r\frac{(2n-2r)!}{k!(n-r)!(n-k-r)!},t_0=C_{2n}^nC_n^k$
$\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{4^{r+1}\frac{(2n-2r-2)!}{k!(n-r-1)!(n-k-r-1)!}}{4^r\frac{(2n-2r)!}{k!(n-r)!(n-k-r)!}}=\frac{4(n-r)(n-k-r)}{(2n-2r)(2n-2r-1)}=\frac{k-n+r}{1/2-n+r}$
$\Rightarrow t_r=\frac{(k-n)^{(r)}}{(1/2-n)^{(r)}}C_{2n}^nC_n^k$
$\Rightarrow\sum_{r=0}^{k}(-4)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\sum_{r=0}^{k}(-1)^rC_k^r\frac{(k-n)^{(r)}}{(1/2-n)^{(r)}}C_{2n}^nC_n^k$
$=\frac{(1/2-k)^{(k)}}{(1/2-n)^{(k)}}C_{2n}^nC_n^k=\frac{(2k)!}{k!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!}$ □

证明: $k\ge n-k,\sum_{r=0}^{k}(-4)^r\frac{(2n-2r+1)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}$
$=\sum_{r=0}^{k}(-1)^rC_k^r4^r\frac{(2n-2r+1)!}{k!(n-r)!(n-k-r)!}=\sum_{r=0}^{k}(-1)^rC_k^r4^rC_{2n-2r+1}^{n-r}C_{n-r}^{k}$
$\Rightarrow$ 令$t_r=4^r\frac{(2n-2r+1)!}{k!(n-r)!(n-k-r)!},t_0=\frac{(2n+1)!}{k!n!(n-k)!}$
$\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{4^{r+1}\frac{(2n-2r-1)!}{k!(n-r-1)!(n-k-r-1)!}}{4^r\frac{(2n-2r+1)!}{k!(n-r)!(n-k-r)!}}=\frac{4(n-r)(n-k-r)}{(2n-2r+1)(2n-2r)}=\frac{k-n+r}{-1/2-n+r}$
$\Rightarrow t_r=\frac{(k-n)^{(r)}}{(-1/2-n)^{(r)}}\frac{(2n+1)!}{k!n!(n-k)!}$
$\Rightarrow\sum_{r=0}^{k}(-4)^r\frac{(2n-2r+1)!}{r!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\sum_{r=0}^{k}(-1)^rC_k^r\frac{(k-n)^{(r)}}{(-1/2-n)^{(r)}}\frac{(2n+1)!}{k!n!(n-k)!}$
$=\frac{(-1/2-k)^{(k)}}{(-1/2-n)^{(k)}}\frac{(2n+1)!}{k!n!(n-k)!}=\frac{(2k+1)!}{k!k!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k)!(n-k)!}$ □

5.4 i=1,j=0和i=0,j=1情形

5.4.1 C(2i,2j)=(2,0)项和C(2i,2j)=(0,2)项情形

推论5.4.1. $i=1,j=0|i=0,j=1\Rightarrow l=0,1\le r\le k|(n-k),1\le k\le n-1$

推论5.4.2. $\sum_{r=1}^{k|(n-k)}(-1)^{r+1}2^{2r-1}\frac{(2n-2r)!}{(r-1)!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2k)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-1-k)!(n-k)!}$

定理5.4.1. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$
$C_r^1C_r^0\{[A_{\{a_1}B_{a_2}+B_{\{a_1}A_{a_2}][A_{(b_1}B_{b_2}+B_{(b_1}A_{b_2}]\cdot\cdot$
$[A_{a_{2r-3}}B_{a_{2r-1}}+B_{a_{2r-3}}A_{a_{2r-1}}][A_{b_{2r-3}}B_{b_{2r-1}}+B_{b_{2r-3}}A_{b_{2r-1}}][C_{a_{2r-1}}C_{a_{2r}}][A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}+B_{b_{2r-1}}A_{b_{2r}}]\}$
$C_{n-2r}^0[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}+B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_n\}}B_{b_n)}+B_{a_n\}}A_{b_n)}]$
$=-\sum_{k=0}^{n}\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2k)!(2k)!}{(n-k-1)!(n-k)!(k-1)!k!}$
$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-1}}][B_{a_{n-k}}\cdot\cdot B_{a_{n-2}}][C_{a_{n-1}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k}}][A_{b_{n+1-k}}\cdot\cdot A_{b_n)}]\}$

定理5.4.2. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$
$C_r^0C_r^1\{[A_{\{a_1}B_{a_2}+B_{\{a_1}A_{a_2}][A_{(b_1}B_{b_2}+B_{(b_1}A_{b_2}]\cdot\cdot$
$[A_{a_{2r-3}}B_{a_{2r-1}}+B_{a_{2r-3}}A_{a_{2r-1}}][A_{b_{2r-3}}B_{b_{2r-1}}+B_{b_{2r-3}}A_{b_{2r-1}}][A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}+B_{a_{2r-1}}A_{a_{2r}}][C_{b_{2r-1}}C_{b_{2r}}]\}$
$C_{n-2r}^0[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}+B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_n\}}B_{b_n)}+B_{a_n\}}A_{b_n)}]$
$=-\sum_{k=0}^{n}\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2k)!(2k)!}{(n-k)!(n-k-1)!k!(k-1)!}$
$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k}}][B_{a_{n-k+1}}\cdot\cdot B_{a_n}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-1}}][A_{b_{n-k}}\cdot\cdot A_{b_{n-2})}][C_{b_{n-1}}\cdot\cdot C_{b_n\}}]\}$

推论5.4.3. $-\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2r)(2n-2r)!2^n}{r!(n-r)!(n-2r)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!(2k)}{k!k!}\frac{(2n-2k)!(2n-2k)}{(n-k)!(n-k)!}=n(n-1)2^{2n-1}$

推论5.4.4. $\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{k!(k-1)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k-1)!}=n(n-1)2^{2n-3}$

5.4.2 C(2i+1,2j+1)=(3,1)项和C(2i+1,2j+1)=(1,3)项情形

推论5.4.5.

$$\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r+1)!}{(n-r)!(n-k-r)!(k-r)!1!}\frac{r!}{1!0!(r-1)!r!}=\frac{(-4)^1}{3!1!}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-1)!(n-k)!}$$

$$\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r+1)!}{(r-1)!(n-r)!(n-k-r)!(k-r)!}=-\frac{2}{3}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-1)!(n-k)!}$$

定理5.4.3. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$

$$C_r^1[C_{\{a_1}C_{a_2}][A_{a_3}B_{a_4}+B_{a_3}A_{a_4}]\cdot\cdot[A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}+B_{a_{2r-1}}A_{a_{2r}}]C_r^0[A_{b_1}B_{b_2}+B_{b_1}A_{b_2}]\cdot\cdot[A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}+B_{b_{2r-1}}A_{b_{2r}}]$$

$$C_{n-2r}^1[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}+B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_{n-1}}B_{b_{n-1}}+B_{a_{n-1}}A_{b_{n-1}}][C_{a_n\}}C_{b_n)}]$$

$$=-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(-2)^2}{3!1!}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-k-2)!(n-k-1)!}$$

$$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-2}}][B_{a_{n-k-1}}\cdot\cdot B_{a_{n-3}}][C_{a_{n-2}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-1}}][A_{b_{n-k}}\cdot\cdot A_{b_{n-1}}][C_{b_n)}]\}$$

定理5.4.4. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$

$$C_r^0[A_{a_1}B_{a_2}+B_{a_1}A_{a_2}]\cdot\cdot[A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}+B_{a_{2r-1}}A_{a_{2r}}]C_r^1[C_{\{a_1}C_{a_2}][A_{b_3}B_{b_4}+B_{b_3}A_{b_4}]\cdot\cdot[A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}+B_{b_{2r-1}}A_{b_{2r}}]$$

$$C_{n-2r}^1[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}+B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_{n-1}}B_{b_{n-1}}+B_{a_{n-1}}A_{b_{n-1}}][C_{a_n\}}C_{b_n)}]$$

$$=-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(-2)^2}{1!3!}\frac{(2k+1)!}{k!(k-1)!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-k-1)!(n-k-2)!}$$

$$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-1}}][B_{a_{n-k}}\cdot\cdot B_{a_{n-1}}][C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-2}}][A_{b_{n-k-1}}\cdot\cdot A_{b_{n-3}}][C_{b_{n-2}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$$

推论5.4.6. $\frac{3}{8}\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}r(n-2r)2^n=-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-k-2)!(n-k-1)!}$

5.5 利用范德蒙恒等式严格证明$[i=1,j=0]||[i=0,j=1]$情形

推论5.5.1. $\sum_{r=1}^{k|(n-k)}(-1)^{r+1}2^{2r-1}\frac{(2n-2r)!}{(r-1)!(n-r)!(k-r)!(n-k-r)!}=\frac{(2k)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-1-k)!(n-k)!}$

$$\Leftrightarrow\sum_{r=0}^{k-1|(n-k-1)}(-1)^r2^{2r+1}\frac{(2n-2r-2)!}{r!(n-r-1)!(k-r-1)!(n-k-r-1)!}=\frac{(2k)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-1-k)!(n-k)!}$$

证明: $k\le n-k,\quad\sum_{r=0}^{k-1|(n-k-1)}(-1)^r2^{2r+1}\frac{(2n-2r-2)!}{r!(n-r-1)!(k-r-1)!(n-k-r-1)!}$

$$=\sum_{r=0}^{k-1|(n-k-1)}(-1)^rC_{k-1}^r2^{2r+1}\frac{(2n-2r-2)!}{(k-1)!(n-r-1)!(n-k-r-1)!}$$

$$\Rightarrow 令t_r=2^{2r+1}\frac{(2n-2r-2)!}{(k-1)!(n-r-1)!(n-k-r-1)!},t_0=2\frac{(2n-2)!}{(k-1)!(n-1)!(n-k-1)!}$$

$$\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{2^{2r+3}\frac{(2n-2r-4)!}{k!(n-r-2)!(n-k-r-2)!}}{2^{2r+1}\frac{(2n-2r-2)!}{k!(n-r-1)!(n-k-r-1)!}}=\frac{4(n-r-1)(n-k-r-1)}{(2n-2r-2)(2n-2r-3)}=\frac{k+1-n+r}{3/2-n+r}$$

$$\Rightarrow t_r=\frac{(k+1-n)^{(r)}}{(3/2-n)^{(r)}}2\frac{(2n-2)!}{(k-1)!(n-1)!(n-k-1)!}$$

$$\Rightarrow\sum_{r=0}^{k-1|(n-k-1)}(-1)^r2^{2r+1}\frac{(2n-2r-2)!}{r!(n-r-1)!(k-r-1)!(n-k-r-1)!}$$

$$=\sum_{r=0}^{k-1|(n-k-1)}(-1)^rC_{k-1}^r\frac{(k+1-n)^{(r)}}{(3/2-n)^{(r)}}2\frac{(2n-2)!}{(k-1)!(n-1)!(n-k-1)!}$$

$$=\frac{(1/2-k)^{(k-1)}}{(3/2-n)^{(k-1)}}2\frac{(2n-2)!}{(k-1)!(n-1)!(n-k-1)!}=\frac{(2k)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-1-k)!(n-k)!}$$ □

推论5.5.2. $\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r+1)!}{(r-1)!(n-r)!(n-k-r)!(k-r)!}=-\frac{2}{3}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-1)!(n-k)!}$

$$\Leftrightarrow\sum_{r=0}^{k-1|(n-k-1)}(-1)^{r+1}2^{2r+2}\frac{(2n-2r-1)!}{r!(n-r-1)!(k-r-1)!(n-k-r-1)!}=-\frac{2}{3}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-1)!(n-k)!}$$

证明: $k \geq n-k, \sum_{r=0}^{k-1|(n-k-1)}(-1)^{r+1}2^{2r+2}\frac{(2n-2r-1)!}{r!(n-r-1)!(k-r-1)!(n-k-r-1)!}$

$= \sum_{r=0}^{k-1}(-1)^{r+1}C_{k-1}^{r}2^{2r+2}\frac{(2n-2r-1)!}{(k-1)!(n-r-1)!(n-k-r-1)!}$

$\Rightarrow$ 令$t_r = 2^{2r+2}\frac{(2n-2r-1)!}{(k-1)!(n-r-1)!(n-k-r-1)!}, t_0 = -4\frac{(2n-1)!}{(k-1)!(n-1)!(n-k-1)!}$

$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{2^{2r+3}\frac{(2n-2r-3)!}{k!(n-r-2)!(n-k-r-2)!}}{2^{2r+1}\frac{(2n-2r-1)!}{k!(n-r-1)!(n-k-r-1)!}} = \frac{4(n-r-1)(n-k-r-1)}{(2n-2r-1)(2n-2r-2)} = \frac{k+1-n+r}{1/2-n+r}$

$\Rightarrow t_r = -\frac{(k+1-n)^{(r)}}{(1/2-n)^{(r)}}4\frac{(2n-1)!}{(k-1)!(n-1)!(n-k-1)!}$

$\Rightarrow \sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r2^{2r+1}\frac{(2n-2r-2)!}{r!(n-r-1)!(k-r-1)!(n-k-r-1)!}$

$= -\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^rC_{k-1}^{r}\frac{(k+1-n)^{(r)}}{(1/2-n)^{(r)}}4\frac{(2n-1)!}{(k-1)!(n-1)!(n-k-1)!}$

$= -\frac{(-1/2-k)^{(k-1)}}{(1/2-n)^{(k-1)}}4\frac{(2n-1)!}{(k-1)!(n-1)!(n-k-1)!} = -\frac{2}{3}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!k!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-1)!(n-k)!}$ □

5.6 i=1,j=1情形

5.6.1 C(2i,2j)=(2,2)项情形

推论5.6.1. $0, i|j-r \leq l \leq i, j, k-r, n-r-k \Rightarrow |i-j| \leq r \leq k|(n-k), 1 \leq k \leq n-1$

定理5.6.1. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$

$\{(C_r^1)^2\{[A_{\{a_1}B_{a_2}+B_{\{a_1}A_{a_2}][A_{(b_1}B_{b_2}+B_{(b_1}A_{b_2}]\cdot\cdot[A_{a_{2r-3}}B_{a_{2r-2}}+B_{a_{2r-3}}A_{a_{2r-2}}][A_{b_{2r-3}}B_{b_{2r-2}}+B_{b_{2r-3}}A_{b_{2r-2}}]$

$[C_{a_{2r-1}}C_{a_{2r}}][C_{b_{2r-1}}C_{b_{2r}}]\}[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}+B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_n\}}B_{b_n)}+B_{a_n\}}A_{b_n)}]$

$+\{[A_{\{a_1}B_{a_2}+B_{\{a_1}A_{a_2}][A_{(b_1}B_{b_2}+B_{(b_1}A_{b_2}]\cdot\cdot[A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}+B_{a_{2r-1}}A_{a_{2r}}][A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}+B_{b_{2r-1}}A_{b_{2r}}]\}$

$C_{n-2r}^2[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}+B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_{n-2}}B_{b_{n-2}}+B_{a_{n-2}}A_{b_{n-2}}][C_{a_{n-1}}C_{b_{n-1}}C_{a_n\}}C_{b_n)}]\}$

$= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2k)!(2k)!}{(n-k-1)!(n-k-1)!(k-1)!(k-1)!}$

$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-1}}][B_{a_{n-k}}\cdot\cdot B_{a_{n-2}}][C_{a_{n-1}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-1}}][A_{b_{n-k}}\cdot\cdot A_{b_{n-2}}][C_{b_{n-1}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$

推论5.6.2. $\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}[3r^2-(2n-1)r+\frac{n(n-1)}{2}]2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-2k)!(2k)!}{(n-k-1)!(n-k-1)!(k-1)!(k-1)!}$

推论5.6.3. $\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-2k)!(2k)!}{(n-k-1)!(n-k-1)!(k-1)!(k-1)!}$

5.6.2 C(2i+1,2j+1)=(3,3)项情形

推论5.6.4. $\sum_{r=0}^{k|(n-k)}\sum_{l\geq 0,1-r}^{\leq 1,k-r,n-r-k}(-4)^r\frac{4^l(2n-2r+1)!}{(n-r)!(n-k-r-l)!(k-r-l)!(2l+1)!}\frac{r!}{(1-l)!(1-l)!(r+l-1)!(r+l-1)!}$

$= \frac{(-4)^2}{3!3!}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!(k-1)!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-1)!(n-k-1)!}$

推论5.6.5. $\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{4^0(2n-2r+1)!}{(n-r)!(n-k-r)!(k-r)!1!}\frac{r!}{1!1!(r-1)!(r-1)!}+(-4)^r\frac{4^1(2n-2r+1)!}{(n-r)!(n-k-r-1)!(k-r-1)!3!}\frac{r!}{0!0!r!r!}$

$= \frac{(-4)^2}{3!3!}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!(k-1)!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-1)!(n-k-1)!}$

$\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r+1)!}{(n-r)!(n-k-r)!(k-r)!}\frac{r^2}{r!}+(-4)^r\frac{4^1(2n-2r+1)!}{(n-r)!(n-k-r-1)!(k-r-1)!3!}\frac{1}{r!} = \frac{(-4)^2}{3!3!}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!(k-1)!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-1)!(n-k-1)!}$

$\sum_{r=0}^{k|(n-k)}(-4)^r\frac{(2n-2r+1)!}{(n-r)!(n-k-r)!(k-r)!}\frac{r^2}{r!}+(-4)^r\frac{4^1(2n-2r+1)!}{(n-r)!(n-k-r)!(k-r)!3!}\frac{(n-k-r)(k-r)}{r!} = \frac{(-4)^2}{3!3!}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!(k-1)!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-1)!(n-k-1)!}$

$\sum_{r=0}^{k|(n-k)}-(-4)^{r-1}\frac{(2n-2r+1)!}{r!(n-r)!(n-k-r)!(k-r)!}[9r^2+6(n-k-r)(k-r)] = \frac{(2k+1)!}{(k-1)!(k-1)!}\frac{(2n-2k+1)!}{(n-k-1)!(n-k-1)!}$

定理5.6.2. $\sum_{r=0}^{[n/2]}\sum_{l\geq 0,1-r}^{\leq 1,(n-1)/2-r}(-1)^r\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}$

$C_r^{1-l}[C_{\{a_1}C_{a_2}]\cdot\cdot[C_{a_{1-2l}}C_{a_{2-2l}}]2^{r+l-1}[A_{a_{3-2l}}B_{a_{4-2l}}]\cdot\cdot[A_{a_{2r-1}}B_{a_{2r}}]$

$C_r^{1-l}[C_{(b_1}C_{b_2}]\cdot\cdot[C_{b_{1-2l}}C_{b_{2-2l}}]2^{r+l-1}[A_{b_{3-2l}}B_{b_{4-2l}}]\cdot\cdot[A_{b_{2r-1}}B_{b_{2r}}]$
$C_{n-2r}^{2l+1}[A_{a_{2r+1}}B_{b_{2r+1}}+B_{a_{2r+1}}A_{b_{2r+1}}]\cdot\cdot[A_{a_{n-2l-1}}B_{b_{n-2l-1}}+B_{a_{n-2l-1}}A_{b_{n-2l-1}}][C_{a_{n-2l}}C_{b_{n-2l}}]\cdot\cdot[C_{a_n\}}C_{b_n)}]$
$=-\sum_{k\geq 1}^{\leq n-2}\frac{n!n!}{(2n)!}\frac{(-2)^3}{3!3!}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!(k-1)!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-k-2)!(n-k-2)!}$
$\{[A_{\{a_1}\cdot\cdot A_{a_{n-k-2}}][B_{a_{n-k-1}}\cdot\cdot B_{a_{n-3}}][C_{a_{n-2}}\cdot\cdot C_{a_n\}}]\}\{[B_{(b_1}\cdot\cdot B_{b_{n-k-2}}][A_{b_{n-k-1}}\cdot\cdot A_{b_{n-3}}][C_{b_{n-2}}\cdot\cdot C_{b_n)}]\}$

推论5.6.6. $\frac{9}{16}\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}2^n[r^2C_{n-2r}^1+C_{n-2r}^3]=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!(k-1)!}\frac{(2n-2k-1)!}{(n-k-2)!(n-k-2)!}$

6 Klein-Gordon方程投影算子递推关系的分析

利用Klein-Gordon n+1-投影算子按1-投影算子展开的唯一性和等于n-投影算子乘1-投影算子所有可能的组合(含待定系数)，便可以求出n+1-投影算子=∑n-投影算子乘1-投影算子的展开系数，但解不唯一，一般有无穷多解，故无明确的物理意义。

定义6.0.1. $\begin{cases}\hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_nb_1\cdot\cdot b_n}(n)=\frac{1}{(n!)^2}\sum_{P(a)}^{P(b)}\sum_{r=0}^{[n/2]}k_r\hat{P}_{a_1a_2}\hat{P}_{b_1b_2}\cdot\cdot\hat{P}_{a_{2r-1}a_{2r}}\hat{P}_{b_{2r-1}b_{2r}}\prod_{i=2r+1}^{n}\hat{P}_{a_ib_i}\\ \hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_nb_1\cdot\cdot b_n}(n):=\eta_{b_1}^{a_1'}\eta_{b_2}^{a_2'}\cdot\cdot\eta_{b_n}^{a_n'}\hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_na_1'\cdot\cdot a_n'}(n)\end{cases}$

6.1 自旋-1粒子Klein-Gordon方程投影算子的基本性质

推论6.1.1. $P_{a_1b_1}=P_{b_1a_1},p^{a_1}P_{a_1b_1}=0,P_{a_1c_1}\delta^{c_1d_1}P_{d_1b_1}=P_{a_1b_1}$

推论6.1.2. $\begin{cases}P_{a_1b_1},P_{a_1a_2};P_{b_1b_2},P_{a_2b_2};\\ P_{a_1b_1}P_{a_2b_2},P_{a_1a_2}P_{b_1b_2};\end{cases}$

6.2 自旋-2粒子Klein-Gordon方程投影算子的基本性质

推论6.2.1. $\begin{cases}P_{a_1b_1;a_2b_2},P_{a_1a_2;b_1b_2};P_{a_1a_2;a_3b_1},P_{a_1b_1;b_2b_3};\\ P_{a_1b_1;a_2b_2}P_{a_3b_3},P_{a_1a_2;b_1b_2}P_{a_3b_3};P_{a_1a_2;a_3b_1}P_{b_2b_3};\end{cases}$

推论6.2.2.

$$\begin{cases}P_{a_1a_2;b_1b_2}(2)=\frac{1}{(2!)^2}\{[P_{\{a_1(b_1}P_{a_2\}b_2)}]-\frac{1}{3}[P_{\{a_1a_2\}}P_{(b_1b_2)}]\}=\frac{2}{(2!)^2}\{P_{a_1b_1}P_{a_2b_2}+P_{a_1b_2}P_{a_2b_1}-\frac{2}{3}P_{a_1a_2}P_{b_1b_2}\}\\ P_{a_1b_1;a_2b_2}(2)=\frac{2}{(2!)^2}\{P_{a_1a_2}P_{b_1b_2}+P_{a_1b_2}P_{a_2b_1}-\frac{2}{3}P_{a_1b_1}P_{a_2b_2}\}\\ P_{a_1a_2;a_3b_1}(2)=\frac{2}{(2!)^2}\{P_{a_1b_1}P_{a_2a_3}+P_{a_1a_3}P_{a_2b_1}-\frac{2}{3}P_{a_1a_2}P_{b_1a_3}\}\\ P_{b_1b_2;b_3a_1}(2)=\frac{2}{(2!)^2}\{P_{b_1a_1}P_{b_2b_3}+P_{b_1b_3}P_{b_2a_1}-\frac{2}{3}P_{b_1b_2}P_{a_1b_3}\}\end{cases}$$

6.3 自旋-3粒子Klein-Gordon方程投影算子的基本性质

推论6.3.1. $\begin{cases}P_{a_1a_2b_3;b_1b_2a_3},P_{a_1a_2a_3;b_1b_2b_3};P_{a_1a_2b_1;a_3a_4b_2},P_{b_1b_2a_1;b_3b_4a_2};P_{a_1a_2a_3;a_4b_1b_2},P_{a_1a_2b_4;b_1b_2b_3};\\ P_{a_1a_2b_3;b_1b_2a_3}P_{a_4b_4},P_{a_1a_2a_3;b_1b_2b_3}P_{a_4b_4};P_{a_1a_2b_1;a_3a_4b_2}P_{b_3b_4},P_{a_1a_2a_3;a_4b_1b_2}P_{b_3b_4};\end{cases}$

6.4 自旋-n粒子Klein-Gordon方程投影算子的基本性质

推论6.4.1.

$$\begin{cases}P_{a_1\cdot\cdot a_kb_{k+1}\cdot\cdot b_n;b_1\cdot\cdot b_ka_{k+1}\cdot\cdot a_n};P_{a_1\cdot\cdot a_kb_{k+1}\cdot\cdot b_{n-1}a_{n+1};b_1\cdot\cdot b_ka_{k+1}\cdot\cdot a_n};\\ P_{a_1\cdot\cdot a_kb_{k+1}\cdot\cdot b_n;b_1\cdot\cdot b_ka_{k+1}\cdot\cdot a_n}P_{a_{n+1}b_{n+1}}:(n+1)-[(n+1)/2];\\ P_{a_1\cdot\cdot a_lb_l\cdot\cdot b_{n-1};b_1\cdot\cdot b_{l-1}a_{l+1}\cdot\cdot a_{n+1}}P_{b_nb_{n+1}}:n-[n/2];\\ k=n,\cdots,[(n+1)/2],l=n,\cdots,[n/2]+1\\ (n+1)-[(n+1)/2]+n-[n/2]=n+1\end{cases}$$

推论6.4.2. $P_{a_1\cdots a_{n+1};b_1\cdots b_{n+1}}$
$= \frac{1}{[(n+1)!]^2}\{\sum_{k=n}^{[(n+1)/2]} B_k P_{\{a_1\cdots a_k b_{k+1}\cdots b_n;(b_1\cdots b_k a_{k+1}\cdots a_n} P_{a_{n+1}\}b_{n+1})} + \sum_{l=n}^{[n/2]+1} C_l P_{\{a_1\cdots a_l b_l\cdots b_{n-1};(b_1\cdots b_{l-1}a_{l+1}\cdots a_{n+1}\}} P_{b_n b_{n+1})}\}$

推论6.4.3.

$$\begin{cases} P_{a_1\cdots a_k b_{k+1}\cdots b_n;b_1\cdots b_k a_{k+1}\cdots a_n}; P_{a_1\cdots a_k b_{k+1}\cdots b_{n-1}a_{n+1};b_1\cdots b_k a_{k+1}\cdots a_n}; \\ P_{a_1\cdots a_k b_{k+1}\cdots b_n;b_1\cdots b_k a_{k+1}\cdots a_n} P_{a_{n+1}b_{n+1}} : (n+1)-[(n+1)/2]; \\ P_{a_1\cdots a_l b_l\cdots b_{n-1};b_1\cdots b_{l-1}a_{l+1}\cdots a_{n+1}} P_{b_n b_{n+1}} : n-[n/2]; \\ k=0,\cdots,[n/2], l=1,\cdots,[(n+1)/2] \\ [n/2]+[(n-1)/2]+2=n+1 \end{cases}$$

推论6.4.4. $P_{a_1\cdots a_{n+1};b_1\cdots b_{n+1}}$
$= \frac{1}{[(n+1)!]^2}\{\sum_{k=0}^{[n/2]} B_k P_{\{a_1\cdots a_k b_{k+1}\cdots b_n;(b_1\cdots b_k a_{k+1}\cdots a_n} P_{a_{n+1}\}b_{n+1})}$
$+ \sum_{j=1}^{[(n+1)/2]} A_j P_{\{a_1\cdots a_{j-1}b_{j+1}\cdots b_{n+1};(b_1\cdots b_j a_j\cdots a_{n-1}\}} P_{a_n a_{n+1})} + \sum_{l=1}^{[(n+1)/2]} C_l P_{\{a_1\cdots a_l b_l\cdots b_{n-1};(b_1\cdots b_{l-1}a_{l+1}\cdots a_{n+1}\}} P_{b_n b_{n+1})}\}$

推论6.4.5. $P_{a_1\cdots a_{n+1};b_1\cdots b_{n+1}}$
$= \frac{1}{[(n+1)!]^2}\{\sum_{k=0}^{[n/2]} B_k P_{\{a_1\cdots a_k b_{k+1}\cdots b_n;(b_1\cdots b_k a_{k+1}\cdots a_n} P_{a_{n+1}\}b_{n+1})}$
$+ \sum_{l=1}^{[(n+1)/2]} C_l P_{\{a_1\cdots a_{l-1}b_{l+1}\cdots b_{n+1};(b_1\cdots b_l a_l\cdots a_{n-1}\}} P_{a_n a_{n+1})} + \sum_{l=1}^{[(n+1)/2]} C_l P_{\{a_1\cdots a_l b_l\cdots b_{n-1};(b_1\cdots b_{l-1}a_{l+1}\cdots a_{n+1}\}} P_{b_n b_{n+1})}\}$

推论6.4.6. $P_{a_1\cdots a_{n+1};b_1\cdots b_{n+1}}$
$= \frac{1}{[(n+1)!]^2}\{\sum_{k=0}^{0} B_k P_{\{a_1\cdots a_k b_{k+1}\cdots b_n;(b_1\cdots b_k a_{k+1}\cdots a_n} P_{a_{n+1}\}b_{n+1})}$
$+ \sum_{l=1}^{1} C_l P_{\{a_1\cdots a_{l-1}b_{l+1}\cdots b_{n+1};(b_1\cdots b_l a_l\cdots a_{n-1}\}} P_{a_n a_{n+1})} + \sum_{l=1}^{1} C_l P_{\{a_1\cdots a_l b_l\cdots b_{n-1};(b_1\cdots b_{l-1}a_{l+1}\cdots a_{n+1}\}} P_{b_n b_{n+1})}\}$

6.5 自旋-2粒子Klein-Gordon方程投影算子的展开(唯一)

推论6.5.1. $P_{a_1a_2b_1b_2}(2) = \frac{1}{(2!)^2}\{[P_{\{a_1(b_1}P_{a_2\}b_2)}] - \frac{1}{3}[P_{\{a_1a_2\}}P_{(b_1b_2)}]\}$

证明: $P_{a_1a_2;b_1b_2}$
$= \frac{1}{(2!)^2}\{\sum_{k=0}^{0} B_k(2) P_{\{a_1\cdots a_k b_{k+1}\cdots(b_1;b_1\cdots b_k a_{k+1}\cdots a_1} P_{a_2\}b_2)} + \sum_{l=1}^{1} C_l(2) P_{\{a_1\cdots a_l b_l\cdots b_0;(b_1\cdots b_{l-1}a_{l+1}\cdots a_2\}} P_{b_1b_2)}\}$
$= \frac{1}{(2!)^2}\{B_0(2) P_{(b_1\{a_1}P_{a_2\}b_2)} + C_1(2) P_{\{a_1a_2\}} P_{(b_1b_2)}\}$
$\Rightarrow B_0(2)=1, C_1(2)=-\frac{1}{3}$ □

6.6 自旋-3粒子Klein-Gordon方程投影算子的展开(不唯一，故无大的物理意义)

推论6.6.1. $P_{a_1a_2a_3b_1b_2b_3}(3) = \frac{1}{(3!)^2}\{[P_{\{a_1(b_1}P_{a_2b_2}P_{a_3\}b_3)}] - \frac{3}{5}[P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2]}[P_{a_3\}b_3)}]\}$

引理6.6.1.

$$\begin{cases} P_{\{a_1a_2(b_1b_2}(2)P_{a_3\}b_3)} = \{P_{\{a_1(b_1}P_{a_2b_2} - \frac{1}{3}[P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2]}\}P_{a_3\}b_3)} \\ P_{\{a_1(b_1;a_2b_2}(2)P_{a_3\}b_3)} = \frac{1}{2}\{P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2} + \frac{1}{3}[P_{\{a_1(b_1}P_{a_2b_2]}\}P_{a_3\}b_3)} \\ P_{\{a_1a_2;a_3\}(b_1}(2)P_{b_2b_3)} = \frac{2}{3}P_{\{a_1a_2}P_{a_3\}(b_1}P_{b_2b_3)} \end{cases}$$

证明:

$$\begin{cases} P_{\{a_1a_2;(b_1b_2}(2)P_{a_3\}b_3)} = \frac{2}{(2!)^2}\{P_{\{a_1(b_1}P_{\{a_2(b_2} + P_{\{a_1(b_2}P_{a_2b_1} - \frac{2}{3}P_{a_1a_2}P_{b_1b_2}\}P_{a_3\}b_3)} \\ = \{P_{\{a_1(b_1}P_{a_2b_2} - \frac{1}{3}[P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2}]\}P_{a_3\}b_3)} \\ P_{\{a_1(b_1;a_2b_2}(2)P_{a_3\}b_3)} = \frac{2}{(2!)^2}\{P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2} + P_{\{a_1(b_2}P_{a_2b_1} - \frac{2}{3}P_{\{a_1(b_1}P_{a_2b_2}\}P_{a_3\}b_3)} \\ = \frac{1}{2}\{P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2} + \frac{1}{3}[P_{\{a_1(b_1}P_{a_2b_2}]\}P_{a_3\}b_3)} \\ P_{\{a_1a_2;a_3\}(b_1}(2)P_{b_2b_3)} = \frac{2}{(2!)^2}\{P_{\{a_1(b_1}P_{a_2a_3} + P_{\{a_1a_3}P_{a_2(b_1} - \frac{2}{3}P_{\{a_1a_2}P_{(b_1a_3}\}P_{b_2b_3)} = \frac{2}{3}P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2}P_{a_3\}b_3)} \\ P_{(b_1b_2;b_3)\{a_1}(2)P_{a_2a_3\}} = \frac{2}{(2!)^2}\{P_{(b_1\{a_1}P_{b_2b_3} + P_{(b_1b_3}P_{b_2\{a_1} - \frac{2}{3}P_{(b_1b_2}P_{\{a_1b_3}\}P_{a_2a_3\}} = \frac{2}{3}P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2}P_{a_3\}b_3)} \end{cases}$$

□

定理6.6.1. $P_{a_1a_2a_3;b_1b_2b_3}(3)$
$= \frac{1}{(3!)^2}\{P_{\{a_1a_2;(b_1b_2}(2)P_{a_3\}b_3)} - \frac{2}{5}P_{\{a_1a_2;a_3\}(b_1}(2)P_{b_2b_3)}\}$
$= \frac{1}{(3!)^2}\{6P_{\{a_1(b_1;a_2b_2}(2)P_{a_3\}b_3)} - \frac{27}{5}P_{\{a_1a_2;a_3\}(b_1}(2)P_{b_2b_3)}\}$
$= \frac{1}{(3!)^2}\{\frac{27}{25}P_{\{a_1a_2;(b_1b_2}(2)P_{a_3\}b_3)} - \frac{12}{25}P_{\{a_1(b_1;a_2b_2}(2)P_{a_3\}b_3)}\}$
$= \frac{1}{(3!)^2}\{\frac{6}{7}P_{\{a_1a_2;(b_1b_2}(2)P_{a_3\}b_3)} + \frac{6}{7}P_{\{a_1(b_1;a_2b_2}(2)P_{a_3\}b_3)} - \frac{39}{35}P_{\{a_1a_2;a_3\}(b_1}(2)P_{b_2b_3)}\}$
$= \frac{1}{(3!)^2}\{\frac{6}{5}P_{\{a_1a_2;(b_1b_2}(2)P_{a_3\}b_3)} - \frac{6}{5}P_{\{a_1(b_1;a_2b_2}(2)P_{a_3\}b_3)} + \frac{3}{5}P_{\{a_1a_2;a_3\}(b_1}(2)P_{b_2b_3)}\}$

证明： $P_{a_1a_2a_3;b_1b_2b_3}$
$= \frac{1}{(3!)^2}\{\sum_{k=0}^{1}B_kP_{\{a_1\cdot\cdot a_kb_{k+1}\cdot\cdot b_2;(b_1\cdot\cdot b_ka_{k+1}\cdot\cdot a_2}P_{a_3\}b_3)} + \sum_{l=1}^{1}C_lP_{\{a_1\cdot\cdot a_l(b_l\cdot\cdot b_1;b_1\cdot\cdot b_{l-1}a_{l+1}\cdot\cdot a_3\}}P_{b_2b_3)}\}$
$= \frac{1}{(3!)^2}\{B_1(3)P_{\{a_1(b_2;b_1a_2}P_{a_3\}b_3)} + B_0(3)P_{(b_1b_2;\{a_1a_2}P_{a_3\}b_3)} + C_1(3)P_{\{a_1(b_1;a_2a_3\}}P_{b_2b_3)}\}$
$= \frac{1}{(3!)^2}\{B_1(3)P_{\{a_1(b_1;a_2b_2}P_{a_3\}b_3)} + B_0(3)P_{\{a_1a_2;(b_1b_2}P_{a_3\}b_3)} + C_1(3)P_{\{a_1a_2;a_3\}(b_1}P_{b_2b_3)}\}$
$= \frac{1}{(3!)^2}\{B_1(3)\frac{1}{2}\{P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2} + \frac{1}{3}[P_{\{a_1(b_1}P_{a_2b_2}]\}P_{a_3\}b_3)} + B_0(3)\{P_{\{a_1(b_1}P_{a_2b_2} - \frac{1}{3}[P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2}]\}P_{a_3\}b_3)}$
$+ C_1(3)\frac{2}{3}P_{\{a_1a_2}P_{a_3\}(b_1}P_{b_2b_3)}\}$
$= \frac{1}{(3!)^2}\{[\frac{1}{6}B_1(3) + B_0(3)]P_{\{a_1(b_1}P_{a_2b_2}P_{a_3\}b_3)} + [\frac{1}{2}B_1(3) - \frac{1}{3}B_0(3) + \frac{2}{3}C_1(3)]P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2}P_{a_3\}b_3)}\}$
$\Leftrightarrow [\frac{1}{6}B_1(3) + B_0(3)] = 1, [\frac{1}{2}B_1(3) - \frac{1}{3}B_0(3) + \frac{2}{3}C_1(3)] = -\frac{3}{5}$
$\Leftarrow B_0(3) = 1, B_1(3) = 0, C_1(3) = -\frac{2}{5}$
$B_0(3) = 0, B_1(3) = 6, C_1(3) = -\frac{27}{5}$
$B_0(3) = \frac{27}{25}, B_1(3) = -\frac{12}{25}, C_1(3) = 0$
$B_0(3) = \frac{6}{7}, B_1(3) = \frac{6}{7}, C_1(3) = -\frac{39}{35}$
$B_0(3) = \frac{6}{5}, B_1(3) = -\frac{6}{5}, C_1(3) = \frac{3}{5}$ □

6.7 自旋-4粒子Klein-Gordon方程投影算子的展开(不唯一且复杂，暂时放放)

推论6.7.1. $\begin{cases} P_{a_1a_2b_3;b_1b_2a_3}, P_{a_1a_2a_3;b_1b_2b_3}; P_{a_1a_2b_1;a_3a_4b_2}, P_{b_1b_2a_1;b_3b_4a_2}; P_{a_1a_2a_3;a_4b_1b_2}, P_{a_1a_2b_4;b_1b_2b_3}; \\ P_{a_1a_2b_3;b_1b_2a_3}P_{a_4b_4}, P_{a_1a_2a_3;b_1b_2b_3}P_{a_4b_4}; P_{a_1a_2b_1;a_3a_4b_2}P_{b_3b_4}, P_{a_1a_2a_3;a_4b_1b_2}P_{b_3b_4}; \end{cases}$

推论6.7.2. $P_{a_1a_2a_3b_1b_2b_3}(3) = \frac{1}{(3!)^2}\{[P_{\{a_1(b_1}P_{a_2b_2}P_{a_3\}b_3)}] - \frac{3}{5}[P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2}][P_{a_3\}b_3)}]\}$

推论6.7.3. $P_{a_1a_2a_3a_4b_1b_2b_3b_4}(4)$
$= \frac{1}{(4!)^2}\{[P_{\{a_1(b_1}P_{a_2b_2}P_{a_3b_3}P_{a_4\}b_4)}] - \frac{6}{7}[P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2}][P_{a_3b_3}P_{a_4\}b_4)}] + \frac{3}{35}[P_{\{a_1a_2}P_{(b_1b_2}P_{a_3a_4\}}P_{b_3b_4)}]\}$

6.8 自旋-n粒子Klein-Gordon方程投影算子的展开(不唯一且复杂)

推论6.8.1. $P_{a_1\cdot\cdot a_{n+1};b_1\cdot\cdot b_{n+1}} = \frac{1}{[(n+1)!]^2}\{\sum_{k=0}^{[n/2]}B_kP_{\{a_1\cdot\cdot a_kb_{k+1}\cdot\cdot b_n;(b_1\cdot\cdot b_ka_{k+1}\cdot\cdot a_n}P_{a_{n+1}\}b_{n+1})}$
$+ \sum_{l=1}^{[(n+1)/2]}C_lP_{\{a_1\cdot\cdot a_{l-1}b_{l+1}\cdot\cdot b_{n+1};(b_1\cdot\cdot b_la_l\cdot\cdot a_{n-1}\}}P_{a_na_{n+1})} + \sum_{l=1}^{[(n+1)/2]}C_lP_{\{a_1\cdot\cdot a_lb_l\cdot\cdot b_{n-1};(b_1\cdot\cdot b_{l-1}a_{l+1}\cdot\cdot a_{n+1}\}}P_{b_nb_{n+1})}\}$
$P_{a_1\cdot\cdot a_{n+1};b_1\cdot\cdot b_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}P_{\{a_1\cdot\cdot a_{n+1}\};b_1\cdot\cdot b_{n+1}}, P_{a_1\cdot\cdot a_{n+1};b_1\cdot\cdot b_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}P_{a_1\cdot\cdot a_{n+1};(b_1\cdot\cdot b_{n+1})}$
$P_{a_1\cdot\cdot a_{n+1};b_1\cdot\cdot b_{n+1}} = P_{b_1\cdot\cdot b_{n+1};a_1\cdot\cdot a_{n+1}}, p^{a_1}P_{a_1\cdot\cdot a_{n+1};b_1\cdot\cdot b_{n+1}} = 0$
$\delta^{a_1a_2}P_{a_1\cdot\cdot a_{n+1};b_1\cdot\cdot b_{n+1}} = 0, \delta^{a_{n+1}b_{n+1}}P_{a_1\cdot\cdot a_{n+1};b_1\cdot\cdot b_{n+1}} = \frac{2n+3}{2n+1}P_{a_1\cdot\cdot a_n;b_1\cdot\cdot b_n}$

$$\Leftrightarrow P_{a_1\cdots a_{n+1};b_1\cdots b_{n+1}}=\frac{1}{[(n+1)!]^2}\{\sum_{k=0}^{[n/2]}B_kP_{\{a_1\cdots a_kb_{k+1}\cdots b_n;(b_1\cdots b_ka_{k+1}\cdots a_n}P_{a_{n+1}\}b_{n+1})}$$
$$+\sum_{l=1}^{[(n+1)/2]}C_lP_{\{a_1\cdots a_{l-1}b_{l+1}\cdots b_{n+1};(b_1\cdots b_la_l\cdots a_{n-1}\}}P_{a_na_{n+1})}+\sum_{l=1}^{[(n+1)/2]}C_lP_{\{a_1\cdots a_lb_l\cdots b_{n-1};(b_1\cdots b_{l-1}a_{l+1}\cdots a_{n+1}\}}P_{b_nb_{n+1})}\}$$
$$\delta^{a_1a_2}P_{a_1\cdots a_{n+1};b_1\cdots b_{n+1}}=0,\delta^{a_{n+1}b_{n+1}}P_{a_1\cdots a_{n+1};b_1\cdots b_{n+1}}=\frac{2n+3}{2n+1}P_{a_1\cdots a_n;b_1\cdots b_n}$$

$$\Leftrightarrow P_{a_1\cdots a_{n+1};b_1\cdots b_{n+1}}=\frac{1}{[(n+1)!]^2}\{\sum_{k=0}^{[n/2]}B_kP_{\{a_1\cdots a_kb_{k+1}\cdots b_n;(b_1\cdots b_ka_{k+1}\cdots a_n}P_{a_{n+1}\}b_{n+1})}$$
$$+\sum_{l=1}^{[(n+1)/2]}C_lP_{\{a_1\cdots a_{l-1}b_{l+1}\cdots b_{n+1};(b_1\cdots b_la_l\cdots a_{n-1}\}}P_{a_na_{n+1})}+\sum_{l=1}^{[(n+1)/2]}C_lP_{\{a_1\cdots a_lb_l\cdots b_{n-1};(b_1\cdots b_{l-1}a_{l+1}\cdots a_{n+1}\}}P_{b_nb_{n+1})}\}$$

7 平移准投影算子

7.1 自旋-1基的完备性

定义7.1.1. $\varepsilon_a(\vec{p},\kappa):=[i\lambda_m(\vec{p},\kappa),0]_a,\varepsilon_a(\vec{p},0):=\frac{1}{m}[iE\lambda_m(\vec{p},0),i|\vec{p}|]_a,\varepsilon_a(\vec{p},0;0):=\frac{p_a}{m}$

推论7.1.1.
$$\begin{cases}\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\bar{\varepsilon}_b(\vec{p},h)-\varepsilon_a(\vec{p},0;0)\bar{\varepsilon}_b(\vec{p},0;0)=\delta_{ab},\bar{\varepsilon}_a(\vec{p},h;s):=\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},h;s)\eta^{a'}_a\\ \bar{\varepsilon}^a(\vec{p},h')\varepsilon_a(\vec{p},h)=\delta_{h'h},\bar{\varepsilon}^a(\vec{p},0;0)\varepsilon_a(\vec{p},0;0)=-1,\bar{\varepsilon}^a(\vec{p},0;0)\varepsilon_a(\vec{p},h)=0,\bar{\varepsilon}^a(\vec{p},h)\varepsilon_a(\vec{p},0;0)=0\end{cases}$$

推论7.1.2.
$$\bar{\varepsilon}_a(\vec{p},h';s')\varepsilon_b(\vec{p},h;s)=\eta_{s's}\delta_{h'h},\sum_{s=1}^{0}\sum_{h=s}^{-s}\eta_{ss}\varepsilon_a(\vec{p},h;s)\bar{\varepsilon}_b(\vec{p},h;s)=\delta_{ab};\eta_{11}:=1,\eta_{00}:=-1,\eta_{10}:=0,\eta_{01}:=0$$

7.2 一般自旋基的完备性猜想

猜想7.2.1.
$$\begin{cases}\bar{\varepsilon}^{\overbrace{a\cdots b}^{n}}(\vec{p},h';s')\varepsilon_{\underbrace{a\cdots b}_{n}}(\vec{p},h;s)=\eta_{s's}\delta_{h'h},\sum_{s=n}^{0}\sum_{h=s}^{-s}\eta_{ss}\varepsilon_{\underbrace{a\cdots b}_{n}}(\vec{p},h;s)\bar{\varepsilon}_{\underbrace{a'\cdots b'}_{n}}(\vec{p},h;s)=\frac{1}{(2n)!^2}\overbrace{\delta_{\{a(a'}\cdots\delta_{b\}b')}}^{n}\\ \bar{U}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\cdots\mu_\varsigma}^{2s_m}}(\vec{p},h';s')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdots\mu_\varsigma}_{2s_m}}(\vec{p},h;s)=\eta_{s's}\delta_{h'h},\sum_{s=s_m}^{-s_m}\sum_{h=s}^{-s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdots\mu_\varsigma}_{2s_m}}(\vec{p},h;s)\bar{U}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\cdots\mu'_\varsigma}_{2s_m}}(\vec{p},h;s)=\frac{1}{(2s_m)!^2}\overbrace{\delta_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\cdots\delta_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}}^{2s_m}\\ U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdots\mu_\varsigma}_{2s_m}}(\vec{p},h;-s):=V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdots\mu_\varsigma}_{2s_m}}(\vec{p},h;s),0\le s\le s_m\end{cases}$$

7.3 质量猜想(高维时空中的运动)

猜想7.3.1. $E^2=\vec{p}^2+\vec{p}_m^2,(\gamma_a,\gamma_5):=[(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x),\varsigma I\otimes\sigma_z]$

7.4 数学准备(以前章节的结论)

推论7.4.1.
$$\begin{cases}\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\lambda^+(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{1}{2}(\kappa\sigma\cdot\hat{p}+I)=\frac{1}{2}(\kappa\sigma,-i)^a\hat{p}_a,\hat{p}_a:=(\hat{p},i)\\ \lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}(\sigma\cdot\hat{p}-I)=-\frac{1}{2}(\sigma,i)^a\hat{p}_a\\ \lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})=\frac{\kappa}{2}(\sigma\cdot\hat{p}+I)i\sigma_y=\frac{\kappa}{2}(\sigma,i)^a\hat{p}_ai\sigma_y\end{cases}$$

推论7.4.2.
$$\begin{cases}\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\mu^+(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=\frac{1}{2}(I+\varsigma\frac{E}{m}\sigma_x-i\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y)\\ \mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})\mu^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{\varsigma}{2}(I+\varsigma\frac{E}{m}\sigma_x-i\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y)\sigma_x\end{cases}$$

推论7.4.3. $u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\otimes\mu(\vec{p},\frac{\kappa}{2}),v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\lambda(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\otimes\nu(\vec{p},\frac{\kappa}{2})$

推论7.4.4. $u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})u^+(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=\frac{1}{4}[(\kappa\sigma\cdot\hat{p}+I)\otimes(I+\varsigma\frac{E}{m}\sigma_x-i\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y)](\varsigma I\otimes\sigma_x)$
$=\frac{1}{4}(i\kappa\vec{\gamma}\cdot\hat{p}\gamma_4\gamma_5+I_4)(I_4+\frac{E}{m}\gamma_4+\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\gamma_4\gamma_5)\gamma_4$
$=\frac{1}{4}(i\kappa\vec{\gamma}\cdot\hat{p}-\gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5-\frac{E}{m}\gamma_5-\kappa\frac{|\vec{p}|}{m})\gamma_4$

推论7.4.5. $u(\vec{p},\frac{\kappa}{2})u^{+}(\vec{p},-\frac{\kappa}{2})=\frac{1}{4}[\kappa(\sigma\cdot\hat{p}+I)i\sigma_y]\otimes(I+\varsigma\frac{E}{m}\sigma_x-i\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\sigma_y)$
$=\frac{1}{4}\kappa(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p}\gamma_2-\gamma_2\gamma_4\gamma_5)(I_4+\frac{E}{m}\gamma_4+\kappa\frac{|\vec{p}|}{m}\gamma_4\gamma_5)$
$=\frac{1}{4}\kappa(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p}-\gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5-\frac{E}{m}\gamma_5-\kappa\frac{|\vec{p}|}{m})\gamma_4\gamma_2\gamma_5$

推论7.4.6.
$$\begin{cases}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{2\sqrt{2}m}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\varepsilon_a(\vec{p},h),V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)=-\frac{1}{2\sqrt{2}m}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\varepsilon_a(\vec{p},h)\\ \varepsilon_a(\vec{p},h)=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\hat{p},h)=\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\hat{p},h)\\ \varepsilon^{+}_{a'}(\vec{p},h)=\frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}U^{+}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\hat{p},h)=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma_{a'}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}V^{+}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\hat{p},h)\end{cases}$$

推论7.4.7. $\lambda_m(\hat{p},-1)=\lambda^*_m(\hat{p},1),\lambda_m(\hat{p},0)=-\lambda^*_m(\hat{p},0),\lambda_m(\hat{p},1)=\lambda^*_m(\hat{p},-1)$

定义7.4.1. $\varepsilon_a(\vec{p},\kappa):=[i\lambda_m(\vec{p},\kappa),0]_a,\varepsilon_a(\vec{p},0):=\frac{1}{m}[iE\lambda_m(\vec{p},0),i|\vec{p}|]_a,\bar{\varepsilon}_a(\vec{p},h):=\varepsilon^{+}_{a'}(\vec{p},h)\eta^{a'}_a$

推论7.4.8.
$$\begin{cases}\lambda_m(\hat{p},1;1)=\frac{1}{2\hat{p}_-}\begin{bmatrix}i(\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y)\\-1(\hat{p}_x-i\hat{p}_y\hat{p}_z)\\-2i(\hat{p}_+\hat{p}_-)\end{bmatrix},\lambda_m(-\hat{p},1;1)=\frac{\hat{p}_+}{\hat{p}_-}\lambda_m(\hat{p},-1;1)\\ \lambda_m(\hat{p},0;1)=-i\begin{bmatrix}\hat{p}_x\\\hat{p}_y\\\hat{p}_z\end{bmatrix}=-i\hat{p},\lambda_m(-\hat{p},0;1)=-\lambda_m(\hat{p},0;1)\\ \lambda_m(\hat{p},-1;1)=\frac{1}{2\hat{p}_+}\begin{bmatrix}-i(\hat{p}_x\hat{p}_z+i\hat{p}_y)\\-1(\hat{p}_x+i\hat{p}_y\hat{p}_z)\\2i(\hat{p}_+\hat{p}_-)\end{bmatrix},\lambda_m(-\hat{p},-1;1)=\frac{\hat{p}_-}{\hat{p}_+}\lambda_m(\hat{p},1;1)\end{cases}$$

证明：$\lambda_m(\hat{p},1)\lambda^{+}_m(\hat{p},-1)=\frac{1}{2\hat{p}_-}\begin{bmatrix}i(\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y)\\-1(\hat{p}_x-i\hat{p}_y\hat{p}_z)\\-2i(\hat{p}_+\hat{p}_-)\end{bmatrix}\frac{1}{2\hat{p}_-}\begin{bmatrix}i(\hat{p}_x\hat{p}_z-i\hat{p}_y)\\-1(\hat{p}_x-i\hat{p}_y\hat{p}_z)\\-2i(\hat{p}_+\hat{p}_-)\end{bmatrix}^T$ □

7.5 二阶平移准投影算子

定义7.5.1. $\sum\limits_{h=1}^{-1}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)U^{+}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},h-h')$

$$\begin{cases}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},1)=u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0)=\frac{1}{\sqrt{2}}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]\\ U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},-1)=u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\end{cases}$$

证明：$\sum\limits_{h=1}^{-1}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)U^{+}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},h-2)=U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},1)U^{+}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},-1)$
$=u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^{+}_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^{+}_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=[\frac{1}{4}(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p}-\gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5-\frac{E}{m}\gamma_5-\frac{|\vec{p}|}{m})\gamma_4\gamma_2\gamma_5]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[\frac{1}{4}(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p}-\gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5-\frac{E}{m}\gamma_5-\frac{|\vec{p}|}{m})\gamma_4\gamma_2\gamma_5]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}$
$=\frac{1}{16}\{[(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p}-\gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5-\frac{E}{m}\gamma_5-\frac{|\vec{p}|}{m})\gamma_4\gamma_2\gamma_5]\otimes[(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p}-\gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5-\frac{E}{m}\gamma_5-\frac{|\vec{p}|}{m})\gamma_4\gamma_2\gamma_5]\}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}$
$=\frac{1}{16}\{[(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p}-\gamma_4\gamma_5)\otimes(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p}-\gamma_4\gamma_5)][(I_4-\frac{E}{m}\gamma_4+\frac{|\vec{p}|}{m}\gamma_4\gamma_5)\otimes(I_4-\frac{E}{m}\gamma_4+\frac{|\vec{p}|}{m}\gamma_4\gamma_5)][\gamma_2\otimes\gamma_2]\}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}$ □

证明：$\sum\limits_{h=1}^{-1}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)U^{+}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},h-1)=U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},1)U^{+}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},0)+U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0)U^{+}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},-1)$
$=\frac{1}{\sqrt{2}}u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})[u^{+}_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^{+}_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+u^{+}_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^{+}_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$
$+\frac{1}{\sqrt{2}}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]u^{+}_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^{+}_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=\frac{1}{\sqrt{2}}u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^{+}_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})[u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^{+}_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^{+}_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$
$+\frac{1}{\sqrt{2}}u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^{+}_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^{+}_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^{+}_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$
$=\frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{1}{4}(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p}-\gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5-\frac{E}{m}\gamma_5-\frac{|\vec{p}|}{m})\gamma_4\gamma_2\gamma_5]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\Lambda_{+\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$
$+\frac{1}{\sqrt{2}}\Lambda_{+\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})[\frac{1}{4}(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p}-\gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5-\frac{E}{m}\gamma_5-\frac{|\vec{p}|}{m})\gamma_4\gamma_2\gamma_5]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}$ □

证明：$\sum\limits_{h=1}^{-1}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)U^{+}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},h)=U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},1)U^{+}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},1)+U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0)U^{+}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},0)+U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},-1)U^{+}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},-1)$
$=u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^{+}_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^{+}_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$
$+\frac{1}{2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})][u^{+}_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^{+}_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+u^{+}_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^{+}_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$
$+u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^{+}_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^{+}_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$=\frac{1}{(2!)^2}\Lambda_{+\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2})$ □

证明：$\sum_{h=1}^{-1} U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)U^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},h+1) = U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},-1)U^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},0) + U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0)U^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},1)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})[u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) + u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$

$+ \frac{1}{\sqrt{2}}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})[u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$

$+ \frac{1}{\sqrt{2}}u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) + u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{1}{4}(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5 - \frac{E}{m}\gamma_5 + \frac{|\vec{p}|}{m})\gamma_4\gamma_2\gamma_5]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\Lambda_{+\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$

$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\Lambda_{+\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})[\frac{1}{4}(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5 + \frac{E}{m}\gamma_5 - \frac{|\vec{p}|}{m})\gamma_4\gamma_2\gamma_5]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}$ □

证明：$\sum_{h=1}^{-1} U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)U^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},h+2) = U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},-1)U^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},1)$

$= u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})$

$= [\frac{1}{4}(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5 - \frac{E}{m}\gamma_5 + \frac{|\vec{p}|}{m})\gamma_4\gamma_2\gamma_5]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[\frac{1}{4}(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5 - \frac{E}{m}\gamma_5 + \frac{|\vec{p}|}{m})\gamma_4\gamma_2\gamma_5]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}$

$= \frac{1}{16}\{[(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5 - \frac{E}{m}\gamma_5 + \frac{|\vec{p}|}{m})\gamma_4\gamma_2\gamma_5] \otimes [(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5 - \frac{E}{m}\gamma_5 + \frac{|\vec{p}|}{m})\gamma_4\gamma_2\gamma_5]\}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}$

$= \frac{1}{16}\{[(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5) \otimes (i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)][(I_4 - \frac{E}{m}\gamma_4 - \frac{|\vec{p}|}{m}\gamma_4\gamma_5) \otimes (I_4 - \frac{E}{m}\gamma_4 - \frac{|\vec{p}|}{m}\gamma_4\gamma_5)][\gamma_2 \otimes \gamma_2]\}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}$ □

证明：$U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},1)U^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},-1) + U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},-1)U^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},1)$

$= 2[\frac{1}{4}(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5 - \frac{E}{m}\gamma_5)\gamma_4\gamma_2\gamma_5]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[\frac{1}{4}(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5 - \frac{E}{m}\gamma_5)\gamma_4\gamma_2\gamma_5]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}$

$+ 2[\frac{1}{4}(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)\frac{|\vec{p}|}{m}\gamma_4\gamma_2\gamma_5]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[\frac{1}{4}(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)\frac{|\vec{p}|}{m}\gamma_4\gamma_2\gamma_5]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}$

$= 2[\frac{1}{4}(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5 - \frac{E}{m}\gamma_5)\gamma_4\gamma_2\gamma_5] \otimes [\frac{1}{4}(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)(\gamma_4\gamma_5 - \frac{E}{m}\gamma_5)\gamma_4\gamma_2\gamma_5]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}$

$+ 2[\frac{1}{4}(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)\frac{|\vec{p}|}{m}\gamma_4\gamma_2\gamma_5] \otimes [\frac{1}{4}(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)\frac{|\vec{p}|}{m}\gamma_4\gamma_2\gamma_5]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}$

$= \frac{1}{8}\{[(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)(I_4 - \frac{E}{m}\gamma_4)\gamma_2] \otimes [(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)(I_4 - \frac{E}{m}\gamma_4)\gamma_2]$

$+ [(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)\frac{|\vec{p}|}{m}\gamma_4\gamma_5\gamma_2] \otimes [(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)\frac{|\vec{p}|}{m}\gamma_4\gamma_5\gamma_2]\}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}$

$= \frac{1}{8}\{[(i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5) \otimes (i\vec{\gamma}\cdot\hat{p} - \gamma_4\gamma_5)][(I_4 - \frac{E}{m}\gamma_4) \otimes (I_4 - \frac{E}{m}\gamma_4) + \frac{\vec{p}^2}{m^2}(\gamma_4\gamma_5) \otimes (\gamma_4\gamma_5)][\gamma_2 \otimes \gamma_2]\}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}$ □

第三十三章 有质量矢量粒子的协变量子化方案

自我评述：对于Bargmann-Wigner方程描述的粒子，一般来说既可以描述带荷的复粒子，也可以描述不带荷的马约拉纳粒子。两种情形的主对易规则形式一致，但其余对易或反对易括号，对带荷的复粒子一般为零；对不带荷的马约拉纳粒子，其余对易或反对易括号由主对易规则和马约拉纳条件自然得到，一般不为零。在本章节既讨论了复粒子情形，也讨论了马约拉纳粒子情形，完整给出了两种情形下的全部对易规则。但以后章节一般不再求全，一般只讨论复粒子情形和主对易规则，不再专门讨论马约拉纳粒子情形，若要得到马约拉纳粒子情形的量子场论，只需在复粒子情形加上马约拉纳条件即可自然得到。

1 有质量矢量粒子两种等价描述的相互转换

1.1 自旋-1粒子的B-W全对称方程和K-G矢量方程两种等价描述 [18, 20, 23]

定义1.1.1. $\mathbb{X}_a(x) := [im\gamma_a(\varsigma) - 2S_{ab}(e,\varsigma)\partial^b]C, \mathbb{X}_a(p) := i[m\gamma_a(\varsigma) - 2S_{ab}(e,\varsigma)p^b]C, C = \gamma_2\gamma_4$

$\gamma_a = (\sigma \otimes \sigma_y, \varsigma I \otimes \sigma_x)$

定理1.1.1. $\begin{cases} [\gamma^a(\varsigma)\partial_a + m]\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]} = 0, \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} = \psi_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma} \\ im\frac{A_a}{2} = \frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}], C = \gamma_y(\varsigma)\gamma_4(\varsigma) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial^b F_{ab} + m^2 A_a = 0, F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a \\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} = \mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\frac{A_a}{2} \end{cases}$

定理1.1.2. $\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)(\eta_{aa'} + \frac{p_a p^+_{a'}}{m^2})\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p) = \frac{1}{2}[(m - i\gamma^a p_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m - i\gamma^b p_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}$

1.2 自旋-1粒子Bargmann-Wigner方程 [18]的平面波解

定理1.2.1. $(\gamma^a\partial_a + m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t) = 0, \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t) = \frac{1}{2!}\psi_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\}}(\vec{r},t)$

$$\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=1}^{-1}\sqrt{\frac{m^2}{E}}[a(\vec{p},h)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b^+(\vec{p},h)V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$\begin{cases} U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},1) = u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}), U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},-1) = u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) \\ U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) + u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})] \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},1) = v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}), V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},-1) = v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) \\ V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2}) + v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(\vec{p},h) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m^2}{E^3}}U^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r} \\ b^+(\vec{p},s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m^2}{E^3}}V^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r} \end{cases}$$

定理1.2.2. $[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x), \psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')]$

$$= \frac{i}{8}[(m - \gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m - \gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x - x') = \frac{i}{4}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')[\eta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\Delta(x - x')$$

定义1.2.1.

$$\begin{cases} \Lambda_{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},1) := \sum_{h=1}^{-1}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)U^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},h) \\ \Lambda_{-\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},1) := \sum_{h=1}^{-1}V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)V^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},h) \end{cases}$$

定理1.2.3.

$$\begin{cases} \Lambda_{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},1) = \frac{1}{8m^2}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\Lambda_{maa'}(\vec{p},1)\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p) = \frac{1}{(2!)^2}\Lambda_{+\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2}) \\ \Lambda_{-\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},1) = \frac{1}{8m^2}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\Lambda_{maa'}(\vec{p},1)\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(-p) = \frac{1}{(2!)^2}\Lambda_{-\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{-\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2}) \end{cases}$$

定理1.2.4.

$$\begin{cases} \Lambda_{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},1) = \frac{1}{8m^2}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)(\eta_{aa'} + \frac{p_a p^+_{a'}}{m^2})\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p) = \frac{1}{16m^2}[(m - i\gamma^a p_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m - i\gamma^b p_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)} \\ \Lambda_{-\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},1) = \frac{1}{8m^2}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)(\eta_{aa'} + \frac{p_a p^+_{a'}}{m^2})\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(-p) = \frac{1}{16m^2}[(m + i\gamma^a p_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m + i\gamma^b p_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)} \end{cases}$$

$\Downarrow$

1.3 推导到自旋-1粒子Klein-Gordon方程 [27, 42, 43]的平面波解

定理1.3.1. $\partial^b F_{ab} + m^2 A_a = 0, F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a, A_a = \frac{1}{2im}(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}$

$$A_a(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}[a(\vec{p},h)\varepsilon_a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$\begin{cases}\varepsilon_a(\vec{p},1) = \frac{1}{i\sqrt{2}}u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_a u(\vec{p},\frac{1}{2}), \varepsilon_a(\vec{p},-1) = \frac{1}{i\sqrt{2}}u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_a u(\vec{p},-\frac{1}{2})\\ \varepsilon_a(\vec{p},0) = \frac{1}{i\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}[u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_a u(\vec{p},-\frac{1}{2}) + u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_a u(\vec{p},\frac{1}{2})]\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},1) = \frac{1}{i\sqrt{2}}v^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_a v(\vec{p},\frac{1}{2}), \tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},-1) = \frac{1}{i\sqrt{2}}v^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_a v(\vec{p},-\frac{1}{2})\\ \tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},0) = \frac{1}{i\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}[v^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_a v(\vec{p},-\frac{1}{2}) + v^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_a v(\vec{p},\frac{1}{2})]\end{cases}$$

定理1.3.2. $\varepsilon^+(\vec{p},h)\varepsilon(\vec{p},h') = (\frac{E^2+p^2}{m^2})^{1-|h|}\delta_{hh'}, \sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},h) = \eta_{aa'} + \frac{p_a p^+_{a'}}{m^2}, \sum_{h=1}^{-1}h\varepsilon(\vec{p},h)\varepsilon^+(\vec{p},h) = R\cdot\hat{p}$

引理1.3.1. $\gamma^a(\varsigma)C = \begin{bmatrix}0 & (\sigma,i\varsigma)\sigma_y\\ (\sigma,-i\varsigma)\sigma_y & 0\end{bmatrix}, \bar{C}\gamma^a(\varsigma) = \begin{bmatrix}0 & \sigma_y(\sigma,i\varsigma)^a\\ \sigma_y(\sigma,-i\varsigma)^a & 0\end{bmatrix}$

定义1.3.1. $u^+(\vec{p},\frac{1}{2}) = -i\varsigma u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\sigma_y\otimes\sigma_x, u^+(\vec{p},-\frac{1}{2}) = i\varsigma u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\sigma_y\otimes\sigma_x$

性质1.3.1.

$$\begin{cases}\varepsilon_a(\vec{p},1) = -\frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_a u(\vec{p},\frac{1}{2}) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\lambda^T(\vec{p},\frac{1}{2})\sigma_y(\sigma,0)_a\lambda(\vec{p},\frac{1}{2}) = [i\lambda_m(\vec{p},1),0]_a\\ \varepsilon_a(\vec{p},0) = -iu^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_a u(\vec{p},-\frac{1}{2}) = -\frac{i}{m}\lambda^T(\vec{p},\frac{1}{2})\sigma_y(E\sigma,i|\vec{p}|)_a\lambda(\vec{p},-\frac{1}{2}) = \frac{1}{m}[iE\lambda_m(\vec{p},0),i|\vec{p}|]_a\\ \varepsilon_a(\vec{p},-1) = -\frac{i}{\sqrt{2}}u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_a u(\vec{p},-\frac{1}{2}) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\lambda^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\sigma_y(\sigma,0)_a\lambda(\vec{p},-\frac{1}{2}) = [i\lambda_m(\vec{p},-1),0]_a\end{cases}$$

性质1.3.2.

$$\begin{cases}\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},1) = -\frac{i}{\sqrt{2}}v^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_a v(\vec{p},\frac{1}{2}) = \frac{i}{\sqrt{2}}\lambda^T(\vec{p},\frac{1}{2})\sigma_y(\sigma,0)_a\lambda(\vec{p},\frac{1}{2}) = -[i\lambda_m(\vec{p},1),0]_a\\ \tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},0) = -iv^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_a v(\vec{p},-\frac{1}{2}) = \frac{i}{m}\lambda^T(\vec{p},\frac{1}{2})\sigma_y(E\sigma,i|\vec{p}|)_a\lambda(\vec{p},-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{m}[iE\lambda_m(\vec{p},0),i|\vec{p}|]_a\\ \tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},-1) = -\frac{i}{\sqrt{2}}v^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_a v(\vec{p},-\frac{1}{2}) = \frac{i}{\sqrt{2}}\lambda^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\sigma_y(\sigma,0)_a\lambda(\vec{p},-\frac{1}{2}) = -[i\lambda_m(\vec{p},-1),0]_a\end{cases}$$

推论1.3.1. $\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},1) = -\varepsilon_a(\vec{p},1), \tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},0) = -\varepsilon_a(\vec{p},0), \tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},-1) = -\varepsilon_a(\vec{p},-1)$

推论1.3.2. $\partial^b F_{ab} + m^2 A_a = 0, F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a, A_a = \frac{1}{2im}(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}$

$$A_a(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}\varepsilon_a(\vec{p},h)[a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} - b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$\varepsilon_a(\vec{p},1) = [i\lambda_m(\vec{p},1),0]_a, \varepsilon_a(\vec{p},0) = \frac{1}{m}[iE\lambda_m(\vec{p},0),i|\vec{p}|]_a, \varepsilon_a(\vec{p},-1) = [i\lambda_m(\vec{p},-1),0]_a$$

定理1.3.3. $[A_a(x), A^+_{a'}(x')] = i(\eta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')$

定理1.3.4. $\Lambda_{maa'}(\vec{p},1) := \sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},h) = \eta_{aa'} + \frac{p_a p^+_{a'}}{m^2}$

定理1.3.5. $\Lambda_{\pm\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}\Lambda_{maa'}(\vec{p},1)\gamma^a\Lambda_{\mp}(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{a'}$

$\Downarrow$

1.4 再回到自旋-1粒子Bargmann-Wigner方程 [18]的平面波解

定理1.4.1. $(\gamma^a\partial_a + m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t) = 0, \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t) = [im\gamma^a(\varsigma)C - 2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]\frac{A_a(\vec{r},t)}{2}$

$$\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=1}^{-1}\sqrt{\frac{m^2}{E}}[a(\vec{p},h)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b^+(\vec{p},h)V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h) = \frac{1}{2\sqrt{2m}}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\varepsilon_a(\vec{p},h), V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h) = \frac{1}{2\sqrt{2m}}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},h)$$

$$\begin{cases}a(\vec{p},h) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m^2}{E^3}}U^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\\ b^+(\vec{p},s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m^2}{E^3}}V^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},h)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\end{cases}$$

2 有质量矢量粒子方程的第三种等价描述

2.1 有质量矢量粒子自旋方程等价描述

定理2.1.1. $(\partial_a + iS_{ab}\partial^b)_{\beta_\varsigma}{}^{\alpha_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma} = \frac{i}{\sqrt{2}}im^2\sigma^{ab}_{\varsigma\beta_\varsigma}A_b, \psi_{\alpha_\varsigma} := \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}, S_{ab} := i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$$A_a(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}\varepsilon_a(\vec{p},h)[a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} - b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$F_{ab}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}[ip_a\varepsilon_b(\vec{p},h) - ip_b\varepsilon_a(\vec{p},h)][a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$\psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}\frac{-i}{\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}p_a\varepsilon_b(\vec{p},h)[a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

2.2 有质量矢量粒子场F_{ab}的平面波解和投影算子

定义2.2.1. $\lambda_{ab}(\vec{p},h) := [ip_a\varepsilon_b(\vec{p},h) - ip_b\varepsilon_a(\vec{p},h)]$

推论2.2.1. $F_{ab}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}\lambda_{ab}(\vec{p},h)[a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

定理2.2.1. $\sum_{h=1}^{-1}\lambda_{ab}(\vec{p},h)\lambda^+_{a'b'}(\vec{p},h) = p_{[a}p^+_{[a'}\eta_{b]b']}$

证明: $\sum_{h=1}^{-1}\lambda_{ab}(\vec{p},h)\lambda^+_{a'b'}(\vec{p},h)$

$= \sum_{h=1}^{-1}[ip_a\varepsilon_b(\vec{p},h) - ip_b\varepsilon_a(\vec{p},h)][ip_{a'}\varepsilon_{b'}(\vec{p},h) - ip_{b'}\varepsilon_{a'}(\vec{p},h)]^+$

$= p_ap^+_{a'}\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_b(\vec{p},h)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},h) + p_bp^+_{b'}\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},h) - p_ap^+_{b'}\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_b(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},h) - p_bp^+_{a'}\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},h)$

$= p_ap^+_{a'}(\eta_{bb'} + \frac{p_bp^+_{b'}}{m^2}) + p_bp^+_{b'}(\eta_{aa'} + \frac{p_ap^+_{a'}}{m^2}) - p_ap^+_{b'}(\eta_{ba'} + \frac{p_bp^+_{a'}}{m^2}) - p_bp^+_{a'}(\eta_{ab'} + \frac{p_ap^+_{b'}}{m^2})$

$= p_ap^+_{a'}\eta_{bb'} + p_bp^+_{b'}\eta_{aa'} - p_ap^+_{b'}\eta_{ba'} - p_bp^+_{a'}\eta_{ab'}$

$= p_{[a}p^+_{[a'}\eta_{b]b']}$ □

定理2.2.2. $[F_{ab}(x), F^+_{a'b'}(x')] = -i\eta_{[a\langle a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'\rangle}\Delta(x-x')$

2.3 有质量矢量粒子场Ψ_{α_ς}的平面波解和投影算子

定义2.3.1. $\lambda_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},h) := \frac{-i}{\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}p_a\varepsilon_b(\vec{p},h)$

推论2.3.1. $\psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}\lambda_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},h)[a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

推论2.3.2. $\lambda_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},h) = \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}h|\vec{p}|\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\vec{p},h) - \frac{-\varsigma}{\sqrt{2}}p_{\alpha_\varsigma}\varepsilon_4(\vec{p},h) + \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}E\varepsilon_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},h)$

证明: $-\varsigma\lambda_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},h) := \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}p_a\varepsilon_b(\vec{p},h)$

$= \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{ij}_{\varsigma\alpha_\varsigma}p_i\varepsilon_j(\vec{p},h) + \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{i4}_{\varsigma\alpha_\varsigma}p_i\varepsilon_4(\vec{p},h) + \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{4j}_{\varsigma\alpha_\varsigma}p_4\varepsilon_j(\vec{p},h)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}h|\vec{p}|\lambda_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},h) - \frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\varsigma p_{\alpha_\varsigma}\varepsilon_4(\vec{p},h) + \frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\varsigma p_4\varepsilon_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},h)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}h|\vec{p}|\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\vec{p},h) - \frac{1}{\sqrt{2}}p_{\alpha_\varsigma}\varepsilon_4(\vec{p},h) + \frac{i}{\sqrt{2}}E\varepsilon_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},h)$ □

推论2.3.3. $\lambda_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2}}(E - \varsigma\kappa\vec{p}|)\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\vec{p},\kappa), \lambda_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},0) = \frac{1}{\sqrt{2}}m\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\vec{p},0)$

定理2.3.1. $\sum_{h=1}^{-1}\lambda_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},h)\lambda^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{p},h) = -\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_b$

证明: $\sum_{h=1}^{-1}\lambda_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},h)\lambda^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{p},h)$

$= \frac{1}{2}(E - \varsigma\vec{p}|)^2\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\vec{p},1)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\vec{p},1) + \frac{1}{2}(E + \varsigma\vec{p}|)^2\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\vec{p},-1)\lambda^+_{m\alpha'_\varsigma}(\vec{p},-1) + \frac{1}{2}m^2\hat{p}_{\alpha_\varsigma}\hat{p}_{\alpha'_\varsigma}$

$= -\frac{1}{4}(E - \varsigma|\vec{p}|)^2(\hat{p}_{\alpha_\varsigma}\hat{p}_{\alpha'_\varsigma} - \delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma} + i\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\hat{p}_k) - \frac{1}{4}(E + \varsigma|\vec{p}|)^2(\hat{p}_{\alpha_\varsigma}\hat{p}_{\alpha'_\varsigma} - \delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma} - i\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\hat{p}_k) + \frac{1}{2}m^2\hat{p}_{\alpha_\varsigma}\hat{p}_{\alpha'_\varsigma}$

$= -p_{\alpha_\varsigma}p_{\alpha'_\varsigma} + \frac{1}{2}(E^2 + \vec{p}^2)\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma} - i\varsigma E\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_k$

$= -\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_b$ □

证明: $\sum\limits_{h=1}^{-1}\lambda_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},h)\lambda^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{p},h)$
$=\sum\limits_{h=1}^{-1}\frac{-i}{\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}p_a\varepsilon_b(\vec{p},h)\frac{-i}{\sqrt{2}}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}p'^+_{a'}\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},h)$
$=-\frac{1}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap'^+_{a'}\sum\limits_{h=1}^{-1}\varepsilon_b(\vec{p},h)\varepsilon^+_{b'}(\vec{p},h)$
$=-\frac{1}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap'^+_{a'}(\eta_{bb'}+\frac{p_bp^+_{b'}}{m^2})$
$=-\frac{1}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap'_{a'}\delta_{bb'}$
$=-\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_b$ □

定理2.3.2. $[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$

2.4 有质量矢量粒子方程的第三种等价描述小结

定理2.4.1. $(\partial_a+iS_{ab}\partial^b)_{\beta_\varsigma}{}^{\alpha_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma}=\frac{i}{\sqrt{2}}im^2\sigma^{ab}_{\varsigma\beta_\varsigma}A_b,\psi_{\alpha_\varsigma}:=\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab},S_{ab}:=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}$
$A_a(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}\varepsilon_a(\vec{p},h)[a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}-b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$
$F_{ab}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}\lambda_{ab}(\vec{p},h)[a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$
$\psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}\lambda_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},h)[a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

定理2.4.2. $\begin{cases}\sum\limits_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},h)=\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2}\\ \sum\limits_{h=1}^{-1}\lambda_{ab}(\vec{p},h)\lambda^+_{a'b'}(\vec{p},h)=p_{[a}p^+_{[a'}\eta_{b]b']}\\ \sum\limits_{h=1}^{-1}\lambda_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},h)\lambda^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{p},h)=-\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_b\end{cases}$ $\begin{cases}[A_a(x),A^+_{a'}(x')]=i(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')\\ [F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]=-i\eta_{[a\langle a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'\rangle}\Delta(x-x')\\ [\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\end{cases}$

2.5 $m\to 0$形式推得光子情形

定理2.5.1. $(\partial_a+iS_{ab}\partial^b)_{\beta_\varsigma}{}^{\alpha_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma}\to 0,\psi_{\alpha_\varsigma}:=\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab},S_{ab}:=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}$
$A_a(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}\varepsilon_a(\vec{p},h)[a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}-b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}\to\infty$
$F_{ab}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}\lambda_{ab}(\vec{p},h)[a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}\to\infty$
$\psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)\to\frac{-\varsigma}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{|\vec{p}|}\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\vec{p},-\varsigma)[a(\vec{p},-\varsigma)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},-\varsigma)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

推论2.5.1. $\varepsilon_a(\vec{p},1)=[i\lambda_m(\vec{p},1),0]_a,\varepsilon_a(\vec{p},0)=\frac{1}{m}[iE\lambda_m(\vec{p},0),i|\vec{p}|]_a\to\infty,\varepsilon_a(\vec{p},-1)=[i\lambda_m(\vec{p},-1),0]_a$

推论2.5.2. $\lambda_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},-\varsigma)\to\sqrt{2}|\vec{p}|\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\vec{p},-\varsigma),\lambda_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},\varsigma)\to 0,\lambda_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},0)\to 0$

推论2.5.3. $\begin{cases}[A_a(x),A^+_{a'}(x')]=i(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')\to\infty\\ [F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]=-i\eta_{[a\langle a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'\rangle}\Delta(x-x')\\ [\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\end{cases}$

从上面可以看出，在$m\to 0$时，$A_a,F_{ab}\to\infty$变得没意义，但ψ_{α_ς}仍然有意义，可以自然过渡，重新写在下面。当然严格的做法仍要采用无质量粒子的方法，这里只是形式的推导。

推论2.5.4. $(\partial_a+iS_{ab}\partial^b)_{\beta_\varsigma}{}^{\alpha_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma}\to 0$
$\psi_{\alpha_\varsigma}(\vec{r},t)\to\frac{-\varsigma}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{|\vec{p}|}\lambda_{m\alpha_\varsigma}(\vec{p},-\varsigma)[a(\vec{p},-\varsigma)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},-\varsigma)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$
$\lambda_{\alpha_\varsigma}(\vec{p},-\varsigma)\lambda^+_{\alpha'_\varsigma}(\vec{p},-\varsigma)=-\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_b,[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$

3 有质量矢量场的对易函数、因果函数和费曼传播子

3.1 关于$A_a(x)$的对易函数、因果函数和费曼传播子

推论3.1.1. $[A_a(x),A^+_{a'}(x')]=i(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')$

引理3.1.1. $[\vartheta(t),(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})]\psi(x)=[-i\delta(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}+\delta'(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}]\psi(x)$

推论3.1.2. $[\vartheta(t),(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})]\Delta(x)=[-i\delta(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}+\delta'(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}]\Delta(x)=-\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}\delta^4(x)$

引理3.1.2. $\Delta_{aa'}(1;x)|_{t=0}=(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x)|_{t=0}[\Leftrightarrow]\begin{cases}\Delta_{kk'}(1;x)|_{t=0}=0,\Delta_{\pi\pi'}(1;x)|_{t=0}=0\\ \Delta_{k\pi'}(1;x)|_{t=0}=\frac{i\partial_k}{m^2}\delta^3(\vec{r})\\ \Delta_{\pi k'}(1;x)|_{t=0}=\frac{-i\partial_{k'}}{m^2}\delta^3(\vec{r})\end{cases}$

引理3.1.3. $\partial_t\Delta_{aa'}(1;x)|_{t=0}=(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\partial_t\Delta(x)|_{t=0}[\Leftrightarrow]\begin{cases}\partial_t\Delta_{kk'}(1;x)|_{t=0}=(\frac{\partial_k\partial_{k'}}{m^2}-\delta_{kk'})\delta^3(\vec{r})\\ \partial_t\Delta_{\pi\pi'}(1;x)|_{t=0}=\frac{\nabla^2}{m^2}\delta^3(\vec{r})\\ \partial_t\Delta_{k\pi'}(1;x)|_{t=0}=0,\partial_t\Delta_{\pi k'}(1;x)|_{t=0}=0\end{cases}$

推论3.1.3.
$$\begin{cases}\Delta_{aa'}(1;x):=(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x)\\ \Delta^{(+)}_{aa'}(1;x):=(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta^{(-)}_{aa'}(1;x):=(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{(l)}_{aa'}(1;x):=(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta^{(l)}(x)\end{cases}$$

推论3.1.4.
$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{aa'}(1;x):=(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta^{(c)}(x)-\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}\delta^4(x)\\ \Delta^{(F)}_{aa'}(1;x):=(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta^{(F)}(x)-i\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}\delta^4(x)\\ \Delta^{(ret)}_{aa'}(1;x):=(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta^{(ret)}(x)-\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}\delta^4(x)\\ \Delta^{(adv)}_{aa'}(1;x):=(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta^{(adv)}(x)-\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}\delta^4(x)\end{cases}$$

推论3.1.5.
$$\begin{cases}(\partial^c\partial_c-m^2)\Delta_{aa'}(n;x)=0,\partial^a\Delta_{aa'}(n;x)=0\\ (\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{(+)}_{aa'}(n;x)=0,\partial^a\Delta^{(+)}_{aa'}(n;x)=0\\ (\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{(-)}_{aa'}(n;x)=0,\partial^a\Delta^{(-)}_{aa'}(n;x)=0\end{cases}$$

推论3.1.6.
$$\begin{cases}(\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{(c)}_{aa'}(n;x)=-\delta'(t)\Delta_{aa'}(n;x)|_{t=0}-\delta(t)\partial_t\Delta_{aa'}(n;x)|_{t=0},\partial^a\Delta^{(c)}_{aa'}(n;x)=0\\ (\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{(F)}_{aa'}(n;x)=-i\delta'(t)\Delta_{aa'}(n;x)|_{t=0}-i\delta(t)\partial_t\Delta_{aa'}(n;x)|_{t=0},\partial^a\Delta^{(F)}_{aa'}(n;x)=0\\ (\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{(ret)}_{aa'}(n;x)=-\delta'(t)\Delta_{aa'}(n;x)|_{t=0}-\delta(t)\partial_t\Delta_{aa'}(n;x)|_{t=0},\partial^a\Delta^{(ret)}_{aa'}(n;x)=0\\ (\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{(adv)}_{aa'}(n;x)=-\delta'(t)\Delta_{aa'}(n;x)|_{t=0}-\delta(t)\partial_t\Delta_{aa'}(n;x)|_{t=0},\partial^a\Delta^{(adv)}_{aa'}(n;x)=0\end{cases}$$

3.2 关于$F_{ab}(x)$的对易函数、因果函数和费曼传播子

推论3.2.1. $[F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]=-i\eta_{[a\langle a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'\rangle}\Delta(x-x')$

引理3.2.1. $[\vartheta(t),-\eta_{[a\langle a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'\rangle}]\psi(x)=\eta_{[a\langle a'}[-i\delta(t)\frac{(\delta_{b]\pi}\partial^+_{b'\rangle}-\partial_{b]}\delta_{b'\rangle\pi'})}{m^2}+\delta'(t)\frac{\delta_{b]\pi}\delta_{b'\rangle\pi'}}{m^2}]\psi(x)$

引理3.2.2. $\Delta_{aba'b'}(1;x)|_{t=0}=-\eta_{[a\langle a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'\rangle}\Delta(x)|_{t=0}$
$=-i[\eta_{aa'}(\delta_{b\pi}-\delta_{b'\pi'})+\eta_{bb'}(\delta_{a\pi}-\delta_{a'\pi'})-\eta_{ab'}(\delta_{b\pi}-\delta_{a'\pi'})-\eta_{ba'}(\delta_{a\pi}-\delta_{b'\pi'})]\delta^3(\vec{r})$

引理3.2.3. $\partial_t\Delta_{aba'b'}(1;x)|_{t=0}=-\eta_{[a\langle a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'\rangle}\partial_t\Delta(x)|_{t=0}=\eta_{[a\langle a'}\delta_{b]\pi}\delta_{b'\rangle\pi'}(m^2-\nabla^2)\delta^3(\vec{r})$

推论3.2.2.

$$\begin{cases}\Delta_{aba'b'}(1;x):=-\eta_{[a\langle a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'\rangle}\Delta(x)\\ \Delta^{(+)}_{aba'b'}(1;x):=-\eta_{[a\langle a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'\rangle}\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta^{(-)}_{aba'b'}(1;x):=-\eta_{[a\langle a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'\rangle}\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{(l)}_{aba'b'}(1;x):=-\eta_{[a\langle a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'\rangle}\Delta^{(l)}(x)\end{cases}$$

推论3.2.3.

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{aba'b'}(1;x):=-\eta_{[a\langle a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'\rangle}\Delta^{(c)}(x)+\eta_{[a\langle a'}[-i\delta(t)\frac{(\delta_{b]\pi}\partial^+_{b'\rangle}-\partial_{b]}\delta_{b'\rangle\pi'})}{m^2}+\delta'(t)\frac{\delta_{b]\pi}\delta_{b'\rangle\pi'}}{m^2}]\Delta(x)\\ \Delta^{(F)}_{aba'b'}(1;x):=-\eta_{[a\langle a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'\rangle}\Delta^{(F)}(x)+\eta_{[a\langle a'}[-i\delta(t)\frac{(\delta_{b]\pi}\partial^+_{b'\rangle}-\partial_{b]}\delta_{b'\rangle\pi'})}{m^2}+\delta'(t)\frac{\delta_{b]\pi}\delta_{b'\rangle\pi'}}{m^2}]\Delta(x)\\ \Delta^{(ret)}_{aba'b'}(1;x):=-\eta_{[a\langle a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'\rangle}\Delta^{(ret)}(x)+\eta_{[a\langle a'}[-i\delta(t)\frac{(\delta_{b]\pi}\partial^+_{b'\rangle}-\partial_{b]}\delta_{b'\rangle\pi'})}{m^2}+\delta'(t)\frac{\delta_{b]\pi}\delta_{b'\rangle\pi'}}{m^2}]\Delta(x)\\ \Delta^{(adv)}_{aba'b'}(1;x):=-\eta_{[a\langle a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'\rangle}\Delta^{(adv)}(x)+\eta_{[a\langle a'}[-i\delta(t)\frac{(\delta_{b]\pi}\partial^+_{b'\rangle}-\partial_{b]}\delta_{b'\rangle\pi'})}{m^2}+\delta'(t)\frac{\delta_{b]\pi}\delta_{b'\rangle\pi'}}{m^2}]\Delta(x)\end{cases}$$

3.3 关于$\psi_{\alpha_\varsigma}(x)$的对易函数、因果函数和费曼传播子

推论3.3.1. $[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$

引理3.3.1. $[\vartheta(t),\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b]\psi(x)=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}[i\delta(t)(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})+\delta'(t)\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}]\psi(x)$

引理3.3.2. $\Delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(1;x)|_{t=0}=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x)|_{t=0}=-i\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\delta^3(\vec{r})$

证明: $\Delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(1;x)|_{t=0}=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x)|_{t=0}$
$=\sigma^{i\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_i\partial_\pi\Delta(x)|_{t=0}+\sigma^{\pi j}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_\pi\partial_j\Delta(x)|_{t=0}$
$=2\sigma^{i\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_i\partial_\pi\Delta(x)|_{t=0}=2i\sigma^{i\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_i\delta^3(\vec{r})$
$=-i\varsigma\varepsilon^k{}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_k\delta^3(\vec{r})$ □

引理3.3.3. $\partial_t\Delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(1;x)|_{t=0}=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_t\Delta(x)|_{t=0}$
$=-\frac{1}{2}(\delta^k_{\alpha_\varsigma}\delta^l_{\alpha'_\varsigma}+\delta^k_{\alpha'_\varsigma}\delta^l_{\alpha_\varsigma}-\delta^{kl}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma})\partial_k\partial_l\delta^3(\vec{r})+\frac{1}{2}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(m^2-\nabla^2)\delta^3(\vec{r})$

证明: $\partial_t\Delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(1;x)|_{t=0}=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_t\Delta(x)|_{t=0}$
$=\sigma^{ij}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_i\partial_j\partial_t\Delta(x)|_{t=0}+\sigma^{\pi\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_\pi\partial_\pi\partial_t\Delta(x)|_{t=0}$
$=-\sigma^{ij}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_i\partial_j\delta^3(\vec{r})+\sigma^{\pi\pi}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(m^2-\nabla^2)\delta^3(\vec{r})$
$=-\frac{1}{2}(\delta^k_{\alpha_\varsigma}\delta^l_{\alpha'_\varsigma}+\delta^k_{\alpha'_\varsigma}\delta^l_{\alpha_\varsigma}-\delta^{kl}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma})\partial_k\partial_l\delta^3(\vec{r})+\frac{1}{2}\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(m^2-\nabla^2)\delta^3(\vec{r})$ □

推论3.3.2.

$$\begin{cases}\Delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(1;x):=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x)\\ \Delta^{(+)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(1;x):=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta^{(-)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(1;x):=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{(l)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(1;x):=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(l)}(x)\end{cases}$$

推论3.3.3.

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(1;x):=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(c)}(x)+\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}[i\delta(t)(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})+\delta'(t)\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}]\Delta(x)\\ \Delta^{(F)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(1;x):=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(F)}(x)+\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}[-\delta(t)(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})+i\delta'(t)\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}]\Delta(x)\\ \Delta^{(ret)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(1;x):=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(ret)}(x)+\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}[i\delta(t)(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})+\delta'(t)\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}]\Delta(x)\\ \Delta^{(adv)}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(1;x):=\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta^{(adv)}(x)+\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}[i\delta(t)(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})+\delta'(t)\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}]\Delta(x)\end{cases}$$

4 有质量矢量场对易规则两种表述等价性的直观证明方法

自我评述：简单巧妙的解析证法前一章已经给出，那为什么还要给出其它的证法呢？原因有三个：一是我最先按这复杂直观的方法证明的；二是在这个复杂的证明过程中，可以顺便得到有质量矢量场分解的全部对易规则；三是可以得到一批有用的恒等式。我已经多次遇到这样类似的情况，不同证法往往需要完全不同的数学技巧。有些抽象证明很简洁，但看不清细节，有的时候明明证出来了，总有些怀疑，因为不直观、太抽象；而构造性的证明，有时简洁，有时很繁琐，但每一步都可以看得清清楚楚。

4.1 数学准备

4.1.1 常数不变张量$\Gamma_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}$的引入

定义4.1.1. $\Gamma^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} := [\gamma^a(\varsigma)C]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} = \begin{bmatrix} 0^a_{A_\varsigma B_\varsigma} & [(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma} \\ [(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]_a^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma} & 0_a^{A'_\varsigma B'_\varsigma} \end{bmatrix}$

定义4.1.2. $\Gamma^{ab}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} := \Gamma^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\Gamma^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}, \Gamma_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} := \Gamma^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\delta_{ab}\Gamma^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}$

性质4.1.1.

$\Gamma_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = \Gamma_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}, \Gamma_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = \Gamma_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\xi_\varsigma\eta_\varsigma}, \Gamma_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = \Gamma_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}$
$\Gamma_{1_\varsigma 3_\varsigma 2_\varsigma 4_\varsigma} = \Gamma_{3_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 4_\varsigma} = \Gamma_{1_\varsigma 3_\varsigma 4_\varsigma 2_\varsigma} = \Gamma_{3_\varsigma 1_\varsigma 4_\varsigma 2_\varsigma} = 1,$
$\Gamma_{2_\varsigma 4_\varsigma 1_\varsigma 3_\varsigma} = \Gamma_{2_\varsigma 4_\varsigma 3_\varsigma 1_\varsigma} = \Gamma_{4_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma 3_\varsigma} = \Gamma_{4_\varsigma 2_\varsigma 3_\varsigma 1_\varsigma} = 1,$
$\Gamma_{1_\varsigma 4_\varsigma 2_\varsigma 3_\varsigma} = \Gamma_{4_\varsigma 1_\varsigma 2_\varsigma 3_\varsigma} = \Gamma_{1_\varsigma 4_\varsigma 3_\varsigma 2_\varsigma} = \Gamma_{4_\varsigma 1_\varsigma 3_\varsigma 2_\varsigma} = -1,$
$\Gamma_{2_\varsigma 3_\varsigma 1_\varsigma 4_\varsigma} = \Gamma_{2_\varsigma 3_\varsigma 4_\varsigma 1_\varsigma} = \Gamma_{3_\varsigma 2_\varsigma 1_\varsigma 4_\varsigma} = \Gamma_{3_\varsigma 2_\varsigma 4_\varsigma 1_\varsigma} = -1$
$\Gamma_{rest} = 0, \Gamma_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}} = 0$

性质4.1.2. $\Gamma_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = (-1)^{\lambda_\varsigma+\mu_\varsigma}u(\lambda_\varsigma+\mu_\varsigma-3)u(\eta_\varsigma+\xi_\varsigma-3)|\varepsilon_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}|$

4.1.2 各种量的矩阵展开

引理4.1.1. $\gamma^a = (\sigma\otimes\sigma_y, \varsigma I\otimes\sigma_x) = i\begin{bmatrix} 0 & -(\sigma,i\varsigma) \\ (\sigma,-i\varsigma) & 0 \end{bmatrix}, S_{ab}(\varsigma) = \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma} = -\frac{i}{4}(\sigma,i\varsigma)_{[a}(\sigma,-i\varsigma)_{b]}$

引理4.1.2. $im\gamma^a(\varsigma)C = \begin{bmatrix} 0 & im(\sigma,i\varsigma)\sigma_y \\ im(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y & 0 \end{bmatrix}$

证明: $im\gamma^a(\varsigma)C = im(\sigma\otimes\sigma_y, \varsigma I\otimes\sigma_x)\varsigma\gamma_y(\varsigma)\gamma_4(\varsigma) = im(\sigma\otimes\sigma_y, \varsigma I\otimes\sigma_x)(\sigma_y\otimes\sigma_y)(I\otimes\sigma_x)$
$= im(\sigma\sigma_y\otimes\sigma_x, -\varsigma\sigma_y\otimes\sigma_y) = \begin{bmatrix} 0 & im(\sigma,i\varsigma)\sigma_y \\ im(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y & 0 \end{bmatrix}$ □

引理4.1.3. $S_{ab}(e,\varsigma) = \begin{bmatrix} S_{ab}(\varsigma) & 0 \\ 0 & S_{ab}(-\varsigma) \end{bmatrix}$

证明: $S_{ab}(e,\varsigma) = -\frac{i}{4}[\gamma_a(\varsigma), \gamma_b(\varsigma)]$
$= -\frac{i}{4}\{\begin{bmatrix} 0 & -i(\sigma,i\varsigma)_a \\ i(\sigma,-i\varsigma)_a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i(\sigma,i\varsigma)_b \\ i(\sigma,-i\varsigma)_b & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -i(\sigma,i\varsigma)_b \\ i(\sigma,-i\varsigma)_b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i(\sigma,i\varsigma)_a \\ i(\sigma,-i\varsigma)_a & 0 \end{bmatrix}\}$
$= -\frac{i}{4}\begin{bmatrix} (\sigma,i\varsigma)_{[a}(\sigma,-i\varsigma)_{b]} & 0 \\ 0 & (\sigma,-i\varsigma)_{[a}(\sigma,i\varsigma)_{b]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ab}(\varsigma) & 0 \\ 0 & S_{ab}(-\varsigma) \end{bmatrix}$ □

引理4.1.4. $-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\sigma,i\varsigma)_{[a}(\sigma,-i\varsigma)_{b]}\sigma_y\partial^b & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\sigma,-i\varsigma)_{[a}(\sigma,i\varsigma)_{b]}\sigma_y\partial^b \end{bmatrix}$

证明: $-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b = -2\begin{bmatrix} S^{ab}(\varsigma)\partial_b & 0 \\ 0 & S^{ab}(-\varsigma)\partial_b \end{bmatrix}(\sigma_y\otimes\sigma_y)(I\otimes\sigma_x) = 2i\begin{bmatrix} S^{ab}(\varsigma)\partial_b\sigma_y & 0 \\ 0 & -S^{ab}(-\varsigma)\partial_b\sigma_y \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\sigma,i\varsigma)_{[a}(\sigma,-i\varsigma)_{b]}\sigma_y\partial^b & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\sigma,-i\varsigma)_{[a}(\sigma,i\varsigma)_{b]}\sigma_y\partial^b \end{bmatrix}$ □

推论4.1.1. $\mathbb{X}_a = \begin{bmatrix} 2iS_{ab}(\varsigma)\sigma_y\partial^b & im(\sigma,i\varsigma)_a\sigma_y \\ im(\sigma,-i\varsigma)_a\sigma_y & -2iS_{ab}(-\varsigma)\sigma_y\partial^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\varsigma S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\partial_b & im(\sigma,i\varsigma)_a\sigma_y \\ im(\sigma,-i\varsigma)_a\sigma_y & 2\varsigma S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial^b \end{bmatrix}$

推论4.1.2. $\mathbb{X}_a = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\sigma,i\varsigma)_{[a}(\sigma,-i\varsigma)_{b]}\sigma_y\partial^b & im(\sigma,i\varsigma)_a\sigma_y \\ im(\sigma,-i\varsigma)_a\sigma_y & -\frac{1}{2}(\sigma,-i\varsigma)_{[a}(\sigma,i\varsigma)_{b]}\sigma_y\partial^b \end{bmatrix}, \mathbb{X}^+_a = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sigma_y(\sigma,i\varsigma)_{[a}(\sigma,-i\varsigma)_{b]}\partial^{+b} & -im\sigma_y(\sigma,i\varsigma)_a \\ -im\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)_a & \frac{1}{2}\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)_{[a}(\sigma,i\varsigma)_{b]}\partial^{+b} \end{bmatrix}$

推论4.1.3. $\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} = \mathbb{X}_a \frac{A^a}{2}(\sigma, i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma} = [im\gamma_a(\varsigma)C - 2S_{ab}(e,\varsigma)\partial^b C]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\frac{A^a}{2}$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\varsigma S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\partial_b A_a & im[(\sigma,i\varsigma)^a\sigma_y]_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}A_a \\ im[(\sigma,-i\varsigma)_a\sigma_y]^{A_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}A^a & 2\varsigma S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial^b A_a \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\varsigma S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}F_{ab} & im[(\sigma,i\varsigma)^a\sigma_y]_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}A_a \\ im[(\sigma,-i\varsigma)_a\sigma_y]^{A_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}A^a & -\varsigma S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}F^{ab} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \psi_{A_\varsigma B_\varsigma} & \psi_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma} \\ \psi^{A_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} & \psi^{A'_\varsigma B'_\varsigma} \end{bmatrix}_{B-G} = -\varsigma\begin{bmatrix} \Psi_{A_\varsigma B_\varsigma} & \Psi_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma} \\ \Psi^{A_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} & \Psi^{A'_\varsigma B'_\varsigma} \end{bmatrix}_{Two} = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \psi_{A_\varsigma B_\varsigma} & \psi_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma} \\ \psi^{A_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} & \psi^{A'_\varsigma B'_\varsigma} \end{bmatrix}_{One}$$

4.1.3 一个重要引理

引理4.1.5. $[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x), \psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')] = \frac{i}{4}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')(\eta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')$

$$= -\frac{i}{4}\begin{bmatrix} 2\varsigma S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\partial_b & im[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma} \\ im[(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]_a{}^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma} & 2\varsigma S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial^b \end{bmatrix}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\begin{bmatrix} 2\varsigma S^{a'b'}{}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial_{b'} & im[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^{a'}{}_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \\ im[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]_{a'}{}^{A_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} & 2\varsigma S_{a'b'}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\partial^{b'} \end{bmatrix}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\delta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')$$

证明: $[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x), \psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')] = \frac{i}{4}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[\eta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$= \frac{i}{4}\{[im\gamma^a(\varsigma) - 2S^{ab}(e,\varsigma)\partial_b]C\}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[\eta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\{[im\gamma^{a'}(\varsigma) + 2S^{a'b'}(e,\varsigma)\partial_{'b'}]C\}^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}$
$\Delta(x-x')$

$= \frac{i}{4}\{[im\gamma^a(\varsigma) - 2S^{ab}(e,\varsigma)\partial_b]C\}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[\eta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\{C^+[-im\gamma^{a'}(\varsigma) - 2S^{a'b'}(e,\varsigma)\partial^+_{'b'}]\}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$= \frac{i}{4}\{[im\gamma^a(\varsigma) - 2S^{ab}(e,\varsigma)\partial_b]C\}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\delta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2})\{C^+[-im\gamma^{a'}(-\varsigma) - 2S^{a'b'}(e,-\varsigma)\partial_{'b'}]\}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$= \frac{i}{4}\{[im\gamma^a(\varsigma) - 2S^{ab}(e,\varsigma)\partial_b]\varsigma\gamma_y(\varsigma)\gamma_4(\varsigma)\}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}$
$(\delta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2})\{\varsigma\gamma_4(\varsigma)\gamma_y(\varsigma)[-im\gamma^{a'}(-\varsigma) - 2S^{a'b'}(e,-\varsigma)\partial_{'b'}]\}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$= \frac{i}{4}\{[im\gamma^a(\varsigma) - 2S^{ab}(e,\varsigma)\partial_b][-\varsigma\gamma_4(\varsigma)\gamma_y(\varsigma)]\}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}$
$(\delta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2})\{[\varsigma\gamma_y(-\varsigma)\gamma_4(-\varsigma)][-im\gamma^{a'}(-\varsigma) - 2S^{a'b'}(e,-\varsigma)\partial_{'b'}]\}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$= \frac{i}{4}\{im\begin{bmatrix} 0 & (\sigma,i\varsigma)\sigma_y \\ (\sigma,-i\varsigma)\sigma_y & 0 \end{bmatrix} + 2i\begin{bmatrix} S^{ab}(\varsigma)\sigma_y & 0 \\ 0 & -S^{ab}(-\varsigma)\sigma_y \end{bmatrix}\partial_b\}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\delta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2})$
$\{-im\begin{bmatrix} 0 & \sigma_y(\sigma,-i\varsigma) \\ \sigma_y(\sigma,i\varsigma) & 0 \end{bmatrix} - 2i\begin{bmatrix} \sigma_y S^{ab}(-\varsigma) & 0 \\ 0 & -\sigma_y S^{ab}(\varsigma) \end{bmatrix}\partial_{'b}\}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$= \frac{i}{4}\begin{bmatrix} 2iS^{ab}(\varsigma)\sigma_y\partial_b & im(\sigma,i\varsigma)\sigma_y \\ im(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y & -2iS^{ab}(-\varsigma)\sigma_y\partial_b \end{bmatrix}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\delta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2})\begin{bmatrix} -2i\sigma_y S^{a'b'}(-\varsigma)\partial_{'b'} & -im\sigma_y(\sigma,-i\varsigma) \\ -im\sigma_y(\sigma,i\varsigma) & 2i\sigma_y S^{a'b'}(\varsigma)\partial_{'b'} \end{bmatrix}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$= -\frac{i}{4}\begin{bmatrix} 2\varsigma S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\partial_b & im[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma} \\ im[(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]_a{}^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma} & 2\varsigma S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial^b \end{bmatrix}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\begin{bmatrix} 2\varsigma S^{a'b'}{}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial_{b'} & im[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^{a'}{}_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \\ im[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]_{a'}{}^{A_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} & 2\varsigma S_{a'b'}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\partial^{b'} \end{bmatrix}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\delta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')$ □

4.2 有质量矢量场对易规则两种表述等价性的第一种直观证明方法

引理4.2.1. $[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')$
$= -[-imI\otimes\sigma_x + (\sigma\otimes\sigma_z, i\varsigma)^a\partial_a]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[-imI\otimes\sigma_x + (\sigma\otimes\sigma_z, i\varsigma)^b\partial_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\Delta(x-x'), \gamma^a = (\sigma\otimes\sigma_y, \varsigma I\otimes\sigma_x)$

定理4.2.1. $[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x), \psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')] = \frac{i}{8}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')$

$$= -\frac{i}{8}\begin{bmatrix} (\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a & -im\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \\ -im\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} & -(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a \end{bmatrix}_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\begin{bmatrix} (\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_b & -im\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \\ -im\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} & -(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma}\partial^b \end{bmatrix}_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')$$

$\Leftrightarrow [\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x), \psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')] = \frac{i}{4}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')(\eta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')$

$$= -\frac{i}{4}\begin{bmatrix} 2\varsigma S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\partial_b & im[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma} \\ im[(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]_a{}^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma} & 2\varsigma S_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial^b \end{bmatrix}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\begin{bmatrix} 2\varsigma S^{a'b'}{}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial_{b'} & im[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^{a'}{}_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma} \\ im[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]_{a'}{}^{A_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} & 2\varsigma S_{a'b'}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\partial^{b'} \end{bmatrix}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\delta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')$$

证明:

$$\begin{cases} [\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x), \psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')] = -\frac{i}{8}(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma\}B'_\varsigma)}\partial_a\partial_b\Delta(x-x') = iS^{ac}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\delta_{cd}S^{db}{}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x') \\ [\psi^{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x), \psi_+^{A_\varsigma B_\varsigma}(x')] = -\frac{i}{8}(\sigma,-i\varsigma)_a^{\{A'_\varsigma(A_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma\}B_\varsigma)}\partial^a\partial^b\Delta(x-x') = iS_{ac}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\delta^{cd}S_{db}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\partial^a\partial^b\Delta(x-x') \end{cases}$$

$$\begin{cases} [\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x), \psi_+^{C_\varsigma D_\varsigma}(x')] = \frac{i}{8}m^2\delta^{(C_\varsigma}_{\{A_\varsigma}\delta^{D_\varsigma)}_{B_\varsigma\}}\Delta(x-x') = iS^{ac}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\delta^d_c S_{db}{}^{C_\varsigma D_\varsigma}\partial_a\partial^b\Delta(x-x') \\ [\psi^{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x), \psi^+_{C'_\varsigma D'_\varsigma}(x')] = \frac{i}{8}m^2\delta^{\{A'_\varsigma}_{(C'_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma\}}_{D'_\varsigma)}\Delta(x-x') = iS_{ac}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\delta^c_d S^{db}{}_{C'_\varsigma D'_\varsigma}\partial_a\partial^b\Delta(x-x') \end{cases}$$

$$\begin{cases} [\psi^{B'_\varsigma}_{A_\varsigma}(x), {}^+\psi^{B_\varsigma}_{A'_\varsigma}(x')] = \frac{i}{4}[(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma}\partial^b + m^2\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}]\Delta(x-x') \\ = -\frac{i}{4}\{[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^b{}_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x') - 2m^2\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}\} \\ [\psi^{A'_\varsigma}_{B_\varsigma}(x), {}^+\psi^{A_\varsigma}_{B'_\varsigma}(x')] = \frac{i}{4}[(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_b + m^2\delta^{A_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}]\Delta(x-x') \\ = -\frac{i}{4}\{[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{B_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^b{}_{B'_\varsigma}{}^{A_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x') - 2m^2\delta^{A_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),^+\psi^{C_\varsigma}_{A'_\varsigma}(x')]=-\frac{1}{4}m(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{B_\varsigma\}}\partial_a\Delta(x-x')=\frac{\varsigma}{2}mS^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}\partial_b\delta_{aa'}[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^{a'}{}_{A'_\varsigma}{}^{C_\varsigma}\Delta(x-x')\\ [\psi^{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x),^+\psi^{A_\varsigma}_{C'_\varsigma}(x')]=\frac{1}{4}m(\sigma,-i\varsigma)_a^{\{A'_\varsigma A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma\}}_{C'_\varsigma}\partial^a\Delta(x-x')=\frac{\varsigma}{2}mS_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial^b\delta^{aa'}[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]_{a'}{}^{A_\varsigma}{}_{C'_\varsigma}\Delta(x-x')\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\psi^{C'_\varsigma}_{A_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]=-\frac{1}{4}m(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma\{A'_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{B'_\varsigma\}}\partial_a\Delta(x-x')=\frac{\varsigma}{2}mS^{ab}{}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\partial_b\delta_{aa'}[(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]^{a'C'_\varsigma}{}_{A_\varsigma}\Delta(x-x')\\ [\psi^{A'_\varsigma}_{C_\varsigma}(x),\psi^{A_\varsigma B_\varsigma}_+(x')]=\frac{1}{4}m(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma\{A_\varsigma}\delta^{B_\varsigma\}}_{C_\varsigma}\partial_a\Delta(x-x')=\frac{\varsigma}{2}mS_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\partial^b\delta^{aa'}[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]_{a'C_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Delta(x-x')\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^a{}_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}=[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]^{aB_\varsigma}{}_{A'_\varsigma},[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}=[(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]^{aB'_\varsigma}{}_{A_\varsigma}\\ \{[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^a{}_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\}^*=[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma},\{[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]_a{}^{B_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}\}^*=[(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]_a{}^{B'_\varsigma}{}_{A_\varsigma}\end{cases}$$

□

推论4.2.1. $2\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')=[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')$

4.3 有质量矢量场对易规则两种表述等价性的第二种直观证明方法

引理4.3.1. $\begin{cases}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta_{ab}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}=-2\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\\(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\delta^{ab}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma}=-2\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\end{cases}$ $\begin{cases}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^b_a(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma}=2\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}\\(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\delta^a_b(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}=2\delta^{A_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}\end{cases}$

定理4.3.1. $[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x),\psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{4}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\Delta(x-x')$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\sigma,i\varsigma)_{[a}(\sigma,-i\varsigma)_{b]}\sigma_y\partial^b & im(\sigma,i\varsigma)_a\sigma_y\\ im(\sigma,-i\varsigma)_a\sigma_y & -\frac{1}{2}(\sigma,-i\varsigma)_{[a}(\sigma,i\varsigma)_{b]}\sigma_y\partial^b\end{bmatrix}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)_{[a'}(\sigma,i\varsigma)_{b']}\partial^{b'} & -im\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)_{a'}\\ -im\sigma_y(\sigma,i\varsigma)_{a'} & -\frac{1}{2}\sigma_y(\sigma,i\varsigma)_{[a'}(\sigma,-i\varsigma)_{b']}\partial^{b'}\end{bmatrix}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}$$

$\frac{i}{4}(\delta^{aa'}-\frac{\partial^a\partial^{a'}}{m^2})\Delta(x-x')$

$\Leftrightarrow[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x),\psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{8}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')$

$$=-\frac{i}{8}\begin{bmatrix}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a & -im\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\\ -im\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} & -(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\end{bmatrix}_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\begin{bmatrix}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_b & -im\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\\ -im\delta^{A'_\varsigma}{}_{B'_\varsigma} & -(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma}\partial^b\end{bmatrix}_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')$$

证明:

$$\begin{cases}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{16}\{(\sigma,i\varsigma)_{[a}(\sigma,-i\varsigma)_{b]}\sigma_y\partial^b\}_{A_\varsigma B_\varsigma}\delta^{aa'}\{\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)_{[a'}(\sigma,i\varsigma)_{b']}\partial^{b'}\}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\Delta(x-x')\\ =-\frac{i}{8}(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma\}B'_\varsigma)}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi^{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x),\psi_+^{A_\varsigma B_\varsigma}(x')]=\frac{i}{16}\{(\sigma,-i\varsigma)_{[a}(\sigma,i\varsigma)_{b]}\sigma_y\partial^b\}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\delta^{aa'}\{\sigma_y(\sigma,i\varsigma)_{[a'}(\sigma,-i\varsigma)_{b']}\partial^{b'}\}^{A_\varsigma B_\varsigma}\Delta(x-x')\\ =-\frac{i}{8}(\sigma,-i\varsigma)_a^{\{A'_\varsigma(A_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma\}B_\varsigma)}\partial^a\partial^b\Delta(x-x')\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi_+^{C_\varsigma D_\varsigma}(x')]=-\frac{i}{16}\{(\sigma,i\varsigma)_{[a}(\sigma,-i\varsigma)_{b]}\sigma_y\partial^b\}_{A_\varsigma B_\varsigma}\delta^{aa'}\{\sigma_y(\sigma,i\varsigma)_{[a'}(\sigma,-i\varsigma)_{b']}\partial^{b'}\}^{C_\varsigma D_\varsigma}\Delta(x-x')\\ =\frac{i}{8}\delta^{(C_\varsigma}_{\{A_\varsigma}\delta^{D_\varsigma)}_{B_\varsigma\}}\partial^a\partial_a\Delta(x-x')\\ [\psi^{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x),\psi^+_{C'_\varsigma D'_\varsigma}(x')]=-\frac{i}{16}\{(\sigma,-i\varsigma)_{[a}(\sigma,i\varsigma)_{b]}\sigma_y\partial^b\}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\delta^{aa'}\{\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)_{[a'}(\sigma,i\varsigma)_{b']}\partial^{b'}\}_{C'_\varsigma D'_\varsigma}\Delta(x-x')\\ =\frac{i}{8}\delta^{\{A'_\varsigma}_{(C'_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma\}}_{D'_\varsigma)}\partial^a\partial_a\Delta(x-x')\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\psi^{B'_\varsigma}_{A_\varsigma}(x),^+\psi^{B_\varsigma}_{A'_\varsigma}(x')]=-\frac{i}{4}\{[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^b{}_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')-2m^2\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}\}\\ =\frac{i}{4}[(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma}\partial^b+m^2\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{A'_\varsigma}]\Delta(x-x')\\ [\psi^{A'_\varsigma}_{B_\varsigma}(x),^+\psi^{A_\varsigma}_{B'_\varsigma}(x')]=-\frac{i}{4}\{[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{B_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^b{}_{B'_\varsigma}{}^{A_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')-2m^2\delta^{A_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}\}\\ =\frac{i}{4}[(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_b+m^2\delta^{A_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}]\Delta(x-x')\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),^+\psi^{C_\varsigma}_{A'_\varsigma}(x')]=\frac{1}{8}m\{(\sigma,i\varsigma)_{[a}(\sigma,-i\varsigma)_{b]}\sigma_y\partial^b\}_{A_\varsigma B_\varsigma}\delta^a_{a'}[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^{a'}{}_{A'_\varsigma}{}^{C_\varsigma}\Delta(x-x')\\ =-\frac{1}{4}m(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{B_\varsigma\}}\partial_a\Delta(x-x')\\ [\psi^{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x),^+\psi^{A_\varsigma}_{C'_\varsigma}(x')]=-\frac{1}{8}m\{(\sigma,-i\varsigma)_{[a}(\sigma,i\varsigma)_{b]}\sigma_y\partial^b\}^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\delta^a_{a'}[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]_{a'}{}^{A_\varsigma}{}_{C'_\varsigma}\Delta(x-x')\\ =\frac{1}{4}m(\sigma,-i\varsigma)_a^{\{A'_\varsigma A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma\}}_{C'_\varsigma}\partial^a\Delta(x-x')\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\psi^{C'_\varsigma}_{A_\varsigma}(x),\psi^{+}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]=-\frac{1}{8}m\{\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)_{[a}(\sigma,i\varsigma)_{b]}\partial^b\}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\delta^a_{a'}[(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]^{a'C'_\varsigma}{}_{A_\varsigma}\Delta(x-x')\\ =-\frac{1}{4}m(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma\{A'_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{B'_\varsigma\}}\partial_a\Delta(x-x')\\ [\psi^{A'_\varsigma}_{C_\varsigma}(x),\psi^{A_\varsigma B_\varsigma}_{+}(x')]=\frac{1}{8}m\{\sigma_y(\sigma,i\varsigma)_{[a}(\sigma,-i\varsigma)_{b]}\partial^b\}^{A_\varsigma B_\varsigma}\delta^{aa'}[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]_{a'C_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Delta(x-x')\\ =\frac{1}{4}m(\sigma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma\{A_\varsigma}_a\delta^{B_\varsigma\}}_{C_\varsigma}\partial_a\Delta(x-x')\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^a{}_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}=[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]^{aB_\varsigma}{}_{A'_\varsigma},[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}=[(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]^{aB'_\varsigma}{}_{A_\varsigma}\\ \{[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]^a{}_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\}^*=[(\sigma,i\varsigma)\sigma_y]^a{}_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma},\{[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]_a{}^{B_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}\}^*=[(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]_a{}^{B'_\varsigma}{}_{A_\varsigma}\end{cases}$$ □

5 自旋-1粒子Bargmann-Wigner方程各种量子算符的提取

5.1 自旋-1粒子Bargmann-Wigner方程 [18]的等时对易规则

定理5.1.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec r,t)=0,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec r,t)=\frac{1}{2!}\psi_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\}}(\vec r,t)$

$$\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=1}^{-1}\sqrt{\frac{m^2}{E}}[a(\vec p,h)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec p,h)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+b^+(\vec p,h)V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec p,h)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^3\vec p$$

$$\begin{cases}a(\vec p,h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m^2}{E^3}}U^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec p,h)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec r,t)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}d^3\vec r\\ b^+(\vec p,h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m^2}{E^3}}V^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec p,h)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec r,t)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}d^3\vec r\end{cases}$$

定理5.1.2. $[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec r',t)]=\frac{1}{4}[(m\gamma^4+\gamma^4\vec\gamma\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\delta_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}]\delta^3(\vec r-\vec r')$

证明: $[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec r',t)]$
$=\frac{i}{8}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')|_{t=t'}$
$=\frac{i}{8}[(m\gamma^4-\vec\gamma\gamma^4\cdot\nabla)+i\partial_t]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4-\vec\gamma\gamma^4\cdot\nabla)+i\partial_t]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')|_{t=t'}$
$=\frac{i}{8}[(m\gamma^4-\vec\gamma\gamma^4\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}i\partial_t\delta_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}+i\partial_t\delta_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^4-\vec\gamma\gamma^4\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}]\Delta(x-x')|_{t=t'}$
$=\frac{1}{4}[(m\gamma^4-\vec\gamma\gamma^4\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\delta_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}]\delta^3(\vec r-\vec r')$
$=\frac{1}{4}[(m\gamma^4+\gamma^4\vec\gamma\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\delta_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}]\delta^3(\vec r-\vec r')$ □

5.2 自旋-1粒子Bargmann-Wigner方程能量算符的提取

定理5.2.1. $H=\int\sum_{h=1}^{-1}E[a^+(\vec p,h)a(\vec p,h)+b(\vec p,h)b^+(\vec p,h)]d^3\vec p=\int\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec r,t)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec r,t)d^3\vec r$

证明: $\int\sum_{h=1}^{-1}E[a^+(\vec p,h)a(\vec p,h)+b(\vec p,h)b^+(\vec p,h)]d^3\vec p$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m^2}{E^2}\psi^+_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec r,t)\psi_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec r',t)$
$\sum_{h=1}^{-1}[U^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec p,h)U^{+\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec p,h)e^{i\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}+V^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec p,h)V^{+\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec p,h)e^{-i\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}]d^3\vec rd^3\vec r'd^3\vec p$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m^2}{E^2}\psi^+_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec r,t)\psi_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec r',t)$
$\sum_{h=1}^{-1}[U^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec p,h)U^{+\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec p,h)+V^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-\vec p,h)V^{+\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(-\vec p,h)]e^{i\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}d^3\vec rd^3\vec r'd^3\vec p$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m^2}{E^2}\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec r,t)\psi^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec r',t)$
$\frac{1}{16m^2}[[(m-i\gamma^ap_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^bp_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}+[(m-i\gamma^ap^+_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^bp^+_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}]e^{i\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}d^3\vec rd^3\vec r'd^3\vec p$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{m^2}{E^2}\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec r,t)\psi^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec r',t)$
$\frac{1}{16m^2}[[(m\gamma^4-i\vec\gamma\gamma^4\cdot\vec p)+E]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4-i\vec\gamma\gamma^4\cdot\vec p)+E]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}$
$+[(m\gamma^4-i\vec\gamma\gamma^4\cdot\vec p)-E]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4-i\vec\gamma\gamma^4\cdot\vec p)-E]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}]e^{i\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}d^3\vec rd^3\vec r'd^3\vec p$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec r,t)\psi^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec r',t)$
$\frac{1}{16E^2}\{[(m\gamma^4-i\vec\gamma\gamma^4\cdot\vec p)+E]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4-i\vec\gamma\gamma^4\cdot\vec p)+E]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}$
$+[(m\gamma^4-i\vec\gamma\gamma^4\cdot\vec p)-E]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4-i\vec\gamma\gamma^4\cdot\vec p)-E]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\}e^{i\vec p\cdot(\vec r-\vec r')}d^3\vec rd^3\vec r'd^3\vec p$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec r,t)\psi^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec r',t)$

$\frac{1}{8E^2}\{[(m\gamma^4-i\vec{\gamma}\gamma^4\cdot\vec{p})]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4-i\vec{\gamma}\gamma^4\cdot\vec{p})]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}+E^2\delta_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\delta_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)\psi^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{r}',t)$

$\{\frac{1}{8E^2}[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}+\frac{1}{2}\delta_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\delta_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)\psi^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{r}',t)$

$\{[(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\frac{1}{E^2}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}+\delta_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\delta_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'d^3\vec{p}$

$=\frac{1}{8}\int\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)\psi^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{r}',t)\{\frac{[(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}}{m^2-\nabla^2}+\delta_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\delta_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$

$=\frac{1}{8}\int\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)\{\frac{[(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}}{m^2-\nabla^2}+\delta_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}\delta_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\}\psi^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{2}\int\{\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{[(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(m\gamma^4+\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\nabla)]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}}{m^2-\nabla^2}\psi^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{r},t)+\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{2}\int\{\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^2}{m^2-\nabla^2}\psi^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{r},t)+\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$=\int\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$ □

定理5.2.2. $H=\int\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}=\int\{\frac{1}{2}F^{+ab}F_{ab}+m^2A^{+a}(\vec{r},t)A_a(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

证明: $H=\int\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$tr[S_{ab}(e,\varsigma)S_{cd}(e,\varsigma)]=S_{abcd}=\delta_{ac}\delta_{db}-\delta_{ad}\delta_{cb}$

$=\int\{\bar{C}[-im\gamma^{a'}(\varsigma)-2S^{a'b'}(e,\varsigma)\partial^+_{b'}]\}^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\frac{A^+_{a'}(\vec{r},t)}{2}[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\frac{A_a(\vec{r},t)}{2}d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{4}\int tr\{\bar{C}[-im\gamma^{a'}(\varsigma)-2S^{a'b'}(e,\varsigma)\partial^+_{b'}][im\gamma^a(\varsigma)-2S^{ab}(e,\varsigma)\partial_b]C\}A^+_{a'}(\vec{r},t)A_a(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{4}\int\{m^2tr[\gamma^{a'}(\varsigma)\gamma^a(\varsigma)]A^+_{a'}(\vec{r},t)A_a(\vec{r},t)+4tr[S^{a'b'}(e,\varsigma)S^{ab}(e,\varsigma)]\partial^+_{b'}A^+_{a'}(\vec{r},t)\partial_bA_a(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$=\int\{m^2\delta^{a'a}A^+_{a'}(\vec{r},t)A_a(\vec{r},t)+S^{a'b'ab}\partial^+_{b'}A^+_{a'}(\vec{r},t)\partial_bA_a(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$=\int\{m^2\delta^{a'a}A^+_{a'}(\vec{r},t)A_a(\vec{r},t)+(\delta^{a'a}\delta^{b'b}-\delta^{a'b}\delta^{b'a})\partial^+_{b'}A^+_{a'}(\vec{r},t)\partial_bA_a(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$=\int\{m^2A^{+a}(\vec{r},t)A_a(\vec{r},t)+\partial^{+b}A^{+a}(\vec{r},t)\partial_bA_a(\vec{r},t)-\partial^{+a}A^{+b}(\vec{r},t)\partial_bA_a(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$=\int\{\frac{1}{2}F^{+ab}F_{ab}+m^2A^{+a}(\vec{r},t)A_a(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$ □

6 有质量Majorana矢量场(取$\theta=0$)

6.1 有质量Majorana矢量场与有质量矢量场的对比

本章有质量矢量场的以上结论对于有质量Majorana矢量场一样相应成立，但要加上下面的附加条件。

定理6.1.1. $\psi=\gamma_2\otimes\gamma_2\psi^*,A_a=A^+_{a'}\eta^{a'}_a(F_{ab}=F^+_{a'b'}\eta^{a'}_a\eta^{b'}_b),b^+(\vec{p},h)=(-1)^{s+h}a^+(\vec{p},-h)$

下面就有质量Majorana矢量场与有质量复矢量场不一样的情形进行详细对比讨论。

6.2 不依赖方程导出自旋-1粒子各种物理量之间等价对易规则

6.2.1 重新定义

定义6.2.1. 电磁场矢量第三种定义

$$\begin{cases}F_{ab}:=\partial_aA_b-\partial_bA_a\\ \psi_{\alpha_\varsigma}:=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}=-\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}(E-i\varsigma B)_{\alpha_\varsigma}\\ \psi_{A_\varsigma B_\varsigma}:=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma}\Leftrightarrow\psi_{\alpha_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=-\varsigma S^{ab}{}_{A_\varsigma B_\varsigma}F_{ab}\\ F_{ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^{\alpha_{-\varsigma}}_{-\varsigma ab}\psi_{\alpha_{-\varsigma}}+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma})\\ *F_{ab}=\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma^{\alpha_{-\varsigma}}_{-\varsigma ab}\psi_{\alpha_{-\varsigma}}-\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma})\end{cases}$$

6.3 $\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}$与$(A_a,F_{ab})$的等价对易规则

6.3.1 复场与实场的共同对易规则

定理6.3.1.

$$\begin{cases}[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x),\psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{4}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x'),\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}=\psi_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}\\ im\frac{A_a}{2}(x)=\frac{1}{4}tr\{\bar{C}\gamma_a(\varsigma)\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}(x)\},i\frac{F_{ab}}{2}(x)=\frac{1}{2}tr\{\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma)\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}(x)\}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}[A_a(x),A^+_{a'}(x')]=i(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x'),[F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]=-i\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\Delta(x-x')\\ \psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}=[im\gamma^a(\varsigma)C\frac{A_a}{2}+S^{ab}(e,\varsigma)C\frac{F_{ab}}{2}]\end{cases}$$

证明: $m^2[A_a(x),A^+_{a'}(x')]=[imA_a(x),-imA^+_{a'}(x')]$
$=[\frac{1}{2}tr[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}(x)],\frac{1}{2}tr^+[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}(x')]]$
$=[\frac{1}{2}[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)]^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x),\frac{1}{2}[\gamma_{a'}(\varsigma)C]^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')]$
$=\frac{1}{4}[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)]^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[\gamma_{a'}(\varsigma)C]^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x),\psi_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')]$
$=\frac{i}{16}[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)]^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[\gamma_{a'}(\varsigma)C]^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^{+b'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')(\eta_{bb'}-\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2})\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{16}tr[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)\mathbb{X}^b(x)]tr[\mathbb{X}^{+b'}(x')\gamma_{a'}(\varsigma)C](\eta_{bb'}-\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2})\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{16}tr\{\bar{C}\gamma_a(\varsigma)[im\gamma^b(\varsigma)-2S^{bc}(e,\varsigma)\partial_c]C\}tr\{\bar{C}[-im\gamma^{b'}(\varsigma)-2S^{b'c'}(e,\varsigma)\partial^+_{c'}]\gamma_{a'}(\varsigma)C\}(\eta_{bb'}-\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2})\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{16}tr\{\gamma_a(\varsigma)[im\gamma^b(\varsigma)-2S^{bc}(e,\varsigma)\partial_c]\}tr\{[-im\gamma^{b'}(\varsigma)-2S^{b'c'}(e,\varsigma)\partial^+_{c'}]\gamma_{a'}(\varsigma)\}(\eta_{bb'}-\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2})\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{16}m^2tr[\gamma_a(\varsigma)\gamma^b(\varsigma)]tr[\gamma^{b'}(\varsigma)\gamma_{a'}(\varsigma)](\eta_{bb'}-\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2})\Delta(x-x')$
$=im^2\delta^b_a\delta^{b'}_{a'}(\eta_{bb'}-\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2})\Delta(x-x')$
$=i(m^2\eta_{aa'}-\partial_a\partial^+_{a'})\Delta(x-x')$ □

证明: $[F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]=[iF_{ab}(x),-iF^+_{a'b'}(x')]$
$=[tr[\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma)\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}(x)],tr^+[\bar{C}S_{a'b'}(e,\varsigma)(\varsigma)\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}(x')]]$
$=[[\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma)]^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x),[S_{a'b'}(e,\varsigma)(\varsigma)C]^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')]$
$=[\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma)]^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[S_{a'b'}(e,\varsigma)C]^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x),\psi_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')]$
$=\frac{i}{4}[\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma)]^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[S_{a'b'}(e,\varsigma)C]^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\mathbb{X}^c_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^{+c'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')(\eta_{cc'}-\frac{\partial_c\partial^+_{c'}}{m^2})\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{4}tr[\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma)\mathbb{X}^c(x)]tr[\mathbb{X}^{+c'}(x')S_{a'b'}(e,\varsigma)C](\eta_{cc'}-\frac{\partial_c\partial^+_{c'}}{m^2})\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{4}tr\{\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma)[im\gamma^c(\varsigma)-2S^{cd}(e,\varsigma)\partial_d]C\}tr\{\bar{C}[-im\gamma^{c'}(\varsigma)-2S^{c'd'}(e,\varsigma)\partial^+_{d'}]S_{a'b'}(e,\varsigma)C\}$
$(\eta_{cc'}-\frac{\partial_c\partial^+_{c'}}{m^2})\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{4}tr\{S_{ab}(e,\varsigma)[im\gamma^c(\varsigma)-2S^{cd}(e,\varsigma)\partial_d]\}tr\{[-im\gamma^{c'}(\varsigma)-2S^{c'd'}(e,\varsigma)\partial^+_{d'}]S_{a'b'}(e,\varsigma)\}(\eta_{cc'}-\frac{\partial_c\partial^+_{c'}}{m^2})\Delta(x-x')$
$=-itr[S_{ab}(e,\varsigma)S^{cd}(e,\varsigma)]tr[S^{c'd'}(e,\varsigma)S_{a'b'}(e,\varsigma)]\partial_d\partial^+_{d'}(\eta_{cc'}-\frac{\partial_c\partial^+_{c'}}{m^2})\Delta(x-x')$
$=-itr[S_{ab}(e,\varsigma)S^{cd}(e,\varsigma)]tr[S^{c'd'}(e,\varsigma)S_{a'b'}(e,\varsigma)]\eta_{cc'}\partial_d\partial^+_{d'}\Delta(x-x')$
$=-iS_{abcd}S_{a'b'c'd'}\eta^{cc'}\partial^d\partial^{d'}_+\Delta(x-x')$
$=-i(\delta_{ac}\delta_{bd}-\delta_{ad}\delta_{bc})(\delta_{a'c'}\delta_{b'd'}-\delta_{a'd'}\delta_{b'c'})\eta^{cc'}\partial^d\partial^{d'}_+\Delta(x-x')$
$=-i\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\Delta(x-x')$ □

6.3.2 复场条件

定理6.3.2.

$$\begin{cases}[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x),\psi_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x')]=0,[\psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x),\psi^+_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(x')]=0,,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}=\psi_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}\\ im\frac{A_a}{2}(x)=\frac{1}{4}tr\{\bar{C}\gamma_a(\varsigma)\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}(x)\},i\frac{F_{ab}}{2}(x)=\frac{1}{2}tr\{\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma)\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}(x)\}\end{cases}$$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}[A_a(x),A_b(x')]=0,[F_{ab}(x),F_{cd}(x')]=0;[A^+_{a'}(x),A^+_{b'}(x')]=0,[F^+_{a'b'}(x),F^+_{c'd'}(x')]=0\\ \psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}=[im\gamma^a(\varsigma)C\frac{A_a}{2}+S^{ab}(e,\varsigma)C\frac{F_{ab}}{2}]\end{cases}$$

6.3.3 复场完整的对易规则

定理6.3.3.

$$\begin{cases}[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x),\psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{4}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')\\ [\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x),\psi_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x')]=0,[\psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x),\psi^+_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(x')]=0,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}=\psi_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}\\ im\frac{A_a}{2}(x)=\frac{1}{4}tr\{\bar{C}\gamma_a(\varsigma)\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}(x)\},i\frac{F_{ab}}{2}(x)=\frac{1}{2}tr\{\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma)\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}(x)\}\end{cases}$$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}[A_a(x),A^+_{a'}(x')]=i(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x'),[F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]=-i\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\Delta(x-x')\\ [A_a(x),A_b(x')]=0,[F_{ab}(x),F_{cd}(x')]=0;[A^+_{a'}(x),A^+_{b'}(x')]=0,[F^+_{a'b'}(x),F^+_{c'd'}(x')]=0\\ \psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}=[im\gamma^a(\varsigma)C\frac{A_a}{2}+S^{ab}(e,\varsigma)C\frac{F_{ab}}{2}]\end{cases}$$

6.3.4 Majorana实场条件

定理6.3.4.

$$\begin{cases}\psi=\gamma_2\psi^+\gamma_2,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}=\psi_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}\\ im\frac{A_a}{2}(x)=\frac{1}{4}tr\{\bar{C}\gamma_a(\varsigma)\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}(x)\}\\ i\frac{F_{ab}}{2}(x)=\frac{1}{2}tr\{\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma)\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}(x)\}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A_a=A^+_{a'}\eta^{a'}_a,F_{ab}=F^+_{a'b'}\eta^{a'}_a\eta^{b'}_b\\ \psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}=[im\gamma^a(\varsigma)C\frac{A_a}{2}+S^{ab}(e,\varsigma)C\frac{F_{ab}}{2}]\end{cases}$$

6.3.5 Majorana实场完整的对易规则

定理6.3.5.

$$\begin{cases}[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x),\psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{4}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')\\ [\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x),\psi_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{4}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^{a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')(\delta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')\\ [\psi^+_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x),\psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{4}\mathbb{X}^{+a}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')(\delta_{aa'}-\frac{\partial^+_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')\\ \psi=\gamma_2\psi^+\gamma_2,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}=\psi_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}\\ im\frac{A_a}{2}(x)=\frac{1}{4}tr\{\bar{C}\gamma_a(\varsigma)\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}(x)\},i\frac{F_{ab}}{2}(x)=\frac{1}{2}tr\{\bar{C}S_{ab}(e,\varsigma)\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}(x)\}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}[A_a(x),A^+_{a'}(x')]=i(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x'),[F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]=-i\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\Delta(x-x')\\ [A_a(x),A_b(x')]=i(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})\Delta(x-x'),[F_{ab}(x),F_{cd}(x')]=-i\delta_{[a<c}\partial_{b]}\partial_{d>}\Delta(x-x')\\ [A^+_{a'}(x),A^+_{b'}(x')]=i(\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})\Delta(x-x'),[F^+_{a'b'}(x),F^+_{c'd'}(x')]=-i\delta_{[a'<c'}\partial^+_{b']}\partial^+_{d'>}\Delta(x-x')\\ A_a=A^+_{a'}\eta^{a'}_a,F_{ab}=F^+_{a'b'}\eta^{a'}_a\eta^{b'}_b\\ \psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}=[im\gamma^a(\varsigma)C\frac{A_a}{2}+S^{ab}(e,\varsigma)C\frac{F_{ab}}{2}]\end{cases}$$

6.4 从A_a导出F_{ab}的对易关系

6.4.1 复场与实场的共同对易规则

定理6.4.1.
$$\begin{cases}[A_a(x),A^+_{a'}(x')]=i(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')\\ F_{ab}:=\partial_aA_b-\partial_bA_a\end{cases}\Rightarrow[F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]=-i\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\Delta(x-x')$$

6.4.2 复场条件

定理6.4.2.
$$\begin{cases}[A_a(x),A_b(x')]=0,[A^+_{a'}(x),A^+_{b'}(x')]=0\\ F_{ab}:=\partial_aA_b-\partial_bA_a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[F_{ab}(x),F_{cd}(x')]=0\\ [F^+_{a'b'}(x),F^+_{c'd'}(x')]=0\end{cases}$$

6.4.3 复场完整的对易规则

定理6.4.3.
$$\begin{cases}[A_a(x),A^+_{a'}(x')]=i(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')\\ [A_a(x),A_b(x')]=0,[A^+_{a'}(x),A^+_{b'}(x')]=0\\ F_{ab}:=\partial_aA_b-\partial_bA_a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]=-i\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\Delta(x-x')\\ [F_{ab}(x),F_{cd}(x')]=0,[F^+_{a'b'}(x),F^+_{c'd'}(x')]=0\end{cases}$$

6.4.4 Majorana实场条件

定理6.4.4. $A_a=A^+_{a'}\eta^{a'}_a,F_{ab}:=\partial_aA_b-\partial_bA_a\Rightarrow F_{ab}=F^+_{a'b'}\eta^{a'}_a\eta^{b'}_b$

6.4.5 Majorana实场完整的对易规则

定理6.4.5.
$$\begin{cases}[A_a(x),A^+_{a'}(x')]=i(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')\\ [A_a(x),A_b(x')]=i(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})\Delta(x-x')\\ [A^+_{a'}(x),A^+_{b'}(x')]=i(\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})\Delta(x-x')\\ A_a=A^+_{a'}\eta^{a'}_a,F_{ab}:=\partial_aA_b-\partial_bA_a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]=-i\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\Delta(x-x')\\ [F_{ab}(x),F_{cd}(x')]=-i\delta_{[a<c}\partial_{b]}\partial_{d>}\Delta(x-x')\\ [F^+_{a'b'}(x),F^+_{c'd'}(x')]=-i\delta_{[a'<c'}\partial^+_{b']}\partial^+_{d'>}\Delta(x-x')\\ F_{ab}=F^+_{a'b'}\eta^{a'}_a\eta^{b'}_b\end{cases}$$

6.5 ψ_{α_ς}与F_{ab}的等价对易关系

6.5.1 复场与实场的共同对易规则

定理6.5.1.

$$\begin{cases}[F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]=-i\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\Delta(x-x')\\ \psi_{\alpha_\varsigma}:=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_{-\varsigma}}(x')]=-\frac{i}{2}m^2\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_{-\varsigma}}\Delta(x-x')\\ F_{ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma}+\sigma^{\alpha_{-\varsigma}}_{-\varsigma ab}\psi_{\alpha_{-\varsigma}})\end{cases}$$

证明：$[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]$
$=[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}(x),\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}F^+_{a'b'}(x')]$
$=-\frac{1}{8}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}[F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]$
$=\frac{i}{8}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}\eta_{aa'}\partial_b\partial^+_{b'}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}\delta_{aa'}\partial_b\partial_{b'}\Delta(x-x')$
$=i\sigma^{bb'}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_b\partial_{b'}\Delta(x-x')$
$=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$ □

6.5.2 复场条件

定理6.5.2.

$$\begin{cases}[F_{ab}(x),F_{cd}(x')]=0,[F^+_{a'b'}(x),F^+_{c'd'}(x')]=0\\ \psi_{\alpha_\varsigma}:=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{\beta_\kappa}(x')]=0,[\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi^+_{\beta'_\kappa}(x')]=0\\ F_{ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma}+\sigma^{\alpha_{-\varsigma}}_{-\varsigma ab}\psi_{\alpha_{-\varsigma}})\end{cases}$$

6.5.3 复场完整的对易规则

定理6.5.3.

$$\begin{cases}[F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]=-i\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\Delta(x-x')\\ [F_{ab}(x),F_{cd}(x')]=0,[F^+_{a'b'}(x),F^+_{c'd'}(x')]=0\\ \psi_{\alpha_\varsigma}:=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_{-\varsigma}}(x')]=-\frac{i}{2}m^2\delta_{\alpha_\varsigma\alpha'_{-\varsigma}}\Delta(x-x')\\ [\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{\beta_\kappa}(x')]=0,[\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi^+_{\beta'_\kappa}(x')]=0\\ F_{ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma}+\sigma^{\alpha_{-\varsigma}}_{-\varsigma ab}\psi_{\alpha_{-\varsigma}})\end{cases}$$

定理6.5.4.

$$\begin{cases}[F_{ab}(x),A^+_{c'}(x')]=-i\eta_{c'[a}\partial_{b]}\Delta(x-x')\\ [F^+_{a'b'}(x),A_c(x')]=-i\eta_{c[a'}\partial^+_{b']}\Delta(x-x')\\ [F_{ab}(x),A_c(x')]=0,[F^+_{a'b'}(x),A^+_{c'}(x')]=0\end{cases}\begin{cases}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),A^+_{c'}(x')]=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma_{+\varsigma},-i\varsigma)^b|_{c'\alpha_\varsigma}\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),A_c(x')]=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma_{+\varsigma},-i\varsigma)^b|_{c\alpha'_\varsigma}\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{\alpha_\varsigma}(x),A_c(x')]=0,[\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),A^+_{c'}(x')]=0\end{cases}$$

证明：$[F_{ab}(x),A^+_c(x')]=[\partial_aA_b(x)-\partial_bA_a(x),A^+_c(x')]$
$=i(\eta_{bc}-\frac{\partial_b\partial^+_c}{m^2})\partial_a\Delta(x-x')-i(\eta_{ac}-\frac{\partial_a\partial^+_c}{m^2})\partial_b\Delta(x-x')$
$=-i\eta_{c[a}\partial_{b]}\Delta(x-x')$ □

证明：$[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),A^+_c(x')]=\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}[F_{ab}(x),A^+_c(x')]$
$=-i\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\eta_{c[a}\partial_{b]}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\eta_{ca}\partial_b\Delta(x-x')$
$=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma_\varsigma)_{\alpha_\varsigma}|^{ab}\eta_{ca}\partial_b\Delta(x-x'),[(\sigma_\varsigma,-i\varsigma)^{\alpha_\varsigma}|_{ab}=(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)_a|_b{}^{\alpha_\varsigma}]$
$=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma_{-\varsigma},-i\varsigma)^b|^a{}_{\alpha_\varsigma}\eta_{ca}\partial_b\Delta(x-x')$
$=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma_{+\varsigma},-i\varsigma)^b|_{c\alpha_\varsigma}\partial_b\Delta(x-x')$ □

6.5.4 复场的部分等时对易规则

推论6.5.1.

$$\begin{cases}[E_i(\vec{r},t),A^+_{c'}(\vec{r}',t)]=i\eta_{ic'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}'),[E^+_{i'}(\vec{r},t),A_c(\vec{r}',t)]=i\eta_{i'c}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [E_i(\vec{r},t),A_c(\vec{r}',t)]=0,[E^+_{i'}(\vec{r},t),A^+_{c'}(\vec{r}',t)]=0\\ [B_i(\vec{r},t),A^+_{c'}(\vec{r}',t)]=0,[B^+_{i'}(\vec{r},t),A_c(\vec{r}',t)]=0\\ [B_i(\vec{r},t),A_c(\vec{r}',t)]=0,[B^+_{i'}(\vec{r},t),A^+_{c'}(\vec{r}',t)]=0\end{cases}$$

推论6.5.2.

$$\begin{cases}[E_i(\vec{r},t),A^+_j(\vec{r}',t)]=i\delta_{ij}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}'),[E^+_i(\vec{r},t),A_j(\vec{r}',t)]=i\delta_{ij}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [E_i(\vec{r},t),A_j(\vec{r}',t)]=0,[E^+_i(\vec{r},t),A^+_j(\vec{r}',t)]=0\\ [E_i(\vec{r},t),E^+_j(\vec{r}',t)]=0,[E^+_i(\vec{r},t),E_j(\vec{r}',t)]=0,[E_i(\vec{r},t),E_j(\vec{r}',t)]=0,[E^+_i(\vec{r},t),E^+_j(\vec{r}',t)]=0\\ [A_i(\vec{r},t),A^+_j(\vec{r}',t)]=0,[A^+_i(\vec{r},t),A_j(\vec{r}',t)]=0,[A_i(\vec{r},t),A_j(\vec{r}',t)]=0,[A^+_i(\vec{r},t),A^+_j(\vec{r}',t)]=0\end{cases}$$

$[\Downarrow]$ $[\Downarrow]$

推论6.5.3.

$$\begin{cases}[E_i(\vec{r},t),B^+_j(\vec{r}',t)]=-i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}'),[E^+_i(\vec{r},t),B_j(\vec{r}',t)]=-i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ [E_i(\vec{r},t),B_j(\vec{r}',t)]=0,[E^+_i(\vec{r},t),B^+_j(\vec{r}',t)]=0\\ [B_i(\vec{r},t),B^+_j(\vec{r}',t)]=0,[B^+_i(\vec{r},t),B_j(\vec{r}',t)]=0,[B_i(\vec{r},t),B_j(\vec{r}',t)]=0,[B^+_i(\vec{r},t),B^+_j(\vec{r}',t)]=0\\ [B_i(\vec{r},t),A^+_j(\vec{r}',t)]=0,[B^+_i(\vec{r},t),A_j(\vec{r}',t)]=0,[B_i(\vec{r},t),A_j(\vec{r}',t)]=0,[B^+_i(\vec{r},t),A^+_j(\vec{r}',t)]=0\end{cases}$$

6.5.5 Majorana实场条件

定理6.5.5.

$$\begin{cases}F_{ab}=F^+_{a'b'}\eta^{a'}_a\eta^{b'}_b\\ \psi_{\alpha_\varsigma}:=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\psi_{\alpha_{-\varsigma}}(x)=-\psi^+_{\alpha_\varsigma}(x)\\ F_{ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma}-\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\psi^+_{\alpha'_\varsigma})\end{cases}$$

6.5.6 Majorana实场完整的对易规则

引理6.5.1.

$$2\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma^{cc'}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_c\partial_{c'}=\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma_{\varsigma\alpha'_\varsigma c'd'}\eta^{cc'}\partial^d\partial^{+d'}=(S_{abcd}-\varsigma\varepsilon_{abcd})(S_{a'b'c'd'}-\varsigma\varepsilon_{a'b'c'd'})\eta^{cc'}\partial^d\partial^{+d'}$$
$$2\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{cc'}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_c\partial_{c'}=\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{-\varsigma\alpha_\varsigma cd}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma c'd'}\eta^{cc'}\partial^d\partial^{+d'}=(S_{abcd}+\varsigma\varepsilon_{abcd})(S_{a'b'c'd'}+\varsigma\varepsilon_{a'b'c'd'})\eta^{cc'}\partial^d\partial^{+d'}$$

证明: $=-\frac{i}{2}\{(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma^{cc'}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{c'c}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma})\partial_c\partial_{c'}\}\Delta(x-x')$
$=-\frac{i}{4}[(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma c'd'}\delta^{dd'}+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma c'd'}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma cd}\delta^{dd'})\partial^c\partial^{c'}]\Delta(x-x')$
$=-\frac{i}{4}[(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}\sigma_{\varsigma\alpha'_\varsigma c'd'}+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{-\varsigma\alpha_\varsigma c'd'}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma cd})\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'}]\Delta(x-x')$
$=-\frac{i}{4}\{[(-S_{abcd}+\varsigma\varepsilon_{abcd})(-S_{a'b'c'd'}+\varsigma\varepsilon_{a'b'c'd'})+(-S_{abcd}-\varsigma\varepsilon_{abcd})(-S_{a'b'c'd'}-\varsigma\varepsilon_{a'b'c'd'})]\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'}\}$
$\Delta(x-x')$
$=-\frac{i}{2}[(S_{abcd}S_{a'b'c'd'}+\varepsilon_{abcd}\varepsilon_{a'b'c'd'})\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'}]\Delta(x-x')$
$=-\frac{i}{2}\{[(\delta_{ac}\delta_{bd}-\delta_{ad}\delta_{bc})(\delta_{a'c'}\delta_{b'd'}-\delta_{a'd'}\delta_{b'c'})+\varepsilon_{abcd}\varepsilon_{a'b'c'd'}]\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'}\}\Delta(x-x')$
$=-\frac{i}{2}[(\delta_{a[c}\delta_{bd]}\delta_{a'[c'}\delta_{b'd']}+\delta_{a[a'}\delta_{bb'}\delta_{cc'}\delta_{dd']})\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'}+m^2\delta_{a[c}\delta_{bd]}\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}]\Delta(x-x')$
$=-i\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\Delta(x-x')$ □

证明: $=-\frac{i}{2}\{(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma^{cc'}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{c'c}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma})\partial_c\partial_{c'}\}\Delta(x-x')$
$=-\frac{i}{4}[(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma c'd'}\delta^{dd'}+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma c'd'}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma cd}\delta^{dd'})\partial^c\partial^{c'}]\Delta(x-x')$
$=-\frac{i}{4}[(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}\sigma_{\varsigma\alpha'_\varsigma c'd'}+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{-\varsigma\alpha_\varsigma c'd'}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma cd})\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'}]\Delta(x-x')$
$=-\frac{i}{4}\{[(-S_{abcd}+\varsigma\varepsilon_{abcd})(-S_{a'b'c'd'}+\varsigma\varepsilon_{a'b'c'd'})+(-S_{abcd}-\varsigma\varepsilon_{abcd})(-S_{a'b'c'd'}-\varsigma\varepsilon_{a'b'c'd'})]\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'}\}$
$\Delta(x-x')$

$= -\frac{i}{2}[(S_{abcd}S_{a'b'c'd'} + \varepsilon_{abcd}\varepsilon_{a'b'c'd'})\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'}]\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2}\{[(\delta_{ac}\delta_{bd}-\delta_{ad}\delta_{bc})(\delta_{a'c'}\delta_{b'd'}-\delta_{a'd'}\delta_{b'c'})+\varepsilon_{abcd}\varepsilon_{a'b'c'd'}]\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'}\}\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2}[(\delta_{a[c}\delta_{bd]}\delta_{a'[c'}\delta_{b'd']}+\delta_{a[a'}\delta_{bb'}\delta_{cc'}\delta_{dd']})\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'} + m^2\delta_{a[c}\delta_{bd]}\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}]\Delta(x-x')$
$= -i\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\Delta(x-x')$ □

定理6.5.6.

$$\begin{cases}[F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')] = -i\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\Delta(x-x')\\ [F_{ab}(x),F_{cd}(x')] = -i\delta_{[a<c}\partial_{b]}\partial_{d>}\Delta(x-x')\\ [F^+_{a'b'}(x),F^+_{c'd'}(x')] = -i\delta_{[a'<c'}\partial^+_{b']}\partial^+_{d'>}\Delta(x-x')\\ F_{ab} = F^+_{a'b'}\eta^{a'}_a\eta^{b'}_b, \psi_{\alpha_\varsigma} := -\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')] = i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{\beta_\varsigma}(x')] = \frac{i}{2}m^2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\Delta(x-x')\\ [\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')] = \frac{i}{2}m^2\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\Delta(x-x')\\ \psi_{\alpha_{-\varsigma}}(x) = -\psi^+_{\alpha_\varsigma}(x), F_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma} - \sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\psi^+_{\alpha'_\varsigma})\end{cases}$$

证明： $[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{\beta_\varsigma}(x')]$
$= [-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}(x), -\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{cd}_{\varsigma\beta_\varsigma}F_{cd}(x')]$
$= \frac{1}{8}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{cd}_{\varsigma\beta_\varsigma}[F_{ab}(x),F_{cd}(x')]$
$= -\frac{i}{8}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{cd}_{\varsigma\beta_\varsigma}\delta_{[a<c}\partial_{b]}\partial_{d>}\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{cd}_{\varsigma\beta_\varsigma}\delta_{ac}\partial_b\partial_d\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2}[\delta^{bd}\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} - \sigma^{bd}_{\varsigma\gamma_\varsigma}\gamma^{\gamma_\varsigma}{}_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}]\partial_b\partial_d\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2}\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\partial_a\partial^a\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2}m^2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\Delta(x-x')$ □

证明： $[\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]$
$= [\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}F^+_{ab}(x), \frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{cd}_{\varsigma\beta'_\varsigma}F^+_{cd}(x')]$
$= [\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}F_{ab}(x), \frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{cd}_{-\varsigma\beta'_\varsigma}F_{cd}(x')]$
$= \frac{1}{8}\sigma^{ab}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}\sigma^{cd}_{-\varsigma\beta'_\varsigma}[F_{ab}(x),F_{cd}(x')]$
$= -\frac{i}{8}\sigma^{ab}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}\sigma^{cd}_{-\varsigma\beta'_\varsigma}\delta_{[a<c}\partial_{b]}\partial_{d>}\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}\sigma^{cd}_{-\varsigma\beta'_\varsigma}\delta_{ac}\partial_b\partial_d\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2}[\delta^{bd}\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma} - \sigma^{bd}_{-\varsigma\gamma'_\varsigma}\gamma^{\gamma'_\varsigma}{}_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}]\partial_b\partial_d\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2}\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\partial_a\partial^a\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2}m^2\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\Delta(x-x')$ □

证明： $[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]$
$= [-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{ab}(x), \frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}F^+_{a'b'}(x')]$
$= -\frac{1}{8}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}[F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]$
$= \frac{i}{8}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}\eta_{aa'}\partial_b\partial^+_{b'}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}\delta_{aa'}\partial_b\partial_{b'}\Delta(x-x')$
$= i\sigma^{bb'}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_b\partial_{b'}\Delta(x-x')$
$= i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$ □

证明： $[F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]$
$= [\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma}(x) - \sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x)), -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x') - \sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\psi_{\alpha_\varsigma}(x'))]$
$= -\frac{1}{2}\{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')] + \sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}[\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi_{\alpha_\varsigma}(x')]$
$- \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{\beta_\varsigma}(x')] - \sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}[\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]\}$
$= -\frac{1}{2}\{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')] - \sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x'),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x)]$
$- \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{\beta_\varsigma}(x')] - \sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}[\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]\}$
$= -\frac{1}{2}\{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}i\sigma^{cd}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_c\partial_d + \sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}i\sigma^{cd}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial'_c\partial'_d - \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\frac{i}{2}m^2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma} - \sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\frac{i}{2}m^2\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\}\Delta(x-x')$

$= -\frac{i}{2}\{(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma^{cc'}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma} + \sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{c'c}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma})\partial_c\partial_{c'} - \frac{1}{2}m^2(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma cd} + \sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{-\varsigma cd})\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}\}\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{4}[(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma c'd'}\delta^{dd'} + \sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma c'd'}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma cd}\delta^{dd'})\partial^c\partial^{c'} + 2m^2 S_{abcd}\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}]\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{4}[(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}\sigma_{\varsigma\alpha'_\varsigma c'd'} + \sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{-\varsigma\alpha_\varsigma c'd'}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma cd})\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'} + 2m^2 S_{abcd}\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}]\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{4}\{[(-S_{abcd}+\varsigma\varepsilon_{abcd})(-S_{a'b'c'd'}+\varsigma\varepsilon_{a'b'c'd'})+(-S_{abcd}-\varsigma\varepsilon_{abcd})(-S_{a'b'c'd'}-\varsigma\varepsilon_{a'b'c'd'})]\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'}+2m^2 S_{abcd}\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}\}$
$\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2}[(S_{abcd}S_{a'b'c'd'} + \varepsilon_{abcd}\varepsilon_{a'b'c'd'})\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'} + m^2 S_{abcd}\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}]\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2}\{[(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc})(\delta_{a'c'}\delta_{b'd'} - \delta_{a'd'}\delta_{b'c'}) + \varepsilon_{abcd}\varepsilon_{a'b'c'd'}]\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'} + m^2(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc})\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}\}\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2}[(\delta_{a[c}\delta_{bd]}\delta_{a'[c'}\delta_{b'd']} + \delta_{a[a'}\delta_{bb'}\delta_{cc'}\delta_{dd']})\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'} + m^2\delta_{a[c}\delta_{bd]}\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}]\Delta(x-x')$
$= -i\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\Delta(x-x')$ □

定理6.5.7.

$$\begin{cases}[F_{ab}(x), A^+_{c'}(x')] = -i\eta_{c'[a}\partial_{b]}\Delta(x-x') \\ [F^+_{a'b'}(x), A_c(x')] = -i\eta_{c[a'}\partial^+_{b']}\Delta(x-x') \\ [F_{ab}(x), A_c(x')] = -i\delta_{c[a}\partial_{b]}\Delta(x-x') \\ [F^+_{a'b'}(x), A^+_{c'}(x')] = -i\delta_{c'[a'}\partial^+_{b']}\Delta(x-x')\end{cases} \quad \begin{cases}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x), A^+_{c'}(x')] = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma_{+\varsigma}, -i\varsigma)^b|_{c'\alpha_\varsigma}\partial_b\Delta(x-x') \\ [\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x), A_c(x')] = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma_{+\varsigma}, -i\varsigma)^b|_{c\alpha'_\varsigma}\partial_b\Delta(x-x') \\ [\psi_{\alpha_\varsigma}(x), A_c(x')] = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^b|_{c\alpha_\varsigma}\partial_b\Delta(x-x') \\ [\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x), A^+_{c'}(x')] = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^b|_{c'\alpha'_\varsigma}\partial_b\Delta(x-x')\end{cases}$$

证明: $[F_{ab}(x), A_c(x')] = [\partial_a A_b(x) - \partial_b A_a(x), A_c(x')]$
$= i(\delta_{bc} - \frac{\partial_b\partial_c}{m^2})\partial_a\Delta(x-x') - i(\delta_{ac} - \frac{\partial_a\partial_c}{m^2})\partial_b\Delta(x-x')$
$= -i\delta_{c[a}\partial_{b]}\Delta(x-x')$ □

证明: $[\psi_{\alpha_\varsigma}(x), A_c(x')] = \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}[F_{ab}(x), A_c(x')]$
$= -i\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\delta_{c[a}\partial_{b]}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\delta_{ca}\partial_b\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma_\varsigma)_{\alpha_\varsigma}|^b{}_c\partial_b\Delta(x-x'), [(\sigma_\varsigma, -i\varsigma)^{\alpha_\varsigma}|_{ab} = (\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)_a|_b{}^{\alpha_\varsigma}]$
$= -\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma_{-\varsigma}, -i\varsigma)^b|_{c\alpha_\varsigma}\partial_b\Delta(x-x')$ □

6.5.7 Majorana实场的部分等时对易规则

推论6.5.4.

$$\begin{cases}[E_i(\vec{r},t), A^+_{c'}(\vec{r}',t)] = i\eta_{ic'}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}'), [E_i(\vec{r},t), A_c(\vec{r}',t)] = i\delta_{ic}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \\ [B_i(\vec{r},t), A^+_{c'}(\vec{r}',t)] = 0, [B_i(\vec{r},t), A_c(\vec{r}',t)] = 0\end{cases}$$

推论6.5.5.

$$\begin{cases}[E_i(\vec{r},t), A_j(\vec{r}',t)] = i\delta_{ij}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \\ [E_i(\vec{r},t), E_j(\vec{r}',t)] = 0, [A_i(\vec{r},t), A_j(\vec{r}',t)] = 0\end{cases} [\Rightarrow] \begin{cases}[E_i(\vec{r},t), B_j(\vec{r}',t)] = -i\varepsilon_{ij}{}^k\partial_k\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \\ [B_i(\vec{r},t), A_j(\vec{r}',t)] = 0\end{cases}$$

6.6 ψ_{α_ς}与$\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}$的等价对易关系

6.6.1 复场与实场的共同对易规则

定理6.6.1.

$$\begin{cases}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x), \psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')] = i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x') \\ \psi_{A_\varsigma B_\varsigma} := \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x), \psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')] \\ = -\frac{i}{2}(\sigma, i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma, i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x') \\ \psi_{\alpha_\varsigma} = \frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}\end{cases}$$

证明: $[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x), \psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]$
$= [\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma}(x), \frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\psi_{\alpha'_\varsigma}(x')]$
$= \frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x), \psi_{\alpha'_\varsigma}(x')]$
$= \frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$

$= \frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{C_\varsigma C'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{D_\varsigma D'_\varsigma}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{C'_\varsigma D'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{8}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\sigma^{C'_\varsigma D'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{C_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{D_\varsigma D'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{8}\delta^{C_\varsigma}_{\{A_\varsigma}\delta^{D_\varsigma}_{B_\varsigma\}}\delta^{C'_\varsigma}_{(A'_\varsigma}\delta^{D'_\varsigma}_{B'_\varsigma)}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{C_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{D_\varsigma D'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{8}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma\}B'_\varsigma)}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$ □

证明: $[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]$
$= [\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]$
$= \frac{1}{2}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]$
$= -\frac{i}{4}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$= i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$ □

6.6.2 复场条件

定理6.6.2.

$$\begin{cases}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{\beta_\varsigma}(x')]=0,[\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\\ \psi_{A_\varsigma B_\varsigma}:=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi_{C_\varsigma D_\varsigma}(x')]=0,[\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x),\psi^+_{C'_\varsigma D'_\varsigma}(x')]=0\\ \psi_{\alpha_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}\end{cases}$$

6.6.3 复场完整的对易规则

定理6.6.3.

$$\begin{cases}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{\beta_\varsigma}(x')]=0,[\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\\ \psi_{A_\varsigma B_\varsigma}:=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]\\ =-\frac{i}{2}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi_{C_\varsigma D_\varsigma}(x')]=0,[\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x),\psi^+_{C'_\varsigma D'_\varsigma}(x')]=0\\ \psi_{\alpha_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}\end{cases}$$

6.6.4 Majorana实场条件

定理6.6.4.

$$\begin{cases}\psi_{\alpha_{-\varsigma}}(x)=-\psi^+_{\alpha_\varsigma}(x)\\ \psi_{A_\varsigma B_\varsigma}:=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\psi??=-\sigma_y\psi^+\sigma_y\\ \psi_{\alpha_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}\end{cases}$$

6.6.5 Majorana实场完整的对易规则

定理6.6.5.

$$\begin{cases}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{\beta_\varsigma}(x')]=\frac{i}{2}m^2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\Delta(x-x')\\ [\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{2}m^2\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\Delta(x-x')\\ \psi_{\alpha_{-\varsigma}}(x)=-\psi^+_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}:=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]\\ =-\frac{i}{2}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi_{C_\varsigma D_\varsigma}(x')]=\frac{i}{8}m^2\varepsilon_{\{A_\varsigma(C_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma\}D_\varsigma)}\Delta(x-x')\\ [\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x),\psi^+_{C'_\varsigma D'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{8}m^2\varepsilon_{\{A'_\varsigma(C'_\varsigma}\varepsilon_{B'_\varsigma\}D'_\varsigma)}\Delta(x-x')\\ \psi_{\alpha_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}\end{cases}$$

6.7 ψ_{k_ς}与$\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}$的等价对易关系

6.7.1 复场与实场的共同对易规则

定理6.7.1.

$$\begin{cases}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]\\ =-\frac{i}{2}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ \psi_{k_\varsigma}=\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]=i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ \psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi_{k_\varsigma}\end{cases}$$

证明： $[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]$
$= [\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\Gamma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]$
$= \Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Gamma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]$
$= -\frac{i}{2}\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Gamma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$= i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$ □

证明： $[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]$
$= [\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi_{k_\varsigma}(x),\Gamma^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(1)\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]$
$= \Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\Gamma^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(1)[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]$
$= \Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\Gamma^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(1)i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2}\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\Gamma^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(1)\Gamma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Gamma^{C'_\varsigma D'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)(\sigma,i\varsigma)^a{}_{C_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{D_\varsigma D'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{8}\delta^{\{C_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{D_\varsigma\}}_{B_\varsigma}\delta^{(C'_\varsigma}_{A'_\varsigma}\delta^{D'_\varsigma)}_{B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{C_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{D_\varsigma D'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{8}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B\}_\varsigma B'_\varsigma)}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$ □

6.7.2 复场条件

定理6.7.2.

$$\begin{cases}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi_{C_\varsigma D_\varsigma}(x')]=0,[\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x),\psi^+_{C'_\varsigma D'_\varsigma}(x')]=0\\ \psi_{k_\varsigma}=\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi_{l_\varsigma}(x')]=0,[\psi^+_{k'_\varsigma}(x),\psi^+_{l'_\varsigma}(x')]=0\\ \psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi_{k_\varsigma}\end{cases}$$

6.7.3 复场完整的对易规则

定理6.7.3.

$$\begin{cases}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]\\ =-\frac{i}{2}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi_{C_\varsigma D_\varsigma}(x')]=0,[\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x),\psi^+_{C'_\varsigma D'_\varsigma}(x')]=0\\ \psi_{k_\varsigma}=\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]=i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{k_\varsigma}(x),\psi_{l_\varsigma}(x')]=0,[\psi^+_{k'_\varsigma}(x),\psi^+_{l'_\varsigma}(x')]=0\\ \psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi_{k_\varsigma}\end{cases}$$

6.7.4 Majorana实场条件

6.7.5 Majorana实场完整的对易规则

定理6.7.4.

$$\begin{cases}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]\\ =-\frac{i}{2}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi_{C_\varsigma D_\varsigma}(x')]=\frac{i}{8}m^2\varepsilon_{\{A_\varsigma(C_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma\}D_\varsigma)}\Delta(x-x')\\ [\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x),\psi^+_{C'_\varsigma D'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{8}m^2\varepsilon_{\{A'_\varsigma(C'_\varsigma}\varepsilon_{B'_\varsigma\}D'_\varsigma)}\Delta(x-x')\\ \psi_{k_\varsigma}=\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]=i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{k_\varsigma}(x),\psi_{l_\varsigma}(x')]=\frac{i}{2}m^2\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(1)\Delta(x-x')\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(x),\psi^+_{l'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{2}m^2\varepsilon_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(1)\Delta(x-x')\\ \psi_{A_\varsigma B_\varsigma}=\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi_{k_\varsigma}\end{cases}$$

6.8 ψ_{α_ς}与ψ_{k_ς}的等价对易关系

6.8.1 复场与实场的共同对易规则

引理6.8.1. $\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}=\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\Gamma^{k'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}(1)\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma},\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}=\Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Gamma^{\alpha'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}$

定理6.8.1.

$$\begin{cases}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ \psi_{k_\varsigma}=\Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi_{\alpha_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]=i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ \psi_{\alpha_\varsigma}=\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\psi_{k_\varsigma}\end{cases}$$

证明：$[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]$
$=[\Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\Gamma^{\alpha'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]$
$=\Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Gamma^{\alpha'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]$
$=\Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\Gamma^{\alpha'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(1)i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$=i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$ □

证明：$[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]$
$=[\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\psi_{k_\varsigma}(x),\Gamma^{k'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}(1)\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]$
$=\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\Gamma^{k'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}(1)[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]$
$=\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\Gamma^{k'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}(1)i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$
$=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$ □

6.8.2 复场条件

定理6.8.2.

$$\begin{cases}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{\beta_\varsigma}(x')]=0,[\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\\ \psi_{k_\varsigma}=\Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi_{\alpha_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi_{l_\varsigma}(x')]=0,[\psi^+_{k'_\varsigma}(x),\psi^+_{l'_\varsigma}(x')]=0\\ \psi_{\alpha_\varsigma}=\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\psi_{k_\varsigma}\end{cases}$$

6.8.3 复场完整的对易规则

定理6.8.3.

$$\begin{cases}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{\beta_\varsigma}(x')]=0,[\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]=0\\ \psi_{k_\varsigma}=\Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi_{\alpha_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]=i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{k_\varsigma}(x),\psi_{l_\varsigma}(x')]=0,[\psi^+_{k'_\varsigma}(x),\psi^+_{l'_\varsigma}(x')]=0\\ \psi_{\alpha_\varsigma}=\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\psi_{k_\varsigma}\end{cases}$$

6.8.4 Majorana实场条件

6.8.5 Majorana实场完整的对易规则

定理6.8.4.

$$\begin{cases}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]=i\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{\beta_\varsigma}(x')]=\frac{i}{2}m^2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}\Delta(x-x')\\ [\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{2}m^2\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\Delta(x-x')\\ \psi_{\alpha_{-\varsigma}}(x)=-\psi^+_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{k_\varsigma}=\Gamma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma}(1)\psi_{\alpha_\varsigma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]=i\Gamma^{ab}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\psi_{k_\varsigma}(x),\psi_{l_\varsigma}(x')]=\frac{i}{2}m^2\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(1)\Delta(x-x')\\ [\psi^+_{k'_\varsigma}(x),\psi^+_{l'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{2}m^2\varepsilon_{k'_\varsigma l'_\varsigma}(1)\Delta(x-x')\\ \psi_{\alpha_\varsigma}=\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}(1)\psi_{k_\varsigma}\end{cases}$$

6.9 有质量复矢量场$\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}$和复势$A_a$的等价对易关系

定理6.9.1. $[\psi_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(x')]=\frac{i}{4}[(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,-i\varsigma)_b^{B'_\varsigma B_\varsigma}\partial_a\partial^b+m^2\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{A'_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}]\Delta(x-x')$
$\Leftrightarrow[\psi_{A_\varsigma B'_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma B_\varsigma}(x')]=\frac{i}{4}[-(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b+m^2\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}]\Delta(x-x')$
$\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}=[im\gamma^a(\varsigma)C\frac{A_a}{2}+S^{ab}(e,\varsigma)C\frac{F_{ab}}{2}]=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]\frac{A_a}{2}$

定理6.9.2.
$[A_a(x),A^+_{a'}(x')]=i(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x'),\psi_{[\lambda_\varsigma\mu_\varsigma]}=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]\frac{A_a}{2}$
$\Leftrightarrow[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x),\psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{8}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')$
$\Rightarrow[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]=-\frac{i}{2}(\sigma,i\varsigma)^a{}_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b{}_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')$

6.10 自旋-1 Majorana粒子从实势出发导出各种物理量对易规则

以下对实场情形才是对的。

引理6.10.1. $F_{ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\psi^+_{\alpha'_\varsigma}+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma}),*F_{ab}=\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}(-\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\psi^+_{\alpha'_\varsigma}-\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma})$

定理6.10.1.
$[A_a(x),A^+_{a'}(x')]=i(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x'),A^+_{a'}=A_a\eta^a_{a'}\Leftrightarrow[A_a(x),A_b(x')]=i(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})\Delta(x-x')$

定理6.10.2. $[A_a(x),A_b(x')]=i(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})\Rightarrow[F_{ab}(x),F_{cd}(x')]=-i\delta_{[a<c}\partial_{b]}\partial_{d>}\Delta(x-x')$

定理6.10.3. $[F_{ab}(x),F_{cd}(x')]=-i\delta_{[a<c}\partial_{b]}\partial_{d>}\Delta(x-x')\Leftrightarrow[F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]=-i\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial_{b'>}\Delta(x-x')$

定理6.10.4. $[*F_{ab}(x),*F^+_{a'b'}(x')]=-i\eta_{[a<a'}(\partial_{b]}\partial^+_{b'>}-\frac{1}{2}m^2\eta_{b]b'>})\Delta(x-x')$

证明: $[*F_{ab}(x),*F^+_{a'b'}(x')]$
$=[\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma}(x)-\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x)),-\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')-\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\psi_{\alpha_\varsigma}(x'))]$
$=-\frac{1}{2}\{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]+\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}[\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi_{\alpha_\varsigma}(x')]$
$+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{\beta_\varsigma}(x')]+\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}[\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]\}$
$=-\frac{i}{2}\{[(\delta_{ac}\delta_{bd}-\delta_{ad}\delta_{bc})(\delta_{a'c'}\delta_{b'd'}-\delta_{a'd'}\delta_{b'c'})+\varepsilon_{abcd}\varepsilon_{a'b'c'd'}]\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'}-m^2(\delta_{ac}\delta_{bd}-\delta_{ad}\delta_{bc})\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}\}\Delta(x-x')$
$=-\frac{i}{2}[(\delta_{a[c}\delta_{bd]}\delta_{a'[c'}\delta_{b'd']}+\delta_{a[a'}\delta_{bb'}\delta_{cc'}\delta_{dd']})\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'}+m^2\delta_{a[c}\delta_{bd]}\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}-2m^2\delta_{a[c}\delta_{bd]}\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}]\Delta(x-x')$
$=-i\eta_{[a<a'}(\partial_{b]}\partial^+_{b'>}-\frac{1}{2}m^2\eta_{b]b'>})\Delta(x-x')$ □

定理6.10.5. $[*F_{ab}(x),*F^+_{a'b'}(x')]=-i\eta_{[a<a'}(\partial_{b]}\partial^+_{b'>}-\frac{1}{2}m^2\eta_{b]b'>})\Delta(x-x')$
$\Leftrightarrow[*F_{ab}(x),*F_{cd}(x')]=-i\delta_{[a<c}(\partial_{b]}\partial_{d>}-\frac{1}{2}m^2\delta_{b]d>})\Delta(x-x')$

证明: $[F_{ab}(x),*F^+_{a'b'}(x')]$
$=[\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\psi_{\alpha_\varsigma}(x)-\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x)),\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\psi_{\alpha_\varsigma}(x'))]$
$=\frac{1}{2}\{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]-\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}[\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi_{\alpha_\varsigma}(x')]$
$+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{\beta_\varsigma}(x')]-\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}[\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]\}$
$=\frac{1}{2}\{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x')]+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x'),\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x)]$
$+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}[\psi_{\alpha_\varsigma}(x),\psi_{\beta_\varsigma}(x')]-\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}[\psi^+_{\alpha'_\varsigma}(x),\psi^+_{\beta'_\varsigma}(x')]\}$
$=\frac{1}{2}\{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}i\sigma^{cd}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_c\partial_d-\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}i\sigma^{cd}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial'_c\partial'_d+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\frac{i}{2}m^2\delta_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}-\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\frac{i}{2}m^2\delta_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}\}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{2}\{(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma^{cc'}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}-\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{c'c}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma})\partial_c\partial_{c'}+\frac{1}{2}m^2(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma cd}-\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{-\varsigma cd})\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}\}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{4}[(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma c'd'}\delta^{dd'}-\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma c'd'}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma cd}\delta^{dd'})\partial^c\partial^{c'}+2m^2\varsigma\varepsilon_{abcd}\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}]\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{4}[(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}\sigma_{\varsigma\alpha'_\varsigma c'd'}-\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{-\varsigma\alpha_\varsigma c'd'}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma cd})\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'}+2m^2\varsigma\varepsilon_{abcd}\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}]\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{4}\{[(-S_{abcd}+\varsigma\varepsilon_{abcd})(-S_{a'b'c'd'}+\varsigma\varepsilon_{a'b'c'd'})-(-S_{abcd}-\varsigma\varepsilon_{abcd})(-S_{a'b'c'd'}-\varsigma\varepsilon_{a'b'c'd'})]\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'}+2m^2\varsigma\varepsilon_{abcd}\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}\}$
$\Delta(x-x')$
$=\frac{-i\varsigma}{2}[(S_{abcd}\varepsilon_{a'b'c'd'}+\varepsilon_{abcd}S_{a'b'c'd'})\eta^{dd'}\partial^c\partial^{+c'}-m^2\varepsilon_{abcd}\eta^c_{a'}\eta^d_{b'}]\Delta(x-x')$ □

6.11 有质量Majorana矢量场对易关系

定义6.11.1. $\psi:=\begin{bmatrix}\lambda&\xi\\\eta&\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_{A_\varsigma B_\varsigma}&\xi_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\\\eta^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}&\varphi^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\end{bmatrix}$

定理6.11.1.
$\psi=\gamma_2\psi^+\gamma_2,\psi=\psi^T\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\lambda&\xi\\\eta&\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^T&\eta^T\\\xi^T&\varphi^T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\lambda^*&\xi^*\\\eta^*&\varphi^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_y\varphi\sigma_y&-\sigma_y\eta\sigma_y\\-\sigma_y\xi\sigma_y&\sigma_y\lambda\sigma_y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\lambda^+&\eta^+\\\xi^+&\varphi^+\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_y\varphi\sigma_y&-\sigma_y\eta\sigma_y\\-\sigma_y\xi\sigma_y&\sigma_y\lambda\sigma_y\end{bmatrix}$

定理6.11.2. $\lambda^+=\sigma_y\varphi\sigma_y,\varphi^+=\sigma_y\lambda\sigma_y,\eta^+=-\sigma_y\eta\sigma_y,\xi^+=-\sigma_y\xi\sigma_y,\eta^T=\xi,\lambda^T=\lambda$

定理6.11.3. $\psi=\gamma_2\psi^+\gamma_2,\psi=\psi^T\Leftrightarrow\lambda^+=\sigma_y\varphi\sigma_y,\eta^+=-\sigma_y\eta\sigma_y,\eta^T=\xi,\lambda^T=\lambda$

定理6.11.4. $\psi:=\begin{bmatrix}\lambda&\eta^T\\\eta&\sigma_y\lambda^*\sigma_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_{A_\varsigma B_\varsigma}&\eta^*_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\\\eta^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}&\lambda^{*A'_\varsigma B'_\varsigma}\end{bmatrix}$
$\lambda^{*A'_\varsigma B'_\varsigma}=(\varsigma\varepsilon^{A'_\varsigma C'_\varsigma})(\varsigma\varepsilon^{B'_\varsigma D'_\varsigma})\lambda^*_{C'_\varsigma D'_\varsigma},\eta^{B'_\varsigma}{}_{A_\varsigma}=\eta^T_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}=\eta^*_{A_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}:=(-\varsigma\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma})(\varsigma\varepsilon^{B'_\varsigma D'_\varsigma})\eta^{*C_\varsigma}{}_{D'_\varsigma}$

证明:

$$\begin{cases}[\lambda_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\lambda^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x')]=-\frac{i}{8}(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma\}B'_\varsigma)}\partial_a\partial_b\Delta(x-x')\\ [\lambda_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\lambda_{C_\varsigma D_\varsigma}(x')]=\frac{i}{8}m^2\varepsilon_{\{A_\varsigma(C_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma\}D_\varsigma)}\Delta(x-x')\\ [\lambda^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x),\lambda^+_{C'_\varsigma D'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{8}m^2\varepsilon_{\{A'_\varsigma(C'_\varsigma}\varepsilon_{B'_\varsigma\}D'_\varsigma)}\Delta(x-x')\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\eta^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}(x),\eta^{+A_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{8}[(\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial^a\partial_b+m^2\delta^{A_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{B'_\varsigma}]\Delta(x-x')\\ [\eta^{A'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}(x),\eta^{B'_\varsigma}{}_{A_\varsigma}(x')]=\frac{i}{8}\{[(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]_a^{A'_\varsigma}{}_{A_\varsigma}[(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]_b^{B'_\varsigma}{}_{B_\varsigma}\partial^a\partial^b+m^2\varepsilon^{A'_\varsigma B'_\varsigma}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\}\Delta(x-x')\\ [\eta^{+A_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}(x),\eta^{+B_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{8}\{[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]_{aA'_\varsigma}{}^{A_\varsigma}[\sigma_y(\sigma,-i\varsigma)]_{bB'_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\partial^a\partial^b+m^2\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{A'_\varsigma B'_\varsigma}\}\Delta(x-x')\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\lambda_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\eta^{+C_\varsigma}{}_{A'_\varsigma}(x')]=-\frac{1}{4}m(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{B_\varsigma\}}\partial_a\Delta(x-x')\\ [\lambda^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x),\eta^{C'_\varsigma}{}_{A_\varsigma}(x')]=\frac{1}{4}m(\sigma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma A'_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{B'_\varsigma\}}\partial_a\Delta(x-x')\\ [\lambda_{A_\varsigma B_\varsigma}(x),\eta^{A'_\varsigma}{}_{C_\varsigma}(x')]=\frac{i}{4}m[(\sigma,-i\varsigma)\sigma_y]_a^{A'_\varsigma}{}_{\{A_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma\}C_\varsigma}\partial^a\Delta(x-x')\\ [\lambda^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma}(x),\eta^{+A_\varsigma}{}_{C'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{4}m[\sigma_y(\sigma,i\varsigma)]_a^{A_\varsigma}{}_{\{A'_\varsigma}\varepsilon_{B'_\varsigma\}C'_\varsigma}\partial^a\Delta(x-x')\end{cases}$$

□

第三十四章　有质量引力微子的协变量子化方案

自我评述：对于Bargmann-Wigner方程描述的粒子，一般来说既可以描述带荷的复粒子，也可以描述不带荷的马约拉纳粒子。两种情形的主对易规则形式一致，但其余对易或反对易括号，对带荷的复粒子一般为零；对不带荷的马约拉纳粒子，其余对易或反对易括号由主对易规则和马约拉纳条件自然得到，一般不为零。在本章只讨论复粒子情形，一般也只给出主对易规则，不再专门讨论马约拉纳粒子情形，若要得到马约拉纳粒子情形的量子场论，只需在复粒子情形加上马约拉纳条件即可自然得到。

1 有质量引力微子两种等价描述的相互转换

1.1 自旋-$\frac{3}{2}$粒子的B-W全对称方程和R-S矢量方程两种等价描述 [18,20,21]

定理1.1.1. $\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=\frac{1}{3!}\psi_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\}}\\ im\frac{A_{a\eta_\varsigma}}{2}=\frac{1}{4}tr[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\gamma^b(\varsigma)\partial_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}=0\\ \gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\frac{A_{a\eta_\varsigma}}{2}\end{cases}$

定理1.1.2. $\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)(\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2})\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)=\frac{1}{2}[(m-i\gamma^ap_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^bp_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}$

1.2 自旋-$\frac{3}{2}$粒子Bargmann-Wigner方程 [18]的平面波解

定理1.2.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{r},t)=0,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{r},t)=\frac{1}{3!}\psi_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\}}(\vec{r},t)$

$$\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=3/2}^{-3/2}\sqrt{\frac{m^3}{E}}[a(\vec{p},h)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},h)V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$\begin{cases}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2})=u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ =\frac{1}{\sqrt{3}}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]\\ U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\\ =\frac{1}{\sqrt{3}}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]\\ U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{3}{2})=u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\end{cases}$$

$$\begin{cases}V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2})=v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ =\frac{1}{\sqrt{3}}[v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]\\ V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\\ =\frac{1}{\sqrt{3}}[v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]\\ V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{3}{2})=v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\end{cases}$$

$$\begin{cases}a(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m^3}{E^5}}U^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},h)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\\ b^+(\vec{p},s)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m^3}{E^5}}V^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},h)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\end{cases}$$

定理1.2.2. $[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(x),\psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma}(x')]$

$=\frac{i}{4}\frac{1}{(3!)^2}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\eta_\varsigma\}\eta'_\varsigma)}\Delta(x-x')$

$=\frac{i}{8}\frac{1}{(3!)^2}\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\eta_\varsigma\}\eta'_\varsigma)}(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')$

定义1.2.1.

$$\begin{cases}\Lambda_{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2}):=\sum\limits_{h=1}^{-1}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},h)U^{+}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma}(\vec{p},h)\\ \Lambda_{-\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2}):=\sum\limits_{h=1}^{-1}V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},h)V^{+}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma}(\vec{p},h)\end{cases}$$

定理1.2.3.

$$\begin{cases}\Lambda_{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2})\\ =\frac{1}{8m^2}\frac{1}{(3!)^2}\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\Lambda_{maa'}(\vec{p},1)\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)\Lambda_{+\eta_\varsigma\}\eta'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{1}{(3!)^2}\Lambda_{+\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{+\eta_\varsigma\}\eta'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \Lambda_{-\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2})\\ =\frac{1}{8m^2}\frac{1}{(3!)^2}\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\Lambda_{maa'}(\vec{p},1)\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(-p)\Lambda_{-\eta_\varsigma\}\eta'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{1}{(3!)^2}\Lambda_{-\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{-\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{-\eta_\varsigma\}\eta'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2})\end{cases}$$

定理1.2.4.

$$\begin{cases}\Lambda_{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2})=\frac{1}{16m^3}\frac{1}{(3!)^2}\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)(\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2})\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)[(m-i\gamma^bp_b)\gamma^4]_{\eta_\varsigma\}\eta'_\varsigma)}\\ =\frac{1}{8m^3}\frac{1}{(3!)^2}[(m-i\gamma^ap_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^bp_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}[(m-i\gamma^bp_b)\gamma^4]_{\eta_\varsigma\}\eta'_\varsigma)}\\ \Lambda_{-\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2})=-\frac{1}{16m^3}\frac{1}{(3!)^2}\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)(\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2})\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(-p)[(m+i\gamma^bp_b)\gamma^4]_{\eta_\varsigma\}\eta'_\varsigma)}\\ =-\frac{1}{8m^3}\frac{1}{(3!)^2}[(m+i\gamma^ap_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m+i\gamma^bp_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}[(m+i\gamma^bp_b)\gamma^4]_{\eta_\varsigma\}\eta'_\varsigma)}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

1.3 推导到自旋-$\frac{3}{2}$粒子R-S方程的平面波解

1.3.1 推导到自旋-$\frac{3}{2}$粒子R-S方程 [18]的平面波解

定理1.3.1. $[\gamma^b(\varsigma)\partial_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}=0,A_a=\frac{1}{2im}(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}$

$$A_{a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=1}^{-1}\sqrt{\frac{m}{2E}}[a(\vec{p},h)\varepsilon_a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$\begin{cases}\varepsilon_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2})=\frac{1}{i\sqrt{2}}u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_au(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \varepsilon_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ =\frac{1}{i\sqrt{6}}[u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_au(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_au(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_au(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]\\ \varepsilon_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\\ =\frac{1}{i\sqrt{6}}[u^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_au(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_au(\vec{p},\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_au(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]\\ \varepsilon_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{3}{2})=\frac{1}{i\sqrt{2}}u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_au(\vec{p},-\frac{1}{2})u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tilde{\varepsilon}_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2})=\frac{1}{i\sqrt{2}}v^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_av(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \tilde{\varepsilon}_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ =\frac{1}{i\sqrt{6}}[v^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_av(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+v^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_av(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+v^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_av(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]\\ \tilde{\varepsilon}_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\\ =\frac{1}{i\sqrt{6}}[v^T(\vec{p},\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_av(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+v^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_av(\vec{p},\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+v^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_av(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]\\ \tilde{\varepsilon}_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{3}{2})=\frac{1}{i\sqrt{2}}v^T(\vec{p},-\frac{1}{2})\bar{C}\gamma_av(\vec{p},-\frac{1}{2})v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\end{cases}$$

引理1.3.1. $\frac{1}{2\sqrt{2}m}U^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\hat{p},h)\mathbb{X}^{+a}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)=\frac{1}{i\sqrt{2}}U^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\hat{p},h)(\bar{C}\gamma_a)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}=\varepsilon_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},h)$

推论1.3.1. $[\gamma^b(\varsigma)\partial_b+m]A_{a[\eta_\varsigma]}=0,\gamma^a(\varsigma)A_{a[\eta_\varsigma]}=0,A_a=\frac{1}{2im}(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}$

$$A_{a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=1}^{-1}\sqrt{\frac{m}{E}}[a(\vec{p},h)\varepsilon_a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$\begin{cases}\varepsilon_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2})=\varepsilon_a(\vec{p},1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\ \varepsilon_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{3}}[\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},0)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\varepsilon_a(\vec{p},1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]\\ \varepsilon_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{3}}[\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},0)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+\varepsilon_a(\vec{p},-1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]\\ \varepsilon_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{3}{2})=\varepsilon_a(\vec{p},-1)u_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tilde{\varepsilon}_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2})=-\varepsilon_a(\vec{p},1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\\\tilde{\varepsilon}_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})=-\frac{1}{\sqrt{3}}[\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},0)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})+\varepsilon_a(\vec{p},1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})]\\\tilde{\varepsilon}_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})=-\frac{1}{\sqrt{3}}[\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},0)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})+\varepsilon_a(\vec{p},-1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})]\\\tilde{\varepsilon}_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{3}{2})=-\varepsilon_a(\vec{p},-1)v_{\eta_\varsigma}(\vec{p},-\frac{1}{2})\end{cases}$$

1.3.2 经典约定下自旋-$\frac{3}{2}$粒子R-S方程反对易关系的推导

定理1.3.2. $\{A_{a_1a_2\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma}(x),\bar{A}_{b_1b_2\cdot\cdot b_n\tau'_\varsigma}(x')\}=i\hat{P}_{a_1\cdot\cdot a_n\tau_\varsigma b_1\cdot\cdot b_n\tau'_\varsigma}(n+\frac{1}{2})\Delta(x-x')$

引理1.3.2.

$$\begin{cases}(m-\kappa\gamma^b\partial_b)(\gamma_a+\kappa\frac{\partial_a}{m})=(\gamma_a-\kappa\frac{\partial_a}{m})(m+\kappa\gamma^b\partial_b)\\(m-\gamma^b\partial_b)(\gamma_a+\frac{\partial_a}{m})=(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(m+\gamma^b\partial_b)\\(m+\gamma^b\partial_b)(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})=(\gamma_a+\frac{\partial_a}{m})(m-\gamma^b\partial_b)\end{cases}$$

证明: $(m-\kappa\gamma^b\partial_b)(\gamma_a+\kappa\frac{\partial_a}{m})$

$=m(\gamma_a+\kappa\frac{\partial_a}{m})-\kappa\gamma^b\gamma_a\partial_b-\frac{\kappa\kappa\gamma^b\partial_b\partial_a}{m}$

$=m(\gamma_a+\kappa\frac{\partial_a}{m})-\kappa\{\gamma^b,\gamma_a\}\partial_b+\kappa\gamma_a\gamma^b\partial_b-\kappa\kappa\frac{\partial_a}{m}\gamma^b\partial_b$

$=m(\gamma_a+\kappa\frac{\partial_a}{m})-2\kappa\delta_a^b\partial_b+\kappa(\gamma_a-\kappa\frac{\partial_a}{m})\gamma^b\partial_b$

$=m(\gamma_a-\kappa\frac{\partial_a}{m})+(\gamma_a-\kappa\frac{\partial_a}{m})\kappa\gamma^b\partial_b$

$=(\gamma_a-\kappa\frac{\partial_a}{m})(m+\kappa\gamma^b\partial_b)$ □

定理1.3.3.

$$\begin{cases}\hat{P}_{a_1\tau_\varsigma b_1\tau'_\varsigma}(\frac{3}{2})=\frac{2}{5}\hat{P}_{aa_1bb_1}(2)[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^a\gamma^b\gamma^4]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\\\hat{P}_{aa_1bb_1}(2)=\frac{1}{8}\{[\delta_{\{a(b}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{(b}}{m^2}][\delta_{a_1\}b_1)}-\frac{\partial_{a_1\}}\partial_{b_1)}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{aa_1\}}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{a_1\}}}{m^2}][\delta_{(bb_1)}-\frac{\partial_{(b}\partial_{b_1)}}{m^2}]\}\Delta(x-x')\end{cases}$$

[⇒]

$\hat{P}_{a\tau_\varsigma b\tau'_\varsigma}(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\{[(\delta_{a_1b_1}-\frac{\partial_{a_1}\partial_{b_1}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_{a_1}-\frac{\partial_{a_1}}{m})(\gamma_{b_1}+\frac{\partial_{b_1}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$

证明: $\hat{P}_{a_1\tau_\varsigma b_1\tau'_\varsigma}(\frac{3}{2})=\frac{2}{5}\hat{P}_{aa_1bb_1}(2)[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^a\gamma^b\gamma^4]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}$

$=\frac{2}{5}\frac{1}{8}\{[\delta_{\{a(b}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{(b}}{m^2}][\delta_{a_1\}b_1)}-\frac{\partial_{a_1\}}\partial_{b_1)}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{aa_1\}}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{a_1\}}}{m^2}][\delta_{(bb_1)}-\frac{\partial_{(b}\partial_{b_1)}}{m^2}]\}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^a\gamma^b\gamma^4]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$=\frac{i}{10}\{[\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2}][\delta_{a_1b_1}-\frac{\partial_{a_1}\partial_{b_1}}{m^2}]+[\delta_{ab_1}-\frac{\partial_a\partial_{b_1}}{m^2}][\delta_{a_1b}-\frac{\partial_{a_1}\partial_b}{m^2}]-\frac{2}{3}[\delta_{aa_1}-\frac{\partial_a\partial_{a_1}}{m^2}][\delta_{bb_1}-\frac{\partial_b\partial_{b_1}}{m^2}]\}$

$\{(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^a\gamma^b\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$=\frac{1}{10}\{(m-\gamma^c\partial_c)[3(\delta_{a_1b_1}-\frac{\partial_{a_1}\partial_{b_1}}{m^2})+(\gamma_{b_1}+\frac{\partial_{b_1}}{m})(\gamma_{a_1}-\frac{\gamma^c\partial_c\partial_{a_1}}{m^2})-\frac{2}{3}(\gamma_{a_1}+\frac{\partial_{a_1}}{m})(\gamma_{b_1}-\frac{\gamma^c\partial_c\partial_{b_1}}{m^2})]\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$=\frac{1}{10}\{[3(\delta_{a_1b_1}-\frac{\partial_{a_1}\partial_{b_1}}{m^2})(m-\gamma^c\partial_c)$

$+(\gamma_{b_1}-\frac{\partial_{b_1}}{m})(m+\gamma^c\partial_c)(\gamma_{a_1}-\frac{\partial_{a_1}}{m})-\frac{2}{3}(\gamma_{a_1}-\frac{\partial_{a_1}}{m})(m+\gamma^c\partial_c)(\gamma_{b_1}-\frac{\partial_{b_1}}{m})]\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$=\frac{1}{10}\{[3(\delta_{a_1b_1}-\frac{\partial_{a_1}\partial_{b_1}}{m^2})(m-\gamma^c\partial_c)$

$+(\gamma_{b_1}-\frac{\partial_{b_1}}{m})(\gamma_{a_1}+\frac{\partial_{a_1}}{m})(m-\gamma^c\partial_c)-\frac{2}{3}(\gamma_{a_1}-\frac{\partial_{a_1}}{m})(\gamma_{b_1}+\frac{\partial_{b_1}}{m})(m-\gamma^c\partial_c)]\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$=\frac{1}{10}\{[3(\delta_{a_1b_1}-\frac{\partial_{a_1}\partial_{b_1}}{m^2})+(\gamma_{b_1}-\frac{\partial_{b_1}}{m})(\gamma_{a_1}+\frac{\partial_{a_1}}{m})-\frac{2}{3}(\gamma_{a_1}-\frac{\partial_{a_1}}{m})(\gamma_{b_1}+\frac{\partial_{b_1}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$=\frac{1}{10}\{[3\delta_{a_1b_1}-\frac{10}{3}\frac{\partial_{a_1}\partial_{b_1}}{m^2}+\{\gamma_{b_1},\gamma_{a_1}\}-\frac{5}{3}\gamma_{a_1}\gamma_{b_1}-\frac{5}{3}(\gamma_{a_1}\frac{\partial_{b_1}}{m}-\gamma_{b_1}\frac{\partial_{a_1}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$=\frac{1}{2}\{[\delta_{a_1b_1}-\frac{2}{3}\frac{\partial_{a_1}\partial_{b_1}}{m^2}-\frac{1}{3}\gamma_{a_1}\gamma_{b_1}-\frac{1}{3}(\gamma_{a_1}\frac{\partial_{b_1}}{m}-\gamma_{b_1}\frac{\partial_{a_1}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$=\frac{1}{2}\{[(\delta_{a_1b_1}-\frac{\partial_{a_1}\partial_{b_1}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_{a_1}-\frac{\partial_{a_1}}{m})(\gamma_{b_1}+\frac{\partial_{b_1}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$=\frac{1}{2}\{(\delta_{a_1b_1}-\frac{\partial_{a_1}\partial_{b_1}}{m^2})[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')-\frac{1}{3}[(\gamma_{a_1}-\frac{\partial_{a_1}}{m})(m+\gamma^c\partial_c)(\gamma_{b_1}-\frac{\partial_{b_1}}{m})\gamma^4]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\}\Delta(x-x')$ □

推论1.3.2. $\hat{P}_{a\tau_\varsigma b'\tau'_\varsigma}(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\{[(\eta_{ab'}-\frac{\partial_a\partial^+_{b'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{b'}+\frac{\partial^+_{b'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$

推论1.3.3.

$$\begin{cases}\{A_{a\tau_\varsigma}(x),\bar{A}_{b\tau'_\varsigma}(x')\}=\frac{i}{2}\{[(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b+\frac{\partial_b}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')\\\{A_{a\tau_\varsigma}(x),A^+_{a'\tau'_\varsigma}(x')\}=\frac{i}{2}\{[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')\\[A_{ab}(x),A^+_{a'b'}(x')]=\frac{i}{8}\{[\eta_{\{a(a'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}-\frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}-\frac{\partial^+_{(a'}\partial^+_{b')}}{m^2}]\}\Delta(x-x')\end{cases}$$

1.3.3 准投影算子间相互关系的对比

定理1.3.4.
$$\begin{cases}\Lambda_{+ma\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2}):=\sum_{h=3/2}^{-3/2}\varepsilon_{a\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{2}{5}\sum_{h=2}^{-2}\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'b'}(\vec{p},h)\gamma^b\Lambda_-(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{b'}\\ \Lambda_{-ma\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2}):=\sum_{h=3/2}^{-3/2}\tilde{\varepsilon}_{a\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\tilde{\varepsilon}^+_{a'\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{2}{5}\sum_{h=2}^{-2}\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'b'}(\vec{p},h)\gamma^b\Lambda_+(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{b'}\\ \Lambda_{\pm\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\Lambda_{\pm ma\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2})\eta^{aa'},\Lambda_{maa'}(\vec{p},1)=\frac{3}{4}(\frac{m}{E})^2\Lambda_{\pm ma\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2})\Lambda_\pm^{\tau'_\varsigma\tau_\varsigma}\end{cases}$$

定理1.3.5.
$$\begin{cases}\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_a(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'}(\vec{p},h)=\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2}\\ \sum_{h=3/2}^{-3/2}\varepsilon_{a\tau_\varsigma}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)=\{[(\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{ip_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{ip^+_{a'}}{m})]\frac{(m-i\gamma^cp_c)\gamma^4}{2m}\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')\\ \sum_{h=2}^{-2}\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'b'}(\vec{p},h)=\frac{1}{4}\{[\eta_{\{a(a'}+\frac{p_{\{a}p^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}+\frac{p_{b\}}p^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}+\frac{p_{\{a}p_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}+\frac{p^+_{(a'}p^+_{b')}}{m^2}]\}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

1.4 再回到自旋-$\frac{3}{2}$粒子Bargmann-Wigner方程 [18]的平面波解

定理1.4.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{r},t)=0,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{r},t)=[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]\frac{A_{a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)}{2}$

$$\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=3/2}^{-3/2}\sqrt{\frac{m^3}{E}}[a(\vec{p},h)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},h)V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{2\sqrt{2}m}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\varepsilon_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},h),V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{2\sqrt{2}m}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\tilde{\varepsilon}_{a\eta_\varsigma}(\vec{p},h)$$

$$\begin{cases}a(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m^3}{E^5}}U^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},h)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\\ b^+(\vec{p},s)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m^3}{E^5}}V^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{p},h)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\end{cases}$$

1.5 自旋-$\frac{3}{2}$粒子场$F_{ab\tau_\varsigma},\psi_{\alpha_\kappa\tau_\varsigma}$的反对易关系

定理1.5.1.
$$\begin{cases}\{A_{a\tau_\varsigma}(x),A^+_{a'\tau'_\varsigma}(x')\}=\frac{i}{2}\{[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')\\ F_{ab\tau_\varsigma}=\partial_aA_{b\tau_\varsigma}-\partial_bA_{a\tau_\varsigma}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\{F_{ab\tau_\varsigma}(x),F^+_{a'b'\tau'_\varsigma}(x')\}=-\frac{i}{2}[(\eta_{[a<a'}-\frac{1}{3}\gamma_{[a}\eta^d_{<a'}\gamma_d)\gamma^c\gamma^4]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\partial_c\Delta(x-x')$$

定理1.5.2.
$$\begin{cases}\{F_{ab\tau_\varsigma}(x),F^+_{a'b'\tau'_\varsigma}(x')\}=-\frac{i}{2}[(\eta_{[a<a'}-\frac{1}{3}\gamma_{[a}\eta^d_{<a'}\gamma_d)\gamma^c\gamma^4]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\partial_c\Delta(x-x')\\ \psi_{\alpha_\kappa\tau_\varsigma}:=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\kappa\alpha_\kappa}F_{ab\tau_\varsigma}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\{\psi_{\alpha_\kappa\tau_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\kappa\tau'_\varsigma}(x')\}=\frac{i}{2}[(\sigma^{ab}_{\alpha_\kappa\alpha'_\kappa}+\frac{1}{6}\sigma^{aa'}_{\kappa\alpha_\kappa}\gamma_{a'}\gamma_{b'}\sigma^{b'b}_{-\kappa\alpha_\kappa})\gamma^c\gamma^4]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\Delta(x-x')$$

2 有质量引力微子的反对易函数、因果函数和费曼传播子

2.1 有质量引力微子反对易函数必须满足的自洽条件

推论2.1.1. $\{A_{a\tau_\varsigma}(x),A^+_{a'\tau'_\varsigma}(x')\}=\Gamma_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\partial)\Delta(x-x')$

$\Leftrightarrow\Gamma^+_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\partial)\Delta(x-x')=\{A_{a\tau_\varsigma}(x),A^+_{a'\tau'_\varsigma}(x')\}^+=\{A_{a'\tau'_\varsigma}(x'),A^+_{a\tau_\varsigma}(x)\}=\Gamma_{a'\tau'_\varsigma a\tau_\varsigma}(\partial')\Delta(x'-x)$

$\Rightarrow\Gamma^+_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\partial)\Delta(x)=-\Gamma_{a'\tau'_\varsigma a\tau_\varsigma}(-\partial)\Delta(x)$

$\simeq\Rightarrow\Gamma^+_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\partial)=-\Gamma_{a'\tau'_\varsigma a\tau_\varsigma}(-\partial)$

推论2.1.2. $\{A_{a\tau_\varsigma}(x),A^+_{a'\tau'_\varsigma}(x')\}|_{t=t'}=\Gamma_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\partial)\Delta(x-x')|_{t=t'}$

$\Leftrightarrow\Gamma^+_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\partial)\Delta(x-x')|_{t=t'}=\{A_{a\tau_\varsigma}(x),A^+_{a'\tau'_\varsigma}(x')\}^+|_{t=t'}=\{A_{a'\tau'_\varsigma}(x'),A^+_{a\tau_\varsigma}(x)\}|_{t'=t}=\Gamma_{a'\tau'_\varsigma a\tau_\varsigma}(\partial')\Delta(x'-x)|_{t'=t}$

$\Rightarrow\Gamma^+_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\partial)\Delta(x)|_{t=0}=-\Gamma_{a'\tau'_\varsigma a\tau_\varsigma}(-\partial)\Delta(x)|_{t=0}$

$\simeq\Rightarrow\Gamma^+_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\partial)=-\Gamma_{a'\tau'_\varsigma a\tau_\varsigma}(-\partial)$

推论2.1.3. $\{A_{a\tau_\varsigma}(\vec{r},t),A^+_{a'\tau'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}=\Gamma_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\nabla)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$
$\Leftrightarrow \Gamma^+_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\nabla)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')=\{A_{a\tau_\varsigma}(\vec{r},t),A^+_{a'\tau'_\varsigma}(\vec{r}',t)\}^+=\{A_{a'\tau'_\varsigma}(\vec{r}',t),A^+_{a\tau_\varsigma}(\vec{r},t)\}=\Gamma_{a'\tau'_\varsigma a\tau_\varsigma}(\nabla')\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})$
$\Rightarrow \Gamma^+_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\nabla)\delta^3(\vec{r})=\Gamma_{a'\tau'_\varsigma a\tau_\varsigma}(-\nabla)\delta^3(\vec{r})$
$\simeq\Rightarrow \Gamma^+_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\nabla)=\Gamma_{a'\tau'_\varsigma a\tau_\varsigma}(-\nabla)$

引理2.1.1. $[(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]^+=(\gamma_{a'}+\frac{\partial_{a'}}{m})(\gamma_b\eta^b_a-\frac{\partial^+_a}{m})(m+\gamma^c\partial_c)\gamma^4$

证明: $[(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]^+$
$=[(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b+\frac{\partial_b}{m})(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]^+\eta^b_{a'}$
$=[(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(m+\gamma^c\partial_c)(\gamma_b-\frac{\partial_b}{m})\gamma^4]^+\eta^b_{a'}$
$=[(m-\gamma^c\partial_c)(\gamma_a+\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b-\frac{\partial_b}{m})\gamma^4]^+\eta^b_{a'}$
$=\gamma^4(\gamma_b-\frac{\partial^+_b}{m})(\gamma_a+\frac{\partial^+_a}{m})(m-\gamma^c\partial^+_c)\eta^b_{a'}$
$=(-\gamma_{b'}\eta^{b'}_b-\frac{\partial^+_b}{m})\gamma^4(\gamma_a+\frac{\partial^+_a}{m})(m-\gamma^c\partial^+_c)\eta^b_{a'}$
$=(-\gamma_{b'}\eta^{b'}_b-\frac{\partial^+_b}{m})\gamma^4(\gamma_a+\frac{\partial^+_a}{m})(m-\gamma^c\partial^+_c)\eta^b_{a'}$
$=(-\gamma_{b'}\eta^{b'}_b-\frac{\partial^+_b}{m})(-\gamma_{a''}\eta^{a''}_a+\frac{\partial^+_a}{m})\gamma^4(m-\gamma^c\partial^+_c)\eta^b_{a'}$
$=(-\gamma_{b'}\eta^{b'}_b-\frac{\partial^+_b}{m})(-\gamma_{a''}\eta^{a''}_a+\frac{\partial^+_a}{m})(m+\gamma^c\partial_c)\gamma^4\eta^b_{a'}$
$=(-\gamma_{a'}-\frac{\partial_{a'}}{m})(-\gamma_{a''}\eta^{a''}_a+\frac{\partial^+_a}{m})(m+\gamma^c\partial_c)\gamma^4$
$=(\gamma_{a'}+\frac{\partial_{a'}}{m})(\gamma_b\eta^b_a-\frac{\partial^+_a}{m})(m+\gamma^c\partial_c)\gamma^4$ □

推论2.1.4. $[i(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\Delta(x-x')]^+=i(\gamma_{a'}-\frac{\partial'_{a'}}{m})(\gamma_b\eta^b_a+\frac{\partial'^+_a}{m})(m-\gamma^c\partial'_c)\gamma^4\Delta(x'-x)$

推论2.1.5. $[i(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\Delta(x)]^+=-i(\gamma_{a'}+\frac{\partial_{a'}}{m})(\gamma_b\eta^b_a-\frac{\partial^+_a}{m})(m+\gamma^c\partial_c)\gamma^4\Delta(x)$

推论2.1.6. $[i(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\Delta(x)|_{t=0}]^+=-i(\gamma_{a'}+\frac{\partial_{a'}}{m})(\gamma_b\eta^b_a-\frac{\partial^+_a}{m})(m+\gamma^c\partial_c)\gamma^4\Delta(x)|_{t=0}$

2.2 关于$\theta(t)$的几个引理及其推论

引理2.2.1. $[\theta(t),\frac{1}{2}\{[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}]=\cdots$

引理2.2.2.
$$\begin{cases}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]\theta(t)\psi(x)=[\theta(t)(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4+i\theta'(t)]\psi(x)\\(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})\theta(t)\psi(x)=[\theta(t)(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})+\theta'(t)\frac{i\delta_{a\pi}}{m}]\psi(x)\\(\gamma_b+\frac{\partial_b}{m})\theta(t)\psi(x)=[\theta(t)(\gamma_b+\frac{\partial_b}{m})-\theta'(t)\frac{i\delta_{b\pi}}{m}]\psi(x)\end{cases}$$

推论2.2.1.
$$\begin{cases}[\theta(t),(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]\Delta(x)=-i\theta'(t)\Delta(x)=0\\ [\theta(t),(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})]\Delta(x)=-\theta'(t)\frac{i\delta_{a\pi}}{m}\Delta(x)=0\\ [\theta(t),(\gamma_b+\frac{\partial_b}{m})]\Delta(x)=\theta'(t)\frac{i\delta_{b\pi}}{m}\Delta(x)=0\end{cases}$$

引理2.2.3. $(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\theta(t)\psi(x)=[\theta(t)(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})+i\theta'(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}-\theta''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}]\psi(x)$

推论2.2.2. $(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]\theta(t)\psi(x)$
$=[\theta(t)(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})+i\theta'(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}-\theta''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\psi(x)$
$+i[\theta'(t)(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})+i\theta''(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}-\theta'''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}]\psi(x)$

推论2.2.3. $(\gamma_b+\frac{\partial_b}{m})[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]\theta(t)\psi(x)$
$=[\theta(t)(\gamma_b+\frac{\partial_b}{m})-\theta'(t)\frac{i\delta_{b\pi}}{m}](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\psi(x)+i[\theta'(t)(\gamma_b+\frac{\partial_b}{m})-\theta''(t)\frac{i\delta_{b\pi}}{m}]\psi(x)$

推论2.2.4. $(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b+\frac{\partial_b}{m})[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]\theta(t)\psi(x)$
$=[\theta(t)(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})+\theta'(t)\frac{i\delta_{a\pi}}{m}](\gamma_b+\frac{\partial_b}{m})(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\psi(x)-[\theta'(t)(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})+\theta''(t)\frac{i\delta_{a\pi}}{m}]\frac{i\delta_{b\pi}}{m}(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\psi(x)$
$+i[\theta'(t)(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})+\theta''(t)\frac{i\delta_{a\pi}}{m}](\gamma_b+\frac{\partial_b}{m})\psi(x)-i[\theta''(t)(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})+\theta'''(t)\frac{i\delta_{a\pi}}{m}]\frac{i\delta_{b\pi}}{m}]\psi(x)$

推论2.2.5. $[\theta(t),\frac{1}{2}\{[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}]\psi(x)$
$=\frac{i}{6}\delta(t)\{[(\gamma_a+\frac{2\partial_a}{m})\frac{\delta_{a'\pi'}}{m}+(\gamma_b\eta^b_{a'}-\frac{2\partial^+_{a'}}{m})\frac{\delta_{a\pi}}{m}](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4+(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})-3(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\}\psi(x)$
$-\frac{1}{6}\delta'(t)[(\gamma_a+\frac{2\partial_a}{m})\frac{\delta_{a'\pi'}}{m}+(\gamma_b\eta^b_{a'}-\frac{2\partial^+_{a'}}{m})\frac{\delta_{a\pi}}{m}-\frac{2\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}\psi(x)$
$+\frac{i}{3}\delta''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}\psi(x)$

证明： $\frac{1}{2}\{[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}\theta(t)\psi(x)$
$=\frac{1}{2}[\theta(t)(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})+i\theta'(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}-\theta''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\psi(x)$
$+\frac{i}{2}[\theta'(t)(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})+i\theta''(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}-\theta'''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}]\psi(x)$
$-\frac{1}{6}\{[\theta(t)(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})+\theta'(t)\frac{i\delta_{a\pi}}{m}](\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4$
$+\frac{1}{6}[\theta'(t)(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})+\theta''(t)\frac{i\delta_{a\pi}}{m}]\frac{-i\delta_{a'\pi'}}{m}(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4$
$-\frac{i}{6}[\theta'(t)(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})+\theta''(t)\frac{i\delta_{a\pi}}{m}](\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})$
$+\frac{i}{6}[\theta''(t)(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})+\theta'''(t)\frac{i\delta_{a\pi}}{m}]\frac{-i\delta_{a'\pi'}}{m}]\}\psi(x)$
$=\frac{1}{2}\theta(t)[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\psi(x)$
$-\frac{i}{6}\theta'(t)\{[(\gamma_a+\frac{2\partial_a}{m})\frac{\delta_{a'\pi'}}{m}+(\gamma_b\eta^b_{a'}-\frac{2\partial^+_{a'}}{m})\frac{\delta_{a\pi}}{m}](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4+(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})-3(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\}\psi(x)$
$+\frac{1}{6}\theta''(t)[(\gamma_a+\frac{2\partial_a}{m})\frac{\delta_{a'\pi'}}{m}+(\gamma_b\eta^b_{a'}-\frac{2\partial^+_{a'}}{m})\frac{\delta_{a\pi}}{m}-\frac{2\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}\psi(x)$
$-\frac{i}{3}\theta'''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}\psi(x)$ □

2.3 关于$\Delta_{\pi\tau_\varsigma k'\tau'_\varsigma}(1;x)|_{t=0}$的求解

引理2.3.1. $\Delta_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(1;x)|_{t=0}=\frac{1}{2}\{[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')|_{t=0}$

证明： $\Delta_{k\tau_\varsigma k'\tau'_\varsigma}(1;x)|_{t=0}$
$=\frac{1}{2}\{[(\eta_{kk'}-\frac{\partial_k\partial^+_{k'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_k-\frac{\partial_k}{m})(\gamma_b\eta^b_{k'}+\frac{\partial^+_{k'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}$
$=-\frac{1}{2}\{[(\eta_{kk'}-\frac{\partial_k\partial^+_{k'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_k-\frac{\partial_k}{m})(\gamma_b\eta^b_{k'}+\frac{\partial^+_{k'}}{m})]\gamma^c\partial_c\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}$
$=-\frac{1}{2}\{[(\eta_{kk'}-\frac{\partial_k\partial^+_{k'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_k-\frac{\partial_k}{m})(\gamma_b\eta^b_{k'}+\frac{\partial^+_{k'}}{m})]\partial_\pi\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}$
$=\frac{i}{2}[(\eta_{kk'}-\frac{\partial_k\partial_{k'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_k-\frac{\partial_k}{m})(\gamma_{k'}+\frac{\partial_{k'}}{m})]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\partial_t\Delta(x)|_{t=0}$
$=-\frac{i}{2}[(\delta_{kk'}-\frac{\partial_k\partial_{k'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_k-\frac{\partial_k}{m})(\gamma_{k'}+\frac{\partial_{k'}}{m})]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\delta^3(\vec{r})$ □

证明： $\Delta_{\pi\tau_\varsigma\pi'\tau'_\varsigma}(1;x)|_{t=0}$
$=\frac{1}{2}\{[(\eta_{\pi\pi'}-\frac{\partial_\pi\partial^+_{\pi'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_\pi-\frac{\partial_\pi}{m})(\gamma_b\eta^b_{\pi'}+\frac{\partial^+_{\pi'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}$
$=\frac{1}{2}\{[(-1-\frac{\partial_t^2}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_4+i\frac{\partial_t}{m})(-\gamma_4+i\frac{\partial_t}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}$
$=-\frac{1}{3}(1+\frac{\partial_t^2}{m^2})[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}$
$=-\frac{1}{3}(1+\frac{\partial_t^2}{m^2})(-\gamma^c\partial_c\gamma^4)_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}$
$=-\frac{i}{3}(1+\frac{\partial_t^2}{m^2})\partial_t\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}$
$=\frac{i}{3}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\frac{\nabla^2}{m^2}\delta^3(\vec{r})$ □

证明： $\Delta_{k\tau_\varsigma\pi'\tau'_\varsigma}(1;x)|_{t=0}$
$=\frac{1}{2}\{[(\eta_{k\pi'}-\frac{\partial_k\partial^+_{\pi'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_k-\frac{\partial_k}{m})(\gamma_b\eta^b_{\pi'}+\frac{\partial^+_{\pi'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}$
$=\frac{1}{2}\{[-i\frac{\partial_k\partial_t}{m^2}-\frac{1}{3}(\gamma_k-\frac{\partial_k}{m})(-\gamma_4+i\frac{\partial_t}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}$
$=\frac{1}{2}\{[-i\frac{\partial_k\partial_t}{m^2}-\frac{i}{3}(\gamma_k-\frac{\partial_k}{m})\frac{\partial_t}{m}+\frac{1}{3}(\gamma_k-\frac{\partial_k}{m})\gamma_4](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}$
$=\frac{1}{2}\{[-i\frac{\partial_k\partial_t}{m^2}-\frac{i}{3}(\gamma_k-\frac{\partial_k}{m})\frac{\partial_t}{m}](m\gamma^4-\vec{\gamma}\gamma^4\cdot\nabla)\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}+\frac{1}{2}[\frac{i}{3}(\gamma_k-\frac{\partial_k}{m})\gamma_4\partial_t]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}$
$=\frac{1}{2}\{[-i\frac{\partial_k}{m^2}-\frac{i}{3}(\gamma_k-\frac{\partial_k}{m})\frac{1}{m}](m\gamma^4-\vec{\gamma}\gamma^4\cdot\nabla)+\frac{1}{2}[\frac{i}{3}(\gamma_k-\frac{\partial_k}{m})\gamma_4]\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\partial_t\Delta(x)|_{t=0}$
$=\frac{1}{2}\{-i\frac{\partial_k}{m}\gamma^4+[i\frac{\partial_k}{m^2}+\frac{i}{3}(\gamma_k-\frac{\partial_k}{m})\frac{1}{m}]\vec{\gamma}\gamma^4\cdot\nabla\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\partial_t\Delta(x)|_{t=0}$
$=\frac{i}{2}\{[-\frac{\partial_k}{m}+\frac{1}{3m}(\gamma_k+\frac{2\partial_k}{m})\vec{\gamma}\cdot\nabla]\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\partial_t\Delta(x)|_{t=0}$
$=\frac{i}{2}\{[\frac{\partial_k}{m}-\frac{1}{3m}(\gamma_k+\frac{2\partial_k}{m})\vec{\gamma}\cdot\nabla]\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\delta^3(\vec{r})$ □

证明： $\Delta_{\pi\tau_\varsigma k'\tau'_\varsigma}(1;x)|_{t=0}$
$= \frac{1}{2}\{[(\eta_{\pi k'}-\frac{\partial_\pi\partial^+_{k'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_\pi-\frac{\partial_\pi}{m})(\gamma_b\eta^b_{k'}+\frac{\partial^+_{k'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}$
$= \frac{1}{2}\{[i\frac{\partial_t\partial_{k'}}{m^2}-\frac{1}{3}(\gamma_4+i\frac{\partial_t}{m})(\gamma_{k'}+\frac{\partial_{k'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}$
$= \frac{1}{2}\{[i\frac{\partial_t\partial_{k'}}{m^2}-\frac{i}{3}\frac{\partial_t}{m}(\gamma_{k'}+\frac{\partial_{k'}}{m})-\frac{1}{3}\gamma_4(\gamma_{k'}+\frac{\partial_{k'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}$
$= \frac{1}{2}\{[i\frac{\partial_t\partial_{k'}}{m^2}-\frac{i}{3}\frac{\partial_t}{m}(\gamma_{k'}+\frac{\partial_{k'}}{m})](m-\vec{\gamma}\cdot\nabla)\gamma^4-\frac{i}{3}\gamma_4(\gamma_{k'}+\frac{\partial_{k'}}{m})\partial_t\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)|_{t=0}$
$= \frac{1}{2}\{[i\frac{\partial_{k'}}{m^2}-\frac{i}{3}\frac{1}{m}(\gamma_{k'}+\frac{\partial_{k'}}{m})](m-\vec{\gamma}\cdot\nabla)\gamma^4-\frac{i}{3}\gamma_4(\gamma_{k'}+\frac{\partial_{k'}}{m})\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\partial_t\Delta(x)|_{t=0}$
$= \frac{i}{2}[\frac{\partial_{k'}}{m}\gamma^4-\frac{\partial_{k'}}{m^2}\vec{\gamma}\cdot\nabla\gamma^4-\frac{1}{3}(\gamma_{k'}+\frac{\partial_{k'}}{m})\gamma^4+\frac{1}{3}\frac{1}{m}(\gamma_{k'}+\frac{\partial_{k'}}{m})\vec{\gamma}\cdot\nabla\gamma^4-\frac{1}{3}\gamma_4(\gamma_{k'}+\frac{\partial_{k'}}{m})]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\partial_t\Delta(x)|_{t=0}$
$= \frac{i}{2}[\frac{\partial_{k'}}{m}\gamma^4-\frac{2}{3}\frac{\partial_{k'}}{m}\gamma^4+\frac{1}{3}\frac{1}{m}(\gamma_{k'}-\frac{2\partial_{k'}}{m})\vec{\gamma}\cdot\nabla\gamma^4]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\partial_t\Delta(x)|_{t=0}$
$= \frac{i}{6}\{[\frac{\partial_{k'}}{m}+\frac{1}{m}(\gamma_{k'}-\frac{2\partial_{k'}}{m})\vec{\gamma}\cdot\nabla]\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\partial_t\Delta(x)|_{t=0}$
$= -\frac{i}{6}\{[\frac{\partial_{k'}}{m}+\frac{1}{m}(\gamma_{k'}-\frac{2\partial_{k'}}{m})\vec{\gamma}\cdot\nabla]\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\delta^3(\vec{r})$ □

2.4 关于$\partial_t\Delta_{\pi\tau_\varsigma k'\tau'_\varsigma}(1;x)|_{t=0}$的求解

引理2.4.1. $\partial_t\Delta_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(1;x)|_{t=0}=\frac{1}{2}\{[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\partial_t\Delta(x-x')|_{t=0}$

证明： $\partial_t\Delta_{k\tau_\varsigma k'\tau'_\varsigma}(1;x)|_{t=0}=-\frac{1}{2}\{[(\delta_{kk'}-\frac{\partial_k\partial_{k'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_k-\frac{\partial_k}{m})(\gamma_{k'}+\frac{\partial_{k'}}{m})](m-\vec{\gamma}\cdot\nabla)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\delta^3(\vec{r})$ □

2.5 关于$A_{a\tau_\varsigma}(x)$的反对易函数、因果函数和费曼传播子

推论2.5.1. $\{A_{a\tau_\varsigma}(x),A^+_{a'\tau'_\varsigma}(x')\}=\frac{i}{2}\{[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$

推论2.5.2.

$$\begin{cases}\Delta_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(1;x):=\frac{1}{2}\{[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x)\\ \Delta^{(+)}_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(1;x):=\frac{1}{2}\{[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta^{(-)}_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(1;x):=\frac{1}{2}\{[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{(l)}_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(1;x):=\frac{1}{2}\{[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta^{(l)}(x)\end{cases}$$

推论2.5.3.

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(1;x):=\frac{1}{2}\{[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta^{(c)}(x)+\sum_{k=0}^{2}\delta^{(k)}(t)f_k(\partial)\Delta(x)\\ \Delta^{(F)}_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(1;x):=\frac{1}{2}\{[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta^{(F)}(x)+i\sum_{k=0}^{2}\delta^{(k)}(t)f_k(\partial)\Delta(x)\\ \Delta^{(ret)}_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(1;x):=\frac{1}{2}\{[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta^{(ret)}(x)+\sum_{k=0}^{2}\delta^{(k)}(t)f_k(\partial)\Delta(x)\\ \Delta^{(adv)}_{a\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(1;x):=\frac{1}{2}\{[(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b\eta^b_{a'}+\frac{\partial^+_{a'}}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta^{(adv)}(x)+\sum_{k=0}^{2}\delta^{(k)}(t)f_k(\partial)\Delta(x)\end{cases}$$

推论2.5.4.

$$\begin{cases}(\gamma^c\partial_c+m)\Delta_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)=0,\gamma^a\Delta_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)=0\\ (\gamma^c\partial_c+m)\Delta^{(+)}_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)=0,\gamma^a\Delta^{(+)}_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)=0\\ (\gamma^c\partial_c+m)\Delta^{(-)}_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)=0,\gamma^a\Delta^{(-)}_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)=0\end{cases}$$

推论2.5.5.

$$\begin{cases}(\gamma^c\partial_c+m)\Delta^{(c)}_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)=-i\gamma^4\delta(t)\Delta_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)|_{t=0},\gamma^a\Delta^{(c)}_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)=0\\ (\gamma^c\partial_c+m)\Delta^{(F)}_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)=\gamma^4\delta(t)\Delta_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)|_{t=0},\gamma^a\Delta^{(F)}_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)=0\\ (\gamma^c\partial_c+m)\Delta^{(ret)}_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)=-i\gamma^4\delta(t)\Delta_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)|_{t=0},\gamma^a\Delta^{(ret)}_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)=0\\ (\gamma^c\partial_c+m)\Delta^{(adv)}_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)=-i\gamma^4\delta(t)\Delta_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)|_{t=0},\gamma^a\Delta^{(adv)}_{a[\tau_\varsigma]a'\tau'_\varsigma}(n;x)=0\end{cases}$$

2.6 有质量引力微子场能量动量算符的提取

定理2.6.1. $P_u(\frac{3}{2})=\int\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u}{m^2-\nabla^2}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

定理2.6.2. $P_u(\frac{3}{2})=\int[\frac{1}{2}F^{+ab\eta_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u}{m^2-\nabla^2}F_{ab\eta_\varsigma}(\vec{r},t)+m^2A^{+a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u}{m^2-\nabla^2}A_{a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$

证明： $P_u(\frac{3}{2})=\int\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u}{m^2-\nabla^2}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\int\{\bar{C}[-im\gamma^{a'}(\varsigma)-2S^{a'b'}(e,\varsigma)\partial^+_{b'}]\}^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\frac{A^{+\eta_\varsigma}_{a'}(\vec{r},t)}{2}\frac{-i\partial_u}{m^2-\nabla^2}[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ab}(e,\varsigma)C\partial_b]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\frac{A_{a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)}{2}d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{4}\int tr\{\bar{C}[-im\gamma^{a'}(\varsigma)-2S^{a'b'}(e,\varsigma)\partial^+_{b'}]A^{+\eta_\varsigma}_{a'}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u}{m^2-\nabla^2}[im\gamma^a(\varsigma)-2S^{ab}(e,\varsigma)\partial_b]CA_{a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{4}\int tr\{[-im\gamma^{a'}(\varsigma)-2S^{a'b'}(e,\varsigma)\partial^+_{b'}]A^{+\eta_\varsigma}_{a'}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u}{m^2-\nabla^2}[im\gamma^a(\varsigma)-2S^{ab}(e,\varsigma)\partial_b]A_{a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{4}\int tr\{[-im\gamma^{a'}(\varsigma)-2S^{a'b'}(e,\varsigma)\partial^+_{b'}]A^{+\eta_\varsigma}_{a'}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u}{m^2-\nabla^2}[im\gamma^a(\varsigma)-2S^{ab}(e,\varsigma)\partial_b]A_{a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$=\int m^2A^{+a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u}{m^2-\nabla^2}A_{a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}+\int S^{a'b'ab}\partial^+_{b'}A^{+\eta_\varsigma}_{a'}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u}{m^2-\nabla^2}\partial_bA_{a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

$=\int m^2A^{+a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u}{m^2-\nabla^2}A_{a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$+\frac{1}{4}\int S^{a'b'ab}[\partial^+_{a'}A^{+\eta_\varsigma}_{b'}(\vec{r},t)-\partial^+_{b'}A^{+\eta_\varsigma}_{a'}(\vec{r},t)]\frac{-i\partial_u}{m^2-\nabla^2}[\partial_aA_{b\eta_\varsigma}(\vec{r},t)-\partial_bA_{a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)]\}d^3\vec{r}$

$=\int m^2A^{+a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u}{m^2-\nabla^2}A_{a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}+\frac{1}{4}\int(\delta^{a'a}\delta^{b'b}-\delta^{a'b}\delta^{b'a})F^{+\eta_\varsigma}_{a'b'}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u}{m^2-\nabla^2}F_{ab\eta_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\int[\frac{1}{2}F^{+ab\eta_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u}{m^2-\nabla^2}F_{ab\eta_\varsigma}(\vec{r},t)+m^2A^{+a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u}{m^2-\nabla^2}A_{a\eta_\varsigma}(\vec{r},t)]d^3\vec{r}$ □

第三十五章　有质量引力子的协变量子化方案

自我评述：对于Bargmann-Wigner方程描述的粒子，一般来说既可以描述带荷的复粒子，也可以描述不带荷的马约拉纳粒子。两种情形的主对易规则形式一致，但其余对易或反对易括号，对带荷的复粒子一般为零；对不带荷的马约拉纳粒子，其余对易或反对易括号由主对易规则和马约拉纳条件自然得到，一般不为零。在本章只讨论复粒子情形，一般也只给出主对易规则，不再专门讨论马约拉纳粒子情形，若要得到马约拉纳粒子情形的量子场论，只需在复粒子情形加上马约拉纳条件即可自然得到。

1 有质量引力子两种等价描述的相互转换

1.1 自旋-2粒子的B-W全对称方程和K-G矢量方程两种等价描述 [18,20,23]

定义1.1.1. $\mathbb{X}_a(x) := [im\gamma_a(\varsigma) - 2S_{ab}(e,\varsigma)\partial^b]C, \mathbb{X}_a(p) := i[m\gamma_a(\varsigma) - 2S_{ab}(e,\varsigma)p^b]C, C = \gamma_2\gamma_4$

定理1.1.1.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a + m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = 0, \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = \frac{1}{4!}\psi_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}} \\ A_{ab} = \frac{1}{(2im)^2}[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)]^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[\bar{C}\gamma_b(\varsigma)]^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} \\ C = \gamma_2(\varsigma)\gamma_4(\varsigma)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\partial^c F_{c|ab} + m^2 A_{ab} = 0, F_{c|ab} = \partial_c A_{ab} - \partial_a A_{cb} \\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = \frac{1}{4}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x)A_{ab} \\ A_{ab} = A_{ba}, \delta^{ab}A_{ab} = 0\end{cases}$$

1.2 自旋-2粒子Bargmann-Wigner方程 [18]的平面波解

定理1.2.1. $(\gamma^a\partial_a + m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{r},t) = 0, \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{r},t) = \frac{1}{4!}\psi_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}(\vec{r},t)$

$$\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=1}^{-1}\sqrt{\frac{m^4}{E}}[a(\vec{p},h)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b^+(\vec{p},h)V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$\begin{cases}a(\vec{p},h) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m^4}{E^7}}U^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{p},h)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{r},t)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r} \\ b^+(\vec{p},s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m^4}{E^7}}V^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{p},h)\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{r},t)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\end{cases}$$

定理1.2.2. $[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x), \psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(x')]$

$$= \frac{i}{2^3}\frac{1}{(4!)^2}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]_{\xi_\varsigma\}\xi'_\varsigma)}\Delta(x-x')$$

$$= \frac{i}{2^5}\frac{1}{(4!)^2}\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}(x)\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma)}(x')(\eta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})(\eta_{bb'} - \frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2})\Delta(x-x')$$

定义1.2.1.

$$\begin{cases}\Lambda_{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(\vec{p},2) := \sum_{h=2}^{-2}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{p},h)U^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(\vec{p},h) \\ \Lambda_{-\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(\vec{p},2) := \sum_{h=2}^{-2}V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{p},h)V^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(\vec{p},h)\end{cases}$$

定理1.2.3.

$$\begin{cases}\Lambda_{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(\vec{p},2) = \frac{1}{(4!)^2}\Lambda_{+\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{+\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{+\xi_\varsigma\}\xi'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2}) \\ = \frac{1}{2^6m^4}\frac{1}{(4!)^2}\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}(p)\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma)}(p)\Lambda_{maa'}(\vec{p},1)\Lambda_{mbb'}(\vec{p},1) \\ \Lambda_{-\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(\vec{p},2) = \frac{1}{(4!)^2}\Lambda_{-\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{-\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{-\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{-\xi_\varsigma\}\xi'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2}) \\ = \frac{1}{2^6m^4}\frac{1}{(4!)^2}\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}(-p)\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma)}(-p)\Lambda_{maa'}(\vec{p},1)\Lambda_{mbb'}(\vec{p},1)\end{cases}$$

定理1.2.4.

$$\begin{cases}\Lambda_{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(\vec{p},2)\\ =\frac{1}{(2m)^4}\frac{1}{(4!)^2}[(m-i\gamma^a p_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}[(m-i\gamma^a p_a)\gamma^4]_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_b)\gamma^4]_{\xi_\varsigma\}\xi'_\varsigma)}\\ =\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^4}\frac{1}{(4!)^2}\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}(p)\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma)}(p)(\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2})(\eta_{bb'}+\frac{p_bp^+_{b'}}{m^2})\\ \Lambda_{-\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(\vec{p},2)\\ =\frac{1}{(2m)^4}\frac{1}{(4!)^2}[(-m-i\gamma^a p_a)\gamma^4]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m-i\gamma^b p_b)\gamma^4]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}[(-m-i\gamma^a p_a)\gamma^4]_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}[(-m-i\gamma^b p_b)\gamma^4]_{\xi_\varsigma\}\xi'_\varsigma)}\\ =\frac{1}{(2\sqrt{2}m)^4}\frac{1}{(4!)^2}\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}(-p)\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(-p)\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma)}(-p)(\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2})(\eta_{bb'}+\frac{p_bp^+_{b'}}{m^2})\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

1.3 推导到自旋-2粒子Klein-Gordon方程 [18]的平面波解

定理1.3.1.

$$\begin{cases}\partial^c F_{c|ab}+m^2A_{ab}=0,F_{c|ab}=\partial_cA_{ab}-\partial_aA_{cb},\delta^{ab}A_{ab}=0,A_{ab}=A_{ba}\\ A_{ab}=(\frac{1}{2im})^2(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\end{cases}$$

$$A_{ab}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=2}^{-2}\frac{1}{\sqrt{2^2E}}\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)[a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^2}(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{(i\sqrt{2})^2}(\bar{C}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{C}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{p},h)$$

推论1.3.1.

$$\begin{cases}\varepsilon_{ab}(\vec{p},2)=\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},1)\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},1)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},0)+\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},1)]\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},0)=\frac{1}{\sqrt{6}}[\varepsilon_a(\vec{p},1)\varepsilon_b(\vec{p},-1)+\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon_b(\vec{p},1)+2\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},0)]\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon_b(\vec{p},0)+\varepsilon_a(\vec{p},0)\varepsilon_b(\vec{p},-1)]\\ \varepsilon_{ab}(\vec{p},-2)=\varepsilon_a(\vec{p},-1)\varepsilon_b(\vec{p},-1)\end{cases}$$

性质1.3.1. $\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)=\varepsilon_{ba}(\vec{p},h),\delta^{ab}\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)=0$

定理1.3.2. $\sum\limits_{h=2}^{-2}\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'b'}(\vec{p},h)=\frac{1}{4}\{[\eta_{\{a(a'}+\frac{p_{\{a}p^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}+\frac{p_{b\}}p^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}+\frac{p_{\{a}p_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}+\frac{p^+_{(a'}p^+_{b')}}{m^2}]\}$

定理1.3.3. $[A_{ab}(x),A^+_{a'b'}(x')]=\frac{i}{8}\{[\eta_{\{a(a'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}-\frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}-\frac{\partial^+_{(a'}\partial^+_{b')}}{m^2}]\}\Delta(x-x')$

定理1.3.4. $\{A_{a\tau_\varsigma}(x),\bar{A}_{b\tau'_\varsigma}(x')\}=\frac{i}{2}\{[(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})-\frac{1}{3}(\gamma_a-\frac{\partial_a}{m})(\gamma_b+\frac{\partial_b}{m})](m-\gamma^c\partial_c)\gamma^4\}_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$

定理1.3.5. $[A_a(x),\bar{A}_b(x')]=i(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})\Delta(x-x')$

引理1.3.1. $\eta^{bb'}=\delta^{bb'}-2\delta^{b4}\delta^{b'4}$

定理1.3.6. $\Lambda_{\pm\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{1}{5}\Lambda_{maba'b'}(\vec{p},2)\eta^{bb'}\gamma^a\Lambda_{\mp}(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{a'}$

定理1.3.7. $\Lambda_{\pm ma\tau_\varsigma a'\tau'_\varsigma}(\vec{p},\frac{3}{2})=\frac{2}{5}\Lambda_{maba'b'}(\vec{p},2)\gamma^b\Lambda_{\mp}(\vec{p},\frac{1}{2})\gamma^{b'}$

定理1.3.8. $\Lambda_{maa'}(\vec{p},1)=\frac{3}{5}\Lambda_{maba'b'}(\vec{p},2)\eta^{bb'}$

$$\Downarrow$$

1.4 再回到自旋-2粒子Bargmann-Wigner方程 [18]的平面波解

定理1.4.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{r},t)=0,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{r},t)=\frac{1}{4}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x)A_{ab}(\vec{r},t)$

$$\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=2}^{-2}\sqrt{\frac{m^4}{E}}[a(\vec{p},h)U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},h)V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{8m^2}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(p)\varepsilon_{ab}(\vec{p},h),V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{p},h)=\frac{1}{8m^2}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(-p)\varepsilon_{ab}(\vec{p},h)$$

2 有质量引力子的对易函数、因果函数和费曼传播子

2.1 有质量引力子对易函数必须满足的自洽条件

推论2.1.1. $\{A_{ab}(x), A^+_{a'b'}(x')\} = \Gamma_{aba'b'}(\partial)\Delta(x-x')$
$\Leftrightarrow \Gamma^+_{aba'b'}(\partial)\Delta(x-x') = \{A_{ab}(x), A^+_{a'b'}(x')\}^+ = \{A_{a'b'}(x'), A^+_{ab}(x)\} = \Gamma_{a'b'ab}(\partial')\Delta(x'-x)$
$\Rightarrow \Gamma^+_{aba'b'}(\partial)\Delta(x) = -\Gamma_{a'b'ab}(-\partial)\Delta(x)$
$\simeq\Rightarrow \Gamma^+_{aba'b'}(\partial) = -\Gamma_{a'b'ab}(-\partial)$

推论2.1.2. $\{A_{ab}(x), A^+_{a'b'}(x')\}|_{t=t'} = \Gamma_{aba'b'}(\partial)\Delta(x-x')|_{t=t'}$
$\Leftrightarrow \Gamma^+_{aba'b'}(\partial)\Delta(x-x')|_{t=t'} = \{A_{ab}(x), A^+_{a'b'}(x')\}^+|_{t=t'} = \{A_{a'b'}(x'), A^+_{ab}(x)\}|_{t'=t} = \Gamma_{a'b'ab}(\partial')\Delta(x'-x)|_{t'=t}$
$\Rightarrow \Gamma^+_{aba'b'}(\partial)\Delta(x)|_{t=0} = -\Gamma_{a'b'ab}(-\partial)\Delta(x)|_{t=0}$
$\simeq\Rightarrow \Gamma^+_{aba'b'}(\partial) = -\Gamma_{a'b'ab}(-\partial)$

推论2.1.3. $\{A_{ab}(\vec{r},t), A^+_{a'b'}(\vec{r}',t)\} = \Gamma_{aba'b'}(\nabla)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$
$\Leftrightarrow \Gamma^+_{aba'b'}(\nabla)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') = \{A_{ab}(\vec{r},t), A^+_{a'b'}(\vec{r}',t)\}^+ = \{A_{a'b'}(\vec{r}',t), A^+_{ab}(\vec{r},t)\} = \Gamma_{a'b'ab}(\nabla')\delta^3(\vec{r}'-\vec{r})$
$\Rightarrow \Gamma^+_{aba'b'}(\nabla)\delta^3(\vec{r}) = \Gamma_{a'b'ab}(-\nabla)\delta^3(\vec{r})$
$\simeq\Rightarrow \Gamma^+_{aba'b'}(\nabla) = \Gamma_{a'b'ab}(-\nabla)$

推论2.1.4. $\delta^{ab}\Gamma_{aba'b'}(\partial)\Delta(x) = 0 \Leftrightarrow \delta^{a'b'}\Gamma_{aba'b'}(\partial)\Delta(x) = 0$

证明: $\delta^{ab}\Gamma_{aba'b'}(\partial)\Delta(x) = 0$
$\Leftrightarrow [\delta^{ab}\Gamma_{aba'b'}(\partial)\Delta(x)]^+ = 0$
$\Leftrightarrow -\delta^{ab}\Gamma_{a'b'ab}(-\partial)\Delta(x) = 0$
$\Leftrightarrow \delta^{ab}\Gamma_{a'b'ab}(-\partial)\Delta(-x) = 0$
$\Leftrightarrow \delta^{ab}\Gamma_{a'b'ab}(\partial)\Delta(x) = 0$
$\Leftrightarrow \delta^{a'b'}\Gamma_{aba'b'}(\partial)\Delta(x) = 0$ □

推论2.1.5. $\partial^a\Gamma_{aba'b'}(\partial)\Delta(x) = 0 \Leftrightarrow \partial^{+a'}\Gamma_{aba'b'}(\partial)\Delta(x) = 0$

证明: $\partial^a\Gamma_{aba'b'}(\partial)\Delta(x) = 0$
$\Leftrightarrow [\partial^{+a}\Gamma_{aba'b'}(\partial)\Delta(x)]^+ = 0$
$\Leftrightarrow -\partial^{+a}\Gamma_{a'b'ab}(-\partial)\Delta(x) = 0$
$\Leftrightarrow \partial^{+a}\Gamma_{a'b'ab}(-\partial)\Delta(-x) = 0$
$\Leftrightarrow -\partial^{+a}\Gamma_{a'b'ab}(\partial)\Delta(x) = 0$
$\Leftrightarrow \partial^{+a'}\Gamma_{aba'b'}(\partial)\Delta(x) = 0$ □

2.2 关于$\theta(t)$的几个引理及其推论

引理2.2.1.

$$\begin{cases}(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})\theta(t)\psi(x) = [\theta(t)(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2}) + i\theta'(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2} + \theta''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}]\psi(x)\\ (\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\theta(t)\psi(x) = [\theta(t)(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}) + i\theta'(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2} - \theta''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}]\psi(x)\\ (\delta_{a'b'}-\frac{\partial_{a'}\partial_{b'}}{m^2})\theta(t)\psi(x) = [\theta(t)(\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2}) - i\theta'(t)\frac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2} + \theta''(t)\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}]\psi(x)\end{cases}$$

证明: $(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})\theta(t)\psi(x)$
$= [\delta_{ab}\theta(t) - \frac{\partial_a\theta(t)\partial_b}{m^2} + \frac{i\partial_a\delta_{b\pi}\delta(t)}{m^2}]\psi(x)$
$= [\theta(t)\delta_{ab} - \theta(t)\frac{\partial_a\partial_b}{m^2} + \frac{i\delta_{a\pi}\delta(t)\partial_b}{m^2} + \frac{i\delta(t)\partial_a\delta_{b\pi}}{m^2} + \frac{\delta'(t)\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}]\psi(x)$
$= [\theta(t)(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2}) + i\delta(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2} + \delta'(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}]\psi(x)$
$= [\theta(t)(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2}) + i\theta'(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2} + \theta''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}]\psi(x)$ □

推论2.2.1.

$$\begin{cases}[\theta(t),(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})]\Delta(x)=-[i\theta'(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}+\theta''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}]\Delta(x)=\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}\delta^4(x)\\ [\theta(t),(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})]\Delta(x)=-[i\theta'(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}-\theta''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}]\Delta(x)=-\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}\delta^4(x)\\ [\theta(t),(\delta_{a'b'}-\frac{\partial_{a'}\partial_{b'}}{m^2})]\Delta(x)=-[-i\theta'(t)\frac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}+\theta''(t)\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}]\Delta(x)=\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}\delta^4(x)\end{cases}$$

推论2.2.2. $(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})(\delta_{a'b'}-\frac{\partial_{a'}\partial_{b'}}{m^2})\theta(t)\psi(x)$

$$\begin{aligned}&=\{\theta(t)(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})(\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})\\&+i\theta'(t)[\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}(\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})-\frac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})]\\&+\theta''(t)[\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}(\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})+\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}\frac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}+\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})]\\&-i\theta'''(t)[\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}\frac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}-\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}]\\&+\theta''''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}\}\psi(x)\end{aligned}$$

证明: $(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})(\delta_{a'b'}-\frac{\partial_{a'}\partial_{b'}}{m^2})\theta(t)\psi(x)$

$$\begin{aligned}&=(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})[\theta(t)(\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})-i\theta'(t)\frac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}+\theta''(t)\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}]\psi(x)\\&=\{[\theta(t)(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})+i\theta'(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}+\theta''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}](\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})\\&-i[\theta'(t)(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})+i\theta''(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}+\theta'''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}]\frac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}\\&+[\theta''(t)(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})+i\theta'''(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}+\theta''''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}]\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}\}\psi(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\{\theta(t)(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})(\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})+i\theta'(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}(\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})+\theta''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}(\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})\\&-i\theta'(t)(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})\frac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}+\theta''(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}\frac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}-i\theta'''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}\frac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}\\&+\theta''(t)(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}+i\theta'''(t)\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}+\theta''''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}\}\psi(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\{\theta(t)(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})(\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})\\&+i\theta'(t)[\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}(\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})-\frac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})]\\&+\theta''(t)[\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}(\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})+\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}\frac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}+\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})]\\&-i\theta'''(t)[\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}\frac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}-\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}]\\&+\theta''''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}\}\psi(x)\end{aligned}$$

□

推论2.2.3. $(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})[\eta_{bb'}-\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2}]\theta(t)\psi(x)$

$$\begin{aligned}&=\{\theta(t)(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})(\eta_{bb'}-\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2})\\&+i\theta'(t)[\frac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}(\eta_{bb'}-\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2})+\frac{(\delta_{b\pi}\partial^+_{b'}-\partial_b\delta_{b'\pi'})}{m^2}(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})]\\&-\theta''(t)[\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}(\eta_{bb'}-\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2})+\frac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}\frac{(\delta_{b\pi}\partial^+_{b'}-\partial_b\delta_{b'\pi'})}{m^2}+\frac{\delta_{b\pi}\delta_{b'\pi'}}{m^2}(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})]\\&-i\theta'''(t)[\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}\frac{(\delta_{b\pi}\partial^+_{b'}-\partial_b\delta_{b'\pi'})}{m^2}+\frac{\delta_{b\pi}\delta_{b'\pi'}}{m^2}\frac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}]\\&+\theta''''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}\frac{\delta_{b\pi}\delta_{b'\pi'}}{m^2}\}\psi(x)\end{aligned}$$

定理2.2.1. $[\theta(t),\frac{1}{8}\{[\eta_{\{a(a'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}-\frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}-\frac{\partial^+_{(a'}\partial^+_{b')}}{m^2}]\}]$

$$\begin{aligned}&=-\frac{1}{8}\{i\delta(t)\{[\frac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}(\eta_{bb'}-\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2})+\frac{(\delta_{b\pi}\partial^+_{b'}-\partial_b\delta_{b'\pi'})}{m^2}(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})]\\&-\frac{1}{3}[\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}(\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})-\frac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})]\}\\&-\delta'(t)\{[\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}(\eta_{bb'}-\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2})+\frac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}\frac{(\delta_{b\pi}\partial^+_{b'}-\partial_b\delta_{b'\pi'})}{m^2}+\frac{\delta_{b\pi}\delta_{b'\pi'}}{m^2}(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})]\\&-\frac{1}{3}[\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}(\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})+\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}\frac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}+\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})]\}\\&-i\delta''(t)\{[\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}\frac{(\delta_{b\pi}\partial^+_{b'}-\partial_b\delta_{b'\pi'})}{m^2}+\frac{\delta_{b\pi}\delta_{b'\pi'}}{m^2}\frac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}]-\frac{1}{3}[\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}\frac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}-\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}]\}\\&+\delta'''(t)[\frac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}\frac{\delta_{b\pi}\delta_{b'\pi'}}{m^2}-\frac{1}{3}\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}\frac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}]\}|^{(a'b')}_{\{ab\}}\end{aligned}$$

证明: $\frac{1}{8}\{[\eta_{\{a(a'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}-\frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}-\frac{\partial^+_{(a'}\partial^+_{b')}}{m^2}]\}\theta(t)\psi(x)$

$$=\frac{1}{8}\{[\theta(t)(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})(\eta_{bb'}-\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2})-\frac{1}{3}\theta(t)(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})(\delta_{a'b'}-\frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})]$$

$$
\begin{aligned}
&+i\theta'(t)\{[\tfrac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}(\eta_{bb'}-\tfrac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2})+\tfrac{(\delta_{b\pi}\partial^+_{b'}-\partial_b\delta_{b'\pi'})}{m^2}(\eta_{aa'}-\tfrac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})]\\
&-\tfrac{1}{3}[\tfrac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}(\delta_{a'b'}-\tfrac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})-\tfrac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}(\delta_{ab}-\tfrac{\partial_a\partial_b}{m^2})]\}\\
&-\theta''(t)\{[\tfrac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}(\eta_{bb'}-\tfrac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2})+\tfrac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}\tfrac{(\delta_{b\pi}\partial^+_{b'}-\partial_b\delta_{b'\pi'})}{m^2}+\tfrac{\delta_{b\pi}\delta_{b'\pi'}}{m^2}(\eta_{aa'}-\tfrac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})]\\
&-\tfrac{1}{3}[\tfrac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}(\delta_{a'b'}-\tfrac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2})+\tfrac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}\tfrac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}+\tfrac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}(\delta_{ab}-\tfrac{\partial_a\partial_b}{m^2})]\}\\
&-i\theta'''(t)\{[\tfrac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}\tfrac{(\delta_{b\pi}\partial^+_{b'}-\partial_b\delta_{b'\pi'})}{m^2}+\tfrac{\delta_{b\pi}\delta_{b'\pi'}}{m^2}\tfrac{(\delta_{a\pi}\partial^+_{a'}-\partial_a\delta_{a'\pi'})}{m^2}]-\tfrac{1}{3}[\tfrac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}\tfrac{(\delta_{a'\pi'}\partial^+_{b'}+\partial^+_{a'}\delta_{b'\pi'})}{m^2}-\tfrac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}\tfrac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}]\}\\
&+\theta''''(t)[\tfrac{\delta_{a\pi}\delta_{a'\pi'}}{m^2}\tfrac{\delta_{b\pi}\delta_{b'\pi'}}{m^2}-\tfrac{1}{3}\tfrac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}\tfrac{\delta_{a'\pi'}\delta_{b'\pi'}}{m^2}]\}|^{(a'b')}_{\{ab\}}\psi(x)
\end{aligned}
$$
□

2.3 $\partial_t\Delta_{aba'b'}(2;x)|_{t=0}$的求解

引理2.3.1. $\partial_t\Delta_{aba'b'}(2;x)|_{t=0}=\frac{1}{8}\{[\eta_{\{a(a'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}-\frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}-\frac{\partial^+_{(a'}\partial^+_{b')}}{m^2}]\}\partial_t\Delta(x)|_{t=0}$

$[\Rightarrow]\partial_t\Delta_{iji'j'}(2;x)|_{t=0}=-\frac{1}{8}\{[\delta_{\{i(i'}-\frac{\partial_{\{i}\partial_{(i'}}{m^2}][\delta_{j\}j')}-\frac{\partial_{j\}}\partial_{j')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ij\}}-\frac{\partial_{\{i}\partial_{j\}}}{m^2}][\delta_{(i'j')}-\frac{\partial_{(i'}\partial_{j')}}{m^2}]\}\delta^3(\vec r)$

2.4 关于$A_{ab}(x)$的对易函数、因果函数和费曼传播子

推论2.4.1. $[A_{ab}(x),A^+_{a'b'}(x')]=\frac{i}{8}\{[\eta_{\{a(a'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}-\frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}-\frac{\partial^+_{(a'}\partial^+_{b')}}{m^2}]\}\Delta(x-x')$

推论2.4.2.

$$
\begin{cases}
\Delta_{aba'b'}(2;x):=\frac{1}{8}\{[\eta_{\{a(a'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}-\frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}-\frac{\partial^+_{(a'}\partial^+_{b')}}{m^2}]\}\Delta(x)\\
\Delta^{(+)}_{aba'b'}(2;x):=\frac{1}{8}\{[\eta_{\{a(a'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}-\frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}-\frac{\partial^+_{(a'}\partial^+_{b')}}{m^2}]\}\Delta^{(+)}(x)\\
\Delta^{(-)}_{aba'b'}(2;x):=\frac{1}{8}\{[\eta_{\{a(a'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}-\frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}-\frac{\partial^+_{(a'}\partial^+_{b')}}{m^2}]\}\Delta^{(-)}(x)\\
\Delta^{(l)}_{aba'b'}(2;x):=\frac{1}{8}\{[\eta_{\{a(a'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}-\frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}-\frac{\partial^+_{(a'}\partial^+_{b')}}{m^2}]\}\Delta^{(l)}(x)
\end{cases}
$$

推论2.4.3.

$$
\begin{cases}
\Delta^{(c)}_{aba'b'}(2;x):=\frac{1}{8}\{[\eta_{\{a(a'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}-\frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}-\frac{\partial^+_{(a'}\partial^+_{b')}}{m^2}]\}\Delta^{(c)}(x)+\sum_{k=0}^{3}\delta^{(k)}(t)f_k(\partial)\Delta(x)\\
\Delta^{(F)}_{aba'b'}(2;x):=\frac{1}{8}\{[\eta_{\{a(a'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}-\frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}-\frac{\partial^+_{(a'}\partial^+_{b')}}{m^2}]\}\Delta^{(F)}(x)+i\sum_{k=0}^{3}\delta^{(k)}(t)f_k(\partial)\Delta(x)\\
\Delta^{(ret)}_{aba'b'}(2;x):=\frac{1}{8}\{[\eta_{\{a(a'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}-\frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}-\frac{\partial^+_{(a'}\partial^+_{b')}}{m^2}]\}\Delta^{(ret)}(x)+\sum_{k=0}^{3}\delta^{(k)}(t)f_k(\partial)\Delta(x)\\
\Delta^{(adv)}_{aba'b'}(2;x):=\frac{1}{8}\{[\eta_{\{a(a'}-\frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')}-\frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}}-\frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')}-\frac{\partial^+_{(a'}\partial^+_{b')}}{m^2}]\}\Delta^{(adv)}(x)+\sum_{k=0}^{3}\delta^{(k)}(t)f_k(\partial)\Delta(x)
\end{cases}
$$

推论2.4.4.

$$
\begin{cases}
(\partial^c\partial_c-m^2)\Delta_{aba'b'}(2;x)=0,\delta^{ab}\Delta_{aba'b'}(2;x)=0,\partial^a\Delta_{aba'b'}(2;x)=0\\
(\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{(+)}_{aba'b'}(2;x)=0,\delta^{ab}\Delta^{(+)}_{aba'b'}(2;x)=0,\partial^a\Delta^{(+)}_{aba'b'}(2;x)=0\\
(\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{(-)}_{aba'b'}(2;x)=0,\delta^{ab}\Delta^{(-)}_{aba'b'}(2;x)=0,\partial^a\Delta^{(-)}_{aba'b'}(2;x)=0
\end{cases}
$$

推论2.4.5.

$$
\begin{cases}
(\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{(c)}_{aba'b'}(n;x)=-\delta'(t)\Delta_{aba'b'}(n;x)|_{t=0}-\delta(t)\partial_t\Delta_{aba'b'}(n;x)|_{t=0},\delta^{ab}\Delta^{(c)}_{aba'b'}(n;x)=0,\partial^a\Delta^{(c)}_{aba'b'}(n;x)=0\\
(\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{(F)}_{aba'b'}(n;x)=-i\delta'(t)\Delta_{aba'b'}(n;x)|_{t=0}-i\delta(t)\partial_t\Delta_{aba'b'}(n;x)|_{t=0},\delta^{ab}\Delta^{(F)}_{aba'b'}(n;x)=0,\partial^a\Delta^{(F)}_{aba'b'}(n;x)=0\\
(\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{(ret)}_{aba'b'}(n;x)=-\delta'(t)\Delta_{aba'b'}(n;x)|_{t=0}-\delta(t)\partial_t\Delta_{aba'b'}(n;x)|_{t=0},\delta^{ab}\Delta^{(ret)}_{aba'b'}(n;x)=0,\partial^a\Delta^{(ret)}_{aba'b'}(n;x)=0\\
(\partial^c\partial_c-m^2)\Delta^{(adv)}_{aba'b'}(n;x)=-\delta'(t)\Delta_{aba'b'}(n;x)|_{t=0}-\delta(t)\partial_t\Delta_{aba'b'}(n;x)|_{t=0},\delta^{ab}\Delta^{(adv)}_{aba'b'}(n;x)=0,\partial^a\Delta^{(adv)}_{aba'b'}(n;x)=0
\end{cases}
$$

3 有质量引力子方程的第三种等价描述

3.1 有质量引力子自旋方程等价描述

定理3.1.1. $(\partial_a+iS_{ab}\partial^b)_{\beta_\varsigma}{}^{\alpha_\varsigma}\psi_{\alpha_\varsigma c}=\frac{i}{\sqrt{2}}im^2\sigma^{ab}_{\varsigma\beta_\varsigma}A_{bc},\psi_{\alpha_\varsigma c}:=\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}F_{a|bc},S_{ab}:=i\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\gamma_{\alpha_\varsigma}$

$A_{bc}(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{h=2}^{-2}\frac{1}{\sqrt{2^2E}}\varepsilon_{bc}(\vec p,h)[a(\vec p,h)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+b^+(\vec p,h)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^3\vec p$

$$F_{a|bc}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=2}^{-2}\frac{1}{\sqrt{2^2E}}[ip_a\varepsilon_{bc}(\vec{p},h)-ip_b\varepsilon_{ac}(\vec{p},h)][a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}-b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

$$\psi_{\alpha_\varsigma c}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=2}^{-2}\frac{1}{\sqrt{2^2E}}\frac{-i}{\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}p_a\varepsilon_{bc}(\vec{p},h)[a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}-b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$$

3.2 有质量引力子场F_{ab}的平面波解和投影算子

定义3.2.1. $\lambda_{abc}(\vec{p},h):=[ip_a\varepsilon_{bc}(\vec{p},h)-ip_b\varepsilon_{ac}(\vec{p},h)]$

推论3.2.1. $F_{abc}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=2}^{-2}\frac{1}{\sqrt{2^2E}}[ip_a\varepsilon_{bc}(\vec{p},h)-ip_b\varepsilon_{ac}(\vec{p},h)][a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}-b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

定理3.2.1. $\sum_{h=2}^{-2}\lambda_{abc}(\vec{p},h)\lambda^+_{a'b'c'}(\vec{p},h)=\frac{1}{2}p_{[a}p^+_{[a'}\eta_{b]c'}\eta_{b']c}+\frac{1}{2}p_{[a}p^+_{[a'}\eta_{b]b']}[\eta_{cc'}+\frac{p_cp^+_{c'}}{m^2}]-\frac{1}{3}p_{[a}\delta_{b]c}p^+_{[a'}\delta_{b']c'}$

证明: $\sum_{h=2}^{-2}\lambda_{abc}(\vec{p},h)\lambda^+_{a'b'c'}(\vec{p},h)$

$$=\sum_{h=2}^{-2}[ip_a\varepsilon_{bc}(\vec{p},h)-ip_b\varepsilon_{ac}(\vec{p},h)][ip_{a'}\varepsilon_{b'c'}(\vec{p},h)-ip_{b'}\varepsilon_{a'c'}(\vec{p},h)]^+$$

$$=p_ap^+_{a'}\sum_{h=2}^{-2}\varepsilon_{bc}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{b'c'}(\vec{p},h)+p_bp^+_{b'}\sum_{h=2}^{-2}\varepsilon_{ac}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'c'}(\vec{p},h)$$

$$-p_ap^+_{b'}\sum_{h=2}^{-2}\varepsilon_{bc}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{a'c'}(\vec{p},h)-p_bp^+_{a'}\sum_{h=2}^{-2}\varepsilon_{ac}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{b'c'}(\vec{p},h)$$

$$=p_ap^+_{a'}\frac{1}{4}\{[\eta_{\{b(b'}+\frac{p_{\{b}p^+_{(b'}}{m^2}][\eta_{c\}c')}+\frac{p_{c\}}p^+_{c')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{bc\}}+\frac{p_{\{b}p_{c\}}}{m^2}][\delta_{(b'c')}+\frac{p^+_{(b'}p^+_{c')}}{m^2}]\}$$

$$+p_bp^+_{b'}\frac{1}{4}\{[\eta_{\{a(a'}+\frac{p_{\{a}p^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{c\}c')}+\frac{p_{c\}}p^+_{c')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ac\}}+\frac{p_{\{a}p_{c\}}}{m^2}][\delta_{(a'c')}+\frac{p^+_{(a'}p^+_{c')}}{m^2}]\}$$

$$-p_ap^+_{b'}\frac{1}{4}\{[\eta_{\{b(a'}+\frac{p_{\{b}p^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{c\}c')}+\frac{p_{c\}}p^+_{c')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{bc\}}+\frac{p_{\{b}p_{c\}}}{m^2}][\delta_{(a'c')}+\frac{p^+_{(a'}p^+_{c')}}{m^2}]\}$$

$$-p_bp^+_{a'}\frac{1}{4}\{[\eta_{\{a(b'}+\frac{p_{\{a}p^+_{(b'}}{m^2}][\eta_{c\}c')}+\frac{p_{c\}}p^+_{c')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{ac\}}+\frac{p_{\{a}p_{c\}}}{m^2}][\delta_{(b'c')}+\frac{p^+_{(b'}p^+_{c')}}{m^2}]\}$$

$$=+p_ap^+_{a'}\{\frac{1}{4}[\eta_{\{b(b'}+\frac{p_{\{b}p^+_{(b'}}{m^2}][\eta_{c\}c')}+\frac{p_{c\}}p^+_{c')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{bc}+\frac{p_bp_c}{m^2}][\delta_{b'c'}+\frac{p^+_{b'}p^+_{c'}}{m^2}]\}$$

$$+p_bp^+_{b'}\{\frac{1}{4}[\eta_{\{a(a'}+\frac{p_{\{a}p^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{c\}c')}+\frac{p_{c\}}p^+_{c')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{ac}+\frac{p_ap_c}{m^2}][\delta_{a'c'}+\frac{p^+_{a'}p^+_{c'}}{m^2}]\}$$

$$-p_ap^+_{b'}\{\frac{1}{4}[\eta_{\{b(a'}+\frac{p_{\{b}p^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{c\}c')}+\frac{p_{c\}}p^+_{c')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{bc}+\frac{p_bp_c}{m^2}][\delta_{a'c'}+\frac{p^+_{a'}p^+_{c'}}{m^2}]\}$$

$$-p_bp^+_{a'}\{\frac{1}{4}[\eta_{\{a(b'}+\frac{p_{\{a}p^+_{(b'}}{m^2}][\eta_{c\}c')}+\frac{p_{c\}}p^+_{c')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{ac}+\frac{p_ap_c}{m^2}][\delta_{b'c'}+\frac{p^+_{b'}p^+_{c'}}{m^2}]\}$$

$$=\frac{1}{2}(p_ap^+_{a'}\eta_{bc'}\eta_{cb'}+p_bp^+_{b'}\eta_{ac'}\eta_{a'c}-p_ap^+_{b'}\eta_{ca'}\eta_{bc'}-p_bp^+_{a'}\eta_{ac'}\eta_{cb'})$$

$$+\frac{1}{2}(p_ap^+_{a'}\eta_{bb'}+p_bp^+_{b'}\eta_{aa'}-p_ap^+_{b'}\eta_{ba'}-p_bp^+_{a'}\eta_{ab'})[\eta_{cc'}+\frac{p_cp^+_{c'}}{m^2}]$$

$$-\frac{1}{3}(p_a\delta_{bc}-p_b\delta_{ac})(p^+_{a'}\delta_{b'c'}-p^+_{b'}\delta_{a'c'})$$

$$=\frac{1}{2}p_{[a}p^+_{[a'}\eta_{b]c'}\eta_{b']c}+\frac{1}{2}p_{[a}p^+_{[a'}\eta_{b]b']}[\eta_{cc'}+\frac{p_cp^+_{c'}}{m^2}]-\frac{1}{3}p_{[a}\delta_{b]c}p^+_{[a'}\delta_{b']c'}$$ □

定理3.2.2. $[F_{abc}(x),F^+_{a'b'c'}(x')]=-i\{\frac{1}{2}\partial_{[a}\partial^+_{[a'}\eta_{b]c'}\eta_{b']c}+\frac{1}{2}\partial_{[a}\partial^+_{[a'}\eta_{b]b']}[\eta_{cc'}-\frac{\partial_c\partial^+_{c'}}{m^2}]-\frac{1}{3}\partial_{[a}\delta_{b]c}\partial^+_{[a'}\delta_{b']c'}\}\Delta(x-x')$

3.3 有质量引力子场Ψ_{α_ς}的平面波解和投影算子

定义3.3.1. $\lambda_{\alpha_\varsigma c}(\vec{p},h):=\frac{-i}{\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}p_a\varepsilon_{bc}(\vec{p},h)$

推论3.3.1. $\psi_{\alpha_\varsigma c}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2E}}\lambda_{\alpha_\varsigma c}(\vec{p},h)[a(\vec{p},h)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},h)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^3\vec{p}$

定理3.3.1. $\sum_{h=1}^{-1}\lambda_{\alpha_\varsigma c}(\vec{p},h)\lambda^+_{\alpha'_\varsigma c'}(\vec{p},h)=-\frac{1}{8}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap^+_{a'}[\eta_{\{b(b'}\eta_{c\}c')}-\frac{1}{3}\delta_{\{bc\}}\delta_{(b'c')}]-\frac{1}{2m^2}\sigma^{aa'}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap_{a'}p_cp^+_{c'}$

证明: $\sum_{h=1}^{-1}\lambda_{\alpha_\varsigma c}(\vec{p},h)\lambda^+_{\alpha'_\varsigma c'}(\vec{p},h)$

$$=\sum_{h=1}^{-1}\frac{-i}{\sqrt{2}}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}p_a\varepsilon_{bc}(\vec{p},h)\frac{-i}{\sqrt{2}}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}p^+_{a'}\varepsilon^+_{b'c'}(\vec{p},h)$$

$$=-\frac{1}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}p_ap^+_{a'}\sum_{h=1}^{-1}\varepsilon_{bc}(\vec{p},h)\varepsilon^+_{b'c'}(\vec{p},h)$$

$= -\frac{1}{2}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}p_a p^+_{a'}\frac{1}{4}\{[\eta_{\{b(b'}+\frac{p_{\{b}p^+_{(b'}}{m^2}][\eta_{c\}c')}+\frac{p_{c\}}p^+_{c')}}{m^2}]-\frac{1}{3}[\delta_{\{bc\}}+\frac{p_{\{b}p_{c\}}}{m^2}][\delta_{(b'c')}+\frac{p^+_{(b'}p^+_{c')}}{m^2}]\}$
$= -\frac{1}{8}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}p_a p^+_{a'}\{2[\eta_{bb'}+\frac{p_b p^+_{b'}}{m^2}][\eta_{cc'}+\frac{p_c p^+_{c'}}{m^2}]+2[\eta_{cb'}+\frac{p_c p^+_{b'}}{m^2}][\eta_{bc'}+\frac{p_b p^+_{c'}}{m^2}]-\frac{4}{3}[\delta_{bc}+\frac{p_b p_c}{m^2}][\delta_{b'c'}+\frac{p^+_{b'}p^+_{c'}}{m^2}]\}$
$= -\frac{1}{4}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}p_a p^+_{a'}\{\eta_{bb'}[\eta_{cc'}+\frac{p_c p^+_{c'}}{m^2}]+\eta_{cb'}\eta_{bc'}-\frac{2}{3}\delta_{bc}\delta_{b'c'}]\}$
$= -\frac{1}{8}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}p_a p^+_{a'}[\eta_{\{b(b'}\eta_{c\}c')}-\frac{1}{3}\delta_{\{bc\}}\delta_{(b'c')}]-\frac{1}{2m^2}\sigma^{aa'}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}p_a p_{a'}p_c p^+_{c'}$ □

定理3.3.2. $[\psi_{\alpha_\varsigma c}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma c'}(x')]=i\{\frac{1}{2m^2}\sigma^{aa'}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial_{a'}\partial_c\partial^+_{c'}-\frac{1}{8}\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{a'b'}_{\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_a\partial^+_{a'}[\eta_{\{b(b'}\eta_{c\}c')}-\frac{1}{3}\delta_{\{bc\}}\delta_{(b'c')}]\}\Delta(x-x')$

4 有质量引力子方程的第四种等价描述

4.1 有质量引力子各种物理量定义

定义4.1.1. $\begin{cases}\text{外尔复张量}C^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa}:=\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}C^{ab\beta_\kappa}=\frac{i}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\frac{i}{2}\sigma^{\beta_\kappa}_{\kappa cd}C^{abcd}\\ \psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}=(\frac{i}{\sqrt{2}})^2C_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma},\psi^+_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}=-\psi_{\alpha_{-\varsigma}\beta_{-\varsigma}}\end{cases}$

定义4.1.2. 引力曲率旋量:

$\psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa}:=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\frac{i\kappa}{\sqrt{2}}\sigma^{C_\kappa D_\kappa}_{\beta_\kappa}\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa}=\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{i\kappa}{\sqrt{2}}\sigma^{C_\kappa D_\kappa}_{\beta_\kappa}C^{ab\beta_\kappa}=\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}S_{ab}{}^{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{i\kappa}{\sqrt{2}}S_{cd}{}^{C_\kappa D_\kappa}C^{abcd}$

推论4.1.1. $\psi^{\alpha_\varsigma\beta_\kappa}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\frac{i\kappa}{\sqrt{2}}\sigma^{\beta_\kappa}_{C_\kappa D_\kappa}\psi^{A_\varsigma B_\varsigma C_\kappa D_\kappa}$

推论4.1.2. $\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}=\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}=-\frac{1}{2}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma},[\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}]^*=\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}$

定义4.1.3.

$$\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}^{2n}}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{2n}}(n):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{2n}}(n)\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\frac{1}{(2n)!}\underbrace{\sigma^{(A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\cdots)}_{n}$$

$$\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}^{2n}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}_{2n}}(n):=\Gamma^{\overbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}^{2n}}_{k_\varsigma}(n)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}_{2n}}(n)=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\frac{1}{(2n)!}\overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{(A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\cdots)}^{n}$$

4.2 有质量粒子一般对易规则两种等价描述

定理4.2.1.

$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma D'_\varsigma\cdots}_{2n}}(x')]=i\frac{(i\varsigma)^{2n}}{2^{2n-1}}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^d_{D_\varsigma D'_\varsigma}\cdots}^{2n}\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\cdots}^{2n}\Delta(x-x')\\ \psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}}(x)=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\underbrace{\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\cdots}_{n}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}_{2n}}(x)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma\cdots}_{n}}(x')]=\frac{i}{2^{n-1}}\overbrace{\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\sigma^{cd}_{\beta_\varsigma\beta'_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\cdots}^{2n}\Delta(x-x')\\ \psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma\cdots}_{2n}}(x)=(\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}})^n\overbrace{\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\sigma^{\beta_\varsigma}_{C_\varsigma D_\varsigma}\cdots}^{n}\psi_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}_{n}}(x)\end{cases}$$

4.3 线性引力场$\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}$的对易规则

定理4.3.1.

$$\begin{cases}[\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\sigma^{cd}_{\beta_\varsigma\beta'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta(x-x')\\ [\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}(x),\psi_{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma}(x')]=\frac{i}{32}m^4\delta_{\{\alpha_\varsigma(\rho_\varsigma}\delta_{\beta_\varsigma\}\sigma_\varsigma)}\Delta(x-x')\\ [\psi_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}(x),\psi_{\rho'_\varsigma\sigma'_\varsigma}(x')]=\frac{i}{32}m^4\delta_{\{\alpha'_\varsigma(\rho'_\varsigma}\delta_{\beta'_\varsigma\}\sigma'_\varsigma)}\Delta(x-x')\end{cases}$$

证明: $[\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}(x')]$
$=\frac{1}{4}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\sigma^{C'_\varsigma D'_\varsigma}_{\beta'_\varsigma}[\psi_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma},\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma D'_\varsigma}]$

$= \frac{i}{2^5}\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}\sigma^{A'_\varsigma B'_\varsigma}_{\alpha'_\varsigma}\sigma^{C'_\varsigma D'_\varsigma}_{\beta'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^c_{C_\varsigma C'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^d_{D_\varsigma D'_\varsigma}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2}\Gamma^{abcd}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma\beta_\varsigma\beta'_\varsigma}(2)\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2}\Gamma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}(1)\Gamma^{cd}_{\beta_\varsigma\beta'_\varsigma}(1)\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2}\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\sigma^{cd}_{\beta_\varsigma\beta'_\varsigma}\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d\Delta(x-x')$ □

4.4 线性引力场C_{abcd}的对易规则

推论4.4.1. $\sigma^{ab}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma} = -\frac{1}{2}\sigma^{ac}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\delta_{cd}\sigma^{db}_{-\varsigma\alpha'_\varsigma}, \sigma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{ab} = -\frac{1}{2}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ac}\delta^{cd}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma db}$

引理4.4.1.
$2\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma^{cc'}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_c\partial_{c'} = \sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\varsigma\alpha_\varsigma cd}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma_{\varsigma\alpha'_\varsigma c'd'}\eta^{cc'}\partial^d\partial^{+d'} = (S_{abcd}-\varsigma\varepsilon_{abcd})(S_{a'b'c'd'}-\varsigma\varepsilon_{a'b'c'd'})\eta^{cc'}\partial^d\partial^{+d'}$
$2\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{cc'}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_c\partial_{c'} = \sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma_{-\varsigma\alpha_\varsigma cd}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma_{-\varsigma\alpha'_\varsigma c'd'}\eta^{cc'}\partial^d\partial^{+d'} = (S_{abcd}+\varsigma\varepsilon_{abcd})(S_{a'b'c'd'}+\varsigma\varepsilon_{a'b'c'd'})\eta^{cc'}\partial^d\partial^{+d'}$

推论4.4.2. $(S_{ab\tilde c\tilde d}\varepsilon_{a'b'\tilde c'\tilde d'}+\varepsilon_{ab\tilde c\tilde d}S_{a'b'\tilde c'\tilde d'})\eta^{\tilde c\tilde c'}\partial^{\tilde d}\partial^{+\tilde d'}\Delta(x-x')$
$= [(\delta_{a\tilde c}\delta_{b\tilde d}-\delta_{a\tilde d}\delta_{b\tilde c})\varepsilon_{a'b'\tilde c'\tilde d'}+\varepsilon_{ab\tilde c\tilde d}(\delta_{a'\tilde c'}\delta_{b'\tilde d'}-\delta_{a'\tilde d'}\delta_{b'\tilde c'})]\eta^{\tilde c\tilde c'}\partial^{\tilde d}\partial^{+\tilde d'}\Delta(x-x')$
$= [(\eta^{\tilde c'}_a\partial_b\partial^{+\tilde d'}-\eta^{\tilde c'}_b\partial_a\partial^{+\tilde d'})\varepsilon_{a'b'\tilde c'\tilde d'}+\varepsilon_{ab\tilde c\tilde d}(\eta^{\tilde c}_{a'}\partial^+_{b'}\partial^{\tilde d}-\eta^{\tilde c}_{b'}\partial^+_{a'}\partial^{\tilde d})]\Delta(x-x')$

推论4.4.3. $(S_{\tilde a\tilde bcd}\varepsilon_{\tilde a'\tilde b'c'd'}+\varepsilon_{\tilde a\tilde bcd}S_{\tilde a'\tilde b'c'd'})\eta^{\tilde a\tilde a'}\partial^{\tilde b}\partial^{+\tilde b'}\Delta(x-x')$
$= [(\eta^{\tilde a'}_c\partial_d\partial^{+\tilde b'}-\eta^{\tilde a'}_d\partial_c\partial^{+\tilde b'})\varepsilon_{\tilde a'\tilde b'c'd'}+\varepsilon_{\tilde a\tilde bcd}(\eta^{\tilde a}_{c'}\partial^+_{d'}\partial^{\tilde b}-\eta^{\tilde a}_{d'}\partial^+_{c'}\partial^{\tilde b})]\Delta(x-x')$

推论4.4.4.
$[(\eta^{\tilde c'}_a\partial_b\partial^{+\tilde d'}-\eta^{\tilde c'}_b\partial_a\partial^{+\tilde d'})\varepsilon_{a'b'\tilde c'\tilde d'}+\varepsilon_{ab\tilde c\tilde d}(\eta^{\tilde c}_{a'}\partial^+_{b'}\partial^{\tilde d}-\eta^{\tilde c}_{b'}\partial^+_{a'}\partial^{\tilde d})]$
$[(\eta^{\tilde a'}_c\partial_d\partial^{+\tilde b'}-\eta^{\tilde a'}_d\partial_c\partial^{+\tilde b'})\varepsilon_{\tilde a'\tilde b'c'd'}+\varepsilon_{\tilde a\tilde bcd}(\eta^{\tilde a}_{c'}\partial^+_{d'}\partial^{\tilde b}-\eta^{\tilde a}_{d'}\partial^+_{c'}\partial^{\tilde b})]\Delta(x-x')$
$= (\eta^{\tilde c'}_{[a}\partial_{b]}\partial^{+\tilde d'}\varepsilon_{a'b'\tilde c'\tilde d'}+\varepsilon_{ab\tilde c\tilde d}\eta^{\tilde c}_{<a'}\partial^+_{b'>}\partial^{\tilde d})(\eta^{\tilde a'}_{[c}\partial_{d]}\partial^{+\tilde b'}\varepsilon_{\tilde a'\tilde b'c'd'}+\varepsilon_{\tilde a\tilde bcd}(\eta^{\tilde a}_{<c'}\partial^+_{d'>}\partial^{\tilde b})\Delta(x-x')$

推论4.4.5. $C_{abcd} = \frac{1}{2}(\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{-\varsigma cd}\psi^+_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma cd}\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma})$

定理4.4.1.
$$\begin{cases}[C_{abcd}(x),C^+_{a'b'c'd'}(x')]? = \frac{i}{4}\{\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\eta_{[c<c'}\partial_{d]}\partial^+_{d'>}+\eta_{[c<a'}\partial_{d]}\partial^+_{b'>}\eta_{[a<c'}\partial_{b]}\partial^+_{d'>}\}\Delta(x-x')\\ [C_{abcd}(x),C_{a'b'c'd'}(x')] = \frac{i}{4}\{\delta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial_{b'>}\eta_{[c<c'}\partial_{d]}\partial_{d'>}+\delta_{[c<a'}\partial_{d]}\partial_{b'>}\eta_{[a<c'}\partial_{b]}\partial_{d'>}\}\Delta(x-x')\\ [C^+_{abcd}(x),C^+_{a'b'c'd'}(x')] = \frac{i}{4}\{\delta_{[a<a'}\partial^+_{b]}\partial^+_{b'>}\eta_{[c<c'}\partial^+_{d]}\partial^+_{d'>}+\delta_{[c<a'}\partial^+_{d]}\partial^+_{b'>}\eta_{[a<c'}\partial^+_{b]}\partial^+_{d'>}\}\Delta(x-x')\\ [C^{\alpha_\varsigma}_{ab}(x),C^{\alpha'_\varsigma}_{a'b'}(x')] = -\frac{i}{2}\{\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\sigma^{\alpha'_\varsigma\alpha_\varsigma}_{cd}\partial^c\partial^d+\frac{1}{2}(\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma c[a}\partial_{b]}\partial^c)(\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma c'<a'}\partial^+_{b'>}\partial^{+c'})\}\Delta(x-x')\end{cases}$$

证明： $[C_{abcd}(x),C^+_{a'b'c'd'}(x')]$
$= \frac{1}{4}[[\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{-\varsigma cd}\psi^+_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}(x)+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma cd}\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}(x)],[\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\beta_\varsigma}_{-\varsigma c'd'}\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}(x')+\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{\varsigma c'd'}\psi^+_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}(x')]]$
$= \frac{1}{4}\{\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{-\varsigma cd}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\beta_\varsigma}_{-\varsigma c'd'}[\psi^+_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}(x),\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}(x')]+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma cd}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{\varsigma c'd'}[\psi_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}(x),\psi^+_{\alpha'_\varsigma\beta'_\varsigma}(x')]\}$
$= \frac{i}{8}\{\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{-\varsigma cd}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}\sigma^{\beta_\varsigma}_{-\varsigma c'd'}+\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma cd}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{\varsigma c'd'}\}\sigma^{\tilde a\tilde b}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\sigma^{\tilde c\tilde d}_{\beta_\varsigma\beta'_\varsigma}\partial_{\tilde a}\partial_{\tilde b}\partial_{\tilde c}\partial_{\tilde d}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{32}\{2\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{-\varsigma ab}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{-\varsigma a'b'}2\sigma^{\beta'_\varsigma}_{-\varsigma cd}\sigma^{\beta_\varsigma}_{-\varsigma c'd'}+2\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma^{\alpha'_\varsigma}_{\varsigma a'b'}2\sigma^{\beta_\varsigma}_{\varsigma cd}\sigma^{\beta'_\varsigma}_{\varsigma c'd'}\}\sigma^{\tilde c\tilde d}_{\alpha_\varsigma\alpha'_\varsigma}\partial_{\tilde c}\partial_{\tilde d}\sigma^{\tilde a\tilde b}_{\beta_\varsigma\beta'_\varsigma}\partial_{\tilde a}\partial_{\tilde b}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{32}\{(S_{ab\tilde c\tilde d}-\varsigma\varepsilon_{ab\tilde c\tilde d})(S_{a'b'\tilde c'\tilde d'}-\varsigma\varepsilon_{a'b'\tilde c'\tilde d'})(S_{cd\tilde a\tilde b}-\varsigma\varepsilon_{cd\tilde a\tilde b})(S_{c'd'\tilde a'\tilde b'}-\varsigma\varepsilon_{c'd'\tilde a'\tilde b'})$
$+(S_{ab\tilde c\tilde d}+\varsigma\varepsilon_{ab\tilde c\tilde d})(S_{a'b'\tilde c'\tilde d'}+\varsigma\varepsilon_{a'b'\tilde c'\tilde d'})(S_{cd\tilde a\tilde b}+\varsigma\varepsilon_{cd\tilde a\tilde b})(S_{c'd'\tilde a'\tilde b'}+\varsigma\varepsilon_{c'd'\tilde a'\tilde b'})\}\eta^{\tilde c\tilde c'}\partial^{\tilde d}\partial^{+\tilde d'}\eta^{\tilde a\tilde a'}\partial^{\tilde b}\partial^{+\tilde b'}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{32}\{(S_{ab\tilde c\tilde d}-\varsigma\varepsilon_{ab\tilde c\tilde d})(S_{a'b'\tilde c'\tilde d'}-\varsigma\varepsilon_{a'b'\tilde c'\tilde d'})(S_{\tilde a\tilde bcd}-\varsigma\varepsilon_{\tilde a\tilde bcd})(S_{\tilde a'\tilde b'c'd'}-\varsigma\varepsilon_{\tilde a'\tilde b'c'd'})$
$+(S_{ab\tilde c\tilde d}+\varsigma\varepsilon_{ab\tilde c\tilde d})(S_{a'b'\tilde c'\tilde d'}+\varsigma\varepsilon_{a'b'\tilde c'\tilde d'})(S_{\tilde a\tilde bcd}+\varsigma\varepsilon_{\tilde a\tilde bcd})(S_{\tilde a'\tilde b'c'd'}+\varsigma\varepsilon_{\tilde a'\tilde b'c'd'})\}\eta^{\tilde a\tilde a'}\eta^{\tilde c\tilde c'}\partial^{\tilde b}\partial^{+\tilde b'}\partial^{\tilde d}\partial^{+\tilde d'}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{16}\{(S_{ab\tilde c\tilde d}S_{a'b'\tilde c'\tilde d'}S_{\tilde a\tilde bcd}S_{\tilde a'\tilde b'c'd'}+\varepsilon_{ab\tilde c\tilde d}\varepsilon_{a'b'\tilde c'\tilde d'}\varepsilon_{\tilde a\tilde bcd}\varepsilon_{\tilde a'\tilde b'c'd'})$
$+S_{ab\tilde c\tilde d}S_{a'b'\tilde c'\tilde d'}\varepsilon_{\tilde a\tilde bcd}\varepsilon_{\tilde a'\tilde b'c'd'}+S_{ab\tilde c\tilde d}\varepsilon_{a'b'\tilde c'\tilde d'}S_{\tilde a\tilde bcd}\varepsilon_{\tilde a'\tilde b'c'd'}+S_{ab\tilde c\tilde d}\varepsilon_{a'b'\tilde c'\tilde d'}\varepsilon_{\tilde a\tilde bcd}S_{\tilde a'\tilde b'c'd'}$
$+\varepsilon_{ab\tilde c\tilde d}\varepsilon_{a'b'\tilde c'\tilde d'}S_{\tilde a\tilde bcd}S_{\tilde a'\tilde b'c'd'}+\varepsilon_{ab\tilde c\tilde d}S_{a'b'\tilde c'\tilde d'}\varepsilon_{\tilde a\tilde bcd}S_{\tilde a'\tilde b'c'd'}+\varepsilon_{ab\tilde c\tilde d}S_{a'b'\tilde c'\tilde d'}S_{\tilde a\tilde bcd}\varepsilon_{\tilde a'\tilde b'c'd'}\}$
$\eta^{\tilde a\tilde a'}\eta^{\tilde c\tilde c'}\partial^{\tilde b}\partial^{+\tilde b'}\partial^{\tilde d}\partial^{+\tilde d'}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{16}\{(S_{ab\tilde c\tilde d}S_{a'b'\tilde c'\tilde d'}+\varepsilon_{ab\tilde c\tilde d}\varepsilon_{a'b'\tilde c'\tilde d'})(S_{\tilde a\tilde bcd}S_{\tilde a'\tilde b'c'd'}+\varepsilon_{\tilde a\tilde bcd}\varepsilon_{\tilde a'\tilde b'c'd'})$
$+(S_{ab\tilde c\tilde d}\varepsilon_{a'b'\tilde c'\tilde d'}+\varepsilon_{ab\tilde c\tilde d}S_{a'b'\tilde c'\tilde d'})(S_{\tilde a\tilde bcd}\varepsilon_{\tilde a'\tilde b'c'd'}+\varepsilon_{\tilde a\tilde bcd}S_{\tilde a'\tilde b'c'd'})\}$
$\eta^{\tilde a\tilde a'}\eta^{\tilde c\tilde c'}\partial^{\tilde b}\partial^{+\tilde b'}\partial^{\tilde d}\partial^{+\tilde d'}\Delta(x-x')$

$= \frac{i}{16}\{4\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\eta_{[c<c'}\partial_{d]}\partial^+_{d'>}\Delta(x-x')$
$+ (S_{ab\tilde{c}\tilde{d}}\varepsilon_{a'b'\tilde{c}'\tilde{d}'} + \varepsilon_{ab\tilde{c}\tilde{d}}S_{a'b'\tilde{c}'\tilde{d}'})(S_{\tilde{a}\tilde{b}cd}\varepsilon_{\tilde{a}'\tilde{b}'c'd'} + \varepsilon_{\tilde{a}\tilde{b}cd}S_{\tilde{a}'\tilde{b}'c'd'})\eta^{\tilde{a}\tilde{a}'}\eta^{\tilde{c}\tilde{c}'}\partial^{\tilde{b}}\partial^{+\tilde{b}'}\partial^{\tilde{d}}\partial^{+\tilde{d}'}\Delta(x-x')\}$
$= \frac{i}{16}\{4\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\eta_{[c<c'}\partial_{d]}\partial^+_{d'>} + 4\eta_{[c<a'}\partial_{d]}\partial^+_{b'>}\eta_{[a<c'}\partial_{b]}\partial^+_{d'>}\}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{4}\{\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\eta_{[c<c'}\partial_{d]}\partial^+_{d'>} + \eta_{[c<a'}\partial_{d]}\partial^+_{b'>}\eta_{[a<c'}\partial_{b]}\partial^+_{d'>}\}\Delta(x-x')$ □

5 A_{ab}对易关系的直观证明

5.1 A_{ab}对易关系的证明(略去了大量繁琐的细节，只给出了思路)

定理5.1.1.

$$\begin{cases}[A_a(x), A^+_{a'}(x')] = i(\eta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x'), \bar{A}_{a'b'} := \eta^{c'}_{a'}\eta^{d'}_{b'}A^+_{c'd'} \\ [A_{ab}(x), A^+_{a'b'}(x')] = \frac{i}{8}\{[\eta_{\{a(a'} - \frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')} - \frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2}] - \frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}} - \frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')} - \frac{\partial^+_{(a'}\partial^+_{b')}}{m^2}]\}\Delta(x-x') \\ [A_{ab}(x), \bar{A}_{a'b'}(x')] = \frac{i}{8}\{[\delta_{\{a(a'} - \frac{\partial_{\{a}\partial_{(a'}}{m^2}][\delta_{b\}b')} - \frac{\partial_{b\}}\partial_{b')}}{m^2}] - \frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}} - \frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')} - \frac{\partial_{(a'}\partial_{b')}}{m^2}]\}\Delta(x-x')\end{cases}$$

证明: $[A_{ab}(x), A^+_{a'b'}(x')]$
$= \frac{1}{(i2m)^4}[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)]^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[\bar{C}\gamma_b(\varsigma)]^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}[\gamma_{a'}(\varsigma)C]^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}[\gamma_{b'}(\varsigma)C]^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x), \psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}(x')]$
$= \frac{1}{(i2m)^4}\frac{i}{2^5(4!)^2}[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)]^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[\bar{C}\gamma_b(\varsigma)]^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}[\gamma_{a'}(\varsigma)C]^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}[\gamma_{b'}(\varsigma)C]^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\mathbb{X}^c_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^d_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}(x)\mathbb{X}^{+c'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\mathbb{X}^{+d'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma)}(x')$
$(\eta_{cc'} - \frac{\partial_c\partial^+_{c'}}{m^2})(\eta_{dd'} - \frac{\partial_d\partial^+_{d'}}{m^2})\Delta(x-x')$
$= \frac{1}{m^4}\frac{i}{2^{13}(3!)^2}[\bar{C}\gamma_a(\varsigma)]^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[\bar{C}\gamma_b(\varsigma)]^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\mathbb{X}^c_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^d_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}(x)[\gamma_{a'}(\varsigma)C]^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}[\gamma_{b'}(\varsigma)C]^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\mathbb{X}^{+c'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\mathbb{X}^{+d'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma)}(x')$
$(\eta_{cc'} - \frac{\partial_c\partial^+_{c'}}{m^2})(\eta_{dd'} - \frac{\partial_d\partial^+_{d'}}{m^2})\Delta(x-x')$
$= \frac{1}{m^4}\frac{i}{2^{13}(3!)^2}\{64m^2(\delta_{ab}\delta_{cd} - 2\delta_{c\{a}\delta_{b\}d}) + 64(\delta_{ab}S_{cedf} + \delta_{\{a[c}S_{e]b\}df})\partial^e\partial^f\}$
$\{64m^2(\delta_{a'b'}\delta_{c'd'} - 2\delta_{c'(a'}\delta_{b')d'}) + 64(\delta_{a'b'}S_{c'e'd'f'} + \delta_{\{a'[c'}S_{e']b'\}d'f'})\partial'^{+e'}\partial'^{+f'}\}$
$(\eta_{cc'} - \frac{\partial_c\partial^+_{c'}}{m^2})(\eta_{dd'} - \frac{\partial_d\partial^+_{d'}}{m^2})\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{72m^4}\{m^2(\delta_{ab}\delta_{cd} - 2\delta_{c\{a}\delta_{b\}d}) + (\delta_{ab}S_{cedf} + \delta_{\{a[c}S_{e]b\}df})\partial^e\partial^f\}$
$\{m^2(\delta_{a'b'}\delta_{c'd'} - 2\delta_{c'(a'}\delta_{b')d'}) + (\delta_{a'b'}S_{c'e'd'f'} + \delta_{\{a'[c'}S_{e']b'\}d'f'})\partial^{+e'}\partial^{+f'}\}$
$(\eta_{cc'} - \frac{\partial_c\partial^+_{c'}}{m^2})(\eta_{dd'} - \frac{\partial_d\partial^+_{d'}}{m^2})\Delta(x-x')$
$= \frac{1}{36}| - 2i(\frac{1}{4}\delta_{ab}\delta_{a'b'} - \frac{\partial_a\partial_b\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^4}) - 2i(\delta_{ab} - \frac{\partial_a\partial_b}{m^2})(\delta_{a'b'} - \frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2}) + 2i(\eta_{\{a(a'} - \frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2})(\eta_{b\}b')} - \frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2})$
$+ 4i(\frac{1}{4}\delta_{ab}\delta_{a'b'} - \frac{\partial_a\partial_b\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^4}) - 4i(\delta_{ab} - \frac{\partial_a\partial_b}{m^2})(\delta_{a'b'} - \frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2}) + 2i(\eta_{\{a(a'} - \frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2})(\eta_{b\}b')} - \frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2})$
$- 2i(\frac{1}{4}\delta_{ab}\delta_{a'b'} - \frac{\partial_a\partial_b\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^4}) + \frac{i}{2}(\eta_{\{a(a'} - \frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2})(\eta_{b\}b')} - \frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2})\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{8}\{[\eta_{\{a(a'} - \frac{\partial_{\{a}\partial^+_{(a'}}{m^2}][\eta_{b\}b')} - \frac{\partial_{b\}}\partial^+_{b')}}{m^2}] - \frac{1}{3}[\delta_{\{ab\}} - \frac{\partial_{\{a}\partial_{b\}}}{m^2}][\delta_{(a'b')} - \frac{\partial^+_{(a'}\partial^+_{b')}}{m^2}]\}\Delta(x-x')$ □

5.2 反过来验证场对易关系

引理5.2.1. $\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = \frac{1}{4}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}, \psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma} = \frac{1}{4}\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}A^+_{a'b'}$

引理5.2.2. $\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}(\delta_{ab} - \frac{\partial_a\partial_b}{m^2}) =$
$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\sigma,i\varsigma)_{[a}(\sigma,-i\varsigma)_{c]}\sigma_y\partial^c & im(\sigma,i\varsigma)_a\sigma_y \\ im(\sigma,-i\varsigma)_a\sigma_y & -\frac{1}{2}(\sigma,-i\varsigma)_{[a}(\sigma,i\varsigma)_{c]}\sigma_y\partial^c\end{bmatrix}_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\sigma,i\varsigma)_{[b}(\sigma,-i\varsigma)_{d]}\sigma_y\partial^d & im(\sigma,i\varsigma)_b\sigma_y \\ im(\sigma,-i\varsigma)_b\sigma_y & -\frac{1}{2}(\sigma,-i\varsigma)_{[b}(\sigma,i\varsigma)_{d]}\sigma_y\partial^d\end{bmatrix}_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}[\delta^{ab} - \frac{\partial^a\partial^b}{m^2}]$
$= 0$

定理5.2.1. $[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}, \psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}] = \frac{i}{2^5(4!)^2}\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma)}(\eta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})[\eta_{bb'} - \frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2}]\Delta(x-x')$

证明: $[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}, \psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}]$
$= \frac{1}{2^4}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}[A_{ab}, A^+_{a'b'}]$
$= \frac{1}{2^4(4!)^2}\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma)}[A_{ab}, A^+_{a'b'}]$
$= \frac{i}{2^5(4!)^2}\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma)}\{(\eta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})[\eta_{bb'} - \frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2}] - \frac{1}{3}(\delta_{ab} - \frac{\partial_a\partial_b}{m^2})[\delta_{a'b'} - \frac{\partial^+_{a'}\partial^+_{b'}}{m^2}]\}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2^5(4!)^2}\mathbb{X}^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}\mathbb{X}^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\mathbb{X}^{+b'}_{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma)}(\eta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})[\eta_{bb'} - \frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{m^2}]\Delta(x-x')$ □

5.3 有质量引力子场能量动量算符的提取

定理5.3.1. $P_u(2)=\int\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

定理5.3.2. $P_u(2)=\int m^4A^{+ab}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}A_{ab}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}+\int m^2F^{+ab|c}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}F_{ab|c}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$+\frac{1}{4}\int F^{+ab|cd}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}F_{ab|cd}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$

证明: $P_u(2)=\int\psi^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\int\{\bar{C}[-im\gamma^{a'}(\varsigma)-2S^{a'c'}(e,\varsigma)\partial^+_{c'}]\}^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\{\bar{C}[-im\gamma^{b'}(\varsigma)-2S^{b'd'}(e,\varsigma)\partial^+_{d'}]\}^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\frac{A^+_{a'b'}(\vec{r},t)}{4}$
$\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ac}(e,\varsigma)C\partial_c]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bd}(e,\varsigma)C\partial_d]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\frac{A_{ab}(\vec{r},t)}{4}d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{16}\int tr\{\bar{C}[-im\gamma^{a'}(\varsigma)-2S^{a'c'}(e,\varsigma)\partial^+_{c'}]\{\bar{C}[-im\gamma^{b'}(\varsigma)-2S^{b'd'}(e,\varsigma)\partial^+_{d'}]\}^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A^+_{a'b'}(\vec{r},t)$
$\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ac}(e,\varsigma)C\partial_c][im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bd}(e,\varsigma)C\partial_d]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{16}\int tr\{\bar{C}[-im\gamma^{a'}(\varsigma)-2S^{a'c'}(e,\varsigma)\partial^+_{c'}]\{\bar{C}[-im\gamma^{b'}(\varsigma)-2S^{b'd'}(e,\varsigma)\partial^+_{d'}]\}^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A^+_{a'b'}(\vec{r},t)$
$\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}[im\gamma^a(\varsigma)C-2S^{ac}(e,\varsigma)C\partial_c][im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bd}(e,\varsigma)C\partial_d]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{4}\int\{\bar{C}[-im\gamma^{b'}(\varsigma)-2S^{b'd'}(e,\varsigma)\partial^+_{d'}]\}^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A^+_{a'b'}(\vec{r},t)m^2\delta^{a'a}\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}[im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bd}(e,\varsigma)C\partial_d]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$+\frac{1}{4}\int S^{a'c'ac}\partial^+_{c'}\{\bar{C}[-im\gamma^{b'}(\varsigma)-2S^{b'd'}(e,\varsigma)\partial^+_{d'}]\}^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A^+_{a'b'}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}\partial_c[im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bd}(e,\varsigma)C\partial_d]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{4}\int tr\{\bar{C}[-im\gamma^{b'}(\varsigma)-2S^{b'd'}(e,\varsigma)\partial^+_{d'}]A^+_{a'b'}(\vec{r},t)m^2\delta^{a'a}\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}[im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bd}(e,\varsigma)C\partial_d]A_{ab}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$+\frac{1}{4}\int S^{a'c'ac}\partial^+_{c'}tr\{\bar{C}[-im\gamma^{b'}(\varsigma)-2S^{b'd'}(e,\varsigma)\partial^+_{d'}]A^+_{a'b'}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}\partial_c[im\gamma^b(\varsigma)C-2S^{bd}(e,\varsigma)C\partial_d]A_{ab}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$=\int m^4\delta^{a'a}\delta^{b'b}A^+_{a'b'}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}A_{ab}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$+\int m^2S^{b'd'bd}\delta^{a'a}\partial^+_{d'}A^+_{a'b'}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}\partial_dA_{ab}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$+\int m^2S^{a'c'ac}\delta^{b'b}\partial^+_{c'}A^+_{a'b'}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}\partial_cA_{ab}(\vec{r},t)\}$
$+\int S^{a'c'ac}S^{b'd'bd}\partial^+_{c'}\partial^+_{d'}A^+_{a'b'}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}\partial_c\partial_dA_{ab}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$=\int m^4A^{+ab}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}A_{ab}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$+\int\frac{1}{2}m^2F^{+bc|a}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}F_{bc|a}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}+\int\frac{1}{2}m^2F^{+ac|b}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}F_{ac|b}(\vec{r},t)\}$
$+\int S^{b'd'bd}\partial^+_{d'}F^{+ac}_{b'}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}\partial_dF_{ac|b}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$=\int m^4A^{+ab}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}A_{ab}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$+\int\frac{1}{2}m^2F^{+bc|a}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}F_{bc|a}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}+\int\frac{1}{2}m^2F^{+ac|b}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}F_{ac|b}(\vec{r},t)\}$
$+\int\frac{1}{4}F^{+ac|bd}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}F_{ac|bd}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$=\int m^4A^{+ab}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}A_{ab}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}+\int m^2F^{+ab|c}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}F_{ab|c}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$
$+\frac{1}{4}\int F^{+ab|cd}(\vec{r},t)\frac{(-i\partial_u)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^2}F_{ab|cd}(\vec{r},t)\}d^3\vec{r}$ □

性质5.3.1. $F_{ab|cd}=\partial_aF_{b|cd}-\partial_bF_{a|cd}=\partial_cF_{ab|d}-\partial_dF_{ab|c}=\partial_a\partial_cA_{bd}+\partial_b\partial_dA_{ac}-\partial_a\partial_dA_{bc}-\partial_b\partial_cA_{ad}$

证明: $F_{ab|cd}=\partial_aF_{b|cd}-\partial_bF_{a|cd}$
$=\partial_a(\partial_cA_{bd}-\partial_dA_{bc})-\partial_b(\partial_cA_{ad}-\partial_dA_{ac})$
$=\partial_a\partial_cA_{bd}+\partial_b\partial_dA_{ac}-\partial_a\partial_dA_{bc}-\partial_b\partial_cA_{ad}$ □

证明: $F_{ab|cd}=\partial_cF_{ab|d}-\partial_dF_{ab|c}$
$=\partial_c(\partial_aA_{bd}-\partial_bA_{ad})-\partial_d(\partial_aA_{bc}-\partial_bA_{ac})$
$=\partial_a\partial_cA_{bd}+\partial_b\partial_dA_{ac}-\partial_a\partial_dA_{bc}-\partial_b\partial_cA_{ad}$ □

推论5.3.1. $(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})[\delta_{c'd'}-\frac{\partial_{c'}\partial_{d'}}{m^2}]\theta(t)\psi(x)$
$=\{\theta(t)(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})(\delta_{c'd'}-\frac{\partial^+_{c'}\partial^+_{d'}}{m^2})$
$+i\theta'(t)[\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}(\delta_{c'd'}-\frac{\partial^+_{c'}\partial^+_{d'}}{m^2})-\frac{(\delta_{c'\pi'}\partial^+_{d'}+\partial^+_{c'}\delta_{d'\pi'})}{m^2}(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})]$
$+\theta''(t)[\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}(\delta_{c'd'}-\frac{\partial^+_{c'}\partial^+_{d'}}{m^2})+\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}\frac{(\delta_{c'\pi'}\partial^+_{d'}+\partial^+_{c'}\delta_{d'\pi'})}{m^2}+\frac{\delta_{c'\pi'}\delta_{d'\pi'}}{m^2}(\delta_{ab}-\frac{\partial_a\partial_b}{m^2})]$
$-i\theta'''(t)[\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}\frac{(\delta_{c'\pi'}\partial^+_{d'}+\partial^+_{c'}\delta_{d'\pi'})}{m^2}-\frac{(\delta_{a\pi}\partial_b+\partial_a\delta_{b\pi})}{m^2}\frac{\delta_{c'\pi'}\delta_{d'\pi'}}{m^2}]$
$+\theta''''(t)\frac{\delta_{a\pi}\delta_{b\pi}}{m^2}\frac{\delta_{c'\pi'}\delta_{d'\pi'}}{m^2}\}\psi(x)$

性质5.3.2. $F_{ab|cd}=F_{cd|ab},F_{ab|cd}=-F_{ba|cd},F_{ab|cd}=-F_{ab|dc},F_{ab|cd}=F_{ba|dc}$

第三十六章　高维时空有质量粒子的协变量子化

自我评述：本章将有质量粒子协变量子化推广到了一般N+1维时空中。在N+1维时空中与四维时空类似，对于Bargmann-Wigner方程或Dirac方程描述的粒子，一般来说既可以描述带荷的复粒子，也可以描述不带荷的马约拉纳粒子。两种情形的主对易规则形式一致，但其余对易或反对易括号，对带荷的复粒子一般为零；对不带荷的马约拉纳粒子，其余对易或反对易括号由主对易规则和马约拉纳条件自然得到，一般不为零。在本章只讨论复粒子情形，一般也只给出主对易规则，不再专门讨论马约拉纳粒子情形，若要得到马约拉纳粒子情形的量子场论，只需在复粒子情形加上马约拉纳条件即可自然得到。

1 N+1维时空中的洛伦兹推动变换

1.1 N+1维时空中矢量的洛伦兹推动变换

定义1.1.1. $\Omega(s) := \frac{1}{2}(\Gamma\otimes I_{l^{2s-1}} + I_l\otimes\Gamma\otimes I_{l^{2s-2}} + \cdot\cdot + I_{l^{2s-1}}\otimes\Gamma), l = 2^{[\frac{N-1}{2}]}$

定义1.1.2. $L = \{\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&i\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\cdot\cdot\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ -i&0&0&\cdot\cdot&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&i\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\cdot\cdot\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-i&0&\cdot\cdot&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&i\\ 0&0&0&0&0&0&\cdot\cdot\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-i&\cdot\cdot&0&0&0 \end{bmatrix}, \cdot\cdot, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\cdot\cdot\\ 0&0&0&0&0&0&i\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&\cdot\cdot&-i&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\cdot\cdot\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&i\\ 0&0&0&\cdot\cdot&0&-i&0 \end{bmatrix}\}$

推论1.1.1. $L_{\vec{v}} = e^{-\{ln[\gamma_v(1+v)]\}\hat{v}\cdot L} = 1-\gamma_v(\vec{v}\cdot L) + \frac{\gamma_v-1}{v^2}(\vec{v}\cdot L)^2, L_{\vec{v}}L_{-\vec{v}} = L_{-\vec{v}}L_{\vec{v}} = I$

推论1.1.2. $L_{\vec{v}}\begin{bmatrix}\vec{0}\\ i\end{bmatrix} = e^{-ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot L}\begin{bmatrix}\vec{0}\\ i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\gamma_v\vec{v}\\ i\gamma_v\end{bmatrix}, L_{\vec{v}}\begin{bmatrix}\vec{0}\\ im\end{bmatrix} = e^{-ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot L}\begin{bmatrix}\vec{0}\\ im\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{p}\\ iE_{\vec{p}}\end{bmatrix}$

1.2 N+1维时空中中微子旋量的洛伦兹推动变换

性质1.2.1. $(\vec{v}\cdot\Gamma)^2 = v^2, (\vec{v}\cdot i\vec{\gamma}\gamma_0)^2 = v^2$

推论1.2.1. $\Lambda_{\varsigma\vec{v}} = e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\frac{1}{2}\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}(1+\gamma_v-\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot\Gamma), c = \frac{(1+\gamma_v)}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}, s = -\frac{\varsigma\gamma_v}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}$

1.3 N+1维时空中电子旋量的洛伦兹推动变换

推论1.3.1. $D_{\varsigma\vec{v}} = e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot(\frac{i}{2}\vec{\gamma}\gamma_0)} = \frac{1}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}[1+\gamma_v-i\varsigma\gamma_v\vec{v}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0]$

推论1.3.2. $D_{\vec{v}} = e^{-ln\frac{E+|\vec{p}|}{m}\hat{p}\cdot(\frac{i}{2}\vec{\gamma}\gamma_0)} = \frac{m-i\gamma^a p_a\gamma_0}{\sqrt{2m(E+m)}}$

证明: $D_{\vec{v}} = e^{-ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot(\frac{i}{2}\vec{\gamma}\gamma_0)} = \frac{1+\gamma_v-i\gamma_v\vec{v}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}} = \frac{E+m-i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{\sqrt{2m(E+m)}} = \frac{m-i\gamma^a p_a\gamma_0}{\sqrt{2m(E+m)}}$ □

1.4 N+1维时空中光子旋量的洛伦兹推动变换的多项式表示

推论1.4.1. $e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\Omega(1)} = 1-\varsigma\gamma_v v[\hat{v}\cdot\Omega(1)] + (\gamma_v-1)[\hat{v}\cdot\Omega(1)]^2$

1.5 N+1维时空中引力微子旋量的洛伦兹推动变换的多项式表示

推论1.5.1. $e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\Omega(\frac{3}{2})} = \frac{(\gamma_v+1)}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}(1-\frac{\gamma_v-1}{4}) - \frac{2\varsigma\gamma_v v}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}(1-\frac{\gamma_v-1}{12})[\hat{v}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]$
$+\frac{\gamma_v^2-1}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}[\hat{v}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]^2 - \frac{1}{3}\frac{2\varsigma\gamma_v v(\gamma_v-1)}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}[\hat{v}\cdot\Omega(\frac{3}{2})]^3$

1.6 N+1维时空中引力子旋量的洛伦兹推动变换的多项式表示

推论1.6.1. $e^{-\varsigma ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot\Omega(2)} = 1-\varsigma\gamma_v(1-\frac{\gamma_v-1}{3})[\vec{v}\cdot\Omega(2)] + \frac{\gamma_v-1}{v^2}(1-\frac{\gamma_v-1}{6})[\vec{v}\cdot\Omega(2)]^2$
$-\frac{1}{3}\frac{\varsigma\gamma_v(\gamma_v-1)}{v^2}[\vec{v}\cdot\Omega(2)]^3 + \frac{1}{6}\frac{(\gamma_v-1)^2}{v^4}[\vec{v}\cdot\Omega(2)]^4$

2 N+1维时空中电子的协变量子化

2.1 N+1维时空中的电子方程 [5]

偶数维时空中的电子方程：

定义2.1.1. $(\gamma^a\partial_a+m)\psi=0,\psi=\begin{bmatrix}\varphi\\ \eta\end{bmatrix},\gamma^a=(\Gamma\otimes\sigma_y,\varsigma I_*\otimes\sigma_z)=(\vec{\gamma},\varsigma I_*\otimes\sigma_z)$

奇数维时空中的电子方程：

定义2.1.2. $(\gamma^a\partial_a+m)\psi=0,\psi=\begin{bmatrix}\varphi\\ \eta\end{bmatrix},\gamma^a=(\Gamma\otimes\sigma_y,I_*\otimes\sigma_x,\varsigma I_*\otimes\sigma_z)=(\vec{\gamma},\varsigma I_*\otimes\sigma_z)$

2.2 N+1维时空中的电子静止解和运动解

N+1维时空中的电子方程统一写法：

定义2.2.1. $(\gamma^a\partial_a+m)\psi=0,\psi=\begin{bmatrix}\varphi\\ \eta\end{bmatrix},\gamma^a=(\vec{\gamma},\varsigma I_*\otimes\sigma_z)$

推论2.2.1. $\partial_{t_0}\psi(\vec{0})=-im\gamma_0\psi(\vec{0})\Leftrightarrow\psi(\vec{0})=e^{-i\gamma_0 mt_0}\psi_0,\forall\psi_0$

推论2.2.2. $\psi(\vec{p})=\frac{m-i\gamma^a p_a\gamma_0}{\sqrt{2m(E+m)}}e^{i\gamma_0(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\psi_p=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})e^{i\gamma_0(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}\psi_p$

推论2.2.3. $\psi^{(+\varsigma)}(\vec{p})=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})\begin{bmatrix}\varphi\\ 0\end{bmatrix}e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)},\psi^{(-\varsigma)}(\vec{p})=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})\begin{bmatrix}0\\ \eta\end{bmatrix}e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$

2.3 N+1维时空中电子平面波解的性质

推论2.3.1. $\begin{cases}[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]^+=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})\\ [\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})][\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]=-\frac{i\gamma^a p_a\gamma_0}{m}\\ [\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]\gamma_0[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]=\gamma_0\\ [\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})][\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1+\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]=1\end{cases}$

性质2.3.1. $\begin{cases}[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]\begin{bmatrix}I&0\\0&0\end{bmatrix}[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]=\frac{(\varsigma m-i\gamma^a p_a)\gamma_0}{2m}\\ [\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]\begin{bmatrix}0&0\\0&I\end{bmatrix}[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]=\frac{(-\varsigma m-i\gamma^a p_a)\gamma_0}{2m}\end{cases}$

性质2.3.2. $\begin{bmatrix}\varphi\\0\end{bmatrix}^+\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m}\begin{bmatrix}\eta\\0\end{bmatrix}\equiv 0,\begin{bmatrix}0\\\varphi\end{bmatrix}^+\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m}\begin{bmatrix}0\\\eta\end{bmatrix}\equiv 0$

性质2.3.3. $\begin{cases}\begin{bmatrix}\varphi\\0\end{bmatrix}^+[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})][\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]\begin{bmatrix}\eta\\0\end{bmatrix}=\frac{E}{m}\varphi^+\eta\\ \begin{bmatrix}0\\\varphi\end{bmatrix}^+[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})][\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]\begin{bmatrix}0\\\eta\end{bmatrix}=\frac{E}{m}\varphi^+\eta\end{cases}$

性质2.3.4. $\begin{cases}\begin{bmatrix}\varphi\\0\end{bmatrix}^+[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})][\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1+\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]\begin{bmatrix}0\\\eta\end{bmatrix}=0\\ \begin{bmatrix}0\\\varphi\end{bmatrix}^+[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})][\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1+\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]\begin{bmatrix}\eta\\0\end{bmatrix}=0\end{cases}$

性质2.3.5. $\begin{cases}\begin{bmatrix}\varphi\\0\end{bmatrix}^+[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]\gamma_0[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]\begin{bmatrix}\eta\\0\end{bmatrix}=\varphi^+\eta\\ \begin{bmatrix}0\\\varphi\end{bmatrix}^+[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]\gamma_0[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]\begin{bmatrix}0\\\eta\end{bmatrix}=-\varphi^+\eta\end{cases}$

性质2.3.6. $\begin{cases}\begin{bmatrix}\varphi\\0\end{bmatrix}^+[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]\gamma_0[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]\begin{bmatrix}0\\\eta\end{bmatrix}=0\\ \begin{bmatrix}0\\\varphi\end{bmatrix}^+[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]\gamma_0[\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})]\begin{bmatrix}\eta\\0\end{bmatrix}=0\end{cases}$

2.4 N+1维时空中的电子自旋基

定义2.4.1. $u_\varsigma(\vec{p},h) := \sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})\begin{bmatrix}1\\0\\0_{l-2}\\0_l\end{bmatrix}, \sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})\begin{bmatrix}0\\1\\0_{l-2}\\0_l\end{bmatrix}, \cdot\cdot, \sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})\begin{bmatrix}0_{l-2}\\0\\1\\0_l\end{bmatrix}$

定义2.4.2. $v_\varsigma(\vec{p},h) := \sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})\begin{bmatrix}0_l\\1\\0\\0_{l-2}\end{bmatrix}, \sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})\begin{bmatrix}0_l\\0\\1\\0_{l-2}\end{bmatrix}, \cdot\cdot, \sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})\begin{bmatrix}0_l\\0_{l-2}\\0\\1\end{bmatrix}$

2.5 N+1维时空中Dirac自旋基是自旋、螺旋度和电荷三个算符的共同本征态

性质2.5.1.

$$\begin{cases}\sigma^2(\frac{1}{2})\otimes I_* u(\vec{p},h) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)u(\vec{p},h)\\ \sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}\otimes I_* u(\vec{p},h) = (-1)^{h+1}\frac{1}{2}u(\vec{p},h)\\ \hat{Q}(\vec{p})u(\vec{p},h) = -u(\vec{p},h), h=1,2,\cdot\cdot,l\\ \frac{E+m}{2m}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})[(\frac{l+1}{2})-\sigma_z(\frac{l-1}{2})](1+\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})u(\vec{p},h) = hu(\vec{p},h)\\ \text{描述电子}:(s,h;Q) = (\frac{1}{2};h,-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sigma^2(\frac{1}{2})\otimes I_* v(\vec{p},h) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)v(\vec{p},h)\\ \sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}\otimes I_* v(\vec{p},h) = (-1)^{h+1}\frac{1}{2}v(\vec{p},h)\\ \hat{Q}(\vec{p})v(\vec{p},h) = v(\vec{p},h), h=1,2,\cdot\cdot,l\\ \frac{E+m}{2m}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})[(\frac{l+1}{2})-\sigma_z(\frac{l-1}{2})](1+\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})v(\vec{p},h) = hv(\vec{p},h)\\ \text{描述正电子}:(s,h;Q) = (\frac{1}{2};h,1)\end{cases}$$

2.6 N+1维时空中的电子自旋空间

2.7 N+1维时空中的电子自旋基性质(在一般表象下也成立)

推论2.7.1. $\bar{u}_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') = \varsigma\delta_{hh'}, \bar{v}_\varsigma(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h') = -\varsigma\delta_{hh'}, \bar{u}_\varsigma(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h') = 0, \bar{v}_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') = 0$

推论2.7.2.

$u_\varsigma^+(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') = \frac{E}{m}\delta_{hh'}, v_\varsigma^+(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h') = \frac{E}{m}\delta_{hh'}, u_\varsigma^+(\vec{p},h)v_\varsigma(-\vec{p},h') = 0, v_\varsigma^+(\vec{p},h)u_\varsigma(-\vec{p},h') = 0$

推论2.7.3. $\sum_h u_\varsigma(\vec{p},h)\bar{u}_\varsigma(\vec{p},h) = \frac{\varsigma m - i\gamma^a p_a}{2m}, \sum_h v_\varsigma(\vec{p},h)\bar{v}_\varsigma(\vec{p},h) = \frac{-\varsigma m - i\gamma^a p_a}{2m}$

推论2.7.4. $\sum_h u_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma^+(\vec{p},h) = \frac{(\varsigma m - i\gamma^a p_a)\gamma_0}{2m}, \sum_h v_\varsigma(\vec{p},h)v_\varsigma^+(\vec{p},h) = \frac{(-\varsigma m - i\gamma^a p_a)\gamma_0}{2m}$

推论2.7.5. $\begin{cases}\sum_h u_\varsigma(\vec{p},h)\bar{u}_\varsigma(\vec{p},h) - v_\varsigma(\vec{p},h)\bar{v}_\varsigma(\vec{p},h)] = \varsigma\\ \sum_h u_\varsigma(\vec{p},h)\bar{u}_\varsigma(\vec{p},h) + v_\varsigma(\vec{p},h)\bar{v}_\varsigma(\vec{p},h)] = \frac{-i\gamma^a p_a}{m}\\ \sum_h u_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma^+(\vec{p},h) + v_\varsigma(-\vec{p},h)v_\varsigma^+(-\vec{p},h)] = \frac{E}{m}\end{cases}$

2.8 N+1维时空中电子的平面波解

推论2.8.1.

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=1}^{l}[a_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u_\varsigma(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b_\varsigma^+(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}v_\varsigma(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}$$

$$\begin{cases}a_\varsigma(\vec{p},h) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{E}{m}}u_\varsigma^+(\vec{p},h)\psi(\vec{r},t)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\\ b_\varsigma^+(\vec{p},h) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{E}{m}}v_\varsigma^+(\vec{p},h)\psi(\vec{r},t)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^3\vec{r}\end{cases}$$

2.9 N+1维时空中电子的协变量子化规则

推论2.9.1. $\begin{cases}\{a_\varsigma(\vec{p},h),a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ \{a_\varsigma(\vec{p},h),a_\varsigma(\vec{p}',h')\}=0\\ \{a_\varsigma^+(\vec{p},h),a_\varsigma^+(\vec{p}',h')\}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\{\psi_\alpha(\vec{r},t),\psi_\beta^+(\vec{r}',t)\}=\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\\ \{\psi_\alpha(\vec{r},t),\psi_\beta(\vec{r}',t)\}=0\\ \{\psi_\alpha^+(\vec{r},t),\psi_\beta^+(\vec{r}',t)\}=0\end{cases}$

定理2.9.1. $\{\psi(x),\psi^+(x')\}=i(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0\Delta(x-x')$

证明:

$\{\psi(x),\psi^+(x')\}=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\sqrt{\frac{m}{E}}\sqrt{\frac{m}{E'}}\sum\limits_{h,h'=1}^{l}u_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma^+(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(p\cdot x-p'\cdot x')}\{a_\varsigma(\vec{p},h),a_\varsigma^+(\vec{p},h)\}$

$+v_\varsigma(\vec{p},h)v_\varsigma^+(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(p\cdot x-p'\cdot x')}\{b_\varsigma^+(\vec{p},h),b_\varsigma(\vec{p}',h')\}d^N\vec{p}d^N\vec{p}'$

$=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\sqrt{\frac{m}{E}}\sqrt{\frac{m}{E'}}\sum\limits_{h,h'=1}^{l}\delta_{hh'}\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')[u_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma^+(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(p\cdot x-p'\cdot x')}+v_\varsigma(\vec{p},h)v_\varsigma^+(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(p\cdot x-p'\cdot x')}]d^N\vec{p}d^N\vec{p}'$

$=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\frac{m}{E}[\sum\limits_{h=1}^{l}u_\varsigma(\vec{p},h)u_\varsigma^+(\vec{p},h)e^{i\varsigma p\cdot(x-x')}+\sum\limits_{h=1}^{l}v_\varsigma(\vec{p},h)v_\varsigma^+(\vec{p},h)e^{-i\varsigma p\cdot(x-x')}]d^N\vec{p}$

$=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\frac{m}{E}[\frac{(\varsigma m-i\gamma^a p_a)\gamma^0}{2m}e^{i\varsigma p\cdot(x-x')}+\frac{(-\varsigma m-i\gamma^a p_a)\gamma^0}{2m}e^{-i\varsigma p\cdot(x-x')}]d^N\vec{p}$

$=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\frac{1}{2E}\varsigma(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0[e^{i\varsigma p\cdot(x-x')}-e^{-i\varsigma p\cdot(x-x')}]d^N\vec{p}$

$=i(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0\frac{-i\varsigma}{(2\pi)^N}\int\frac{1}{2E}[e^{i\varsigma p\cdot(x-x')}-e^{-i\varsigma p\cdot(x-x')}]d^N\vec{p}$

$=i(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0\Delta(x-x')$ □

2.10 N+1维时空中Dirac方程的守恒荷

推论2.10.1. $Q=\int\psi^+\psi dr^N=\int\sum\limits_h[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)+b_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma^+(\vec{p},h)]d^N\vec{p}$

证明: $Q=\int\psi^+\psi dr^N$

$=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\sum\limits_{h,h'}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u_\varsigma^+(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}v_\varsigma^+(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$

$[a_\varsigma(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}u_\varsigma(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+b_\varsigma^+(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}v_\varsigma(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^N\vec{p}'d^N\vec{p}dr^N$

$=\int\sum\limits_{h,h'}\frac{m}{E}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u_\varsigma^+(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h')+b_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma^+(\vec{p},h')v_\varsigma^+(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h')]\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')d^N\vec{p}'d^N\vec{p}$

$=\int\sum\limits_{h,h'}\frac{m}{E}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u_\varsigma^+(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h')+b_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma^+(\vec{p},h')v_\varsigma^+(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h')]d^N\vec{p}$

$=\int\sum\limits_h[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)+b_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma^+(\vec{p},h)]d^N\vec{p}$ □

推论2.10.2. $H=i\int\psi^+\partial_t\psi dr^N=\varsigma\int\sum\limits_h E(\vec{p})[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)-b_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma^+(\vec{p},h)]d^N\vec{p}$

证明: $H=i\int\psi^+\partial_t\psi dr^N$

$=i\frac{1}{(2\pi)^N}\int\sum\limits_{h,h'}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u_\varsigma^+(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}v_\varsigma^+(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$

$(-i\varsigma E')[a_\varsigma(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}u_\varsigma(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}-b_\varsigma^+(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}v_\varsigma(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^N\vec{p}'d^N\vec{p}dr^N$

$=-i\int\sum\limits_{h,h'}\frac{m}{E}(-i\varsigma E')[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u_\varsigma^+(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h')-b_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma^+(\vec{p},h')v_\varsigma^+(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h')]\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')d^N\vec{p}'d^N\vec{p}$

$=-i\int\sum\limits_{h,h'}\frac{m}{E}(-i\varsigma E')[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u_\varsigma^+(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h')-b_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma^+(\vec{p},h')v_\varsigma^+(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h')]d^N\vec{p}$

$=\varsigma\int\sum\limits_h E(\vec{p})[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)-b_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma^+(\vec{p},h)]d^N\vec{p}$ □

推论2.10.3. $\vec{P}=-i\int\psi^+\nabla\psi dr^N=\varsigma\int\sum\limits_h\vec{p}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h)-b_\varsigma(\vec{p},s)b_\varsigma^+(\vec{p},h)]d^N\vec{p}$

证明: $\vec{P}=-i\int\psi^+\nabla\psi dr^N$

$=-i\frac{1}{(2\pi)^N}\int\sum\limits_{h,h'}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u_\varsigma^+(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}v_\varsigma^+(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$

$(i\varsigma\vec{p}')[a_\varsigma(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}u_\varsigma(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}-b_\varsigma^+(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}v_\varsigma(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^N\vec{p}'d^N\vec{p}dr^N$

$=-i\int\sum\limits_{h,h'}\frac{m}{E}(i\varsigma\vec{p}')[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u_\varsigma^+(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h')-b_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma^+(\vec{p},h')v_\varsigma^+(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h')]\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')d^N\vec{p}'d^N\vec{p}$

$= -i\int\sum_{h,h'}\frac{m}{E}(i\varsigma\vec{p})[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u_\varsigma^+(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') - b_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma^+(\vec{p},h')v_\varsigma^+(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h')]d^N\vec{p}$

$= \varsigma\int\sum_h\vec{p}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h) - b_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma^+(\vec{p},h)]d^N\vec{p}$ □

推论2.10.4. $P_u = -i\int\psi^+\partial_u\psi dr^N = \varsigma\int\sum_h p_u[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h) - b_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma^+(\vec{p},h)]d^N\vec{p}$

证明: $P_u = -i\int\psi^+\partial_u\psi dr^N$

$= i\frac{1}{(2\pi)^N}\int\sum_{h,h'}[a_\varsigma^+(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}u_\varsigma^+(\vec{p},h)e^{-i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b_\varsigma(\vec{p},h)\sqrt{\frac{m}{E}}v_\varsigma^+(\vec{p},h)e^{i\varsigma(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]$

$(i\varsigma p'_u)[a_\varsigma(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}u_\varsigma(\vec{p}',h')e^{i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)} - b_\varsigma^+(\vec{p}',h')\sqrt{\frac{m}{E'}}v_\varsigma(\vec{p}',h')e^{-i\varsigma(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^N\vec{p}'d^N\vec{p}dr^N$

$= -i\int\sum_{h,h'}\frac{m}{E}(i\varsigma p'_u)[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u_\varsigma^+(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') - b_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma^+(\vec{p},h')v_\varsigma^+(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h')]\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')d^N\vec{p}'d^N\vec{p}$

$= -i\int\sum_{h,h'}\frac{m}{E}(i\varsigma p'_u)[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h')u_\varsigma^+(\vec{p},h)u_\varsigma(\vec{p},h') - b_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma^+(\vec{p},h')v_\varsigma^+(\vec{p},h)v_\varsigma(\vec{p},h')]d^N\vec{p}$

$= \varsigma\int\sum_h p_u[a_\varsigma^+(\vec{p},h)a_\varsigma(\vec{p},h) - b_\varsigma(\vec{p},h)b_\varsigma^+(\vec{p},h)]d^N\vec{p}$ □

3 N+1维时空中Bargmann-Wigner方程的协变量子化

本节证明可以参照四维时空中的方法，完全可以将四维时空中的证明方法一一对应平移到N+1维时空中来，故一般不再详细给出。

3.1 N+1维时空中的电子正常自旋基性质(在一般表象下也成立)

定义3.1.1. $u_(\vec{p},h) := \begin{cases} u_+(\vec{p},h), \varsigma = 1 \\ v_-(\vec{p},h), \varsigma = -1 \end{cases}, v_(\vec{p},h) := \begin{cases} v_+(\vec{p},h), \varsigma = 1 \\ u_-(\vec{p},h), \varsigma = -1 \end{cases}$

推论3.1.1. $\bar{u}(\vec{p},h)u(\vec{p},h') = \delta_{hh'}, \bar{v}(\vec{p},h)v(\vec{p},h') = -\delta_{hh'}, \bar{u}(\vec{p},h)v(\vec{p},h') = 0, \bar{v}(\vec{p},h)u(\vec{p},h') = 0$

推论3.1.2. $u^+(\vec{p},h)u(\vec{p},h') = \frac{E}{m}\delta_{hh'}, v^+(\vec{p},h)v(\vec{p},h') = \frac{E}{m}\delta_{hh'}, u^+(\vec{p},h)v(-\vec{p},h') = 0, v^+(\vec{p},h)u(-\vec{p},h') = 0$

推论3.1.3. $\sum_h u(\vec{p},h)\bar{u}(\vec{p},h) = \frac{m-i\gamma^a p_a}{2m}, \sum_h v(\vec{p},h)\bar{v}(\vec{p},h) = \frac{-m-i\gamma^a p_a}{2m}$

推论3.1.4. $\sum_h u(\vec{p},h)u^+(\vec{p},h) = \frac{(m-i\gamma^a p_a)\gamma_0}{2m}, \sum_h v(\vec{p},h)v^+(\vec{p},h) = \frac{(-m-i\gamma^a p_a)\gamma_0}{2m}$

推论3.1.5. $\begin{cases} \sum_h u(\vec{p},h)\bar{u}(\vec{p},h) - v(\vec{p},h)\bar{v}(\vec{p},h)] = 1 \\ \sum_h u(\vec{p},h)\bar{u}(\vec{p},h) + v(\vec{p},h)\bar{v}(\vec{p},h)] = \frac{-i\gamma^a p_a}{m} \\ \sum_h u(\vec{p},h)u^+(\vec{p},h) + v(-\vec{p},h)v^+(-\vec{p},h)] = \frac{E}{m} \end{cases}$

3.2 N+1维时空中Dirac方程自旋基的广义多项式定理

定理3.2.1.

$$\sum_{\sum n_i = 2s}\frac{(2s)!}{n_1!n_2!\cdots n_l!}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},1)\cdots}_{n_1}\underbrace{u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},2)\cdots}_{n_2}\cdots\underbrace{u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},l)\cdots_{\}}}_{n_l}\underbrace{u^+_{(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},1)\cdots}_{n_1}\underbrace{u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},2)\cdots}_{n_2}\cdots\underbrace{u^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},l)\cdots_{)}}_{n_l}$$

$$= \overbrace{\sum_{h=1}^{l}u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)\cdots\sum_{h=1}^{l}u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},h)\cdots\sum_{h=1}^{l}u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)\cdots_{\})}}^{2s}$$

推论3.2.1.

$$\sum_{n_1\cdots n_l}\frac{(2s)!}{n_1!n_2!\cdots n_l!}\underbrace{u_{\{i_\varsigma}(\vec{p},1)\cdots}_{n_1}\underbrace{u_{i_\varsigma}(\vec{p},2)\cdots}_{n_2}\cdots\underbrace{u_{i_\varsigma}(\vec{p},l)\cdots_{\}}}_{n_l}\underbrace{u^+_{(i'_\varsigma}(\vec{p},1)\cdots}_{n_1}\underbrace{u^+_{i'_\varsigma}(\vec{p},2)\cdots}_{n_2}\cdots\underbrace{u^+_{i'_\varsigma}(\vec{p},l)\cdots_{)}}_{n_l}$$

$$= \overbrace{\sum_{h=1}^{l}u_{\{i_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{(i'_\varsigma}(\vec{p},h)\cdots\sum_{h=1}^{l}u_{i_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{i'_\varsigma}(\vec{p},h)\cdots\sum_{h=1}^{l}u_{i_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{i'_\varsigma}(\vec{p},h)\cdots_{\})}}^{2s}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{n_1\cdot\cdot n_l}\frac{(2s)!}{n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}[u_{i_\varsigma}(\vec{p},1)u^+_{i'_\varsigma}(\vec{p},1)]^{n_1}[u_{i_\varsigma}(\vec{p},2)u^+_{i'_\varsigma}(\vec{p},2)]^{n_2}\cdot\cdot[u_{i_\varsigma}(\vec{p},l)u^+_{i'_\varsigma}(\vec{p},l)]^{n_l}=[\sum_{h=1}^{l}u_{i_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{i'_\varsigma}(\vec{p},h)]^{2s}$$

以上推论正好就是多项式展开定理。

3.3 N+1维时空中Bargmann-Wigner方程的自旋基

定义3.3.1.

$$\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l):=\frac{1}{\sqrt{(2s)!n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},2)\cdot\cdot}_{n_2}\cdot\cdot\underbrace{u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},l)\cdot\cdot_{\}}}_{n_l},n_1+n_2+\cdot\cdot n_l=2s\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l):=\frac{1}{\sqrt{(2s)!n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}}\underbrace{v_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},2)\cdot\cdot}_{n_2}\cdot\cdot\underbrace{v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},l)\cdot\cdot_{\}}}_{n_l},n_1+n_2+\cdot\cdot n_l=2s\end{cases}$$

3.4 N+1维时空中Bargmann-Wigner方程自旋基的正交性质(可以直接看出来)

推论3.4.1.

$$\begin{cases}\bar{U}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n'_1,n'_2,\cdot\cdot,n'_l)=\delta_{n_1n'_1}\delta_{n_2n'_2}\cdot\cdot\delta_{n_ln'_l}\\ \bar{V}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n'_1,n'_2,\cdot\cdot,n'_l)=\delta_{n_1n'_1}\delta_{n_2n'_2}\cdot\cdot\delta_{n_ln'_l}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{U}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n'_1,n'_2,\cdot\cdot,n'_l)=0\\ \bar{V}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n'_1,n'_2,\cdot\cdot,n'_l)=0\end{cases}$$

推论3.4.2.

$$\begin{cases}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n'_1,n'_2,\cdot\cdot,n'_l)=(\frac{E}{m})^{2s}\delta_{n_1n'_1}\delta_{n_2n'_2}\cdot\cdot\delta_{n_ln'_l}\\ V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n'_1,n'_2,\cdot\cdot,n'_l)=(\frac{E}{m})^{2s}\delta_{n_1n'_1}\delta_{n_2n'_2}\cdot\cdot\delta_{n_ln'_l}\end{cases}$$

$$\begin{cases}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p};n'_1,n'_2,\cdot\cdot,n'_l)=0\\ V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}^{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p};n'_1,n'_2,\cdot\cdot,n'_l)=0\end{cases}$$

3.5 N+1维时空中Bargmann-Wigner方程U-自旋基的分解

定理3.5.1. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)$

$$=\sum_{n'_1+\cdot\cdot+n'_l}^{=2s'}\frac{\sqrt{C_{n_1}^{n'_1}C_{n_2}^{n'_2}\cdot\cdot C_{n_l}^{n'_l}}}{\sqrt{C_{2s}^{2s'}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p};n_1-n'_1,n_2-n'_2,\cdot\cdot,n_l-n'_l)U_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p};n'_1,n'_2,\cdot\cdot,n'_l)$$

证明: $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{\sqrt{(2s)!n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}}$

$$\sum_{n'_1+\cdot\cdot+n'_l}^{=2s'}C_{n_1}^{n'_1}C_{n_2}^{n'_2}\cdot\cdot C_{n_l}^{n'_l}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},1)u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n_1-n'_1}\cdot\cdot\underbrace{u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},l)u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},l)}_{n_l-n'_l}\underbrace{u_{(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},1)u_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n'_1}\cdot\cdot\underbrace{u_{\sigma'_\varsigma}(\vec{p},l)u_{\tau'_\varsigma)}(\vec{p},l)}_{n'_l}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2s)!n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}}\sum_{n'_1+\cdot\cdot+n'_l}^{=2s'}C_{n_1}^{n'_1}C_{n_2}^{n'_2}\cdot\cdot C_{n_l}^{n'_l}$$

$$\sqrt{(2s-2s')!(n_1-n'_1)!(n_2-n'_2)!\cdot\cdot(n_l-n'_l)!}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p};n_1-n'_1,n_2-n'_2,\cdot\cdot,n_l-n'_l)$$

$$\sqrt{(2s')!n_1'!n_2'!\cdot\cdot n_l'!}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdot\cdot\sigma_\varsigma'\tau_\varsigma'}_{2s'}}(\vec{p};n_1',n_2',\cdot\cdot,n_l')$$

$$=\sum_{n_1'+\cdot\cdot+n_l'}^{=2s'}\frac{\sqrt{C_{n_1}^{n_1'}C_{n_2}^{n_2'}\cdot\cdot C_{n_l}^{n_l'}}}{\sqrt{C_{2s}^{2s'}}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p};n_1-n_1',n_2-n_2',\cdot\cdot,n_l-n_l')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdot\cdot\sigma_\varsigma'\tau_\varsigma'}_{2s'}}(\vec{p};n_1',n_2',\cdot\cdot,n_l')$$ □

推论3.5.1. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l)U_{\tau_\varsigma}(\vec{p};1,0,\cdot\cdot,0)$

$$+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)U_{\tau_\varsigma}(\vec{p};0,1,\cdot\cdot,0)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)U_{\tau_\varsigma}(\vec{p};0,0,\cdot\cdot,1)$$

推论3.5.2. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)$

$$=\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};0,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)U_{\tau_\varsigma}(\vec{p};0,1,\cdot\cdot,0)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)U_{\tau_\varsigma}(\vec{p};0,0,\cdot\cdot,1)$$

3.6 N+1维时空中Bargmann-Wigner方程V-自旋基的分解

定理3.6.1. $V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdot\cdot\sigma_\varsigma'\tau_\varsigma'}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)$

$$=\sum_{n_1'+\cdot\cdot+n_l'}^{=2s'}\frac{\sqrt{C_{n_1}^{n_1'}C_{n_2}^{n_2'}\cdot\cdot C_{n_l}^{n_l'}}}{\sqrt{C_{2s}^{2s'}}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p};n_1-n_1',n_2-n_2',\cdot\cdot,n_l-n_l')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdot\cdot\sigma_\varsigma'\tau_\varsigma'}_{2s'}}(\vec{p};n_1',n_2',\cdot\cdot,n_l')$$

证明: $V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdot\cdot\sigma_\varsigma'\tau_\varsigma'}_{2s}}(\vec{p},h)=\frac{1}{\sqrt{(2s)!n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}}$

$$\sum_{n_1'+\cdot\cdot+n_l'}^{=2s'}C_{n_1}^{n_1'}C_{n_2}^{n_2'}\cdot\cdot C_{n_l}^{n_l'}\underbrace{v_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},1)v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n_1-n_1'}\underbrace{\cdot\cdot v_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},l)v_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},l)}_{n_l-n_l'}\underbrace{v_{(\lambda_\varsigma'}(\vec{p},1)v_{\mu_\varsigma'}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n_1'}\underbrace{\cdot\cdot v_{\sigma_\varsigma'}(\vec{p},l)v_{\tau_\varsigma')}(\vec{p},l)}_{n_l'}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2s)!n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}}\sum_{n_1'+\cdot\cdot+n_l'}^{=2s'}C_{n_1}^{n_1'}C_{n_2}^{n_2'}\cdot\cdot C_{n_l}^{n_l'}$$

$$\sqrt{(2s-2s')!(n_1-n_1')!(n_2-n_2')!\cdot\cdot(n_l-n_l')!}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p};n_1-n_1',n_2-n_2',\cdot\cdot,n_l-n_l')$$

$$\sqrt{(2s')!n_1'!n_2'!\cdot\cdot n_l'!}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdot\cdot\sigma_\varsigma'\tau_\varsigma'}_{2s'}}(\vec{p};n_1',n_2',\cdot\cdot,n_l')$$

$$=\sum_{n_1'+\cdot\cdot+n_l'}^{=2s'}\frac{\sqrt{C_{n_1}^{n_1'}C_{n_2}^{n_2'}\cdot\cdot C_{n_l}^{n_l'}}}{\sqrt{C_{2s}^{2s'}}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p};n_1-n_1',n_2-n_2',\cdot\cdot,n_l-n_l')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdot\cdot\sigma_\varsigma'\tau_\varsigma'}_{2s'}}(\vec{p};n_1',n_2',\cdot\cdot,n_l')$$ □

推论3.6.1. $V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_l)V_{\tau_\varsigma}(\vec{p};1,0,\cdot\cdot,0)$

$$+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)V_{\tau_\varsigma}(\vec{p};0,1,\cdot\cdot,0)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)V_{\tau_\varsigma}(\vec{p};0,0,\cdot\cdot,1)$$

推论3.6.2. $V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l)$

$$=\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};0,n_2-1,\cdot\cdot,n_l)V_{\tau_\varsigma}(\vec{p};0,1,\cdot\cdot,0)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_l-1)V_{\tau_\varsigma}(\vec{p};0,0,\cdot\cdot,1)$$

3.7 N+1维时空中Bargmann-Wigner方程的准投影算子

定义3.7.1.

$$\begin{cases}\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s):=\sum_{n_1\cdot\cdot n_l}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)U^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdot\cdot\tau_\varsigma'}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)\\ \Lambda_{-\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s):=\sum_{n_1\cdot\cdot n_l}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)U^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma'\mu_\varsigma'\cdot\cdot\tau_\varsigma'}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l)\end{cases}$$

推论3.7.1.

$$\begin{cases}\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s)=\frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{\Lambda_{+\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot\Lambda_{+\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s}\\ \Lambda_{-\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},s)=\frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{\Lambda_{-\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\Lambda_{-\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\frac{1}{2})\cdot\cdot\Lambda_{-\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}(\vec{p},\frac{1}{2})}_{2s}\end{cases}$$

从对称指标广义多项式定理便可以直接得到以上推论。

3.8 N+1维时空中Bargmann-Wigner方程 [18]平面波解猜想（后面章节会给出证明）

定理3.8.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma\}}_{2s}}(\vec{r},t)$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{r},t)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_l}^{=2s}\frac{m^s}{\sqrt{E}}[a(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_l)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}$$

$$U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l):=\frac{1}{\sqrt{(2s)!n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},2)\cdot\cdot}_{n_2}\cdot\cdot\underbrace{u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},l)\cdot\cdot\}}_{n_l},n_1+n_2+\cdot\cdot n_l=2s$$

$$V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\cdot\cdot\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_l):=\frac{1}{\sqrt{(2s)!n_1!n_2!\cdot\cdot n_l!}}\underbrace{v_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},1)\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},2)\cdot\cdot}_{n_2}\cdot\cdot\underbrace{v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},l)\cdot\cdot\}}_{n_l},n_1+n_2+\cdot\cdot n_l=2s$$

3.9 N+1维时空中Bargmann-Wigner方程的协变量子化规则

定义3.9.1. $\vec{h}:=(n_1,\cdot\cdot,n_l),\delta_{\vec{h}\vec{h}'}:=\delta_{n_1n'_1}\cdot\cdot\delta_{n_1n'_1}$

定理3.9.1.

$$\begin{cases}[a(\vec{p};\vec{h}),a^+(\vec{p}';\vec{h}')]_{-^{2s+1}}=\delta_{\vec{h}\vec{h}'}\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')\\ [b(\vec{p};\vec{h}),b^+(\vec{p}';\vec{h}')]_{-^{2s+1}}=\delta_{\vec{h}\vec{h}'}\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')\end{cases}\begin{cases}[a(\vec{p};\vec{h}),a(\vec{p}';\vec{h}')]_{-^{2s+1}}=0\\ [a^+(\vec{p};\vec{h}),a^+(\vec{p}';\vec{h}')]_{-^{2s+1}}=0\\ [b(\vec{p};\vec{h}),b(\vec{p}';\vec{h}')]_{-^{2s+1}}=0\\ [b^+(\vec{p};\vec{h}),b^+(\vec{p}';\vec{h}')]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}\begin{cases}[a(\vec{p};\vec{h}),b^+(\vec{p}';\vec{h}')]_{-^{2s+1}}=0\\ [a^+(\vec{p};\vec{h}),b(\vec{p}';\vec{h}')]_{-^{2s+1}}=0\\ [a(\vec{p};\vec{h}),b(\vec{p}';\vec{h}')]_{-^{2s+1}}=0\\ [a^+(\vec{p};\vec{h}),b^+(\vec{p}';\vec{h}')]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi^{(+)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^{(+)+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\Delta^{(+)}(x-x')\\ [\psi^{(-)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^{(-)+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\Delta^{(-)}(x-x')\end{cases}$$

证明：$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]=\frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}d^N\vec{p}'\sum_{\vec{h},\vec{h}'}(EE')^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{EE'}}^{2s}$

$$[[a(\vec{p},\vec{h})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},\vec{h})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{-ip\cdot x},[a^+(\vec{p}',\vec{h}')U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',\vec{h})e^{-ip'\cdot x'}+b(\vec{p}',\vec{h}')V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{ip'\cdot x'}]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}d^N\vec{p}'\sum_{\vec{h},\vec{h}'}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E'}}$$

$$[U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')[a(\vec{p},\vec{h}),a^+(\vec{p}',\vec{h}')]e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}+V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')[b^+(\vec{p},\vec{h}),b(\vec{p}',\vec{h}')]e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}d^N\vec{p}'\sum_{\vec{h},\vec{h}'}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E'}}$$

$$[U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')\delta_{\vec{h}\vec{h}'}\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}+(-1)^{2s+1}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')\delta_{\vec{h}\vec{h}'}\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}[\sum_{\vec{h}} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{ip\cdot(x-x')} + (-1)^{2s+1}\sum_{\vec{h}} V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{-ip\cdot(x-x')}]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}[\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},s)e^{ip\cdot(x-x')} + (-1)^{2s+1}\Lambda_{-\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},s)e^{-ip\cdot(x-x')}]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}[\frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{\Lambda_{+\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{2s}e^{ip\cdot(x-x')}$$

$$+ (-1)^{2s+1}\frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{\Lambda_{-\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\Lambda_{-\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{2s}e^{-ip\cdot(x-x')}]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}\{\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{ip\cdot(x-x')}$$

$$+ (-1)^{2s+1}\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(-m+\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m+\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{-ip\cdot(x-x')}\}$$

$$= \frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\frac{-i}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}\frac{1}{2E}[[e^{ip\cdot(x-x')} - e^{-ip\cdot(x-x')}]$$

$$= \frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')$$

$$= \frac{i(2m)^{2s}}{2^{2s-1}}\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(-i\partial,s)\Delta(x-x')$$

□

证明： $[\psi^{(+)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^{(+)+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}d^N\vec{p}'\sum_{\vec{h},\vec{h}'}(EE')^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{EE'}}^{2s}[a(\vec{p},\vec{h})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{ip\cdot x}, a^+(\vec{p}',\vec{h}')U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',\vec{h})e^{-ip'\cdot x'}]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}d^N\vec{p}'\sum_{\vec{h},\vec{h}'}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E'}}[U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')[a(\vec{p},\vec{h}),a^+(\vec{p}',\vec{h}')]e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}d^N\vec{p}'\sum_{\vec{h},\vec{h}'}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E'}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')\delta_{\vec{h}\vec{h}'}\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}\sum_{\vec{h}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{ip\cdot(x-x')}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},s)e^{ip\cdot(x-x')}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}\frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{\Lambda_{+\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\Lambda_{+\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{2s}e^{ip\cdot(x-x')}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}\{\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{ip\cdot(x-x')}$$

$$= \frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\frac{-i}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}\frac{1}{2E}e^{ip\cdot(x-x')}$$

$$= \frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta^{(+)}(x-x')$$

$$= \frac{i(2m)^{2s}}{2^{2s-1}}\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(-i\partial,s)\Delta^{(+)}(x-x')$$

□

证明： $[\psi^{(-)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^{(-)+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}d^N\vec{p}'\sum_{\vec{h},\vec{h}'}(EE')^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{EE'}}^{2s}[b^+(\vec{p},\vec{h})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{-ip\cdot x}, b(\vec{p}',\vec{h}')V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{ip'\cdot x'}]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}d^N\vec{p}'\sum_{\vec{h},\vec{h}'}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E'}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')[b^+(\vec{p},\vec{h}),b(\vec{p}',\vec{h}')]e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}d^N\vec{p}'\sum_{\vec{h},\vec{h}'}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E}}\sqrt{\frac{m^{2s}}{E'}}(-1)^{2s+1}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')\delta_{\vec{h}\vec{h}'}\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}(-1)^{2s+1}\sum_{\vec{h}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{-ip\cdot(x-x')}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}(-1)^{2s+1}\Lambda_{-\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},s)e^{-ip\cdot(x-x')}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}(-1)^{2s+1}\frac{1}{[(2s)!]^2}\underbrace{\Lambda_{-\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\Lambda_{-\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdot\cdot}_{2s}e^{-ip\cdot(x-x')}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}\frac{m^{2s}}{E}(-1)^{2s+1}\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(-m+\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m+\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}e^{-ip\cdot(x-x')}$$
$$= \frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\frac{i}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{p}\frac{1}{2E}e^{-ip\cdot(x-x')}$$
$$= \frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\Delta^{(-)}(x-x')$$
$$= \frac{i(2m)^{2s}}{2^{2s-1}}\Lambda_{+\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(-i\partial,s)\Delta^{(-)}(x-x') \qquad \square$$

3.10 N+1维时空中Bargmann-Wigner方程协变对易规则的反向推理

定理3.10.1. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}} = \frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\Delta(x-x')$

$\Rightarrow [a(\vec{p},\vec{h}),a^+(\vec{p}',\vec{h}')]_{-^{2s+1}} = \delta_{\vec{h}\vec{h}'}\delta^N(\vec{p}-\vec{p}'),[b(\vec{p},\vec{h}),b^+(\vec{p}',\vec{h}')]_{-^{2s+1}} = \delta_{\vec{h}\vec{h}'}\delta^N(\vec{p}-\vec{p}'),[rest]_{-^{2s+1}} = 0$

下面给出几个主要对易括号的详细证明过程。

证明： $[a(\vec{p},\vec{h}),a^+(\vec{p}',\vec{h}')]_{-^{2s+1}}$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^N\vec{r}d^N\vec{r}'$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')$$
$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\Delta(x-x')e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^N\vec{r}d^N\vec{r}'$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{r}d^N\vec{r}'\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')$$
$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\{\frac{-i}{(2\pi)^N}\int\frac{1}{2E_0}[e^{ip_0\cdot(x-x')}-e^{-ip_0\cdot(x-x')}]d^N\vec{p}_0\}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}$$
$$= [\frac{1}{(2\pi)^N}]^2\int\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')$$
$$\{\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-i\gamma^a p_{0a})\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_{0b})\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}e^{ip_0\cdot(x-x')}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^N\vec{r}d^N\vec{r}'$$
$$+(-1)^{2s+1}\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(-m-i\gamma^a p_{0a})\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m-i\gamma^b p_{0b})\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}e^{-ip_0\cdot(x-x')}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}\}d^N\vec{r}d^N\vec{r}'d^N\vec{p}_0$$
$$= [\frac{1}{(2\pi)^N}]^2\int d^N\vec{r}d^N\vec{r}'d^N\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$
$$U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')\{\sum_{\vec{h}_0}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)e^{i(p_0-p)\cdot x}e^{-i(p_0-p')\cdot x'}$$
$$+(-1)^{2s+1}\sum_{\vec{h}_0}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)e^{-i(p_0+p)\cdot x}e^{i(p_0+p')\cdot x'}\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int d^N\vec{p}_0 \tfrac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\tfrac{m^2}{EE'})^{2s} \\
&U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')\{\sum_{\vec{h}_0}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)U^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)\delta^N(\vec{p}_0-\vec{p})\delta^N(\vec{p}_0-\vec{p}') \\
&+(-1)^{2s+1}\sum_{\vec{h}_0}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)V^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)e^{2iE_0(t-t')}\delta^N(\vec{p}_0+\vec{p})\delta^N(\vec{p}_0+\vec{p}')\} \\
&= \delta^N(\vec{p}-\vec{p}')(\tfrac{m}{E})^{4s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})U^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h}') \\
&\{\sum_{\vec{h}_0}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},\vec{h}_0)U^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},\vec{h}_0)+(-1)^{2s+1}\sum_{\vec{h}_0}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p},\vec{h}_0)V^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p},\vec{h}_0)e^{2iE(t-t')}\} \\
&= \delta^N(\vec{p}-\vec{p}')(\sum_{\vec{h}_0}\delta_{\vec{h}\vec{h}_0}\delta_{\vec{h}'\vec{h}_0}+0) \\
&= \delta_{\vec{h}\vec{h}'}\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')
\end{aligned}
$$

□

证明： $[b^+(\vec{p},\vec{h}),b(\vec{p}',\vec{h}')]_{-^{2s+1}}$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{(2\pi)^N}\int\sqrt{EE'}(\tfrac{m}{EE'})^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^N\vec{r}d^N\vec{r}' \\
&= \tfrac{1}{(2\pi)^N}\int\sqrt{EE'}(\tfrac{m}{EE'})^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}') \\
&\tfrac{i}{2^{2s-1}}\tfrac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^N\vec{r}d^N\vec{r}' \\
&= \tfrac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{r}d^N\vec{r}'\sqrt{EE'}(\tfrac{m}{EE'})^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}') \\
&\tfrac{i}{2^{2s-1}}\tfrac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\{\tfrac{-i}{(2\pi)^N}\int\tfrac{1}{2E_0}[e^{ip_0\cdot(x-x')}-e^{-ip_0\cdot(x-x')}]d^N\vec{p}_0\}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')} \\
&= [\tfrac{1}{(2\pi)^N}]^2\int\tfrac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\tfrac{m^2}{EE'})^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}') \\
&\{\tfrac{1}{(2m)^{2s}}\tfrac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-i\gamma^a p_{0a})\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_{0b})\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{ip_0\cdot(x-x')}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^N\vec{r}d^N\vec{r}' \\
&+(-1)^{2s+1}\tfrac{1}{(2m)^{2s}}\tfrac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(-m-i\gamma^a p_{0a})\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m-i\gamma^b p_{0b})\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{-ip_0\cdot(x-x')}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}\}d^N\vec{r}d^N\vec{r}'d^N\vec{p}_0 \\
&= [\tfrac{1}{(2\pi)^N}]^2\int d^N\vec{r}d^N\vec{r}'d^N\vec{p}_0\tfrac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\tfrac{m^2}{EE'})^{2s} \\
&V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')\{\sum_{\vec{h}_0}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)U^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)e^{i(p_0+p)\cdot x}e^{-i(p_0+p')\cdot x'} \\
&+(-1)^{2s+1}\sum_{\vec{h}_0}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)V^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)e^{-i(p_0-p)\cdot x}e^{i(p_0-p')\cdot x'}\} \\
&= \int d^N\vec{p}_0\tfrac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\tfrac{m^2}{EE'})^{2s} \\
&V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')\{\sum_{\vec{h}_0}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)U^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)e^{-2iE_0(t-t')}\delta^N(\vec{p}_0+\vec{p})\delta^N(\vec{p}_0+\vec{p}') \\
&+(-1)^{2s+1}\sum_{\vec{h}_0}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)V^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)\delta^N(\vec{p}_0-\vec{p})\delta^N(\vec{p}_0-\vec{p}')\} \\
&= \delta^N(\vec{p}-\vec{p}')(\tfrac{m}{E})^{4s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h}') \\
&\{\sum_{\vec{h}_0}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p},\vec{h}_0)U^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(-\vec{p},\vec{h}_0)e^{-2iE(t-t')}+(-1)^{2s+1}\sum_{\vec{h}_0}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},\vec{h}_0)V^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},\vec{h}_0)\} \\
&= (-1)^{2s+1}\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')(0+\sum_{\vec{h}_0}\delta_{\vec{h}\vec{h}_0}\delta_{\vec{h}'\vec{h}_0}) \\
&= (-1)^{2s+1}\delta_{\vec{h}\vec{h}'}\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')
\end{aligned}
$$

□

证明： $[a(\vec{p},\vec{h}),b(\vec{p}',\vec{h}')]_{-^{2s+1}}$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}e^{-i(p\cdot x+p'\cdot x')}d^N\vec{r}d^N\vec{r}'$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')$$

$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')e^{-i(p\cdot x+p'\cdot x')}d^N\vec{r}d^N\vec{r}'$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N\vec{r}d^N\vec{r}'\sqrt{EE'}(\frac{m}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')$$

$$\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\{\frac{-i}{(2\pi)^N}\int\frac{1}{2E_0}[e^{ip_0\cdot(x-x')}-e^{-ip_0\cdot(x-x')}]d^N\vec{p}_0\}e^{-i(p\cdot x+p'\cdot x')}$$

$$= [\frac{1}{(2\pi)^N}]^2\int\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')$$

$$\{\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-i\gamma^a p_{0a})\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_{0b})\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{ip_0\cdot(x-x')}e^{-i(p\cdot x+p'\cdot x')}d^N\vec{r}d^N\vec{r}'$$

$$+(-1)^{2s+1}\frac{1}{(2m)^{2s}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(-m-i\gamma^a p_{0a})\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(-m-i\gamma^b p_{0b})\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}e^{-ip_0\cdot(x-x')}e^{-i(p\cdot x+p'\cdot x')}\}d^N\vec{r}d^N\vec{r}'d^N\vec{p}_0$$

$$= [\frac{1}{(2\pi)^N}]^2\int d^N\vec{r}d^N\vec{r}'d^N\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{E_0}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$

$$U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')\{\sum_{\vec{h}_0}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)e^{i(p_0-p)\cdot x}e^{-i(p_0+p')\cdot x'}$$

$$+(-1)^{2s+1}\sum_{\vec{h}_0}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)e^{-i(p_0+p)\cdot x}e^{i(p_0-p')\cdot x'}\}$$

$$= \int d^N\vec{p}_0\frac{\sqrt{EE'}}{|\vec{p}_0|}(\frac{m^2}{EE'})^{2s}$$

$$U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')\{\sum_{\vec{h}_0}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)e^{-iE_0t'}\delta^N(\vec{p}_0-\vec{p})\delta^N(\vec{p}_0+\vec{p}')$$

$$+(-1)^{2s+1}\sum_{\vec{h}_0}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}_0,\vec{h}_0)e^{iE_0t}\delta^N(\vec{p}_0+\vec{p})\delta^N(\vec{p}_0-\vec{p}')\}$$

$$= \delta^N(\vec{p}+\vec{p}')(\frac{m}{E})^{4s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h})V^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')$$

$$\{\sum_{\vec{h}_0}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},\vec{h}_0)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},\vec{h}_0)+(-1)^{2s+1}\sum_{\vec{h}_0}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}',\vec{h}_0)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p}',\vec{h}_0)e^{2iE(t-t')}\}$$

$$= 0+0=0$$

□

3.11 N+1维时空中Bargmann-Wigner方程协变对易规则的小结

结合以上两节的证明，便得到以下重要的定理。

定理3.11.1.

$$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x-x')$$

$$\Leftrightarrow [a(\vec{p},\vec{h}),a^+(\vec{p}',\vec{h}')]_{-^{2s+1}}=\delta_{\vec{h}\vec{h}'}\delta^N(\vec{p}-\vec{p}'),[b(\vec{p},\vec{h}),b^+(\vec{p}',\vec{h}')]_{-^{2s+1}}=\delta_{\vec{h}\vec{h}'}\delta^N(\vec{p}-\vec{p}'),[rest]_{-^{2s+1}}=0$$

3.12 N+1维时空中Bargmann-Wigner方程的对易函数、因果函数和费曼传播子

引理3.12.1. $\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}$

$$=\sum_{n=0}^{2s}C_{2s}^n\overbrace{[-(\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[-(\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{[m\gamma^0]_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}[m\gamma^0]_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{2s}(-1)^n m^{2s-n}C_{2s}^n\overbrace{(\gamma^a\gamma^0)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^b\gamma^0)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma^0)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^0)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{n}$$

引理3.12.2. $\overbrace{[\theta(t),[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})]_{-}}^{2s}{}^{2s+1}$

$$=\sum_{n=0}^{2s}(-1)^n m^{2s-n}C_{2s}^n[\theta(t),\overbrace{(\gamma^a\gamma^0)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^b\gamma^0)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma^0)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^0)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{2s}(-1)^n m^{2s-n}C_{2s}^n\sum_{l=0}^{n-1}C_n^l\overbrace{(\gamma^i\gamma^0)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^0)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots}^{n-l}\overbrace{(\gamma^0)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^0)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}[\partial_\pi^{n-l}\theta(t)]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{l}$$

$$=\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^n m^{2s-n}C_{2s}^nC_n^l\overbrace{(\gamma^i\gamma^0)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^0)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots}^{n-l}\overbrace{(\gamma^0)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^0)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}[\partial_\pi^{n-l}\theta(t)]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{l}$$

$$=\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}\tfrac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^0)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^0)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\delta_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\cdots}^{n-l}\overbrace{(\gamma^0)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}(\gamma^0)_{\xi_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}[\partial_t^{n-1-l}\delta(t)]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{l}$$

推论3.12.1.

$$\begin{cases}\Delta_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x):=\tfrac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta(x)\\ \Delta^{(+)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x):=\tfrac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta^{(-)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x):=\tfrac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{(l)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x):=\tfrac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta^{(l)}(x)\end{cases}$$

推论3.12.2.

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x):=\tfrac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta^{(c)}(x)\\ -\tfrac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}\tfrac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^0)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^0)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\cdots}^{n-l}\overbrace{(\gamma^0)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l'=1}^{n-l}\partial_t^{n-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}\Delta(x)\\ \Delta^{(F)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x):=\tfrac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta_F(x)\\ -i\tfrac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}\tfrac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^0)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^0)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\cdots}^{n-l}\overbrace{(\gamma^0)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l'=1}^{n-l}\partial_t^{n-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}\Delta(x)\\ =i\Delta^{(c)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)\end{cases}$$

推论3.12.3.

$$\begin{cases}\Delta^{ret}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x):=\frac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta^{ret}(x)\\ -\frac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^0)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^0)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\cdots}^{n-l}\overbrace{(\gamma^0)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l'=1}^{n-l}\partial_t^{n-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}\Delta(x)\\ \Delta^{adv}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x):=\frac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\Delta^{adv}(x)\\ -\frac{2^{1-2s}}{[(2s)!]^2}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\overbrace{(\gamma^i\gamma^0)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(\gamma^j\gamma^0)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{l}\overbrace{\delta_{\rho_\varsigma\rho'_\varsigma}\cdots}^{n-l}\overbrace{(\gamma^0)_{\eta_\varsigma\eta'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l'=1}^{n-l}\partial_t^{n-l-l'}\delta(t)\partial_t^{l'-1}\Delta(x)\end{cases}$$

引理3.12.3. $\Delta(x)\partial_t^n\delta(t)=\sum_{l=0}^{[(n-1)/2]}C_n^{2l+1}(\nabla^2-m^2)^l\partial_t^{n-2l-1}\delta^{N+1}(x)$

推论3.12.4. $\Delta(x)\partial_t^{n-1-l}\delta(t)=\sum_{r=0}^{[(n-l-2)/2]}C_{n-1-l}^{2r+1}(\nabla^2-m^2)^r\partial_t^{n-l-2-2r}\delta^{N+1}(x)$

引理3.12.4. $\Delta_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)|_{t=0}$

$$=\frac{-i}{2^{2s-1}}\frac{1}{[(2s)!]^2}\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}[C_{2s}^{2l+1}\overbrace{(m\gamma^0+\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}(m\gamma^0+\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\nabla)_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{2s-2l-1}\overbrace{\cdots\delta_{\tau_\varsigma\}\tau'_\varsigma)}}^{2l+1}](m^2-\nabla^2)^l\delta^3(\vec{r})$$

推论3.12.5.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=0\\ (\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(+)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=0\\ (\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(-)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=0\\ (\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(l)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=0\end{cases}
\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(c)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=-i\gamma^0\delta(t)\Delta_{\underbrace{\kappa_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)|_{t=0}\\ (\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{ret}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=-i\gamma^0\delta(t)\Delta_{\underbrace{\kappa_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)|_{t=0}\\ (\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{adv}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=-i\gamma^0\delta(t)\Delta_{\underbrace{\kappa_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)|_{t=0}\\ (\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(F)}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=\gamma^0\delta(t)\Delta_{\underbrace{\kappa_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)|_{t=0}\end{cases}$$

推论3.12.6.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};x)=0\\ (\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(+)}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};x)=0\\ (\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(-)}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};x)=0\\ (\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(l)}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};x)=0\end{cases}
\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(c)}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};x)=-\gamma^0_{\kappa_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^{N+1}(x)\\ (\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{ret}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};x)=-\gamma^0_{\kappa_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^{N+1}(x)\\ (\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{adv}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};x)=-\gamma^0_{\kappa_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^{N+1}(x)\\ (\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Delta^{(F)}_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};x)=-i\gamma^0_{\kappa_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^{N+1}(x)\end{cases}$$

3.13 N+1维时空中Bargmann-Wigner方程的各种物理算符

定理3.13.1.

$$P_u(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^N\vec{r}=\int\sum_{\vec{h}}p_u[a^+(\vec{p},\vec{h})a(\vec{p},\vec{h})+(-1)^{2s}b(\vec{p},\vec{h})b^+(\vec{p},\vec{h})]d^N\vec{p}$$

证明: $P_u(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^N\vec{r}$

$$=\int\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}'=-\infty}^{+\infty}\sum_{\vec{h}'}E'^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E'}}^{2s}[a^+(\vec{p}',\vec{h}')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+b(\vec{p}',\vec{h}')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^N\vec{p}'$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{\vec{h}}E^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}\frac{p_uE^{2s-1}}{(E^2)^{2s-1}}[a(\vec{p},\vec{h})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+(-1)^{2s}b^+(\vec{p},\vec{h})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}d^N\vec{r}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int\sum_{\vec{h},\vec{h}'}(\frac{E'}{E})^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{E'E}}^{2s}[a^+(\vec{p}',\vec{h}')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+b(\vec{p}',\vec{h}')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]$$
$$p_u[a(\vec{p},\vec{h})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+(-1)^{2s}b^+(\vec{p},\vec{h})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}'d^N\vec{p}d^N\vec{r}$$
$$= \int d^N\vec{p}'d^N\vec{p}\sum_{\vec{h},\vec{h}'}(\frac{m}{E})^{2s}p_u$$
$$\{\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')[a^+(\vec{p},\vec{h}')a(\vec{p},\vec{h})U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h}')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})+(-1)^{2s}b(\vec{p},\vec{h}')b^+(\vec{p},\vec{h})V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h}')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})]$$
$$+\delta^N(\vec{p}+\vec{p}')[(-1)^{2s}e^{2iEt}a^+(-\vec{p},\vec{h}')b^+(\vec{p},\vec{h})U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},\vec{h}')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})$$
$$+e^{-2iEt}b(\vec{p},\vec{h}')a(\vec{p},\vec{h})V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},\vec{h}')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})]\}$$
$$= \int\sum_{\vec{h}}p_u[a^+(\vec{p},\vec{h})a(\vec{p},\vec{h})+(-1)^{2s}b(\vec{p},\vec{h})b^+(\vec{p},\vec{h})]d^N\vec{p}$$ □

定理3.13.2.

$$Q(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^N\vec{r}=\int\sum_{\vec{h}}[a^+(\vec{p},\vec{h})a(\vec{p},\vec{h})+(-1)^{2s-1}b(\vec{p},\vec{h})b^+(\vec{p},\vec{h})]d^N\vec{p}$$

证明: $Q(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^N\vec{r}$

$$= \int\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}'=-\infty}^{+\infty}\sum_{\vec{h}'}E'^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E'}}^{2s}[a^+(\vec{p}',\vec{h}')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+b(\vec{p}',\vec{h}')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^N\vec{p}'$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{\vec{h}}E^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}\frac{E^{2s-1}}{(E^2)^{2s-1}}[a(\vec{p},\vec{h})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+(-1)^{2s-1}b^+(\vec{p},\vec{h})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}d^N\vec{r}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int\sum_{\vec{h},\vec{h}'}(\frac{E'}{E})^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{E'E}}^{2s}[a^+(\vec{p}',\vec{h}')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+b(\vec{p}',\vec{h}')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]$$
$$[a(\vec{p},\vec{h})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+(-1)^{2s-1}b^+(\vec{p},\vec{h})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}'d^N\vec{p}d^N\vec{r}$$
$$= \int d^N\vec{p}'d^N\vec{p}\sum_{\vec{h},\vec{h}'}(\frac{m}{E})^{2s}$$
$$\{\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')[a^+(\vec{p},\vec{h}')a(\vec{p},\vec{h})U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h}')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})+(-1)^{2s-1}b(\vec{p},\vec{h}')b^+(\vec{p},\vec{h})V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h}')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})]$$
$$+\delta^N(\vec{p}+\vec{p}')[(-1)^{2s-1}e^{2iEt}a^+(-\vec{p},\vec{h}')b^+(\vec{p},\vec{h})U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},\vec{h}')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})$$
$$+e^{-2iEt}b(\vec{p},\vec{h}')a(\vec{p},\vec{h})V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},\vec{h}')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})]\}$$
$$= \int\sum_{\vec{h}}[a^+(\vec{p},\vec{h})a(\vec{p},\vec{h})+(-1)^{2s-1}b(\vec{p},\vec{h})b^+(\vec{p},\vec{h})]d^N\vec{p}$$ □

定理3.13.3.

$$N(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{m^2-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^N\vec{r}=\int\sum_{\vec{h}}[a^+(\vec{p},\vec{h})a(\vec{p},\vec{h})+(-1)^{2s}b(\vec{p},\vec{h})b^+(\vec{p},\vec{h})]d^N\vec{p}$$

证明: $N(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{m^2-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^N\vec{r}$

$$= \int\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}'=-\infty}^{+\infty}\sum_{\vec{h}'}E'^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E'}}^{2s}[a^+(\vec{p}',\vec{h}')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+b(\vec{p}',\vec{h}')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^N\vec{p}'$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{\vec{h}}E^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}\frac{E^{2s}}{E^{4s-1}}[a(\vec{p},\vec{h})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+(-1)^{2s}b^{+}(\vec{p},\vec{h})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}d^N\vec{r}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{N}}\int\sum_{\vec{h},\vec{h}'}(\frac{E'}{E})^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{E'E}}^{2s}[a^{+}(\vec{p}',\vec{h}')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+b(\vec{p}',\vec{h}')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]$$

$$[a(\vec{p},\vec{h})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+(-1)^{2s}b^{+}(\vec{p},\vec{h})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}'d^N\vec{p}d^N\vec{r}$$

$$=\int d^N\vec{p}'d^N\vec{p}\sum_{\vec{h},\vec{h}'}(\frac{m}{E})^{2s}$$

$$\{\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')[a^{+}(\vec{p},\vec{h}')a(\vec{p},\vec{h})U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h}')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})+(-1)^{2s}b(\vec{p},\vec{h}')b^{+}(\vec{p},\vec{h})V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h}')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})]$$

$$+\delta^N(\vec{p}+\vec{p}')[(-1)^{2s}e^{2iEt}a^{+}(-\vec{p},\vec{h}')b^{+}(\vec{p},\vec{h})U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},\vec{h}')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})$$

$$+e^{-2iEt}b(\vec{p},\vec{h}')a(\vec{p},\vec{h})V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},\vec{h}')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})]\}$$

$$=\int\sum_{\vec{h}}[a^{+}(\vec{p},\vec{h})a(\vec{p},\vec{h})+(-1)^{2s}b(\vec{p},\vec{h})b^{+}(\vec{p},\vec{h})]d^N\vec{p}$$ □

定理3.13.4.

$$\vec{S}(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^N\vec{r}=\int\sum_{\vec{h}}\hat{p}[a^{+}(\vec{p},\vec{h})a(\vec{p},\vec{h})+(-1)^{2s}b(\vec{p},\vec{h})b^{+}(\vec{p},\vec{h})]d^N\vec{p}$$

证明: $\vec{S}(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^N\vec{r}$

$$=\int\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}'=-\infty}^{+\infty}\sum_{\vec{h}'}E'^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E'}}^{2s}[a^{+}(\vec{p}',\vec{h}')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+b(\vec{p}',\vec{h}')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]d^N\vec{p}'$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{\vec{h}}E^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}\frac{\hat{p}E^{2s-1}}{(E^2)^{2s-1}}[a(\vec{p},\vec{h})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+(-1)^{2s}b^{+}(\vec{p},\vec{h})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}d^N\vec{r}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{N}}\int\sum_{\vec{h},\vec{h}'}(\frac{E'}{E})^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m^2}{E'E}}^{2s}\hat{p}[a^{+}(\vec{p}',\vec{h}')U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}+b(\vec{p}',\vec{h}')V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]$$

$$[a(\vec{p},\vec{h})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+(-1)^{2s}b^{+}(\vec{p},\vec{h})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}'d^N\vec{p}d^N\vec{r}$$

$$=\int d^N\vec{p}'d^N\vec{p}\sum_{\vec{h},\vec{h}'}(\frac{m}{E})^{2s}\hat{p}$$

$$\{\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')[a^{+}(\vec{p},\vec{h}')a(\vec{p},\vec{h})U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h}')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})+(-1)^{2s}b(\vec{p},\vec{h}')b^{+}(\vec{p},\vec{h})V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h}')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})]$$

$$+\delta^N(\vec{p}+\vec{p}')[(-1)^{2s}e^{2iEt}a^{+}(-\vec{p},\vec{h}')b^{+}(\vec{p},\vec{h})U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},\vec{h}')V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})$$

$$+e^{-2iEt}b(\vec{p},\vec{h}')a(\vec{p},\vec{h})V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},\vec{h}')U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})]\}$$

$$=\int\sum_{\vec{h}}\hat{p}[a^{+}(\vec{p},\vec{h})a(\vec{p},\vec{h})+(-1)^{2s}b(\vec{p},\vec{h})b^{+}(\vec{p},\vec{h})]d^N\vec{p}$$ □

定理3.13.5.

$$\vec{M}(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{m^2-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^N\vec{r}=\int\sum_{\vec{h}}\hat{p}[a^{+}(\vec{p},\vec{h})a(\vec{p},\vec{h})+(-1)^{2s-1}b(\vec{p},\vec{h})b^{+}(\vec{p},\vec{h})]d^N\vec{p}$$

证明: $\vec{M}(s)=\int\psi^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{m^2-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^N\vec{r}$

$$= \int \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\vec{p}'=-\infty}^{+\infty} \sum_{\vec{h}'} E'^{s-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{m}{E'}}^{2s} [a^+(\vec{p}',\vec{h}') U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}') e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)} + b(\vec{p}',\vec{h}') V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}') e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}] d^N\vec{p}'$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty} \sum_{\vec{h}} E^{s-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{m}{E}}^{2s} \frac{\hat{p}E^{2s}}{E^{4s-1}} [a(\vec{p},\vec{h}) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h}) e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + (-1)^{2s-1} b^+(\vec{p},\vec{h}) V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h}) e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}] d^N\vec{p} d^N\vec{r}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N} \int \sum_{\vec{h},\vec{h}'} (\frac{E'}{E})^{s-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{m^2}{E'E}}^{2s} \hat{p} [a^+(\vec{p}',\vec{h}') U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}') e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)} + b(\vec{p}',\vec{h}') V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',\vec{h}') e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-E't)}]$$

$$[a(\vec{p},\vec{h}) U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h}) e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + (-1)^{2s-1} b^+(\vec{p},\vec{h}) V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h}) e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}] d^N\vec{p}' d^N\vec{p} d^N\vec{r}$$

$$= \int d^N\vec{p}' d^N\vec{p} \sum_{\vec{h},\vec{h}'} (\frac{m}{E})^{2s} \hat{p}$$

$$\{\delta^N(\vec{p}-\vec{p}')[a^+(\vec{p},\vec{h}') a(\vec{p},\vec{h}) U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h}') U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h}) + (-1)^{2s-1} b(\vec{p},\vec{h}') b^+(\vec{p},\vec{h}) V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},\vec{h}') V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})]$$

$$+ \delta^N(\vec{p}+\vec{p}')[(-1)^{2s-1} e^{2iEt} a^+(-\vec{p},\vec{h}') b^+(\vec{p},\vec{h}) U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},\vec{h}') V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})$$

$$+ e^{-2iEt} b(\vec{p},\vec{h}') a(\vec{p},\vec{h}) V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(-\vec{p},\vec{h}') U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},\vec{h})]\}$$

$$= \int \sum_{\vec{h}} \hat{p} [a^+(\vec{p},\vec{h}) a(\vec{p},\vec{h}) + (-1)^{2s-1} b(\vec{p},\vec{h}) b^+(\vec{p},\vec{h})] d^N\vec{p} \qquad \square$$

第三十七章　高维时空无质量粒子的协变量子化

自我评述：本章将无质量粒子协变量子化推广到了一般N+1维时空中。在特殊的N+1维时空中与四维时空不同的是对于全对称Penrose方程描述的粒子，一般来说既可以描述带荷的复粒子，也可以描述不带荷的马约拉纳粒子。两种情形的主对易规则形式一致，但其余对易或反对易括号，对带荷的复粒子一般为零；对不带荷的马约拉纳粒子，其余对易或反对易括号由主对易规则和马约拉纳条件自然得到，一般不为零。在本章只讨论复粒子情形，一般也只给出主对易规则，不再专门讨论马约拉纳粒子情形，若要得到马约拉纳粒子情形的量子场论，只需在复粒子情形加上马约拉纳条件即可自然得到。

1 N+1维时空中的螺旋度本征函数

1.1 N+1=2n偶数维时空中分离表象的电子方程 [5]

定义1.1.1. $(\gamma^a\partial_a+m)\psi=0,\psi=\begin{bmatrix}\varphi\\ \eta\end{bmatrix},\gamma^a=(\Gamma\otimes\sigma_y,\varsigma I_*\otimes\sigma_x)\Leftrightarrow\begin{cases}(\Gamma,-i\varsigma)^a\partial_a\varphi=im\eta\\(\Gamma,i\varsigma)^a\partial_a\eta=-im\varphi\end{cases}$

1.2 N+1=2n偶数维时空中的中微子方程 [6]

当质量m=0时，则退化为两个Weyl中微子方程:

推论1.2.1. $(\Gamma,-i\varsigma)^a\partial_a\varphi=0,(\Gamma,i\varsigma)^a\partial_a\eta=0$

1.3 N+1=2n偶数维时空中运动方向的螺旋度本征函数

定义1.3.1.

$$\begin{cases}(I_*\otimes\sigma_z)\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\lambda(\vec{p},\frac{1}{2}),(I_*\otimes\sigma_z)\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}\lambda(\vec{p},-\frac{1}{2}),l=2^{[\frac{N-1}{2}]}=2^{n-1}\\ \lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\frac{1}{2};1)=\begin{bmatrix}1\\0\\0_{l/2-2}\\0_{l/2}\end{bmatrix},\lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\frac{1}{2};2)=\begin{bmatrix}0\\1\\0_{l/2-2}\\0_{l/2}\end{bmatrix},\cdot\cdot,\lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\frac{1}{2};\frac{l}{2}-1)=\begin{bmatrix}0_{l/2-2}\\1\\0\\0_{l/2}\end{bmatrix},\lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\frac{1}{2};\frac{l}{2})=\begin{bmatrix}0_{l/2-2}\\0\\1\\0_{l/2}\end{bmatrix}\\ \lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\frac{-1}{2};1)=\begin{bmatrix}0_{l/2}\\0_{l/2-2}\\0\\1\end{bmatrix},\lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\frac{-1}{2};2)=\begin{bmatrix}0_{l/2}\\0_{l/2-2}\\1\\0\end{bmatrix},\cdot\cdot,\lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\frac{-1}{2};\frac{l}{2}-1)=\begin{bmatrix}0_{l/2}\\0\\1\\0_{l/2-2}\end{bmatrix},\lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\frac{-1}{2};\frac{l}{2})=\begin{bmatrix}0_{l/2}\\1\\0\\0_{l/2-2}\end{bmatrix}\end{cases}$$

1.4 N+1=2n-1奇数维时空中运动方向的螺旋度本征函数

定义1.4.1.

$$\begin{cases}(I_*\otimes\sigma_z)\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\lambda(\vec{p},\frac{1}{2}),(I_*\otimes\sigma_z)\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}\lambda(\vec{p},-\frac{1}{2}),l=2^{[\frac{N-1}{2}]}=2^{n-2}\\ \lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\frac{1}{2};1)=\begin{bmatrix}1\\0\\0_{l-2}\\0_{l}\end{bmatrix},\lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\frac{1}{2};2)=\begin{bmatrix}0\\1\\0_{l-2}\\0_{l}\end{bmatrix},\cdot\cdot,\lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\frac{1}{2};l-1)=\begin{bmatrix}0_{l-2}\\1\\0\\0_{l}\end{bmatrix},\lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\frac{1}{2};l)=\begin{bmatrix}0_{l-2}\\0\\1\\0_{l}\end{bmatrix}\\ \lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\frac{-1}{2};1)=\begin{bmatrix}0_{l}\\0_{l-2}\\0\\1\end{bmatrix},\lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\frac{-1}{2};2)=\begin{bmatrix}0_{l}\\0_{l-2}\\1\\0\end{bmatrix},\cdot\cdot,\lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\frac{-1}{2};l-1)=\begin{bmatrix}0_{l}\\0\\1\\0_{l-2}\end{bmatrix},\lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\frac{-1}{2};l)=\begin{bmatrix}0_{l}\\1\\0\\0_{l-2}\end{bmatrix}\end{cases}$$

定义1.4.2. $(\Gamma\cdot\hat{p})\lambda(\hat{p},\frac{1}{2};h)=\lambda(\hat{p},\frac{1}{2};h),(\Gamma\cdot\hat{p})\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2};h)=-\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2};h)$

1.5 N+1维时空中螺旋度$\Gamma\cdot\hat{p}$的本征函数

定义1.5.1. $r:=\begin{cases}l/2,\text{偶数维时空}\\l,\text{奇数维时空}\end{cases},l=2^{[\frac{N-1}{2}]}$

定义1.5.2.

$$\begin{cases}(\Gamma\cdot\hat{p})\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2};h)=-\varsigma\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2};h),\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2};h):=e^{\frac{1}{8}\vartheta^{ij}(\hat{p})[\Gamma_i,\Gamma_j]}\lambda(\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},-\frac{\varsigma}{2};h)\\ e^{-\frac{1}{8}\vartheta^{ij}(\hat{p})[\Gamma_i,\Gamma_j]}(\Gamma\cdot\hat{p})e^{\frac{1}{8}\vartheta^{ij}(\hat{p})[\Gamma_i,\Gamma_j]}=\Gamma_N,\Gamma\cdot\hat{p}=e^{\frac{1}{8}\vartheta^{ij}(\hat{p})[\Gamma_i,\Gamma_j]}\Gamma_Ne^{-\frac{1}{8}\vartheta^{ij}(\hat{p})[\Gamma_i,\Gamma_j]}\end{cases}$$

定义1.5.3. $(\Gamma\cdot\hat{p})\lambda(\hat{p},\frac{1}{2};h)=\lambda(\hat{p},\frac{1}{2};h),(\Gamma\cdot\hat{p})\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2};h)=-\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2};h)$

定义1.5.4.

$$\begin{cases}(\Gamma\cdot\hat{p})\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2};h)=-\varsigma\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2};h),\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2};h):=e^{\frac{1}{8}\vartheta^{ij}(\hat{p})[\Gamma_i,\Gamma_j]}\lambda(\begin{bmatrix}0\\ \cdot\cdot\\ 0\\ 1\end{bmatrix},-\frac{\varsigma}{2};h)\\ e^{-\frac{1}{8}\vartheta^{ij}(\hat{p})[\Gamma_i,\Gamma_j]}(\Gamma\cdot\hat{p})e^{\frac{1}{8}\vartheta^{ij}(\hat{p})[\Gamma_i,\Gamma_j]}=\Gamma_N,\Gamma\cdot\hat{p}=e^{\frac{1}{8}\vartheta^{ij}(\hat{p})[\Gamma_i,\Gamma_j]}\Gamma_Ne^{-\frac{1}{8}\vartheta^{ij}(\hat{p})[\Gamma_i,\Gamma_j]}\end{cases}$$

1.6 N+1维时空中螺旋度$\Gamma\cdot\hat{p}$本征函数的正交性与完备性

定义1.6.1. $\lambda(\hat{p},\frac{1}{2};h):=\lambda(\hat{p};h),\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2};h):=\lambda(\hat{p};-h),\lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2};h):=\lambda(\hat{p};h\varsigma),\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2};h):=\lambda(\hat{p};-h\varsigma)$

推论1.6.1. $\lambda^+(\hat{p};h)\lambda(\hat{p};h')=\delta_{hh'}$

$$\sum_{h=1}^{r}[\lambda(\hat{p};h)\lambda^+(\hat{p};h)+\lambda(\hat{p};-h)\lambda^+(\hat{p};-h)]=1,\sum_{h=1}^{r}[\lambda(\hat{p};h)\lambda^+(\hat{p};h)-\lambda(\hat{p};-h)\lambda^+(\hat{p};-h)]=\Gamma\cdot\hat{p}$$

推论1.6.2. $\sum\limits_{h=1}^{r}\lambda(\hat{p};h)\lambda^+(\hat{p};h)=\frac{1}{2}(\Gamma,-i)^a\hat{p}_a,\sum\limits_{h=1}^{r}\lambda(\hat{p};-h)\lambda^+(\hat{p};-h)=-\frac{1}{2}(\Gamma,-i)^a\hat{p}_a$

推论1.6.3. $\sum\limits_{h=1}^{r}\lambda(\hat{p};h\varsigma)\lambda^+(\hat{p};h\varsigma)=-\frac{\varsigma}{2}(\Gamma,i\varsigma)^a\hat{p}_a$

1.7 N+1维时空中高自旋螺旋度的本征函数

定义1.7.1.

$$\begin{cases}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_{2r}):=\frac{1}{\sqrt{(2s)!n_1!n_2!\cdot\cdot n_r!}}\lambda_{\{\underbrace{A_\varsigma(\vec{p};-1\varsigma)\cdot\cdot}_{n_1}}\underbrace{\lambda_{B_\varsigma}(\vec{p};-2\varsigma)\cdot\cdot}_{n_2}\cdot\cdot\underbrace{\lambda_{C_\varsigma}(\vec{p};-2r\varsigma)\cdot\cdot}_{n_{2r}}{}_{\}}\\ \lambda_{k_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_{2r}):=\frac{\sqrt{(2s)!}}{\sqrt{n_1!n_2!\cdot\cdot n_{2r}!}}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\vec{p};-1\varsigma)\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{\lambda_{B_\varsigma}(\vec{p};-2\varsigma)\cdot\cdot}_{n_2}\cdot\cdot\underbrace{\lambda_{C_\varsigma}(\vec{p};-2r\varsigma)\cdot\cdot}_{n_{2r}}\\ \lambda_{A_\varsigma}(\vec{p};-(r+k)\varsigma):=\lambda_{A_\varsigma}(\vec{p};k\varsigma),k=1,2,\cdot\cdot,r,\sum\limits_{k=1}^{2r}n_k=2s\end{cases}$$

推论1.7.1.

$$\begin{cases}[\sigma(s,w)\cdot\hat{p}]\lambda_\varsigma(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_{2r})=-\frac{\varsigma}{2}[\sum\limits_{k=1}^{r}(n_k-n_{r+k})]\lambda_\varsigma(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_{2r})\\ \sigma(s;w)=s\bar{\Gamma}(s;w)(\Gamma\otimes I_*)\Gamma(s;w),\sum\limits_{k=1}^{2r}n_k=2s\end{cases}$$

推论1.7.2.

$$\begin{cases}[\sigma(s,w)\cdot\hat{p}]\lambda_\varsigma(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)=-\varsigma s\lambda_\varsigma(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r),\sum\limits_{k=1}^{r}n_k=2s\\ \lambda_{k_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r):=\lambda_{k_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;0_1,0_2,\cdot\cdot,0_r)\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\sigma(s,w)\cdot\hat{p}]\lambda_\varsigma(\vec{p};n_{r+1},n_{r+2},\cdot\cdot,n_{2r})=\varsigma s\lambda_\varsigma(\vec{p};n_{r+1},n_{r+2},\cdot\cdot,n_{2r}),\sum\limits_{k=r+1}^{2r}n_k=2s\\ \lambda_{k_\varsigma}(\vec{p};n_{r+1},n_{r+2},\cdot\cdot,n_{2r}):=\lambda_{k_\varsigma}(\vec{p};0_1,0_2,\cdot\cdot,0_r;n_{r+1},n_{r+2},\cdot\cdot,n_{2r})\end{cases}$$

2 N+1维时空中Penrose全对称方程自旋基及其基本性质

2.1 N+1维时空中Penrose全对称方程自旋基的广义多项式定理

定理2.1.1. $\sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s}\frac{(2s)!}{n_1!n_2!\cdot\cdot n_r!}$

$$\underbrace{\lambda_{\{A_\varsigma}(\vec{p};-1\varsigma)\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{\lambda_{B_\varsigma}(\vec{p};-2\varsigma)\cdot\cdot}_{n_2}\cdot\cdot\underbrace{\lambda_{C_\varsigma}(\vec{p};-r\varsigma)\cdot\cdot}_{n_r}{}_{\}}\underbrace{\lambda^+_{(A'_\varsigma}(\vec{p};-1\varsigma)\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{\lambda^+_{B'_\varsigma}(\vec{p};-2\varsigma)\cdot\cdot}_{n_2}\cdot\cdot\underbrace{\lambda^+_{C'_\varsigma}(\vec{p};-r\varsigma)\cdot\cdot}_{n_r}{}_{)}$$

$$=\overbrace{[\sum_{h=1}^{r}\lambda_{\{A_\varsigma}(\vec{p};-h\varsigma)\lambda^+_{(A'_\varsigma}(\vec{p};-h\varsigma)]\cdot\cdot[\sum_{h=1}^{r}\lambda_{B_\varsigma}(\vec{p};-h\varsigma)\lambda^+_{B'_\varsigma}(\vec{p};-h\varsigma)]\cdot\cdot[\sum_{h=1}^{r}\lambda_{C_\varsigma}(\vec{p};-h\varsigma)\lambda^+_{C'_\varsigma}(\vec{p};-h\varsigma)]\cdot\cdot{}_{\})}}^{2s}$$

推论2.1.1. $\sum\limits_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s}\frac{(2s)!}{n_1!n_2!\cdot\cdot n_r!}$

$$[\sum_{h=1}^{r}\lambda_{A_\varsigma}(\vec{p};-1\varsigma)\lambda^{+}_{A'_\varsigma}(\vec{p};-1\varsigma)]^{n_1}[\sum_{h=1}^{r}\lambda_{A_\varsigma}(\vec{p};-2\varsigma)\lambda^{+}_{A'_\varsigma}(\vec{p};-2\varsigma)]^{n_2}\cdot\cdot[\sum_{h=1}^{r}\lambda_{A_\varsigma}(\vec{p};-r\varsigma)\lambda^{+}_{A'_\varsigma}(\vec{p};-r\varsigma)]^{n_r}$$
$$=[\sum_{h=1}^{r}\lambda_{A_\varsigma}(\vec{p};-h\varsigma)\lambda^{+}_{A'_\varsigma}(\vec{p};-h\varsigma)]^{2s}$$

以上推论正好就是多项式展开定理。

2.2 N+1维时空中Penrose全对称方程的自旋基

定义2.2.1.

$$\begin{cases}[\sigma(\frac{1}{2},w)\cdot\hat{p}]\lambda(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)=-\frac{\varsigma}{2}\lambda(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r),n_1+n_2+\cdot\cdot n_r=2s\\ \lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r):=\frac{1}{\sqrt{(2s)!n_1!n_2!\cdot\cdot n_r!}}\lambda_{\{\underbrace{A_\varsigma(\vec{p};-1\varsigma)\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{B_\varsigma(\vec{p};-2\varsigma)\cdot\cdot}_{n_2}\cdot\cdot\underbrace{C_\varsigma(\vec{p};-r\varsigma)\cdot\cdot}_{n_r}\}}\end{cases}$$

定义2.2.2.

$$\begin{cases}[\sigma(s,w)\cdot\hat{p}]\lambda(\vec{p};-s\varsigma;n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)=-s\varsigma\lambda(\vec{p};-s\varsigma;n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r),n_1+n_2+\cdot\cdot n_r=2s\\ \lambda_{k_\varsigma}(\vec{p};-s\varsigma;n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r):=\frac{\sqrt{(2s)!}}{\sqrt{n_1!n_2!\cdot\cdot n_r!}}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\vec{p};-1\varsigma)\cdot\cdot}_{n_1}\underbrace{\lambda_{B_\varsigma}(\vec{p};-2\varsigma)\cdot\cdot}_{n_2}\cdot\cdot\underbrace{\lambda_{C_\varsigma}(\vec{p};-r\varsigma)\cdot\cdot}_{n_r}\end{cases}$$

2.3 N+1维时空中Penrose全对称方程自旋基的正交性质

推论2.3.1. $\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;n'_1,n'_2,\cdot\cdot,n'_r)=\delta_{n_1n'_1}\delta_{n_2n'_2}\cdot\cdot\delta_{n_rn'_r}$

推论2.3.2. $\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(-\vec{p},-s\varsigma;n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma\cdot\cdot B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;n'_1,n'_2,\cdot\cdot,n'_r)=0$

推论2.3.3. $\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h}')=\delta_{\vec{h}\vec{h}'},\vec{h}:=(n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)$

推论2.3.4. $\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(-\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h}')=0$

2.4 N+1维时空中Penrose全对称方程自旋基的分解

定理2.4.1. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot C'_\varsigma D'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)$

$$=\sum_{n'_1+\cdot\cdot+n'_r}^{=2s'}\frac{\sqrt{C_{n_1}^{n'_1}C_{n_2}^{n'_2}\cdot\cdot C_{n_r}^{n'_r}}}{\sqrt{C_{2s}^{2s'}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p};n_1-n'_1,n_2-n'_2,\cdot\cdot,n_r-n'_r)\lambda_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot C'_\varsigma D'_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p};n'_1,n'_2,\cdot\cdot,n'_r)$$

证明: $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot C'_\varsigma D'_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)=\frac{1}{\sqrt{(2s)!n_1!n_2!\cdot\cdot n_r!}}\sum_{n'_1+\cdot\cdot+n'_r}^{=2s'}C_{n_1}^{n'_1}C_{n_2}^{n'_2}\cdot\cdot C_{n_r}^{n'_r}$

$$\lambda_{\{\underbrace{A_\varsigma(\vec{p};-1\varsigma)\lambda_{B_\varsigma}(\vec{p};-2\varsigma)\cdot\cdot}_{n_1-n'_1}\underbrace{\cdot\lambda_{C_\varsigma}(\vec{p};-r\varsigma)\lambda_{D_\varsigma\}}(\vec{p};-r\varsigma)}_{n_r-n'_r}\underbrace{\lambda_{(A'_\varsigma}(\vec{p};-1\varsigma)\lambda_{B'_\varsigma}(\vec{p};-2\varsigma)\cdot\cdot}_{n'_1}\underbrace{\cdot\lambda_{C'_\varsigma}(\vec{p};-r\varsigma)\lambda_{D'_\varsigma)}(\vec{p};-r\varsigma)}_{n'_r}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2s)!n_1!n_2!\cdot\cdot n_r!}}\sum_{n'_1+\cdot\cdot+n'_r}^{=2s'}C_{n_1}^{n'_1}C_{n_2}^{n'_2}\cdot\cdot C_{n_r}^{n'_r}$$
$$\sqrt{(2s-2s')!(n_1-n'_1)!(n_2-n'_2)!\cdot\cdot(n_r-n'_r)!}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p};n_1-n'_1,n_2-n'_2,\cdot\cdot,n_r-n'_r)$$
$$\sqrt{(2s')!n'_1!n'_2!\cdot\cdot n'_r!}\lambda_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot C'_\varsigma D'_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p};n'_1,n'_2,\cdot\cdot,n'_r)$$
$$=\sum_{n'_1+\cdot\cdot+n'_r}^{=2s'}\frac{\sqrt{C_{n_1}^{n'_1}C_{n_2}^{n'_2}\cdot\cdot C_{n_r}^{n'_r}}}{\sqrt{C_{2s}^{2s'}}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2(s-s')}}(\vec{p};n_1-n'_1,n_2-n'_2,\cdot\cdot,n_r-n'_r)\lambda_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot C'_\varsigma D'_\varsigma}_{2s'}}(\vec{p};n'_1,n'_2,\cdot\cdot,n'_r)$$ □

推论2.4.1. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p};1,0,\cdot\cdot,0)$

$+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2-1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p};0,1,\cdot\cdot,0)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r-1)\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p};0,0,\cdot\cdot,1)$

推论2.4.2. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r)$

$=\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};0,n_2-1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p};0,1,\cdot\cdot,0)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r-1)\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p};0,0,\cdot\cdot,1)$

2.5 N+1维时空中Penrose全对称方程的投影算子

推论2.5.1. $\sum_{\vec{h}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})=(-\frac{\varsigma}{2})^{2s}\frac{1}{[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\cdot\cdot}^{2s}$

引理2.5.1. $\begin{cases}(\Gamma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}p_a(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}p_b\neq(\Gamma,i\varsigma)^a_{B_\varsigma A'_\varsigma}p_a(\Gamma,i\varsigma)^b_{A_\varsigma B'_\varsigma}p_b,p^ap_a=0\\(\Gamma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}p_a(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}p_b\neq(\Gamma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma B'_\varsigma}p_a(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma A'_\varsigma}p_b,p^ap_a=0\end{cases}$

引理2.5.2. $\begin{cases}(\Gamma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_b\neq(\Gamma,i\varsigma)^a_{B_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a(\Gamma,i\varsigma)^b_{A_\varsigma B'_\varsigma}\partial_b,\partial^a\partial_a=0\\(\Gamma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}\partial_a(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\partial_b\neq(\Gamma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma B'_\varsigma}\partial_a(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma A'_\varsigma}\partial_b,\partial^a\partial_a=0\end{cases}$

直接验证便可以证明以上两个引理。

推论2.5.2. $\sum_{\vec{h}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\neq(-\frac{\varsigma}{2})^{2s}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\cdot\cdot}^{2s}$

3 N+1维时空中Penrose全对称方程的协变量子化

3.1 N+1维时空中Penrose全对称方程 [1,2]的平面波解及其对易规则猜想

推论3.1.1. $(\Gamma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_a\partial^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=0$

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq0}\sum\limits_{\vec{h}}|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})[a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}\\ \vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)e^{-ip\cdot x}d^N\vec{r}\\ |\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)e^{ip\cdot x}d^N\vec{r}\end{cases}$$

推论3.1.2. $(\Gamma,-i\varsigma)^{A'_\varsigma A_\varsigma}_a\partial^a\psi_{A_\varsigma}(x)=0$

$$\begin{cases}\psi_{A_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq0}\sum\limits_{h=1}^{l/4}\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p};-h\varsigma)[a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}\\ a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2};\vec{h})\psi_{A_\varsigma}(x)e^{-ip\cdot x}d^N\vec{r}\\ a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2};\vec{h})\psi_{A_\varsigma}(x)e^{ip\cdot x}d^N\vec{r}\end{cases}$$

猜想3.1.1. $[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x-x')$

3.2 N+1维时空中Penrose全对称方程自旋基之间的递推关系

3.2.1 关于对称性条件的Penrose自旋基引理

引理3.2.1.

$$\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s} a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_r)=\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s} a_{D_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma E_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_r)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r+1)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};r)=0\end{cases}$$

证明:

$$\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s} a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_r)=\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s} a_{D_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma E_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_r)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s} a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_r)[\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p};1)$$

$$+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2-1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r-1)\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p};r)]$$

$$=\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s} a_{D_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_r)[\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)$$

$$+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2-1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r-1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r)]$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r+1)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};r)=0\\\frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2-1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2-1,\cdot\cdot,n_r+1)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};r)=0\cdots\cdots\\\frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_r-1)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};r)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r+1)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};r)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r+1)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};r)=0\end{cases}$$

□

引理3.2.2.

$$\begin{cases}a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)=\sum_{k=1}^{r}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};k)+\sum_{k=1}^{r}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};-k)\\\frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};2)\\+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r+1)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};r)=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)=\sum_{k=1}^{r}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};k),d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)=0$$

$$\begin{cases}a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2)\\+\cdots+\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r+1;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r),n_1\geq 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_{E_\varsigma}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r)=c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)\\+\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2)+\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};3)+\cdots\\+\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_r+1;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r),n_2\geq 1\end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{E_\varsigma}(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_r)=c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)+c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\frac{\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3,n_4,\cdot\cdot,n_r;3)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};3)+\frac{\sqrt{n_4+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,n_4+1,\cdot\cdot,n_r;3)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};4)+\cdots \\ +\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_r+1;3)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r),n_3\geq 1 \end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\begin{cases} a_{E_\varsigma}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r)=c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)+c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\cdots+c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r;r-1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r-1)+\frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{n_r}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r;r)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r),n_r=2s\geq 1 \end{cases}$$

证明:

$$\begin{cases} a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)=\sum_{k=1}^{r}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};k)+\sum_{k=1}^{r}d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};-k) \\ \frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};2) \\ +\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r+1)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};r)=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)=\sum_{k=1}^{r}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};k),d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)=0$$

$$\begin{cases} c(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_r;2)=\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdot\cdot,n_r;1)\cdots \\ c(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_r;r)=\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r+1;1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(\vec{p};0,n_2+1,\cdot\cdot,n_r;3)=\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2+1}}c(\vec{p};0,n_2,n_3+1,\cdot\cdot,n_r;2)\cdots \\ c(\vec{p};0,n_2+1,\cdot\cdot,n_r;r)=\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_2+1}}c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r+1;2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(\vec{p};0,0,n_3+1,\cdot\cdot,n_r;4)=\frac{\sqrt{n_4+1}}{\sqrt{n_3+1}}c(\vec{p};0,0,n_3,n_4+1,\cdot\cdot,n_r;3)\cdots \\ c(\vec{p};0,0,n_3+1,\cdot\cdot,n_r;r)=\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_3+1}}c(\vec{p};0,0,n_3,n_4,\cdot\cdot,n_r+1;3) \end{cases}$$

$\cdots$

$$\begin{cases} c(\vec{p};0,\cdot,0,n_{r-1}+1,n_r;r)=\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_{r-1}+1}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_{r-1},n_r+1;r-1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)=\sum_{k=1}^{r}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};k),d(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)=0$$

$$\begin{cases} a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\cdots+\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r+1;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r),n_1\geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{E_\varsigma}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r)=c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1) \\ +\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2)+\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};3)+\cdots \\ +\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_r+1;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r),n_2\geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{E_\varsigma}(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_r)=c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)+c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\frac{\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3,n_4,\cdot\cdot,n_r;3)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};3)+\frac{\sqrt{n_4+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,n_4+1,\cdot\cdot,n_r;3)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};4)+\cdots \\ +\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_r+1;3)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r),n_3\geq 1 \end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\begin{cases} a_{E_\varsigma}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r)=c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)+c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\cdots+c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r;r-1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r-1)+\frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{n_r}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r;r)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r),n_r=2s\geq 1 \end{cases}$$

□

推论3.2.1. $a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)=\sum_{k=1}^{r}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};k)$

$$\begin{cases} c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;2)=\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_r;1),n_1\geq 1\cdots \\ c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;r)=\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r+1;1),n_1\geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;3)=\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_r;2),n_2\geq 1\cdots \\ c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;r)=\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_r+1;2),n_2\geq 1 \end{cases}$$

$\cdots$

$$\begin{cases} c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_{r-1},n_r;r)=\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_{r-1}}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_{r-1}-1,n_r+1;r),n_{r-1}\geq 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)=\sum_{k=1}^{r}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};k)$$

$$\begin{cases} a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\cdots+\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r+1;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r),n_1\geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{E_\varsigma}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r)=c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1) \\ +\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2)+\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};3)+\cdots \\ +\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_r+1;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r),n_2\geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{E_\varsigma}(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_r)=c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)+c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\frac{\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3,n_4,\cdot\cdot,n_r;3)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};3)+\frac{\sqrt{n_4+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,n_4+1,\cdot\cdot,n_r;3)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};4)+\cdots \\ +\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_r+1;3)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r),n_3\geq 1 \end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\begin{cases} a_{E_\varsigma}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r)=c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)+c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2) \\ +\cdots+c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r;r-1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r-1)+\frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{n_r}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r;r)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r),n_r=2s\geq 1 \end{cases}$$

引理3.2.3.

$$\begin{cases} c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;2)=\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_r;1),n_1\geq 1\cdots \\ c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;r)=\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r+1;1),n_1\geq 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{n_1\cdot\cdot+n_r=2s}\sum_{k=1}^{r}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};k)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_r)$$

$$=\sum_{n_1\cdot\cdot+n_r=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_r)$$

$$+\sum_{n_2\cdot\cdot+n_r=2s}\sum_{k=2}^{r}c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};k)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r)$$

证明:

$$\begin{cases} c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;2)=\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_r;1),n_1\geq 1\cdots \\ c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;r)=\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r+1;1),n_1\geq 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{n_1\cdot\cdot+n_r=2s}\sum_{k=1}^{r}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};k)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_r)$$

$$=\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r=2s}^{n_1\neq 0}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)[\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)$$

$$+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r+1;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r)]$$

$$+\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r=2s}^{n_1=0}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r)[c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)$$

$$+c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;r)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r)]$$

$$=\sum_{n_1\cdot\cdot+n_r=2s}^{1\leq n_1\leq 2s}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)$$

$$+\sum_{n_1\cdot\cdot+n_r=2s}^{0\le n_1\le 2s-1,1\le n_2\le 2s}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1+1,n_2-1,\cdot\cdot,n_r)\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot$$
$$+\sum_{n_1\cdot\cdot+n_r=2s}^{0\le n_1\le 2s-1,1\le n_r\le 2s}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_r-1)\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r)$$
$$+\sum_{n_1\cdot\cdot+n_r=2s}^{n_1=0}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r)[c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)$$
$$+c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;r)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r)]$$
$$=\sum_{n_1\cdot\cdot+n_r=2s}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)$$
$$+\sum_{n_1\cdot\cdot+n_r=2s}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1+1,n_2-1,\cdot\cdot,n_r)\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot$$
$$+\sum_{n_1\cdot\cdot+n_r=2s}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_r-1)\frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r)$$
$$+\sum_{n_1\cdot\cdot+n_r=2s}^{n_1=0}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r)[c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;r)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r)]$$
$$=\sum_{n_1\cdot\cdot+n_r=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_r)$$
$$+\sum_{n_2\cdot\cdot+n_r=2s}\sum_{k=2}^{r}c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};k)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r)$$ □

推论3.2.2.

$$\begin{cases}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;2)=\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdot\cdot,n_r;1),n_1\ge 1\cdots\\ c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;r)=\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r+1;1),n_1\ge 1\end{cases}$$
$$\begin{cases}c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;3)=\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdot\cdot,n_r;2),n_2\ge 1\cdots\\ c(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r;r)=\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_r+1;2),n_2\ge 1\end{cases}$$
$\cdots$
$$\begin{cases}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_{r-1},n_r;r)=\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_{r-1}}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_{r-1}-1,n_r+1;r),n_{r-1}\ge 1\end{cases}$$
$\Leftrightarrow$
$$\sum_{n_1\cdot\cdot+n_r=2s}\sum_{k=1}^{r}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};k)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_r)$$
$$=\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_r)$$
$$+\sum_{n_2+\cdot\cdot+n_r=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2+1}}c(\vec{p};0,n_2,n_3,\cdot\cdot,n_r;2)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,n_2+1,n_3,\cdot\cdot,n_r)$$
$$+\sum_{n_3+\cdot\cdot+n_r=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3+1}}c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_r;3)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,0,n_3+1,\cdot\cdot,n_r)$$
$$+\cdots+\sum_{n_r=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_r+1}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r;r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r+1)$$

引理3.2.4.

$$\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_r)$$
$$+\sum_{n_2+\cdot\cdot+n_r=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2+1}}c(\vec{p};0,n_2,n_3,\cdot\cdot,n_r;2)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,n_2+1,n_3,\cdot\cdot,n_r)$$
$$+\sum_{n_3+\cdot\cdot+n_r=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3+1}}c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_r;3)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,0,n_3+1,\cdot\cdot,n_r)$$
$$+\cdots+\sum_{n_r=2s}\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_r+1}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r;r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r+1)$$

$$= \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r=2s+1} a(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)$$

$$\begin{cases} a(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r) := \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1), n_1\neq 0 \\ a(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r) := \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_r;2), n_2\neq 0 \\ a(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_r) := \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_r;3), n_3\neq 0 \\ \cdots \\ a(\vec{p};0,0,\cdot\cdot,0,n_r) := \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_r}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r-1;r), n_r\neq 0 \end{cases}$$

证明: $\sum_{n_1\cdot\cdot+n_r=2s}\sum_{k=1}^{r} c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};k)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdot\cdot,n_r)$

$$= \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r=2s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1+1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdot\cdot,n_r)$$

$$+ \sum_{n_2+\cdot\cdot+n_r=2s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2+1}}c(\vec{p};0,n_2,n_3,\cdot\cdot,n_r;2)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,n_2+1,n_3,\cdot\cdot,n_r)$$

$$+ \sum_{n_3+\cdot\cdot+n_r=2s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3+1}}c(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_r;3)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,0,n_3+1,\cdot\cdot,n_r)$$

$$+\cdots+ \sum_{n_r=2s} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_r+1}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r;r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r+1)$$

$$= \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r=2s+1}^{n_1\neq 0} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)$$

$$+ \sum_{n_2+\cdot\cdot+n_r=2s+1}^{n_1=0,n_2\neq 0} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_r;2)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,n_2,n_3,\cdot\cdot,n_r)$$

$$+ \sum_{n_3+\cdot\cdot+n_r=2s+1}^{n_1=0,n_2=0,n_3\neq 0} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_r;3)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_r)$$

$$+\cdots+ \sum_{n_r=2s+1}^{n_1=0,\cdot\cdot,n_{r-1}=0,n_r\neq 0} \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_r}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r-1;r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r)$$

$$= \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r=2s+1} a(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r)$$

$$\begin{cases} a(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r) = \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r;1), n_1\neq 0 \\ a(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r) = \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdot\cdot,n_r;2), n_2\neq 0 \\ a(\vec{p};0,0,n_3,\cdot\cdot,n_r) = \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdot\cdot,n_r;3), n_3\neq 0 \\ \cdots \\ a(\vec{p};0,0,\cdot\cdot,0,n_r) = \frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_r}}c(\vec{p};0,\cdot\cdot,0,n_r-1;r), n_r\neq 0 \end{cases}$$ □

3.2.2 几个推论

推论3.2.3. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r) = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p};1)$

$+ \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2-1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r-1)\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p};r)$

推论3.2.4. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r) = \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};0,n_2-1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p};2)$

$+ \frac{\sqrt{n_3}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};0,n_2,n_3-1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p};0,0,1,\cdot\cdot,0)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{2s}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma}_{2s-1}}(\vec{p};0,n_2,\cdot\cdot,n_r-1)\lambda_{D_\varsigma}(\vec{p};r)$

推论3.2.5. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r) = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2s+1}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)$

$+ \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{2s+1}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2-1,\cdot\cdot,n_r)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2)+\cdot\cdot+\frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{2s+1}}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdot\cdot,n_r-1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r)$

3.2.3 一个重要定理

定理3.2.1.

$$\sum_{n_1+\cdots+n_r=2s} a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdots,n_r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdots,n_r)=\sum_{n_1+\cdots+n_r=2s} a_{D_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdots,n_r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots C_\varsigma E_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdots,n_r)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r)=\sum_{k=1}^{r} c(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};k)$$
$$\sum_{n_1\cdots+n_r}^{=2s} a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdots,n_r)=\sum_{n_1+\cdots+n_r}^{=2s+1} a(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r)$$
$$\begin{cases} a(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdots,n_r;1),n_1\neq 0\\ a(\vec{p};0,n_2,\cdots,n_r)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdots,n_r;2),n_2\neq 0\\ a(\vec{p};0,0,n_3,\cdots,n_r)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdots,n_r;3),n_3\neq 0\\ \cdots\\ a(\vec{p};0,0,\cdots,0,n_r)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_r}}c(\vec{p};0,\cdots,0,n_r-1;r),n_r\neq 0\end{cases}$$

证明:

$$\sum_{n_1+\cdots+n_r=2s} a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdots,n_r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdots,n_r)=\sum_{n_1+\cdots+n_r=2s} a_{D_\varsigma}(\vec{p};n_1,\cdots,n_r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots C_\varsigma E_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdots,n_r)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1+1,n_2,\cdots,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2+1,\cdots,n_r)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};2)\\ +\cdots+\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{2s}}a_{[E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r+1)\lambda_{D_\varsigma]}(\vec{p};r)=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r)=\sum_{k=1}^{r} c(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};k)$$
$$\begin{cases} a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r)=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)+\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2+1,\cdots,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2)\\ +\cdots+\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdots,n_r+1;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r),n_1\geq 1\end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{E_\varsigma}(\vec{p};0,n_2,\cdots,n_r)=c(\vec{p};0,n_2,\cdots,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)\\ +\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2,\cdots,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2)+\frac{\sqrt{n_3+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3+1,\cdots,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};3)+\cdots\\ +\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdots,n_r+1;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r),n_2\geq 1\end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{E_\varsigma}(\vec{p};0,0,n_3,\cdots,n_r)=c(\vec{p};0,0,n_3,\cdots,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)+c(\vec{p};0,0,n_3,\cdots,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2)\\ +\frac{\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3,n_4,\cdots,n_r;3)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};3)+\frac{\sqrt{n_4+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,n_4+1,\cdots,n_r;3)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};4)+\cdots\\ +\frac{\sqrt{n_r+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdots,n_r+1;3)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r),n_3\geq 1\end{cases}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\begin{cases} a_{E_\varsigma}(\vec{p};0,\cdots,0,n_r)=c(\vec{p};0,\cdots,0,n_r;1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};1)+c(\vec{p};0,\cdots,0,n_r;2)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};2)\\ +\cdots+c(\vec{p};0,\cdots,0,n_r;r-1)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r-1)+\frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{n_r}}c(\vec{p};0,\cdots,0,n_r;r)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};r),n_r=2s\geq 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$
$$a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r)=\sum_{k=1}^{r} c(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r;k)\lambda_{E_\varsigma}(\vec{p};k)$$
$$\sum_{n_1\cdots+n_r}^{=2s} a_{E_\varsigma}(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec{p};n_1,\cdots,n_r)=\sum_{n_1+\cdots+n_r}^{=2s+1} a(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r)$$
$$\begin{cases} a(\vec{p};n_1,n_2,\cdots,n_r)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_1}}c(\vec{p};n_1-1,n_2,\cdots,n_r;1),n_1\neq 0\\ a(\vec{p};0,n_2,\cdots,n_r)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_2}}c(\vec{p};0,n_2-1,n_3,\cdots,n_r;2),n_2\neq 0\\ a(\vec{p};0,0,n_3,\cdots,n_r)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_3}}c(\vec{p};0,0,n_3-1,\cdots,n_r;3),n_3\neq 0\\ \cdots\\ a(\vec{p};0,0,\cdots,0,n_r)=\frac{\sqrt{2s+1}}{\sqrt{n_r}}c(\vec{p};0,\cdots,0,n_r-1;r),n_r\neq 0\end{cases}$$

□

3.3 用数学归纳法严格求解N+1维时空中Penrose全对称方程的平面波解

定理3.3.1. $(\Gamma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma\}}_{2s}}(x)$

$$\Leftrightarrow \psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(x)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\vec p\neq 0}d^N\vec p|\vec p|^{(s-\frac12)}\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)[a_1(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)e^{-ip\cdot x}]$$

$$\begin{cases}|\vec p|^{(s-\frac12)}a_1(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}^{2s}}(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(x)e^{-ip\cdot x}d^N\vec r\\ |\vec p|^{(s-\frac12)}a_2^+(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}^{2s}}(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(x)e^{ip\cdot x}d^N\vec r\end{cases}$$

证明: 采用数学归纳法证明此定理。

第一步：$s'=1/2$时成立：

$$(\Gamma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\psi_{A_\varsigma}(x)=0,\psi_{A_\varsigma}(x)=\psi_{A_\varsigma}(x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\psi_{A_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\vec p\neq 0}d^N\vec p\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=1}\lambda_{A_\varsigma}(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)[a_1(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)e^{-ip\cdot x}]$$

第二步：假设$s'=s$时成立：

$$(\Gamma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma\}}_{2s}}(x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\vec p\neq 0}d^N\vec p|\vec p|^{(s-\frac12)}$$

$$\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)[a_1(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)e^{-ip\cdot x}]$$

第三步：$s'=s+1/2$时：

$$(\Gamma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(x)=\frac{1}{(2s+1)!}\psi_{\underbrace{\{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma\}}_{2s+1}}(x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma\}}_{2s+1}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\vec p\neq 0}d^N\vec p|\vec p|^{(s-\frac12)}\\ \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)[a_{1E_\varsigma}(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)e^{ip\cdot x}+a_{2E_\varsigma}^+(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)e^{-ip\cdot x}]\\ \psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(x)=\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma E_\varsigma D_\varsigma}_{2s+1}}(x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma\}}_{2s+1}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\vec p\neq 0}d^N\vec p|\vec p|^{(s-\frac12)}\\ \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)[a_{1E_\varsigma}(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)e^{ip\cdot x}+a_{2E_\varsigma}^+(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)e^{-ip\cdot x}]\\ \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)a_{1E_\varsigma}(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)=\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma E_\varsigma}_{2s}}(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)a_{1D_\varsigma}(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)\\ \sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma}_{2s}}(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)a_{2E_\varsigma}^+(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)=\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma E_\varsigma}_{2s}}(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)a_{2D_\varsigma}^+(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(x)\\ =\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\vec p\neq 0}d^N\vec p|\vec p|^{s}\sum_{n_1+\cdot\cdot+n_r}^{=2s+1}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot C_\varsigma D_\varsigma E_\varsigma}_{2s+1}}(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)[a_1(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec p;n_1,\cdot\cdot,n_r)e^{-ip\cdot x}]\end{cases}$$

此步证明了$s'=s+1/2$时命题成立。

第四步：根据以上归纳法推理，命题成立，定理得证。 □

3.4 N+1维时空中Penrose全对称方程的协变对易规则

定理3.4.1.

$$\begin{cases}[a_\sigma(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h}),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')]_{-^{2s+1}}=\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\vec{h}\vec{h}'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\\ [a_\sigma(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h}),a_{\sigma'}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')]_{-^{2s+1}}=0,[a^+_\sigma(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h}),a^+_{\sigma'}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=0,[\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{E'_\varsigma F'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=0,s\geq 0\end{cases}$$

证明：$[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{\vec{h},\vec{h}'}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'(|\vec{p}||\vec{p}'|)^{(s-\frac{1}{2})}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')$$
$$[[a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{-ip\cdot x}],[a_1^+(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')e^{-ip'\cdot x'}+a_2(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')e^{ip'\cdot x'}]]_{-^{2s+1}}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{\vec{h},\vec{h}'}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'(|\vec{p}||\vec{p}'|)^{(s-\frac{1}{2})}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')$$
$$\{[a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h}),a_1^+(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')]_{-^{2s+1}}e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}+[a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h}),a_2(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')]_{-^{2s+1}}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{\vec{h},\vec{h}'}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'(|\vec{p}||\vec{p}'|)^{(s-\frac{1}{2})}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\delta_{\vec{h}\vec{h}'}$$
$$[e^{i(p\cdot x-p'\cdot x')}+(-1)^{2s+1}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}]$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{\vec{h}}d^3\vec{p}|\vec{p}|^{2s-1}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})[e^{i(p\cdot x-p\cdot x')}+(-1)^{2s+1}e^{-i(p\cdot x-p\cdot x')}]$$

$$=i\frac{(-\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{-i}{|2\vec{p}|}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\overbrace{p_ap_b\cdots}^{2s}[e^{ip\cdot(x-x')}-e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$$
$$=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{-i}{|2\vec{p}|}[e^{ip\cdot(x-x')}-e^{-ip\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}$$
$$=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta(x-x')$$ □

证明：$[a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h}),a_1^+(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')]$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|^{-(2s-1)}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|^{-(2s-1)}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')$$
$$i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta(x-x')e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\vec{p}|^{-(2s-1)}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')$$
$$i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-1}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2|\vec{p}_0|}[e^{ip_0\cdot(x-x')}-e^{-ip_0\cdot(x-x')}]d^3\vec{p}_0\}e^{-i(p\cdot x-p'\cdot x')}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$
$$=[\frac{1}{(2\pi)^3}]^2\int d^3\vec{p}_0d^3\vec{r}d^3\vec{r}'|\vec{p}|^{-(2s-1)}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')(-\frac{\varsigma}{2})^{2s}\frac{1}{[(2s)!]^2}|\vec{p}_0|^{(2s-1)}$$

$$\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\overbrace{\hat{p}_{0a}\hat{p}_{0b}\cdots}^{2s}[e^{i(p_0-p)\cdot x}e^{-i(p_0-p')\cdot x'}+(-1)^{2s+1}e^{-i(p_0+p)\cdot x}e^{i(p_0+p')\cdot x'}]$$

$$=[\tfrac{1}{(2\pi)^3}]^2\int d^3\vec{p}_0d^3\vec{r}d^3\vec{r}'|\vec{p}|^{-(2s-1)}|\vec{p}_0|^{(2s-1)}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')$$

$$\sum_{\vec{h}_0}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}_0,-s\varsigma;\vec{h}_0)\lambda^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}_0,-s\varsigma;\vec{h}_0)[e^{i(p_0-p)\cdot x}e^{-i(p_0-p')\cdot x'}+(-1)^{2s+1}e^{-i(p_0+p)\cdot x}e^{i(p_0+p')\cdot x'}]$$

$$=\int\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')\sum_{\vec{h}_0}\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}_0,-s\varsigma;\vec{h}_0)\lambda^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}_0,-s\varsigma;\vec{h}_0)$$

$$[\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p}')+(-1)^{2s+1}e^{2iE_0(t-t')}\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0+\vec{p}')]d^3\vec{p}_0$$

$$=\int\sum_{\vec{h}_0}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}_0,-s\varsigma;\vec{h}_0)\lambda^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}_0,-s\varsigma;\vec{h}_0)\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p})\delta^3(\vec{p}_0-\vec{p}')d^3\vec{p}_0$$

$$=\sum_{\vec{h}_0}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}_0)\lambda^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}_0)\lambda^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$

$$=\sum_{\vec{h}_0}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h}_0)\lambda^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h}_0)\lambda^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h}')\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$

$$=\sum_{\vec{h}_0}\delta_{\vec{h}\vec{h}_0}\delta_{\vec{h}'\vec{h}_0}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')=\delta_{\vec{h}\vec{h}'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\qquad\square$$

自我评述：以上的证法不再基于等时对易规则，直接基于协变对易规则，看似更难了，其实是更简单了，因为不需要求出复杂的等时对易规则，即使求出也比较难于使用，而协变对易规则本身已知且很有规律，也可以分解为自旋基的乘积，整个证明过程基本上只依赖于自旋基的性质，没有复杂的计算。其他的几个对易括号也可按同样的方法求出，不再列出。

定理3.4.2.

$$\begin{cases}[\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}\Delta(x-x')\\ [\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=0,[\psi^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{E'_\varsigma F'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]_{-^{2s+1}}=0,s\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}}=i\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s,w)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta(x-x'),\Gamma(0):=1\\ [\psi_{k_\varsigma}(x),\psi_{l_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}}=0,[\psi^+_{k'_\varsigma}(x),\psi^+_{l'_\varsigma}(x')]_{-^{2s+1}}=0,s\geq 0\end{cases}$$

3.5 N+1维时空中Penrose全对称方程的各种物理算符

定理3.5.1. $P_u(s)=\int\psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$$=\int\sum_{\vec{h}}p_u[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})]d^3\vec{p}$$

证明: $P_u(s)=\int\psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$$=\tfrac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}\sum_{\vec{h},\vec{h}'}|\vec{p}'|^{s-\frac12}|\vec{p}|^{s-\frac12}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\tfrac{p_u}{|\vec{p}|^{2s-1}}$$

$$[a_1^+(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}+a_2(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}][a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}+(-1)^{2s}a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]$$

$$=\int\sum_{\vec{h},\vec{h}'}\vec{p}|^{2s-1}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\tfrac{p_u}{|\vec{p}|^{2s-1}}$$

$\{[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})]\delta^3(\vec{p}'-\vec{p})$
$+[(-1)^{2s}a_1^+(-\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{-2i|\vec{p}|t}+a_2(-\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{2i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}'+\vec{p})\}d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$
$=\int\sum_{\vec{h},\vec{h}'}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})p_u[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})]d^3\vec{p}$
$=\int\sum_{\vec{h}}p_u[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})]d^3\vec{p}$ □

定理3.5.2. $Q(s)=\int\psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\int\sum_{\vec{h}}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})+(-1)^{2s-1}a_2(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})]d^3\vec{p}$

证明: $Q(s)=\int\psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}\sum_{\vec{h},\vec{h}'}|\vec{p}'|^{s-\frac{1}{2}}|\vec{p}|^{s-\frac{1}{2}}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\frac{1}{|\vec{p}|^{2s-1}}$
$[a_1^+(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}+a_2(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}][a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}+(-1)^{2s-1}a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]$
$=\int\sum_{\vec{h},\vec{h}'}\vec{p}|^{2s-1}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\frac{1}{|\vec{p}|^{2s-1}}$
$\{[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})+(-1)^{2s-1}a_2(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})]\delta^3(\vec{p}'-\vec{p})$
$+[(-1)^{2s-1}a_1^+(-\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{-2i|\vec{p}|t}+a_2(-\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{2i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}'+\vec{p})\}d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$
$=\int\sum_{\vec{h}}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})+(-1)^{2s-1}a_2(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})]d^3\vec{p}$ □

定理3.5.3. $N(s)=\int\psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\int\sum_{\vec{h}}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})]d^3\vec{p}$

证明: $N(s)=\int\psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}\sum_{\vec{h},\vec{h}'}|\vec{p}'|^{s-\frac{1}{2}}|\vec{p}|^{s-\frac{1}{2}}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\frac{1}{|\vec{p}|^{2s-1}}$
$[a_1^+(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}+a_2(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}][a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}+(-1)^{2s}a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]$
$=\int\sum_{\vec{h},\vec{h}'}\vec{p}|^{2s-1}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\frac{1}{|\vec{p}|^{2s-1}}$
$\{[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})]\delta^3(\vec{p}'-\vec{p})$
$+[(-1)^{2s}a_1^+(-\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{-2i|\vec{p}|t}+a_2(-\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{2i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}'+\vec{p})\}d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$
$=\int\sum_{\vec{h}}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})]d^3\vec{p}$ □

定理3.5.4. $\vec{S}(s)=\int\psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\int\sum_{\vec{h}}\hat{p}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})]d^3\vec{p}$

证明: $\vec{S}(s)=\int\psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s-1}}{(-\nabla^2)^{2s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$
$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}\sum_{\vec{h},\vec{h}'}|\vec{p}'|^{s-\frac{1}{2}}|\vec{p}|^{s-\frac{1}{2}}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{2s-1}}$

$[a_1^+(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}+a_2(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}][a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}+(-1)^{2s}a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]$

$=\int\sum_{\vec{h},\vec{h}'}\vec{p}|^{2s-1}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{2s-1}}$

$\{[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})]\delta^3(\vec{p}'-\vec{p})$

$+[(-1)^{2s}a_1^+(-\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{-2i|\vec{p}|t}+a_2(-\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{2i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}'+\vec{p})\}d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$

$=\int\sum_{\vec{h}}\hat{p}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})+(-1)^{2s}a_2(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})]d^3\vec{p}$ □

定理3.5.5. $\vec{M}(s)=\int\psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\int\sum_{\vec{h}}\hat{p}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})+(-1)^{2s-1}a_2(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})]d^3\vec{p}$

证明: $\vec{M}(s)=\int\psi^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{r},t)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{-\nabla^2})^{4s-1}}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)d^3\vec{r}$

$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}'d^3\vec{p}d^3\vec{r}\sum_{\vec{h},\vec{h}'}|\vec{p}'|^{s-\frac{1}{2}}|\vec{p}|^{s-\frac{1}{2}}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{2s-1}}$

$[a_1^+(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}+a_2(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{r}-|\vec{p}'|t)}][a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}+(-1)^{2s-1}a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-|\vec{p}|t)}]$

$=\int\sum_{\vec{h},\vec{h}'}\vec{p}|^{2s-1}\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p}',-s\varsigma;\vec{h}')\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|^{2s-1}}$

$\{[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})+(-1)^{2s-1}a_2(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})]\delta^3(\vec{p}'-\vec{p})$

$+[(-1)^{2s-1}a_1^+(-\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{-2i|\vec{p}|t}+a_2(-\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})e^{2i|\vec{p}|t}]\delta^3(\vec{p}'+\vec{p})\}d^3\vec{p}'d^3\vec{p}$

$=\int\sum_{\vec{h}}\hat{p}[a_1^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_1(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})+(-1)^{2s-1}a_2(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})a_2^+(\vec{p},-s\varsigma;\vec{h})]d^3\vec{p}$ □

3.6 Bargmann-Wigner方程的作用量

定理3.6.1. $S?=\int\psi^+_{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}(x)\gamma_0^{A'_\varsigma Z_\varsigma}\gamma_0^{B'_\varsigma B_\varsigma}\cdots(\gamma^a{}_{Z_\varsigma}{}^{A_\varsigma}\partial_a+m\delta_{Z_\varsigma}{}^{A_\varsigma})\psi_{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}(x)d^4x$

3.7 N+1维时空中Penrose全对称方程的对易函数、因果函数和费曼传播子

引理3.7.1.

$[\theta(t),\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}]=-\frac{i^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\sum_{n=0}^{2s-1}\varsigma^nC_{2s}^n\overbrace{\Gamma^i_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}\Gamma^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-}$

证明: $[\theta(t),\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdots}^{2s}]$

$=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots\})}^{2s}[\theta(t),\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}]$

$=-\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\sum_{n=0}^{2s-1}C_{2s}^n\overbrace{\Gamma^i_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}\Gamma^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}(i\varsigma)^{2s-n}[\partial_\pi^{2s-n},\theta(t)]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}$

$=-\frac{i^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\sum_{n=0}^{2s-1}\varsigma^nC_{2s}^n\overbrace{\Gamma^i_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}\Gamma^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}[\partial_t^{2s-n},\theta(t)]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}$

$=-\frac{i^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\sum_{n=0}^{2s-1}\varsigma^nC_{2s}^n\overbrace{\Gamma^i_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}\Gamma^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdots\})}^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdots}^{n}\sum_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}$ □

推论3.7.1.

$$\begin{cases}
\Delta_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x):=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x)\\
\Delta^{(+)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x):=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2s}\Delta^{(+)}(x)\\
\Delta^{(-)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x):=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2s}\Delta^{(-)}(x)\\
\Delta^{(l)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x):=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2s}\Delta^{(l)}(x)
\end{cases}$$

推论3.7.2.

$$\begin{cases}
\Delta^{(c)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x):=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2s}\Delta^{(c)}(x)\\
-\frac{i^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\sum_{n=0}^{2s-1}\varsigma^nC^n_{2s}\overbrace{\Gamma^i_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}\Gamma^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s-n}(i\varsigma)^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{n}\sum_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\\
\Delta^{(F)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x)=i\Delta^{(c)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x):=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2s}\Delta_F(x)\\
-\frac{i^{2s+1}}{2^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s-1}\varsigma^nC^n_{2s}\overbrace{\Gamma^i_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}\Gamma^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s-n}(i\varsigma)^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{n}\sum_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)
\end{cases}$$

推论3.7.3.

$$\begin{cases}
\Delta^{(ret)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x):=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2s}\Delta^{(ret)}(x)\\
-\frac{i^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\sum_{n=0}^{2s-1}\varsigma^nC^n_{2s}\overbrace{\Gamma^i_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}\Gamma^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s-n}(i\varsigma)^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{n}\sum_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)\\
\Delta^{(adv)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x):=\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\overbrace{(\Gamma,i\varsigma)^a_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s}\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{2s}\Delta^{(adv)}(x)\\
-\frac{i^{2s}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\sum_{n=0}^{2s-1}\varsigma^nC^n_{2s}\overbrace{\Gamma^i_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}\Gamma^j_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdot\cdot\})}^{2s-n}(i\varsigma)^{2s-n}\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{n}\sum_{l=1}^{2s-n}\partial_t^{2s-n-l}\delta(t)\partial_t^{l-1}\Delta(x)
\end{cases}$$

引理3.7.2. $\Delta_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot E_\varsigma F_\varsigma\cdot\cdot Z_\varsigma}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot E'_\varsigma F'_\varsigma\cdot\cdot Z'_\varsigma}_{2s}}(s;x)|_{t=0}$

$$=i\frac{(i\varsigma)^{2s+1}}{2^{2s-1}[(2s)!]^2}\sum_{k=0}^{[s-\frac{1}{2}]}\frac{(2s)!}{(2s-2k-1)!(2k)!1!}\overbrace{(\Gamma\cdot\nabla)_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\Gamma\cdot\nabla)_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s-2k-1}\overbrace{\delta_{E_\varsigma E'_\varsigma}\delta_{F_\varsigma F'_\varsigma}\cdot\cdot\delta_{Z_\varsigma\}Z'_\varsigma)}}^{2k+1}\nabla^{2k}\delta^3(\vec{r})$$

推论3.7.4.

$$\begin{cases}
(\Gamma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Delta_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x)=0\\
(\Gamma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(+)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x)=0\\
(\Gamma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(-)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x)=0\\
(\Gamma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(l)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;x)=0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\Gamma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(c)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=-\varsigma\delta(t)\Delta_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)|_{t=0}\\(\Gamma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(ret)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=-\varsigma\delta(t)\Delta_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)|_{t=0}\\(\Gamma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(adv)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=-\varsigma\delta(t)\Delta_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)|_{t=0}\\(\Gamma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(F)}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)=-i\varsigma\delta(t)\Delta_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;x)|_{t=0}\end{cases}$$

推论3.7.5.

$$\begin{cases}(\Gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=0\\(\Gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=0\\(\Gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=0\\(\Gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=0\end{cases}\quad\begin{cases}(\Gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(c)}_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=i\varsigma\delta_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}\delta^{N+1}(x)\\(\Gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(ret)}_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=i\varsigma\delta_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}\delta^{N+1}(x)\\(\Gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(adv)}_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=i\varsigma\delta_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}\delta^{N+1}(x)\\(\Gamma,-i\varsigma)_a\partial^a\Delta^{(F)}_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}(\frac{1}{2};x)=-\varsigma\delta_{\{A_\varsigma(A'_\varsigma}\delta^{N+1}(x)\end{cases}$$

第三十八章　低维时空粒子的协变量子化

自我评述：对于Bargmann-Wigner方程或Dirac方程描述的粒子，一般来说既可以描述带荷的复粒子，也可以描述不带荷的马约拉纳粒子。两种情形的主对易规则形式一致，但其余对易或反对易括号，对带荷的复粒子一般为零；对不带荷的马约拉纳粒子，其余对易或反对易括号由主对易规则和马约拉纳条件自然得到，一般不为零。在本章只讨论复粒子情形，一般也只给出主对易规则，不再专门讨论马约拉纳粒子情形，若要得到马约拉纳粒子情形的量子场论，只需在复粒子情形加上马约拉纳条件即可自然得到。本章描述的二、三维时空粒子可以认为是四维时空粒子在y,z轴或z轴受限后的结果，因而有现实的意义，可以应用于凝聚态物理。另外二维时空粒子也可以认为是三维时空粒子在y 轴进一步受限后的结果。三维时空粒子对应量子面；二维时空粒子对应量子线；一维时空粒子对应量子点。

1 三维时空中有质量粒子的协变量子化

1.1 三维时空中有质量粒子的Bargmann-Wigner方程

1.1.1 三维时空中的Dirac方程自旋基及其平面波解

定义1.1.1. $u(\vec{p}) := \sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, v(\vec{p}) := \sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

推论1.1.1. $u(\vec{p}) = \sigma_x v^*(\vec{p}), v(\vec{p}) = \sigma_x u^*(\vec{p})$

定理1.1.1. $(\gamma^a\partial_a + m)\psi = 0, \gamma^a = (-\sigma_y, \sigma_x, \varsigma\sigma_z)$

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}[a(\vec{p})\sqrt{\tfrac{m}{E}}u(\vec{p})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b^+(\vec{p})\sqrt{\tfrac{m}{E}}v(\vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d\vec{p}$$

$$a(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\tfrac{E}{m}}u^+(\vec{p})\psi(\vec{r},t)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d\vec{r}, b^+(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\tfrac{E}{m}}v^+(\vec{p})\psi(\vec{r},t)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d\vec{r}$$

1.1.2 三维时空中Dirac自旋基的性质

推论1.1.2. $\begin{cases}\bar{u}(\vec{p})u(\vec{p}) = 1, \bar{v}(\vec{p})v(\vec{p}) = -1, \bar{u}(\vec{p})v(\vec{p}) = 0, \bar{v}(\vec{p})u(\vec{p}) = 0\\ u^+(\vec{p})u(\vec{p}) = \frac{E}{m}, v^+(\vec{p})v(\vec{p}) = \frac{E}{m}, u^+(\vec{p})v(-\vec{p}) = 0, v^+(\vec{p})u(-\vec{p}) = 0\end{cases}$

推论1.1.3. $\begin{cases}u(\vec{p})\bar{u}(\vec{p}) = \frac{m-i\gamma^a p_a}{2m}\\ v(\vec{p})\bar{v}(\vec{p}) = \frac{-m-i\gamma^a p_a}{2m}\end{cases}\quad \begin{cases}u(\vec{p})u^+(\vec{p}) = \frac{(m-i\gamma^a p_a)\gamma^0}{2m} = \frac{m\sigma_z-(\sigma,i\varsigma)^a p_a}{\varsigma 2m}\\ v(\vec{p})v^+(\vec{p}) = \frac{(-m-i\gamma^a p_a)\gamma^0}{2m} = \frac{-m\sigma_z-(\sigma,i\varsigma)^a p_a}{\varsigma 2m}\end{cases}$

推论1.1.4. $u(\vec{p})\bar{u}(\vec{p}) - v(\vec{p},h)\bar{v}(\vec{p}) = 1, u(\vec{p})\bar{u}(\vec{p}) + v(\vec{p},h)\bar{v}(\vec{p}) = \frac{-i\gamma^a p_a}{m}, u(\vec{p})u^+(\vec{p}) + v(-\vec{p},h)v^+(-\vec{p}) = \frac{E}{m}$

1.1.3 三维时空中Dirac方程的协变量子化规则

推论1.1.5. $\begin{cases}\{a(\vec{p}), a^+(\vec{p}')\} = \delta(\vec{p}-\vec{p}')\\ \{a(\vec{p}), a(\vec{p}')\} = 0, \{a^+(\vec{p}), a^+(\vec{p}')\} = 0\end{cases} \Rightarrow \{\psi_{\lambda_\varsigma}(x), \psi^+_{\lambda'_\varsigma}(x')\} = i[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\Delta(x-x')$

1.2 三维时空中的Bargmann-Wigner方程

1.2.1 三维时空中Bargmann-Wigner方程 [18]的自旋基及其平面波解

定义1.2.1. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}) := \underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p})\cdots}_{2s}, V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}) := \underbrace{v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p})\cdots}_{2s}$

推论1.2.1. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}) = \underbrace{\sigma_x\otimes\sigma_x\cdots}_{2s}V^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}), V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p}) = \underbrace{\sigma_x\otimes\sigma_x\cdots}_{2s}U^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})$

定理1.2.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\}}_{2s}}(\vec{r},t)$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}[a(\vec{p})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}$$

$$\begin{cases}a(\vec{p})=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^N\vec{r}\\ b^+(\vec{p})=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^N\vec{r}\end{cases}$$

1.2.2 三维时空中Bargmann-Wigner方程自旋基的正交性质

推论1.2.2.

$$\begin{cases}\bar{U}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=1,\bar{V}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=1\\ \bar{U}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=0,\bar{V}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=(\frac{E}{m})^{2s},V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=(\frac{E}{m})^{2s}\\ U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(-\vec{p})=0,V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(-\vec{p})=0\end{cases}$$

1.2.3 三维时空中Bargmann-Wigner方程的准投影算子

推论1.2.3.

$$\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=\frac{1}{(2m)^{2s}}\underbrace{[(m-i\gamma^bp_b)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^cp_c)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2s}\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=\frac{1}{(2m)^{2s}}\underbrace{[(-m-i\gamma^bp_b)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(-m-i\gamma^cp_c)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2s}\end{cases}$$

推论1.2.4.

$$\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=\frac{1}{(\varsigma 2m)^{2s}}\underbrace{[m\sigma_z-(\sigma,i\varsigma)^ap_a]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[m\sigma_z-(\sigma,i\varsigma)^bp_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2s}\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=\frac{1}{(\varsigma 2m)^{2s}}\underbrace{[-m\sigma_z-(\sigma,i\varsigma)^ap_a]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[-m\sigma_z-(\sigma,i\varsigma)^bp_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2s}\end{cases}$$

推论1.2.5. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(p)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(p)=(-1)^{2s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(-p)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(-p)$

1.2.4 三维时空中Bargmann-Wigner方程的协变对易规则

定理1.2.2. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]=\frac{i}{2^{2s-1}}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2s}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理1.2.3. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\underbrace{[-im\sigma_z+(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[-im\sigma_z+(\sigma,i\varsigma)^b\partial_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2s}\Delta(x-x')$

1.3 三维时空中有质量粒子势方程的具体表述

自我评述：此节类比四维时空中的情形，探究三维时空中是否存在与B-W方程等价的C-K或R-S方程？

1.3.1 三维时空中有质量自旋-1的B-W方程等价于类C-K方程 [18,20]

定理1.3.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=0,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}=\psi_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma},A_a=\frac{1}{\sqrt{2}im}(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma},\gamma^a=(-\sigma_y,\sigma_x,\varsigma\sigma_z)$
$\Leftrightarrow\partial_aA_b-\partial_bA_a=i\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^cA_c,\psi=im\gamma^a\varepsilon A_a\Rightarrow(\partial^b\partial_b-m^2)A_a=0,\partial^aA_a=0$

定理1.3.2. $(\gamma^a\partial_a+m)\psi(x)=0,\psi^T(x)=\psi(x),A_a=\frac{1}{\sqrt{2}im}tr(\bar{\varepsilon}\gamma_a\psi),\gamma^a=(-\sigma_y,\sigma_x,\varsigma\sigma_z)$
$\Leftrightarrow\partial_aA_b-\partial_bA_a=i\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^cA_c,\psi=\frac{im}{\sqrt{2}}\gamma^a\varepsilon A_a\Rightarrow(\partial^b\partial_b-m^2)A_a=0,\partial^aA_a=0$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)\psi(x)=0,\psi=\frac{im}{\sqrt{2}}\gamma^a\varepsilon A_a$
$\Leftrightarrow(\gamma^a\partial_a+m)\frac{im}{\sqrt{2}}\gamma^b\varepsilon A_b=0$
$\Leftrightarrow(\gamma^a\partial_a+m)\gamma^bA_b=0$
$\Leftrightarrow\delta^{ab}\partial_aA_b+i\varsigma\varepsilon^{abc}\partial_aA_b\gamma_c+m\gamma_cA^c=0$
$\Leftrightarrow\partial^aA_a+(i\varsigma\varepsilon^{ab}{}_c\partial_aA_b+mA_c)\gamma^c=0$
$\Leftrightarrow\partial^aA_a=0,i\varsigma\varepsilon^{ab}{}_c\partial_aA_b+mA_c=0$
$\Leftrightarrow\varepsilon^{ab}{}_c\partial_aA_b=i\varsigma mA_c\Leftrightarrow\nabla\times\vec{A}=i\varsigma m\vec{A}$
$\Leftrightarrow\varepsilon^{a'b'c}\varepsilon^{ab}{}_c\partial_aA_b=i\varsigma m\varepsilon_{a'b'}{}^cA_c$
$\Leftrightarrow(\delta^{a'a}\delta^{b'b}-\delta^{a'b}\delta^{b'a})\partial_aA_b=i\varsigma m\varepsilon_{a'b'}{}^cA_c$
$\Leftrightarrow\partial_aA_b-\partial_bA_a=i\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^cA_c$
$\Rightarrow\partial^a\partial_aA_b-\partial_b\partial^aA_a=i\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^c\partial^aA_c$
$\Leftrightarrow(\partial^a\partial_a-m^2)A_b=0$ □

定理1.3.3. $\gamma^a\partial_a\psi(x)=0,\psi^T(x)=\psi(x),A_a=\frac{1}{\sqrt{2}im}tr(\bar{\varepsilon}\gamma_a\psi),\gamma^a=(-\sigma_y,\sigma_x,\varsigma\sigma_z)$
$\Leftrightarrow\partial_aA_b-\partial_bA_a=0,\partial^aA_a=0,\psi=im\gamma^a\varepsilon A_a\Rightarrow\partial^b\partial_bA_a=0,\partial^aA_a=0$

证明: $\gamma^a\partial_a\psi(x)=0,\psi=\frac{im}{\sqrt{2}}\gamma^a\varepsilon A_a$
$\Leftrightarrow\gamma^a\partial_a\frac{im}{\sqrt{2}}\gamma^b\varepsilon A_b=0$
$\Leftrightarrow\gamma^a\partial_a\gamma^bA_b=0$
$\Leftrightarrow\delta^{ab}\partial_aA_b+i\varsigma\varepsilon^{abc}\partial_aA_b\gamma_c=0$
$\Leftrightarrow\partial^aA_a+i\varsigma\varepsilon^{ab}{}_c\partial_aA_b=0$
$\Leftrightarrow\partial^aA_a=0,i\varsigma\varepsilon^{ab}{}_c\partial_aA_b=0$
$\Leftrightarrow\partial^aA_a=0,\varepsilon^{ab}{}_c\partial_aA_b=0\Leftrightarrow\partial^aA_a=0,\nabla\times\vec{A}=0$
$\Leftrightarrow\partial^aA_a=0,\varepsilon^{a'b'c}\varepsilon^{ab}{}_c\partial_aA_b=0$
$\Leftrightarrow\partial^aA_a=0,(\delta^{a'a}\delta^{b'b}-\delta^{a'b}\delta^{b'a})\partial_aA_b=0$
$\Leftrightarrow\partial^aA_a=0,\partial_aA_b-\partial_bA_a=0$
$\Rightarrow\partial^aA_a=0,\partial^a\partial_aA_b-\partial_b\partial^aA_a=0$
$\Leftrightarrow\partial^a\partial_aA_b=0,\partial^aA_a=0$ □

1.3.2 三维时空中有质量自旋-$\frac{3}{2}$的B-W方程等价于类R-S方程 [18,20]

定理1.3.4. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(x)=0,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=\frac{1}{3!}\psi_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\}},A_{a\eta_\varsigma}=\frac{1}{\sqrt{2}im}(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_aA_{b\eta_\varsigma}-\partial_bA_{a\eta_\varsigma}=i\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^cA_{c\eta_\varsigma}\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=\frac{im}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma},\gamma^aA_{a[\eta_\varsigma]}=0\end{cases}\Rightarrow(\gamma^b\partial_b+m)A_{a[\eta_\varsigma]}=0,\gamma^aA_{a[\eta_\varsigma]}=0$$

证明:
$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(x)=0,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=\frac{1}{3!}\psi_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\}}\\ A_{a\eta_\varsigma}=\frac{1}{\sqrt{2}im}(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma},\gamma^a=(\sigma_x,\sigma_y,\varsigma\sigma_z)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_aA_{b\eta_\varsigma}-\partial_bA_{a\eta_\varsigma}=i\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^cA_{c\eta_\varsigma}\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=\frac{im}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma},\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=\psi_{\lambda_\varsigma\eta_\varsigma\mu_\varsigma}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_a A_{b\eta_\varsigma} - \partial_b A_{a\eta_\varsigma} = i\varsigma m \varepsilon_{ab}{}^c A_{c\eta_\varsigma} \\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma} = \frac{im}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} A_{a\eta_\varsigma}, \varepsilon^{\mu_\varsigma\eta_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \partial_a A_{b\eta_\varsigma} - \partial_b A_{a\eta_\varsigma} = i\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^c A_{c\eta_\varsigma}, \gamma^a A_{a[\eta_\varsigma]} = 0$$

$$\Rightarrow \gamma^a\partial_a A_{b[\eta_\varsigma]} - \partial_b \gamma^a A_{a[\eta_\varsigma]} = i\varsigma m \varepsilon_{ab}{}^c \gamma^a A_{c[\eta_\varsigma]}, \gamma^a A_{a\eta_\varsigma} = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma^a\partial_a A_{b[\eta_\varsigma]} + \tfrac{1}{2}m[\gamma_c,\gamma_b]A^c_{[\eta_\varsigma]} = 0, \gamma^a A_{a\eta_\varsigma} = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma^a\partial_a A_{b\eta_\varsigma} + \tfrac{1}{2}m\{\gamma_c,\gamma_b\}A^c_{[\eta_\varsigma]} = 0, \gamma^a A_{a\eta_\varsigma} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\gamma^b\partial_b + m)A_{a[\eta_\varsigma]} = 0, \gamma^a A_{a[\eta_\varsigma]} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\gamma^b\partial_b + m)A_{a[\eta_\varsigma]} = 0, \gamma^a A_{a[\eta_\varsigma]} = 0, \partial^a A_{a\eta_\varsigma} = 0$$ □

1.3.3 三维时空中有质量自旋-2的B-W方程等价于类C-K方程 [18, 20]

定理1.3.5. $(\gamma^a\partial_a + m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x) = 0, \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = \frac{1}{4!}\psi_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}, A_{ab} = (\frac{1}{\sqrt{2}im})^2(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_a A_{bd} - \partial_b A_{ad} = i\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^c A_{cd}, A_{ab} = A_{ba} \\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = (\frac{im}{\sqrt{2}})^2(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma^b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}, \delta^{ab}A_{ab} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\partial^c\partial_c - m^2)A_{ab} = 0, A_{ab} = A_{ba} \\ \delta^{ab}A_{ab} = 0, \partial^a A_{ab} = 0 \end{cases}$$

证明:

$$\begin{cases} (\gamma^a\partial_a + m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x) = 0, \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = \frac{1}{4!}\psi_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}} \\ A_{ab} := (\frac{1}{\sqrt{2}im})^2(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}, \gamma^a = (-\sigma_y, \sigma_x, \varsigma\sigma_z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\gamma^a\partial_a + m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x) = 0, \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = \frac{1}{4!}\psi_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}} \\ A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma} := \frac{1}{\sqrt{2}im}(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_a A_{b\eta_\varsigma\xi_\varsigma} - \partial_b A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = i\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^c A_{c\eta_\varsigma\xi_\varsigma}, A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = A_{a\xi_\varsigma\eta_\varsigma} \\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = \frac{im}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}, \gamma^a A_{a[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_a A_{b\eta_\varsigma\xi_\varsigma} - \partial_b A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = i\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^c A_{c\eta_\varsigma\xi_\varsigma}, A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = A_{a\xi_\varsigma\eta_\varsigma} \\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = \frac{im}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}, \gamma^a A_{a[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_a A_{bd} - \partial_b A_{ad} = i\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^c A_{cd}, A_{ab} = A_{ba}, \delta^{ab}A_{ab} = 0 \\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = (\frac{im}{\sqrt{2}})^2(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma^b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\partial^c\partial_c - m^2)A_{ab} = 0, A_{ab} = A_{ba}, \delta^{ab}A_{ab} = 0, \partial^a A_{ab} = 0$$ □

1.4 三维时空中有质量玻色子势方程的一般表述

1.4.1 数学准备

性质1.4.1. $(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} = \delta^{\{\lambda_\varsigma}_{\lambda'_\varsigma}\delta^{\mu_\varsigma\}}_{\mu'_\varsigma}$

性质1.4.2. $(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\eta_{aa'}(\bar\varepsilon\gamma^{a'})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} = \delta^{\{\lambda_\varsigma}_{\lambda'_\varsigma}\delta^{\mu_\varsigma\}}_{\mu'_\varsigma} - 2|\varepsilon_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}||\varepsilon^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}|$

1.4.2 三维时空中有质量自旋-n的B-W方程等价于类C-K方程 [18, 20]

定理1.4.1.

$$\begin{cases} (\gamma^a\partial_a + m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x) = 0 \\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}} = \frac{1}{(2n)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\}}_{2n}} \\ A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}} = (\frac{1}{\sqrt{2}im})^n\underbrace{(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_a A_{\underbrace{bd\cdot\cdot}_{n}}(x) - \partial_b A_{\underbrace{ad\cdot\cdot}_{n}}(x) = i\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^c A_{\underbrace{cd\cdot\cdot}_{n}}(x) \\ A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}} = \frac{1}{n!}A_{\underbrace{\{ab\cdot\cdot\}}_{n}}, \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}} = 0 \\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}} = (\frac{im}{\sqrt{2}})^n\underbrace{(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma^b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\Rightarrow$$

$$\begin{cases} (\partial^c\partial_c - m^2)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}} = 0 \\ A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}} = \frac{1}{n!}A_{\underbrace{\{ab\cdot\cdot\}}_{n}}, \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}} = 0, \partial^a A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}} = 0 \end{cases}$$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2n}[a(\vec{p})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}$$

$$A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}[a(\vec{p})\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p})\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}$$

$$\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p}),\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})$$

1.4.3 三维时空中有质量自旋-n的B-W方程自旋基和类C-K方程自旋基之间关系

推论1.4.1.

$$\begin{cases}(i\gamma^ap_a+m)U_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})=0\\ U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})\text{全对称}\\ \varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(p^cp_c+m^2)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})=0\\ p_a\varepsilon_{\underbrace{bd\cdots}_{n}}(x)-p_b\varepsilon_{\underbrace{ad\cdots}_{n}}=\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^c\varepsilon_{\underbrace{cd\cdots}_{n}}\\ \delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})=0,p^a\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})=0,\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})\text{全对称}\\ U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})=(\frac{i}{2})^n\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})\end{cases}$$

推论1.4.2.

$$\begin{cases}(-i\gamma^ap_a+m)V_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})=0\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})\text{全对称}\\ \tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(p^cp_c+m^2)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})=0\\ p_a\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{bd\cdots}_{n}}(x)-p_b\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ad\cdots}_{n}}=-\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^c\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{cd\cdots}_{n}}\\ \delta^{ab}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})=0,p^a\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})=0,\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})\text{全对称}\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})=(\frac{i}{2})^n\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})\end{cases}$$

推论1.4.3.

$$\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})=(\frac{i}{2})^n\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})[\Leftrightarrow]\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})=(\frac{i}{2})^n\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})[\Leftrightarrow]\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})\end{cases}$$

推论1.4.4. $\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})=\underbrace{\varepsilon_a(\vec{p})\varepsilon_b(\vec{p})\cdots}_{n},\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec{p})=\underbrace{\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p})\tilde{\varepsilon}_b(\vec{p})\cdots}_{n}$

1.4.4 三维时空中的类Klein-Gordon方程自旋基$\varepsilon_a(\vec{p})$及其性质

推论1.4.5. $u(\vec{p}):=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

定理1.4.2. $\varepsilon_a(\vec{p})=(i\varsigma+\frac{i\varsigma p_x(p_x+i\varsigma p_y)}{m(E+m)},-1+\frac{i\varsigma p_y(p_x+i\varsigma p_y)}{m(E+m)},-\varsigma\frac{p_x+i\varsigma p_y}{m})$

证明: $u^T(\vec{p})u(\vec{p})$

$$=\frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^T(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)(1-\frac{\varsigma\sigma^*\cdot\vec{p}}{E+m})(1-\frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$
$$=\frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^T(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)(1+\frac{\sigma^*\cdot\vec{p}}{E+m}\frac{\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$
$$=\frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^T(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)(1+\frac{p_x^2-p_y^2+2ip_xp_y\sigma_z}{(E+m)^2})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{2m(E+m)}[(E+m)^2+p_x^2-p_y^2+2i\varsigma p_xp_y]$$
$$=1+\frac{p_x(p_x+i\varsigma p_y)}{m(E+m)}$$
□

证明: $u^T(\vec{p})\sigma_z u(\vec{p})$
$= \frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^T(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)(1-\frac{\varsigma\sigma^*\cdot\vec{p}}{E+m})\sigma_z(1-\frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
$= \frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^T(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)(1-\frac{\sigma^*\cdot\vec{p}}{E+m}\frac{\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\varsigma\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
$= \frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^T(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)(1-\frac{p_x^2-p_y^2+2ip_xp_y\sigma_z}{(E+m)^2})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\varsigma\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
$= \frac{\varsigma}{2m(E+m)}[(E+m)^2-p_x^2+p_y^2-2i\varsigma p_xp_y]$
$= \varsigma-\frac{ip_y(p_x+i\varsigma p_y)}{m(E+m)}$ □

证明: $u^T(\vec{p})\sigma_x u(\vec{p})$
$= \frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^T(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)(1-\frac{\varsigma\sigma^*\cdot\vec{p}}{E+m})\sigma_x(1-\frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
$= \frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^T\sigma_x(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)(1-\frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(1-\frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
$= \frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^T\sigma_x(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\frac{-2\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m}(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
$= -\varsigma\frac{(p_x+i\varsigma p_y)}{m}$ □

证明: $\varepsilon_a(\vec{p})=-i(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p})$
$= -iu^T(\vec{p})(\bar{\varepsilon}\gamma_a)u(\vec{p})$
$= u^T(\vec{p})(1,i\sigma_z,-i\varsigma\sigma_x)u(\vec{p})$
$= (1+\frac{p_x(p_x+i\varsigma p_y)}{m(E+m)},i\varsigma+\frac{p_y(p_x+i\varsigma p_y)}{m(E+m)},i\frac{p_x+i\varsigma p_y}{m})$
$= (1+\frac{p_x(p_x-i\varsigma p_y)}{m(E+m)},-i\varsigma+\frac{p_y(p_x-i\varsigma p_y)}{m(E+m)},i\frac{(p_x-i\varsigma p_y)}{m})$ □

推论1.4.6. $\varepsilon_a(\vec{p})\varepsilon^+_{a'}(\vec{p})=\begin{bmatrix}1+\frac{p_x^2}{m^2} & \frac{p_xp_y}{m^2}-\frac{\varsigma p_\pi}{m} & -\frac{p_xp_\pi}{m^2}-\frac{\varsigma p_y}{m}\\ \frac{p_xp_y}{m^2}+\frac{\varsigma p_\pi}{m} & 1+\frac{p_y^2}{m^2} & -\frac{p_yp_\pi}{m^2}+\frac{\varsigma p_x}{m}\\ \frac{p_xp_\pi}{m^2}-\frac{\varsigma p_y}{m} & \frac{p_yp_\pi}{m^2}+\frac{\varsigma p_x}{m} & -1-\frac{p_\pi^2}{m^2}\end{bmatrix}=\frac{1}{m}\begin{bmatrix}m & -\varsigma p_\pi & -\varsigma p_y\\ \varsigma p_\pi & m & \varsigma p_x\\ -\varsigma p_y & \varsigma p_x & -m\end{bmatrix}+\frac{1}{m^2}\begin{bmatrix}p_xp_x^+ & p_xp_y^+ & p_xp_\pi^+\\ p_yp_x^+ & p_yp_y^+ & p_yp_\pi^+\\ p_\pi p_x^+ & p_\pi p_y^+ & p_\pi p_\pi^+\end{bmatrix}$

推论1.4.7. $\varepsilon_a(\vec{p})\varepsilon^+_{a'}(\vec{p})=\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2}-\frac{\varsigma\varepsilon_{acd}\eta^c_{a'}p^d}{m}$

推论1.4.8. $\varepsilon_a(\vec{p})\delta^{ab}\varepsilon_b(\vec{p})=0,\varepsilon_a(\vec{p})p^a=0,\varepsilon^+_a(\vec{p})\eta^{aa'}\varepsilon_{a'}(\vec{p})=2,\varepsilon^+_a(\vec{p})\delta^{aa'}\varepsilon_{a'}(\vec{p})=2(\frac{E}{m})^2$

推论1.4.9. $\varepsilon_{\underbrace{ab..}_{n}}(\vec{p})\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'..}_{n}}(\vec{p})=\underbrace{(\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2}-\frac{\varsigma\varepsilon_{acd}\eta^c_{a'}p^d}{m})(\eta_{bb'}+\frac{p_bp^+_{b'}}{m^2}-\frac{\varsigma\varepsilon_{bcd}\eta^c_{b'}p^d}{m})\cdots}_{n}$

1.4.5 三维时空中的类Klein-Gordon方程自旋基$\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p})$及其性质

推论1.4.10. $v(\vec{p}):=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

定理1.4.3. $\varepsilon_a(\vec{p})=(i\varsigma+\frac{i\varsigma p_x(p_x+i\varsigma p_y)}{m(E+m)},-1+\frac{i\varsigma p_y(p_x+i\varsigma p_y)}{m(E+m)},-\varsigma\frac{p_x+i\varsigma p_y}{m})$

证明: $v^T(\vec{p})v(\vec{p})$
$= \frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^T(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)(1-\frac{\varsigma\sigma^*\cdot\vec{p}}{E+m})(1-\frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
$= \frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^T(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)(1+\frac{\sigma^*\cdot\vec{p}}{E+m}\frac{\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
$= \frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^T(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)(1+\frac{p_x^2-p_y^2+2ip_xp_y\sigma_z}{(E+m)^2})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
$= \frac{1}{2m(E+m)}[(E+m)^2+p_x^2-p_y^2-2i\varsigma p_xp_y]$
$= 1+\frac{p_x(p_x-i\varsigma p_y)}{m(E+m)}$ □

证明: $v^T(\vec{p})\sigma_z v(\vec{p})$
$= \frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^T(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)(1-\frac{\varsigma\sigma^*\cdot\vec{p}}{E+m})\sigma_z(1-\frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
$= -\frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^T(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)(1-\frac{\sigma^*\cdot\vec{p}}{E+m}\frac{\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\varsigma\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
$= -\frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^T(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)(1-\frac{p_x^2-p_y^2+2ip_xp_y\sigma_z}{(E+m)^2})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\varsigma\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$= \frac{-\varsigma}{2m(E+m)}[(E+m)^2 - p_x^2 + p_y^2 + 2i\varsigma p_x p_y]$
$= -\varsigma - \frac{ip_y(p_x - i\varsigma p_y)}{m(E+m)}$ □

证明: $v^T(\vec{p})\sigma_x v(\vec{p})$
$= \frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^T(\frac{1+\varsigma}{2} + \frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)(1 - \frac{\varsigma\sigma^*\cdot\vec{p}}{E+m})\sigma_x(1 - \frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2} + \frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
$= \frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^T\sigma_x(\frac{1+\varsigma}{2} + \frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)(1 - \frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(1 - \frac{\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2} + \frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
$= \frac{E+m}{2m}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^T\sigma_x(\frac{1+\varsigma}{2} + \frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\frac{-2\varsigma\sigma\cdot\vec{p}}{E+m}(\frac{1+\varsigma}{2} + \frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
$= -\varsigma\frac{(p_x - i\varsigma p_y)}{m}$ □

证明: $\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p}) = -i(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p})$
$= -iv^T(\vec{p})(\bar{\varepsilon}\gamma_a)v(\vec{p})$
$= v^T(\vec{p})(1, i\sigma_z, -i\varsigma\sigma_x)v(\vec{p})$
$= (1 + \frac{p_x(p_x - i\varsigma p_y)}{m(E+m)}, -i\varsigma + \frac{p_y(p_x - i\varsigma p_y)}{m(E+m)}, i\frac{(p_x - i\varsigma p_y)}{m})$ □

推论1.4.11. $\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p}) = \varepsilon^+_{a'}(\vec{p})\eta_a^{a'}, \tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}) = \varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})\underbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdot\cdot}_{n}$

推论1.4.12. $\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p})\tilde{\varepsilon}^+_{a'}(\vec{p}) = \eta_{aa'} + \frac{p_a p^+_{a'}}{m^2} + \frac{\varsigma\varepsilon_{acd}\eta^c_{a'}p^d}{m}$

推论1.4.13. $\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p})\delta^{ab}\tilde{\varepsilon}_b(\vec{p}) = 0, \tilde{\varepsilon}_a(\vec{p})p^a = 0, \tilde{\varepsilon}^+_a(\vec{p})\eta^{aa'}\tilde{\varepsilon}_{a'}(\vec{p}) = 2, \tilde{\varepsilon}^+_a(\vec{p})\delta^{aa'}\tilde{\varepsilon}_{a'}(\vec{p}) = 2(\frac{E}{m})^2$

推论1.4.14. $\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}) = \underbrace{(\eta_{aa'} + \frac{p_a p^+_{a'}}{m^2} + \frac{\varsigma\varepsilon_{acd}\eta^c_{a'}p^d}{m})(\eta_{bb'} + \frac{p_b p^+_{b'}}{m^2} + \frac{\varsigma\varepsilon_{bcd}\eta^c_{b'}p^d}{m})\cdots}_{n}$

1.4.6 三维时空中有质量玻色子各种准投影算子之间关系

推论1.4.15.
$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}) = \overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}\varepsilon)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}\varepsilon)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p})\\ \tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p}) = \overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}\varepsilon)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}\varepsilon)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p})V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p})\end{cases}$$

推论1.4.16.
$$\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p}) = \frac{1}{2^{2n}}\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_{a'})^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p})V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p}) = \frac{1}{2^{2n}}\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_{a'})^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})\end{cases}$$

推论1.4.17.
$$\begin{cases}[A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x), A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(x')] = \frac{1}{m^{2n}2^{n}}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}\varepsilon)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x), \psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')]\\ [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x), \psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(x')] = \frac{m^{2n}}{2^n}\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_{a'})^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}[A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x), A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(x')]\end{cases}$$

1.4.7 三维时空中有质量玻色子准投影算子的等价表述

引理1.4.1.
$$\begin{cases}u(\vec{p})u^+(\vec{p}) = \frac{(m - i\gamma^a p_a)\gamma^0}{2m}, u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p}) = u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p})\\ \varepsilon_a(\vec{p})\varepsilon^+_{a'}(\vec{p}) = \eta_{aa'} + \frac{p_a p^+_{a'}}{m^2} - \frac{\varsigma\varepsilon_{acd}\eta^c_{a'}p^d}{m}, \varepsilon_a(\vec{p})\varepsilon^+_{a'}(\vec{p})\varepsilon_b(\vec{p})\varepsilon^+_{b'}(\vec{p}) = \varepsilon_a(\vec{p})\varepsilon^+_{b'}(\vec{p})\varepsilon_b(\vec{p})\varepsilon^+_{a'}(\vec{p})\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}[(m-i\gamma^a p_a)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}=[(m-i\gamma^a p_a)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^b p_b)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\mu'_\varsigma}\\ (\eta_{aa'}+\frac{p_a p^+_{a'}}{m^2}-\frac{\varsigma\varepsilon_{acd}\eta^c_{a'}p^d}{m})(\eta_{bb'}+\frac{p_b p^+_{b'}}{m^2}-\frac{\varsigma\varepsilon_{bcd}\eta^c_{b'}p^d}{m})=(\eta_{ab'}+\frac{p_a p^+_{b'}}{m^2}-\frac{\varsigma\varepsilon_{acd}\eta^c_{b'}p^d}{m})(\eta_{ba'}+\frac{p_b p^+_{a'}}{m^2}-\frac{\varsigma\varepsilon_{bcd}\eta^c_{a'}p^d}{m})\\ [(m-i\gamma^b p_b)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^c p_c)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}=m^2(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma^{a'})_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\eta_{aa'}+\frac{p_a p^+_{a'}}{m^2}-\frac{\varsigma\varepsilon_{acd}\eta^c_{a'}p^d}{m})\end{cases}$$

推论1.4.18.

$$\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec p)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec p)=\frac{1}{2^{2n}}\underbrace{[(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma^{a'})_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\eta_{aa'}+\frac{p_a p^+_{a'}}{m^2}-\frac{\varsigma\varepsilon_{acd}\eta^c_{a'}p^d}{m})]\cdots}_{n}\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec p)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec p)=\frac{1}{2^{2n}}\underbrace{[(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma^{a'})_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\eta_{aa'}+\frac{p_a p^+_{a'}}{m^2}+\frac{\varsigma\varepsilon_{acd}\eta^c_{a'}p^d}{m})]\cdots}_{n}\end{cases}$$

1.4.8 三维时空中有质量玻色子协变对易规则

定理1.4.4. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{2n-1}}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2n}\Delta(x-x')$

$[\Updownarrow]$

定理1.4.5. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(x')]=i\frac{i^{2n}}{2^{2n-1}}\underbrace{[-im\sigma_z+(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[-im\sigma_z+(\sigma,i\varsigma)^b\partial_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2n}\Delta(x-x')$

$[\Updownarrow]$

定理1.4.6. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{2n-1}}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdots}_{n}\underbrace{(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}+\frac{i\varsigma\varepsilon_{acd}\eta^c_{a'}\partial^d}{m})\cdots}_{n}\Delta(x-x')$

$[\Updownarrow]$

定理1.4.7. $[A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(x')]=\frac{i}{2^{n-1}}\underbrace{(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}+\frac{i\varsigma\varepsilon_{acd}\eta^c_{a'}\partial^d}{m})\cdots}_{n}\Delta(x-x')$

1.5 三维时空中费米子势方程的一般表述

1.5.1 三维时空中有质量自旋-$n+\frac{1}{2}$的B-W方程等价于类R-S方程 [18,20]

定理1.5.1.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x)=0\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}=\frac{1}{(2n+1)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma\}}_{2n+1}}\\ A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}\\ =(\frac{1}{\sqrt{2}im})^n\underbrace{(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}_{n}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_a A_{\underbrace{bd\cdots}_{n}\tau_\varsigma}-\partial_b A_{\underbrace{ad\cdots}_{n}\tau_\varsigma}=i\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^c A_{\underbrace{cd\cdots}_{n}\tau_\varsigma}\\ A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}=\frac{1}{n!}A_{\underbrace{\{ab\cdots\}}_{n}\tau_\varsigma},\delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}=0,\gamma^a A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}=0\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}=(\frac{im}{\sqrt2})^n\underbrace{(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma^b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}_{n}A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}\end{cases}$$

$\Rightarrow\Rightarrow$

$$\begin{cases}(\gamma^c\partial_c+m)A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}=0,\gamma^a A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}=0\\ A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}=\frac{1}{n!}A_{\underbrace{\{ab\cdots\}}_{n}\tau_\varsigma},\delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}=0,\partial^a A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}=0\end{cases}$$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}E^n\sqrt{\frac{m}{E}}^{2n+1}[a(\vec p)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec p)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+b^+(\vec p)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec p)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^N\vec p$$

$$A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt m}{\sqrt{2^nE}}[a(\vec p)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec p)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+b^+(\vec p)\tilde\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec p)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^N\vec p$$

$$\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec p)=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec p),\tilde\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec p)=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec p)$$

推论1.5.1. $\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec p)=\underbrace{\varepsilon_a(\vec p)\varepsilon_b(\vec p)\cdots}_{n}u_{\tau_\varsigma}(\vec p),\tilde\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec p)=\underbrace{\tilde\varepsilon_a(\vec p)\tilde\varepsilon_b(\vec p)\cdots}_{n}v_{\tau_\varsigma}(\vec p)$

1.5.2 三维时空中有质量自旋-$n+\frac{1}{2}$的B-W方程自旋基和类R-S方程自旋基之间关系

推论1.5.2.

$$\begin{cases}(i\gamma^a p_a+m)U_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})=0\\ U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})\text{全对称}\\ \varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})\\ =\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(p^cp_c+m^2)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=0,\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})\text{全对称}\\ p_a\varepsilon_{\underbrace{bd\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(x)-p_b\varepsilon_{\underbrace{ad\cdots}_{n}\tau_\varsigma}=\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^{c}\varepsilon_{\underbrace{cd\cdots}_{n}\tau_\varsigma}\\ \delta^{ab}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=0,p^a\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=0,\gamma^a\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}=0\\ U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})=(\frac{i}{2})^n\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})\end{cases}$$

推论1.5.3.

$$\begin{cases}(-i\gamma^a p_a+m)V_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})=0\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})\text{全对称}\\ \tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})\\ =\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(p^cp_c+m^2)\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=0,\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})\text{全对称}\\ p_a\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{bd\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(x)-p_b\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ad\cdots}_{n}\tau_\varsigma}=-\varsigma m\varepsilon_{ab}{}^{c}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{cd\cdots}_{n}\tau_\varsigma}\\ \delta^{ab}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=0,p^a\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=0,\gamma^a\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}=0\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})=(\frac{i}{2})^n\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})\end{cases}$$

推论1.5.4.

$$\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})=(\frac{i}{2})^n\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})[\Leftrightarrow]\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})=(\frac{i}{2})^n\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})[\Leftrightarrow]\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})\end{cases}$$

推论1.5.5. $\tilde{\varepsilon}_{a[\tau_\varsigma]}(\vec{p})=\sigma_x\varepsilon^{+}_{a'[\tau'_\varsigma]}(\vec{p})\eta_a^{a'},\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}[\tau_\varsigma]}(\vec{p})=\sigma_x\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}[\tau'_\varsigma]}(\vec{p})\underbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdots}_{n}$

1.5.3 三维时空中有质量费米子各种准投影算子之间关系

推论1.5.6.

$$\begin{cases}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots\tau_\varsigma}_{n}}(\vec{p})\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(\vec{p})=\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}\varepsilon)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}\varepsilon)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})U^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})\\ \tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots\tau_\varsigma}_{n}}(\vec{p})\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'b'\cdots\tau'_\varsigma}_{n}}(\vec{p})=\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}\varepsilon)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}\varepsilon)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})V^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})\end{cases}$$

推论1.5.7.

$$\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})U^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})=\frac{1}{2^{2n}}\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_{a'})^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})\varepsilon^{+}_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p})\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})V^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})=\frac{1}{2^{2n}}\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_{a'})^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})\tilde{\varepsilon}^{+}_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p})\end{cases}$$

推论1.5.8.

$$\begin{cases}\{A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(x),A^{+}_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\}=\frac{1}{m^{2n}2^{n}}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}\varepsilon)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')\}\\ \{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^{+}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')\}=\frac{m^{2n}}{2^{n}}\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_{a'})^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}\{A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(x),A^{+}_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\}\end{cases}$$

1.5.4 三维时空中有质量费米子准投影算子的等价表述

推论1.5.9.

$$\begin{cases} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec p)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(\vec p)=\frac{1}{2^{2n+1}m}\underbrace{[(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma^{a'})_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2}-\frac{\varsigma\varepsilon_{acd}\eta^c_{a'}p^d}{m})]\cdots}_{n}[(m-i\gamma^cp_c)\gamma^0]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma} \\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec p)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(\vec p)=\frac{1}{2^{2n+1}m}\underbrace{[(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma^{a'})_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2}+\frac{\varsigma\varepsilon_{acd}\eta^c_{a'}p^d}{m})]\cdots}_{n}[(-m-i\gamma^cp_c)\gamma^0]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma} \end{cases}$$

1.5.5 三维时空中有质量费米子协变对易规则

定理1.5.2. $\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x')\}=\frac{i}{2^{2n}}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2n+1}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理1.5.3. $\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x')\}=i\frac{(i\varsigma)^{2n+1}}{2^{2n}}\underbrace{[-im\sigma_z+(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[-im\sigma_z+(\sigma,i\varsigma)^b\partial_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2n+1}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理1.5.4. $\{\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')\}$

$$=\frac{i}{2^{2n}m}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdots}_{n}\underbrace{(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}+\frac{i\varsigma\varepsilon_{acd}\eta^c_{a'}\partial^d}{m})\cdots}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^0]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$$

$$[\Updownarrow]$$

定理1.5.5. $\{A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}\tau_\varsigma}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\}=\frac{i}{2^n}\underbrace{(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}+\frac{i\varsigma\varepsilon_{acd}\eta^c_{a'}\partial^d}{m})\cdots}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^0]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$

自我评述：三维时空中确实存在与**B-W**方程等价的类**C-K**或**R-S**方程，且形式上比四维的更简单明晰。

1.6 三维时空中s-自旋方程

定理1.6.1. $[\gamma^a\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)$全对称$,\gamma_a:=[-\sigma_y,\sigma_x,\varsigma\sigma_z]$

$\Leftrightarrow[s\partial_a+m\gamma_a(s)+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s)=0,S_{ab}(s,\varsigma)=-i[\gamma_a(s),\gamma_b(s)],\gamma_a(s):=[-\sigma_y(s),\sigma_x(s),\varsigma\sigma_z(s)]$

证明: $[\gamma^a\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)$全对称

$\Leftrightarrow[\gamma^a\partial_a+m]\hat\psi(s)=0$

$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_aD^a\hat\psi(s)=im\sigma_z\otimes I_{2^{2s-1}}\hat\psi(s),D^a=(\partial^x,\partial^y,0,\partial^\pi)$

$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_aD^a[I\otimes\Gamma(s)]N(s)\psi(s)=im\sigma_z\otimes I_{2^{2s-1}}\hat\psi(s)$

$\Leftrightarrow[I\otimes\Gamma(s)](\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_aD^aN(s)\psi(s)=im\sigma_z\otimes I_{2^{2s-1}}\hat\psi(s)$

$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_aD^aN(s)\psi(s)=im[I\otimes\bar\Gamma(s)](\sigma_z\otimes I_{2^{2s-1}})\hat\psi(s)$

$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_aD^aN(s)\psi(s)=im(\sigma_z\otimes I_{2s})[I\otimes\bar\Gamma(s)]\hat\psi(s)$

$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_aD^aN(s)\psi(s)=im(\sigma_z\otimes I_{2s})N(s)\psi(s)$

$\Leftrightarrow Z_bD^b\psi(s)=im\frac{i\varsigma}{\sqrt2}(\sigma_z\otimes I_{2s})N(s)\psi(s)$

$\Leftrightarrow\bar Z_aZ_bD^b\psi(s)=im\frac{i\varsigma}{\sqrt2}\bar Z_a(\sigma_z\otimes I_{2s})N(s)\psi(s)$

$\Leftrightarrow\bar Z_aZ_bD^b\psi(s)=im\frac{i\varsigma}{\sqrt2}\frac{-i\varsigma}{\sqrt2}\bar N(s)(\sigma\otimes I_{2s},i\varsigma)_a(\sigma_z\otimes I_{2s})N(s)\psi(s)$

$\Leftrightarrow\bar Z_aZ_bD^b\psi(s)=-\frac{m}{2s}\bar N(s)[(-\sigma_y,\sigma_x,-i)\otimes I_{2s},\varsigma\sigma_z\otimes I_{2s}]_aN(s)\psi(s)$

$\Leftrightarrow[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma;4)D^b]\psi(s)=-m[(-\sigma_y(s),\sigma_x(s),-is),\varsigma\sigma_z(s)]_a\psi(s)$

$S_{ab}(s,\varsigma;4)\succ\begin{bmatrix}0&\sigma_z(s)&-\sigma_y(s)&-\varsigma\sigma_x(s)\\-\sigma_z(s)&0&\sigma_x(s)&-\varsigma\sigma_y(s)\\\sigma_y(s)&-\sigma_x(s)&0&-\varsigma\sigma_z(s)\\\varsigma\sigma_x(s)&\varsigma\sigma_y(s)&\varsigma\sigma_z(s)&0\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s)=-m\gamma_a(s)\psi(s),S_{ab}(s,\varsigma)=-i[\gamma_a(s),\gamma_b(s)]\succ\begin{bmatrix}0&\sigma_z(s)&-\varsigma\sigma_x(s)\\-\sigma_z(s)&0&-\varsigma\sigma_y(s)\\\varsigma\sigma_x(s)&\varsigma\sigma_y(s)&0\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow[s\partial_a+m\gamma_a(s)+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s)=0$ □

引理1.6.1. $\gamma_a(s)=[e^{\vartheta}]_a{}^b e^{\frac{1}{2}\vartheta^{ab}[\gamma_a(s),\gamma_b(s)]}\gamma_b(s)e^{-\frac{1}{2}\vartheta^{ab}[\gamma_a(s),\gamma_b(s)]}=[e^{i\omega R_z+\epsilon\cdot L}]_a{}^b e^{i\omega\sigma_z(s)+\varsigma\epsilon\cdot\sigma(s)}\gamma_b(s)e^{-i\omega\sigma_z(s)-\varsigma\epsilon\cdot\sigma(s)}$

定理1.6.2.

$$\begin{cases}[\gamma^a\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)\text{全对称}\\ \psi_{k_\varsigma}(x):=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}^{2s}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[\gamma^a(s)\partial_a+sm]\psi_{[k_\varsigma]}(x)=0\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}}\psi_{k_\varsigma}(x)\end{cases}$$

1.7 三维时空中的Bargmann-Wigner方程 [18]等价于Penrose方程 [1,2]

定理1.7.1.

$$\begin{cases}[\gamma^a\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)\text{全对称}\\ \psi_{k_\varsigma}(x):=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}^{2s}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi_{[k_\varsigma]}(x)=-m\gamma_a(s)\psi_{[k_\varsigma]}(x)\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}}\psi_{k_\varsigma}(x)\end{cases}$$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\vec p=-\infty}^{+\infty}E^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}[a(\vec p,h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec p)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+b^+(\vec p,h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec p)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^N\vec p$$

$$\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\vec p=-\infty}^{+\infty}E^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2n}[a(\vec p,h)U_{k_\varsigma}(\vec p;s)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+b^+(\vec p,h)V_{k_\varsigma}(\vec p;s)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^N\vec p$$

$$\begin{cases}U_{k_\varsigma}(\vec p;s):=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec p)\Leftrightarrow U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec p)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}U_{k_\varsigma}(\vec p;s)\\ V_{k_\varsigma}(\vec p;s):=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec p)\Leftrightarrow V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec p)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}V_{k_\varsigma}(\vec p;s)\end{cases}$$

定理1.7.2. $(\gamma^a\partial_a+m)\psi(x)=0,\gamma^a=(-\sigma_y,\sigma_x,\varsigma\sigma_z)\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\psi(x)=im\sigma_z\psi(x),\sigma=(\sigma_x,\sigma_y)$

定理1.7.3. $(\gamma^a\partial_a+m)\psi(x)=M\sigma_x\psi^*(x),\gamma^a=(-\sigma_y,\sigma_x,\varsigma\sigma_z)\Leftrightarrow(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\psi(x)=im\sigma_z\psi(x)+M\sigma_y\psi^*(x)$

1.8 四维时空中z轴受限的Majorana方程等价于三维时空中的Penrose方程 [1,2]

推论1.8.1.

$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\nu(x)-me^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(x)=0\\ \psi(x)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}\nu(x)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(x)\\-\nu(x)-ie^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(x)\end{bmatrix}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)\psi(x)=0,\gamma^a=(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_z)\\ \psi^*(x)=-e^{2i\theta}\sigma_y\otimes\sigma_y\psi(x)\\ \nu(x)=\frac{1}{\sqrt2}[\psi_1(x)+ie^{-2i\theta}\sigma_y\psi_1^*(x)]\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nu(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\frac{E+m-\varsigma\vec p\cdot\sigma}{\sqrt{2m(E+m)}}\frac{1}{\sqrt2}(\xi_0e^{i\varsigma p\cdot x}+ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi_0^*e^{-i\varsigma p\cdot x})d^N\vec p\\ \psi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\frac{E+m+\varsigma\vec p\cdot\sigma\otimes\sigma_x}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{bmatrix}\xi_0e^{i\varsigma p\cdot x}\\-ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi_0^*e^{-i\varsigma p\cdot x}\end{bmatrix}d^3\vec p=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\begin{bmatrix}\frac{(E+m)\xi_0e^{i\varsigma p\cdot x}-\varsigma\vec p\cdot\sigma(ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi_0^*)e^{-i\varsigma p\cdot x}}{\sqrt{2m(E+m)}}\\ \frac{-(E+m)(ie^{-2i\theta}\sigma_y\xi_0^*)e^{-i\varsigma p\cdot x}+\varsigma\vec p\cdot\sigma\xi_0e^{i\varsigma p\cdot x}}{\sqrt{2m(E+m)}}\end{bmatrix}d^N\vec p\end{cases}$$

$\xi_0=a(\vec p,\frac12)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+a(\vec p,-\frac12)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 或 $\xi_0=a(\vec p,-\frac{\varsigma}{2})\lambda(\hat p,-\frac{\varsigma}{2})+a(\vec p,\frac{\varsigma}{2})\lambda(\hat p,\frac{\varsigma}{2})$

2 三维时空中广义Bargmann-Wigner方程

2.1 三维时空中广义的Bargmann-Wigner方程

推论2.1.1.

$(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\nu(x)-im\sigma_z\nu(x)-Me^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(x)=0\Leftrightarrow(\gamma^a\partial_a+m)\nu(x)=M\sigma_xe^{-2i\theta}\nu^*(x),\gamma^a=(-\sigma_y,\sigma_x,\varsigma\sigma_z)$

$$\begin{cases}[i\varsigma\gamma^a(\vec p,iE_+)^a+(m+M)]\xi_+(\vec p)=0,[-i\varsigma\gamma^a(\vec p,iE_+)^a+(m+M)]\eta_+(\vec p)=0\\ [i\varsigma\gamma^a(\vec p,iE_-)^a+(m-M)]\xi_-(\vec p)=0,[-i\varsigma\gamma^a(\vec p,iE_-)^a+(m-M)]\eta_-(\vec p)=0\\ \nu(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int d^N\vec p\{\xi_+(\vec p)e^{i\varsigma[\vec p\cdot\vec r-E_+t]}-e^{2i\theta}\sigma_x\xi_+^*(\vec p)e^{-i\varsigma[\vec p\cdot\vec r-E_+t]}+\xi_-(\vec p)e^{i\varsigma[\vec p\cdot\vec r-E_-t]}+e^{2i\theta}\sigma_x\xi_-^*(\vec p)e^{-i\varsigma[\vec p\cdot\vec r-E_-t]}\}\end{cases}$$

证明:

$$(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\nu(x)-im\sigma_z\nu(x)-Me^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(x)=0\Leftrightarrow(\gamma^a\partial_a+m)\nu(x)=M\sigma_xe^{-2i\theta}\nu^*(x),\gamma^a=(-\sigma_y,\sigma_x,\varsigma\sigma_z)$$

$$\Rightarrow[\partial^a\partial_a-(m+M)^2][\partial^a\partial_a-(m-M)^2]\nu(x)=0,E_+=\sqrt{\vec{p}^2+(m+M)^2},E_-=\sqrt{\vec{p}^2+(m-M)^2}$$

$$\nu(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\vec{p}\{\xi_+(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_+t]}+\eta_+(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_+t]}+\xi_-(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_-t]}+\eta_-(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_-t]}\}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}&i\varsigma(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_+)^a\{\xi_+(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_+t]}-\eta_+(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_+t]}\}\\&+i\varsigma(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_-)^a\{\xi_-(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_-t]}-\eta_-(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_-t]}\}\\&-im\sigma_z\\&\{\xi_+(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_+t]}+\eta_+(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_+t]}\\&+\xi_-(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_-t]}+\eta_-(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_-t]}\}\\&-Me^{-2i\theta}\sigma_y\\&\{\xi_+^*(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_+t]}+\eta_+^*(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_+t]}\\&+\xi_-^*(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_-t]}+\eta_-^*(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_-t]}\}=0\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}&\{[i\varsigma(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_+)^a-im\sigma_z]\xi_+(\vec{p})-Me^{-2i\theta}\sigma_y\eta_+^*(\vec{p})\}e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_+t]}\\&+\{[-i\varsigma(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_+)^a-im\sigma_z]\eta_+(\vec{p})-Me^{-2i\theta}\sigma_y\xi_+^*(\vec{p})\}e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_+t]}\\&+\{[i\varsigma(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_-)^a-im\sigma_z]\xi_-(\vec{p})-Me^{-2i\theta}\sigma_y\eta_-^*(\vec{p})\}\{e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_-t]}\\&+\{[-i\varsigma(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_-)^a-im\sigma_z]\eta_-(\vec{p})-Me^{-2i\theta}\sigma_y\xi_-^*(\vec{p})\}e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_-t]}=0\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow(M\neq0,m\neq0)$

$$\begin{cases}[i\varsigma(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_+)^a-im\sigma_z]\xi_+(\vec{p})-Me^{-2i\theta}\sigma_y\eta_+^*(\vec{p})=0\\[-i\varsigma(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_+)^a-im\sigma_z]\eta_+(\vec{p})-Me^{-2i\theta}\sigma_y\xi_+^*(\vec{p})=0\\[i\varsigma(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_-)^a-im\sigma_z]\xi_-(\vec{p})-Me^{-2i\theta}\sigma_y\eta_-^*(\vec{p})=0\\[-i\varsigma(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_-)^a-im\sigma_z]\eta_-(\vec{p})-Me^{-2i\theta}\sigma_y\xi_-^*(\vec{p})=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow(M\neq0,m\neq0)$

$$\begin{cases}M\eta_+(\vec{p})=-e^{-2i\theta}\sigma_y[-i\varsigma(\sigma^*,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_+)^a+im\sigma_z]\xi_+^*(\vec{p})\\[-i\varsigma(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_+)^a-im\sigma_z]\eta_+(\vec{p})-Me^{-2i\theta}\sigma_y\xi_+^*(\vec{p})=0\\Me^{-2i\theta}\sigma_y\eta_-^*(\vec{p})=-e^{-2i\theta}\sigma_y[-i\varsigma(\sigma^*,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_-)^a+im\sigma_z]\xi_-^*(\vec{p})\\[-i\varsigma(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_-)^a-im\sigma_z]\eta_-(\vec{p})-Me^{-2i\theta}\sigma_y\xi_-^*(\vec{p})=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow(M\neq0,m\neq0)$

$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_+)^a\xi_+(\vec{p})=\varsigma\sigma_z(m+M)\xi_+(\vec{p}),(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_+)^a\eta_+(\vec{p})=-\varsigma\sigma_z(m+M)\eta_+(\vec{p})\\M\eta_+^*(\vec{p})=e^{2i\theta}\sigma_y[i\varsigma(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_+)^a-im\sigma_z]\xi_+(\vec{p})\\(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_-)^a\xi_-(\vec{p})=\varsigma\sigma_z(m-M)\xi_-(\vec{p}),(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_-)^a\eta_-(\vec{p})=-\varsigma\sigma_z(m-M)\eta_-(\vec{p})\\M\eta_-^*(\vec{p})=e^{2i\theta}\sigma_y[i\varsigma(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_-)^a-im\sigma_z]\xi_-(\vec{p})\end{cases}$$

$\Leftrightarrow(M\neq0,m\neq0)$

$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_+)^a\xi_+(\vec{p})=\varsigma\sigma_z(m+M)\xi_+(\vec{p}),(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_+)^a\eta_+(\vec{p})=-\varsigma\sigma_z(m+M)\eta_+(\vec{p})\\\eta_+(\vec{p})=-e^{-2i\theta}\sigma_x\xi_+^*(\vec{p})\\(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_-)^a\xi_-(\vec{p})=\varsigma\sigma_z(m-M)\xi_-(\vec{p}),(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_-)^a\eta_-(\vec{p})=-\varsigma\sigma_z(m-M)\eta_-(\vec{p})\\\eta_-(\vec{p})=e^{-2i\theta}\sigma_x\xi_-^*(\vec{p})\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_+)^a\xi_+(\vec{p})=\varsigma\sigma_z(m+M)\xi_+(\vec{p}),(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_+)^a\eta_+(\vec{p})=-\varsigma\sigma_z(m+M)\eta_+(\vec{p})\\(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_-)^a\xi_-(\vec{p})=\varsigma\sigma_z(m-M)\xi_-(\vec{p}),(\sigma,-i\varsigma)_a(\vec{p},iE_-)^a\eta_-(\vec{p})=-\varsigma\sigma_z(m-M)\eta_-(\vec{p})\\\nu(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int d^N\vec{p}\{\xi_+(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_+t]}-e^{-2i\theta}\sigma_x\xi_+^*(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_+t]}\\+\xi_-(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_-t]}+e^{-2i\theta}\sigma_x\xi_-^*(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_-t]}\}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}[i\varsigma\gamma^a(\vec{p},iE_+)^a+(m+M)]\xi_+(\vec{p})=0,[-i\varsigma\gamma^a(\vec{p},iE_+)^a+(m+M)]\eta_+(\vec{p})=0\\[i\varsigma\gamma^a(\vec{p},iE_-)^a+(m-M)]\xi_-(\vec{p})=0,[-i\varsigma\gamma^a(\vec{p},iE_-)^a+(m-M)]\eta_-(\vec{p})=0\\\nu(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int d^N\vec{p}\{\xi_+(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_+t]}-e^{-2i\theta}\sigma_x\xi_+^*(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_+t]}\\+\xi_-(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_-t]}+e^{-2i\theta}\sigma_x\xi_-^*(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_-t]}\}\end{cases}$$ □

2.2 三维时空中的广义Majorana B-W方程

推论2.2.1.

$(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\nu(x)-i(m\pm M)\sigma_z\nu(x)=0\Leftrightarrow(\gamma^a\partial_a+m\pm M)\nu(x)=0,\gamma^a=(-\sigma_y,\sigma_x,\varsigma\sigma_z)$

$\nu(x)=i\sigma_x\nu^*(x),e^{-2i\theta}=-\pm i$

$$\begin{cases}[i\varsigma\gamma^a(\vec{p},iE_\pm)^a+(m\pm M)]\xi_\pm(\vec{p})=0,[-i\varsigma\gamma^a(\vec{p},iE_\pm)^a+(m\pm M)]\sigma_x\xi_\pm^*(\vec{p})=0\\\nu(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int d^N\vec{p}\{\xi_\pm(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_\pm t]}+i\sigma_x\xi_\pm^*(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_\pm t]}\}\end{cases}$$

推论2.2.2.

$(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\nu(x)-im\sigma_z\nu(x)=0\Leftrightarrow(\gamma^a\partial_a+m)\nu(x)=0,\gamma^a=(-\sigma_y,\sigma_x,\varsigma\sigma_z)$

$\nu(x)=i\sigma_x\nu^*(x),e^{-2i\theta}=-i$

$$\begin{cases}[i\varsigma\gamma^a(\vec{p},iE)^a+m]\xi(\vec{p})=0,[-i\varsigma\gamma^a(\vec{p},iE)^a+m]\sigma_x\xi^*(\vec{p})=0\\\nu(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int d^N\vec{p}\{\xi(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-Et]}+i\sigma_x\xi^*(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-Et]}\}\end{cases}$$

2.3 三维时空中实表象的广义Bargmann-Wigner方程

推论2.3.1.

$S_{xy}S_c(\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i&1\\1&i\end{bmatrix},[S_{xy}S_c(\frac{1}{2})]^+=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i&1\\1&-i\end{bmatrix}$

$S_{xy}S_c(\frac{1}{2})\sigma_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&i\\i&1\end{bmatrix},[S_{xy}S_c(\frac{1}{2})\sigma_x]^+=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-i\\-i&1\end{bmatrix}$

$\sigma_x[S_{xy}S_c(\frac{1}{2})]^+(-\sigma_y,\sigma_x,\varsigma\sigma_z)S_{xy}S_c(\frac{1}{2})\sigma_x^+=\sigma_x(\sigma_z,\sigma_x,\varsigma\sigma_y)\sigma_x^+=(-\sigma_z,\sigma_x,-\varsigma\sigma_y)$

推论2.3.2.

$(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\nu(x)+im\sigma_y\nu(x)-Me^{-2i\theta}\sigma_y\nu^*(x)=0\Leftrightarrow(\gamma^a\partial_a+m)\nu(x)=-iMe^{-2i\theta}\nu^*(x),\gamma^a=(-\sigma_z,\sigma_x,-\varsigma\sigma_y)_{xz\pi}$

$$\begin{cases}[i\varsigma\gamma^a(\vec{p},iE_+)^a+(m+M)]\xi_+(\vec{p})=0,[-i\varsigma\gamma^a(\vec{p},iE_+)^a+(m+M)]\eta_+(\vec{p})=0\\[i\varsigma\gamma^a(\vec{p},iE_-)^a+(m-M)]\xi_-(\vec{p})=0,[-i\varsigma\gamma^a(\vec{p},iE_-)^a+(m-M)]\eta_-(\vec{p})=0\\\nu(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int d^N\vec{p}\{\xi_+(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_+t]}+ie^{-2i\theta}\xi_+^*(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_+t]}+\xi_-(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_-t]}-ie^{-2i\theta}\xi_-^*(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_-t]}\}\end{cases}$$

2.4 三维时空中实表象的广义Majorana B-W方程

推论2.4.1.

$(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\nu(x)+i(m\pm M)\sigma_y\nu(x)=0\Leftrightarrow(\gamma^a\partial_a+m\pm M)\nu(x)=0,\gamma^a=(-\sigma_z,\sigma_x,-\varsigma\sigma_y),\nu^*(x)=\nu(x)$

$$\begin{cases}[i\varsigma\gamma^a(\vec{p},iE_\pm)^a+(m\pm M)]\xi_\pm(\vec{p})=0,[-i\varsigma\gamma^a(\vec{p},iE_\pm)^a+(m\pm M)]\xi_\pm^*(\vec{p})=0\\\nu(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int d^N\vec{p}\{\xi_\pm(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_\pm t]}+\xi_\pm^*(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-E_\pm t]}\}\end{cases}$$

推论2.4.2.
$(\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\nu(x)+im\sigma_y\nu(x)=0\Leftrightarrow(\gamma^a\partial_a+m)\nu(x)=0,\gamma^a=(-\sigma_z,\sigma_x,-\varsigma\sigma_y),\nu^*(x)=\nu(x)$
$$\begin{cases}[i\varsigma\gamma^a(\vec{p},iE)^a+m]\xi(\vec{p})=0,[-i\varsigma\gamma^a(\vec{p},iE)^a+m]\xi^*(\vec{p})=0\\ \nu(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int d^N\vec{p}\{\xi(\vec{p})e^{i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-Et]}+\xi^*(\vec{p})e^{-i\varsigma[\vec{p}\cdot\vec{r}-Et]}\}\end{cases}$$

3 三维时空中直观表象下的Bargmann-Wigner方程

3.1 三维时空中直观表象下的Dirac方程

证明: $D_{\vec{v}}=e^{-ln[\gamma_v(1+v)]\hat{v}\cdot(\frac{i}{2}\vec{\gamma}\gamma_0)}=\frac{1+\gamma_v-i\gamma_v\vec{v}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{\sqrt{2(\gamma_v+1)}}=\frac{E+m-i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{\sqrt{2m(E+m)}}=\frac{m-i\gamma^a p_a\gamma_0}{\sqrt{2m(E+m)}}$ □

定义3.1.1. $(\gamma^a\partial_a+m)\psi=0,\gamma^a=(1\otimes\sigma_x,1\otimes\sigma_y,\varsigma1\otimes\sigma_z)$

定义3.1.2. $u(\vec{p}):=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\varsigma\sigma\cdot\vec{p}\sigma_z}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},v(\vec{p}):=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\varsigma\sigma\cdot\vec{p}\sigma_z}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

推论3.1.1. $u(\vec{p})=\sigma_x v^*(\vec{p}),v(\vec{p})=\sigma_x u^*(\vec{p})$

推论3.1.2. $S_{xy}(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)S_{xy}^+=(-\sigma_y,\sigma_x,\sigma_z),S_{xy}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-i\end{bmatrix},S_{xy}^+=\begin{bmatrix}1&0\\0&i\end{bmatrix}$

3.2 三维时空中直观表象下的类Klein-Gordon方程自旋基$\varepsilon_a(\vec{p}),\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p})$及其性质

定理3.2.1. $u(\vec{p}):=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\varsigma\sigma\cdot\vec{p}\sigma_z}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\gamma^a=(\sigma_x,\sigma_y,\varsigma\sigma_z)$
$\Rightarrow\varepsilon_a(\vec{p})=-i(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p})=-iu^T(\vec{p})(\bar{\varepsilon}\gamma_a)u(\vec{p})$
$=(i\varsigma+\frac{i\varsigma p_x(p_x+i\varsigma p_y)}{m(E+m)},-1+\frac{i\varsigma p_y(p_x+i\varsigma p_y)}{m(E+m)},-\varsigma\frac{p_x+i\varsigma p_y}{m})=i\varsigma(1+\frac{p_x(p_x+i\varsigma p_y)}{m(E+m)},i\varsigma+\frac{p_y(p_x+i\varsigma p_y)}{m(E+m)},i\frac{p_x+i\varsigma p_y}{m})$

定理3.2.2. $v(\vec{p}):=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\varsigma\sigma\cdot\vec{p}\sigma_z}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\gamma^a=(\sigma_x,\sigma_y,\varsigma\sigma_z)$
$\Rightarrow\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p})=-i(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p})$
$=(-i\varsigma-\frac{i\varsigma p_x(p_x-i\varsigma p_y)}{m(E+m)},-1-\frac{i\varsigma p_y(p_x-i\varsigma p_y)}{m(E+m)},\varsigma\frac{p_x-i\varsigma p_y}{m})=-i\varsigma(1+\frac{p_x(p_x-i\varsigma p_y)}{m(E+m)},-i\varsigma+\frac{p_y(p_x-i\varsigma p_y)}{m(E+m)},i\frac{(p_x-i\varsigma p_y)}{m})$

推论3.2.1. $\tilde{\varepsilon}_a(\vec{p})=\varepsilon^+_{a'}(\vec{p})\eta_a^{a'},\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})=\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})\underbrace{\eta_a^{a'}\eta_b^{b'}\cdot\cdot}_{n}$

3.3 三维时空中直观表象下s-自旋方程

定理3.3.1. $[\gamma^a\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)$全对称$,\gamma_a:=[\sigma_x,\sigma_y,\varsigma\sigma_z]$
$\Leftrightarrow[s\partial_a+m\gamma_a(s)+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s)=\frac{i\varsigma m}{s\sqrt{2}}\gamma_a(s)\psi(s),S_{ab}(s,\varsigma)=-i[\gamma_a(s),\gamma_b(s)],\gamma_a(s):=[\sigma_x(s),\sigma_y(s),\varsigma\sigma_z(s)]$

证明: $[\gamma^a\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)$全对称
$\Leftrightarrow[\gamma^a\partial_a+m]\hat{\psi}(s)=0$
$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_aD^a\hat{\psi}(s)=-m\hat{\psi}(s),D^a=(\partial^x,\partial^y,\varsigma\partial^\pi,0)$
$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_aD^a[I\otimes\Gamma(s)]N(s)\psi(s)=-m\hat{\psi}(s)$
$\Leftrightarrow[I\otimes\Gamma(s)](\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_aD^aN(s)\psi(s)=-m\hat{\psi}(s)$
$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_aD^aN(s)\psi(s)=-m[I\otimes\bar{\Gamma}(s)]\hat{\psi}(s)$
$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_aD^aN(s)\psi(s)=-mN(s)\psi(s)$
$\Leftrightarrow Z_bD^b\psi(s)=-m\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}N(s)\psi(s)$
$\Leftrightarrow\bar{Z}_aZ_bD^b\psi(s)=-m\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\bar{Z}_aN(s)\psi(s)$
$\Leftrightarrow\bar{Z}_aZ_bD^b\psi(s)=-\frac{m}{2}\bar{N}(s)(\sigma\otimes I_{2s},i\varsigma)_aN(s)\psi(s)$
$\Leftrightarrow\bar{Z}_aZ_bD^b\psi(s)=-\frac{m}{2s}[\sigma(s),is\varsigma]_a\psi(s)$
$\Leftrightarrow[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma;4)D^b]\psi(s)=-m[\sigma(s),is\varsigma]_a\psi(s),S_{ab}(s,\varsigma;4)\succ\begin{bmatrix}0&\sigma_z(s)&-\sigma_y(s)&-\varsigma\sigma_x(s)\\-\sigma_z(s)&0&\sigma_x(s)&-\varsigma\sigma_y(s)\\\sigma_y(s)&-\sigma_x(s)&0&-\varsigma\sigma_z(s)\\\varsigma\sigma_x(s)&\varsigma\sigma_y(s)&\varsigma\sigma_z(s)&0\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow [s\partial_a + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s) = -m\gamma_a(s)\psi(s), S_{ab}(s,\varsigma) = -i[\gamma_a(s),\gamma_b(s)] \succ \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z(s) & -\varsigma\sigma_y(s) \\ -\sigma_z(s) & 0 & \varsigma\sigma_x(s) \\ \varsigma\sigma_y(s) & -\varsigma\sigma_x(s) & 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow [s\partial_a + m\gamma_a(s) + iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s) = 0$ □

4 三维时空中无质量粒子的Bargmann-Wigner方程(m只是参数)

4.1 三维时空中无质量粒子的Penrose方程

4.1.1 三维时空中无质量粒子的螺旋度函数

定义4.1.1. $\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p},h) = h\lambda(\hat{p},h), h = -\frac{1}{2},\frac{1}{2}$

4.1.2 三维时空中无质量粒子的Penrose方程 [1,2]及其螺旋度本征函数

定义4.1.2. $\gamma^a\partial_a\psi(x) = 0, \gamma^a = (-\sigma_y,\sigma_x,\varsigma\sigma_z) = S_{xy}(\sigma_x,\sigma_y,\varsigma\sigma_z)S_{xy}^+ \Leftrightarrow (\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\psi(x) = 0, \sigma = (\sigma_x,\sigma_y)$

证明: $\gamma^a\partial_a\psi(x) = 0, \gamma^a = (-\sigma_y,\sigma_x,\varsigma\sigma_z)$

$\Leftrightarrow (-\sigma_y\partial_x + \sigma_x\partial_y)\psi(x) = -\varsigma\sigma_z\partial_\pi\psi(x)$

$\Leftrightarrow (\sigma_x\partial_x + \sigma_y\partial_y)\psi(x) = i\varsigma\partial_\pi\psi(x)$

$\Leftrightarrow (\sigma_y\partial_y + \sigma_x\partial_x)\psi(x) = i\varsigma\partial_\pi\psi(x)$

$\Leftrightarrow (\sigma_y\partial_y + \sigma_x\partial_x)\psi(\vec{p})e^{ip\cdot x} = i\varsigma\partial_\pi\psi(\vec{p})e^{ip\cdot x}$

$\Leftrightarrow (\sigma_x p_x + \sigma_y p_y)\psi(\vec{p})e^{ip\cdot x} = i\varsigma p_\pi\psi(\vec{p})e^{ip\cdot x}$

$\Leftrightarrow (\sigma_x\hat{p}_x + \sigma_y\hat{p}_y)\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2}) = -\varsigma\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})$

$\Leftrightarrow (\sigma_x\hat{p}_x + \sigma_y\hat{p}_y)\lambda(\begin{bmatrix}\hat{p}_x\\ \hat{p}_y\\ 0\end{bmatrix},-\frac{\varsigma}{2}) = -\varsigma\lambda(\begin{bmatrix}\hat{p}_x\\ \hat{p}_y\\ 0\end{bmatrix},-\frac{\varsigma}{2})$ □

推论4.1.1. $\lambda(\hat{p},\frac{1}{2}) = \lambda(\begin{bmatrix}\hat{p}_x\\ \hat{p}_y\\ 0\end{bmatrix},\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ \hat{p}_x + i\hat{p}_y\end{bmatrix}, \lambda(\hat{p},-\frac{1}{2}) = \lambda(\begin{bmatrix}\hat{p}_x\\ \hat{p}_y\\ 0\end{bmatrix},-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-(\hat{p}_x - i\hat{p}_y)\\ 1\end{bmatrix}$

推论4.1.2. $\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2}) = \begin{cases}-\frac{i}{2}\gamma^0\gamma^a\hat{p}_a, \varsigma = 1\\ -\frac{i}{2}\gamma^a\hat{p}_a\gamma^0, \varsigma = -1\end{cases} \quad \lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2}) = \begin{cases}-\frac{i}{2}\gamma^a\hat{p}_a\gamma^0, \varsigma = 1\\ -\frac{i}{2}\gamma^0\gamma^a\hat{p}_a, \varsigma = -1\end{cases}$

推论4.1.3. $\begin{cases}\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2}) = -\frac{i}{2}\gamma^a\hat{p}_a\gamma^0 = -\frac{\varsigma}{2}(\sigma,i\varsigma)^a\hat{p}_a\\ \lambda(\hat{p},\frac{\varsigma}{2})\lambda^+(\hat{p},\frac{\varsigma}{2}) = -\frac{i}{2}\gamma^0\gamma^a\hat{p}_a = \frac{\varsigma}{2}(\sigma,-i\varsigma)^a\hat{p}_a\end{cases}$

推论4.1.4. $\sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}\lambda(\hat{p},h) = h\lambda(\hat{p},h), h = -\frac{1}{2},\frac{1}{2}$

推论4.1.5. $\lambda^+(\hat{p},h)\lambda(\hat{p},h') = \delta_{hh'}, \sum_{h=1/2}^{-1/2}\lambda(\hat{p},h)\lambda^+(\hat{p},h) = 1, \sum_{h=1/2}^{-1/2}h\lambda(\hat{p},h)\lambda^+(\hat{p},h) = \sigma(\frac{1}{2})\cdot\hat{p}$

4.1.3 三维时空中无质量粒子 [1,2]的平面波解及其自旋基

定理4.1.1. $\gamma^a\partial_a\psi(x) = 0 \Leftrightarrow (\sigma,-i\varsigma)_a\partial^a\psi(x) = 0$

推论4.1.6. $\begin{cases}\psi(\vec{r},t) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})[a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}\\ a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^N\vec{r}\\ a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^N\vec{r}\end{cases}$

定理4.1.2. ${\gamma^a}_{Z_\varsigma}{}^{A_\varsigma}\partial_a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\ldots}_{2s}}(x) = 0 \Leftrightarrow (\sigma,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\ldots}_{2s}}(x) = 0$

推论4.1.7.

$$\begin{cases}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}[a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}\\ \vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}a_1(\vec{p},-s\varsigma)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r}\\ |\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\overbrace{\lambda^{+A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^{+B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\cdots}^{2s}\psi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$$

定义4.1.3. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},-s\varsigma):=\underbrace{\lambda_{A_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_{B_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\cdots}_{2s}$

推论4.1.8. $\lambda^{+\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}^{2s}}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},-s\varsigma)=1$

推论4.1.9. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},-s\varsigma)=\frac{1}{(2|\vec{p}|)^{2s}}\underbrace{[(-i\gamma^a p_a)\gamma^0]_{A_\varsigma A'_\varsigma}[(-i\gamma^b p_b)\gamma^0]_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}_{2s}$

推论4.1.10. $\lambda_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^+_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},-s\varsigma)=\frac{1}{(-\varsigma 2|\vec{p}|)^{2s}}\underbrace{(\sigma,i\varsigma)^a_{A_\varsigma A'_\varsigma}(\sigma,i\varsigma)^b_{B_\varsigma B'_\varsigma}\cdots}_{2s}\underbrace{p_a p_b\cdots}_{2s}$

4.2 三维时空中无质量粒子势方程的具体表述

4.2.1 三维时空中无质量自旋-1的B-W方程等价于类C-K方程 [18,20]

定理4.2.1. $\gamma^a\partial_a\psi(x)=0,\psi^T(x)=\psi(x),A_a=\frac{1}{\sqrt{2}im}tr(\bar{\varepsilon}\gamma_a\psi),\gamma^a=(-\sigma_y,\sigma_x,\varsigma\sigma_z)$
$\Leftrightarrow\partial_a A_b-\partial_b A_a=0,\partial^a A_a=0,\psi=\frac{im}{\sqrt{2}}\gamma^a\varepsilon A_a\Rightarrow\partial^b\partial_b A_a=0,\partial^a A_a=0$

证明: $\gamma^a\partial_a\psi(x)=0,\psi=\frac{im}{\sqrt{2}}\gamma^a\varepsilon A_a$
$\Leftrightarrow\gamma^a\partial_a\frac{im}{\sqrt{2}}\gamma^b\varepsilon A_b=0$
$\Leftrightarrow\gamma^a\partial_a\gamma^b A_b=0$
$\Leftrightarrow\delta^{ab}\partial_a A_b+i\varsigma\varepsilon^{abc}\partial_a A_b\gamma_c=0$
$\Leftrightarrow\partial^a A_a+i\varsigma\varepsilon^{ab}{}_c\partial_a A_b\gamma^c=0$
$\Leftrightarrow\partial^a A_a=0,i\varsigma\varepsilon^{ab}{}_c\partial_a A_b=0$
$\Leftrightarrow\partial^a A_a=0,\varepsilon^{ab}{}_c\partial_a A_b=0\Leftrightarrow\partial^a A_a=0,\nabla\times\vec{A}=0$
$\Leftrightarrow\partial^a A_a=0,\varepsilon^{a'b'c}\varepsilon^{ab}{}_c\partial_a A_b=0$
$\Leftrightarrow\partial^a A_a=0,(\delta^{a'a}\delta^{b'b}-\delta^{a'b}\delta^{b'a})\partial_a A_b=0$
$\Leftrightarrow\partial^a A_a=0,\partial_a A_b-\partial_b A_a=0$
$\Rightarrow\partial^a A_a=0,\partial^a\partial_a A_b-\partial_b\partial^a A_a=0$
$\Leftrightarrow\partial^a\partial_a A_b=0,\partial^a A_a=0$ □

4.2.2 三维时空中无质量自旋-$\frac{3}{2}$的B-W方程等价于类R-S方程 [18,20]

定理4.2.2. $(\gamma^a\partial_a)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(x)=0,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=\frac{1}{3!}\psi_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\}},A_{a\eta_\varsigma}=\frac{1}{\sqrt{2}im}(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_a A_{b\eta_\varsigma}-\partial_b A_{a\eta_\varsigma}=0,\partial^a A_{a\eta_\varsigma}=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=\frac{im}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma},\gamma^a A_{a[\eta_\varsigma]}=0\end{cases}\Rightarrow\gamma^b\partial_b A_{a[\eta_\varsigma]}=0,\gamma^a A_{a[\eta_\varsigma]}=0,\partial^a A_{a\eta_\varsigma}=0$$

证明: $\begin{cases}(\gamma^a\partial_a)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(x)=0,\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=\frac{1}{3!}\psi_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\}}\\ A_{a\eta_\varsigma}=\frac{1}{\sqrt{2}im}(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma},\gamma^a=(-\sigma_y,\sigma_x,\varsigma\sigma_z)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_a A_{b\eta_\varsigma}-\partial_b A_{a\eta_\varsigma}=0,\partial^a A_{a\eta_\varsigma}=0\\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=\frac{im}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma},\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=\psi_{\lambda_\varsigma\eta_\varsigma\mu_\varsigma}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_a A_{b\eta_\varsigma} - \partial_b A_{a\eta_\varsigma} = 0, \partial^a A_{a\eta_\varsigma} = 0 \\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma} = \frac{im}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} A_{a\eta_\varsigma}, \varepsilon^{\mu_\varsigma\eta_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \partial_a A_{b\eta_\varsigma} - \partial_b A_{a\eta_\varsigma} = 0, \gamma^a A_{a[\eta_\varsigma]} = 0, \partial^a A_{a\eta_\varsigma} = 0$$

$$\Rightarrow \gamma^a\partial_a A_{b[\eta_\varsigma]} - \partial_b \gamma^a A_{a[\eta_\varsigma]} = 0, \gamma^a A_{a\eta_\varsigma} = 0, \partial^a A_{a\eta_\varsigma} = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma^a\partial_a A_{b[\eta_\varsigma]} = 0, \gamma^a A_{a\eta_\varsigma} = 0, \partial^a A_{a\eta_\varsigma} = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma^a\partial_a A_{b\eta_\varsigma} = 0, \gamma^a A_{a\eta_\varsigma} = 0, \partial^a A_{a\eta_\varsigma} = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma^b\partial_b A_{a[\eta_\varsigma]} = 0, \gamma^a A_{a[\eta_\varsigma]} = 0, \partial^a A_{a\eta_\varsigma} = 0$$

□

4.2.3 三维时空中无质量自旋-2的B-W方程等价于类C-K方程 [18,20]

定理4.2.3. $(\gamma^a\partial_a)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x) = 0, \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = \frac{1}{4!}\psi_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}}, A_{ab} = (\frac{1}{\sqrt{2}im})^2(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_a A_{bd} - \partial_b A_{ad} = 0, \partial^a A_{ab} = 0, A_{ab} = A_{ba}, \delta^{ab}A_{ab} = 0 \\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = (\frac{im}{\sqrt{2}})^2(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma^b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial^c\partial_c A_{ab} = 0, \partial^a A_{ab} = 0 \\ A_{ab} = A_{ba}, \delta^{ab}A_{ab} = 0 \end{cases}$$

证明:

$$\begin{cases} (\gamma^a\partial_a)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x) = 0, \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = \frac{1}{4!}\psi_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}} \\ A_{ab} := (\frac{1}{\sqrt{2}im})^2(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}, \gamma^a = (-\sigma_y, \sigma_x, \varsigma\sigma_z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\gamma^a\partial_a)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x) = 0, \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = \frac{1}{4!}\psi_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\}} \\ A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma} := \frac{1}{\sqrt{2}im}(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_a A_{b\eta_\varsigma\xi_\varsigma} - \partial_b A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = 0, A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = A_{a\xi_\varsigma\eta_\varsigma} \\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = \frac{im}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}, \gamma^a A_{a[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma} = 0, \partial^a A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_a A_{b\eta_\varsigma\xi_\varsigma} - \partial_b A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = 0, A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = A_{a\xi_\varsigma\eta_\varsigma} \\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = \frac{im}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma}, \gamma^a A_{a[\eta_\varsigma]\xi_\varsigma} = 0, \partial^a A_{a\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_a A_{bd} - \partial_b A_{ad} = 0, \partial^a A_{ab} = 0, A_{ab} = A_{ba}, \delta^{ab}A_{ab} = 0 \\ \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma} = (\frac{im}{\sqrt{2}})^2(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma^b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \partial^c\partial_c A_{ab} = 0, \partial^a A_{ab} = 0, A_{ab} = A_{ba}, \delta^{ab}A_{ab} = 0$$

□

4.3 三维时空中无质量粒子势方程的一般表述

4.3.1 三维时空中无质量自旋-n的B-W方程等价于类C-K方程 [18,20]

定理4.3.1.

$$\begin{cases} (\gamma^a\partial_a)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(x) = 0 \\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}} = \frac{1}{(2n)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots\}}_{2n}} \\ A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}} = (\frac{1}{\sqrt{2}im})^n\underbrace{(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}_{n}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_a A_{\underbrace{bd\cdots}_{n}} - \partial_b A_{\underbrace{ad\cdots}_{n}} = 0, \partial^a A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}} = 0 \\ A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}} = \frac{1}{n!}A_{\underbrace{\{ab\cdots\}}_{n}}, \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}} = 0 \\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}} = (\frac{im}{\sqrt{2}})^n\underbrace{(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma^b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}_{n}A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\Rightarrow \begin{cases} \partial^c\partial_c A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}} = 0, \partial^a A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}} = 0 \\ A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}} = \frac{1}{n!}A_{\underbrace{\{ab\cdots\}}_{n}}, \delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}} = 0 \end{cases}$$

推论4.3.1.

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec p\neq 0}|\vec p|^{(n-\frac{1}{2})}\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\hat p, -\frac{n\varsigma}{2})[a_1(\vec p, -n\varsigma)e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec p, -n\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec p$$

$$A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec p\neq 0}\frac{1}{\sqrt{2^n E}}\lambda_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec p)[a_1(\vec p, -s\varsigma)e^{ip\cdot x} + a_2^+(\vec p, -s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec p$$

$$\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},-\tfrac{n\varsigma}{2})$$

4.3.2 三维时空中有质量自旋-n的B-W方程自旋基和类C-K方程自旋基之间关系

推论4.3.2.

$$\begin{cases}(i\gamma^a p_a+m)\lambda_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\hat{p},-\frac{n\varsigma}{2})=0\\ \lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\hat{p},-\frac{n\varsigma}{2})\text{全对称}\\ \lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})\\ =\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},-\frac{n\varsigma}{2})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(p^c p_c+m^2)\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})=0\\ p_a\lambda_{\underbrace{bd\cdot\cdot}_{n}}(x)-p_b\lambda_{\underbrace{ad\cdot\cdot}_{n}}=\varsigma m\lambda_{ab}{}^{c}\lambda_{\underbrace{cd\cdot\cdot}_{n}}\\ \delta^{ab}\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})=0,p^a\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})=0,\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})\text{全对称}\\ \lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},-\frac{n\varsigma}{2})=(\frac{i}{2})^n\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})\end{cases}$$

推论4.3.3.

$$\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},-\tfrac{n\varsigma}{2})=(\tfrac{i}{2})^n\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})[\Leftrightarrow]\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})=\tfrac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\vec{p},-\tfrac{n\varsigma}{2})$$

推论4.3.4. $\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}(\hat{p},-s\varsigma)=\underbrace{\lambda_{\lambda_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda_{\mu_\varsigma}(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\cdot\cdot}_{2n},\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})=\underbrace{\lambda_a(\vec{p})\lambda_b(\vec{p})\cdot\cdot}_{n}$

推论4.3.5. $\lambda_a(\vec{p},-\varsigma)$

$=\frac{1}{i}(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\lambda_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p},-\varsigma)$

$=\frac{1}{i}\lambda_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\lambda_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})$

$=(\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y)(\hat{p}_x,\hat{p}_y,i)_a$

$=(\hat{p}_x-i\varsigma\hat{p}_y)\hat{p}_a$

$\lambda^{+a}(\vec{p},-\varsigma)\lambda_a(\vec{p},-\varsigma)=2,\lambda_a(\vec{p},-\varsigma)\lambda^+_{a'}(\vec{p},-\varsigma)=\hat{p}_a\hat{p}^+_{a'}$

推论4.3.6. $\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})=\lambda(\begin{bmatrix}\hat{p}_x\\\hat{p}_y\\0\end{bmatrix},\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\hat{p}_x+i\hat{p}_y\end{bmatrix},\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})=\lambda(\begin{bmatrix}\hat{p}_x\\\hat{p}_y\\0\end{bmatrix},-\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-(\hat{p}_x-i\hat{p}_y)\\1\end{bmatrix}$

4.3.3 三维时空中无质量自旋-$n+\frac{1}{2}$的B-W方程等价于类R-S方程 [18,20]

定理4.3.2.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x)=0\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}=\frac{1}{(2n+1)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma\}}_{2n+1}}\\ A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}\\ =(\frac{1}{\sqrt{2}im})^n\underbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_a A_{\underbrace{bd\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}-\partial_b A_{\underbrace{ad\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}=0,\partial^a A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}=0\\ A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}=\frac{1}{n!}A_{\underbrace{\{ab\cdot\cdot\}}_{n}\tau_\varsigma},\delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}=0,\gamma^a A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}=0\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}=(\frac{im}{\sqrt{2}})^n\underbrace{(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma^b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}\end{cases}$$

$\Rightarrow\Rightarrow$

$$\begin{cases}\gamma^c\partial_c A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}=0,\partial^a A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}=0\\ A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}=\frac{1}{n!}A_{\underbrace{\{ab\cdot\cdot\}}_{n}\tau_\varsigma},\delta^{ab}A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}=0,\gamma^a A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}=0\end{cases}$$

推论4.3.7.

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}\neq0}|\vec{p}|^n\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\hat{p},-\tfrac{s\varsigma}{2})[a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}$$

$$A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}\neq0}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})[a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}$$

$$\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},-\tfrac{s\varsigma}{2})$$

4.3.4 三维时空中有质量自旋-$n+\frac{1}{2}$的B-W方程自旋基和类R-S方程自旋基之间关系

推论4.3.8.

$$\begin{cases}(i\gamma^a p_a+m)\lambda_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\hat{p},-\frac{n\varsigma}{2})=0\\ \lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\hat{p},-\frac{n\varsigma}{2})\text{全对称}\\ \lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\\ \lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},-\frac{n\varsigma}{2})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(p^c p_c+m^2)\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=0,p^a\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=0\\ p_a\lambda_{\underbrace{bd\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x)-p_b\lambda_{\underbrace{ad\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}=\varsigma m\lambda_{ab}{}^c\lambda_{\underbrace{cd\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}\\ \delta^{ab}\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=0,\gamma^a\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}[\tau_\varsigma]}=0,\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})\text{全对称}\\ \lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},-\frac{n\varsigma}{2})=(\frac{i}{2})^n\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})\end{cases}$$

推论4.3.9. $\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},-\frac{n\varsigma}{2})=(\frac{i}{2})^n\overbrace{(\gamma_a\varepsilon)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_b\varepsilon)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})$

$$[\Leftrightarrow]\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p},-\frac{n\varsigma}{2})$$

推论4.3.10.

$$\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\hat{p},-s\varsigma)=\underbrace{\lambda_{\lambda_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\lambda_{\mu_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})\cdot\cdot\lambda_{\tau_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})}_{2n+1},\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=\underbrace{\lambda_a(\vec{p})\lambda_b(\vec{p})\cdot\cdot}_{n}\lambda_{\tau_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})=\lambda_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})\lambda_{\tau_\varsigma}(\hat{p},-\tfrac{\varsigma}{2})$$

4.4 三维时空中无质量s-自旋方程

定理4.4.1.

$$\begin{cases}\gamma^a\partial_a\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)\text{全对称}\\ \psi_{k_\varsigma}(s,\varsigma):=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}},\gamma^a=(-\sigma_y,\sigma_x,\varsigma\sigma_z)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s,\varsigma)=0,S_{ab}(s,\varsigma)=-i[\gamma_a(s),\gamma_b(s)]\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}\psi_{k_\varsigma}(s,\varsigma),S_{ab}(s,\varsigma)=\begin{bmatrix}0&\sigma_z(s)&-\varsigma\sigma_x(s)\\-\sigma_z(s)&0&-\varsigma\sigma_y(s)\\\varsigma\sigma_x(s)&\varsigma\sigma_y(s)&0\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}\neq0}|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\hat{p},-s\varsigma)[a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}$$

$$\psi_{k_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}\neq0}|\vec{p}|^{(s-\frac{1}{2})}\lambda_{k_\varsigma}(\hat{p},-s\varsigma)[a_1(\vec{p},-s\varsigma)e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-s\varsigma)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}$$

$$\lambda_{k_\varsigma}(\vec{p},-s\varsigma):=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma)\Leftrightarrow\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p},-s\varsigma)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}\lambda_{k_\varsigma}(\vec{p},-s\varsigma)$$

4.4.1 三维时空中无质量粒子的协变对易规则

定理4.4.2. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]=\frac{i}{2^{2s-1}}\underbrace{[(-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理4.4.3. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x')]=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\underbrace{[(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(\sigma,i\varsigma)^b\partial_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理4.4.4. $[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]=i\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdot\cdot}^{2s}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理4.4.5. $[A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(x), A^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}}(x')] = \frac{i}{2^{n-1}}\underbrace{\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{\nabla^2}\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{\nabla^2}\cdot\cdot}_{n}\Delta(x-x')$

$[\Updownarrow]$

定理4.4.6. $\{A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x), A^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\} = \frac{i}{2^{n}}\underbrace{\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{\nabla^2}\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{\nabla^2}\cdot\cdot}_{n}[(-\gamma^c\partial_c)\gamma^0]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$[\Updownarrow]$

定理4.4.7. $\{A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x), A^{+}_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(x')\} = i\varsigma\frac{i}{2^{n}}\underbrace{\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{\nabla^2}\frac{\partial_b\partial^+_{b'}}{\nabla^2}\cdot\cdot}_{n}[(\sigma,i\varsigma)^c\partial_c]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$

5 二维时空中有质量粒子的协变量子化

5.1 二维时空中的Dirac方程

5.1.1 二维时空中的Dirac自旋基

定义5.1.1. $u(\vec{p}) := \sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{\varsigma p_x\sigma_x}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, v(\vec{p}) := \sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{\varsigma p_x\sigma_x}{E+m})(\frac{1+\varsigma}{2}+\frac{1-\varsigma}{2}\sigma_x)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

推论5.1.1. $u(\vec{p}) = \sigma_x v(\vec{p}), v(\vec{p}) = \sigma_x u(\vec{p}), u^*(\vec{p}) = u(\vec{p}), v^*(\vec{p}) = v(\vec{p})$

5.1.2 二维时空中Dirac自旋基的性质

性质5.1.1. $\begin{cases}\bar{u}(\vec{p})u(\vec{p}) = 1, \bar{v}(\vec{p})v(\vec{p}) = -1, \bar{u}(\vec{p})v(\vec{p}) = 0, \bar{v}(\vec{p})u(\vec{p}) = 0\\ u^+(\vec{p})u(\vec{p}) = \frac{E}{m}, v^+(\vec{p})v(\vec{p}) = \frac{E}{m}, u^+(\vec{p})v(-\vec{p}) = 0, v^+(\vec{p})u(-\vec{p}) = 0\end{cases}$

性质5.1.2. $\begin{cases}u(\vec{p})\bar{u}(\vec{p}) = \frac{m-i\gamma^a p_a}{2m}\\ v(\vec{p})\bar{v}(\vec{p}) = \frac{-m-i\gamma^a p_a}{2m}\end{cases}\quad \begin{cases}u(\vec{p})u^+(\vec{p}) = \frac{(m-i\gamma^a p_a)\gamma^0}{2m} = \frac{m\sigma_z-(\sigma,i\varsigma)^a p_a}{\varsigma 2m}\\ v(\vec{p})v^+(\vec{p}) = \frac{(-m-i\gamma^a p_a)\gamma^0}{2m} = \frac{-m\sigma_z-(\sigma,i\varsigma)^a p_a}{\varsigma 2m}\end{cases}$

性质5.1.3. $u(\vec{p})\bar{u}(\vec{p}) - v(\vec{p},h)\bar{v}(\vec{p}) = 1, u(\vec{p})\bar{u}(\vec{p}) + v(\vec{p},h)\bar{v}(\vec{p}) = \frac{-i\gamma^a p_a}{m}, u(\vec{p})u^+(\vec{p}) + v(-\vec{p},h)v^+(-\vec{p}) = \frac{E}{m}$

5.1.3 二维时空中的Dirac方程 [5]及其平面波解

定理5.1.1. $(\gamma^a\partial_a + m)\psi = 0, \gamma^a = (-\sigma_y, \varsigma\sigma_z)$

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}[a(\vec{p})\sqrt{\frac{m}{E}}u(\vec{p})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} + b^+(\vec{p})\sqrt{\frac{m}{E}}v(\vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d\vec{p}$$

$$a(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{E}{m}}u^+(\vec{p})\psi(\vec{r},t)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d\vec{r}, b^+(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{E}{m}}v^+(\vec{p})\psi(\vec{r},t)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d\vec{r}$$

5.1.4 二维时空中Dirac方程的协变量子化规则

推论5.1.2. $\begin{cases}\{a(\vec{p}), a^+(\vec{p}')\} = \delta(\vec{p}-\vec{p}')\\ \{a(\vec{p}), a(\vec{p}')\} = 0, \{a^+(\vec{p}), a^+(\vec{p}')\} = 0\end{cases} \Rightarrow \{\psi(x), \psi^+(x')\} = i(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0\Delta(x-x')$

5.2 二维时空中的Bargmann-Wigner方程

5.2.1 二维时空中Bargmann-Wigner方程 [18]的自旋基及其平面波解

定义5.2.1. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}) := \underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p})\cdot\cdot}_{2s}, V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}) := \underbrace{v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p})\cdot\cdot}_{2s}$

推论5.2.1. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}) = \underbrace{\sigma_x\otimes\sigma_x\cdot\cdot}_{2s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}), V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p}) = \underbrace{\sigma_x\otimes\sigma_x\cdot\cdot}_{2s}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(\vec{p})$

定理5.2.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2s)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\}}_{2s}}(\vec{r},t)$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}[a(\vec{p})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}$$

$$\begin{cases}a(\vec{p})=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^N\vec{r}\\ b^+(\vec{p})=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}d^N\vec{r}\end{cases}$$

5.2.2 二维时空中Bargmann-Wigner方程自旋基的正交性质

推论5.2.2. $\begin{cases}\bar{U}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=1,\bar{V}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=1\\ \bar{U}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=0,\bar{V}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=0\end{cases}$

推论5.2.3. $\begin{cases}U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=(\frac{E}{m})^{2s},U^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(-\vec{p})=0\\ V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=(\frac{E}{m})^{2s},V^{+\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}(\vec{p})U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(-\vec{p})=0\end{cases}$

5.2.3 二维时空中Bargmann-Wigner方程的准投影算子

推论5.2.4. $\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=\frac{1}{(2m)^{2s}}\underbrace{[(m-i\gamma^bp_b)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^cp_c)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2s}\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=\frac{1}{(2m)^{2s}}\underbrace{[(-m-i\gamma^bp_b)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(-m-i\gamma^cp_c)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2s}\end{cases}$

推论5.2.5. $\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=\frac{1}{(\varsigma 2m)^{2s}}\underbrace{[m\sigma_z-(\sigma,i\varsigma)^ap_a]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[m\sigma_z-(\sigma,i\varsigma)^bp_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2s}\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=\frac{1}{(\varsigma 2m)^{2s}}\underbrace{[-m\sigma_z-(\sigma,i\varsigma)^ap_a]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[-m\sigma_z-(\sigma,i\varsigma)^bp_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2s}\end{cases}$

推论5.2.6. $U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(p)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(p)=(-1)^{2s}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(-p)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(-p)$

5.2.4 二维时空中Bargmann-Wigner方程的协变对易规则

定理5.2.2. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]=\frac{i}{2^{2s-1}}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2s}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理5.2.3. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\underbrace{[-im\sigma_z+(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[-im\sigma_z+(\sigma,i\varsigma)^b\partial_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2s}\Delta(x-x')$

5.2.5 二维时空中$X^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)$的性质

定义5.2.2. $X^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x):=[(im\gamma^a+\varsigma\sigma_x\varepsilon^{ab}\partial_b)\varepsilon]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma},X^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p):=[(im\gamma^a+i\varsigma\sigma_x\varepsilon^{ab}p_b)\varepsilon]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}$

性质5.2.1. $(\gamma^a\varepsilon)_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}=-\delta^{\{\lambda_\varsigma}_{\lambda'_\varsigma}\delta^{\mu_\varsigma\}}_{\mu'_\varsigma}-\sigma_{x\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\sigma_x^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}$

性质5.2.2. $(\bar{\varepsilon}\gamma^{a'})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}X^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)=i2m\delta^{a'a}$

证明：$(\bar{\varepsilon}\gamma^{a'})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}X^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)$
$= (\bar{\varepsilon}\gamma^{a'})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[(im\gamma^a + i\varsigma\sigma_x\varepsilon^{ab}p_b)\varepsilon]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}$
$= tr[\bar{\varepsilon}\gamma^{a'}(im\gamma^a + i\varsigma\sigma_x\varepsilon^{ab}p_b)\varepsilon]$
$= tr[\gamma^{a'}(im\gamma^a + i\varsigma\sigma_x\varepsilon^{ab}p_b)]$
$= imtr(\gamma^{a'}\gamma^a)$
$= i2m\delta^{a'a}$ □

性质5.2.3. $[(im\gamma^a + \varsigma\sigma_x\varepsilon^{ab}\partial_b)\varepsilon]_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} = -im\delta^{\{\lambda_\varsigma}_{\lambda'_\varsigma}\delta^{\mu_\varsigma\}}_{\mu'_\varsigma} - im\sigma_{x\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\sigma_x^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} + \cdots$

5.2.6 二维时空中Bargmann-Wigner方程准投影算子的等价表述

引理5.2.1.

$$\begin{cases} u(\vec{p})u^+(\vec{p}) = \frac{(m-i\gamma^a p_a)\gamma^0}{2m}, u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p}) = u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p}) \\ \varepsilon_a(\vec{p})\varepsilon^+_{a'}(\vec{p}) = \eta_{aa'} + \frac{p_a p^+_{a'}}{m^2}, \varepsilon_a(\vec{p})\varepsilon^+_{a'}(\vec{p})\varepsilon_b(\vec{p})\varepsilon^+_{b'}(\vec{p}) = \varepsilon_a(\vec{p})\varepsilon^+_{b'}(\vec{p})\varepsilon_b(\vec{p})\varepsilon^+_{a'}(\vec{p}) \end{cases}$$
$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} [(m-i\gamma^b p_b)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^c p_c)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma} = [(m-i\gamma^b p_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^c p_c)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\mu'_\varsigma} \\ (\eta_{aa'} + \frac{p_a p^+_{a'}}{m^2})(\eta_{bb'} + \frac{p_b p^+_{b'}}{m^2}) = (\eta_{ba'} + \frac{p_b p^+_{a'}}{m^2})(\eta_{ab'} + \frac{p_a p^+_{b'}}{m^2}) \\ [(m-i\gamma^b p_b)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(m-i\gamma^c p_c)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma} = X^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)X^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(-p)(\eta_{aa'} + \frac{p_a p^+_{a'}}{m^2}) \end{cases}$$

推论5.2.7.
$$\begin{cases} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p}) = \frac{1}{(2m)^{2n}}\underbrace{[X^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)X^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(-p)(\eta_{aa'} + \frac{p_a p^+_{a'}}{m^2})]\cdots}_{n} \\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p})V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec{p}) = \frac{1}{(2m)^{2n}}\underbrace{[X^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)X^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)(\eta_{aa'} + \frac{p_a p^+_{a'}}{m^2})]\cdots}_{n} \end{cases}$$

推论5.2.8.
$$\begin{cases} U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p}) = \frac{1}{(2m)^{2n+1}}\underbrace{[X^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)X^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(-p)(\eta_{aa'} + \frac{p_a p^+_{a'}}{m^2})]\cdots}_{n}[(m-i\gamma^c p_c)\gamma^0]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma} \\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p}) = \frac{1}{(2m)^{2n+1}}\underbrace{[X^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)X^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)(\eta_{aa'} + \frac{p_a p^+_{a'}}{m^2})]\cdots}_{n}[(-m-i\gamma^c p_c)\gamma^0]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma} \end{cases}$$

5.2.7 二维时空中Bargmann-Wigner方程的协变对易规则等价表述

定理5.2.4. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(x), \psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(x')] = \frac{i}{2^{2n-1}}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdots}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdots}_{n}\Delta(x-x')$

定理5.2.5.
$$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x), \psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x')] = \frac{i}{2^{2n}}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdots}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdots}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^0]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$$

$$[\Updownarrow]$$

定理5.2.6.
$$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x), \psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x')] = i\frac{i\varsigma}{2^{2n}}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdots}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'} - \frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdots}_{n}[-im\sigma_z + (\sigma, i\varsigma)^b\partial_b]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$$

5.3 二维时空中的势方程

自我评述：此节类比四维时空中的情形，探究二维时空中是否存在与B-W方程等价的C-K或R-S方程？

5.3.1 二维时空中自旋-1的B-W方程等价于K-G方程 [18,20]

定义5.3.1. $(\gamma^a\partial_a + m)^{\kappa_\varsigma}{}_{\lambda_\varsigma}\psi^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\zeta_\varsigma}^{2s}} = J^{\overbrace{\kappa_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\zeta_\varsigma}^{2s}}, \psi^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\zeta_\varsigma}^{2s}}$全对称$, J^{\overbrace{\kappa_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\zeta_\varsigma}^{2s}}$除$\kappa_\varsigma$外全对称$, \gamma^a = (-\sigma_y, \varsigma\sigma_z)$

定理5.3.1. $(\gamma^a\partial_a + m)\psi(x) = 0, \psi^T(x) = \psi(x), A_a = \frac{1}{\sqrt{2}im}tr(\bar{\varepsilon}\gamma_a\psi)$
$\Leftrightarrow (\partial^b\partial_b - m^2)A_a = 0, \partial^a A_a = 0; F_{ab} := \partial_a A_b - \partial_b A_a, \psi = (im\gamma^a + \varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x\partial_b)\varepsilon\frac{A_a}{\sqrt{2}}, S_{ab}(e) = \frac{1}{2}\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)\psi(x)=0,\psi^T(x)=\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$
$\Leftrightarrow(\gamma^a\partial_a+m)(\gamma^b\varepsilon imA_b-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})=0,\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$
$\Leftrightarrow(\gamma^a\partial_a+m)(\gamma^b imA_b-\varsigma\sigma_x F_{xy})=0,\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$
$\Leftrightarrow(\delta^{ab}-i\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x)im\partial_aA_b+m(im\gamma_bA^b-\varsigma\sigma_xF_{xy})-i\varepsilon^{ab}\gamma_b\partial_aF_{xy}=0,\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$
$\Leftrightarrow im\partial^aA_a-m(F_{xy}-\varepsilon^{ab}\partial_aA_b)\varsigma\sigma_x+i(m^2A^b-\varepsilon^{ab}\partial_aF_{xy})\gamma_b=0,\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$
$\Leftrightarrow im\partial^aA_a=0,m(F_{xy}-\varepsilon^{ab}\partial_aA_b)=0,i(m^2A^b-\varepsilon^{ab}\partial_aF_{xy})\gamma_b=0,\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$
$\Leftrightarrow\partial^aA_a=0,F_{xy}=\varepsilon^{ab}\partial_aA_b,\varepsilon^{ab}\partial_aF_{xy}-m^2A^b=0,\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a+\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$
$\Leftrightarrow\partial^aA_a=0,F_{xy}=\partial_xA_y-\partial_yA_x,\partial_aF^{ab}-m^2A^b=0$
$F_{ab}:=\partial_aA_b-\partial_bA_a=\varepsilon_{ab}F_{xy},\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$
$\Leftrightarrow\partial^aF_{ab}-m^2A_b=0;F_{ab}:=\partial_aA_b-\partial_bA_a=\varepsilon_{ab}F_{xy},\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$
$\Leftrightarrow(\partial^b\partial_b-m^2)A_a=0,\partial^aA_a=0,\psi=(im\gamma^a+\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x\partial_b)\varepsilon\frac{A_a}{\sqrt{2}}$ □

证明: $A_a=\frac{1}{\sqrt{2}im}(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}$
$\Rightarrow[A_a(x),A^+_{a'}(x')]=\frac{1}{(\sqrt{2}m)^2}(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_{a'}\varepsilon)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma},\psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}]$
$=\frac{1}{(\sqrt{2}m)^2}(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_{a'}\varepsilon)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\frac{i}{8}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{2}\frac{1}{(\sqrt{2}m)^2}(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_{a'}\varepsilon)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{2}\frac{1}{(2m)^2}[(\bar\varepsilon\gamma_a)(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0(\gamma_{a'}\varepsilon)]^{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{2}\frac{1}{(\sqrt{2}m)^2}tr\{[(\bar\varepsilon\gamma_a)(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0(\gamma_{a'}\varepsilon)][-\gamma^0(m-\gamma^{*c}\partial_c)]\}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{2}\frac{1}{(\sqrt{2}m)^2}tr\{[(\gamma^0\gamma_a)(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0(\gamma_{a'}\gamma^0)][(-m-\gamma^c\partial_c)\gamma^0]\}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{2}\frac{1}{(2m)^2}tr\{\gamma_a(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^*_{a'}(m+\gamma^c\partial_c)\}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{2}\frac{1}{(\sqrt{2}m)^2}tr\{\gamma_a(m-\gamma_b\partial^b)\gamma_{b'}(m+\gamma_c\partial^c)\}\eta^{b'}_{a'}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{2}\frac{1}{(2m)^2}tr\{\gamma_a[\gamma_{b'}(m+\gamma_b\partial^b)-2\delta_{bb'}\partial^b](m+\gamma_c\partial^c)\}\eta^{b'}_{a'}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{(2m)^2}tr\{\gamma_a[m\gamma_{b'}-\partial_{b'}](m+\gamma_c\partial^c)\}\eta^{b'}_{a'}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{(2m)^2}tr\{\gamma_a(m^2\gamma_{b'}-\gamma_c\partial_{b'}\partial^c)\}\eta^{b'}_{a'}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{(\sqrt{2}m)^2}tr\{(m^2\delta_{ab'}-\delta_{ac}\partial_{b'}\partial^c)\}\eta^{b'}_{a'}\Delta(x-x')$
$=i(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')$ □

定理5.3.2. $[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')=X_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\}}(x)X^+_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma)}(x')(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')$

证明: $\psi=(im\gamma^a+\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x\partial_b)\varepsilon\frac{A_a}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow A_a=\frac{1}{\sqrt{2}im}tr(\bar\varepsilon\gamma_a\psi)$
$\Rightarrow\psi=[(im\gamma^a+\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x\partial_b)\varepsilon]\frac{1}{2im}tr(\bar\varepsilon\gamma_a\psi)$
$\Rightarrow\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}=[(im\gamma^a+\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x\partial_b)\varepsilon]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[\frac{1}{2im}(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\tilde\lambda_\varsigma\tilde\mu_\varsigma}\psi_{\tilde\lambda_\varsigma\tilde\mu_\varsigma}]$
$\Rightarrow[\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x),\psi^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')]$
$=[(im\gamma^a+\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x\partial_b)\varepsilon]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[(im\gamma^{a'}+\varepsilon^{a'b'}\varsigma\sigma_x\partial'_{b'})\varepsilon]^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}[\frac{1}{2im}(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\tilde\lambda_\varsigma\tilde\mu_\varsigma}][\frac{1}{-2im}(\gamma_a\varepsilon)^{\tilde\lambda'_\varsigma\tilde\mu'_\varsigma}][\psi_{\tilde\lambda'_\varsigma\tilde\mu'_\varsigma}(x),\psi_{\tilde\lambda'_\varsigma\tilde\mu'_\varsigma}(x')]$
$\Rightarrow\frac{i}{8}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')$
$=[(im\gamma^a+\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x\partial_b)\varepsilon]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[(im\gamma^{a'}+\varepsilon^{a'b'}\varsigma\sigma_x\partial'_{b'})\varepsilon]^+_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}$
$[\frac{1}{2im}(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\tilde\lambda_\varsigma\tilde\mu_\varsigma}][\frac{1}{-2im}(\gamma_a\varepsilon)^{\tilde\lambda'_\varsigma\tilde\mu'_\varsigma}]\frac{i}{8}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\{\tilde\lambda_\varsigma(\tilde\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^0]_{\tilde\mu_\varsigma\}\tilde\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{2}[(im\gamma^a+\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x\partial_b)\varepsilon]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[\bar\varepsilon(-im\gamma^{a'}+\varepsilon^{a'b'}\varsigma\sigma_x\partial^+_{b'})]_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{2}X^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)X^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x'),X^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x):=[(im\gamma^a+\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x\partial_b)\varepsilon]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}$
$\Rightarrow[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\{\lambda_\varsigma(\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\}\mu'_\varsigma)}\Delta(x-x')=X^a_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\}}(x)X^{+a'}_{(\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma)}(x')(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2})\Delta(x-x')$ □

定理5.3.3. $[F_{ab}(x),F^+_{a'b'}(x')]=-i\eta_{[a<a'}\partial_{b]}\partial^+_{b'>}\Delta(x-x')$

定理5.3.4. $[F_{xy}(x),F^+_{xy}(x')]=im^2\Delta(x-x')$

5.3.2 二维时空中自旋-n的类Klein-Gordon方程 [18,20]

定理5.3.5.

$$\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(x)\text{全对称}\\ A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(x):=(\frac{1}{\sqrt{2}im})^n\overbrace{(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-\partial^c\partial_c+m^2)A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(x)=0\\ \partial^aA_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(x)=0,A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(x)\text{全对称}\end{cases}$$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}E^{n-\frac12}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2n}[a(\vec p,h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec p)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+b^+(\vec p,h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec p)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^N\vec p$$

$$A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec p=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2^nE}}[a(\vec p)\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec p)e^{i(\vec p\cdot\vec r-Et)}+b^+(\vec p)\tilde\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec p)e^{-i(\vec p\cdot\vec r-Et)}]d^N\vec p$$

$$\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec p)=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec p),\tilde\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec p)=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec p)$$

5.3.3 二维时空中类Klein-Gordon方程自旋基的性质

推论5.3.1. $\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec p)=\underbrace{\varepsilon_a(\vec p)\varepsilon_b(\vec p)\cdots}_{n},\tilde\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec p)=\underbrace{\tilde\varepsilon_a(\vec p)\tilde\varepsilon_b(\vec p)\cdots}_{n}$

推论5.3.2. $\varepsilon_a(\vec p)=\tilde\varepsilon_a(\vec p)=\frac{1}{m}(E,ip_x),\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec p)=\tilde\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec p)$

证明: $\varepsilon_a(\vec p)=-i(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec p)$
$=-iu^T(\vec p)(\bar\varepsilon\gamma_a)u(\vec p)$
$=-iu^+(\vec p)(i,\varsigma\sigma_x)_au(\vec p)$
$=(\frac{E}{m},-i\varsigma u^+(\vec p)v(\vec p))_a$
$=(\frac{E}{m},i\frac{p_x}{m})_a$ □

推论5.3.3. $\varepsilon_a(\vec p)\delta^{ab}\varepsilon_b(\vec p)=1$

证明: $X_a^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec p)\varepsilon^a(\vec p)$
$=X_a^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-\frac{E}{m},-i\frac{p_x}{m})^a$
$\neq U^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec p)$ □

推论5.3.4. $\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec p)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec p)=\overbrace{(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar\varepsilon\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}\varepsilon)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}\varepsilon)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdots}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2n}}(x)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma\cdots}_{2n}}(x)$

推论5.3.5. $\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec p)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec p)=\underbrace{(\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2})(\eta_{bb'}+\frac{p_bp^+_{b'}}{m^2})\cdots}_{n}$

推论5.3.6. $\varepsilon_a(\vec p)\varepsilon^+_{a'}(\vec p)=\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2},\varepsilon_a(\vec p)\varepsilon^+_{a'}(\vec p)\eta_b^{a'}=\varepsilon_a(\vec p)\varepsilon_b(\vec p)=\delta_{ab}+\frac{p_ap_b}{m^2}$

推论5.3.7.
$$\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec p)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec p)=\frac{1}{(2m)^{2n}}\underbrace{[X^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)X^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(-p)]\cdots}_{n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec p)\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec p)\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec p)V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(\vec p)=\frac{1}{(2m)^{2n}}\underbrace{[X^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)X^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)]\cdots}_{n}\tilde\varepsilon_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(\vec p)\tilde\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(\vec p)\end{cases}$$

推论5.3.8.
$$\begin{cases}[A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(x')]=\frac{1}{m^{2n}2^n}\overbrace{(\bar\varepsilon\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdots}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}\varepsilon)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}^{n}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(x')]\\ [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(x')]=\frac{1}{2^{2n-1}}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdots}_{n}[A_{\underbrace{ab\cdots}_{n}}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdots}_{n}}(x')]\end{cases}$$

5.3.4 二维时空中自旋-$n+\frac{1}{2}$的类Rarita-Schwinger方程 [18,20]

定理5.3.6.

$$\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x)\text{全对称}\\ A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x):=(\frac{1}{\sqrt{2}im})^n\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-\partial^c\partial_c+m^2)A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x)=0\\ \partial^aA_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x)=0,A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x)\text{全对称}\end{cases}$$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^n\sqrt{\frac{m}{E}}^{2n+1}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}$$

$$A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2^nE}}[a(\vec{p})\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p})\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}$$

$$\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p}),\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}}(\vec{p})=\frac{1}{i^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})$$

5.3.5 二维时空中类Rarita-Schwinger方程自旋基的性质

推论5.3.9. $\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})=\underbrace{I\otimes I\otimes\cdot\cdot I}_{2n}\otimes\sigma_x\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})$

推论5.3.10. $\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p})=\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\bar{\varepsilon}\gamma_b)^{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}\varepsilon)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\gamma_{b'}\varepsilon)^{\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x)U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\xi'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x)$

推论5.3.11. $\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p})=\frac{1}{2m}\underbrace{(\eta_{aa'}+\frac{p_ap^+_{a'}}{m^2})(\eta_{bb'}+\frac{p_bp^+_{b'}}{m^2})\cdots}_{n}[(m-i\gamma^cp_c)\gamma^0]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}$

推论5.3.12.
$$\begin{cases}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})U^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})=\frac{1}{(2m)^{2n+1}}\underbrace{[X^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(p)X^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(-p)]\cdots}_{n}\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})\varepsilon^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p})\\ V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})V^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(\vec{p})=\frac{1}{(2m)^{2n+1}}\underbrace{[X^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(-p)X^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(p)]\cdots}_{n}\tilde{\varepsilon}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(\vec{p})\tilde{\varepsilon}^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(\vec{p})\end{cases}$$

推论5.3.13.
$$\begin{cases}[A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(x')]=\frac{1}{m^{2n}2^n}\overbrace{(\bar{\varepsilon}\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}\overbrace{(\gamma_{a'}\varepsilon)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')]\\ [\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdot\cdot\tau'_\varsigma}_{2n+1}}(x')]=\frac{1}{2^{2n-1}}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdot\cdot}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdot\cdot}_{n}[A_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n}\tau_\varsigma}(x),A^+_{\underbrace{a'b'\cdot\cdot}_{n}\tau'_\varsigma}(x')]\end{cases}$$

自我评述：二维时空中只有少部分B-W方程存在等价的类C-K方程，但仍存在类似的对易规则。

5.4 二维时空中自旋-$\frac{3}{2}$的Bargmann-Wigner方程 [18]

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)^{\kappa_\varsigma}{}_{\lambda_\varsigma}\psi^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=0,\psi^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}$全对称$,\gamma^a=(-\sigma_y,\varsigma\sigma_z)$

$\Leftrightarrow(\partial^b\partial_b-m^2)A_{a\eta_\varsigma}=0,\partial^aA_{a\eta_\varsigma}=0,\psi^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=[(im\gamma^a+\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x\partial_b)\varepsilon]^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A^{\eta_\varsigma}_a,\bar{\varepsilon}_{\mu_\varsigma\eta_\varsigma}\psi^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=0$ □

证明: $\psi^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=[(im\gamma^a+\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x\partial_b)\varepsilon]^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A^{\eta_\varsigma}_a,\psi^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}=0$

$\Rightarrow[(im\gamma^a+\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x\partial_b)\varepsilon]^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\bar{\varepsilon}_{\mu_\varsigma\eta_\varsigma}A^{\eta_\varsigma}_a=0$

$\Leftrightarrow[(im\gamma^a+\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x\partial_b)]^{\lambda_\varsigma}{}_{\eta_\varsigma}A^{\eta_\varsigma}_a=0$ □

5.5 二维时空中的自旋方程

5.5.1 二维时空中自旋-s粒子的自旋方程

定理5.5.1. $[\gamma^a\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(x)$全对称$,\gamma_a:=[-\sigma_y,\varsigma\sigma_z]$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[s\partial_a+m\gamma_a(s)+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s)=0\\ [\gamma_x(s)\partial_\pi-\gamma_\pi(s)\partial_x]\psi(s)=i\varsigma m\gamma_y(s)\psi(s)\end{cases},S_{ab}(s,\varsigma)=-i[\gamma_a(s),\gamma_b(s)],\gamma_a(s):=[-\sigma_y(s),\varsigma\sigma_z(s)]$$

证明: $[\gamma^a\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)$全对称

$\Leftrightarrow[\gamma^a\partial_a+m]\hat{\psi}(s)=0$

$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_aD^a\hat{\psi}(s)=im\sigma_z\otimes I_{2^{2s-1}}\hat{\psi}(s),D^a=(\partial^x,0,0,\partial^\pi)$

$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2^{2s-1}},-i\varsigma)_aD^a[I\otimes\Gamma(s)]N(s)\psi(s)=im\sigma_z\otimes I_{2^{2s-1}}\hat{\psi}(s)$

$\Leftrightarrow[I\otimes\Gamma(s)](\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_aD^aN(s)\psi(s)=im\sigma_z\otimes I_{2^{2s-1}}\hat{\psi}(s)$

$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_aD^aN(s)\psi(s)=im[I\otimes\bar{\Gamma}(s)](\sigma_z\otimes I_{2^{2s-1}})\hat{\psi}(s)$

$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_aD^aN(s)\psi(s)=im(\sigma_z\otimes I_{2s})[I\otimes\bar{\Gamma}(s)]\hat{\psi}(s)$

$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)_aD^aN(s)\psi(s)=im(\sigma_z\otimes I_{2s})N(s)\psi(s)$

$\Leftrightarrow Z_bD^b\psi(s)=im\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}(\sigma_z\otimes I_{2s})N(s)\psi(s)$

$\Leftrightarrow\bar{Z}_aZ_bD^b\psi(s)=im\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\bar{Z}_a(\sigma_z\otimes I_{2s})N(s)\psi(s)$

$\Leftrightarrow\bar{Z}_aZ_bD^b\psi(s)=im\frac{i\varsigma}{\sqrt{2}}\frac{-i\varsigma}{\sqrt{2}}\bar{N}(s)(\sigma\otimes I_{2s},i\varsigma)_a(\sigma_z\otimes I_{2s})N(s)\psi(s)$

$\Leftrightarrow\bar{Z}_aZ_bD^b\psi(s)=-\frac{m}{2s}\bar{N}(s)[(-\sigma_y,\sigma_x,-i)\otimes I_{2s},\varsigma\sigma_z\otimes I_{2s}]_aN(s)\psi(s)$

$\Leftrightarrow[sD_a+iS_{ab}(s,\varsigma;4)D^b]\psi(s)=-m[(-\sigma_y(s),\sigma_x(s),-is),\varsigma\sigma_z(s)]_a\psi(s)$

$S_{ab}(s,\varsigma;4)\succ\begin{bmatrix}0&\sigma_z(s)&-\sigma_y(s)&-\varsigma\sigma_x(s)\\-\sigma_z(s)&0&\sigma_x(s)&-\varsigma\sigma_y(s)\\\sigma_y(s)&-\sigma_x(s)&0&-\varsigma\sigma_z(s)\\\varsigma\sigma_x(s)&\varsigma\sigma_y(s)&\varsigma\sigma_z(s)&0\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s)=-m\gamma_a(s)\psi(s)\\[\gamma_x(s)\partial_\pi-\gamma_\pi(s)\partial_x]\psi(s)=i\varsigma m\gamma_y(s)\psi(s)\end{cases},S_{ab}(s,\varsigma)=-i[\gamma_a(s),\gamma_b(s)]\succ\begin{bmatrix}0&-\varsigma\sigma_x(s)\\\varsigma\sigma_x(s)0&\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}[s\partial_a+m\gamma_a(s)+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s)=0\\[\gamma_x(s)\partial_\pi-\gamma_\pi(s)\partial_x]\psi(s)=i\varsigma m\gamma_y(s)\psi(s)\end{cases}$ □

5.5.2 二维时空中自旋方程的平面波解及其自旋基

定理5.5.2.

$$\begin{cases}[\gamma^a\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)\text{全对称}\\\psi_{k_\varsigma}(x):=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}^{2s}}\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[s\partial_a+m\gamma_a(s)+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s)=0\\[\gamma_x(s)\partial_\pi-\gamma_\pi(s)\partial_x]\psi(s)=i\varsigma m\gamma_y(s)\psi(s)\\\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdots}_{2s}}\psi_{k_\varsigma}(x)\end{cases}$$

$$\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}[a(\vec{p},h)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},h)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}$$

$$\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2n}[a(\vec{p},h)U_{k_\varsigma}(\vec{p};s)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}+b^+(\vec{p},h)V_{k_\varsigma}(\vec{p};s)e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}]d^N\vec{p}$$

定理5.5.3.

$$\begin{cases}U_{k_\varsigma}(\vec{p};s):=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})\Leftrightarrow U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}U_{k_\varsigma}(\vec{p};s)\\V_{k_\varsigma}(\vec{p};s):=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})\Leftrightarrow V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\vec{p})=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}V_{k_\varsigma}(\vec{p};s)\end{cases}$$

5.5.3 二维时空中自旋方程的自旋基正交性

定理5.5.4. $U^{+k_\varsigma}(\vec{p};s)U_{k_\varsigma}(\vec{p};s)=(\frac{E}{m})^{2s},V^{+k_\varsigma}(\vec{p};s)V_{k_\varsigma}(\vec{p};s)=(\frac{E}{m})^{2s}$

定理5.5.5. $$\begin{cases}U_{k_\varsigma}(\vec{p};s)U^+_{k'_\varsigma}(\vec{p};s)=\frac{1}{(\varsigma2m)^{2s}}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}\underbrace{[m\sigma_z-(\sigma,i\varsigma)^ap_a]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[m\sigma_z-(\sigma,i\varsigma)^bp_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2s}\\V_{k_\varsigma}(\vec{p};s)V^+_{k'_\varsigma}(\vec{p};s)=\frac{1}{(\varsigma2m)^{2s}}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}^{2s}}\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}^{2s}}\underbrace{[-m\sigma_z-(\sigma,i\varsigma)^ap_a]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[-m\sigma_z-(\sigma,i\varsigma)^bp_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2s}\end{cases}$$

5.6 二维时空中有质量粒子协变对易规则

5.6.1 二维时空中有质量玻色子协变对易规则梳理

定理5.6.1. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{2n-1}}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2n}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理5.6.2. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(x')]=i\frac{i^{2n}}{2^{2n-1}}\underbrace{[-im\sigma_z+(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[-im\sigma_z+(\sigma,i\varsigma)^b\partial_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2n}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理5.6.3. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n}}(x')]=\frac{i}{2^{2n-1}}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdots}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdots}_{n}\Delta(x-x')$

5.6.2 二维时空中有质量费米子协变对易规则梳理

定理5.6.4. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x')]=\frac{i}{2^{2n}}\underbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2n+1}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理5.6.5. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2n+1}}(x')]=i\frac{i^{2n+1}}{2^{2n}}\underbrace{[-im\sigma_z+(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[-im\sigma_z+(\sigma,i\varsigma)^b\partial_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2n+1}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理5.6.6.

$$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x')]=\frac{i}{2^{2n}}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdots}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdots}_{n}[(m-\gamma^c\partial_c)\gamma^0]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$$

$$[\Updownarrow]$$

定理5.6.7.

$$[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\tau_\varsigma}_{2n+1}}(x')]=i\frac{i\varsigma}{2^{2n}}\underbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\cdots}_{n}\underbrace{\mathbb{X}^{+a'}_{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(x')\cdots}_{n}\underbrace{[\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^+_{a'}}{m^2}]\cdots}_{n}[-im\sigma_z+(\sigma,i\varsigma)^b\partial_b]_{\tau_\varsigma\tau'_\varsigma}\Delta(x-x')$$

6 二维时空中无质量粒子的Bargmann-Wigner方程

6.1 二维时空中的无质量Dirac方程

证明: $\gamma^a\partial_a\psi(x)=0,\gamma^a=(-\sigma_y,\varsigma\sigma_z)$

$\Leftrightarrow(\sigma_x,-i\varsigma)^a\partial_a\psi(x)=0$

$\Leftrightarrow(\sigma_x,-i\varsigma)^a p_a\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})=0$

$\Leftrightarrow\sigma_x p_x\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})=-\varsigma|p_x|\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})$

$\Leftrightarrow\sigma_x\hat{p}_x\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})=-\varsigma\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})$

$\Leftrightarrow\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}(1-\varsigma)-(1+\varsigma)\hat{p}_x\\(1+\varsigma)+(1-\varsigma)\hat{p}_x\end{bmatrix}$ □

推论6.1.1.

$$\begin{cases}\psi(\vec{r},t):=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq0}\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})[a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}\\a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^N\vec{r}\\a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\psi(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^N\vec{r}\end{cases}$$

$\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})=1,\lambda(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})\lambda^+(\hat{p},-\frac{\varsigma}{2})=\frac{1}{2}(1-\varsigma\sigma_x\hat{p}_x)=-\frac{\varsigma}{2}(\sigma_x,i\varsigma)^a\hat{p}_a=-\frac{\varsigma}{2}(\sigma,i\varsigma)^a\hat{p}_a$

6.2 二维时空中无质量Bargmann-Wigner方程 [18]的平面波解

定理6.2.1. $\gamma^a{}_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\partial_a\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=0,\gamma^a=(-\sigma_y,\varsigma\sigma_z)$

$$\begin{cases}\psi(\vec{r},t):=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\vec{p}\neq 0}\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},-s\varsigma)[a_1(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{ip\cdot x}+a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}\\ a_1(\vec{p},-s\varsigma)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\lambda^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},-s\varsigma)\psi(\vec{r},t)e^{-ip\cdot x}d^N\vec{r}\\ a_2^+(\vec{p},-\frac{\varsigma}{2})=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\lambda^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},-s\varsigma)\psi(\vec{r},t)e^{ip\cdot x}d^N\vec{r}\end{cases}$$

$$\lambda^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},-s\varsigma)=1,\lambda_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},-s\varsigma)\lambda^+_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(\hat{p},-s\varsigma)=(-\frac{\varsigma}{2})^{2s}\overbrace{(\sigma,i\varsigma)^a(\sigma,i\varsigma)^b\cdots}^{2s}\overbrace{\hat{p}_a\hat{p}_b\cdots}^{2s}$$

6.3 二维时空中无质量Bargmann-Wigner方程的势描述 [18, 20]

定理6.3.1. $\gamma^a\partial_a\psi(x)=0,\psi^T(x)=\psi(x),A_a=\frac{1}{\sqrt{2}im}tr(\bar{\varepsilon}\gamma_a\psi),\gamma^a=(-\sigma_y,\varsigma\sigma_z)$
$\Leftrightarrow(\partial^b\partial_b-m^2)A_a=0,\partial^aA_a=0;F_{ab}:=\partial_aA_b-\partial_bA_a,\psi=(im\gamma^a+\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x\partial_b)\varepsilon\frac{A_a}{\sqrt{2}},S_{ab}(e)=\frac{1}{2}\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x$

证明: $\gamma^a\partial_a\psi(x)=0,\psi^T(x)=\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$
$\Leftrightarrow\gamma^a\partial_a(\gamma^b\varepsilon imA_b-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})=0,\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$
$\Leftrightarrow\gamma^a\partial_a(\gamma^b imA_b-\varsigma\sigma_xF_{xy})=0,\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$
$\Leftrightarrow(\delta^{ab}-i\varsigma\varepsilon^{ab}\sigma_x)im\partial_aA_b-i\varepsilon^{ab}\gamma_b\partial_aF_{xy}=0,\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$
$\Leftrightarrow im\partial^aA_a+m\varepsilon^{ab}\partial_aA_b\varsigma\sigma_x-i\varepsilon^{ab}\partial_aF_{xy}\gamma_b=0,\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$
$\Leftrightarrow im\partial^aA_a=0,m\varepsilon^{ab}\partial_aA_b=0,-i\varepsilon^{ab}\partial_aF_{xy}\gamma_b=0,\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$
$\Leftrightarrow\partial^aA_a=0,\varepsilon^{ab}\partial_aA_b=0,\varepsilon^{ab}\partial_aF_{xy}=0,\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$
$\Leftrightarrow\partial^aA_a=0,\partial_aA_b-\partial_bA_a=0,\partial_aF_{xy}=0,\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^a\varepsilon imA_a-\varsigma\sigma_x\varepsilon F_{xy})$ □

6.4 二维时空中无质量s-自旋方程

定理6.4.1. $\gamma^a\partial_a\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)$全对称$,\gamma_a:=[-\sigma_y,\varsigma\sigma_z]$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\psi(s)=0\\ [\gamma_x(s)\partial_\pi-\gamma_\pi(s)\partial_x]\psi(s)=0\end{cases},S_{ab}(s,\varsigma)=-i[\gamma_a(s),\gamma_b(s)],\gamma_a(s):=[-\sigma_y(s),\varsigma\sigma_z(s)]$$

6.5 二维时空中无质量Bargmann-Wigner方程的协变对易规则

定理6.5.1. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]=\frac{i}{2^{2s-1}}\underbrace{[(-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2s}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理6.5.2. $[\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots}_{2s}}(x),\psi^+_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots}_{2s}}(x')]=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\underbrace{[(\sigma,i\varsigma)^a\partial_a]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}[(\sigma,i\varsigma)^b\partial_b]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}\cdots}_{2s}\Delta(x-x')$

$$[\Updownarrow]$$

定理6.5.3. $[\psi_{k_\varsigma}(x),\psi^+_{k'_\varsigma}(x')]=i\frac{(-1)^{2s}}{2^{s-1}}\Gamma^{\overbrace{abc\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(s)\overbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\cdots}^{2s}\Delta(x-x')$

7 二维时空中无质量粒子的Penrose方程

7.1 二维时空中分离表象的Dirac方程 [5, 6]

定义7.1.1. $(\gamma^a\partial_a+m)\psi=0,\psi=\begin{bmatrix}\varphi\\ \bar{\varphi}\end{bmatrix},\gamma^a=(1\otimes\sigma_y,\varsigma 1\otimes\sigma_x)\Leftrightarrow\begin{cases}(1,-i\varsigma)^a\partial_a\varphi=im\bar{\varphi}\\ (1,i\varsigma)^a\partial_a\bar{\varphi}=-im\varphi\end{cases}$

定义7.1.2. $\vartheta = \begin{bmatrix} 0 & i\varepsilon \\ -i\varepsilon & 0 \end{bmatrix}, S_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{bmatrix}, S_{ab}(e,\varsigma) = -\frac{i}{4}[\sigma_a, \sigma_b] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\varsigma}{2}\sigma_z \\ \frac{\varsigma}{2}\sigma_z & 0 \end{bmatrix}, \psi := \begin{bmatrix} \varphi \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix}$

推论7.1.1. $\Lambda(\begin{bmatrix} \sigma \\ i\tau \end{bmatrix}) = e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}} = e^{-\varepsilon\sigma_y}, \Lambda(\begin{bmatrix} \varphi \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix}) = e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(e,\varsigma)} = e^{\frac{\varsigma}{2}\varepsilon\sigma_z}$

当质量m=0时，则退化为两个Weyl中微子方程:

推论7.1.2. $(1,-i\varsigma)^a\partial_a\varphi = 0, (1,i\varsigma)^a\partial_a\bar{\varphi} = 0, \Lambda(\varphi) = e^{\frac{\varsigma}{2}\varepsilon}, \Lambda(\bar{\varphi}) = e^{-\frac{\varsigma}{2}\varepsilon}$

7.2 二维时空中分离表象的无质量Dirac方程的螺旋度本征函数

定义7.2.1. $\gamma^a\partial_a\psi(x) = 0, \psi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix}, \gamma^a = (1 \otimes \sigma_y, \varsigma 1 \otimes \sigma_x) \Leftrightarrow \begin{cases} (1,-i\varsigma)^a\partial_a\varphi = 0 \\ (1,i\varsigma)^a\partial_a\bar{\varphi} = 0 \end{cases}$

证明: $(\sigma_z, -i\varsigma)^a\partial_a\psi(x) = 0$
$\Leftrightarrow (\sigma_z, -i\varsigma)^a p_a \lambda(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2}) = 0$
$\Leftrightarrow \sigma_z p_z \lambda(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2}) = -\varsigma|p_z|\lambda(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})$
$\Leftrightarrow \sigma_z \hat{p}_z \lambda(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2}) = -\varsigma\lambda(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})$
$\Leftrightarrow \lambda(\hat{p}, -\varsigma) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1+\varsigma\hat{p}_z \\ 1+\varsigma\hat{p}_z \end{bmatrix}$ □

推论7.2.1. $\lambda^+(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2}) = 1, \lambda(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2})\lambda^+(\hat{p}, -\frac{\varsigma}{2}) = -\frac{\varsigma}{2}(\sigma_z, i\varsigma)^a\hat{p}_a$

7.3 二维中的矢量和旋量 [48]

7.3.1 二维中的光锥坐标和导数

定义7.3.1. $z \equiv \tau + \sigma, \tilde{z} \equiv \tau - \sigma, \tau = \frac{1}{2}(z + \tilde{z}), \sigma = \frac{1}{2}(z - \tilde{z}), z_\varsigma := \tau + \varsigma\sigma, \bar{z}_\varsigma := \tau - \varsigma\sigma$

定义7.3.2. $\begin{bmatrix} z \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma \\ i\tau \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma \\ i\tau \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ \tilde{z} \end{bmatrix}$

推论7.3.1. $\begin{cases} dz = d\tau + d\sigma, d\tilde{z} = d\tau - d\sigma \\ \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_\tau + \partial_\sigma), \partial_{\tilde{z}} = \frac{1}{2}(\partial_\tau - \partial_\sigma) \end{cases} \quad \begin{cases} d\tau = \frac{1}{2}(dz + d\tilde{z}), d\sigma = \frac{1}{2}(dz - d\tilde{z}) \\ \partial_\tau = \partial_z + \partial_{\tilde{z}}, \partial_\sigma = \partial_z - \partial_{\tilde{z}} \end{cases}$

推论7.3.2. $dz \wedge d\tilde{z} = 2d\sigma \wedge d\tau$

定义7.3.3. $P_z \equiv -i\partial_z, P_{\tilde{z}} \equiv -i\partial_{\tilde{z}}, P_\tau \equiv i\partial_\tau, P_\sigma \equiv -i\partial_\sigma$

推论7.3.3. $P_z = -\frac{1}{2}(P_\tau - P_\sigma), P_{\tilde{z}} = -\frac{1}{2}(P_\tau + P_\sigma), -P_\tau = P_z + P_{\tilde{z}}, P_\sigma = P_z - P_{\tilde{z}}$

推论7.3.4. $e^{i(P_\sigma\sigma - P_\tau\tau)} = e^{i(P_z z + P_{\tilde{z}}\tilde{z})}$

7.3.2 二维中的矢量和旋量的洛伦兹变换规律

推论7.3.5. *矢量:* $\Lambda(\begin{bmatrix} \sigma \\ i\tau \end{bmatrix}) = e^{-\varepsilon\sigma_y}, \sigma, \tau \in R \Leftrightarrow$ *光锥矢量:* $\Lambda(\begin{bmatrix} z \\ \tilde{z} \end{bmatrix}) = e^{-\varepsilon\sigma_z}, z, \tilde{z} \in R$

推论7.3.6. *Dirac旋量:* $\Lambda(\psi) = e^{\frac{\varsigma}{2}\varepsilon\sigma_z}, \psi \in C,$ *Weyl旋量:* $\Lambda(\varphi) = e^{\frac{\varsigma}{2}\varepsilon}, \Lambda(\bar{\varphi}) = e^{-\frac{\varsigma}{2}\varepsilon}, \varphi, \bar{\varphi} \in C$

推论7.3.7. *Majorana旋量:* $\Lambda(\psi) = e^{\frac{\varsigma}{2}\varepsilon\sigma_z}, \psi \in R,$ *Majorana-Weyl旋量:* $\Lambda(\varphi) = e^{\frac{\varsigma}{2}\varepsilon}, \Lambda(\bar{\varphi}) = e^{-\frac{\varsigma}{2}\varepsilon}, \varphi, \bar{\varphi} \in R$

命题7.3.1. *常数张量:* $(1,-i\varsigma)^a = e^{-\varepsilon\sigma_y}|^a{}_b e^{-\frac{\varsigma}{2}\varepsilon}(1,-i)^b e^{-\frac{\varsigma}{2}\varepsilon}, (1,-i\varsigma)^{a'}\partial_{a'} = e^{-\varsigma\varepsilon}(1,-i\varsigma)^a\partial_a$

命题7.3.2. *常数张量:* $(1,i\varsigma)^a = e^{-\varepsilon\sigma_y}|^a{}_b e^{\frac{\varsigma}{2}\varepsilon}(1,i\varsigma)^b e^{\frac{\varsigma}{2}\varepsilon}, (1,i\varsigma)^{a'}\partial_{a'} = e^{\varsigma\varepsilon}(1,i\varsigma)^a\partial_a$

推论7.3.8. $\partial_{z_\varsigma} = \frac{1}{2}(1,i\varsigma)^a\partial_a, \partial_{\tilde{z}_\varsigma} = -\frac{1}{2}(1,-i\varsigma)^a\partial_a; \partial_z = \frac{1}{2}(1,i)^a\partial_a, \partial_{\tilde{z}} = -\frac{1}{2}(1,-i)^a\partial_a$

推论7.3.9. $\begin{cases}\partial_{z'_\varsigma}=e^{\varsigma\varepsilon}\partial_{z_\varsigma},dz'_\varsigma=e^{-\varsigma\varepsilon}dz_\varsigma,z'_\varsigma=e^{-\varsigma\varepsilon}z_\varsigma\\ \partial_{\tilde{z}'_\varsigma}=e^{-\varsigma\varepsilon}\partial_{\tilde{z}_\varsigma},d\tilde{z}'_\varsigma=e^{\varsigma\varepsilon}d\tilde{z}_\varsigma,\tilde{z}'_\varsigma=e^{\varsigma\varepsilon}\tilde{z}_\varsigma\end{cases}$ $\begin{cases}\partial_{z'}=e^{\varepsilon}\partial_z,dz'=e^{-\varepsilon}dz,z'=e^{-\varepsilon}z\\ \partial_{\tilde{z}'}=e^{-\varepsilon}\partial_{\tilde{z}},d\tilde{z}'=e^{\varepsilon}d\tilde{z},\tilde{z}'=e^{\varepsilon}\tilde{z}\end{cases}$

推论7.3.10. 不变量: $dz_\varsigma\partial_{z_\varsigma},d\tilde{z}_\varsigma\partial_{\tilde{z}_\varsigma},dz_\varsigma d\tilde{z}_\varsigma,\partial_{z_\varsigma}\partial_{\tilde{z}_\varsigma};dz\partial_z,d\tilde{z}\partial_{\tilde{z}},dzd\tilde{z},\partial_z\partial_{\tilde{z}}$

推论7.3.11. 光锥矢量: $\Lambda(\begin{bmatrix}z_\varsigma\\ \tilde{z}_\varsigma\end{bmatrix})=e^{-\varsigma\varepsilon\sigma_z},\Lambda(\begin{bmatrix}\partial_{z_\varsigma}\\ \partial_{\tilde{z}_\varsigma}\end{bmatrix})=e^{\varsigma\varepsilon\sigma_z}$, 旋量: $\Lambda(\begin{bmatrix}\varphi\\ \bar{\varphi}\end{bmatrix})=e^{\frac{\varsigma}{2}\varepsilon\sigma_z}$

在二维中光锥矢量与旋量十分相似，在二维中光锥矢量就是矢量的旋量表象。

7.3.3 Wick转动(不采用)

定义7.3.4. $z\equiv\sigma+i\tau,\bar{z}\equiv z^*=\sigma-i\tau,\sigma=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),i\tau=\frac{1}{2}(z-\bar{z})$

推论7.3.12. $\begin{cases}dz=d\sigma+id\tau,d\bar{z}=d\sigma-id\tau,d\sigma=\frac{1}{2}(dz+d\bar{z}),id\tau=\frac{1}{2}(dz-d\bar{z})\\ \partial_z=\frac{1}{2}(\partial_\sigma+\partial_{i\tau}),\partial_{\bar{z}}=\frac{1}{2}(\partial_\sigma-\partial_{i\tau}),\partial_\sigma=\partial_z+\partial_{\bar{z}},\partial_{i\tau}=\partial_z-\partial_{\bar{z}}\end{cases}$ $\begin{cases}dz=d^*\bar{z}\\ \partial_z=\partial^*_{\bar{z}}\end{cases}$

7.4 二维时空中Penrose方程 [1,2]的平面波解

定理7.4.1. $(1,-i\varsigma)_a\partial^a\varphi(x)=0$

$$\Rightarrow\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int a(p,\varsigma)e^{ip(\tau+\varsigma\sigma)}dp=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}[a(p)e^{i(p\sigma-|p|\tau)}+b^+(p)e^{-i(p\sigma-|p|\tau)}]dp,\varsigma=-\\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}[a(p)e^{i(p\sigma-|p|\tau)}+b^+(p)e^{-i(p\sigma-|p|\tau)}]dp,\varsigma=+\end{cases}$$

证明: $(1,-i\varsigma)_a\partial^a\varphi(x)=0$

$\Leftrightarrow\partial^a\partial_a\varphi(x)=0,(1,-i\varsigma)_a\partial^a\varphi(x)=0$

$\Rightarrow\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int[a(p)e^{i(p\sigma-|p|\tau)}+b^+(p)e^{-i(p\sigma-|p|\tau)}]dp$

$\Rightarrow(\partial_\sigma-\varsigma\partial_\tau)\varphi(x)=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int[i(p+\varsigma|p|)a(p)e^{i(p\sigma-|p|\tau)}-i(p+\varsigma|p|)b^+(p)e^{-i(p\sigma-|p|\tau)}]dp$

$\Leftrightarrow(p+\varsigma|p|)a(p)=0,(p+\varsigma|p|)b^+(p)=0$

$\Leftrightarrow a(\varsigma p>0)=0,b^+(\varsigma p>0)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}[a(p)e^{i(p\sigma-|p|\tau)}+b^+(p)e^{-i(p\sigma-|p|\tau)}]dp,\varsigma=-\\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}[a(p)e^{i(p\sigma-|p|\tau)}+b^+(p)e^{-i(p\sigma-|p|\tau)}]dp,\varsigma=+\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}[a(p)e^{ip(\sigma-\tau)}+b^+(p)e^{-ip(\sigma-\tau)}]dp,\varsigma=-\\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}[a(p)e^{ip(\sigma+\tau)}+b^+(p)e^{-ip(\sigma+\tau)}]dp,\varsigma=+\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a(p)e^{ip(\sigma-\tau)};a(p):=b^+(-p),p<0;\varsigma=-\\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a(p)e^{ip(\sigma+\tau)}dp;a(p):=b^+(-p),p>0;\varsigma=+\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a'(p)e^{ip(\tau-\sigma)}dp,\varsigma=-\\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a(p)e^{ip(\tau+\sigma)}dp,\varsigma=+\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a(p,\varsigma)e^{ip(\tau+\varsigma\sigma)}dp$ □

7.5 二维时空中的因果函数

定义7.5.1. $\Delta(z_\varsigma):=\frac{i}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{2p}(e^{ipz_\varsigma}-e^{-ipz_\varsigma})dp=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2p}(e^{ipz_\varsigma}-e^{-ipz_\varsigma})dp=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{p}e^{ipz_\varsigma}dp$

定义7.5.2. $\begin{cases}\Delta^{(+)}(z_\varsigma):=\frac{i}{\pi}\int\limits_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2p}e^{ipz_\varsigma}d\vec{p},\Delta^{(-)}(z_\varsigma):=-\frac{i}{\pi}\int\limits_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2p}e^{-ipz_\varsigma}d\vec{p},\Delta^{(-)}(z_\varsigma)=-\Delta^{(+)}(-z_\varsigma)\\ \Delta(z_\varsigma):=\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2p}[e^{ipz_\varsigma}-e^{-ipz_\varsigma}\}d\vec{p},\Delta(z_\varsigma)=\Delta^{(+)}(z_\varsigma)+\Delta^{(-)}(z_\varsigma)\end{cases}$

定义7.5.3. $\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}}\Delta(z_\varsigma):=\frac{i}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{2p^2}(e^{ipz_\varsigma}-e^{-ipz_\varsigma})dp=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2p|p|}(e^{ipz_\varsigma}-e^{-ipz_\varsigma})dp=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{p|p|}e^{ipz_\varsigma}dp\\ \sqrt{-\nabla^2}\Delta(z_\varsigma):=\frac{i}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{2}(e^{ipz_\varsigma}-e^{-ipz_\varsigma})dp=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|p|}{2p}(e^{ipz_\varsigma}-e^{-ipz_\varsigma})dp=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|p|}{p}e^{ipz_\varsigma}dp\end{cases}$

性质7.5.1. $\Delta^*(z_\varsigma)=\Delta(z_\varsigma),\Delta(-z_\varsigma)=-\Delta(z_\varsigma),(\nabla^2-\partial_\tau^2)\Delta(z_\varsigma)=0,\partial_{z_\varsigma}\Delta(z_\varsigma)|_{\tau=0}=-\delta(\sigma)$

性质7.5.2. $\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma):=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2p}[e^{ip\cdot(z_\varsigma-z'_\varsigma)}-e^{-ip\cdot(z_\varsigma-z'_\varsigma)}\}d\vec{p}$

$$\begin{cases}\partial_u\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)=-\partial'_u\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)\\ \nabla\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)=-\nabla'\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)\\ \partial_\pi\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)=-\partial'_\pi\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)\end{cases}\quad\begin{cases}(\sqrt{-\nabla^2})^n\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)=(\sqrt{-\nabla'^2})^n\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)\\ \frac{1}{(\sqrt{-\nabla^2})^n}\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)=\frac{1}{(\sqrt{-\nabla'^2})^n}\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)\\ \partial_\pi^{2n}\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)=\partial_\pi'^{2n}\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)\end{cases}$$

7.6 二维时空中s-自旋方程的对易规则

推论7.6.1. $[s\partial_a+iS_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\varphi(x)=0,\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a(p,\varsigma)e^{ip(\tau+\varsigma\sigma)}dp$

定理7.6.1. $[a(p,\varsigma),a^+(p',\varsigma)]_{-^{2s+1}}=\delta(p-p')\Rightarrow[\varphi(z_\varsigma),\varphi^+(z'_\varsigma)]_{-^{2s+1}}=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(1,i\varsigma)^a\partial_a(1,i\varsigma)^b\partial_b\cdots}^{2s}\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)$

证明: $[a(p,\varsigma),a^+(p',\varsigma)]_{-^{2s+1}}=\delta(p-p')$

$\Rightarrow[a(p),a^+(p')]_{-^{2s+1}}=[b(p),b^+(p')]_{-^{2s+1}}=\delta(p-p')$

$\Rightarrow[\varphi(z_\varsigma),\varphi^+(z'_\varsigma)]_{-^{2s+1}}$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\{e^{i(p\sigma-|p|\tau)}e^{-i(p'\sigma'-|p'|\tau')}[a(p),a^+(p')]_{-^{2s+1}}+e^{-i(p\sigma-|p|\tau)}e^{i(p'\sigma'-|p'|\tau')}[b^+(p),b(p')]_{-^{2s+1}}\}dpdp',\varsigma=-\\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\{e^{i(p\sigma-|p|\tau)}e^{-i(p'\sigma'-|p'|\tau')}[a(p),a^+(p')]_{-^{2s+1}}+e^{-i(p\sigma-|p|\tau)}e^{i(p'\sigma'-|p'|\tau')}[b^+(p),b(p')]_{-^{2s+1}}\}dpdp',\varsigma=+\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\{e^{i(p\sigma-|p|\tau)}e^{-i(p'\sigma'-|p'|\tau')}+(-1)^{2s-1}e^{-i(p\sigma-|p|\tau)}e^{i(p'\sigma'-|p'|\tau')}\}[a(p),a^+(p')]_{-^{2s+1}}dpdp',\varsigma=-\\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\{e^{i(p\sigma-|p|\tau)}e^{-i(p'\sigma'-|p'|\tau')}+(-1)^{2s-1}e^{-i(p\sigma-|p|\tau)}e^{i(p'\sigma'-|p'|\tau')}\}[a(p),a^+(p')]_{-^{2s+1}}dpdp',\varsigma=+\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\{e^{i(p\sigma-|p|\tau)}e^{-i(p'\sigma'-|p'|\tau')}+(-1)^{2s-1}e^{-i(p\sigma-|p|\tau)}e^{i(p'\sigma'-|p'|\tau')}\}|p|^{2s-1}\delta(p-p')dpdp',\varsigma=-\\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\{e^{i(p\sigma-|p|\tau)}e^{-i(p'\sigma'-|p'|\tau')}+(-1)^{2s-1}e^{-i(p\sigma-|p|\tau)}e^{i(p'\sigma'-|p'|\tau')}\}|p|^{2s-1}\delta(p-p')dpdp',\varsigma=+\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\{e^{i(p\sigma-|p|\tau)}e^{-i(p\sigma'-|p|\tau')}+(-1)^{2s-1}e^{-i(p\sigma-|p|\tau)}e^{i(p\sigma'-|p|\tau')}\}|p|^{2s-1}dp,\varsigma=-\\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\{e^{i(p\sigma-|p|\tau)}e^{-i(p\sigma'-|p|\tau')}+(-1)^{2s-1}e^{-i(p\sigma-|p|\tau)}e^{i(p\sigma'-|p|\tau')}\}|p|^{2s-1}dp,\varsigma=+\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\{e^{i(p\sigma-|p|\tau)}e^{-i(p\sigma'-|p|\tau')}+(-1)^{2s-1}e^{-i(p\sigma-|p|\tau)}e^{i(p\sigma'-|p|\tau')}\}|p|^{2s-1}dp,\varsigma=-\\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\{e^{i(-p\sigma-|p|\tau)}e^{-i(p\sigma'-|p|\tau')}+(-1)^{2s-1}e^{-i(-p\sigma-|p|\tau)}e^{i(-p\sigma'-|p|\tau')}\}|p|^{2s-1}dp,\varsigma=+\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\{e^{ip(\sigma-\tau)}e^{-ip(\sigma'-\tau')}+(-1)^{2s-1}e^{-ip(\sigma-\tau)}e^{ip(\sigma'-\tau')}\}p^{2s-1}dp,\varsigma=-\\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\{(-1)^{2s-1}e^{ip(\sigma+\tau)}e^{-ip(\sigma'+\tau')}+e^{-ip(\sigma+\tau)}e^{ip(\sigma'+\tau')}\}p^{2s-1}dp,\varsigma=+\end{cases}$$

$$= \begin{cases} [\frac{-i}{2}(1,-i)^a\partial_a]^{2s}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\{e^{ip(\sigma-\tau)}e^{-ip(\sigma'-\tau')}-e^{-ip(\sigma-\tau)}e^{ip(\sigma'-\tau')}\}p^{-1}dp, \varsigma=- \\ [\frac{-i}{2}(1,i)^a\partial_a]^{2s}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\{(-1)^{2s-1}e^{ip(\sigma+\tau)}e^{-ip(\sigma'+\tau')}+(-1)^{2s}e^{-ip(\sigma+\tau)}e^{ip(\sigma'+\tau')}\}p^{-1}dp, \varsigma=+ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [\frac{-i}{2}(1,-i)^a\partial_a]^{2s}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\{e^{ip(\sigma-\tau)}e^{-ip(\sigma'-\tau')}-e^{-ip(\sigma-\tau)}e^{ip(\sigma'-\tau')}\}p^{-1}dp, \varsigma=- \\ [\frac{i}{2}(1,i)^a\partial_a]^{2s}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\{-e^{ip(\sigma+\tau)}e^{-ip(\sigma'+\tau')}+e^{-ip(\sigma+\tau)}e^{ip(\sigma'+\tau')}\}p^{-1}dp, \varsigma=+ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} i[\frac{-i}{2}(1,-i)^a\partial_a]^{2s}\frac{i}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\{e^{ip(\tau-\sigma)}e^{-ip(\tau'-\sigma')}-e^{-ip(\tau-\sigma)}e^{ip(\tau'-\sigma')}\}p^{-1}dp, \varsigma=- \\ +i[\frac{i}{2}(1,i)^a\partial_a]^{2s}\frac{i}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\{e^{ip(\tau+\sigma)}e^{-ip(\tau'+\sigma')}-e^{-ip(\tau+\sigma)}e^{ip(\tau'+\sigma')}\}p^{-1}dp, \varsigma=+ \end{cases}$$

$$= 2i[\frac{i\varsigma}{2}(1,i\varsigma)^a\partial_a]^{2s}\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\{e^{ip(\tau+\varsigma\sigma)}e^{-ip(\tau'+\varsigma\sigma')}-e^{-ip(\tau+\varsigma\sigma)}e^{ip(\tau'+\varsigma\sigma')}\}p^{-1}dp$$

$$= i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(1,i\varsigma)^a\partial_a(1,i\varsigma)^b\partial_b\cdots}^{2s}\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)$$

$$= 2i^{2s+1}\partial_{z_\varsigma}^{2s}\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)$$

$$= 2i^{2s-1}\partial_{z_\varsigma}^{2s-1}\delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)$$

□

7.7 二维时空中Penrose方程 [1,2]杂烩

定理7.7.1. $(1,-i\varsigma)_a^{A'_\varsigma A_\varsigma}\partial^a\varphi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=0, \varphi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=k(\tau+\varsigma\sigma)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int a(p,\varsigma)e^{ip(\tau+\varsigma\sigma)}dp$

定理7.7.2. $(1,-i\varsigma)_a\partial^a\varphi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=0, \partial^a\partial_a\varphi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=0$

定理7.7.3. $(1,-i\varsigma)_a\partial^a\varphi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=0 \Leftrightarrow [s\partial_a+iS_{ab}(s)\partial^b]\varphi_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(x)=0, iS_{ab}(s)=\begin{bmatrix}0 & is\\ -is & 0\end{bmatrix}$

命题7.7.1. $[s\partial_a+iS_{ab}(s)\partial^b]\varphi(s)=0, \varphi'(s)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s)}\varphi(s)=e^{-s\varepsilon}\varphi(s), \vartheta^{ab}\succ\begin{bmatrix}0 & i\epsilon\\ -i\epsilon & 0\end{bmatrix}$

7.8 二维时空中$\frac{1}{3}$-自旋方程的对易规则？

推论7.8.1. $[\frac{1}{3}\partial_a+iS_{ab}(\frac{1}{3},\varsigma)\partial^b]\varphi(x)=0, \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int a(p,\varsigma)e^{ip(\tau+\varsigma\sigma)}dp$

定理7.8.1. $[a(p,\varsigma),a^+(p',\varsigma)]_\varphi=\delta(p-p')\Rightarrow[\varphi(z_\varsigma),\varphi^+(z'_\varsigma)]_{-^{2s+1}}=i\frac{(i\varsigma)^{2s}}{2^{2s-1}}\overbrace{(1,i\varsigma)^a\partial_a(1,i\varsigma)^b\partial_b\cdots}^{2s}\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)$

猜想7.8.1. $[a(p,\varsigma),a^+(p',\varsigma)]_{-\frac{5}{3}}=\delta(p-p')\Rightarrow[\varphi(z_\varsigma),\varphi^+(z'_\varsigma)]_{-\frac{5}{3}}=i\frac{(i\varsigma)^{\frac{2}{3}}}{2^{-\frac{1}{3}}}[(1,i\varsigma)^a\partial_a]^{\frac{2}{3}}\Delta(z_\varsigma-z'_\varsigma)$

第三十九章　N+1维时空B-W方程的势分析

自我评述：本章仿照四维情形，对N+1维时空中的Bargmann-Wigner方程进行了势分解和详细的数学分析。在自旋-1情形下自然而然出现了反对称张量场，并基于Bargmann-Wigner方程的对易规则推导出了反对称张量场的对易规则。与四维情形对比，N+1维时空中的B-W 方程的势分析复杂好多，而且全对称的B-W方程不再描述单个自旋态，而是描述多个基本场。正是这点导致了复杂性，从而使这种推广失去了部分美感，也使这样的描述变得丑陋，这似乎暗示着这种推广变得意义不大了。比如在自旋-1情形直接研究基本的反对称张量场即可，因为它是单个基本场，更简单、更基本。本章没有对自旋-$\frac{3}{2}$,2等更高自旋情形进行详细讨论，只是给出了高自旋情形的两个猜想，严格证明等以后有时间再说。

通过本章的研究，我发现高于四维时空的全对称Bargmann-Wigner方程不再是描述物理场的好方法了，此时B-W方程不像四维时空中那样描述的是基本场，而是描述混合场，所以此时应该直接采用反对称张量场的描述方法更合适。

1 N+1维时空Dirac矩阵

1.1 N+1维时空Dirac矩阵的常规表象

定义1.1.1.

$$\begin{cases}\gamma_a(1)=(1)\\ \gamma_1(1)=1\end{cases}$$

定义1.1.2.

$$\begin{cases}\gamma_a(2):=(\gamma_a(1)\otimes\sigma_x,1\otimes\sigma_y)=(\sigma_x,\sigma_y),\Gamma^a(2):=[\gamma_a(1),i\varsigma]=(1,i\varsigma)\\ C(2):=\gamma_2(2)=\sigma_y,\bar{C}(2)=C^+(2)=C(2),\gamma_1(2)\gamma_2(2)=i\sigma_z=i\gamma_0(2)\\ C^T(2)=-C(2),\gamma_a(2)C(2)=[\gamma_a(2)C(2)]^T,\gamma_{[a}(2)\gamma_{b]}(2)C(2)=\{\gamma_{[a}(2)\gamma_{b]}(2)C(2)\}^T\end{cases}$$

定义1.1.3.

$$\begin{cases}\gamma_a(3)=[\gamma_a(2),1\otimes\sigma_z]=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)\\ C(3):=\gamma_2(3)=\sigma_y,\bar{C}(3)=C^+(3)=C(3),\gamma_1(3)\cdots\gamma_3(3)=i=i\gamma_0(3)\\ C^T(3)=-C(3),[\gamma_a(3)C(3)]^T=\gamma_a(3)C(3)\end{cases}$$

定义1.1.4.

$$\begin{cases}\gamma_a(4)=[\gamma_a(3)\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_x]=(\sigma\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_x),\Gamma^a(4)=[\gamma_a(3),i\varsigma]\\ C(4):=\gamma_2(4)\gamma_4(4)=-i\sigma_y\otimes\sigma_z,\bar{C}(4)=C^+(4)=-C(4),\gamma_1(4)\cdots\gamma_4(4)=I\otimes\sigma_z=\gamma_0(4)\\ [\gamma_a(4)C(4)]^T=\gamma_a(4)C(4),\{\gamma_{[a}(4)\gamma_{b]}(4)C(4)\}^T=\gamma_{[a}(4)\gamma_{b]}(4)C(4)\\ C^T(4)=-C(4),\{\gamma_{[a}(4)\gamma_b(4)\gamma_{c]}(4)C(4)\}^T=-\gamma_{[a}(4)\gamma_b(4)\gamma_{c]}(4)C(4)\\ \{\gamma_{[a}(4)\gamma_b(4)\gamma_c(4)\gamma_{d]}(4)C(4)\}^T=-\gamma_{[a}(4)\gamma_b(4)\gamma_c(4)\gamma_{d]}(4)C(4)\end{cases}$$

定义1.1.5.

$$\begin{cases}\gamma_a(5)=[\gamma_a(4),I\otimes\sigma_z]=(\sigma\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_x,I\otimes\sigma_z)\\ C(5):=\gamma_2(5)\gamma_4(5)\gamma_5(5)=-i\sigma_y\otimes I,\bar{C}(5)=C^+(5)=-C(5),\gamma_1(5)\cdots\gamma_5(5)=1=\gamma_0(5)\\ C^T(5)=-C(5),[\gamma_a(5)C(5)]^T=-\gamma_a(5)C(5),\{\gamma_{[a}(5)\gamma_{b]}(5)C(5)\}^T=\gamma_{[a}(5)\gamma_{b]}(5)C(5)\end{cases}$$

定义1.1.6.

$$\gamma_a(10)=[[[((\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_x,I\otimes\sigma_z)\otimes\sigma_y,I_4\otimes\sigma_x,I_4\otimes\sigma_z]\otimes\sigma_y,I_8\otimes\sigma_x,I_8\otimes\sigma_z]\otimes\sigma_y,I_{16}\otimes\sigma_x]$$

定义1.1.7.

$$\begin{cases}\gamma_a(6)=[\gamma_a(5)\otimes\sigma_y,I_4\otimes\sigma_x],\Gamma^a(6)=[\gamma_a(5),i\varsigma]\\ C(6):=\gamma_2(6)\gamma_4(6)\gamma_5(6)=-i\sigma_y\otimes I\otimes\sigma_y,\bar{C}(6)=C^+(6)=-C(6),\gamma_1(6)\cdots\gamma_6(6)=-iI_4\otimes\sigma_z=-i\gamma_0(6)\\ [\gamma_a(6)C(6)]^T=-\gamma_a(6)C(6),[\gamma_{[a}(6)\gamma_{b]}(6)C(6)]^T=-\gamma_{[a}(6)\gamma_{b]}(6)C(6)\\ [\gamma_{[a}(6)\gamma_b(6)\gamma_c(6)\gamma_d(6)\gamma_{e]}(6)C(6)]^T=-\gamma_{[a}(6)\gamma_b(6)\gamma_c(6)\gamma_d(6)\gamma_{e]}(6)C(6)\\ [\gamma_{[a}(6)\gamma_b(6)\gamma_c(6)\gamma_d(6)\gamma_e(6)\gamma_{f]}(6)C(6)]^T=-\gamma_{[a}(6)\gamma_b(6)\gamma_c(6)\gamma_d(6)\gamma_e(6)\gamma_{f]}(6)C(6)\\ C^T(6)=C(6),[\gamma_{[a}(6)\gamma_b(6)\gamma_{c]}(6)C(6)]^T=\gamma_{[a}(6)\gamma_b(6)\gamma_{c]}(6)C(6)\\ [\gamma_{[a}(6)\gamma_b(6)\gamma_c(6)\gamma_{d]}(6)C(6)]^T=\gamma_{[a}(6)\gamma_b(6)\gamma_c(6)\gamma_{d]}(6)C(6)\end{cases}$$

定义1.1.8.

$$\begin{cases}\gamma_a(7)=[\gamma_a(6),I_4\otimes\sigma_z]\\ C(7):=\gamma_2(7)\gamma_4(7)\gamma_5(7)=-i\sigma_y\otimes I\otimes\sigma_y,C(7)=C(6),\bar{C}(7)=C^+(7)=-C(7),\gamma_1(7)\cdots\gamma_7(7)=-i=-i\gamma_0(7)\\ [\gamma_a(7)C(7)]^T=-\gamma_a(7)C(7),[\gamma_{[a}(7)\gamma_{b]}(7)C(7)]^T=-\gamma_{[a}(7)\gamma_{b]}(7)C(7)\\ C^T(7)=C(7),[\gamma_{[a}(7)\gamma_b(7)\gamma_{c]}(7)C(7)]^T=\gamma_{[a}(7)\gamma_b(7)\gamma_{c]}(7)C(7)\end{cases}$$

定义1.1.9.

$$\begin{cases}\gamma_a(8)=[\gamma_a(7)\otimes\sigma_y,I_8\otimes\sigma_x],\Gamma^a(8)=[\gamma_a(7),i\varsigma]\\ C(8):=\gamma_2(8)\gamma_4(8)\gamma_5(8)\gamma_8(8)=-\sigma_y\otimes I\otimes\sigma_y\otimes\sigma_z,\bar{C}(8)=C^+(8)=C(8),\gamma_1(8)\cdots\gamma_8(8)=-I_8\otimes\sigma_z=-\gamma_0(8)\\ [\gamma_a(8)C(8)]^T=-\gamma_a(8)C(8),[\gamma_{[a}(8)\gamma_{b]}(8)C(8)]^T=-\gamma_{[a}(8)\gamma_{b]}(8)C(8)\\ [\gamma_{[a}(8)\gamma_b(8)\gamma_c(8)\gamma_d(8)\gamma_{e]}(8)C(8)]^T=-\gamma_{[a}(8)\gamma_b(8)\gamma_c(8)\gamma_d(8)\gamma_{e]}(8)C(8)\\ [\gamma_{[a}(8)\gamma_b(8)\gamma_c(8)\gamma_d(8)\gamma_e(8)\gamma_{f]}(8)C(8)]^T=-\gamma_{[a}(8)\gamma_b(8)\gamma_c(8)\gamma_d(8)\gamma_e(8)\gamma_{f]}(8)C(8)\\ C^T(8)=C(8),[\gamma_{[a}(8)\gamma_b(8)\gamma_{c]}(8)C(8)]^T=\gamma_{[a}(8)\gamma_b(8)\gamma_{c]}(8)C(8)\\ [\gamma_{[a}(8)\gamma_b(8)\gamma_c(8)\gamma_{d]}(8)C(8)]^T=\gamma_{[a}(8)\gamma_b(8)\gamma_c(8)\gamma_{d]}(8)C(8)\\ [\gamma_{[a}(8)\gamma_b(8)\gamma_c(8)\gamma_d(8)\gamma_e(8)\gamma_f(8)\gamma_{g]}(8)C(8)]^T=\gamma_{[a}(8)\gamma_b(8)\gamma_c(8)\gamma_d(8)\gamma_e(8)\gamma_f(8)\gamma_{g]}(8)C(8)\\ [\gamma_{[a}(8)\gamma_b(8)\gamma_c(8)\gamma_d(8)\gamma_e(8)\gamma_f(8)\gamma_g(8)\gamma_{h]}(8)C(8)]^T=\gamma_{[a}(8)\gamma_b(8)\gamma_c(8)\gamma_d(8)\gamma_e(8)\gamma_f(8)\gamma_g(8)\gamma_{h]}(8)C(8)\end{cases}$$

定义1.1.10.

$$\begin{cases}\gamma_a(9)=[\gamma_a(8),I_8\otimes\sigma_z]=[\gamma_a(7)\otimes\sigma_y,I_8\otimes\sigma_x,I_8\otimes\sigma_z]\\ C(9):=\gamma_2(9)\gamma_4(9)\gamma_5(9)\gamma_8(9)\gamma_9(9)=-\sigma_y\otimes I\otimes\sigma_y\otimes I,\bar{C}(9)=C^+(9)=C(9),\gamma_1(9)\cdots\gamma_9(9)=-1=-\gamma_0(9)\\ [\gamma_{[a}(9)\gamma_{b]}(9)C(9)]^T=-\gamma_{[a}(9)\gamma_{b]}(9)C(9),[\gamma_{[a}(9)\gamma_b(9)\gamma_{c]}(9)C(9)]^T=-\gamma_{[a}(9)\gamma_b(9)\gamma_{c]}(9)C(9)\\ C^T(9)=C(9),[\gamma_a(9)C(9)]^T=\gamma_a(9)C(9),[\gamma_{[a}(9)\gamma_b(9)\gamma_c(9)\gamma_{d]}(9)C(9)]^T=\gamma_{[a}(9)\gamma_b(9)\gamma_c(9)\gamma_{d]}(9)C(9)\end{cases}$$

定义1.1.11.

$$\begin{cases}\gamma_a(10)=[\gamma_a(9)\otimes\sigma_y,I_{16}\otimes\sigma_x],\Gamma^a(10)=[\gamma_a(9),i\varsigma],\gamma_1(10)\cdots\gamma_{10}(10)=iI_{16}\otimes\sigma_z=i\gamma_0(10)\\ C(10):=\gamma_2(10)\gamma_4(10)\gamma_5(10)\gamma_8(10)\gamma_9(10)=-\sigma_y\otimes I\otimes\sigma_y\otimes I\otimes\sigma_y,\bar{C}(10)=C^+(10)=C(10)\end{cases}$$

$$\begin{cases} C^T(10) = -C(10), [\gamma_a(10)C(10)]^T = \gamma_a(10)C(10) \\ [\gamma_{[a}(10)\gamma_{b]}(10)C(10)]^T = \gamma_{[a}(10)\gamma_{b]}(10)C(10) \\ [\gamma_{[a}(10)\gamma_b(10)\gamma_{c]}(10)C(10)]^T = -\gamma_{[a}(10)\gamma_b(10)\gamma_{c]}(10)C(10) \\ [\gamma_{[a}(10)\gamma_b(10)\gamma_c(10)\gamma_{d]}(10)C(10)]^T = -\gamma_{[a}(10)\gamma_b(10)\gamma_c(10)\gamma_{d]}(10)C(10) \\ [\gamma_{[a}(10)\gamma_b(10)\gamma_c(10)\gamma_d(10)\gamma_{e]}(10)C(10)]^T = \gamma_{[a}(10)\gamma_b(10)\gamma_c(10)\gamma_d(10)\gamma_{e]}(10)C(10) \\ [\gamma_{[a}(10)\gamma_b(10)\gamma_c(10)\gamma_d(10)\gamma_e(10)\gamma_{f]}(10)C(10)]^T = \gamma_{[a}(10)\gamma_b(10)\gamma_c(10)\gamma_d(10)\gamma_e(10)\gamma_{f]}(10)C(10) \\ [\gamma_{[a}(10)\gamma_b(10)\gamma_c(10)\gamma_d(10)\gamma_e(10)\gamma_f(10)\gamma_{g]}(10)C(10)]^T = -\gamma_{[a}(10)\gamma_b(10)\gamma_c(10)\gamma_d(10)\gamma_e(10)\gamma_f(10)\gamma_{g]}(10)C(10) \\ [\gamma_{[a}(10)\gamma_b(10)\gamma_c(10)\gamma_d(10)\gamma_e(10)\gamma_f(10)\gamma_g(10)\gamma_{h]}(10)C(10)]^T \\ = -\gamma_{[a}(10)\gamma_b(10)\gamma_c(10)\gamma_d(10)\gamma_e(10)\gamma_f(10)\gamma_g(10)\gamma_{h]}(10)C(10) \\ [\gamma_{[a}(10)\gamma_b(10)\gamma_c(10)\gamma_d(10)\gamma_e(10)\gamma_f(10)\gamma_g(10)\gamma_h(10)\gamma_{i]}(10)C(10)]^T \\ = \gamma_{[a}(10)\gamma_b(10)\gamma_c(10)\gamma_d(10)\gamma_e(10)\gamma_f(10)\gamma_g(10)\gamma_h(10)\gamma_{i]}(10)C(10) \\ [\gamma_{[a}(10)\gamma_b(10)\gamma_c(10)\gamma_d(10)\gamma_e(10)\gamma_f(10)\gamma_g(10)\gamma_h(10)\gamma_i(10)\gamma_{j]}(10)C(10)]^T \\ = \gamma_{[a}(10)\gamma_b(10)\gamma_c(10)\gamma_d(10)\gamma_e(10)\gamma_f(10)\gamma_g(10)\gamma_h(10)\gamma_i(10)\gamma_{j]}(10)C(10) \end{cases}$$

定义1.1.12. $\gamma_a(10) = [\sigma_x\otimes\sigma_y\otimes\sigma_y\otimes\sigma_y\otimes\sigma_y, \sigma_y\otimes\sigma_y\otimes\sigma_y\otimes\sigma_y\otimes\sigma_y, \sigma_z\otimes\sigma_y\otimes\sigma_y\otimes\sigma_y\otimes\sigma_y, I\otimes\sigma_x\otimes\sigma_y\otimes\sigma_y\otimes\sigma_y, I\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y\otimes\sigma_y\otimes\sigma_y, I_4\otimes\sigma_x\otimes\sigma_y\otimes\sigma_y, I_4\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y\otimes\sigma_y, I_8\otimes\sigma_x\otimes\sigma_y, I_8\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y, I_{16}\otimes\sigma_x]$

定义1.1.13.

$$\begin{cases} \gamma_a(11) = [\gamma_a(10), I_{16}\otimes\sigma_z], \gamma_1(11)\cdots\gamma_{11}(11) = i = i\gamma_0(11) \\ C(11) := \gamma_2(11)\gamma_4(11)\gamma_5(11)\gamma_8(11)\gamma_9(11) = -\sigma_y\otimes I\otimes\sigma_y\otimes I\otimes\sigma_y, C(11) = C(10), \bar{C}(11) = C^+(11) = C(11) \\ C^T(11) = -C(11), [\gamma_a(11)C(11)]^T = \gamma_a(11)C(11) \\ [\gamma_{[a}(11)\gamma_{b]}(11)C(11)]^T = \gamma_{[a}(11)\gamma_{b]}(11)C(11) \\ [\gamma_{[a}(11)\gamma_b(11)\gamma_{c]}(11)C(11)]^T = -\gamma_{[a}(11)\gamma_b(11)\gamma_{c]}(11)C(11) \\ [\gamma_{[a}(11)\gamma_b(11)\gamma_c(11)\gamma_{d]}(11)C(11)]^T = -\gamma_{[a}(11)\gamma_b(11)\gamma_c(11)\gamma_{d]}(11)C(11) \\ [\gamma_{[a}(11)\gamma_b(11)\gamma_c(11)\gamma_d(11)\gamma_{e]}(11)C(11)]^T = \gamma_{[a}(11)\gamma_b(11)\gamma_c(11)\gamma_d(11)\gamma_{e]}(11)C(11) \end{cases}$$

猜想1.1.1.

$$\begin{cases} \bar{C}(n) = C^+(n), C^+(n) = (-1)^{[\frac{n}{4}]}C(n), C^T(n) = (-1)^{[\frac{n+2}{4}]}C(n) \\ [\gamma_a(n)C(n)]^T = (-1)^{[\frac{n-1}{4}]}[\gamma_a(n)C(n)], [C^+(n)\gamma_a(n)]^T = (-1)^{[\frac{n-1}{4}]}[C^+(n)\gamma_a(n)] \end{cases}$$

自我评述：以上N+1维时空中的Dirac矩阵的选取不是唯一的，原则上有无穷种，做个表象变换即可，此时C矩阵也会发生改变，不再是原来的形式。

2 N+1=n维时空中二阶矩阵的反对称张量场展开 [49]

2.1 N+1=n偶数维时空中一般矩阵的反对称张量场展开

定义2.1.1.

$$X = \frac{1}{(0!)^2}F + \frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1} + \frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]} + \frac{1}{(3!)^2}F^{a_1a_2a_3}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3]} + \cdot\cdot + \frac{1}{(n!)^2}F^{a_1a_2a_3\cdot\cdot a_n}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_n]}$$

$$\begin{cases} F = 2^{-[\frac{n}{2}]}tr(X), F_{a_1} = 2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\gamma_{a_1}X) \\ F_{a_1a_2} = -2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\frac{1}{2!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}X), F_{a_1a_2a_3} = -2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\frac{1}{3!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3]}X) \\ F_{a_1a_2a_3a_4} = 2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\frac{1}{4!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4]}X), F_{a_1a_2a_3a_4a_5} = 2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\frac{1}{5!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]}X) \\ \cdots F_{a_1a_2\cdot\cdot a_n} = (-1)^{[(n\%4)/2]}2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\frac{1}{n!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_n]}X) \end{cases}$$

定义2.1.2.

$$\begin{cases} X_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(i!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_i}|_{\eta_\varsigma}(x)(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i]})_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} \\ F_{a_1\cdot\cdot a_i|\eta_\varsigma}(x)=(-1)^{[(i\%4)/2]}\frac{2^{-[\frac{n}{2}]}}{i!}(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i]})^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}X_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(x) \end{cases}$$

定义2.1.3.

$$\begin{cases} \sum_{i\in}^{even}\frac{1}{(i!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_i}|_{\eta_\varsigma}(x)(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i]}C)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(C^+\gamma_{[c_1}\cdot\cdot\gamma_{c_k]})|_{odd}^{\eta_\varsigma\mu_\varsigma}=0 \\ \sum_{i\in}^{even}\frac{1}{(i!)^2}(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i]}C)(C^+\gamma_{[c_1}\cdot\cdot\gamma_{c_k]})|_{odd}F^{a_1\cdot\cdot a_i}(x)=0 \end{cases}$$

定义2.1.4.

$$\begin{cases} X_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x)=\sum_{i,j=0}^{n}\frac{1}{(i!j!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_i|b_1\cdot\cdot b_j}(x)(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i]})_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_{[b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_j]})_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma} \\ F_{a_1\cdot\cdot a_i|b_1\cdot\cdot b_j}(x)=(-1)^{[(i\%4)/2]+[(j\%4)/2]}\frac{4^{-[\frac{n}{2}]}}{i!j!}(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i]})^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}(\gamma_{[b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_j]})^{\xi_\varsigma\eta_\varsigma}X_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x) \end{cases}$$

定义2.1.5.

$$\begin{cases} \sum_{i,j\in}^{even}\frac{1}{(i!j!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_i|b_1\cdot\cdot b_j}(x)(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i]}C)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(C^+\gamma_{[c_1}\cdot\cdot\gamma_{c_k]})|_{odd}^{\eta_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_{[b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_j]}C)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}=0 \\ \sum_{i,j\in}^{even}\frac{1}{(i!j!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_i|b_1\cdot\cdot b_j}(x)(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i]}C)(C^+\gamma_{[c_1}\cdot\cdot\gamma_{c_k]})|_{odd}(\gamma_{[b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_j]}C)=0 \end{cases}$$

2.2 N+1=n奇数维时空中一般矩阵的反对称张量场展开

定义2.2.1.

$$X=\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1a_2a_3}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3]}+\cdot\cdot+\frac{1}{\{[n/2]!\}^2}F^{a_1a_2\cdot\cdot a_{[n/2]}}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}]}$$

$$\begin{cases} F=2^{-[\frac{n}{2}]}tr(X),F_{a_1}=2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\gamma_{a_1}X) \\ F_{a_1a_2}=-2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\frac{1}{2!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}X),F_{a_1a_2a_3}=-2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\frac{1}{3!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3]}X) \\ F_{a_1a_2a_3a_4}=2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\frac{1}{4!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4]}X),F_{a_1a_2a_3a_4a_5}=2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\frac{1}{5!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]}X) \\ \cdot\cdot\cdot F_{a_1a_2\cdot\cdot a_{[n/2]}}=(-1)^{[([\frac{n}{2}]\%4)/2]}2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\frac{1}{n!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}]}X) \end{cases}$$

定义2.2.2.

$$\begin{cases} X_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(x)=\sum_{i=0}^{[n/2]}\frac{1}{(i!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_i}|_{\eta_\varsigma}(x)(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i]})_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma} \\ F_{a_1\cdot\cdot a_i|\eta_\varsigma}(x)=(-1)^{[(i\%4)/2]}\frac{2^{-[\frac{n}{2}]}}{i!}(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i]})^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}X_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(x) \end{cases}$$

定义2.2.3.

$$\begin{cases} \sum_{i\in}^{even}\frac{1}{(i!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_i}|_{\eta_\varsigma}(x)(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i]}C)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(C^+\gamma_{[c_1}\cdot\cdot\gamma_{c_k]})|_{odd}^{\eta_\varsigma\mu_\varsigma}=0 \\ \sum_{i\in}^{even}\frac{1}{(i!)^2}(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i]}C)(C^+\gamma_{[c_1}\cdot\cdot\gamma_{c_k]})|_{odd}F^{a_1\cdot\cdot a_i}(x)=0 \end{cases}$$

定义2.2.4.

$$\begin{cases} X_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x)=\sum_{i,j=0}^{[n/2]}\frac{1}{(i!j!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_i|b_1\cdot\cdot b_j}(x)(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i]})_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_{[b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_j]})_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma} \\ F_{a_1\cdot\cdot a_i|b_1\cdot\cdot b_j}(x)=(-1)^{[(i\%4)/2]+[(j\%4)/2]}\frac{4^{-[\frac{n}{2}]}}{i!j!}(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i]})^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}(\gamma_{[b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_j]})^{\xi_\varsigma\eta_\varsigma}X_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x) \end{cases}$$

定义2.2.5.

$$\begin{cases} \sum_{i,j\in}^{even}\frac{1}{(i!j!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_i|b_1\cdot\cdot b_j}(x)(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i]}C)_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(C^+\gamma_{[c_1}\cdot\cdot\gamma_{c_k]})|_{odd}^{\eta_\varsigma\mu_\varsigma}(\gamma_{[b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_j]}C)_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}=0 \\ \sum_{i,j\in}^{even}\frac{1}{(i!j!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_i|b_1\cdot\cdot b_j}(x)(\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_i]}C)(C^+\gamma_{[c_1}\cdot\cdot\gamma_{c_k]})|_{odd}(\gamma_{[b_1}\cdot\cdot\gamma_{b_j]}C)=0 \end{cases}$$

自我评述：二阶Dirac张量（自旋-1）可以自然分解为反对称张量集合，所以具体展示了自旋-1的理论必定是规范理论。

2.3 N+1=n偶数维时空中对称矩阵的展开

性质2.3.1. $X(2)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}\}C$

性质2.3.2. $X(4)=\{\frac{1}{1!}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}\}C$

性质2.3.3. $X(6)=\{\frac{1}{0!}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1a_2a_3}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1a_2a_3a_4}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4]}\}C$

性质2.3.4.
$X(8)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{3!}F^{a_1a_2a_3}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_4}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_4]}+\frac{1}{(7!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_7}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_7]}+\frac{1}{(8!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_8}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_8]}\}C$

性质2.3.5.
$X(10)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{2!}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}+\frac{1}{(6!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_6}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_6]}+\frac{1}{(9!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_9}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_9]}$
$+\frac{1}{(10!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{10}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{10}]}\}C$

2.4 N+1=n偶数维时空中反对称矩阵的展开

性质2.4.1. $X(2)=\frac{1}{(0!)^2}FC$

性质2.4.2. $X(4)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_4}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_4]}\}C$

性质2.4.3. $X(6)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}+\frac{1}{(6!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_6}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_6]}\}C$

性质2.4.4. $X(8)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}+\frac{1}{(6!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_6}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_6]}\}C$

性质2.4.5. $X(10)=$
$\{\frac{1}{1!}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_4}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_4]}+\frac{1}{(7!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_7}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_7]}+\frac{1}{(8!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_8}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_8]}\}C$

2.5 N+1=n奇数维时空中对称矩阵的展开

性质2.5.1. $X(3)=\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}C$

性质2.5.2. $X(5)=\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}C$

性质2.5.3. $X(7)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1a_2a_3}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3]}\}C$

性质2.5.4. $X(9)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{1!}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1a_2a_3a_4}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4]}\}C$

性质2.5.5. $X(11)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}\}C$

2.6 N+1=n奇数维时空中反对称矩阵的展开

性质2.6.1. $X(3)=\frac{1}{(0!)^2}FC$

性质2.6.2. $X(5)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}\}C$

性质2.6.3. $X(7)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^{a}\gamma_{a}+\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\}C$

性质2.6.4. $X(9)=\{\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}\}C$

性质2.6.5. $X(11)=\{\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_4}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_4]}\}C$

3 N+1维时空中基本反对称张量场的共同性质

3.1 N+1维时空中的无质量反对称张量场

定义3.1.1. $\partial^{[a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l]}=0,\partial_{a_1}A^{a_1\cdot\cdot a_l}=0;\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_l]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_l}=0$

3.2 N+1维时空中的有质量反对称张量场

定义3.2.1. $\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l]}+mF^{a_0\cdot\cdot a_l}=0,\partial_{a_0}F^{a_0\cdot\cdot a_l}+mA^{a_1\cdot\cdot a_l}=0$
$\Leftrightarrow\partial_{a_0}\partial^{a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l}-m^2A^{a_1\cdot\cdot a_l}=0,\partial_{a_1}A^{a_1\cdot\cdot a_l}=0,F^{a_0\cdot\cdot a_l}=-\frac{1}{l!m}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l]}$

3.3 N+1维时空中反对称张量场对偶基之间的关系

定理3.3.1. $\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]} = -(-1)^{(n-l-1)(n-l)/2} i^{-[n/2]}\varepsilon_{a_1\cdot\cdot a_n}\frac{1}{[(n-l)!]^2}\Gamma_0\gamma^{[a_{l+1}}\cdot\cdot\gamma^{a_n]}, \Gamma_0 := -i^{[n/2]}\gamma_1\cdot\cdot\gamma_n$

推论3.3.1. $\begin{cases}\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]} = -i^{[n/2]+l[l+(-1)^n]}\varepsilon_{a_1\cdot\cdot a_n}\frac{1}{[(n-l)!]^2}\Gamma_0\gamma^{[a_{l+1}}\cdot\cdot\gamma^{a_n]}, \Gamma_0 := -i^{[n/2]}\gamma_1\cdot\cdot\gamma_n, \Gamma_0|_{odd} = 1\\ \frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]} = -i^{[n/2]+l(l-1)}\varepsilon_{a_1\cdot\cdot a_n}\frac{1}{[(n-l)!]^2}\gamma^{[a_{l+1}}\cdot\cdot\gamma^{a_n]}\Gamma_0, \Gamma_0 := -i^{[n/2]}\gamma_1\cdot\cdot\gamma_n, \Gamma_0|_{odd} = 1\end{cases}$

3.4 N+1维时空中反对称张量场的等价对偶表示

引理3.4.1. $*A^{a_1\cdot\cdot a_l} = \frac{1}{(n-l)!}\varepsilon^{a_1a_2\cdot\cdot a_n}A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n} \Leftrightarrow A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n} = \frac{1}{l!}\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}*A^{a_1\cdot\cdot a_l} = (-1)^{Nl}**A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n}$

证明: $*A^{a_1\cdot\cdot a_l} = \frac{1}{(n-l)!}\varepsilon^{a_1a_2\cdot\cdot a_n}A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n}$
$\Rightarrow \varepsilon_{a_1\cdot\cdot a_l b_{l+1}\cdot\cdot b_n}*A^{a_1\cdot\cdot a_l}$
$= \varepsilon_{a_1\cdot\cdot a_l b_{l+1}\cdot\cdot b_n}\frac{1}{(n-l)!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_l a_{l+1}\cdot\cdot a_n}A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n}$
$= \frac{l!}{(n-l)!}\delta^{[a_{l+1}}_{b_{l+1}}\cdot\cdot\delta^{a_n]}_{b_n}A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n}$
$= \frac{l!}{(n-l)!}(n-l)!\delta^{b_{l+1}}_{a_{l+1}}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n}A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n}$
$= l!A_{b_{l+1}\cdot\cdot b_n}$
$\Rightarrow A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n} = \frac{1}{l!}\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}*A^{a_1\cdot\cdot a_l} = (-1)^{Nl}**A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n}$ □

证明: $A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n} = (-1)^{Nl}**A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n} = \frac{1}{l!}\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}*A^{a_1\cdot\cdot a_l}$
$\Rightarrow \varepsilon^{b_1\cdot\cdot b_l a_{l+1}\cdot\cdot a_n}A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n}$
$= \varepsilon^{b_1\cdot\cdot b_l a_{l+1}\cdot\cdot a_n}\frac{1}{l!}\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}*A^{a_1\cdot\cdot a_l}$
$= \frac{(n-l)!}{l!}\delta^{b_1}_{[a_1}\cdot\cdot\delta^{b_l}_{a_l]}*A^{a_1\cdot\cdot a_l}$
$= \frac{(n-l)!}{l!}l!\delta^{b_1}_{a_1}\cdot\cdot\delta^{b_l}_{a_l}*A^{a_1\cdot\cdot a_l}$
$= (n-l)!*A^{b_1\cdot\cdot b_l}$
$\Rightarrow *A^{a_1\cdot\cdot a_l} = \frac{1}{(n-l)!}\varepsilon^{a_1a_2\cdot\cdot a_n}A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n}$ □

定理3.4.1.
$$\begin{cases}\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l]} + mF^{a_0\cdot\cdot a_l} = 0\\ *A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n} = \frac{(-1)^{Nl}}{l!}\varepsilon_{a_1\cdot\cdot a_n}A^{a_1\cdot\cdot a_l}\\ *F_{a_{l+1}\cdot\cdot a_{n-1}} = \frac{(-1)^{N(l+1)}}{(l+1)!}\varepsilon_{a_0\cdot\cdot a_{n-1}}F^{a_0\cdot\cdot a_l}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\partial^{a_0}*A_{a_0a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}} + (-1)^{n-l-1}m*F_{a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}} = 0\\ A^{a_1\cdot\cdot a_l} = \frac{(-1)^{Nl}}{(n-l)!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_n}*A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n}\\ F^{a_0\cdot\cdot a_l} = \frac{(-1)^{N(l+1)}}{(n-l-1)!}\varepsilon^{a_0\cdot\cdot a_{n-1}}*F_{a_{l+1}\cdot\cdot a_{n-1}}\end{cases}$$

证明: $\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l]} + mF^{a_0\cdot\cdot a_l} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(l+1)!}\varepsilon_{a_0a_1a_2\cdot\cdot a_{n-1}}\{\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l]} + mF^{a_0\cdot\cdot a_l}\} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{l!}\varepsilon_{a_0a_1a_2\cdot\cdot a_{n-1}}\partial^{a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l} + \frac{1}{(l+1)!}\varepsilon_{a_0a_1a_2\cdot\cdot a_{n-1}}mF^{a_0\cdot\cdot a_l} = 0$
$\Leftrightarrow (-1)^{Nl-l}\partial^{a_0}*A_{a_0a_{l+1}\cdot\cdot a_{n-1}} + m(-1)^{N(l+1)}*F_{a_{l+1}\cdot\cdot a_{n-1}} = 0$
$\Leftrightarrow \partial^{a_0}*A_{a_0a_{l+1}\cdot\cdot a_{n-1}} - (-1)^{n-l}m*F_{a_{l+1}\cdot\cdot a_{n-1}} = 0$
$\Leftrightarrow \partial^{a_0}*A_{a_0a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}} + (-1)^{n-l-1}m*F_{a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}} = 0$ □

定理3.4.2.
$$\begin{cases}\partial_{a_0}F^{a_0\cdot\cdot a_l} + mA^{a_1\cdot\cdot a_l} = 0\\ *A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n} = \frac{(-1)^{Nl}}{l!}\varepsilon_{a_1\cdot\cdot a_n}A^{a_1\cdot\cdot a_l}\\ *F_{a_{l+1}\cdot\cdot a_{n-1}} = \frac{(-1)^{N(l+1)}}{(l+1)!}\varepsilon_{a_0\cdot\cdot a_{n-1}}F^{a_0\cdot\cdot a_l}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{(n-l-1)!}\partial_{[a_0}*F_{a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}]} + (-1)^{n-l-1}m*A_{a_0a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}} = 0\\ A^{a_1\cdot\cdot a_l} = \frac{(-1)^{Nl}}{(n-l)!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_n}*A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n}\\ F^{a_0\cdot\cdot a_l} = \frac{(-1)^{N(l+1)}}{(n-l-1)!}\varepsilon^{a_0\cdot\cdot a_{n-1}}*F_{a_{l+1}\cdot\cdot a_{n-1}}\end{cases}$$

证明: $\partial_{a_0}F^{a_0\cdot\cdot a_l} + mA^{a_1\cdot\cdot a_l} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{l!}\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}\{\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_l} + mA^{a_1\cdot\cdot a_l}\} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{l!}\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}\{\partial_{a_0}\frac{(-1)^{N(l+1)}}{(n-l-1)!}\varepsilon^{a_0a_1\cdot\cdot b_{l+1}b_{n-1}}*F_{b_{l+1}\cdot\cdot b_{n-1}} + mA^{a_1\cdot\cdot a_l}\} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{l!}\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}\partial_{a_0}\frac{(-1)^{Nl}}{(n-l-1)!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot b_{l+1}b_{n-1}a_0}*F_{b_{l+1}\cdot\cdot b_{n-1}} + (-1)^{Nl}m*A^{a_{l+1}\cdot\cdot a_n} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{(n-l-1)!}\delta^{b_{l+1}}_{[a_{l+1}}\cdot\cdot\delta^{b_{n-1}}_{a_{n-1}}\delta^{a_0}_{a_n]}\partial_{a_0}*F_{b_{l+1}\cdot\cdot b_{n-1}} + m*A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{(n-l-1)!}\partial_{[a_n}*F_{a_{l+1}\cdot\cdot a_{n-1}]} + m*A_{a_{l+1}\cdot\cdot a_n} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{(n-l-1)!}\partial_{[a_0}*F_{a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}]} + (-1)^{n-l-1}m*A_{a_0a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}} = 0$ □

推论3.4.1.

$$\begin{cases}\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l]}+mF^{a_0\cdot\cdot a_l}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0\cdot\cdot a_l}+mA^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_{a_0}*A^{a_0a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}}+(-1)^{n-l-1}m*F^{a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}}=0\\ \frac{1}{(n-l-1)!}\partial^{[a_0}*F^{a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}]}+(-1)^{n-l-1}m*A^{a_0a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}}=0\end{cases}$$

推论3.4.2.

$$\begin{cases}\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l]}+mF^{a_0\cdot\cdot a_l}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0\cdot\cdot a_l}+mA^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_{a_0}*A^{a_0a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}}+(-1)^{n-l-1}m*F^{a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0\cdot\cdot a_l}+mA^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\end{cases}$$

推论3.4.3.

$$\begin{cases}\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l]}+mF^{a_0\cdot\cdot a_l}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0\cdot\cdot a_l}+mA^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l]}+mF^{a_0\cdot\cdot a_l}=0\\ \frac{1}{(n-l-1)!}\partial^{[a_0}*F^{a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}]}+(-1)^{n-l-1}m*A^{a_0a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}}=0\end{cases}$$

推论3.4.4.

$$\begin{cases}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_l]}=0\\ \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_{a_1}*F^{a_1\cdot\cdot a_{n-l}}=0\\ \partial^{[a_0}*F^{a_1\cdot\cdot a_{n-l}]}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_{a_1}*F^{a_1\cdot\cdot a_{n-l}}=0\\ \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_l]}=0\\ \partial^{[a_0}*F^{a_1\cdot\cdot a_{n-l}]}=0\end{cases}$$

3.5 N+1=n偶维时空中B-W方程导出基本的反对称张量场

引理3.5.1. $(\gamma^a\partial_a+m)\{\frac{1}{(l!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_l}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}+\frac{1}{[(l+1)!]^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l+1}]}\}C=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_l]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}+mF^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\end{cases};1\le l\le n-1$$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)\{\frac{1}{(l!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_l}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}+\frac{1}{[(l+1)!]^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l+1}]}\}=0;1\le l\le n-1$

$\Leftrightarrow(\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{l!}F^{a_1\cdot\cdot a_l}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l}+\frac{1}{(l+1)!}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l+1}}\}=0$

$\Leftrightarrow\{\frac{1}{(l+1)!}\gamma_{[a_0}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}+\frac{1}{(l-1)!}(\delta_{a_0a_1}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}+\cdot\cdot)+\cdot\cdot\}\partial^{a_0}\frac{1}{l!}F^{a_1\cdot\cdot a_l}+m\frac{1}{(l+1)!}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l+1}}$

$+\{\frac{1}{(l+2)!}\gamma_{[a_0}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l+1}]}+\frac{1}{l!}(\delta_{a_0a_1}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{l+1}]}+\cdot\cdot)+\cdot\cdot\}\partial^{a_0}\frac{1}{(l+1)!}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}}+m\frac{1}{l!}F^{a_1\cdot\cdot a_l}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l}=0$

$\Leftrightarrow\{\frac{1}{(l+1)!}\gamma_{[a_0}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}+\frac{l}{(l-1)!}\delta_{a_0a_1}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\}\partial^{a_0}\frac{1}{l!}F^{a_1\cdot\cdot a_l}+\frac{1}{(l+1)!}m\frac{1}{(l+1)!}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l+1}]}$

$+\{\frac{1}{(l+2)!}\gamma_{[a_0}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l+1}]}+\frac{l+1}{l!}\delta_{a_0a_1}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{l+1}]}\}\partial^{a_0}\frac{1}{(l+1)!}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}}+\frac{1}{l!}m\frac{1}{l!}F^{a_1\cdot\cdot a_l}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{(l+1)!}\partial^{[a_0}\frac{1}{l!}F^{a_1\cdot\cdot a_l]}+m\frac{1}{(l+1)!}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}=0,\partial_{a_1}\frac{1}{l!}F^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\\ \partial^{[a_0}\frac{1}{(l+1)!}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}]}=0,\partial_{a_0}\frac{1}{(l+1)!}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}+\frac{1}{l+1}m\frac{1}{l!}F^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_l]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}+mF^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\end{cases};1\le l\le n-1\qquad\square$$

引理3.5.2. $(\gamma^a\partial_a+m)\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}\}C=0\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{0!}\partial^{a_0}F+mF^{a_0}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0}+mF=0\end{cases};l=0$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}\}C$

$\Leftrightarrow(\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{0!}F+\frac{1}{1!}F^{a_1}\gamma_{a_1}\}=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{1!}\gamma_{a_0}\partial^{a_0}\frac{1}{0!}F+m\frac{1}{1!}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\{\frac{1}{2!}\gamma_{[a_0}\gamma_{a_1]}+\frac{1}{0!}\delta_{a_0a_1}\}\partial^{a_0}\frac{1}{1!}F^{a_1}+m\frac{1}{0!}F=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{1!}\partial^{a_0}\frac{1}{0!}F+m\frac{1}{1!}F^{a_0}=0\\ \partial^{[a_0}\frac{1}{1!}F^{a_1]}=0,\partial_{a_0}\frac{1}{1!}F^{a_0}+\frac{1}{1}m\frac{1}{0!}F=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{0!}\partial^{a_0}F+mF^{a_0}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0}+mF=0\end{cases};l=0\qquad\square$$

引理3.5.3. $(\gamma^a\partial_a+m)\{\frac{1}{(n!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_n}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_n]}\}C=0\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_n]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_n}=0\\ mF^{a_1\cdot\cdot a_n}=0\end{cases};l=n$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)\{\frac{1}{(n!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_n}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_n]}\}C=0;l=n$

$\Leftrightarrow(\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{n!}F^{a_1\cdot\cdot a_n}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_n}\}=0$

$\Leftrightarrow\{\frac{1}{(n+1)!}\gamma_{[a_0}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_n]}+\frac{1}{(n-1)!}(\delta_{a_0a_1}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_n]}+\cdot\cdot)+\cdot\cdot\}\partial^{a_0}\frac{1}{n!}F^{a_1\cdot\cdot a_n}+m\frac{1}{n!}F^{a_1\cdot\cdot a_n}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_n}=0$

$\Leftrightarrow\{\frac{1}{(n+1)!}\gamma_{[a_0}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_n]}+\frac{n}{(n-1)!}\delta_{a_0a_1}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_n]}\}\partial^{a_0}\frac{1}{n!}F^{a_1\cdot\cdot a_n}+\frac{1}{n!}m\frac{1}{n!}F^{a_1\cdot\cdot a_n}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_n]}=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{(n+1)!}\partial^{[a_0}\frac{1}{n!}F^{a_1\cdot\cdot a_n]}=0,\partial_{a_1}\frac{1}{n!}F^{a_1\cdot\cdot a_n}=0\\ \frac{1}{n+1}m\frac{1}{n!}F^{a_1\cdot\cdot a_n}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_n]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_n}=0\\ mF^{a_1\cdot\cdot a_n}=0\end{cases};l=n \qquad \square$$

3.6 N+1=n偶维时空中基本反对称张量场的性质

推论3.6.1. $\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}=-i^{[n/2]+l(l+1)}\varepsilon_{a_1\cdot\cdot a_n}\frac{1}{[(n-l)!]^2}\Gamma_0\gamma^{[a_{l+1}}\cdot\cdot\gamma^{a_n]}$

定理3.6.1. $(\gamma^a\partial_a+m)\{\frac{1}{(l!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_l}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}+\frac{1}{[(l+1)!]^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l+1}]}\}C=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_l]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}+mF^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\end{cases}$$

推论3.6.2. $\gamma^a\partial_a\{\frac{1}{(l!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_l}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}+\frac{1}{[(l+1)!]^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l+1}]}\}C=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_l]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}=0\end{cases}$$

推论3.6.3. $(\gamma^a\partial_a+m)\{\frac{1}{(l!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_l}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}+\frac{1}{[(l+1)!]^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l+1}]}\}C=0,m\neq0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_l]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}+mF^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_l}-m^2F^{a_1\cdot\cdot a_l}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\\ F^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}=-\frac{1}{l!m}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_l]}\end{cases}$$

推论3.6.4.

$$\begin{cases}\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_l]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}+mF^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{(n-l-1)!}\partial^{[a_0}*F^{a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}]}+(-1)^{n-l-1}m*F^{a_0a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}}=0\\ \partial_{a_0}*F^{a_0a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}}+(-1)^{n-l-1}m*F^{a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}}=0\end{cases}$$

3.7 N+1=n奇数维时空中基本反对称张量场的性质

推论3.7.1. $\frac{1}{l!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}=-i^{[n/2]+l(l-1)}\varepsilon_{a_1\cdot\cdot a_n}\frac{1}{[(n-l)!]^2}\gamma^{[a_{l+1}}\cdot\cdot\gamma^{a_n]}$

推论3.7.2. $\frac{1}{([\frac{n}{2}]+1)!}\gamma_{[a_1}\cdot\gamma_{a_{[n/2]+1}]}=-(-i)^{[\frac{n}{2}]\%2}\varepsilon_{a_1\cdot\cdot a_n}\frac{1}{([\frac{n}{2}]!)^2}\gamma^{[a_{[n/2]+2}}\cdot\cdot\gamma^{a_n]}$

定理3.7.1. $(\gamma^a\partial_a+m)\{\frac{1}{(l!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_l}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}+\frac{1}{[(l+1)!]^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{l+1}]}\}C=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_l]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_{l+1}]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}+mF^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\end{cases};l\leq[\frac{n}{2}]-2$$

引理3.7.1. $(\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{([\frac{n}{2}]!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}]}\}C=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{[\frac{n}{2}]!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_n}\partial_{a_{[n/2]+1}}F_{a_{[n/2]+2}\cdot\cdot a_n}-i^{[\frac{n}{2}]\%2}mF^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}=0$

证明: $(\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{([\frac{n}{2}]!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}]}\}C=0$

$\Leftrightarrow(\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{([\frac{n}{2}]!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}]}\}=0$

$\Leftrightarrow(\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{F^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}}\}=0$

$\Leftrightarrow\gamma_{a_0}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}+mF^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}}=0$

$\Leftrightarrow\{\frac{1}{([n/2]+1)!}\gamma_{[a_0}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}]}+\frac{1}{([n/2]-1)!}(\delta_{a_0a_1}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}]}+\cdot\cdot)+\cdot\cdot\}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}+mF^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}}=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{([\frac{n}{2}]+1)!}\gamma_{[a_0}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}]}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}+\frac{[\frac{n}{2}]}{([\frac{n}{2}]-1)!}\delta_{a_0a_1}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}]}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}+mF^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}}=0$

$\Leftrightarrow -(-i)^{[\frac{n}{2}]\%2}\varepsilon^{a_0\cdot\cdot a_{n-1}}\frac{1}{([\frac{n}{2}]!)^2}\gamma_{[a_{[n/2]+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_{n-1}]}\partial_{a_0}F_{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}$

$+\frac{[\frac{n}{2}]}{([\frac{n}{2}]-1)!}\delta_{a_0a_1}\gamma_{[a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}]}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}+\frac{1}{[\frac{n}{2}]!}mF^{a_{[n/2]+1}\cdot\cdot a_{n-1}}\gamma_{[a_{[n/2]+1}}\cdot\cdot\gamma_{a_{n-1}]}=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{[\frac{n}{2}]!}\varepsilon^{a_0\cdot\cdot a_{n-1}}\partial_{a_0}F_{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}-i^{[\frac{n}{2}]\%2}mF^{a_{[n/2]+1}\cdot\cdot a_{n-1}}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{[\frac{n}{2}]!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_n}\partial_{a_{[n/2]+1}}F_{a_{[n/2]+2}\cdot\cdot a_n}-i^{[\frac{n}{2}]\%2}mF^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}=0$ □

推论3.7.3.

$\gamma_{a_0}\partial^{a_0}\{\frac{1}{([\frac{n}{2}]!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}]}\}C=0\Leftrightarrow\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_n}\partial_{a_{[n/2]+1}}F_{a_{[n/2]+2}\cdot\cdot a_n}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}=0$

推论3.7.4. $(\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{([\frac{n}{2}]!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{[n/2]}]}\}C=0,m\neq0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{[\frac{n}{2}]!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_n}\partial_{a_{[n/2]+1}}F_{a_{[n/2]+2}\cdot\cdot a_n}-i^{[\frac{n}{2}]\%2}mF^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}=0$

推论3.7.5. $\frac{1}{[\frac{n}{2}]!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_n}\partial_{a_{[n/2]+1}}F_{a_{[n/2]+2}\cdot\cdot a_n}-i^{[\frac{n}{2}]\%2}mF^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}=0$

$\Leftrightarrow \partial_{a_0}*F^{a_0\cdot\cdot a_{[n/2]}}-(-i)^{[\frac{n}{2}]\%2}mF^{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}}=0\Leftrightarrow\frac{1}{[\frac{n}{2}]!}\partial_{[a_0}F_{a_1\cdot\cdot a_{[n/2]}]}-i^{[\frac{n}{2}]\%2}m*F_{a_0\cdot\cdot a_{[n/2]}}=0$

4 N+1维时空中基本反对称张量场的协变对易规则

4.1 从对称和反对称B-W方程导出基本反对称张量场的对易规则

猜想4.1.1.

$$\begin{cases}\bar{C}(n)=C^+(n),C^+(n)=(-1)^{[\frac{n}{4}]}C(n),C^T(n)=(-1)^{[\frac{n+2}{4}]}C(n)\\ [\gamma_a(n)C(n)]^T=(-1)^{[\frac{n-1}{4}]}[\gamma_a(n)C(n)],[C^+(n)\gamma_a(n)]^T=(-1)^{[\frac{n-1}{4}]}[C^+(n)\gamma_a(n)]\\ \gamma_0^T(n)=\gamma_0(n),n\geq3;\gamma_0^T(2)=-\gamma_0(2)\\ C(n)\gamma_0^T(n)C^+(n)=(-1)^{\xi(n)}\gamma_0^T(n),C(n)\gamma_0^T(n)\gamma_a^T(n)C^+(n)=(-1)^{\xi(n)+\eta(n)}\gamma_0^T(n)\gamma_a(n)\\ (-1)^{\xi(n)}=(-1)^{\eta(n)}:=(-1)^{[\frac{n-1}{4}]}(-1)^{[\frac{n+2}{4}]},n\geq3\\ (-1)^{\xi(n)+1}=(-1)^{\eta(n)}:=(-1)^{[\frac{n-1}{4}]}(-1)^{[\frac{n+2}{4}]},n\geq3\end{cases}$$

定理4.1.1. $[F_{a_1a_2\cdot\cdot a_l}(x),F^+_{a_1'a_2'\cdot\cdot a_l'}(x')]=-i\frac{(-1)^{\delta_{2,n}}}{2^{[\frac{n}{2}]}}\begin{cases}\frac{1}{(l+1)!}\eta^{[a_1}_{[a_1'}\eta^{a_2}_{a_2'}\cdot\cdot\eta^{a_l}_{a_l'}\eta^{a]}_{a']}\partial_a\partial^{+a'}\Delta(x-x'),(-1)^{\eta(n)+l}=1\\ -\frac{1}{(l-1)!}\eta^{[a_1}_{[a_1'}\cdot\cdot\eta^{a_{l-1}}_{a_{l-1}'}\partial^{a_l]}\partial_{a_l']}\Delta(x-x'),(-1)^{\eta(n)+l}=-1\end{cases}$

证明: $[F_{a_1a_2\cdot\cdot a_l}(x),F^+_{a_1'a_2'\cdot\cdot a_l'}(x')]$

$=\frac{4^{-[\frac{n}{2}]}}{(l!)^2}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu\lambda}(C^+\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\cdot\cdot\gamma_{a_l']})^{*\mu'\lambda'}[\psi_{\lambda\mu}(x),\psi^+_{\lambda'\mu'}(x')]$

$=\frac{4^{-[\frac{n}{2}]}}{(l!)^2}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu\lambda}(C^+\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\cdot\cdot\gamma_{a_l']})^{+\lambda'\mu'}[\psi_{\lambda\mu}(x),\psi^+_{\lambda'\mu'}(x')]$

$=\frac{4^{-[\frac{n}{2}]}}{(l!)^2}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu\lambda}(\gamma_{[a_l'}\cdot\cdot\gamma_{a_2'}\gamma_{a_1']}C)^{\lambda'\mu'}[\psi_{\lambda\mu}(x),\psi^+_{\lambda'\mu'}(x')]$

$=\frac{4^{-[\frac{n}{2}]}}{(l!)^2}i^{l(l-1)}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu\lambda}(\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\cdot\cdot\gamma_{a_l']}C)^{\lambda'\mu'}[\psi_{\lambda\mu}(x),\psi^+_{\lambda'\mu'}(x')]$

$=i\frac{4^{-[\frac{n}{2}]}}{2(l!)^2}i^{l(l-1)}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu\lambda}(\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\cdot\cdot\gamma_{a_l']}C)^{\lambda'\mu'}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda\lambda'}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu\mu'}\Delta(x-x')$

$=i\frac{4^{-[\frac{n}{2}]}}{2(l!)^2}i^{l(l-1)}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu\lambda}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda\lambda'}(\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\cdot\cdot\gamma_{a_l']}C)^{\lambda'\mu'}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]^T_{\mu'\mu}\Delta(x-x')$

$=i\frac{4^{-[\frac{n}{2}]}}{2(l!)^2}i^{l(l-1)}tr\{C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\cdot\cdot\gamma_{a_l']}C[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]^T\}\Delta(x-x')$

$=i\frac{4^{-[\frac{n}{2}]}}{2(l!)^2}i^{l(l-1)}tr\{\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda\lambda'}\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\cdot\cdot\gamma_{a_l']}C[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]^TC^+\}\Delta(x-x')$

$=i\frac{4^{-[\frac{n}{2}]}}{2(l!)^2}i^{l(l-1)}(-1)^{\xi(n)}tr\{\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\cdot\cdot\gamma_{a_l']}[\gamma^0(m-(-1)^{\eta(n)}\gamma^b\partial_b)]\}\Delta(x-x')$

$=i\frac{4^{-[\frac{n}{2}]}}{2(l!)^2}i^{l(l-1)}(-1)^{\xi(n)}tr\{\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\cdot\cdot\gamma_{a_l']}[(m+(-1)^{\eta(n)}\gamma^b\partial_b^+)\gamma^0]\}\Delta(x-x')$

$=i\frac{4^{-[\frac{n}{2}]}}{2(l!)^2}i^{l(l-1)}(-1)^{\xi(n)}$

$\{tr(m^2\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\gamma^0\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\cdot\cdot\gamma_{a_l']}\gamma^0)-(-1)^{\eta(n)}tr(\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\gamma_a\gamma_0\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\cdot\cdot\gamma_{a_l']}\gamma_{a'}\gamma_0)\partial^a\partial^{+a'}\}\Delta(x-x')$
$=i\frac{4^{-[\frac{n}{2}]}}{2(l!)^2}i^{l(l-1)}(-1)^{\xi(n)}\{i^{l(l+1)}2^{[\frac{n}{2}]}(l!)^2m^2\frac{1}{l!}\eta^{[a_1}_{[a_1'}\eta^{a_2}_{a_2'}\cdot\cdot\eta^{a_l]}_{a_l']}$
$-(-1)^{\eta(n)}i^{(l+1)(l+2)}2^{[\frac{n}{2}]}(l!)^2\{\frac{1}{(l+1)!}\eta^{[a_1}_{[a_1'}\eta^{a_2}_{a_2'}\cdot\cdot\eta^{a_l}_{a_l'}\eta^{a]}_{a']}-\frac{1}{(l-1)!}\eta^{[a_1}_{[a_1'}\cdot\cdot\eta^{a_{l-1}}_{a_{l-1}'}\delta^{a_l]a}\delta_{a_l']a'}\}\partial_a\partial^{+a'}\}\Delta(x-x')$
$=i2^{-[\frac{n}{2}]-1}i^{2l^2}(-1)^{\xi(n)}$
$\{\frac{1}{l!}\eta^{[a_1}_{[a_1'}\eta^{a_2}_{a_2'}\cdot\cdot\eta^{a_l]}_{a_l']}m^2+(-1)^{\eta(n)+l}\{\frac{1}{(l+1)!}\eta^{[a_1}_{[a_1'}\eta^{a_2}_{a_2'}\cdot\cdot\eta^{a_l}_{a_l'}\eta^{a]}_{a']}-\frac{1}{(l-1)!}\eta^{[a_1}_{[a_1'}\cdot\cdot\eta^{a_{l-1}}_{a_{l-1}'}\delta^{a_l]a}\delta_{a_l']a'}\}\partial_a\partial^{+a'}\}\Delta(x-x')$
$=i2^{-[\frac{n}{2}]}(-1)^{\xi(n)+l}$
$\{\frac{1+(-1)^{\eta(n)+l}}{2}\frac{1}{l!}\eta^{[a_1}_{[a_1'}\eta^{a_2}_{a_2'}\cdot\cdot\eta^{a_l]}_{a_l']}m^2-(-1)^{\eta(n)+l}\frac{1}{(l-1)!}\eta^{[a_1}_{[a_1'}\cdot\cdot\eta^{a_{l-1}}_{a_{l-1}'}\partial^{a_l]}\partial_{a_l']}\}\Delta(x-x')$

$$=i\frac{(-1)^{\xi(n)+l}}{2^{[\frac{n}{2}]}}\begin{cases}\frac{1}{(l+1)!}\eta^{[a_1}_{[a_1'}\eta^{a_2}_{a_2'}\cdot\cdot\eta^{a_l}_{a_l'}\eta^{a]}_{a']}\partial_a\partial^{+a'}\Delta(x-x'),(-1)^{\eta(n)+l}=1\\ \frac{1}{(l-1)!}\eta^{[a_1}_{[a_1'}\cdot\cdot\eta^{a_{l-1}}_{a_{l-1}'}\partial^{a_l]}\partial_{a_l']}\Delta(x-x'),(-1)^{\eta(n)+l}=-1\end{cases}$$

$$=-i\frac{(-1)^{\delta_{2,n}}}{2^{[\frac{n}{2}]}}\begin{cases}\frac{1}{(l+1)!}\eta^{[a_1}_{[a_1'}\eta^{a_2}_{a_2'}\cdot\cdot\eta^{a_l}_{a_l'}\eta^{a]}_{a']}\partial_a\partial^{+a'}\Delta(x-x'),(-1)^{\eta(n)+l}=1\\ -\frac{1}{(l-1)!}\eta^{[a_1}_{[a_1'}\cdot\cdot\eta^{a_{l-1}}_{a_{l-1}'}\partial^{a_l]}\partial_{a_l']}\Delta(x-x'),(-1)^{\eta(n)+l}=-1\end{cases}\quad\square$$

4.2 N+1=n维时空中基本反对称张量场的通用对易规则猜想

定义4.2.1. $\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l]}+mF^{a_0\cdot\cdot a_l}=0,\partial_{a_0}F^{a_0\cdot\cdot a_l}+mA^{a_1\cdot\cdot a_l}=0$
$\Leftrightarrow\partial_{a_0}\partial^{a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l}-m^2A^{a_1\cdot\cdot a_l}=0,\partial_{a_1}A^{a_1\cdot\cdot a_l}=0,F^{a_0\cdot\cdot a_l}=-\frac{1}{(l+1)!m}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l]}$

推论4.2.1.

$$\begin{cases}\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}+mA^{a_1\cdot\cdot a_l}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{(n-l-1)!}\partial^{[a_0}*F^{a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}]}+(-1)^{n-l-1}m*A^{a_0a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}}=0\\ \partial_{a_0}*A^{a_0a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}}+(-1)^{n-l-1}m*F^{a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}}=0\end{cases}$$

引理4.2.1. $\frac{1}{(l+1)!}\eta_{[a_1\langle a_1'}\eta_{a_2a_2'}\cdot\cdot\eta_{a_{l-1}a_{l-1}'}\eta_{a_la_l'}\eta_{a_{l+1}]a_{l+1}'\rangle}\partial^{a_{l+1}}\partial^{+a_{l+1}'}\Delta(x-x')$
$=\{\frac{1}{l!}\eta_{[a_1\langle a_1'}\eta_{a_2a_2'}\cdot\cdot\eta_{a_{l-1}a_{l-1}'}\eta_{a_l]a_l'\rangle}m^2-\frac{1}{(l-1)!}\eta_{[a_1\langle a_1'}\eta_{a_2a_2'}\cdot\cdot\eta_{a_{l-1}a_{l-1}'}\partial_{a_l]}\partial^+_{a_l'\rangle}\}\Delta(x-x')$

猜想4.2.1.

$$\begin{cases}[A_{a_1\cdot\cdot a_l}(x),A^+_{a_1'\cdot\cdot a_l'}(x')]=i\frac{2^{-[\frac{n}{2}]}}{(l+1)!}\eta^{[a_1}_{[a_1'}\cdot\eta^{a_l}_{a_l'}\eta^{a]}_{a']}\partial_a\partial^{+a'}\Delta(x-x')\\ [F_{a_0a_1\cdot\cdot a_l}(x),F^+_{a_0'a_1'\cdot\cdot a_l'}(x')]=-i\frac{2^{-[\frac{n}{2}]}}{l!}\eta^{[a_0}_{[a_0'}\cdot\cdot\eta^{a_{l-1}}_{a_{l-1}'}\partial^{a_l]}\partial^+_{a_l']}\Delta(x-x')\end{cases}$$
$[\Leftrightarrow]$
$$\begin{cases}[*A_{a_0\cdot\cdot a_{n-l-1}}(x),*A^+_{a_0'\cdot\cdot a_{n-l-1}'}(x')]=-i\frac{2^{-[\frac{n}{2}]}}{(n-l-1)!}\eta^{[a_0}_{[a_0'}\cdot\cdot\eta^{a_{n-l-2}}_{a_{n-l-2}'}\partial^{a_{n-l-1}]}\partial_{a_{n-l-1}']}\Delta(x-x')\\ [*F_{a_1\cdot\cdot a_{n-l-1}}(x),*F^+_{a_1'\cdot\cdot a_{n-l-1}'}(x')]=i\frac{2^{-[\frac{n}{2}]}}{(n-l)!}\eta^{[a_1}_{[a_1'}\cdot\cdot\eta^{a_{n-l-1}}_{a_{n-l-1}'}\eta^{a]}_{a']}\partial_a\partial^{+a'}\Delta(x-x')\end{cases}$$

5 全耦合反对称张量场集

5.1 N+1=n偶维时空中的Bargmann-Wigner一般矢量场方程

定义5.1.1.

$$X=\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1a_2a_3}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3]}+\cdot\cdot+\frac{1}{(n!)^2}F^{a_1a_2a_3\cdot\cdot a_n}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\cdot\cdot\gamma_{a_n]}$$

$$\begin{cases}F=2^{-[\frac{n}{2}]}tr(X),F_{a_1}=2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\gamma_{a_1}X)\\ F_{a_1a_2}=-2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\frac{1}{2!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}X),F_{a_1a_2a_3}=-2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\frac{1}{3!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3]}X)\\ F_{a_1a_2a_3a_4}=2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\frac{1}{4!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4]}X),F_{a_1a_2a_3a_4a_5}=2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\frac{1}{5!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]}X)\\ \cdot\cdot\cdot F_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}=(-1)^{[(n\%4)/2]}2^{-[\frac{n}{2}]}tr(\frac{1}{n!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_n]}X)\end{cases}$$

定理5.1.1. $(\gamma_a\partial^a+m)\psi(x)=0\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}mF+\partial_{a_0}F^{a_0}=0,\frac{1}{0!}\partial^{a_1}F+mF^{a_1}+\partial_{a_0}F^{a_0a_1}=0,\frac{1}{1!}\partial^{[a_1}F^{a_2]}+mF^{a_1a_2}+\partial_{a_0}F^{a_0a_1a_2}=0\\ \frac{1}{2!}\partial^{[a_1}F^{a_2a_3]}+mF^{a_1a_2a_3}+\partial_{a_0}F^{a_0a_1a_2a_3}=0,\cdots,\frac{1}{(n-2)!}\partial^{[a_1}F^{a_2\cdot\cdot a_{n-1}]}+mF^{a_1\cdot\cdot a_{n-1}}+\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_{n-1}}=0\\ \frac{1}{(n-1)!}\partial^{[a_1}F^{a_2\cdot\cdot a_n]}+mF^{a_1\cdot\cdot a_n}=0,\frac{1}{n!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_n]}=0\end{cases}$$

证明:

$$(\gamma_a\partial^a+m)\psi(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}(\gamma_a\partial^a+m)\psi(x)=0\\ X=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\cdot\cdot+\frac{1}{(n!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_n}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_n]}\}C\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$(\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\cdot\cdot+\frac{1}{(n!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_n}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_n]}\}C=0$$

$\Leftrightarrow$

$$(\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{0!}F+\frac{1}{1!}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{2!}F^{a_1a_2}\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}+\cdot\cdot+\frac{1}{n!}F^{a_1\cdot\cdot a_n}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_n}\}=0$$

$\Leftrightarrow$

$$\partial^{a_0}\{\frac{1}{0!}\gamma_{a_0}F+\frac{1}{1!}F^{a_1}\gamma_{a_0}\gamma_{a_1}+\frac{1}{2!}F^{a_1a_2}\gamma_{a_0}\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}+\cdot\cdot+\frac{1}{n!}F^{a_1\cdot\cdot a_n}\gamma_{a_0}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_n}\}$$
$$+m\{\frac{1}{0!}F+\frac{1}{1!}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{2!}F^{a_1a_2}\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}+\cdot\cdot+\frac{1}{n!}F^{a_1\cdot\cdot a_n}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_n}\}=0$$

$\Leftrightarrow$

$$\{\frac{1}{0!}\gamma_{a_0}\partial^{a_0}F+\frac{1}{1!}\partial^{a_0}F^{a_1}(\frac{1}{2!}\gamma_{[a_0}\gamma_{a_1]}+\frac{1}{0!}\delta_{a_0a_1})+\frac{1}{2!}\partial^{a_0}F^{a_1a_2}(\frac{1}{3!}\gamma_{[a_0}\gamma_{a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{1!}\delta_{a_0[a_1}\gamma_{a_2]})$$
$$+\frac{1}{3!}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_3}(\frac{1}{4!}\gamma_{[a_0}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}+\frac{1}{2!}\delta_{a_0[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_3]})$$
$$+\frac{1}{4!}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_4}(\frac{1}{5!}\gamma_{[a_0}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_4]}+\frac{1}{3!}\delta_{a_0[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_4]})$$
$$+\cdot\cdot+\frac{1}{n!}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_n}(\frac{1}{(n+1)!}\gamma_{[a_0}\gamma_{a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_n]}+\frac{1}{(n-1)!}\delta_{a_0[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_n]})\}$$
$$+m\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_0}\gamma_{a_0}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_0a_1}\gamma_{[a_0}\gamma_{a_1]}+\cdot\cdot+\frac{1}{(n!)^2}F^{a_0\cdot\cdot a_{n-1}}\gamma_{[a_0}\cdot\cdot\gamma_{a_{n-1}]}\}=0$$

$\Leftrightarrow$

$$mF+\partial_{a_0}F^{a_0}=0$$
$$\frac{1}{0!}\partial^{a_1}F+mF^{a_1}+\partial_{a_0}F^{a_0a_1}=0$$
$$\frac{1}{1!}\partial^{[a_1}F^{a_2]}+mF^{a_1a_2}+\partial_{a_0}F^{a_0a_1a_2}=0$$
$$\frac{1}{2!}\partial^{[a_1}F^{a_2a_3]}+mF^{a_1a_2a_3}+\partial_{a_0}F^{a_0a_1a_2a_3}=0$$
$$\frac{1}{3!}\partial^{[a_1}F^{a_2\cdot\cdot a_4]}+mF^{a_1\cdot\cdot a_4}+\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_4}=0$$
$$\cdots$$
$$\frac{1}{(n-3)!}\partial^{[a_1}F^{a_2\cdot\cdot a_{n-2}]}+mF^{a_1\cdot\cdot a_{n-2}}+\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_{n-2}}=0$$
$$\frac{1}{(n-2)!}\partial^{[a_1}F^{a_2\cdot\cdot a_{n-1}]}+mF^{a_1\cdot\cdot a_{n-1}}+\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_{n-1}}=0$$
$$\frac{1}{(n-1)!}\partial^{[a_1}F^{a_2\cdot\cdot a_n]}+mF^{a_1\cdot\cdot a_n}=0$$
$$\frac{1}{n!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_n]}\equiv 0$$

□

推论5.1.1. $$\gamma_a\partial^a\psi(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_{a_0}F^{a_0}=0,\frac{1}{0!}\partial^{a_1}F+\partial_{a_0}F^{a_0a_1}=0,\frac{1}{1!}\partial^{[a_1}F^{a_2]}+\partial_{a_0}F^{a_0a_1a_2}=0\\ \frac{1}{2!}\partial^{[a_1}F^{a_2a_3]}+\partial_{a_0}F^{a_0a_1a_2a_3}=0,\cdots,\frac{1}{(n-2)!}\partial^{[a_1}F^{a_2\cdot\cdot a_{n-1}]}+\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_{n-1}}=0\\ \frac{1}{(n-1)!}\partial^{[a_1}F^{a_2\cdot\cdot a_n]}=0,\frac{1}{n!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_n]}=0\end{cases}$$

5.2 全耦合反对称张量场的对易规则

引理5.2.1. $$\frac{1}{(l+1)!}\eta_{[a_1\langle a'_1}\eta_{a_2a'_2}\cdot\cdot\eta_{a_{l-1}a'_{l-1}}\eta_{a_la'_l}\eta_{a_{l+1}]a'_{l+1}\rangle}\partial^{a_{l+1}}\partial^{+a'_{l+1}}\Delta(x-x')$$
$$=\{\frac{1}{l!}\eta_{[a_1\langle a'_1}\eta_{a_2a'_2}\cdot\cdot\eta_{a_{l-1}a'_{l-1}}\eta_{a_l]a'_l\rangle}m^2-\frac{1}{(l-1)!}\eta_{[a_1\langle a'_1}\eta_{a_2a'_2}\cdot\cdot\eta_{a_{l-1}a'_{l-1}}\partial_{a_l]}\partial^+_{a'_l\rangle}\}\Delta(x-x')$$

猜想5.2.1.

$$\begin{cases}[F^{a_1a_2\cdot\cdot a_l}(x),F^+_{a'_1a'_2\cdot\cdot a'_l}(x')]=-i\frac{(-1)^{\delta_{2,n}}}{2^{[\frac{n}{2}]+1}}\{\frac{1}{(l+1)!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\eta^{a_l}_{a'_l}\eta^{a]}_{a']}\partial_a\partial^{+a'}-\frac{1}{(l-1)!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_{l-1}}_{a'_{l-1}}\partial^{a_l]}\partial_{a'_l]}\}\Delta(x-x')\\ [F^{a_1a_2\cdot\cdot a_l}(x),F^+_{a'_1a'_2\cdot\cdot a'_l}(x')]=-i\frac{(-1)^{\delta_{2,n}}}{2^{[\frac{n}{2}]+1}}\{\frac{1}{l!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\eta^{a_l]}_{a'_l]}m^2-\frac{2}{(l-1)!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_{l-1}}_{a'_{l-1}}\partial^{a_l]}\partial_{a'_l]}\}\Delta(x-x')\end{cases}$$

5.3 N+1=n偶维时空中反对称张量场集基和B-W集基之间的关系

定义5.3.1.

$$\begin{cases} u(\vec{p},h)u^T(\vec{p},h') = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{(l!)^2} U_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h')\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]}C, v(\vec{p},h)v^T(\vec{p},h') = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{(l!)^2} V_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h')\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]}C \\ u(\vec{p},h)v^T(\vec{p},h') = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{(l!)^2} X_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h')\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]}C, v(\vec{p},h)u^T(\vec{p},h') = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{(l!)^2} Y_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h')\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]}C \\ h,h' = 1,\cdot\cdot,2^{[\frac{N-1}{2}]} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u(\vec{p},h)u^T(\vec{p},h') = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!} U_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h')\frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]}; h,h' = -2^{[\frac{N-1}{2}]},\cdot\cdot,-1,1,\cdot\cdot,2^{[\frac{N-1}{2}]} \\ U_{a_1a_2\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h') = (-1)^{[(l\%4)/2]}2^{-[\frac{n}{2}]}u^T(\vec{p},h')\frac{1}{l!}C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}u(\vec{p},h) \end{cases}$$

定义5.3.2.

$$\begin{cases} \frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]} = \frac{m^2}{E^2}\sum_{h,h'} W^{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h')u(\vec{p},h)u^T(\vec{p},h'); h,h' = -2^{[\frac{N-1}{2}]},\cdot\cdot,-1,1,\cdot\cdot,2^{[\frac{N-1}{2}]} \\ W^{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h') = u^+(\vec{p},h)\frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]}u^*(\vec{p},h') \end{cases}$$

推论5.3.1.

$$\begin{cases} u(\vec{p},h)u^T(\vec{p},h') = \frac{m^2}{E^2}\sum_{l=0}^{n}\sum_{h'',h'''} \frac{1}{l!}U_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h')W^{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h'',h''')u(\vec{p},h'')u^T(\vec{p},h''') \\ \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}U_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h')W^{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h') = 1 \end{cases}$$

推论5.3.2.

$$\begin{cases} \frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]} = \frac{m^2}{E^2}\sum_{l=0}^{n}\sum_{h,h'} \frac{1}{l!}W^{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h')U_{a'_1\cdot\cdot a'_l}(\vec{p};h,h')\frac{1}{l!}\gamma^{[a'_1}\cdot\cdot\gamma^{a'_l]} \\ \frac{m^2}{E^2}\sum_{h,h'} W^{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h')U_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h') = 1 \end{cases}$$

5.4 N+1维时空中无质量反对称张量场的对易规则猜想

猜想5.4.1. $\partial_{[a_0}F_{a_1\cdot\cdot a_l]} = 0, \partial^{a_1}F_{a_1\cdot\cdot a_l} = 0, F_{a_1\cdot\cdot a_l} = \frac{1}{l!}F_{[a_1\cdot\cdot a_l]}$

$\Rightarrow [F^{a_1a_2\cdot\cdot a_l}(x), F^+_{a'_1a'_2\cdot\cdot a'_l}(x')] = ? - i\frac{1}{2^{[\frac{n}{2}]}}\frac{1}{(l-1)!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_{l-1}}_{a'_{l-1}}\partial^{a_l]}\partial_{a'_l]}\Delta(x-x')$

6 偶数维时空中的对称与反对称B-W矢量场方程

6.1 二维时空中的对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理6.1.1. $\begin{cases} (\gamma^a\partial_a + m)X(2) = 0 \\ X(2) = \{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a + \frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\}C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial^{[a}F^{b]} + mF^{ab} = 0, \partial_aF^a = 0 \\ \partial^{[a}F^{bc]} = 0, \partial_aF^{ab} + mF^b = 0 \end{cases}$

证明: $(\gamma^a\partial_a + m)X(2) = 0, X(2) = \{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a + \frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\}C$

$\Leftrightarrow (\gamma_a\partial^a + m)\{\frac{1}{(1!)^2}F^b\gamma_b + \frac{1}{(2!)^2}F^{bc}\gamma_{[b}\gamma_{c]}\}C = 0$

$\Leftrightarrow (\gamma_a\partial^a + m)\{\frac{1}{1!}F^b\gamma_b + \frac{1}{2!}F^{bc}\gamma_b\gamma_c\} = 0$

$\Leftrightarrow \gamma_a\gamma_b\partial^a\frac{1}{1!}F^b + \gamma_a\gamma_b\gamma_c\partial^a\frac{1}{2!}F^{bc} + m\frac{1}{1!}F^b\gamma_b + m\frac{1}{2!}F^{bc}\gamma_b\gamma_c = 0$

$\Leftrightarrow \{\frac{1}{2!}\gamma_{[a}\gamma_{b]} + \delta_{ab}\}\partial^a\frac{1}{1!}F^b + m\frac{1}{2!}F^{bc}\gamma_b\gamma_c + \{\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]} + (\delta_{a[b}\gamma_{c]} + \gamma_a\delta_{bc})\}\partial^a\frac{1}{2!}F^{bc} + m\frac{1}{1!}F^b\gamma_b = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2!}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\partial^a\frac{1}{1!}F^b + \delta_{ab}\partial^a\frac{1}{1!}F^b + m\frac{1}{2!}F^{bc}\gamma_b\gamma_c + \frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}\partial^a\frac{1}{2!}F^{bc} + \frac{2}{1!}\delta_{ab}\gamma_c\partial^a\frac{1}{2!}F^{bc} + m\frac{1}{1!}F^b\gamma_b = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2!}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\partial^a\frac{1}{1!}F^b + \partial_a\frac{1}{1!}F^a + \frac{1}{2!}m\frac{1}{2!}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]} + \frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}\partial^a\frac{1}{2!}F^{bc} + \frac{2}{1!}\gamma_b\partial_a\frac{1}{2!}F^{ab} + m\frac{1}{1!}F^b\gamma_b = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2!}\partial^{[a}\frac{1}{1!}F^{b]} + m\frac{1}{2!}F^{ab} = 0, \partial_a\frac{1}{1!}F^a = 0 \\ \partial^{[a}\frac{1}{2!}F^{bc]} = 0, \partial_a\frac{1}{2!}F^{ab} + \frac{1}{2}m\frac{1}{1!}F^b = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial^{[a}F^{b]} + mF^{ab} = 0, \partial_aF^a = 0 \\ \partial^{[a}F^{bc]} = 0, \partial_aF^{ab} + mF^b = 0 \end{cases}$ □

推论6.1.1. $\begin{cases}\gamma^a\partial_a X(2)=0\\ X(2)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a+\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\}C\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\partial^{[a}F^{b]}=0,\partial_a F^a=0\\ \partial^{[a}F^{bc]}=0,\partial_a F^{ab}=0\end{cases}$

推论6.1.2. $(\gamma^a\partial_a+m)X(2)=0,X(2)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a+\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\}C,m\neq 0$
$\Leftrightarrow \partial_a F^{ab}+mF^b=0,\partial^{[a}F^{b]}+mF^{ab}=0 \Leftrightarrow \partial_b\partial^b F^a-m^2F^a=0,\partial_a F^a=0,F^{ab}=-\frac{1}{m}\partial^{[a}F^{b]}$

定理6.1.1. $\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(2)=0\\ X(2)=X^T(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\partial_b\partial^b F^a-m^2F^a=0,\partial_a F^a=0\\ X(2)=\{\frac{1}{1!}\gamma_a+\frac{1}{2!m}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\partial^b\}CF^a\end{cases}$

推论6.1.3. $\begin{cases}\partial^{[a}F^{b]}+mF^{ab}=0\\ \partial_a F^{ab}+mF^b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\partial^a{*F}+m{*F^a}=0\\ \partial_a{*F^a}+m{*F}=0\end{cases}$

6.2 二维时空中的反对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理6.2.1. $(\gamma^a\partial_a+m)X(2)=0,X(2)=\frac{1}{(0!)^2}FC \Leftrightarrow \partial^a F=0,mF=0$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)X(2)=0,X(2)=\frac{1}{(0!)^2}FC$
$\Leftrightarrow (\gamma_a\partial^a+m)\frac{1}{(0!)^2}FC=0$
$\Leftrightarrow (\gamma_a\partial^a+m)\frac{1}{0!}F=0$
$\Leftrightarrow \partial^a F=0,mF=0$ □

推论6.2.1. $\gamma^a\partial_a X(2)=0,X(2)=\frac{1}{(0!)^2}FC \Leftrightarrow \partial^a F=0$

推论6.2.2. $(\gamma^a\partial_a+m)X(2)=0,X(2)=\frac{1}{(0!)^2}FC,m\neq 0 \Leftrightarrow F=0$

定理6.2.1. $(\gamma^a\partial_a+m)X(2)=0,X(2)=-X^T(2) \Leftrightarrow F=0$

推论6.2.3. $F=0 \Leftrightarrow {*F^{ab}}=0$

6.3 四维时空中的对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理6.3.1. $\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(4)=0\\ X(4)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a+\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\}C\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\partial^{[a}F^{b]}+mF^{ab}=0,\partial_a F^a=0\\ \partial^{[a}F^{bc]}=0,\partial_a F^{ab}+mF^b=0\end{cases}$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)X(4)=0,X(4)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a+\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\}C$
$\Leftrightarrow (\gamma_a\partial^a+m)\{\frac{1}{(1!)^2}F^b\gamma_b+\frac{1}{(2!)^2}F^{bc}\gamma_{[b}\gamma_{c]}\}C=0$
$\Leftrightarrow (\gamma_a\partial^a+m)\{\frac{1}{1!}F^b\gamma_b+\frac{1}{2!}F^{bc}\gamma_b\gamma_c\}=0$
$\Leftrightarrow \gamma_a\gamma_b\partial^a\frac{1}{1!}F^b+\gamma_a\gamma_b\gamma_c\partial^a\frac{1}{2!}F^{bc}+m\frac{1}{1!}F^b\gamma_b+m\frac{1}{2!}F^{bc}\gamma_b\gamma_c=0$
$\Leftrightarrow \{\frac{1}{2!}\gamma_{[a}\gamma_{b]}+\delta_{ab}\}\partial^a\frac{1}{1!}F^b+m\frac{1}{2!}F^{bc}\gamma_b\gamma_c+\{\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}+(\delta_{a[b}\gamma_{c]}+\gamma_a\delta_{bc})\}\partial^a\frac{1}{2!}F^{bc}+m\frac{1}{1!}F^b\gamma_b=0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2!}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\partial^a\frac{1}{1!}F^b+\delta_{ab}\partial^a\frac{1}{1!}F^b+m\frac{1}{2!}F^{bc}\gamma_b\gamma_c+\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}\partial^a\frac{1}{2!}F^{bc}+\frac{2}{1!}\delta_{ab}\gamma_c\partial^a\frac{1}{2!}F^{bc}+m\frac{1}{1!}F^b\gamma_b=0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2!}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\partial^a\frac{1}{1!}F^b+\partial_a\frac{1}{1!}F^a+\frac{1}{2!}m\frac{1}{2!}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}+\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}\partial^a\frac{1}{2!}F^{bc}+\frac{2}{1!}\gamma_b\partial_a\frac{1}{2!}F^{ab}+m\frac{1}{1!}F^b\gamma_b=0$
$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2!}\partial^{[a}\frac{1}{1!}F^{b]}+m\frac{1}{2!}F^{ab}=0,\partial_a\frac{1}{1!}F^a=0\\ \partial^{[a}\frac{1}{2!}F^{bc]}=0,\partial_a\frac{1}{2!}F^{ab}+\frac{1}{2}m\frac{1}{1!}F^b=0\end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases}\partial^{[a}F^{b]}+mF^{ab}=0,\partial_a F^a=0\\ \partial^{[a}F^{bc]}=0,\partial_a F^{ab}+mF^b=0\end{cases}$ □

推论6.3.1. $\begin{cases}\gamma^a\partial_a X(4)=0\\ X(4)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a+\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\}C\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\partial^{[a}F^{b]}=0,\partial_a F^a=0\\ \partial^{[a}F^{bc]}=0,\partial_a F^{ab}=0\end{cases}$

推论6.3.2. $(\gamma^a\partial_a+m)X(4)=0,X(4)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a+\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\}C,m\neq 0$
$\Leftrightarrow \partial_a F^{ab}+mF^b=0,\partial^{[a}F^{b]}+mF^{ab}=0 \Leftrightarrow \partial_b\partial^b F^a-m^2F^a=0,\partial_a F^a=0,F^{ab}=-\frac{1}{m}\partial^{[a}F^{b]}$

定理6.3.1. $\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(4)=0\\ X(4)=X^T(4)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\partial_b\partial^b F^a-m^2F^a=0,\partial_aF^a=0\\ X(4)=\{\frac{1}{1!}\gamma_a+\frac{1}{2!m}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\partial^b\}CF^a\\ =\{-\frac{1}{2!}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2]}+\frac{1}{3!m}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3]}\partial_{a_3}\}\Gamma_0C\frac{1}{2!}{*F}_{a_1a_2}\end{cases}$

推论6.3.3. $\begin{cases}\partial^{[a}F^{b]}+mF^{ab}=0\\ \partial_aF^{ab}+mF^b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2!}\partial^{[a}{*F}^{bc]}+m{*F}^{abc}=0\\ \partial_a{*F}^{abc}+m{*F}^{bc}=0\end{cases}$

引理6.3.2.

$\frac{1}{2!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}=-\varepsilon_{a_1a_2a_3a_4}\frac{1}{(2!)^2}\Gamma_0\gamma^{[a_3}\gamma^{a_4]}=-\varepsilon_{a_1a_2a_3a_4}\frac{1}{(2!)^2}\gamma^{[a_3}\gamma^{a_4]}\Gamma_0$
$\frac{1}{1!}\gamma_{a_1}=-\varepsilon_{a_1a_2a_3a_4}\frac{1}{(3!)^2}\Gamma_0\gamma^{[a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4]}=\varepsilon_{a_1a_2a_3a_4}\frac{1}{(3!)^2}\gamma^{[a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4]}\Gamma_0$

推论6.3.4. $X(4)=\frac{1}{2!}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2]}C\frac{1}{2!}F_{a_1a_2}+\frac{1}{3!m}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3]}\partial_{a_3}\Gamma_0C\frac{1}{2!}{*F}_{a_1a_2}$

证明:

$X(4)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a+\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\}C$
$=\{\frac{1}{1!}F^{a_1}\varepsilon_{a_1a_2a_3a_4}\frac{1}{(3!)^2}\gamma^{[a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4]}-\frac{1}{2!}F^{a_1a_2}\varepsilon_{a_1a_2a_3a_4}\frac{1}{(2!)^2}\gamma^{[a_3}\gamma^{a_4]}\}\Gamma_0C$
$=\{-\frac{1}{(3!)^2}{*F}_{a_2a_3a_4}\gamma^{[a_2}\gamma^{a_3}\gamma^{a_4]}-\frac{1}{(2!)^2}{*F}_{a_3a_4}\gamma^{[a_3}\gamma^{a_4]}\}\Gamma_0C$
$=\{-\frac{1}{(2!)^2}{*F}_{a_1a_2}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2]}-\frac{1}{(3!)^2}{*F}_{a_1a_2a_3}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3]}\}\Gamma_0C$
$=\{-\frac{1}{2!}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2]}+\frac{1}{3!m}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3]}\partial_{a_3}\Gamma_0C\frac{1}{2!}{*F}_{a_1a_2}$
$=\frac{1}{2!}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2]}C\frac{1}{2!}F_{a_1a_2}+\frac{1}{3!m}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3]}\partial_{a_3}\Gamma_0C\frac{1}{2!}{*F}_{a_1a_2}$
$=\{\frac{1}{(2!)^2}\gamma^{[a_3}\gamma^{a_4]}+\frac{1}{3!m}\gamma^{[a_1}\gamma^{a_2}\gamma^{a_3']}\partial_{a_3'}\Gamma_0C\frac{1}{(2!)^2}\varepsilon_{a_1a_2a_3a_4}\}F^{a_3a_4}$ □

定义6.3.1.

$$\begin{cases}\gamma_a(4)=[\gamma_a(3)\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_x]=(\sigma\otimes\sigma_y,I\otimes\sigma_x),\Gamma^a(4)=[\gamma_a(3),i\varsigma]\\ C(4):=\gamma_2(4)\gamma_4(4)=-i\sigma_y\otimes\sigma_z,\gamma_1(4)\cdots\gamma_4(4)=I\otimes\sigma_z=\gamma_0(4)\\ [\gamma_a(4)C(4)]^T=\gamma_a(4)C(4),\{\gamma_{[a}(4)\gamma_{b]}(4)C(4)\}^T=\gamma_{[a}(4)\gamma_{b]}(4)C(4)\\ C^T(4)=-C(4),\{\gamma_{[a}(4)\gamma_b(4)\gamma_{c]}(4)C(4)\}^T=-\gamma_{[a}(4)\gamma_b(4)\gamma_{c]}(4)C(4)\\ \{\gamma_{[a}(4)\gamma_b(4)\gamma_c(4)\gamma_{d]}(4)C(4)\}^T=-\gamma_{[a}(4)\gamma_b(4)\gamma_c(4)\gamma_{d]}(4)C(4)\end{cases}$$

证明: $[F_{a_1}(x),F^+_{a_1'}(x')]$
$=\frac{2^{-4}}{(1!)^2}\bar{C}^{\lambda\eta}(\gamma_{a_1})_\eta{}^\mu(\gamma_{a_1'})^{\mu'}{}_{\eta'}\bar{C}^{+\eta'\lambda'}[\psi_{\lambda\mu}(x),\psi^+_{\lambda'\mu'}(x')]$
$=\frac{2^{-4}}{(1!)^2}(\bar{C}\gamma_{a_1})^{\lambda\mu}(\gamma_{a_1'}C)^{\lambda'\mu'}\frac{i}{2^3}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda(\lambda'}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu\}\mu')}\Delta(x-x')$
$=i\frac{2^{-5}}{(1!)^2}(\bar{C}\gamma_{a_1})^{\lambda\mu}(\gamma_{a_1'}C)^{\lambda'\mu'}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda\lambda'}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu\mu'}\Delta(x-x')$
$=i\frac{2^{-5}}{(1!)^2}(\bar{C}\gamma_{a_1})^{\mu\lambda}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda\lambda'}(\gamma_{a_1'}C)^{\lambda'\mu'}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]^T_{\mu'\mu}\Delta(x-x')$
$=i\frac{2^{-5}}{(1!)^2}tr\{(\bar{C}\gamma_{a_1})[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0](\gamma_{a_1'}C)[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]^T\}\Delta(x-x')$
$=i\frac{2^{-5}}{(1!)^2}tr\{\gamma_{a_1}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]\gamma_{a_1'}C[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]^T\bar{C}\}\Delta(x-x')$
$=-i\frac{2^{-5}}{(1!)^2}tr\{\gamma_{a_1}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]\gamma_{a_1'}[\gamma^0(m+\gamma^b\partial_b)]\}\Delta(x-x')$
$=-i\frac{2^{-5}}{(1!)^2}tr\{\gamma_{a_1}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]\gamma_{a_1'}[(m-\gamma^b\partial_b^+)\gamma^0]\}\Delta(x-x')$
$=-i\frac{2^{-5}}{(1!)^2}\{m^2tr(\gamma_{a_1}\gamma^0\gamma_{a_1'}\gamma^0)+tr(\gamma_{a_1}\gamma^a\partial_a\gamma^0\gamma_{a_1'}\gamma^b\partial_b^+\gamma^0)\}\Delta(x-x')$
$=\frac{i}{4}(m^2\eta_{a_1a_1'}-\partial_{a_1}\partial^+_{a_1'})\Delta(x-x')$ □

6.4 四维时空中的反对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理6.4.1.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(4)=0\\ X(4)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{abc}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{abcd}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}\}C\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}F=0\\ \frac{1}{3!}\partial^{[a}F^{bcd]}+mF^{abcd}=0,\partial_aF^{abc}=0\\ \partial^{[a}F^{bcde]}=0,\partial_aF^{abcd}+mF^{bcd}=0\end{cases}$$

推论6.4.1.

$$\begin{cases}\gamma^a\partial_a X(4)=0\\ X(4)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{abc}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{abcd}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}\}C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}F=0\\ \partial^{[a}F^{bcd]}=0,\partial_aF^{abc}=0\\ \partial^{[a}F^{bcde]}=0,\partial_aF^{abcd}=0\end{cases}$$

推论6.4.2. $(\gamma^a\partial_a+m)X(4)=0,X(4)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{abc}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{abcd}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}\}C,m\neq 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}F=0\\ \frac{1}{3!}\partial^{[a}F^{bcd]}+mF^{abcd}=0\\ \partial_aF^{abcd}+mF^{bcd}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}F=0,\partial_aF^{abc}=0\\ \partial_a\partial^aF^{bcd}-m^2F^{bcd}=0\\ F^{abcd}=-\frac{1}{3!m}\partial^{[a}F^{bcd]}\end{cases}$$

定理6.4.1. $\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(4)=0\\ X(4)=-X^T(4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_d\partial^dF^{abc}-m^2F^{abc}=0,\partial_aF^{abc}=0\\ X(4)=\{\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}+\frac{1}{4!m}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}\partial^d\}C\frac{1}{3!}F^{abc}\end{cases}$

推论6.4.3. $\begin{cases}\frac{1}{3!}\partial^{[a}F^{bcd]}+mF^{abcd}=0\\ \partial_aF^{abcd}+mF^{bcd}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{0!}\partial^a{*F}+m{*F^a}=0\\ \partial_a{*F^a}+m{*F}=0\end{cases}$

6.5 六维时空中的对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理6.5.1.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(6)=0\\ X(6)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{abc}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{abcd}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}\}C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}F=0\\ \frac{1}{3!}\partial^{[a}F^{bcd]}+mF^{abcd}=0,\partial_aF^{abc}=0\\ \partial^{[a}F^{bcde]}=0,\partial_aF^{abcd}+mF^{bcd}=0\end{cases}$$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)X(6)=0,X(6)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{abc}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{abcd}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}\}C$

$\Leftrightarrow(\gamma_a\partial^a+m)\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{bcd}\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_{d]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{bcde}\gamma_{[b}\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}\}C=0$

$\Leftrightarrow(\gamma_a\partial^a+m)\{\frac{1}{3!}F^{bcd}\gamma_b\gamma_c\gamma_d+\frac{1}{4!}F^{bcde}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\}=0,F=0$

$\Leftrightarrow\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d\partial^a\frac{1}{3!}F^{bcd}+\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\partial^a\frac{1}{4!}F^{bcde}+m\frac{1}{3!}F^{bcd}\gamma_b\gamma_c\gamma_d+m\frac{1}{4!}F^{bcde}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e=0$

$\Leftrightarrow\{\frac{1}{4!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}+\frac{1}{2!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]}+\delta_{ac}\gamma_{[d}\gamma_{b]}+\delta_{ad}\gamma_{[b}\gamma_{c]}+\gamma_{[a}\gamma_{b]}\delta_{cd}+\gamma_{[c}\gamma_{a]}\delta_{bd}+\gamma_{[a}\gamma_{d]}\delta_{bc})$

$+(\delta_{ab}\delta_{cd}-\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc})\}\partial^a\frac{1}{3!}F^{bcd}+\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\partial^a\frac{1}{4!}F^{bcde}+m\frac{1}{3!}F^{bcd}\gamma_b\gamma_c\gamma_d+m\frac{1}{4!}F^{bcde}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e=0$

$\Leftrightarrow\{\frac{1}{4!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}+3\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_{d]}\}\partial^a\frac{1}{3!}F^{bcd}+\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\partial^a\frac{1}{4!}F^{bcde}+m\frac{1}{3!}F^{bcd}\gamma_b\gamma_c\gamma_d+m\frac{1}{4!}F^{bcde}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e=0$

$\Leftrightarrow\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_e\partial^a\frac{1}{4!}F^{bcde}+m\frac{1}{3!}F^{bcd}\gamma_b\gamma_c\gamma_d=0,\partial_a\frac{1}{3!}F^{abc}=0,\frac{1}{4!}\partial^{[a}\frac{1}{3!}F^{bcd]}+m\frac{1}{4!}F^{abcd}=0$

$\Leftrightarrow\{\frac{1}{5!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}+\frac{1}{3!}(\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_{e]}+\cdot\cdot)+\frac{1}{1!}(\delta_{ab}\delta_{cd}\gamma_e+\cdot\cdot)\}\partial^a\frac{1}{4!}F^{bcde}+m\frac{1}{3!}F^{bcd}\gamma_b\gamma_c\gamma_d=0$

$\Leftrightarrow\{\frac{1}{5!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_d\gamma_{e]}+\frac{4}{3!}\delta_{ab}\gamma_{[c}\gamma_d\gamma_{e]}\}\partial^a\frac{1}{4!}F^{bcde}+m\frac{1}{3!}F^{bcd}\gamma_b\gamma_c\gamma_d=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{4!}\partial^{[a}\frac{1}{3!}F^{bcd]}+m\frac{1}{4!}F^{abcd}=0,\partial_a\frac{1}{3!}F^{abc}=0\\ \partial^{[a}\frac{1}{4!}F^{bcde]}=0,\partial_a\frac{1}{4!}F^{abcd}+\frac{1}{4}m\frac{1}{3!}F^{bcd}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{3!}\partial^{[a}F^{bcd]}+mF^{abcd}=0,\partial_aF^{abc}=0\\ \partial^{[a}F^{bcde]}=0,\partial_aF^{abcd}+mF^{bcd}=0\end{cases}$ □

推论6.5.1. $\begin{cases}\gamma^a\partial_aX(6)=0\\ X(6)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{abc}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{abcd}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}\}C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}F=0\\ \partial^{[a}F^{bcd]}=0,\partial_aF^{abc}=0\\ \partial^{[a}F^{bcde]}=0,\partial_aF^{abcd}=0\end{cases}$

推论6.5.2. $(\gamma^a\partial_a+m)X(6)=0,X(6)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{abc}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{abcd}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}\}C,m\neq 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}F=0\\ \frac{1}{3!}\partial^{[a}F^{bcd]}+mF^{abcd}=0\\ \partial_aF^{abcd}+mF^{bcd}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}F=0,\partial_aF^{abc}=0\\ \partial_a\partial^aF^{bcd}-m^2F^{bcd}=0\\ F^{abcd}=-\frac{1}{3!m}\partial^{[a}F^{bcd]}\end{cases}$$

定理6.5.1. $\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(6)=0\\ X(6)=X^T(6)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\partial_d\partial^d F^{abc}-m^2F^{abc}=0,\partial_aF^{abc}=0\\ X(6)=\{\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}+\frac{1}{4!m}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}\partial^d\}C\frac{1}{3!}F^{abc}\end{cases}$

推论6.5.3. $\begin{cases}\frac{1}{3!}\partial^{[a}F^{bcd]}+mF^{abcd}=0\\ \partial_aF^{abcd}+mF^{bcd}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2!}\partial^{[a}*F^{bc]}+m*F^{abc}=0\\ \partial_a*F^{abc}+m*F^{bc}=0\end{cases}$

6.6 六维时空中的反对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理6.6.1. $(\gamma^a\partial_a+m)X(6)=0$

$X(6)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}+\frac{1}{(6!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_6}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_6]}\}C$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\partial^{[a_0}F^{a_1]}+mF^{a_0a_1}=0,\partial_{a_1}F^{a_1}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1a_2]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1}+mF^{a_1}=0\end{cases} \begin{cases}\frac{1}{5!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_6]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}+mF^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\end{cases}$

推论6.6.1. $\gamma^a\partial_aX(6)=0,X(6)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a+\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}+\frac{1}{(6!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_6}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_6]}\}C$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\partial^{[a_0}F^{a_1]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1a_2]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1}=0\end{cases} \begin{cases}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_6]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}=0\end{cases}$

推论6.6.2. $(\gamma^a\partial_a+m)X(6)=0,m\neq 0$

$X(6)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a+\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}+\frac{1}{(6!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_6}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_6]}\}C$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\partial^{[a_0}F^{a_1]}+mF^{a_0a_1}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1}+mF^{a_1}=0\\ \frac{1}{5!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}+mF^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1}-m^2F^{a_1}=0,\partial_{a_1}F^{a_1}=0\\ F^{a_0a_1}=-\frac{1}{m}\partial^{[a_0}F^{a_1]}\\ \partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5}-m^2F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\\ F^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}=-\frac{1}{5!m}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5]}\end{cases}$

定理6.6.1. $(\gamma^a\partial_a+m)X(6)=0,X(6)=-X^T(6)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1}-m^2F^{a_1}=0,\partial_{a_1}F^{a_1}=0;\partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5}-m^2F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\\ X(6)=\{\frac{1}{1!}\gamma_{a_1}+\frac{1}{2!m}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}\partial^{a_2}\}C\frac{1}{1!}F^{a_1}+\{\frac{1}{5!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}+\frac{1}{6!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_6]}\partial^{a_6}\}C\frac{1}{5!}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\end{cases}$

推论6.6.3. $\begin{cases}\frac{1}{1!}\partial^{[a_0}F^{a_1]}+mF^{a_0a_1}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1}+mF^{a_1}=0\\ \frac{1}{5!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}+mF^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{4!}\partial^{[a_0}*F^{a_1\cdot\cdot a_4]}+m*F^{a_0a_1\cdot\cdot a_4}=0\\ \partial_{a_0}*F^{a_0a_1\cdot\cdot a_4}+m*F^{a_1\cdot\cdot a_4}=0\\ \frac{1}{0!}\partial^{a_0}*F+m*F^{a_0}=0\\ \partial_{a_0}*F^{a_0}+m*F=0\end{cases}$

6.7 八维时空中的对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理6.7.1. $(\gamma^a\partial_a+m)X(8)=0$

$X(8)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1a_2a_3}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_4}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_4]}+\frac{1}{(7!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_7}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_7]}+\frac{1}{(8!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_8}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_8]}\}C$

$\Leftrightarrow \begin{cases}F=0\\ \frac{1}{3!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_3]}+mF^{a_0\cdot\cdot a_3}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_3}=0;\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_4]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_3}+mF^{a_1\cdot\cdot a_3}=0\\ \frac{1}{7!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_7]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_7}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_7}=0;\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_8]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_7}+mF^{a_1\cdot\cdot a_7}=0\end{cases}$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)X(8)=0$

$X(8)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1a_2a_3}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_4}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_4]}+\frac{1}{(7!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_7}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_7]}+\frac{1}{(8!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_8}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_8]}\}C$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} F=0 \\ (\gamma^a\partial_a+m)\{\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdots a_3}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_3]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1\cdots a_4}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_4]}\}=0 \\ (\gamma^a\partial_a+m)\{\frac{1}{(7!)^2}F^{a_1\cdots a_7}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_7]}+\frac{1}{(8!)^2}F^{a_1\cdots a_8}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_8]}\}=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} F=0 \\ \frac{1}{3!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdots a_3]}+mF^{a_0\cdots a_3}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdots a_3}=0;\partial^{[a_0}F^{a_1\cdots a_4]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdots a_3}+mF^{a_1\cdots a_3}=0 \\ \frac{1}{7!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdots a_7]}+mF^{a_0a_1\cdots a_7}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdots a_7}=0;\partial^{[a_0}F^{a_1\cdots a_8]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdots a_7}+mF^{a_1\cdots a_7}=0 \end{cases}$$ □

推论6.7.1. $\gamma^a\partial_aX(8)=0$

$$X(8)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1a_2a_3}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1\cdots a_4}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_4]}+\frac{1}{(7!)^2}F^{a_1\cdots a_7}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_7]}+\frac{1}{(8!)^2}F^{a_1\cdots a_8}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_8]}\}C$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases} F=0 \\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdots a_3]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdots a_3}=0;\partial^{[a_0}F^{a_1\cdots a_4]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdots a_4}=0 \\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdots a_7]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdots a_7}=0;\partial^{[a_0}F^{a_1\cdots a_8]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdots a_8}=0 \end{cases}$$

推论6.7.2. $(\gamma^a\partial_a+m)X(8)=0,m\neq 0$

$$X(8)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1a_2a_3}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1\cdots a_4}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_4]}+\frac{1}{(7!)^2}F^{a_1\cdots a_7}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_7]}+\frac{1}{(8!)^2}F^{a_1\cdots a_8}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_8]}\}C$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases} F=0 \\ \frac{1}{3!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdots a_3]}+mF^{a_0\cdots a_3}=0,\partial_{a_0}F^{a_0\cdots a_3}+mF^{a_1\cdots a_3}=0 \\ \frac{1}{7!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdots a_7]}+mF^{a_0\cdots a_7}=0,\partial_{a_0}F^{a_0\cdots a_7}+mF^{a_1\cdots a_7}=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases} F=0 \\ \partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdots a_3}-m^2F^{a_1\cdots a_3}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdots a_3}=0,F^{a_0\cdots a_3}=-\frac{1}{3!m}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdots a_3]} \\ \partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdots a_7}-m^2F^{a_1\cdots a_7}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdots a_7}=0,F^{a_0\cdots a_7}=-\frac{1}{7!m}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdots a_7]} \end{cases}$$

定理6.7.1.

$$\begin{cases} (\gamma^a\partial_a+m)X(8)=0 \\ X(8)=X^T(8) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdots a_3}-m^2F^{a_1\cdots a_3}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdots a_3}=0 \\ \partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdots a_7}-m^2F^{a_1\cdots a_7}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdots a_7}=0 \\ X(8)=\{\frac{1}{3!}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_3]}+\frac{1}{4!m}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_4]}\partial^{a_4}\}C\frac{1}{3!}F^{a_1\cdots a_3} \\ +\{\frac{1}{7!}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_7]}+\frac{1}{8!m}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_8]}\partial^{a_8}\}C\frac{1}{7!}F^{a_1\cdots a_7} \end{cases}$$

推论6.7.3.

$$\begin{cases} \frac{1}{3!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdots a_3]}+mF^{a_0\cdots a_3}=0 \\ \partial_{a_0}F^{a_0\cdots a_3}+mF^{a_1\cdots a_3}=0 \\ \frac{1}{7!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdots a_7]}+mF^{a_0\cdots a_7}=0 \\ \partial_{a_0}F^{a_0\cdots a_7}+mF^{a_1\cdots a_7}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{1}{4!}\partial^{[a_0}{*F}^{a_1\cdots a_4]}+m{*F}^{a_0\cdots a_4}=0 \\ \partial_{a_0}{*F}^{a_0\cdots a_4}+m{*F}^{a_1\cdots a_4}=0 \\ \partial^{a_0}{*F}+m{*F}^{a_0}=0 \\ \partial_{a_0}{*F}^{a_0}+m{*F}=0 \end{cases}$$

6.8 八维时空中的反对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理6.8.1. $(\gamma^a\partial_a+m)X(8)=0$

$$X(8)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdots a_5}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_5]}+\frac{1}{(6!)^2}F^{a_1\cdots a_6}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_6]}\}C$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \partial^{[a_0}F^{a_1]}+mF^{a_0a_1}=0,\partial_{a_1}F^{a_1}=0 \\ \partial^{[a_0}F^{a_1a_2]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1}+mF^{a_1}=0 \end{cases}\begin{cases} \frac{1}{5!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdots a_5]}+mF^{a_0a_1\cdots a_5}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdots a_5}=0 \\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdots a_6]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdots a_5}+mF^{a_1\cdots a_5}=0 \end{cases}$$

推论6.8.1. $\gamma^a\partial_aX(8)=0,X(8)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a+\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdots a_5}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_5]}+\frac{1}{(6!)^2}F^{a_1\cdots a_6}\gamma_{[a_1}\cdots\gamma_{a_6]}\}C$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial^{[a_0}F^{a_1]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1}=0 \\ \partial^{[a_0}F^{a_1a_2]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0 \\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_6]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}=0 \end{cases}$$

推论6.8.2. $(\gamma^a\partial_a+m)X(8)=0,m\neq 0$

$X(8)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a+\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}+\frac{1}{(6!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_6}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_6]}\}C$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial^{[a_0}F^{a_1]}+mF^{a_0a_1}=0 \\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1}+mF^{a_1}=0 \\ \frac{1}{5!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}=0 \\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}+mF^{a_1\cdot\cdot a_5}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1}-m^2F^{a_1}=0,\partial_{a_1}F^{a_1}=0 \\ F^{a_0a_1}=-\frac{1}{m}\partial^{[a_0}F^{a_1]} \\ \partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5}-m^2F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0 \\ F^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}=-\frac{1}{5!m}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5]} \end{cases}$$

定理6.8.1. $(\gamma^a\partial_a+m)X(8)=0,X(8)=-X^T(8)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1}-m^2F^{a_1}=0,\partial_{a_1}F^{a_1}=0;\partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5}-m^2F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0 \\ X(6)=\{\frac{1}{1!}\gamma_{a_1}+\frac{1}{2!m}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}\partial^{a_2}\}CF^{a_1}+\{\frac{1}{5!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}+\frac{1}{6!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_6]}\partial^{a_6}\}C\frac{1}{5!}F^{a_1\cdot\cdot a_5} \end{cases}$$

推论6.8.3.
$$\begin{cases} \frac{1}{1!}\partial^{[a_0}F^{a_1]}+mF^{a_0a_1}=0 \\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1}+mF^{a_1}=0 \\ \frac{1}{5!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}=0 \\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}+mF^{a_1\cdot\cdot a_5}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6!}\partial^{[a_0}*F^{a_1\cdot\cdot a_6]}+m*F^{a_0a_1\cdot\cdot a_6}=0 \\ \partial_{a_0}*F^{a_0a_1\cdot\cdot a_6}+m*F^{a_1\cdot\cdot a_6}=0 \\ \frac{1}{2!}\partial^{[a_0}*F^{a_1a_2]}+m*F^{a_0a_1a_2}=0 \\ \partial_{a_0}*F^{a_0a_1a_2}+m*F^{a_1a_2}=0 \end{cases}$$

6.9 十维时空中的对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理6.9.1. $(\gamma^a\partial_a+m)X(10)=0,X(10)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{2!}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}$
$+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}+\frac{1}{(6!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_6}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_6]}+\frac{1}{(9!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_9}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_9]}+\frac{1}{(10!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{10}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{10}]}\}C$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F=0,F^{a_1a_2}=0 \\ \frac{1}{5!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0;\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_6]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}+mF^{a_1\cdot\cdot a_5}=0 \\ \frac{1}{9!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_9]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_9}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_9}=0;\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_{10}]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_9}+mF^{a_1\cdot\cdot a_9}=0 \end{cases}$$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)X(10)=0,X(10)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{2!}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}$
$+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}+\frac{1}{(6!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_6}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_6]}+\frac{1}{(9!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_9}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_9]}+\frac{1}{(10!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{10}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{10}]}\}C$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F=0,F^{a_1a_2}=0 \\ (\gamma^b\partial_b+m)\{\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}+\frac{1}{(6!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_6}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_6]}\}=0 \\ (\gamma^b\partial_b+m)\{\frac{1}{(9!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_9}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_9]}+\frac{1}{(10!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{10}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{10}]}\}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0;\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_6]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}+mF^{a_1\cdot\cdot a_5}=0 \\ \frac{1}{9!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_9]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_9}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_9}=0;\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_{10}]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_9}+mF^{a_1\cdot\cdot a_9}=0 \end{cases}$$ □

推论6.9.1. $\gamma^a\partial_aX(10)=0,X(10)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{2!}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}+\frac{1}{(6!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_6}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_6]}$
$+\frac{1}{(9!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_9}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_9]}+\frac{1}{(10!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{10}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{10}]}\}C$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F=0,F^{a_1a_2}=0 \\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0;\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_6]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_6}=0 \\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_9]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_9}=0;\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_{10}]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_{10}}=0 \end{cases}$$

推论6.9.2.

$(\gamma^b\partial_b+m)X(10)=0,X(10)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{2!}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}+\frac{1}{(6!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_6}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_6]}$

$+\frac{1}{(9!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_9}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_9]}+\frac{1}{(10!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_{10}}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{10}]}\}C, m\neq 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}F=0, F^{a_1a_2}=0\\ \frac{1}{5!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5]}+mF^{a_0\cdot\cdot a_5}=0, \partial_{a_0}F^{a_0\cdot\cdot a_5}+mF^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\\ \frac{1}{9!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_9]}+mF^{a_0\cdot\cdot a_9}=0, \partial_{a_0}F^{a_0\cdot\cdot a_9}+mF^{a_1\cdot\cdot a_9}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}F=0, F^{a_1a_2}=0\\ \partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5}-m^2F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0, F^{a_0\cdot\cdot a_5}=-\frac{1}{5!m}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5]}\\ \partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_9}-m^2F^{a_1\cdot\cdot a_9}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_9}=0, F^{a_0\cdot\cdot a_9}=-\frac{1}{9!m}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_9]}\end{cases}$$

定理6.9.1.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(10)=0\\ X(10)=X^T(10)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5}-m^2F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\\ \partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_9}-m^2F^{a_1\cdot\cdot a_9}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_9}=0\\ X(10)=\{\frac{1}{5!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}+\frac{1}{6!m}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_6]}\partial^{a_6}\}C\frac{1}{5!}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\\ +\{\frac{1}{9!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_9]}+\frac{1}{10!m}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_{10}]}\partial^{a_{10}}\}C\frac{1}{9!}F^{a_1\cdot\cdot a_9}\end{cases}$$

推论6.9.3.

$$\begin{cases}\frac{1}{5!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5]}+mF^{a_0\cdot\cdot a_5}=0, \partial_{a_0}F^{a_0\cdot\cdot a_5}+mF^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\\ \frac{1}{9!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_9]}+mF^{a_0\cdot\cdot a_9}=0, \partial_{a_0}F^{a_0\cdot\cdot a_9}+mF^{a_1\cdot\cdot a_9}=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}\frac{1}{4!}\partial^{[a_0}*F^{a_1\cdot\cdot a_4]}+m*F^{a_0\cdot\cdot a_4}=0, \partial_{a_0}*F^{a_0\cdot\cdot a_4}+m*F^{a_1\cdot\cdot a_4}=0\\ \partial^{a_0}*F+m*F^{a_0}=0, \partial_{a_0}*F^{a_0}+m*F=0\end{cases}$$

推论6.9.4.

$$\begin{cases}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_5]}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0; \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_6]}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_6}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_9]}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_9}=0; \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_{10}]}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_{10}}=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}\partial^{[a_0}*F^{a_1\cdot\cdot a_5]}=0, \partial_{a_1}*F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0; \partial^{[a_0}*F^{a_1\cdot\cdot a_4]}=0, \partial_{a_1}*F^{a_1\cdot\cdot a_4}=0\\ \partial^{[a_0}*F^{a_1]}=0, \partial_{a_1}*F^{a_1}=0; \partial^{a_0}*F=0\end{cases}$$

6.10 十维时空中的反对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理6.10.1. $(\gamma^b\partial_b+m)X(10)=0, X(10)=$
$\{\frac{1}{1!}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_4}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_4]}+\frac{1}{(7!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_7}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_7]}+\frac{1}{(8!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_8}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_8]}\}C$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}F^{a_1}=0\\ \frac{1}{3!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_3]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_3}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_3}=0; \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_4]}=0, \partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_3}+mF^{a_1\cdot\cdot a_3}=0\\ \frac{1}{7!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_7]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_7}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_7}=0; \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_8]}=0, \partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_7}+mF^{a_1\cdot\cdot a_7}=0\end{cases}$$

推论6.10.1. $\gamma^b\partial_bX(10)=0, X(10)=$
$\{\frac{1}{1!}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_4}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_4]}+\frac{1}{(7!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_7}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_7]}+\frac{1}{(8!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_8}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_8]}\}C$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}F^{a_1}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_3]}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_3}=0; \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_4]}=0, \partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_3}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_7]}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_7}=0; \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_8]}=0, \partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_7}=0\end{cases}$$

推论6.10.2.

$(\gamma^b\partial_b+m)X(10)=0, m\neq 0, X(10)=$
$\{\frac{1}{1!}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_4}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_4]}+\frac{1}{(7!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_7}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_7]}+\frac{1}{(8!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_8}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_8]}\}C$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}F^{a_1}=0\\ \frac{1}{3!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_3]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_3}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_3}+mF^{a_1\cdot\cdot a_3}=0\\ \frac{1}{7!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_7]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_7}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_7}+mF^{a_1\cdot\cdot a_7}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}F^{a_1}=0\\ \partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_3}-m^2F^{a_1\cdot\cdot a_3}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_3}=0,F^{a_0a_1\cdot\cdot a_3}=-\frac{1}{3!m}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_3]}\\ \partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_7}-m^2F^{a_1\cdot\cdot a_7}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_7}=0,F^{a_0a_1\cdot\cdot a_7}=-\frac{1}{7!m}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_7]}\end{cases}$$

定理6.10.1. $(\gamma^a\partial_a+m)X(10)=0,X(10)=-X^T(10)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_3}-m^2F^{a_1\cdot\cdot a_3}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_3}=0;\partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_7}-m^2F^{a_1\cdot\cdot a_7}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_7}=0\\ X(10)=\{\frac{1}{3!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}+\frac{1}{4!m}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_4]}\partial^{a_4}\}C\frac{1}{3!}F^{a_1\cdot\cdot a_3}+\{\frac{1}{7!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_7]}+\frac{1}{8!m}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_8]}\partial^{a_8}\}C\frac{1}{7!}F^{a_1\cdot\cdot a_7}\end{cases}$$

推论6.10.3.

$$\begin{cases}\frac{1}{3!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_3]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_3}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_3}+mF^{a_1\cdot\cdot a_3}=0\\ \frac{1}{7!}\partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_7]}+mF^{a_0a_1\cdot\cdot a_7}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_7}+mF^{a_1\cdot\cdot a_7}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{6!}\partial^{[a_0}*F^{a_1\cdot\cdot a_6]}+m*F^{a_0\cdot\cdot a_6}=0\\ \partial_{a_0}*F^{a_0\cdot\cdot a_6}+m*F^{a_1\cdot\cdot a_6}=0\\ \frac{1}{2!}\partial^{[a_0}*F^{a_1a_2]}+m*F^{a_0a_1a_2}=0\\ \partial_{a_0}*F^{a_0a_1a_2}+m*F^{a_1a_2}=0\end{cases}$$

6.11 十维时空中Bargmann-Wigner矢量场方程的对易规则

引理6.11.1. $\frac{1}{(l+1)!}\eta_{[a_1\langle a_1'}\eta_{a_2a_2'}\cdot\cdot\eta_{a_{l-1}a_{l-1}'}\eta_{a_la_l'}\eta_{a_{l+1}]a_{l+1}'\rangle}\partial^{a_{l+1}}\partial^{+a_{l+1}'}\Delta(x-x')$
$=\{\frac{1}{l!}\eta_{[a_1\langle a_1'}\eta_{a_2a_2'}\cdot\cdot\eta_{a_{l-1}a_{l-1}'}\eta_{a_l]a_l'\rangle}m^2-\frac{1}{(l-1)!}\eta_{[a_1\langle a_1'}\eta_{a_2a_2'}\cdot\cdot\eta_{a_{l-1}a_{l-1}'}\partial_{a_l]}\partial^+_{a_l'\rangle}\}\Delta(x-x')$

推论6.11.1. $F_{a_1a_2a_3a_4a_5}(x)=2^{-5}tr\{\frac{1}{5!}\bar{C}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]}X(x)\}=\frac{2^{-5}}{5!}\bar{C}^{\lambda\eta}\{\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]}\}_{\eta}{}^{\mu}X_{\lambda\mu}(x)$

性质6.11.1. $tr\{\frac{1}{5!}\gamma^{[b_1}\cdot\cdot\gamma^{b_5]}\frac{1}{5!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}\}=2^5\delta^{b_1}_{[a_1}\cdot\cdot\delta^{b_5}_{a_5]}$

推论6.11.2.

$$\begin{cases}U_{a_1a_2a_3a_4a_5}(\vec{p},h):=\frac{2^{-5}}{5!}\bar{C}^{\lambda\eta}\{\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]}\}_{\eta}{}^{\mu}U_{\lambda\mu}(\vec{p},h)=2^{-5}tr\{\bar{C}\frac{1}{5!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]}U(\vec{p},h)\}\\ V_{a_1a_2a_3a_4a_5}(\vec{p},h):=\frac{2^{-5}}{5!}\bar{C}^{\lambda\eta}\{\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]}\}_{\eta}{}^{\mu}V_{\lambda\mu}(\vec{p},h)=2^{-5}tr\{\bar{C}\frac{1}{5!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]}V(\vec{p},h)\}\\ C(10):=\gamma_2(10)\gamma_4(10)\gamma_5(10)\gamma_8(10)\gamma_9(10)=-\sigma_y\otimes I\otimes\sigma_y\otimes I\otimes\sigma_y\\ \bar{C}=C^+,C^T=-C\end{cases}$$

猜想6.11.1.

$$\begin{cases}\bar{C}(n)=C^+(n),C^+(n)=(-1)^{[\frac{n}{4}]}C(n),C^T(n)=(-1)^{[\frac{n+2}{4}]}C(n)\\ [\gamma_a(n)C(n)]^T=(-1)^{[\frac{n-1}{4}]}[\gamma_a(n)C(n)],[C^+(n)\gamma_a(n)]^T=(-1)^{[\frac{n-1}{4}]}[C^+(n)\gamma_a(n)]\end{cases}$$

定理6.11.1. $[F_{a_1a_2a_3a_4a_5}(x),F^+_{a_1'a_2'a_3'a_4'a_5'}(x')]=-\frac{i}{2^5}\frac{1}{6!}\eta_{[a_1\langle a_1'}\eta_{a_2a_2'}\cdot\cdot\eta_{a_5a_5'}\eta_{a_6]a_6'\rangle}\partial^{a_6}\partial^{+a_6'}\Delta(x-x')$

证明: $[F_{a_1a_2a_3a_4a_5}(x),F^+_{a_1'a_2'a_3'a_4'a_5'}(x')]$
$=\frac{2^{-10}}{(5!)^2}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]})^{\mu\lambda}(C^+\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\gamma_{a_3'}\gamma_{a_4'}\gamma_{a_5']})^{*\mu'\lambda'}[\psi_{\lambda\mu}(x),\psi^+_{\lambda'\mu'}(x')]$
$=\frac{2^{-10}}{(5!)^2}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]})^{\lambda\mu}(C^+\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\gamma_{a_3'}\gamma_{a_4'}\gamma_{a_5']})^{+\lambda'\mu'}[\psi_{\lambda\mu}(x),\psi^+_{\lambda'\mu'}(x')]$
$=\frac{2^{-10}}{(5!)^2}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]})^{\lambda\mu}(\gamma_{[a_5'}\gamma_{a_4'}\gamma_{a_3'}\gamma_{a_2'}\gamma_{a_1']}C)^{\lambda'\mu'}[\psi_{\lambda\mu}(x),\psi^+_{\lambda'\mu'}(x')]$
$=\frac{2^{-10}}{(5!)^2}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]})^{\lambda\mu}(\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\gamma_{a_3'}\gamma_{a_4'}\gamma_{a_5']}C)^{\lambda'\mu'}[\psi_{\lambda\mu}(x),\psi^+_{\lambda'\mu'}(x')]$
$=\frac{2^{-10}}{(5!)^2}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]})^{\lambda\mu}(\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\gamma_{a_3'}\gamma_{a_4'}\gamma_{a_5']}C)^{\lambda'\mu'}\frac{i}{2^3}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\{\lambda(\lambda'}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu\}\mu')}\Delta(x-x')$
$=i\frac{2^{-11}}{(5!)^2}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]})^{\lambda\mu}(\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\gamma_{a_3'}\gamma_{a_4'}\gamma_{a_5']}C)^{\lambda'\mu'}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda\lambda'}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu\mu'}\Delta(x-x')$
$=i\frac{2^{-11}}{(5!)^2}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]})^{\lambda\mu}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda\lambda'}(\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\gamma_{a_3'}\gamma_{a_4'}\gamma_{a_5']}C)^{\lambda'\mu'}[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]^T_{\mu'\mu}\Delta(x-x')$
$=i\frac{2^{-11}}{(5!)^2}tr\{C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda\lambda'}\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\gamma_{a_3'}\gamma_{a_4'}\gamma_{a_5']}C[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]^T\}\Delta(x-x')$
$=i\frac{2^{-11}}{(5!)^2}tr\{\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda\lambda'}\gamma_{[a_1'}\gamma_{a_2'}\gamma_{a_3'}\gamma_{a_4'}\gamma_{a_5']}C[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]^TC^+\}\Delta(x-x')$

$= -i\frac{2^{-11}}{(5!)^2}tr\{\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda\lambda'}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\gamma_{a'_3}\gamma_{a'_4}\gamma_{a'_5]}[\gamma^0(m+\gamma^b\partial_b)]\}\Delta(x-x')$
$= -i\frac{2^{-11}}{(5!)^2}tr\{\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda\lambda'}\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\gamma_{a'_3}\gamma_{a'_4}\gamma_{a'_5]}[(m-\gamma^b\partial_b^+)\gamma^0]\}\Delta(x-x')$
$= -i\frac{2^{-11}}{(5!)^2}tr\{m^2(\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]})\gamma^0(\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\gamma_{a'_3}\gamma_{a'_4}\gamma_{a'_5]})\gamma^0\}\Delta(x-x')$
$- i\frac{2^{-11}}{(5!)^2}tr\{(\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4}\gamma_{a_5]})\gamma_a\gamma_0(\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\gamma_{a'_3}\gamma_{a'_4}\gamma_{a'_5]})\gamma_b\gamma_0\}\partial^a\partial^b\Delta(x-x')$
$= -i\frac{2^{-11}}{(5!)^2}i^{5*6}2^5(5!)^2m^2\frac{1}{5!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\eta^{a_5]}_{a'_5]}\Delta(x-x')$
$- i\frac{2^{-11}}{(5!)^2}i^{6*7}2^5(5!)^2\{\frac{1}{6!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\eta^{a_5}_{a'_5}\eta^{a]}_{b]}-\frac{1}{4!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_4}_{a'_4}\delta^{a_5]a}\delta_{a'_5]b}\}\partial_a\partial^{+b}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2^6}\{\frac{1}{5!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\eta^{a_5]}_{a'_5]}m^2+(\frac{1}{6!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\eta^{a_5}_{a'_5}\eta^{a]}_{b]}-\frac{1}{4!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_4}_{a'_4}\delta^{a_5]a}\delta_{a'_5]b})\partial_a\partial^{+b}\}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2^6}\{\eta^{a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\eta^{a_5}_{a'_5]}m^2+(\eta^{a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\eta^{a_5}_{a'_5}\eta^{a}_{b]}-\frac{1}{4!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_4}_{a'_4}\delta^{a_5]a}\delta_{a'_5]b})\partial_a\partial^{+b}\}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2^6}\{\eta^{a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\eta^{a_5}_{a'_5]}m^2+(\eta^{a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\eta^{a_5}_{a'_5}\eta^{a}_{b]}\partial_a\partial^{+b}-\frac{1}{4!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_4}_{a'_4}\partial^{a_5]}\partial^+_{a'_5]})\}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2^5}\{\frac{1}{5!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\eta^{a_5]}_{a'_5]}m^2-\frac{1}{4!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_4}_{a'_4}\partial^{a_5]}\partial^+_{a'_5]}\}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2^5}\frac{1}{6!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\eta^{a_5}_{a'_5}\eta^{a_6]}_{a'_6]}\partial_{a_6}\partial^{+a'_6}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2^5}\frac{1}{6!}\eta_{[a_1\langle a'_1}\eta_{a_2a'_2}\cdot\cdot\eta_{a_5a'_5}\eta_{a_6]a'_6\rangle}\partial^{a_6}\partial^{+a'_6}\Delta(x-x')$ □

推论6.11.3. $[F_{a_1a_2\cdot\cdot a_6}(x),F^+_{a'_1a'_2\cdot\cdot a'_6}(x')]=-i\frac{2^{-5}}{5!}\eta_{[a_1\langle a'_1}\eta_{a_2a'_2}\cdot\cdot\eta_{a_5a'_5}\partial_{a_6]}\partial^+_{a'_6\rangle}\Delta(x-x')$

7 奇数维时空中的对称和反对称B-W矢量场方程

7.1 三维时空中的对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理7.1.1. $(\gamma^a\partial_a+m)X(3)=0,X(3)=\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_aC\Leftrightarrow\varepsilon^{abc}\partial_bF_c-imF^a=0,\partial_aF^a=0$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)X(3)=0,X(3)=\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_aC$
$\Leftrightarrow(\gamma_a\partial^a+m)\frac{1}{(1!)^2}F^b\gamma_bC=0$
$\Leftrightarrow(\gamma_a\partial^a+m)F^b\gamma_b=0$
$\Leftrightarrow\gamma_a\gamma_b\partial^aF^b+mF^b\gamma_b=0$
$\Leftrightarrow\{\frac{1}{2!}\gamma_{[a}\gamma_{b]}+\delta_{ab}\}\partial^aF^b+\frac{1}{1!}mF^b\gamma_b=0$
$\Leftrightarrow\frac{1}{2!}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\partial^aF^b+\delta_{ab}\partial^aF^b+\frac{1}{1!}mF^b\gamma_b=0$
$\Leftrightarrow i\varepsilon^{abc}\frac{1}{(1!)^2}\gamma_c\partial_aF_b+\delta_{ab}\partial^aF^b+\frac{1}{1!}mF^c\gamma_c=0$
$\Leftrightarrow\varepsilon^{abc}\partial_aF_b-imF^c=0,\partial_aF^a=0$
$\Leftrightarrow\varepsilon^{abc}\partial_bF_c-imF^a=0,\partial_aF^a=0$ □

推论7.1.1. $\gamma^a\partial_aX(3)=0,X(3)=\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_aC\Leftrightarrow\varepsilon^{abc}\partial_bF_c=0,\partial_aF^a=0\Rightarrow\partial_b\partial^bF^a=0$

推论7.1.2. $(\gamma^a\partial_a+m)X(3)=0,X(3)=\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_aC,m\neq0\Leftrightarrow\varepsilon^{abc}\partial_bF_c-imF^a=0\Rightarrow\partial_b\partial^bF^a-m^2F^a=0$

定理7.1.1. $(\gamma^a\partial_a+m)X(3)=0,X(3)=X^T(3),m\neq0\Leftrightarrow\varepsilon^{abc}\partial_bF_c-imF^a=0,X(3)=\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_aC$

推论7.1.3. $\varepsilon^{abc}\partial_bF_c-imF^a=0\Leftrightarrow\partial_a{*F^{ab}}+imF^b=0\Leftrightarrow\partial_{[a}F_{b]}-im{*F_{ab}}=0$

7.2 三维时空中的反对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理7.2.1. $(\gamma^a\partial_a+m)X(3)=0,X(3)=\frac{1}{(0!)^2}FC\Leftrightarrow\partial^aF=0,mF=0$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)X(3)=0,X(3)=\frac{1}{(0!)^2}FC$
$\Leftrightarrow(\gamma_a\partial^a+m)\frac{1}{(0!)^2}FC=0$
$\Leftrightarrow(\gamma_a\partial^a+m)F=0$
$\Leftrightarrow\partial^aF=0,mF=0$ □

推论7.2.1. $\gamma^a\partial_a\frac{1}{(0!)^2}FC=0\Leftrightarrow\partial^aF=0$

推论7.2.2. $(\gamma^a\partial_a+m)\frac{1}{(0!)^2}FC=0,m\neq0\Leftrightarrow F=0$

定理7.2.1. $(\gamma^a\partial_a+m)X(3)=0,X(3)=-X^T(3),m\neq0\Leftrightarrow F=0,X(3)=\frac{1}{(0!)^2}FC=0$

推论7.2.3. $F=0\Leftrightarrow{*F_{ab}}=0$

7.3 五维时空中的对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理7.3.1. $(\gamma^a\partial_a+m)X(5)=0, X(5)=\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}C \Leftrightarrow \varepsilon^{abcde}\partial_c F_{de}-mF^{ab}=0, \partial_a F^{ab}=0$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)X(5)=0, X(5)=\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}C$
$\Leftrightarrow (\gamma_a\partial^a+m)\frac{1}{(2!)^2}F^{bc}\gamma_{[b}\gamma_{c]}C=0$
$\Leftrightarrow (\gamma_a\partial^a+m)F^{bc}\gamma_b\gamma_c=0$
$\Leftrightarrow \gamma_a\gamma_b\gamma_c\partial^a F^{bc}+mF^{bc}\gamma_b\gamma_c=0$
$\Leftrightarrow \{\frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}+(\delta_{a[b}\gamma_{c]}+\gamma_a\delta_{bc})\}\partial^a F^{bc}+\frac{1}{2!}mF^{bc}\gamma_{[b}\gamma_{c]}=0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{3!}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}\partial^a F^{bc}+2\delta_{ab}\gamma_c\partial^a F^{bc}+\frac{1}{2!}mF^{bc}\gamma_{[b}\gamma_{c]}=0$
$\Leftrightarrow -\varepsilon^{abcde}\frac{1}{(2!)^2}\gamma_{[d}\gamma_{e]}\partial_a F_{bc}+2\delta_{ab}\gamma_c\partial^a F^{bc}+\frac{1}{2!}mF^{de}\gamma_{[d}\gamma_{e]}=0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2!}\varepsilon^{abcde}\partial_a F_{bc}-mF^{de}=0, \partial_a F^{ab}=0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2!}\varepsilon^{abcde}\partial_c F_{de}-mF^{ab}=0, \partial_a F^{ab}=0$ □

推论7.3.1. $\gamma^a\partial_a X(5)=0, X(5)=\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}C \Leftrightarrow \varepsilon^{abcde}\partial_c F_{de}=0, \partial_a F^{ab}=0$

推论7.3.2. $(\gamma^a\partial_a+m)X(5)=0, X(5)=\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}C, m\neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2!}\varepsilon^{abcde}\partial_c F_{de}-mF^{ab}=0$

定理7.3.1. $(\gamma^a\partial_a+m)X(5)=0, X(5)=X^T(5), m\neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2!}\varepsilon^{abcde}\partial_c F_{de}-mF^{ab}=0, X(5)=\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}C$

推论7.3.3. $\frac{1}{2!}\varepsilon^{abcde}\partial_c F_{de}-mF^{ab}=0 \Leftrightarrow \partial_a{*}F^{abc}-mF^{bc}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2!}\partial_{[a}F_{bc]}-m{*}F_{abc}=0$

7.4 五维时空中的反对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理7.4.1. $\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(5)=0\\ X(5)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}\}C\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{0!}\partial^{a_0}F+mF^{a_0}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1]}=0, \partial_{a_0}F^{a_0}+mF=0\end{cases}$

推论7.4.1. $\begin{cases}\gamma^a\partial_a X(5)=0\\ X(5)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}\}C\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\partial^{a_0}F=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1]}=0, \partial_{a_0}F^{a_0}=0\end{cases}$

推论7.4.2. $\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(5)=0, m\neq 0\\ X(5)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}\}C\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{0!}\partial^{a_0}F+mF^{a_0}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0}+mF=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\partial_{a_0}\partial^{a_0}F-m^2F=0\\ F^{a_0}=-\frac{1}{0!m}\partial^{a_0}F\end{cases}$

定理7.4.1. $\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(5)=0, m\neq 0\\ X(5)=-X^T(5)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\partial_{a_0}\partial^{a_0}F-m^2F=0\\ X(5)=\{\frac{1}{0!}F-\frac{1}{1!m}\gamma_{a_1}\partial^{a_1}\}C\end{cases}$

推论7.4.3. $\begin{cases}\frac{1}{0!}\partial^{a_0}F+mF^{a_0}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0}+mF=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{4!}\partial^{[a_0}{*}F^{a_1\cdot\cdot a_4]}+m{*}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_4}=0\\ \partial_{a_0}{*}F^{a_0a_1\cdot\cdot a_4}+m{*}F^{a_1\cdot\cdot a_4}=0\end{cases}$

7.5 七维时空中的对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理7.5.1. $(\gamma^{a_0}\partial_{a_0}+m)X(7)=0, X(7)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}\}C$
$\Leftrightarrow \varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_7}\partial_{a_4}F_{a_5\cdot\cdot a_7}-imF^{a_1\cdot\cdot a_3}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_3}=0$

证明: $(\gamma^{a_0}\partial_{a_0}+m)X(7)=0, X(7)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}\}C$
$\Leftrightarrow (\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}\}C=0$
$\Leftrightarrow F=0, (\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}\}C=0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{3!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_7}\partial_{a_4}F_{a_5\cdot\cdot a_7}-imF^{a_1\cdot\cdot a_3}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_3}=0$ □

推论7.5.1. $\gamma^{a_0}\partial_{a_0}=0, X(7)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}\}C$
$\Leftrightarrow \varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_7}\partial_{a_4}F_{a_5\cdot\cdot a_7}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_3}=0$

推论7.5.2. $(\gamma^{a_0}\partial_{a_0}+m)X(7)=0, X(7)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}\}C, m\neq 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{3!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_7}\partial_{a_4}F_{a_5\cdot\cdot a_7}-imF^{a_1\cdot\cdot a_3}=0$

定理7.5.1. $(\gamma^a\partial_a+m)X(7)=0, X(7)=X^T(7), m\neq 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{3!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_7}\partial_{a_4}F_{a_5\cdot\cdot a_7}-imF^{a_1\cdot\cdot a_3}=0, X(7)=\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}C$

推论7.5.3.
$\frac{1}{3!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_7}\partial_{a_4}F_{a_5\cdot\cdot a_7}-imF^{a_1\cdot\cdot a_3}=0\Leftrightarrow \partial_{a_0}{*F}^{a_0\cdot\cdot a_3}+imF^{a_1\cdot\cdot a_3}=0\Leftrightarrow \frac{1}{3!}\partial_{[a_0}F_{a_1\cdot\cdot a_3]}-im{*F}_{a_0\cdot\cdot a_3}=0$

7.6 七维时空中的反对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理7.6.1. $\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(7)=0\\ X(7)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a+\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\}C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{[a}F^{b]}+mF^{ab}=0, \partial_aF^a=0\\ \partial^{[a}F^{bc]}=0, \partial_aF^{ab}+mF^b=0\end{cases}$

推论7.6.1. $\begin{cases}\gamma^a\partial_aX(7)=0\\ X(7)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a+\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\}C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{[a}F^{b]}=0, \partial_aF^a=0\\ \partial^{[a}F^{bc]}=0, \partial_aF^{ab}=0\end{cases}$

推论7.6.2. $(\gamma^a\partial_a+m)X(7)=0, X(7)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a+\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\}C, m\neq 0$
$\Leftrightarrow \partial_aF^{ab}+mF^b=0, \partial^{[a}F^{b]}+mF^{ab}=0\Leftrightarrow \partial_b\partial^bF^a-m^2F^a=0, \partial_aF^a=0, F^{ab}=-\frac{1}{m}\partial^{[a}F^{b]}$

定理7.6.1. $\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(7)=0\\ X(7)=-X^T(7)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_b\partial^bF^a-m^2F^a=0, \partial_aF^a=0\\ X(7)=\{\frac{1}{1!}\gamma_a+\frac{1}{2!m}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\partial^b\}CF^a\end{cases}$

推论7.6.3. $\begin{cases}\frac{1}{1!}\partial^{[a_0}F^{a_1]}+mF^{a_0a_1}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1}+mF^{a_1}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{5!}\partial^{[a_0}{*F}^{a_1\cdot\cdot a_5]}-m{*F}^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}=0\\ \partial_{a_0}{*F}^{a_0a_1\cdot\cdot a_5}-m{*F}^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\end{cases}$

7.7 九维时空中的对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理7.7.1. $(\gamma^{a_0}\partial_{a_0}+m)X(9)=0, X(9)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1a_2a_3a_4}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4]}\}C$
$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{a_1}F+mF^{a_1}=0, \partial^{[a_0}F^{a_1]}=0, \partial_{a_1}F^{a_1}+mF=0\\ \frac{1}{4!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_9}\partial_{a_5}F_{a_6\cdot\cdot a_9}-mF^{a_1\cdot\cdot a_4}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_4}=0\end{cases}$

证明: $(\gamma^{a_0}\partial_{a_0}+m)X(9)=0, X(9)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1a_2a_3a_4}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4]}\}C$
$\Leftrightarrow(\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1a_2a_3a_4}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4]}\}C=0$
$\Leftrightarrow(\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}\}C=0, (\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1a_2a_3a_4}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4]}\}C=0$
$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{a_1}F+mF^{a_1}=0, \partial^{[a_0}F^{a_1]}=0, \partial_{a_1}F^{a_1}+mF=0\\ \frac{1}{4!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_9}\partial_{a_5}F_{a_6\cdot\cdot a_9}-mF^{a_1\cdot\cdot a_4}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_4}=0\end{cases}$ □

推论7.7.1. $\gamma^{a_0}\partial_{a_0}X(9)=0, X(9)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1a_2a_3a_4}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4]}\}C$
$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{a_1}F=0, \partial^{[a_0}F^{a_1]}=0, \partial_{a_1}F^{a_1}=0\\ \varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_9}\partial_{a_5}F_{a_6\cdot\cdot a_9}=0, \partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_4}=0\end{cases}$

推论7.7.2. $(\gamma^{a_0}\partial_{a_0}+m)X(9)=0, X(9)=\{\frac{1}{(0!)^2}F+\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1a_2a_3a_4}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4]}\}C, m\neq 0$
$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{a_1}F+mF^{a_1}=0, \partial_{a_1}F^{a_1}+mF=0\Leftrightarrow\partial_{a_1}\partial^{a_1}F-m^2F=0, F^{a_1}=-\frac{1}{m}\partial^{a_1}F\\ \frac{1}{4!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_9}\partial_{a_5}F_{a_6\cdot\cdot a_9}-mF^{a_1\cdot\cdot a_4}=0\end{cases}$

定理7.7.1. $\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(9)=0\\ X(9)=X^T(9)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_{a_1}\partial^{a_1}F-m^2F=0, \frac{1}{4!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_9}\partial_{a_5}F_{a_6\cdot\cdot a_9}-mF^{a_1\cdot\cdot a_4}=0\\ X(9)=\{(1-\frac{1}{m}\gamma_{a_1}\partial^{a_1})F+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1a_2a_3a_4}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_3}\gamma_{a_4]}\}C\end{cases}$

推论7.7.3. $\frac{1}{4!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_9}\partial_{a_5}F_{a_6\cdot\cdot a_9}-mF^{a_1\cdot\cdot a_4}=0\Leftrightarrow\partial_{a_0}{*F}^{a_0\cdot\cdot a_4}-mF^{a_1\cdot\cdot a_4}=0\Leftrightarrow\frac{1}{4!}\partial_{[a_0}F_{a_1\cdot\cdot a_4]}-m{*F}_{a_0\cdot\cdot a_4}=0$

7.8 九维时空中的反对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理7.8.1.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(9)=0\\ X(9)=\{\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}\}C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2!}\partial^{[a_0}F^{a_1a_2]}+mF^{a_0a_1a_2}=0,\partial_{a_1}F^{a_1a_2}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1a_2a_3]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1a_2}+mF^{a_1a_2}=0\end{cases}$$

推论7.8.1.

$$\begin{cases}\gamma^a\partial_aX(9)=0\\ X(9)=\{\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}\}C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{[a_0}F^{a_1a_2]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1a_2}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1a_2a_3]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1a_2}=0\end{cases}$$

推论7.8.2. $(\gamma^a\partial_a+m)X(9)=0,m\neq0,X(9)=\{\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}\}C$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2!}\partial^{[a_0}F^{a_1a_2]}+mF^{a_0a_1a_2}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1a_2}+mF^{a_1a_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1a_2}-m^2F^{a_1a_2}=0,\partial_{a_1}F^{a_1a_2}=0\\ F^{a_0a_1a_2}=-\frac{1}{2!m}\partial^{[a_0}F^{a_1a_2]}\end{cases}$$

定理7.8.1.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(9)=0,m\neq0\\ X(9)=-X^T(9)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1a_2}-m^2F^{a_1a_2}=0,\partial_{a_1}F^{a_1a_2}=0\\ X(9)=\{\frac{1}{2!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}-\frac{1}{3!m}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}\partial^{a_3}\}C\frac{1}{2!}F^{a_1a_2}\end{cases}$$

推论7.8.3.

$$\begin{cases}\frac{1}{2!}\partial^{[a_0}F^{a_1a_2]}+mF^{a_0a_1a_2}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1a_2}+mF^{a_1a_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{6!}\partial^{[a_0}{*F}^{a_1\cdot\cdot a_6]}+m{*F}^{a_0a_1\cdot\cdot a_6}=0\\ \partial_{a_0}{*F}^{a_0a_1\cdot\cdot a_6}+m{*F}^{a_1\cdot\cdot a_6}=0\end{cases}$$

7.9 十一维时空中的对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理7.9.1. $(\gamma^{a_0}\partial_{a_0}+m)X(11)=0,X(11)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}\}C$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{[a_0}F^{a_1]}+mF^{a_0a_1}=0,\partial_{a_1}F^{a_1}=0;\partial^{[a_0}F^{a_1a_2]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1}+mF^{a_1}=0\\ \frac{1}{5!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_{11}}\partial_{a_6}F_{a_7\cdot\cdot a_{11}}-mF^{a_1\cdot\cdot a_5}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\end{cases}$$

证明: $(\gamma^{a_0}\partial_{a_0}+m)X(11)=0,X(11)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}\}C$

$\Leftrightarrow(\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}\}C=0$

$\Leftrightarrow(\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}\}C=0,(\gamma_{a_0}\partial^{a_0}+m)\{\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}\}C=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{[a_0}F^{a_1]}+mF^{a_0a_1}=0,\partial_{a_1}F^{a_1}=0;\partial^{[a_0}F^{a_1a_2]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1}+mF^{a_1}=0\\ \frac{1}{5!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_{11}}\partial_{a_6}F_{a_7\cdot\cdot a_{11}}-mF^{a_1\cdot\cdot a_5}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\end{cases}$$ □

推论7.9.1. $\gamma^{a_0}\partial_{a_0}X(11)=0,X(11)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}\}C$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{[a_0}F^{a_1]}=0,\partial_{a_1}F^{a_1}=0,\partial^{[a_0}F^{a_1a_2]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1}=0\\ \varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_{11}}\partial_{a_6}F_{a_7\cdot\cdot a_{11}}=0,\partial_{a_1}F^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\end{cases}$$

推论7.9.2. $(\gamma^{a_0}\partial_{a_0}+m)X(11)=0,X(11)=\{\frac{1}{(1!)^2}F^{a_1}\gamma_{a_1}+\frac{1}{(2!)^2}F^{a_1a_2}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}\}C,m\neq0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{[a_0}F^{a_1]}+mF^{a_0a_1}=0,\partial_{a_0}F^{a_0a_1}+mF^{a_1}=0\\ \varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_{11}}\partial_{a_6}F_{a_7\cdot\cdot a_{11}}-mF^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1}-m^2F^{a_1}=0,\partial_{a_1}F^{a_1}=0,F^{a_0a_1}=-\frac{1}{m}\partial^{[a_0}F^{a_1]}\\ \frac{1}{5!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_{11}}\partial_{a_6}F_{a_7\cdot\cdot a_{11}}-mF^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\end{cases}$$

定理7.9.1. $$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(11)=0\\ X(11)=X^T(11),m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1}-m^2F^{a_1}=0,\frac{1}{5!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_{11}}\partial_{a_6}F_{a_7\cdot\cdot a_{11}}-mF^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\\ X(11)=\{(\frac{1}{1!}\gamma_{a_1}+\frac{1}{2!m}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}\partial^{a_2})F^{a_1}+\frac{1}{(5!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_5}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_5]}\}C\end{cases}$$

推论7.9.3. $\frac{1}{5!}\varepsilon^{a_1\cdot\cdot a_{11}}\partial_{a_6}F_{a_7\cdot\cdot a_{11}}-mF^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\Leftrightarrow\partial_{a_0}{*F}^{a_0\cdot\cdot a_5}+mF^{a_1\cdot\cdot a_5}=0\Leftrightarrow\frac{1}{5!}\partial_{[a_0}F_{a_1\cdot\cdot a_5]}-m{*F}_{a_0\cdot\cdot a_5}=0$

7.10 十一维时空中的反对称Bargmann-Wigner矢量场方程

引理7.10.1.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(11)=0, X(11)=\\ \{\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_4}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_4]}\}C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{3!}\partial^{[a_0}F^{a_1a_2a_3]}+mF^{a_0a_1a_2a_3}=0, \partial_{a_1}F^{a_1a_2a_3}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_4]}=0, \partial_{a_0}F^{a_0a_1a_2a_3}+mF^{a_1a_2a_3}=0\end{cases}$$

推论7.10.1.

$$\begin{cases}\gamma^a\partial_aX(11)=0\\ X(11)=\{\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_4}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_4]}\}C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{[a_0}F^{a_1a_2a_3]}=0, \partial_{a_1}F^{a_1a_2a_3}=0\\ \partial^{[a_0}F^{a_1\cdot\cdot a_4]}=0, \partial_{a_0}F^{a_0a_1a_2a_3}=0\end{cases}$$

推论7.10.2. $(\gamma^a\partial_a+m)X(11)=0, m\neq 0, X(11)=\{\frac{1}{(3!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_3}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}+\frac{1}{(4!)^2}F^{a_1\cdot\cdot a_4}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_4]}\}C$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{3!}\partial^{[a_0}F^{a_1a_2a_3]}+mF^{a_0a_1a_2a_3}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1a_2a_3}+mF^{a_1a_2a_3}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_{a_0}\partial^{a_0}F^{a_1a_2a_3}-m^2F^{a_1a_2a_3}=0, \partial_{a_1}F^{a_1a_2a_3}=0\\ F^{a_0a_1a_2a_3}=-\frac{1}{m}\partial^{[a_0}F^{a_1a_2a_3]}\end{cases}$$

定理7.10.1.

$$\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X(11)=0, m\neq 0\\ X(11)=-X^T(11)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_{a_1}\partial^{a_1}F^{a_1a_2a_3}-m^2F^{a_1a_2a_3}=0, \partial_{a_1}F^{a_1a_2a_3}=0\\ X(11)=\{\frac{1}{3!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_3]}+\frac{1}{4!}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_4]}\partial^{a_4}\}C\frac{1}{3!}F^{a_1a_2a_3}\end{cases}$$

推论7.10.3.

$$\begin{cases}\frac{1}{3!}\partial^{[a_0}F^{a_1a_2a_3]}+mF^{a_0a_1a_2a_3}=0\\ \partial_{a_0}F^{a_0a_1a_2a_3}+mF^{a_1a_2a_3}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{7!}\partial^{[a_0}*F^{a_1\cdot\cdot a_7]}-m*F^{a_0a_1\cdot\cdot a_7}=0\\ \partial_{a_0}*F^{a_0a_1\cdot\cdot a_7}-m*F^{a_1\cdot\cdot a_7}=0\end{cases}$$

8 N+1=n偶维时空中反对称B-W矢量场方程

8.1 关于反对称关系的引理

引理8.1.1. $\sum\limits_{h=1}^{l}a_{\{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma\}}(\vec{p},h)=0\Leftrightarrow[a(\vec{p};h,h')+a(\vec{p};h',h)]=0, c(\vec{p};h,h')=0$

证明: $\sum\limits_{h=1}^{l}a_{\{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma\}}(\vec{p},h)=0$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{h=1}^{l}u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)a_{\mu_\varsigma\}}(\vec{p},h)=0$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{h,h'=1}^{l}u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)[a(\vec{p};h,h')u_{\mu_\varsigma\}}(\vec{p},h')+c(\vec{p};h,h')v_{\mu_\varsigma\}}(\vec{p},h')]=0$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{h,h'=1}^{l}[a(\vec{p};h,h')u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma\}}(\vec{p},h')+c(\vec{p};h,h')u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma\}}(\vec{p},h')]=0$

$\Leftrightarrow\sum\limits_{h,h'=1}^{l}[a(\vec{p};h,h')+a(\vec{p};h',h)]u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')+\sum\limits_{h,h'=1}^{l}c(\vec{p};h,h')u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma\}}(\vec{p},h')]=0$

$\Leftrightarrow[a(\vec{p};h,h')+a(\vec{p};h',h)]=0, c(\vec{p};h,h')=0$ □

8.2 N+1=n偶维时空中反对称B-W矢量场方程的平面波解

定理8.2.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=0, \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=-\psi_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}(x)$

$\Leftrightarrow$

$\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{m}{\sqrt{E}}\sum\limits_{h\langle h'=1}^{l}[a(\vec{p};h\langle h')\frac{1}{\sqrt{2}}u_{[\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma]}(\vec{p},h')e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p};h\langle h')\frac{1}{\sqrt{2}}v_{[\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma]}(\vec{p},h')e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}$

证明:

$(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=0, \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=-\psi_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}(x)$

$\Leftrightarrow$

$\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}\sum\limits_{h=1}^{l}[a_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}, \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=-\psi_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}(x)$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}\sum\limits_{h=1}^{l}[a_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}\sum\limits_{h=1}^{l}[a_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}\\ =-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}\sum\limits_{h=1}^{l}[a_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}\sum\limits_{h=1}^{l}[a_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}\sum\limits_{h=1}^{l}[a_{\{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma\}}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+_{\{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\lambda_\varsigma\}}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}\sum\limits_{h=1}^{l}[a_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}\\ \sum\limits_{h=1}^{l}a_{\{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma\}}(\vec{p},h)=0,\sum\limits_{h=1}^{l}b^+_{\{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\lambda_\varsigma\}}(\vec{p},h)=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}\sum\limits_{h,h'=1}^{l}[a(\vec{p};h,h')u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p};h,h')v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}\\ a(\vec{p};h,h')+a(\vec{p};h',h)=0,b^+(\vec{p};h,h')+b^+(\vec{p};h',h)=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}\sum\limits_{h,h'=1}^{l}[a(\vec{p};h,h')\frac{1}{2!}u_{[\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma]}(\vec{p},h')e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p};h,h')\frac{1}{2!}v_{[\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma]}(\vec{p},h')e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}\\ a(\vec{p};h,h')+a(\vec{p};h',h)=0,b^+(\vec{p};h,h')+b^+(\vec{p};h',h)=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{m}{\sqrt{E}}\sum\limits_{h\langle h'=1}^{l}[a(\vec{p};h\langle h')\frac{1}{\sqrt{2}}u_{[\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma]}(\vec{p},h')e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p};h\langle h')\frac{1}{\sqrt{2}}v_{[\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma]}(\vec{p},h')e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}\\ a(\vec{p};h\langle h')=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}}a(\vec{p};h,h'),b^+(\vec{p};h\langle h')=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}}b^+(\vec{p};h,h')\end{cases}$$

□

9 N+1维时空中反对称张量场的直接求解

9.1 N+1维时空中的电子方程 [5]

偶数维时空中的电子方程：

定义9.1.1. $(\gamma^a\partial_a+m)\psi=0,\psi=\begin{bmatrix}\varphi\\ \eta\end{bmatrix},\gamma^a=(\Gamma\otimes\sigma_y,\varsigma I_*\otimes\sigma_z)=(\vec{\gamma},\varsigma I_*\otimes\sigma_z)$

奇数维时空中的电子方程：

定义9.1.2. $(\gamma^a\partial_a+m)\psi=0,\psi=\begin{bmatrix}\varphi\\ \eta\end{bmatrix},\gamma^a=(\Gamma\otimes\sigma_y,I_*\otimes\sigma_x,\varsigma I_*\otimes\sigma_z)=(\vec{\gamma},\varsigma I_*\otimes\sigma_z)$

9.2 N+1维时空中的电子自旋基

定义9.2.1. $u_\varsigma(\vec{p},h):=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})\begin{bmatrix}1\\0\\0_{l-2}\\0_l\end{bmatrix},\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})\begin{bmatrix}0\\1\\0_{l-2}\\0_l\end{bmatrix},\cdot\cdot,\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})\begin{bmatrix}0_{l-2}\\0\\1\\0_l\end{bmatrix}$

定义9.2.2. $v_\varsigma(\vec{p},h):=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})\begin{bmatrix}0_l\\1\\0\\0_{l-2}\end{bmatrix},\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})\begin{bmatrix}0_l\\0\\1\\0_{l-2}\end{bmatrix},\cdot\cdot,\sqrt{\frac{E+m}{2m}}(1-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{\gamma}\gamma_0}{E+m})\begin{bmatrix}0_l\\0_{l-2}\\0\\1\end{bmatrix}$

9.3 N+1维时空中电子的平面波解

推论9.3.1.

$$\begin{cases}\psi_{\lambda_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{m}{E}}\sum\limits_{h=1}^{l}[a(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}\\ a(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{E}{m}}u^+(\vec{p},h)\psi(x)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r},b^+(\vec{p},h)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{E}{m}}v^+(\vec{p},h)\psi(x)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r}\end{cases}$$

定理9.3.1.
$$\begin{cases}A_{a_1\cdot\cdot a_l}(x)=2^{-[\frac{n}{2}]}tr\{\frac{1}{l!}\bar{C}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}\psi(x)\}=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\sqrt{\frac{E}{m}}\sum_{h=1}^{l}[a(\vec{p},h)U_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)V^+_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p}\\ U_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p},h)=2^{-[\frac{n}{2}]}tr\{\frac{1}{l!}\bar{C}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}u(\vec{p},h),V_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p},h)=2^{-[\frac{n}{2}]}tr\{\frac{1}{l!}\bar{C}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}v(\vec{p},h)\end{cases}$$

9.4 N+1维时空中B-W矢量场的自旋基

定义9.4.1.
$$\begin{cases}U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p};h,h)=\frac{1}{2}u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma\}}(\vec{p},h),U_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p};h<h')=\frac{1}{\sqrt{2}}u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma\}}(\vec{p},h');h,h'=1,2,\cdot\cdot,2^{[\frac{N-1}{2}]}\\ V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p};h,h)=\frac{1}{2}v_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma\}}(\vec{p},h),V_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p};h<h')=\frac{1}{\sqrt{2}}v_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma\}}(\vec{p},h');h,h'=1,2,\cdot\cdot,2^{[\frac{N-1}{2}]}\end{cases}$$
$$\begin{cases}X_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p};h<h')=\frac{1}{\sqrt{2}}u_{[\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma]}(\vec{p},h');h,h'=1,2,\cdot\cdot,2^{[\frac{N-1}{2}]}\\ Y_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\vec{p};h<h')=\frac{1}{\sqrt{2}}v_{[\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma]}(\vec{p},h');h,h'=1,2,\cdot\cdot,2^{[\frac{N-1}{2}]}\end{cases}$$

9.5 N+1维时空中反对称张量场的自旋基及其性质

定理9.5.1.
$$\begin{cases}U_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h)=2^{-[\frac{n}{2}]}\{(\frac{1}{l!}C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)\}\\ U_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h<h')=2^{-[\frac{n}{2}]}\sqrt{2}\{(\frac{1}{l!}C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')\}\\ U_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h')=2^{-[\frac{n}{2}]}\sqrt{2}^{1-\delta_{hh'}}\{(\frac{1}{l!}C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')\}\end{cases}$$

证明: ???$U_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h')=2^{-[\frac{n}{2}]}\sqrt{2}^{1-\delta_{hh'}}\{(\frac{1}{l!}C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')\}$
$=2^{-[\frac{n}{2}]}\sqrt{2}^{1-\delta_{hh'}}\{\frac{1}{l!}u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')(C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)\}$
$=2^{-[\frac{n}{2}]}\sqrt{2}^{1-\delta_{hh'}}\frac{1}{l!}u^T(\vec{p},h')C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}u(\vec{p},h)$ □

证明: $\sum_{h\le h'}\sqrt{2}^{1-\delta_{hh'}}[\frac{1}{l!}u^T(\vec{p},h')C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}u(\vec{p},h)][\frac{1}{l!}u^T(\vec{p},h')C^+\gamma_{[a'_1}\cdot\cdot\gamma_{a'_l]}u(\vec{p},h)]^+$
$=\sum_{h\le h'}\sqrt{2}^{1-\delta_{hh'}}[\frac{1}{l!}u^T(\vec{p},h')(C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})u(\vec{p},h)\frac{1}{l!}u^+(\vec{p},h)(C^+\gamma_{[a'_1}\cdot\cdot\gamma_{a'_l]})^+u^*(\vec{p},h')$
$=\frac{1}{(l!)^2}\sum_{h\le h'}\sqrt{2}^{1-\delta_{hh'}}[u^T(\vec{p},h')(C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})u(\vec{p},h)u^+(\vec{p},h)(\gamma_{[a'_l}\cdot\cdot\gamma_{a'_1]}C)u^*(\vec{p},h')$
$=\frac{i^{l(l-1)}}{(l!)^2}\sum_{h\le h'}\sqrt{2}^{1-\delta_{hh'}}[u^T(\vec{p},h')(C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})u(\vec{p},h)u^+(\vec{p},h)(\gamma_{[a'_1}\cdot\cdot\gamma_{a'_l]}C)u^*(\vec{p},h')$
$=\frac{i^{l(l-1)}}{(l!)^2}\sum_{h\le h'}\sqrt{2}^{1-\delta_{hh'}}[u_\mu(\vec{p},h')(C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu\lambda}u_\lambda(\vec{p},h)u^+_{\lambda'}(\vec{p},h)(\gamma_{[a'_1}\cdot\cdot\gamma_{a'_l]}C)^{\lambda'\mu'}u^+_{\mu'}(\vec{p},h')$
$=\frac{i^{l(l-1)}}{(l!)^2}[(C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu\lambda}[\sum_h u_\lambda(\vec{p},h)u^+_{\lambda'}(\vec{p},h)](\gamma_{[a'_1}\cdot\cdot\gamma_{a'_l]}C)^{\lambda'\mu'}[\sum_{h'}u_\mu(\vec{p},h')u^+_{\mu'}(\vec{p},h')]$
$=\frac{i^{l(l-1)}}{4m^2(l!)^2}[(C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu\lambda}[(m-i\gamma^ap_a)\gamma^0]_{\lambda\lambda'}(\gamma_{[a'_1}\cdot\cdot\gamma_{a'_l]}C)^{\lambda'\mu'}[(m-i\gamma^bp_b)\gamma^0]^T_{\mu'\mu}$
$=\frac{i^{l(l-1)}}{4m^2(l!)^2}tr\{[(C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})[(m-i\gamma^ap_a)\gamma^0](\gamma_{[a'_1}\cdot\cdot\gamma_{a'_l]}C)[(m-i\gamma^bp_b)\gamma^0]^T\}$
$=i\frac{4^{-[\frac{n}{2}]}}{2(l!)^2}i^{l(l-1)}tr\{C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_l]}[(m-i\gamma^ap_a)\gamma^0]\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2}\cdot\cdot\gamma_{a'_l]}C[(m-i\gamma^bp_b)\gamma^0]^T\}\Delta(x-x')$
$=-\frac{2^{[\frac{n}{2}]}(-1)^{\xi(n)+l}}{2m^2}\begin{cases}\frac{1}{(l+1)!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\eta^{a_l}_{a'_l}\eta^{a]}_{a']}p_ap^{+a'},(-1)^{\eta(n)+l}=1\\ \frac{1}{(l-1)!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_{l-1}}_{a'_{l-1}}p^{a_l]}p_{a'_l]},(-1)^{\eta(n)+l}=-1\end{cases}$
$=\frac{2^{[\frac{n}{2}]}(-1)^{\delta_{2,n}}}{2m^2}\begin{cases}\frac{1}{(l+1)!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\eta^{a_l}_{a'_l}\eta^{a]}_{a']}p_ap^{+a'},(-1)^{\eta(n)+l}=1\\ -\frac{1}{(l-1)!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_{l-1}}_{a'_{l-1}}p^{a_l]}p_{a'_l]},(-1)^{\eta(n)+l}=-1\end{cases}$ □

推论9.5.1. $\sum_{h\le h'}U_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h')U^+_{a'_1\cdot\cdot a'_l}(\vec{p};h,h')=\frac{(-1)^{\delta_{2,n}}}{2m^22^{[\frac{n}{2}]}}\begin{cases}\frac{1}{(l+1)!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\cdot\cdot\eta^{a_l}_{a'_l}\eta^{a]}_{a']}p_ap^{+a'},(-1)^{\eta(n)+l}=1\\ -\frac{1}{(l-1)!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_{l-1}}_{a'_{l-1}}p^{a_l]}p_{a'_l]},(-1)^{\eta(n)+l}=-1\end{cases}$

证明: $U^{+a'_1\cdot\cdot a'_l}(\vec{p};h,h')\eta^{a_1}_{a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_l}_{a'_l}U_{a_1\cdot\cdot a_l}(\vec{p};h,h')$
$=4^{-[\frac{n}{2}]}2^{1-\delta_{hh'}}i^{l(l-1)}\{\frac{1}{l!}u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},h')u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)(\gamma^{[a'_1}\cdot\cdot\gamma^{a'_l]}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\}\eta^{a_1}_{a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_l}_{a'_l}\{(\frac{1}{l!}C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')\}$
$=4^{-[\frac{n}{2}]}2^{1-\delta_{hh'}}i^{l(l-1)}[u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)][u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},h')u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')]\{(\frac{1}{l!}\gamma^{[a'_1}\cdot\cdot\gamma^{a'_l]}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}\eta^{a_1}_{a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_l}_{a'_l}(\frac{1}{l!}C^+\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}\}$

$$= 4^{-[\frac{n}{2}]}2^{1-\delta_{hh'}}i^{l(l+1)}[u^{+}_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)][u^{+}_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},h')u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')]\{(\frac{1}{l!}\gamma_0\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]}C\gamma_0)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\frac{1}{l!}C^{+}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}\}$$

$$= 4^{-[\frac{n}{2}]}2^{1-\delta_{hh'}}i^{l(l+1)}[\bar{u}_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)][\bar{u}_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},h')u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')]\{(\frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\frac{1}{l!}C^{+}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}\} \quad \square$$

9.6 N+1维时空中Dirac矩阵的正交性？

证明: $(\frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]}C)^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma}(\frac{1}{l!}C^{+}\gamma_{[a_1}\cdot\cdot\gamma_{a_l]})^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma} = ???\delta^{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}\delta^{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}+\cdots$ □

10 四维时空中特殊的反对称张量场

10.1 相关性质汇总

推论10.1.1. $v(\vec{p},h)=-\gamma_5 u(\vec{p},h), u(\vec{p},h)=-\gamma_5 v(\vec{p},h)$

性质10.1.1. $\begin{cases} u^T(\vec{p},h)C^{+}u(\vec{p},h')=0, u^T(\vec{p},h)C^{+}v(\vec{p},h)=0 \\ u^T(\vec{p},\frac{1}{2})C^{+}v(\vec{p},-\frac{1}{2})=-\varsigma, u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})C^{+}v(\vec{p},\frac{1}{2})=\varsigma \end{cases}$

性质10.1.2. $\begin{cases} u^T(\vec{p},h)C^{+}\gamma_5 u(\vec{p},h)=0, u^T(\vec{p},h)C^{+}\gamma_5 v(\vec{p},h')=0 \\ u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})C^{+}\gamma_5 u(\vec{p},\frac{1}{2})=-1, u^T(\vec{p},\frac{1}{2})C^{+}\gamma_5 u(\vec{p},-\frac{1}{2})=1 \end{cases}$

性质10.1.3. $\begin{cases} u^T(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\bar{C}\gamma_a u(\hat{p},\frac{\kappa}{2})=i\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},\kappa), u^T(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\bar{C}\gamma_a u(\hat{p},-\frac{\kappa}{2})=i\varepsilon_a(\vec{p},0) \\ u^T(\vec{p},\frac{\kappa}{2})C^{+}\gamma_a v(\vec{p},\frac{\kappa}{2})=0, u^T(\vec{p},\frac{1}{2})C^{+}\gamma_a v(\vec{p},-\frac{1}{2})=\frac{-i\varsigma p_a}{m}, u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})C^{+}\gamma_a v(\vec{p},\frac{1}{2})=\frac{i\varsigma p_a}{m} \end{cases}$

10.2 四维时空中特殊的反对称张量场平面波解

引理10.2.1.

$$\begin{cases} (\gamma^a\partial_a+m)X(4)=0 \\ X(4)=\{\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}+\frac{1}{(3!)^2}F^{abc}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}\}C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2!}\partial^{[a}F^{bc]}+mF^{abc}=0, \partial_a F^{ab}=0 \\ \partial^{[a}F^{bcd]}=0, \partial_a F^{abc}+mF^{bc}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1!}\partial^{[a}{*F^{b]}}+m{*F^{ab}}=0 \\ \partial_a{*F^{ab}}+m{*F^{b}}=0 \end{cases}$$

引理10.2.2.

$$\begin{cases} (\gamma^a\partial_a+m)\psi(x)=0 \\ tr\{C^{+}\psi(x)\}=0, tr\{C^{+}\gamma_a\psi(x)\}=0, tr\{C^{+}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}\psi(x)\}=0 \\ \psi(x)=\{\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}+\frac{1}{(3!)^2}F^{abc}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}\}C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2!}\partial^{[a}F^{bc]}+mF^{abc}=0, \partial_a F^{ab}=0 \\ \partial^{[a}F^{bcd]}=0, \partial_a F^{abc}+mF^{bc}=0 \end{cases}$$

证明:

$$\begin{cases} (\gamma^a\partial_a+m)\psi(x)=0 \\ tr\{C^{+}\psi(x)\}=0, tr\{C^{+}\gamma_a\psi(x)\}=0, tr\{C^{+}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]}\psi(x)\}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\sqrt{\frac{m}{E}}\sum_{h=1/2}^{-1/2}[a_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{ip\cdot x}+b^{+}_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)e^{-ip\cdot x}]d^N\vec{p} \\ \sum_{h=1/2}^{-1/2}C^{+\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}a_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)=0, \sum_{h=1/2}^{-1/2}(C^{+}\gamma_a)^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}a_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)=0 \\ \sum_{h=1/2}^{-1/2}(C^{+}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]})^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}a_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)=0 \end{cases} \quad \square$$

证明:

$$\begin{cases} \sum_{h=1/2}^{-1/2}C^{+\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}a_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)=0 \\ \sum_{h=1/2}^{-1/2}(C^{+}\gamma_a)^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}a_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)=0 \\ \sum_{h=1/2}^{-1/2}(C^{+}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_c\gamma_{d]})^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}a_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{h=1/2}^{-1/2}C^{+\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}a_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)=0 \\ \sum_{h=1/2}^{-1/2}(C^{+}\gamma_a)^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}a_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)=0 \\ \sum_{h=1/2}^{-1/2}(C^{+}\gamma_5)^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}a_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\sum_{h,h'=1/2}^{-1/2} C^{+\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}[a(\vec{p};h,h')u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')+c(\vec{p};h,h')v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')]u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)=0\\ \sum_{h,h'=1/2}^{-1/2}(C^+\gamma_a)^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}[a(\vec{p};h,h')u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')+c(\vec{p};h,h')v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')]u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)=0\\ \sum_{h,h'=1/2}^{-1/2}(C^+\gamma_5)^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}[a(\vec{p};h,h')u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')+c(\vec{p};h,h')v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')]u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\sum_{h,h'=1/2}^{-1/2} C^{+\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}[a(\vec{p};h,h')u_{[\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma]}(\vec{p},h')+c(\vec{p};h,h')u_{[\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma]}(\vec{p},h')]=0\\ \sum_{h,h'=1/2}^{-1/2}(C^+\gamma_a)^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}[a(\vec{p};h,h')u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma\}}(\vec{p},h')+c(\vec{p};h,h')u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma\}}(\vec{p},h')]=0\\ \sum_{h,h'=1/2}^{-1/2}(C^+\gamma_5)^{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}[a(\vec{p};h,h')u_{[\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma]}(\vec{p},h')+c(\vec{p};h,h')u_{[\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma]}(\vec{p},h')]=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\sum_{h,h'=1/2}^{-1/2} C^{+\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[a(\vec{p};h,h')u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')+c(\vec{p};h,h')u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')]=0\\ \sum_{h,h'=1/2}^{-1/2}(C^+\gamma_a)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[a(\vec{p};h,h')u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')+c(\vec{p};h,h')u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')]=0\\ \sum_{h,h'=1/2}^{-1/2}(C^+\gamma_5)^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[a(\vec{p};h,h')u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')+c(\vec{p};h,h')u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')]=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\sum_{h,h'=1/2}^{-1/2}[a(\vec{p};h,h')u^T(\vec{p},h)C^+u(\vec{p},h')+c(\vec{p};h,h')u^T(\vec{p},h)C^+v(\vec{p},h')]=0\\ \sum_{h,h'=1/2}^{-1/2}[a(\vec{p};h,h')u^T(\vec{p},h)C^+\gamma_a u(\vec{p},h')+c(\vec{p};h,h')u^T(\vec{p},h)C^+\gamma_a v(\vec{p},h')]=0\\ \sum_{h,h'=1/2}^{-1/2}[a(\vec{p};h,h')u^T(\vec{p},h)C^+\gamma_5 u(\vec{p},h')+c(\vec{p};h,h')u^T(\vec{p},h)C^+\gamma_5 v(\vec{p},h')]=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}c(\vec{p};\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=c(\vec{p};-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\\ i\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},1)a(\vec{p};\frac{1}{2},\frac{1}{2})+i\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},-1)a(\vec{p};-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})+i\varepsilon_a(\vec{p},0)[a(\vec{p};\frac{1}{2},-\frac{1}{2})+a(\vec{p};-\frac{1}{2},\frac{1}{2})]=0\\ a(\vec{p};\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=a(\vec{p};-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}c(\vec{p};\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=c(\vec{p};-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\\ a(\vec{p};h,h')=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int d^N\vec{p}\sqrt{\frac{m}{E}}\sum_{h,h'=1/2}^{-1/2}[a(\vec{p};h,h')u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')+c(\vec{p};h,h')u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')]e^{ip\cdot x}+\cdots$$

$\Rightarrow$

$$\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int d^N\vec{p}\sqrt{\frac{m}{E}}\sum_{h,h'=1/2}^{-1/2}c(\vec{p};h,h')u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')e^{ip\cdot x}+\cdots$$

$\Rightarrow$

$$\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int d^N\vec{p}\sqrt{\frac{m}{E}}e^{ip\cdot x}$$
$$\{c(\vec{p};\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})+c(\vec{p};-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+c(\vec{p};\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]\}+\cdots$$

$\Rightarrow$

$$\psi_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int d^N\vec{p}\sqrt{\frac{m}{E}}e^{ip\cdot x}$$
$$\{c(\vec{p};1)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})+c(\vec{p};-1)u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+c(\vec{p};0)\frac{1}{\sqrt{2}}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]\}+\cdots$$

□

10.3 四维时空中特殊的反对称张量场的B-W准投影算子

证明:

$$u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})+u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})$$
$$+\tfrac{1}{\sqrt{2}}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]\tfrac{1}{\sqrt{2}}[u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})+u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$
$$=[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})][v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]+[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})][v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$
$$+\tfrac{1}{2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})][v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]+\tfrac{1}{2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})][v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$
$$+\tfrac{1}{2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})][v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]+\tfrac{1}{2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})][v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$
$$=\tfrac{1}{2}\sum_{h=1/2}^{-1/2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)]\sum_{h'=1/2}^{-1/2}[v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},h')]$$
$$+\tfrac{1}{2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})][v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]+\tfrac{1}{2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})][v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$
$$+\tfrac{1}{2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})][v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]+\tfrac{1}{2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})][v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$
$$=\tfrac{1}{2}\sum_{h=1/2}^{-1/2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)]\sum_{h'=1/2}^{-1/2}[v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},h')]$$
$$+\tfrac{1}{2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})][v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]+\tfrac{1}{2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})][v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]$$
$$+\tfrac{1}{2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})][v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})]+\tfrac{1}{2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})][v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})]$$
$$=\tfrac{1}{2}\sum_{h=1/2}^{-1/2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)]\sum_{h'=1/2}^{-1/2}[v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},h')]+\tfrac{1}{2}\sum_{h=1/2}^{-1/2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},h)]\sum_{h'=1/2}^{-1/2}[v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h')]$$
$$=\tfrac{1}{2}\sum_{h=1/2}^{-1/2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)]\sum_{h'=1/2}^{-1/2}[v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')v^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},h')]$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum_{h=1/2}^{-1/2}[u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)[u^+(\vec{p},h)\gamma_5]_{\mu'_\varsigma}]\sum_{h'=1/2}^{-1/2}[v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h')[v^+(\vec{p},h')\gamma_5]_{\lambda'_\varsigma}]$$
$$=\tfrac{1}{2}\tfrac{[(m-i\gamma^a p_a)\gamma_0]_{\lambda_\varsigma\lambda'_\varsigma}}{2m}\tfrac{[(-m-i\gamma^a p_a)\gamma_0]_{\mu_\varsigma\mu'_\varsigma}}{2m}+\tfrac{1}{2}\tfrac{[(m-i\gamma^a p_a)\gamma_0\gamma_5]_{\lambda_\varsigma\mu'_\varsigma}}{2m}\tfrac{[(-m-i\gamma^a p_a)\gamma_0\gamma_5]_{\mu_\varsigma\lambda'_\varsigma}}{2m}\qquad\square$$

10.4 四维时空中特殊的反对称张量场的势对易规则

定理10.4.1. $[F_{a_1a_2}(x),F^+_{a'_1a'_2}(x')]=\frac{i}{2^2}\{\frac{1}{2!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2]}_{a'_2]}m^2-\frac{1}{1!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\partial^{a_2]}\partial^+_{a'_2]}\}\Delta(x-x')=\frac{i}{2^2}\frac{1}{3!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\eta^{a]}_{b]}\partial_a\partial^{+b}\Delta(x-x')$

证明: $[F_{a_1a_2}(x),F^+_{a'_1a'_2}(x')]$

$$=\tfrac{2^{-4}}{(2!)^2}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]})^{\mu\lambda}(C^+\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]})^{*\mu'\lambda'}[\psi_{\lambda\mu}(x),\psi^+_{\lambda'\mu'}(x')]$$
$$=\tfrac{2^{-4}}{(2!)^2}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]})^{\lambda\mu}(C^+\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]})^{+\lambda'\mu'}[\psi_{\lambda\mu}(x),\psi^+_{\lambda'\mu'}(x')]$$
$$=\tfrac{2^{-4}}{(2!)^2}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]})^{\lambda\mu}(\gamma_{[a'_2}\gamma_{a'_1]}C)^{\lambda'\mu'}[\psi_{\lambda\mu}(x),\psi^+_{\lambda'\mu'}(x')]$$
$$=-\tfrac{2^{-4}}{(2!)^2}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]})^{\lambda\mu}(\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]}C)^{\lambda'\mu'}[\psi_{\lambda\mu}(x),\psi^+_{\lambda'\mu'}(x')]$$
$$=-\tfrac{2^{-4}}{(2!)^2}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]})^{\lambda\mu}(\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]}C)^{\lambda'\mu'}$$
$$\tfrac{i}{2^2}\{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda\lambda'}[(-m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu\mu'}+[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0\gamma^5]_{\mu\lambda'}[(-m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0\gamma^5]_{\lambda\mu'}\}\Delta(x-x')$$
$$=-i\tfrac{2^{-6}}{(2!)^2}(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]})^{\lambda\mu}(\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]}C)^{\lambda'\mu'}$$
$$\{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda\lambda'}[(-m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]_{\mu\mu'}+[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0\gamma^5]_{\lambda\lambda'}[(-m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0\gamma^5]_{\mu\mu'}\}\Delta(x-x')$$
$$=-i\tfrac{2^{-6}}{(2!)^2}\{(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]})^{\lambda\mu}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]_{\lambda\lambda'}(\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]}C)^{\lambda'\mu'}[(-m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]^T_{\mu'\mu}\Delta(x-x')$$
$$+(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]})^{\lambda\mu}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0\gamma^5]_{\lambda\lambda'}(\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]}C)^{\lambda'\mu'}[(-m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0\gamma^5]^T_{\mu'\mu}\Delta(x-x')\}$$
$$=-i\tfrac{2^{-6}}{(2!)^2}tr\{(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]})[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0](\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]}C)[(-m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]^T$$
$$+(C^+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]})[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0\gamma^5](\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]}C)[(-m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0\gamma^5]^T\}\Delta(x-x')$$
$$=-i\tfrac{2^{-6}}{(2!)^2}tr\{\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]}C[(-m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0]^TC^+$$
$$+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0\gamma^5]\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]}C[(-m-\gamma^b\partial_b)\gamma^0\gamma^5]^TC^+\}\Delta(x-x')$$
$$=i\tfrac{2^{-6}}{(2!)^2}tr\{\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]}[\gamma^0(-m+\gamma^b\partial_b)]+\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0\gamma^5]\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]}[\gamma^5\gamma^0(-m+\gamma^b\partial_b)]\}\Delta(x-x')$$
$$=i\tfrac{2^{-5}}{(2!)^2}tr\{\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]}[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^0]\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]}[(-m-\gamma^b\partial^+_b)\gamma^0]\}\Delta(x-x')$$
$$=i\tfrac{2^{-5}}{(2!)^2}tr\{-m^2(\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]})\gamma^0(\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]})\gamma^0\}\Delta(x-x')+i\tfrac{2^{-5}}{(2!)^2}tr\{(\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2]})\gamma_a\gamma_0(\gamma_{[a'_1}\gamma_{a'_2]})\gamma_b\gamma_0\}\partial^a\partial^b\Delta(x-x')$$
$$=-i\tfrac{2^{-5}}{(2!)^2}i^{2*3}2^2(2!)^2m^2\tfrac{1}{2!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2]}_{a'_2]}\Delta(x-x')$$

$+ i\frac{2^{-5}}{(2!)^2}i^{3*4}2^2(2!)^2\{\frac{1}{3!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\eta^{a]}_{b]} - \frac{1}{1!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2]a}\delta_{a'_2]b}\}\partial_a\partial^{+b}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2^3}\{\frac{1}{2!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2]}_{a'_2]}m^2 + (\frac{1}{3!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\eta^{a]}_{b]} - \frac{1}{1!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\delta^{a_2]a}\delta_{a'_2]b})\partial_a\partial^{+b}\}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2^2}\{\frac{1}{2!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2]}_{a'_2]}m^2 - \frac{1}{1!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\partial^{a_2]}\partial^+_{a'_2]}\}\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2^2}\frac{1}{3!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\eta^{a]}_{b]}\partial_a\partial^{+b}\Delta(x-x')$ □

推论10.4.1. $[F^{a_1a_2a_3}(x), F^+_{a'_1a'_2a'_3}(x')] = -\frac{i}{2^2}\frac{1}{2!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\partial^{a_3]}\partial^+_{a'_3]}\Delta(x-x')$

定理10.4.2.

$$\begin{cases}[F^{a_1a_2a_3}(x), F^+_{a'_1a'_2a'_3}(x')] = -\frac{i}{2^2}\frac{1}{2!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\partial^{a_3]}\partial^+_{a'_3]}\Delta(x-x') \Leftrightarrow [*F_{a_0}, *F^+_{a'_0}] = \frac{i}{2^2}\frac{1}{2!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a]}_{a']}\partial_a\partial^{+a'}\Delta(x-x')\\ [F_{a_1a_2}(x), F^+_{a'_1a'_2}(x')] = \frac{i}{2^2}\frac{1}{3!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\eta^{a]}_{b]}\partial_a\partial^{+b}\Delta(x-x') \Leftrightarrow [*F_{a_1a_2}(x), *F^+_{a'_1a'_2}(x')] = -\frac{i}{2^2}\eta_{[a_1[a'_1}\partial_{a_2]}\partial^+_{a'_2]}\Delta(x-x')\end{cases}$$

证明: $[\frac{1}{3!}\varepsilon_{a_0a_1a_2a_3}F^{a_1a_2a_3}(x), \frac{1}{3!}\varepsilon^{a'_0a'_1a'_2a'_3}F^+_{a'_1a'_2a'_3}(x')]$
$= -\frac{1}{(3!)^2}\varepsilon_{a_0a_1a_2a_3}\varepsilon^{a'_0a'_1a'_2a'_3}\frac{i}{2^2}\frac{1}{2!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\partial^{a_3]}\partial^+_{a'_3]}\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2^2}\frac{1}{2!}\varepsilon_{a_0a_1a_2a_3}\varepsilon^{a'_0a'_1a'_2a'_3}\eta^{a_1}_{a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\partial^{a_3}\partial^+_{a'_3}$
$= -\frac{i}{2^2}\frac{1}{2!}\delta^{a'_0}_{[a_0}\delta^{a'_1}_{a_1}\delta^{a'_2}_{a_2}\delta^{a'_3}_{a_3]}\eta^{a_1}_{a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\partial^{a_3}\partial^+_{a'_3}\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2^2}\frac{1}{2!}(\delta^{a'_0}_{a_0}\delta^{a'_1}_{[a_1}\delta^{a'_2}_{a_2}\delta^{a'_3}_{a_3]} - \delta^{a'_0}_{a_1}\delta^{a'_1}_{[a_0}\delta^{a'_2}_{a_2}\delta^{a'_3}_{a_3]} + \delta^{a'_0}_{a_2}\delta^{a'_1}_{[a_0}\delta^{a'_2}_{a_1}\delta^{a'_3}_{a_3]} - \delta^{a'_0}_{a_3}\delta^{a'_1}_{[a_0}\delta^{a'_2}_{a_1}\delta^{a'_3}_{a_2]})\eta^{a_1}_{a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\partial^{a_3}\partial^+_{a'_3}\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2^2}\frac{1}{2!}\{\delta^{a'_0}_{a_0}(\delta^{a'_1}_{a_1}\delta^{a'_2}_{a_2}\delta^{a'_3}_{a_3} - \delta^{a'_1}_{a_1}\delta^{a'_2}_{a_3}\delta^{a'_3}_{a_2} + \delta^{a'_1}_{a_2}\delta^{a'_2}_{a_3}\delta^{a'_3}_{a_1} - \delta^{a'_1}_{a_2}\delta^{a'_2}_{a_1}\delta^{a'_3}_{a_3} + \delta^{a'_1}_{a_3}\delta^{a'_2}_{a_1}\delta^{a'_3}_{a_2} - \delta^{a'_1}_{a_3}\delta^{a'_2}_{a_2}\delta^{a'_3}_{a_1})\eta^{a_1}_{a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\partial^{a_3}\partial^+_{a'_3}$
$- \delta^{a'_0}_{a_1}(\delta^{a'_1}_{a_0}\delta^{a'_2}_{a_2}\delta^{a'_3}_{a_3} - \delta^{a'_1}_{a_0}\delta^{a'_2}_{a_3}\delta^{a'_3}_{a_2} + \delta^{a'_1}_{a_2}\delta^{a'_2}_{a_3}\delta^{a'_3}_{a_0} - \delta^{a'_1}_{a_2}\delta^{a'_2}_{a_0}\delta^{a'_3}_{a_3} + \delta^{a'_1}_{a_3}\delta^{a'_2}_{a_0}\delta^{a'_3}_{a_2} - \delta^{a'_1}_{a_3}\delta^{a'_2}_{a_2}\delta^{a'_3}_{a_0})\eta^{a_1}_{a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\partial^{a_3}\partial^+_{a'_3}$
$- \delta^{a'_0}_{a_2}(\delta^{a'_1}_{a_1}\delta^{a'_2}_{a_0}\delta^{a'_3}_{a_3} - \delta^{a'_1}_{a_1}\delta^{a'_2}_{a_3}\delta^{a'_3}_{a_0} + \delta^{a'_1}_{a_0}\delta^{a'_2}_{a_3}\delta^{a'_3}_{a_1} - \delta^{a'_1}_{a_0}\delta^{a'_2}_{a_1}\delta^{a'_3}_{a_3} + \delta^{a'_1}_{a_3}\delta^{a'_2}_{a_1}\delta^{a'_3}_{a_0} - \delta^{a'_1}_{a_3}\delta^{a'_2}_{a_0}\delta^{a'_3}_{a_1})\eta^{a_1}_{a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\partial^{a_3}\partial^+_{a'_3}$
$- \delta^{a'_0}_{a_3}(\delta^{a'_1}_{a_1}\delta^{a'_2}_{a_2}\delta^{a'_3}_{a_0} - \delta^{a'_1}_{a_1}\delta^{a'_2}_{a_0}\delta^{a'_3}_{a_2} + \delta^{a'_1}_{a_2}\delta^{a'_2}_{a_0}\delta^{a'_3}_{a_1} - \delta^{a'_1}_{a_2}\delta^{a'_2}_{a_1}\delta^{a'_3}_{a_0} + \delta^{a'_1}_{a_0}\delta^{a'_2}_{a_1}\delta^{a'_3}_{a_2} - \delta^{a'_1}_{a_0}\delta^{a'_2}_{a_2}\delta^{a'_3}_{a_1})\eta^{a_1}_{a'_1}\eta^{a_2}_{a'_2}\partial^{a_3}\partial^+_{a'_3}\}\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2^2}\frac{1}{2!}\{\delta^{a'_0}_{a_0}(\eta^{a_1}_{a_1}\eta^{a_2}_{a_2}\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} - \eta^{a_1}_{a_1}\eta^{a_2}_{a_3}\partial^{a_3}\partial^+_{a_2} + \eta^{a_1}_{a_2}\eta^{a_2}_{a_3}\partial^{a_3}\partial^+_{a_1} - \eta^{a_1}_{a_2}\eta^{a_2}_{a_1}\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} + \eta^{a_1}_{a_3}\eta^{a_2}_{a_1}\partial^{a_3}\partial^+_{a_2} - \eta^{a_1}_{a_3}\eta^{a_2}_{a_2}\partial^{a_3}\partial^+_{a_1})$
$- \delta^{a'_0}_{a_1}(\eta^{a_1}_{a_0}\eta^{a_2}_{a_2}\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} - \eta^{a_1}_{a_0}\eta^{a_2}_{a_3}\partial^{a_3}\partial^+_{a_2} + \eta^{a_1}_{a_2}\eta^{a_2}_{a_3}\partial^{a_3}\partial^+_{a_0} - \eta^{a_1}_{a_2}\eta^{a_2}_{a_0}\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} + \eta^{a_1}_{a_3}\eta^{a_2}_{a_0}\partial^{a_3}\partial^+_{a_2} - \eta^{a_1}_{a_3}\eta^{a_2}_{a_2}\partial^{a_3}\partial^+_{a_0})$
$- \delta^{a'_0}_{a_2}(\eta^{a_1}_{a_1}\eta^{a_2}_{a_0}\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} - \eta^{a_1}_{a_1}\eta^{a_2}_{a_3}\partial^{a_3}\partial^+_{a_0} + \eta^{a_1}_{a_0}\eta^{a_2}_{a_3}\partial^{a_3}\partial^+_{a_1} - \eta^{a_1}_{a_0}\eta^{a_2}_{a_1}\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} + \eta^{a_1}_{a_3}\eta^{a_2}_{a_1}\partial^{a_3}\partial^+_{a_0} - \eta^{a_1}_{a_3}\eta^{a_2}_{a_0}\partial^{a_3}\partial^+_{a_1})$
$- \delta^{a'_0}_{a_3}(\eta^{a_1}_{a_1}\eta^{a_2}_{a_2}\partial^{a_3}\partial^+_{a_0} - \eta^{a_1}_{a_1}\eta^{a_2}_{a_0}\partial^{a_3}\partial^+_{a_2} + \eta^{a_1}_{a_2}\eta^{a_2}_{a_0}\partial^{a_3}\partial^+_{a_1} - \eta^{a_1}_{a_2}\eta^{a_2}_{a_1}\partial^{a_3}\partial^+_{a_0} + \eta^{a_1}_{a_0}\eta^{a_2}_{a_1}\partial^{a_3}\partial^+_{a_2} - \eta^{a_1}_{a_0}\eta^{a_2}_{a_2}\partial^{a_3}\partial^+_{a_1})\}\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2^2}\frac{1}{2!}\{\delta^{a'_0}_{a_0}(4\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} - 2\partial^{a_3}\partial_{a_3} + \partial^{a_3}\partial^+_{a_3} - 4\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} + \partial^{a_3}\partial^+_{a_3} - 2\partial^{a_3}\partial_{a_3})$
$- \delta^{a'_0}_{a_1}(2\eta^{a_1}_{a_0}\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} - \eta^{a_1}_{a_0}\partial^{a_3}\partial_{a_3} + \partial^{a_1}\partial^+_{a_0} - \delta^{a_1}_{a_0}\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} + \partial^{+a_1}\partial_{a_0} - 2\partial^{+a_1}\partial^+_{a_0})$
$- \delta^{a'_0}_{a_2}(2\eta^{a_2}_{a_0}\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} - 2\partial^{+a_2}\partial^+_{a_0} + \partial^{+a_2}\partial_{a_0} - \delta^{a_2}_{a_0}\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} + \partial^{a_2}\partial^+_{a_0} - \eta^{a_2}_{a_0}\partial^{+a_1}\partial^+_{a_1})$
$- \delta^{a'_0}_{a_3}(4\partial^{a_3}\partial^+_{a_0} - 2\partial^{a_3}\partial_{a_0} + \partial^{a_3}\partial^+_{a_0} - 4\partial^{a_3}\partial^+_{a_0} + \partial^{a_3}\partial^+_{a_0} - 2\partial^{a_3}\partial_{a_0})\}\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2^2}\frac{1}{2!}\{\delta^{a'_0}_{a_0}(4\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} - 2\partial^{a_3}\partial_{a_3} + \partial^{a_3}\partial^+_{a_3} - 4\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} + \partial^{a_3}\partial^+_{a_3} - 2\partial^{a_3}\partial_{a_3})$
$- (2\eta^{a'_0}_{a_0}\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} - \eta^{a'_0}_{a_0}\partial^{a_3}\partial_{a_3} + \partial^{a'_0}\partial^+_{a_0} - \delta^{a'_0}_{a_0}\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} + \partial^{+a'_0}\partial_{a_0} - 2\partial^{+a'_0}\partial^+_{a_0})$
$- (2\eta^{a'_0}_{a_0}\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} - 2\partial^{+a'_0}\partial^+_{a_0} + \partial^{+a'_0}\partial_{a_0} - \delta^{a'_0}_{a_0}\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} + \partial^{a'_0}\partial^+_{a_0} - \eta^{a'_0}_{a_0}\partial^{+a_1}\partial^+_{a_1})$
$- (4\partial^{a'_0}\partial^+_{a_0} - 2\partial^{a'_0}\partial_{a_0} + \partial^{a'_0}\partial^+_{a_0} - 4\partial^{a'_0}\partial^+_{a_0} + \partial^{a'_0}\partial^+_{a_0} - 2\partial^{a'_0}\partial_{a_0})\}\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2^2}\frac{1}{2!}\{\delta^{a'_0}_{a_0}(4\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} - 4\partial^{a_3}\partial_{a_3}) - 2(2\eta^{a'_0}_{a_0}\partial^{a_3}\partial^+_{a_3} - \eta^{a'_0}_{a_0}\partial^{a_3}\partial_{a_3} + \partial^{a'_0}\partial^+_{a_0} + \partial^{+a'_0}\partial_{a_0} - 2\partial^{+a'_0}\partial^+_{a_0})$
$- (2\partial^{a'_0}\partial^+_{a_0} - 4\partial^{a'_0}\partial_{a_0})\}\Delta(x-x')$
$= -\frac{i}{2^2}\frac{1}{2!}\{-8\delta^{a'_0}_{a_0}\partial^2_\pi - 2[\eta^{a'_0}_{a_0}(\nabla^2 - 3\partial^2_\pi) + \partial^{a'_0}\partial^+_{a_0} + \partial^{+a'_0}\partial_{a_0} - 2\partial^{+a'_0}\partial^+_{a_0}] - (2\partial^{a'_0}\partial^+_{a_0} - 4\partial^{a'_0}\partial_{a_0})\}$
$= \frac{i}{2^2}m^2(\eta^{a'_0}_{a_0} - \frac{\partial_{a_0}\partial^{+a'_0}}{m^2})\Delta(x-x')$
$= \frac{i}{2^2}\frac{1}{2!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\eta^{a]}_{a']}\partial_a\partial^{+a'}\Delta(x-x')$ □

11 相关性质的具体计算

11.1 四维时空中特殊的反对称张量场具体计算一

性质11.1.1. $\begin{cases}u^T(\vec{p},h)C^+u(\vec{p},h') = 0, u^T(\vec{p},h)C^+v(\vec{p},h) = 0\\ u^T(\vec{p},\frac{1}{2})C^+v(\vec{p},-\frac{1}{2}) = -\varsigma, u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})C^+v(\vec{p},\frac{1}{2}) = \varsigma\end{cases}$

证明: $u^T(\vec{p},h)C^+u(\vec{p},h) = 0$
$u^T(\vec{p},\frac{1}{2})C^+u(\vec{p},-\frac{1}{2}) = -u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})C^+u(\vec{p},\frac{1}{2})$

$= \frac{\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}^T (i\varsigma\sigma_y \otimes \sigma_z) \frac{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E-\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E-|\vec{p}| \end{bmatrix}$

$= \frac{i\varsigma\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})\sigma_y\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}{2m^3} \otimes (\begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m \\ -\varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix})$

$= 0$ □

证明: $u^T(\vec{p},h)C^+v(\vec{p},h) = 0$

$u^T(\vec{p},\frac{1}{2})C^+v(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$= \frac{\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}^T (i\varsigma\sigma_y \otimes \sigma_z) \frac{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E-\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} -m \\ \varsigma E-|\vec{p}| \end{bmatrix}$

$= \frac{i\varsigma\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})\sigma_y\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}{2m^2} \otimes (\begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -m \\ -\varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix})$

$= -i\varsigma\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})\sigma_y\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})$

$= -\varsigma\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})$

$= -\varsigma$ □

证明:

$u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})C^+v(\vec{p},\frac{1}{2})$

$= \frac{\lambda^T(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E-\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E-|\vec{p}| \end{bmatrix}^T (i\varsigma\sigma_y \otimes \sigma_z) \frac{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} -m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}$

$= \frac{i\varsigma\lambda^T(\hat{p},-\frac{1}{2})\sigma_y\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}{2m^2} \otimes (\begin{bmatrix} m \\ \varsigma E-|\vec{p}| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -m \\ -\varsigma E-|\vec{p}| \end{bmatrix})$

$= -i\varsigma\lambda^T(\hat{p},-\frac{1}{2})\sigma_y\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})$

$= \varsigma\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})\sigma_y\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})$

$= \varsigma$ □

11.2 四维时空中特殊的反对称张量场具体计算二

性质11.2.1. $\begin{cases} u^T(\vec{p},h)C^+\gamma_5 u(\vec{p},h) = 0, u^T(\vec{p},h)C^+\gamma_5 v(\vec{p},h') = 0 \\ u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})C^+\gamma_5 u(\vec{p},\frac{1}{2}) = -1, u^T(\vec{p},\frac{1}{2})C^+\gamma_5 u(\vec{p},-\frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$

证明:

$u^T(\vec{p},\frac{1}{2})C^+\gamma_5 v(\vec{p},-\frac{1}{2})$

$= \frac{\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}^T (i\sigma_y \otimes I) \frac{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E-\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} -m \\ \varsigma E-|\vec{p}| \end{bmatrix}$

$= \frac{i\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})\sigma_y\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}{2m^2} \otimes (\begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -m \\ \varsigma E-|\vec{p}| \end{bmatrix})$

$= 0$ □

证明:

$u^T(\vec{p},\frac{1}{2})C^+\gamma_5 u(\vec{p},-\frac{1}{2}) = -u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})C^+\gamma_5 u(\vec{p},\frac{1}{2})$

$= \frac{\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}^T (i\sigma_y \otimes I) \frac{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E-\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E-|\vec{p}| \end{bmatrix}$

$= \frac{i\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})\sigma_y\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}{2m^2} \otimes (\begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E-|\vec{p}| \end{bmatrix})$

$= 1$ □

11.3 四维时空中特殊的反对称张量场具体计算三

性质11.3.1. $\begin{cases} u^T(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\bar{C}\gamma_a u(\hat{p},\frac{\kappa}{2}) = i\sqrt{2}\varepsilon_a(\vec{p},\kappa), u^T(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\bar{C}\gamma_a u(\hat{p},-\frac{\kappa}{2}) = i\varepsilon_a(\vec{p},0) \\ u^T(\vec{p},\frac{\kappa}{2})C^+\gamma_a v(\vec{p},\frac{\kappa}{2}) = 0, u^T(\vec{p},\frac{1}{2})C^+\gamma_a v(\vec{p},-\frac{1}{2}) = \frac{-i\varsigma p_a}{m}, u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})C^+\gamma_a v(\vec{p},\frac{1}{2}) = \frac{i\varsigma p_a}{m} \end{cases}$

证明:

$u^T(\vec{p},\frac{1}{2})C^+\gamma_a v(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$= \frac{\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}^T (i\varsigma\sigma_y\otimes\sigma_z)\gamma_a \frac{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E-\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} -m \\ \varsigma E-|\vec{p}| \end{bmatrix}$
$= \frac{\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}^T (\varsigma I\otimes\sigma_z)(\sigma_x\otimes\sigma_y,\sigma_y\otimes\sigma_y,\sigma_z\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x) \frac{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E-\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} -m \\ \varsigma E-|\vec{p}| \end{bmatrix}$
$= \frac{\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}^T (-i\varsigma\sigma\otimes\sigma_x, iI\otimes\sigma_y) \frac{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E-\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} -m \\ \varsigma E-|\vec{p}| \end{bmatrix}$
$= (\frac{-i\varsigma\vec{p}}{m}, \frac{\varsigma E}{m})$
$= \frac{-i\varsigma p_a}{m}$ □

证明:

$u^T(\vec{p},-\frac{1}{2})C^+\gamma_a v(\vec{p},\frac{1}{2})$
$= \frac{\lambda^T(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E-\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E-|\vec{p}| \end{bmatrix}^T (i\varsigma\sigma_y\otimes\sigma_z)\gamma_a \frac{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} -m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}$
$= -\frac{\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E-\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E-|\vec{p}| \end{bmatrix}^T (\varsigma I\otimes\sigma_z)(\sigma_x\otimes\sigma_y,\sigma_y\otimes\sigma_y,\sigma_z\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x) \frac{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} -m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}$
$= -\frac{\lambda^+(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E-\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E-|\vec{p}| \end{bmatrix}^T (-i\varsigma\sigma\otimes\sigma_x, iI\otimes\sigma_y) \frac{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} -m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}$
$= (\frac{i\varsigma\vec{p}}{m}, -\frac{\varsigma E}{m})$
$= \frac{i\varsigma p_a}{m}$ □

证明:

$u^T(\vec{p},\frac{1}{2})C^+\gamma_a v(\vec{p},\frac{1}{2})$
$= \frac{\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}^T (i\varsigma\sigma_y\otimes\sigma_z)\gamma_a \frac{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} -m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}$
$= \frac{\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}^T (\varsigma I\otimes\sigma_z)(\sigma_x\otimes\sigma_y,\sigma_y\otimes\sigma_y,\sigma_z\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x) \frac{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} -m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}$
$= \frac{\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}^T (-i\varsigma\sigma\otimes\sigma_x, iI\otimes\sigma_y) \frac{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} -m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}$
$= 0$ □

11.4 四维时空中特殊的反对称张量场具体计算四

性质11.4.1. $u^T(\hat{p},\frac{\kappa}{2})\bar{C}\gamma_{[a}\gamma_{b]}u(\hat{p},\frac{\kappa}{2}) = i\sqrt{2}p_a\varepsilon_b(\vec{p},\kappa)$

证明:

$u^T(\vec{p},\frac{1}{2})C^+\gamma_{[a}\gamma_{b]}v(\vec{p},-\frac{1}{2})$
$= \frac{\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}^T (i\varsigma\sigma_y\otimes\sigma_z)\gamma_{[a}\gamma_{b]} \frac{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E-\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} -m \\ \varsigma E-|\vec{p}| \end{bmatrix}$
$= \frac{\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}} \otimes \begin{bmatrix} m \\ \varsigma E+|\vec{p}| \end{bmatrix}^T$

$(\varsigma I\otimes\sigma_z)(i\sigma_z\otimes I,i\sigma_x\otimes I,i\sigma_y\otimes I,-i\varsigma\sigma_x\otimes\sigma_z,-i\varsigma\sigma_y\otimes\sigma_z,-i\varsigma\sigma_z\otimes\sigma_z)$
$\frac{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E-\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}-m\\ \varsigma E-|\vec{p}|\end{bmatrix}$
$=\frac{\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}m\\ \varsigma E+|\vec{p}|\end{bmatrix}^T$
$(i\varsigma\sigma_z\otimes\sigma_z,i\varsigma\sigma_x\otimes\sigma_z,i\varsigma\sigma_y\otimes\sigma_z,-i\sigma_x\otimes I,-i\sigma_y\otimes I,-i\sigma_z\otimes I)$
$\frac{\lambda(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E-\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}-m\\ \varsigma E-|\vec{p}|\end{bmatrix}$
$=(i\varsigma\hat{p}_z,i\varsigma\hat{p}_x,i\varsigma\hat{p}_y,0,0,0)$ □

证明:
$u^T(\vec{p},\frac{1}{2})C^+\gamma_{[a}\gamma_{b]}v(\vec{p},\frac{1}{2})$
$=\frac{\lambda^T(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}m\\ \varsigma E+|\vec{p}|\end{bmatrix}^T(i\varsigma\sigma_y\otimes\sigma_z)\gamma_{[a}\gamma_{b]}\frac{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}-m\\ \varsigma E+|\vec{p}|\end{bmatrix}$
$=\frac{\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}m\\ \varsigma E+|\vec{p}|\end{bmatrix}^T$
$(\varsigma I\otimes\sigma_z)(i\sigma_z\otimes I,i\sigma_x\otimes I,i\sigma_y\otimes I,-i\varsigma\sigma_x\otimes\sigma_z,-i\varsigma\sigma_y\otimes\sigma_z,-i\varsigma\sigma_z\otimes\sigma_z)$
$\frac{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}-m\\ \varsigma E+|\vec{p}|\end{bmatrix}$
$=\frac{\lambda^+(\hat{p},-\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}m\\ \varsigma E+|\vec{p}|\end{bmatrix}^T$
$(i\varsigma\sigma_z\otimes\sigma_z,i\varsigma\sigma_x\otimes\sigma_z,i\varsigma\sigma_y\otimes\sigma_z,-i\sigma_x\otimes I,-i\sigma_y\otimes I,-i\sigma_z\otimes I)$
$\frac{\lambda(\hat{p},\frac{1}{2})}{\sqrt{2m(E+\varsigma|\vec{p}|)}}\otimes\begin{bmatrix}-m\\ \varsigma E+|\vec{p}|\end{bmatrix}$
$=$ □

12 N+1维时空中的基本反对称张量场高阶推广的猜想

12.1 N+1维时空中有质量自旋$s=n$的Bargmann-Wigner方程的猜想

定义12.1.1. $\mathbb{X}^{a_1\cdot\cdot a_l}:=\{\frac{1}{l!}\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]}+\frac{(-1)^l}{(l+1)!m}\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_{l+1}]}\partial_{a_{l+1}}\}C\frac{1}{l!}$

猜想12.1.1.

$$\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma=\frac{1}{(2n)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma\}}_{2n}}{}^\sigma\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma}_{2n}}{}^\sigma=\frac{1}{(l!)^2}F_{a_1\cdot\cdot a_l\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma}_{2n-2}}{}^\sigma\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]}C+\frac{1}{[(l+1)!]^2}F_{a_1\cdot\cdot a_{l+1}\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma}_{2n-2}}{}^\sigma\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_{l+1}]}C\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}(-\partial^d\partial_d+m^2)A_{\underbrace{a_1\cdot\cdot a_l|b_1\cdot\cdot b_l|c_1\cdot\cdot c_l|\cdot\cdot}_{n}}{}^\sigma=0\\ \delta^{a_1b_1}A_{\underbrace{a_1\cdot\cdot a_l|b_1\cdot\cdot b_l|c_1\cdot\cdot c_l|\cdot\cdot}_{n}}{}^\sigma=0,\partial^{a_1}A_{\underbrace{a_1\cdot\cdot a_l|b_1\cdot\cdot b_l|c_1\cdot\cdot c_l|\cdot\cdot}_{n}}{}^\sigma=0\\ A_{\underbrace{a_1\cdot\cdot a_l|b_1\cdot\cdot b_l|c_1\cdot\cdot c_l|\cdot\cdot}_{n}}{}^\sigma\text{关于}a_1b_1c_1\cdot\cdot\text{全对称,关于}a_1\cdot\cdot a_l,b_1\cdot\cdot b_l,c_1\cdot\cdot c_l,\cdot\cdot\text{全反对称}\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\rho_\varsigma\tau_\varsigma\cdot\cdot}_{2n}}{}^\sigma=\overbrace{\mathbb{X}^{a_1\cdot\cdot a_l}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^{b_1\cdot\cdot b_l}_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\mathbb{X}^{c_1\cdot\cdot c_l}_{\rho_\varsigma\tau_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}A_{\underbrace{a_1\cdot\cdot a_l|b_1\cdot\cdot b_l|c_1\cdot\cdot c_l|\cdot\cdot}_{n}}{}^\sigma\end{cases}$$

12.2 N+1维时空中有质量自旋$s=n+\frac{1}{2}$的Bargmann-Wigner方程的猜想

猜想12.2.1.

$$\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]\psi_{\underbrace{[\lambda_\varsigma]\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma}_{2n+1}}{}^\sigma=0,\psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma}_{2n+1}}{}^\sigma=\frac{1}{(2n+1)!}\psi_{\underbrace{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma\}}_{2n+1}}{}^\sigma\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma}_{2n+1}}{}^\sigma=\frac{1}{(l!)^2}F_{a_1\cdot\cdot a_l\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma}_{2n-1}}{}^\sigma\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_l]}C+\frac{1}{[(l+1)!]^2}F_{a_1\cdot\cdot a_{l+1}\underbrace{\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma}_{2n-1}}{}^\sigma\gamma^{[a_1}\cdot\cdot\gamma^{a_{l+1}]}C\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}[\gamma^d(\varsigma)\partial_d+m]A_{\underbrace{a_1\cdot\cdot a_l|b_1\cdot\cdot b_l|c_1\cdot\cdot c_l|\cdot\cdot}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^\sigma=0\\ \delta^{a_1b_1}A_{\underbrace{a_1\cdot\cdot a_l|b_1\cdot\cdot b_l|c_1\cdot\cdot c_l|\cdot\cdot}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^\sigma=0,\gamma^{a_1}(\varsigma)A_{\underbrace{a_1\cdot\cdot a_l|b_1\cdot\cdot b_l|c_1\cdot\cdot c_l|\cdot\cdot}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^\sigma=0\\ A_{\underbrace{a_1\cdot\cdot a_l|b_1\cdot\cdot b_l|c_1\cdot\cdot c_l|\cdot\cdot}_{n}\zeta_\varsigma}{}^\sigma\text{关于}a_1b_1c_1\cdot\cdot\text{全对称, 关于}a_1\cdot\cdot a_l,b_1\cdot\cdot b_l,c_1\cdot\cdot c_l,\cdot\cdot\text{全反对称}\\ \psi_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\rho_\varsigma\tau_\varsigma\cdot\cdot\zeta_\varsigma}_{2n+1}}{}^\sigma=\overbrace{\mathbb{X}^{a_1\cdot\cdot a_l}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^{b_1\cdot\cdot b_l}_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\mathbb{X}^{c_1\cdot\cdot c_l}_{\rho_\varsigma\tau_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}A_{\underbrace{a_1\cdot\cdot a_l|b_1\cdot\cdot b_l|c_1\cdot\cdot c_l|\cdot\cdot}_{n}\zeta_\varsigma}{}^\sigma\end{cases}$$

自我评述：采用数学归纳法应该可以严格证明得到以上两个猜想，以后有时间再说。同时也启示物理学远远没有完成，因为还可以构造很多很多有意思的物理方程，原则上可以是无穷个，所以物理学发展是永无止境的，让人无限向往，但也让人绝望至极!

13 N+1维时空中的电磁场方程分析

13.1 N+1维时空中的Bargmann-Wigner矢量场方程

定义13.1.1. $\mathbb{X}_a:=[im\gamma_a-2S_{ab}(e)\partial^b]C,\mathbb{X}^a:=[im\gamma^a-2S^{ab}(e)\partial_b]C$

引理13.1.1. $\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)X=0\\ X=\{\frac{1}{(1!)^2}F^a\gamma_a+\frac{1}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\}C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial^{[a}F^{b]}+mF^{ab}=0,\partial_aF^a=0\\ \partial^{[a}F^{bc]}=0,\partial_aF^{ab}+mF^b=0\end{cases}$

推论13.1.1. $\begin{cases}(\gamma^a\partial_a+m)\psi=0\\ \psi=\{\frac{1}{(1!)^2}imA^a\gamma_a-\frac{i}{(2!)^2}F^{ab}\gamma_{[a}\gamma_{b]}\}C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_aF^{ab}-m^2A^b=0\\ F^{ab}=\partial^{[a}A^{b]},\partial_aA^a=0\end{cases}$

引理13.1.2. $\frac{2^{-5}}{im}tr(\bar{C}\gamma_{a'}\mathbb{X}^a)A_a=\frac{2^{-5}}{im}(\bar{C}\gamma_{a'})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_a=A_{a'},(\bar{C}\gamma_{a'})^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}=im2^5\delta^a_{a'}$

引理13.1.3. $\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}=\mathbb{X}^a_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{ab}\Leftrightarrow A_{ab}=A_{ba}$

推论13.1.2. $(\gamma^b\partial_b+m)\mathbb{X}^aA_a\Leftrightarrow(\partial^b\partial_b-m^2)A_a=0,\partial^aA_a=0$

证明: $(\gamma^c\partial_c+m)\mathbb{X}^aA_a=0$

$\Leftrightarrow(\gamma^c\partial_c+m)[im\gamma^a-2S^{ab}(e)\partial_b]CA_a=0$

$\Leftrightarrow(\gamma^c\partial_c+m)[im\gamma^a-2S^{ab}(e)\partial_b]A_a=0$

$\Leftrightarrow im\gamma^c\gamma^a\partial_cA_a+im^2\gamma^aA_a+\frac{i}{2}\gamma^c\gamma^{[a}\gamma^{b]}\partial_c\partial_bA_a+\frac{i}{2}m\gamma^{[a}\gamma^{b]}\partial_bA_a=0$

$\Leftrightarrow-\frac{i}{2}\gamma^a\gamma^{[b}\gamma^{c]}\partial_a\partial_bA_c+im^2\gamma^aA_a+\frac{i}{2}m\gamma^{\{a}\gamma^{b\}}\partial_bA_a=0$

$\Leftrightarrow-\frac{i}{2}(\frac{1}{3}\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}+2\delta_{a[b}\gamma_{c]})\partial_a\partial_bA_c+im^2\gamma^aA_a+im\delta^{ab}\partial_bA_a=0$

$\Leftrightarrow-i\delta_{a[b}\gamma_{c]}\partial_a\partial_bA_c+im^2\gamma^aA_a+im\partial^aA_a=0$

$\Leftrightarrow-i\gamma^c\partial_a\partial^aA_c+i\gamma^b\partial_b(\partial^aA_a)+im^2\gamma^aA_a+im\partial^aA_a=0$

$\Leftrightarrow\gamma^a[-i\partial_b\partial^bA_a+i\partial_a(\partial^bA_b)+im^2A_a]+im\partial^aA_a=0$

$\Leftrightarrow-i\partial_b\partial^bA_a+i\partial_a(\partial^bA_b)+im^2A_a=0,im\partial^aA_a=0$

$\Leftrightarrow(\partial_b\partial^b-m^2)A_a=0,\partial^aA_a=0$ □

推论13.1.3. $(\gamma^c\partial_c+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}=0\Leftrightarrow(\partial^c\partial_c-m^2)A_{ab}=0,\partial^aA_{ab}=0$

证明: $(\gamma^c\partial_c+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}=0$
$\Leftrightarrow(\gamma^c\partial_c+m)\mathbb{X}^a\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}=0$
$\Leftrightarrow(\partial_c\partial^c-m^2)\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}=0,\partial^a\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}=0$
$\Leftrightarrow(\partial_c\partial^c-m^2)\mathbb{X}^bA_{ab}=0,\partial^a\mathbb{X}^bA_{ab}=0$
$\Leftrightarrow(\partial_d\partial^d-m^2)[im\gamma^b-2S^{bc}(e)\partial_c]CA_{ab}=0,\partial^a[im\gamma^b-2S^{bc}(e)\partial_c]CA_{ab}=0$
$\Leftrightarrow(\partial_d\partial^d-m^2)A_{ab}=0,(\partial_d\partial^d-m^2)(\partial_cA_{ab}-\partial_bA_{ac})=0,\partial^aA_{ab}=0,\partial^a(\partial_cA_{ab}-\partial_bA_{ac})=0$
$\Leftrightarrow(\partial_c\partial^c-m^2)A_{ab}=0,\partial^aA_{ab}=0$ □

推论13.1.4. $\begin{cases}(\gamma^c\partial_c+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}=0\\ \mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}=\mathbb{X}^a_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{ab}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\partial^c\partial_c-m^2)A_{ab}=0\\ \partial^aA_{ab}=0,A_{ab}=A_{ba}\end{cases}$

推论13.1.5. $\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}=\mathbb{X}^a_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{ab}\Leftrightarrow A_{ab}=A_{ba}$

证明: $\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}=\mathbb{X}^a_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{ab}$
$\Leftrightarrow[im\gamma^aC-2S^{ac}(e)C\partial_c]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[im\gamma^bC-2S^{bd}(e)C\partial_d]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}=[im\gamma^aC-2S^{ac}(e)C\partial_c]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[im\gamma^bC-2S^{bd}(e)C\partial_d]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ba}$
$\Leftrightarrow(im)^2A_{ab}[\gamma^aC]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[\gamma^bC]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}+4\partial_c\partial_dA_{ab}[S^{ac}(e)C]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[S^{bd}(e)C]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}$
$-2im\partial_dA_{ab}[\gamma^aC]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[S^{bd}(e)C]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}-2im\partial_cA_{ab}[S^{ac}(e)C]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[\gamma^bC]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}$
$=(im)^2A_{ba}[\gamma^aC]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[\gamma^bC]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}+4\partial_c\partial_dA_{ba}[S^{ac}(e)C]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[S^{bd}(e)C]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}$
$-2im\partial_dA_{ba}[\gamma^aC]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[S^{bd}(e)C]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}-2im\partial_cA_{ba}[S^{ac}(e)C]_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}[\gamma^bC]_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}$
$\Leftrightarrow A_{ab}=A_{ba},\partial_c\partial_dA_{ab}+\partial_a\partial_bA_{cd}-\partial_a\partial_dA_{cb}-\partial_c\partial_dA_{ab}=\partial_c\partial_dA_{ba}+\partial_a\partial_bA_{dc}-\partial_a\partial_dA_{bc}-\partial_c\partial_dA_{ba},$
$\partial_dA_{ab}-\partial_bA_{ad}=\partial_dA_{ba}-\partial_bA_{da},\partial_cA_{ab}-\partial_aA_{cb}=\partial_cA_{ba}-\partial_aA_{bc}$
$\Leftrightarrow A_{ab}=A_{ba}$ □

推论13.1.6. $\begin{cases}(\gamma^c\partial_c+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}=0\\ \mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}A_{ab}=\mathbb{X}^a_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}A_{ab}\end{cases}??\Leftrightarrow\begin{cases}(\partial^c\partial_c-m^2)A_{ab}=0\\ \partial^aA_{ab}=0,A_{ab}=A_{ba},\delta^{ab}A_{ab}=0\end{cases}$

推论13.1.7. $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}A_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{n}}{}^{\sigma}=0\Leftrightarrow(-\partial^d\partial_d+m^2)A_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{n}}{}^{\sigma}=0\\ A_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{n}}{}^{\sigma}=\frac{1}{n!}A_{\underbrace{\{abc\cdot\cdot\}}_{n}}{}^{\sigma},\delta^{ab}A_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{n}}{}^{\sigma}=0,\partial^aA_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{n}}{}^{\sigma}=0\end{cases}$

推论13.1.8. $\begin{cases}[\gamma^a(\varsigma)\partial_a+m]_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\overbrace{\mathbb{X}^a_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\mathbb{X}^b_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}\cdot\cdot}^{n}A_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^{\sigma}=0\Leftrightarrow[\gamma^d(\varsigma)\partial_d+m]A_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^{\sigma}=0\\ A_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^{\sigma}=\frac{1}{n!}A_{\underbrace{\{abc\cdot\cdot\}}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^{\sigma},\delta^{ab}A_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^{\sigma}=0,\gamma^a(\varsigma)A_{\underbrace{abc\cdot\cdot}_{n}[\zeta_\varsigma]}{}^{\sigma}=0\end{cases}$

猜想13.1.1. $(\gamma^c\partial_c+m)\mathbb{X}^a\mathbb{X}^bA_{ab}=0\Leftrightarrow??(\partial^c\partial_c-m^2)A_{ab}=0,\partial^aA_{ab}=0,\delta^{ab}A_{ab}=0$

证明: $(\gamma^c\partial_c+m)\mathbb{X}^a\mathbb{X}^bA_{ab}=0$
$\Leftrightarrow(\gamma^c\partial_c+m)[im\gamma^a-2S^{ac}(e)\partial_c]C[im\gamma^b-2S^{bd}(e)\partial_d]CA_{ab}=0$
$\Leftrightarrow(\gamma^c\partial_c+m)[-m^2\gamma^aC\gamma^bC+4S^{ac}(e)CS^{bd}(e)C\partial_c\partial_d-2im\gamma^aCS^{bd}(e)C\partial_d-2imS^{ac}(e)C\gamma^bC\partial_c]A_{ab}=0$ □

14 N+1=n维时空中一般矩阵的反对称高旋量场展开

14.1 N+1=n偶数维时空中一般矩阵的反对称高旋量场展开

定义14.1.1. $e_k(s;N):=\Gamma_k^{a_1a_2\cdot\cdot a_{2s}}(s;N)\frac{1}{(2s)!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{2s}]}[\Leftrightarrow]\frac{1}{(2s)!}\gamma_{[a_1}\gamma_{a_2}\cdot\cdot\gamma_{a_{2s}]}=\Gamma^k_{a_1a_2\cdot\cdot a_{2s}}(s;N)e_k(s;N)$

定义14.1.2. $X = \sum_{s=0}^{n/2} \frac{1}{(2s)!} F(s;N) \cdot e(s;N)$

$$\begin{cases} F(0;N) = 2^{-[\frac{n}{2}]} tr(X), F(\frac{1}{2};N) = 2^{-[\frac{n}{2}]} tr[e(\frac{1}{2};N)X] \\ F(1;N) = -2^{-[\frac{n}{2}]} tr[e(1;N)X], F(\frac{3}{2};N) = -2^{-[\frac{n}{2}]} tr[e(\frac{3}{2};N)X] \\ F(2;N) = 2^{-[\frac{n}{2}]} tr[e(2;N)X], F(\frac{5}{2};N) = 2^{-[\frac{n}{2}]} tr[e(\frac{5}{2};N)X] \\ \cdots \\ F(\frac{n}{2};N) = (-1)^{[(n\%4)/2]} 2^{-[\frac{n}{2}]} tr[e(\frac{n}{2};N)X] \end{cases}$$

14.2 N+1=n奇数维时空中一般矩阵的反对称高旋量场展开

定义14.2.1. $X = \sum_{s=0}^{[n/2]/2} \frac{1}{(2s)!} F(s;N) \cdot e(s;N)$

$$\begin{cases} F(0;N) = 2^{-[\frac{n}{2}]} tr(X), F(\frac{1}{2};N) = 2^{-[\frac{n}{2}]} tr[e(\frac{1}{2};N)X] \\ F(1;N) = -2^{-[\frac{n}{2}]} tr[e(1;N)X], F(\frac{3}{2};N) = -2^{-[\frac{n}{2}]} tr[e(\frac{3}{2};N)X] \\ F(2;N) = 2^{-[\frac{n}{2}]} tr[e(2;N)X], F(\frac{5}{2};N) = 2^{-[\frac{n}{2}]} tr[e(\frac{5}{2};N)X] \\ \cdots \\ F(\frac{[n/2]}{2};N) = (-1)^{[([\frac{n}{2}]\%4)/2]} 2^{-[\frac{n}{2}]} tr[e(\frac{[n/2]}{2};N)X] \end{cases}$$

14.3 N+1=n维时空中反对称高旋量基$e_k(s;N)$的正交性和完备性

推论14.3.1. $tr[e_k(s;N)e_{k'}(s';N)] = (-1)^{\frac{2s(2s-1)}{2}} 2^{[\frac{n}{2}]}(2s)!\delta_{kk'}\delta_{ss'}$

推论14.3.2. $2^{-[\frac{n}{2}]} \sum_{s=0}^{[n/2](2-n\%2)} \frac{i^{2s(2s-1)}}{(2s)!} \{[e(s;N)]_{\lambda}{}^{\mu} \cdot [e(s;N)]_{\eta}{}^{\xi}\} = \delta_{\lambda}{}^{\xi}\delta_{\eta}{}^{\mu}$

14.4 N+1维时空中的有质量反对称张量场的高旋量表述

定义14.4.1. $A^k(s;N) := \Gamma^k_{a_1a_2\cdots a_{2s}}(s;N)A^{a_1\cdots a_{2s}} [\Leftrightarrow] A^{a_1\cdots a_{2s}} := \Gamma_k^{a_1a_2\cdots a_{2s}}(s;N)A^k(s;N)$

推论14.4.1. $\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdots a_l]} + mF^{a_0\cdots a_l} = 0, \partial_{a_0}F^{a_0\cdots a_l} + mA^{a_1\cdots a_l} = 0$
$[\Leftrightarrow](l+1)N^j_{ak}(\frac{l+1}{2};N)\partial^a A^k(\frac{l}{2};N) + mF^j(\frac{l+1}{2};N) = 0, N^{ak}_j(\frac{l+1}{2};N)\partial_a F^j(\frac{l+1}{2};N) + mA^k(\frac{l}{2};N) = 0$

证明: $\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdots a_l]} + mF^{a_0\cdots a_l} = 0, \partial_{a_0}F^{a_0\cdots a_l} + mA^{a_1\cdots a_l} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{l!}\partial^{[a_0}\Gamma_k^{a_1\cdots a_l]}(\frac{l}{2};N)A^k(\frac{l}{2};N) + m\Gamma_j^{a_0\cdots a_l}(\frac{l+1}{2};N)F^j(\frac{l+1}{2};N) = 0 \\ \Gamma_j^{a_0\cdots a_l}(\frac{l+1}{2};N)\partial_{a_0}F^j(\frac{l+1}{2};N) + m\Gamma_k^{a_1\cdots a_l}(\frac{l}{2};N)A^k(\frac{l}{2};N) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \Gamma^j_{a_0\cdots a_l}(\frac{l+1}{2};N)\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}\Gamma_k^{a_1\cdots a_l]}(\frac{l}{2};N)A^k(\frac{l}{2};N) + mF^j(\frac{l+1}{2};N) = 0, N_j^{a_0k}(\frac{l+1}{2};N)\partial_{a_0}F^j(\frac{l+1}{2};N) + mA^k(\frac{l}{2};N) = 0$
$\Leftrightarrow (l+1)N^j_{a_0k}(\frac{l+1}{2};N)\partial^{a_0}A^k(\frac{l}{2};N) + mF^j(\frac{l+1}{2};N) = 0, N_j^{a_0k}(\frac{l+1}{2};N)\partial_{a_0}F^j(\frac{l+1}{2};N) + mA^k(\frac{l}{2};N) = 0$
$\Leftrightarrow (l+1)N^j_{ak}(\frac{l+1}{2};N)\partial^a A^k(\frac{l}{2};N) + mF^j(\frac{l+1}{2};N) = 0, N^{ak}_j(\frac{l+1}{2};N)\partial_a F^j(\frac{l+1}{2};N) + mA^k(\frac{l}{2};N) = 0$ □

推论14.4.2. $\partial_{a_0}\partial^{a_0}A^{a_1\cdots a_l} - m^2A^{a_1\cdots a_l} = 0, \partial_{a_1}A^{a_1\cdots a_l} = 0, F^{a_0\cdots a_l} = -\frac{1}{l!m}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdots a_l]}$
$\Leftrightarrow \partial_a\partial^a A^k(\frac{l}{2};N) - m^2A^k(\frac{l}{2};N) = 0, N_k^{an}(\frac{l}{2};N)\partial_a A^k(\frac{l}{2};N) = 0, F^j(\frac{l+1}{2};N) = -\frac{l+1}{m}N^j_{ak}(\frac{l+1}{2};N)\partial^a A^k(\frac{l}{2};N)$

证明: $\partial_{a_0}\partial^{a_0}A^{a_1\cdots a_l} - m^2A^{a_1\cdots a_l} = 0, \partial_{a_1}A^{a_1\cdots a_l} = 0, F^{a_0\cdots a_l} = -\frac{1}{l!m}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdots a_l]}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_{a_0}\partial^{a_0}\Gamma_k^{a_1\cdots a_l}(\frac{l}{2};N)A^k(\frac{l}{2};N) - m^2\Gamma_k^{a_1\cdots a_l}(\frac{l}{2};N)A^k(\frac{l}{2};N) = 0 \\ \partial_{a_1}\Gamma_k^{a_1\cdots a_l}(\frac{l}{2};N)A^k(\frac{l}{2};N) = 0, \Gamma_j^{a_0\cdots a_l}(\frac{l+1}{2};N)F^j(\frac{l+1}{2};N) = -\frac{1}{l!m}\partial^{[a_0}\Gamma_k^{a_1\cdots a_l]}(\frac{l}{2};N)A^k(\frac{l}{2};N) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \partial_{a_0}\partial^{a_0}A^k(\frac{l}{2};N) - m^2A^k(\frac{l}{2};N) = 0, N_k^{a_1n}(\frac{l}{2};N)\partial_{a_1}A^k(\frac{l}{2};N) = 0, F^j(\frac{l+1}{2};N) = -\frac{l+1}{m}N^j_{a_0k}(\frac{l+1}{2};N)\partial^{a_0}A^k(\frac{l}{2};N)$
$\Leftrightarrow \partial_a\partial^a A^k(\frac{l}{2};N) - m^2A^k(\frac{l}{2};N) = 0, N_k^{an}(\frac{l}{2};N)\partial_a A^k(\frac{l}{2};N) = 0, F^j(\frac{l+1}{2};N) = -\frac{l+1}{m}N^j_{ak}(\frac{l+1}{2};N)\partial^a A^k(\frac{l}{2};N)$ □

推论14.4.3. $(l+1)N^j_{ak}(\frac{l+1}{2};N)\partial^a A^k(\frac{l}{2};N) + mF^j(\frac{l+1}{2};N) = 0, N^{ak}_j(\frac{l+1}{2};N)\partial_a F^j(\frac{l+1}{2};N) + mA^k(\frac{l}{2};N) = 0$
$\Leftrightarrow \partial_a\partial^a A^k(\frac{l}{2};N) - m^2A^k(\frac{l}{2};N) = 0, N_k^{an}(\frac{l}{2};N)\partial_a A^k(\frac{l}{2};N) = 0, F^j(\frac{l+1}{2};N) = -\frac{l+1}{m}N^j_{ak}(\frac{l+1}{2};N)\partial^a A^k(\frac{l}{2};N)$

14.5 N+1维时空中的无质量反对称张量场的高旋量表述

推论14.5.1. $\frac{1}{l!}\partial^{[a_0}A^{a_1\cdot\cdot a_l]}=0,\partial_{a_0}F^{a_0\cdot\cdot a_l}=0[\Leftrightarrow](l+1)N^j_{ak}(\frac{l+1}{2};N)\partial^a A^k(\frac{l}{2};N)=0,N^{ak}_j(\frac{l+1}{2};N)\partial_a F^j(\frac{l+1}{2};N)=0$

猜想14.5.1.

$$\begin{cases}[A^{a_1\cdot\cdot a_l}(x),A^+_{a'_1\cdot\cdot a'_l}(x')]=i\frac{2^{-[\frac{n}{2}]}}{(l+1)!}\eta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\eta^{a_l}_{a'_l}\eta^{a]}_{a']}\partial_a\partial^{+a'}\Delta(x-x')\\ [F^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}(x),F^+_{a'_0a'_1\cdot\cdot a'_l}(x')]=-i\frac{2^{-[\frac{n}{2}]}}{l!}\eta^{[a_0}_{[a'_0}\cdot\cdot\eta^{a_{l-1}}_{a'_{l-1}}\partial^{a_l]}\partial^+_{a'_l]}\Delta(x-x')\end{cases}$$

$[\Leftrightarrow]$

$$\begin{cases}[A^{a_1\cdot\cdot a_l}(x),\bar{A}_{a'_1\cdot\cdot a'_l}(x')]=i\frac{2^{-[\frac{n}{2}]}}{(l+1)!}\delta^{[a_1}_{[a'_1}\cdot\cdot\delta^{a_l}_{a'_l}\delta^{a]}_{a']}\partial_a\partial^{a'}\Delta(x-x')\\ [F^{a_0a_1\cdot\cdot a_l}(x),\bar{F}_{a'_0a'_1\cdot\cdot a'_l}(x')]=-i\frac{2^{-[\frac{n}{2}]}}{l!}\delta^{[a_0}_{[a'_0}\cdot\cdot\delta^{a_{l-1}}_{a'_{l-1}}\partial^{a_l]}\partial_{a'_l]}\Delta(x-x')\end{cases}$$

$[\Leftrightarrow]$

$$\begin{cases}[A^k(x,\frac{l}{2};N),\bar{A}_{k'}(x',\frac{l}{2};N)]=i2^{-[\frac{n}{2}]}\Gamma^k_{a_1\cdot\cdot a_l}(\frac{l}{2};N)\Gamma^{a'_1\cdot\cdot a'_l}_{k'}(\frac{l}{2};N)\delta^{[a_1}_{a'_1}\cdot\cdot\delta^{a_l}_{a'_l}\delta^{a]}_{a'}\partial_a\partial^{a'}\Delta(x-x')\\ [F^j(x,\frac{l+1}{2};N),\bar{F}_{j'}(x',\frac{l+1}{2};N)]=-i2^{-[\frac{n}{2}]}l!(l+1)^2\Gamma^j_{a_1\cdot\cdot a_la}(\frac{l+1}{2};N)\Gamma^{a_1\cdot\cdot a_la'}_{j'}(\frac{l+1}{2};N)\partial^a\partial_{a'}\Delta(x-x')\end{cases}$$

$[\Leftrightarrow]$

$$\begin{cases}[A^k(x,\frac{l}{2};N),\bar{A}_{k'}(x',\frac{l}{2};N)]=i2^{-[\frac{n}{2}]}\{\delta^k_{k'}\partial^a\partial_a-l\%2\Gamma^k_{a_2\cdot\cdot a_la}(\frac{l}{2};N)\Gamma^{a_2\cdot\cdot a_la'}_{k'}(\frac{l}{2};N)\partial^a\partial_{a'}\}\Delta(x-x')\\ [F^j(x,\frac{l+1}{2};N),\bar{F}_{j'}(x',\frac{l+1}{2};N)]=-i2^{-[\frac{n}{2}]}l!(l+1)^2\Gamma^j_{a_1\cdot\cdot a_la}(\frac{l+1}{2};N)\Gamma^{a_1\cdot\cdot a_la'}_{j'}(\frac{l+1}{2};N)\partial^a\partial_{a'}\Delta(x-x')\end{cases}$$

$[\Leftrightarrow]$

$$\begin{cases}[A^k(x,\frac{l}{2};N),\bar{A}_{k'}(x',\frac{l}{2};N)]=i2^{-[\frac{n}{2}]}\{\delta^k_{k'}m^2-l\%2\Gamma^k_{a_2\cdot\cdot a_la}(\frac{l}{2};N)\Gamma^{a_2\cdot\cdot a_la'}_{k'}(\frac{l}{2};N)\partial^a\partial_{a'}\}\Delta(x-x')\\ [F^j(x,\frac{l+1}{2};N),\bar{F}_{j'}(x',\frac{l+1}{2};N)]=-i2^{-[\frac{n}{2}]}l!(l+1)^2\Gamma^j_{a_1\cdot\cdot a_la}(\frac{l+1}{2};N)\Gamma^{a_1\cdot\cdot a_la'}_{j'}(\frac{l+1}{2};N)\partial^a\partial_{a'}\Delta(x-x')\end{cases}$$

第四十章　二阶完美常数不变张量

自我评述：本章主要是二阶完美常数不变张量的具体介绍，是对更一般完美常数不变张量的深入具体了解和具体扩展。若将全对称自旋张量提取高自旋的程序反复利用，就可以得到越来越高阶的完美常数不变张量。同时它是之前完美常数不变张量一般情形的特殊运用而已，故直接写出其结论即可，而无需再作证明。通过本章具体化的例子，更可以明确以下事实：完美常数不变张量只是反映了全对称代数结构的内在固有性质，只与全对称有关、与其它无关，因此表现出了一系列完美的代数性质和变换性质。本章符号约定符合以往规范，出了本章也不会混淆。本章节的完美常数不变张量与$w=1$情形不同构。

1 二阶完美常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s;2j),\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;2j)$

1.1 常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s;2j),\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;2j)$

定义1.1.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j)=\frac{1}{(2s)!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)}_{2s}}(s;2j),w=2j$

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{0_\varsigma\cdot\cdot 0_\varsigma}_{l_0}\underbrace{1_\varsigma\cdot\cdot 1_\varsigma}_{l_1}\cdot\cdot\underbrace{w_\varsigma\cdot\cdot w_\varsigma}_{l_w}}(s;2j)=\sqrt{\frac{l_0!l_1!\cdot\cdot l_w!}{(2s)!}}\delta\{k_\varsigma,\sum_{l=0}^{[s]}(\sum_{k=\lambda_{2l+2}}^{\lambda_{2l+1}}C^{2l}_{2l+2j-k}-C^{2l}_{2l+2j-\lambda_{2l}})\},l_0+l_1+\cdot\cdot+l_w=2s$$

定义1.1.2. $\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j)=\frac{1}{(2s)!}\Gamma^{\overbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j),w=2j$

$$\Gamma^{\overbrace{0_\varsigma\cdot\cdot 0_\varsigma}^{l_0}\overbrace{1_\varsigma\cdot\cdot 1_\varsigma}^{l_1}\cdot\cdot\overbrace{w_\varsigma\cdot\cdot w_\varsigma}^{l_w}}_{k_\varsigma}(s;2j)=\sqrt{\frac{l_0!l_1!\cdot\cdot l_w!}{(2s)!}}\delta\{k_\varsigma,\sum_{l=0}^{[s]}(\sum_{k=\lambda_{2l+2}}^{\lambda_{2l+1}}C^{2l}_{2l+2j-k}-C^{2l}_{2l+2j-\lambda_{2l}})\},l_0+l_1+\cdot\cdot+l_w=2s$$

1.2 常数矩阵$\Gamma(s;2j),\bar{\Gamma}(s;2j)$

定义1.2.1. $\Gamma(s;2j)\succ\Gamma_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}{}^{k_\varsigma}(s;2j),\bar{\Gamma}(s;2j)\succ\Gamma_{k_\varsigma}{}^{\overbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma\otimes\cdot\cdot}^{2s}}(s;2j)\simeq\Gamma^T(s;2j)$

推论1.2.1. $[\Gamma(s;2j)]=(2j+1)^{2s}\times C^{2s}_{2s+2j},[\bar{\Gamma}(s;2j)]=C^{2s}_{2s+2j}\times(2j+1)^{2s},[A_\varsigma]=2j+1,[k_\varsigma]=C^{2s}_{2s+2j}$

1.3 常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s;2j),\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;2j)$ 的基本性质

相等性：

性质1.3.1. $\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j)\simeq\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j)\simeq\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j)\simeq\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;2j)$

性质1.3.2. $[\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j)]^*\simeq\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j),[\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j)]^*\simeq\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;2j)$

推论1.3.1. $\Gamma(s;2j)=\Gamma^*(s;2j),\bar{\Gamma}(s;2j)=\bar{\Gamma}^*(s;2j),\bar{\Gamma}(s;2j)=\Gamma^+(s;2j),\Gamma(s;2j)=\bar{\Gamma}^+(s;2j)$

正交性：

性质1.3.3. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j)\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;2j)=\delta^{k_\varsigma}{}_{l_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar{\Gamma}(s;2j)\Gamma(s;2j)=I$

性质1.3.4. $\Gamma^{k_\varsigma}_{A_{1\varsigma}A_{2\varsigma}\cdot\cdot A_{2s\varsigma}}(s;2j)\Gamma^{B_{1\varsigma}B_{2\varsigma}\cdot\cdot B_{2s\varsigma}}_{k_\varsigma}(s;2j)=\frac{1}{(2s)!}\delta^{(B_{1\varsigma}}_{A_{1\varsigma}}\delta^{B_{2\varsigma}}_{A_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{B_{2s\varsigma})}_{A_{2s\varsigma}}=\frac{1}{(2s)!}\delta^{B_{1\varsigma}}_{(A_{1\varsigma}}\delta^{B_{2\varsigma}}_{A_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{B_{2s\varsigma}}_{A_{2s\varsigma})}$

对比性：

性质1.3.5. $\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}\varepsilon^{b_1b_2\cdot\cdot b_n}=\delta^{[b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_n]}_{a_n}=\delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}$

其它性质：

性质1.3.6. $\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma}(\frac{1}{2};2j)=\delta^{k_\varsigma}_{A_\varsigma},\Gamma^{A_\varsigma}_{k_\varsigma}(\frac{1}{2};2j)=\delta^{A_\varsigma}_{k_\varsigma};\Gamma(0;2j)=1,\bar{\Gamma}(0;2j)=1$

1.4 度规常数不变张量$\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)$的引入及其性质

度规定义：

定义1.4.1.
$$\begin{cases}\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;2j):=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j)\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}(j)\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}(j)\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}(j)\cdot\cdot}_{2s}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;2j)\\ \varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;2j):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j)\overbrace{\varepsilon^{A_\varsigma E_\varsigma}(j)\varepsilon^{B_\varsigma F_\varsigma}(j)\varepsilon^{C_\varsigma G_\varsigma}(j)\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j)\end{cases}$$

性质1.4.1.
$$\begin{cases}\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}(j)\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}(j)\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}(j)\cdot\cdot}_{2s}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;2j)\text{关于}ABC...\text{全对称}\\ \overbrace{\varepsilon^{A_\varsigma E_\varsigma}(j)\varepsilon^{B_\varsigma F_\varsigma}(j)\varepsilon^{C_\varsigma G_\varsigma}(j)\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j)\text{关于}ABC...\text{全对称}\end{cases}$$

推论1.4.1. $\varepsilon(s;2j):=\bar{\Gamma}(s;2j)\underbrace{\varepsilon(j)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(j)}_{2s}\Gamma(s;2j);\varepsilon(j)=\varepsilon(j;1)=\varepsilon(\frac{1}{2};2j)$

推论1.4.2. $\varepsilon(s;2j)\varepsilon^{+}(s;2j)=\varepsilon^{+}(s;2j)\varepsilon(s;2j)=1;\varepsilon(s;2j)=\varepsilon^{*}(s;2j),\varepsilon(s;2j)=(-1)^{4sj}\varepsilon(s;2j)$

升降指标：

性质1.4.2.
$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j)=\varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}(j)\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}(j)\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}(j)\cdot\cdot}_{2s}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;2j)\\ \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j)=\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)\overbrace{\varepsilon^{A_\varsigma E_\varsigma}(j)\varepsilon^{B_\varsigma F_\varsigma}(j)\varepsilon^{C_\varsigma G_\varsigma}(j)\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j)\end{cases}$$

推论1.4.3. $\Gamma(s;2j)\varepsilon(s;2j)=\underbrace{\varepsilon(j)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(j)}_{2s}\Gamma(s;2j),\varepsilon(s;2j)\bar{\Gamma}(s;2j)=\bar{\Gamma}(s;2j)\underbrace{\varepsilon(j)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(j)}_{2s}$

Penrose标准升降规则：

性质1.4.3.
$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j)=(-1)^{2s}[\varsigma^{2s}\varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)]\underbrace{[-\varsigma\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}(j)][-\varsigma\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}(j)][-\varsigma\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}(j)]\cdot\cdot}_{2s}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;2j)\\ \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j)=(-1)^{2s}[(-\varsigma)^{2s}\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)]\overbrace{[\varsigma\varepsilon^{A_\varsigma E_\varsigma}(j)][\varsigma\varepsilon^{B_\varsigma F_\varsigma}(j)][\varsigma\varepsilon^{C_\varsigma G_\varsigma}(j)]\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j)\end{cases}$$

1.5 自旋常数不变张量$\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j),S_{ab}(s,\varsigma;2j)$

定义1.5.1.
$$\begin{cases}\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{Z_\varsigma}(j)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{Z_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)[\Leftrightarrow]\bar{\Gamma}(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}(j)\Gamma(s;2j)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;2j)\\ \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j)S_{abA_\varsigma}{}^{Z_\varsigma}(j)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{Z_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j)=\frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)[\Leftrightarrow]\bar{\Gamma}(s;2j)S_{ab}(j,\varsigma)\Gamma(s;2j)=\frac{1}{2s}S_{ab}(s,\varsigma;2j)\end{cases}$$

1.6 常数不变张量$\Omega^{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}(s;2j)$,$\Omega(s;2j)$的引入及其性质

定义1.6.1.

$$\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j):=\overbrace{\underbrace{\sigma_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(j)\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s}+\underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\sigma_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}(j)\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s}+\underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\sigma_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}(j)\cdots}_{2s}+\cdots}^{2s}$$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

定义1.6.2. $\Omega(s;2j):=\sigma(j)\otimes I_{(2j+1)^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(j)\otimes I_{(2j+1)^{2s-2}}+\cdots+I_{(2j+1)^{2s-1}}\otimes\sigma(j)$

推论1.6.1. $\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s+1}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j):=\sigma_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(j)\underbrace{\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s-1}+\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Omega^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};2j)$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

推论1.6.2. $\Omega(s;2j)=\sigma(j)\otimes I_{(2j+1)^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes\Omega(s-\frac{1}{2};2j)$

推论1.6.3. $\Omega(s;2j)=\Omega(s-s';2j)\otimes I_{(2j+1)^{2s'}}+I_{(2j+1)^{2(s-s')}}\otimes\Omega(s';2j)$

1.7 常数不变张量$\Omega_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}(s;2j)$,$\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)$ 的引入及其基本性质

定义1.7.1.

$$\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j):=\overbrace{\underbrace{S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(j)\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s}+\underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}S_{abB_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}(j)\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s}+\underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}S_{abC_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}(j)\cdots}_{2s}+\cdots}^{2s}$$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

定义1.7.2. $\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j):=S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+I_4\otimes S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}+\cdots+I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes S_{ab}(j,\varsigma)$

推论1.7.1. $\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s+1}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j):=S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(j)\underbrace{\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s-1}+\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Omega_{ab}{}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};2j)$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

推论1.7.2. $\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)=S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+I_4\otimes\Omega_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)$

推论1.7.3. $\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)=\Omega_{ab}(s-s',\varsigma;2j)\otimes I_{(w+1)^{2s'}}+I_{(w+1)^{2(s-s')}}\otimes\Omega_{ab}(s',\varsigma;2j)$

1.8 自旋常数不变张量$\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)$, $\sigma(s;2j)$的引入

定义1.8.1. $\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{Z_\varsigma}(j)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{Z_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j):=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)[\Leftrightarrow]\sigma(s;2j):=\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega(s;2j)\Gamma(s;2j)$

1.9 自旋常数不变张量$S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)$, $S_{ab}(s,\varsigma;2j)$的引入

定义1.9.1.

$$\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j)S_{abA_\varsigma}{}^{Z_\varsigma}(j)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{Z_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j):=\frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)[\Leftrightarrow]S_{ab}(s,\varsigma;2j):=\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)\Gamma(s;2j)$$

1.10 常数矩阵$\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)$, $S_{ab}(s,\varsigma;2j)$与$\Omega_{\alpha_\varsigma}(s;2j)$, $\sigma_{\alpha_\varsigma}(s;2j)$之间关系

推论1.10.1. $S_{ab}(j,\varsigma)=\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(j)[\Rightarrow]\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)=\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\Omega_{\alpha_\varsigma}(s;2j)[\Rightarrow]S_{ab}(s,\varsigma;2j)=\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s;2j)$

1.11 常数矩阵$\Omega(s;2j)$的两个重要引理

引理1.11.1. $\Gamma(s;2j)\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega(s;2j)\Gamma(s;2j)=\Omega(s;2j)\Gamma(s;2j)$

引理1.11.2. $\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega(s;2j)\Gamma(s;2j)\bar{\Gamma}(s;2j)=\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega(s;2j)$

1.12 常数矩阵$\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)$的两个重要引理

引理1.12.1. $\Gamma(s;2j)\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)\Gamma(s;2j)=\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)\Gamma(s;2j)$

引理1.12.2. $\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)\Gamma(s;2j)\bar{\Gamma}(s;2j)=\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)$

1.13 关于常数矩阵$\bar{\Gamma}(s;3),\Omega(s;3),\sigma(s;3),\Gamma(s;3)$的置换性质及其推论

定理1.13.1. $\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)$

$[\Leftrightarrow]\Omega(s;2j)\Gamma(s;2j)=\Gamma(s;2j)\sigma(s;2j)$

定理1.13.2. $\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j)\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)=\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;2j)$

$[\Leftrightarrow]\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega(s;2j)=\sigma(s;2j)\bar{\Gamma}(s;2j)$

推论1.13.1. $\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega(s;2j)\Gamma(s;2j)=\sigma(s;2j)$
$\Leftrightarrow\Omega(s;2j)\Gamma(s;2j)=\Gamma(s;2j)\sigma(s;2j)\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega(s;2j)=\sigma(s;2j)\bar{\Gamma}(s;2j)$

推论1.13.2. $\Omega^2(s;2j)\Gamma(s;2j)=\Gamma(s;2j)\sigma^2(s;2j)$

推论1.13.3. $\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega^2(s;2j)=\sigma^2(s;2j)\bar{\Gamma}(s;2j)$

推论1.13.4. $[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]_{(A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots)A'_\varsigma}_{2s}}(s;2j)=\frac{1}{(2s-1)!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)$

1.14 关于常数矩阵$\bar{\Gamma}(s;2j),\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j),S_{ab}(s,\varsigma;2j),\Gamma(s;2j)$的置换性质及其推论

定理1.14.1. $\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)$

$[\Leftrightarrow]\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)\Gamma(s;2j)=\Gamma(s;2j)S_{ab}(s,\varsigma;2j)$

定理1.14.2. $\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j)\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)=S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;2j)$

$[\Leftrightarrow]\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)=S_{ab}(s,\varsigma;2j)\bar{\Gamma}(s;2j)$

推论1.14.1. $\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)\Gamma(s;2j)=S_{ab}(s,\varsigma;2j)$
$\Leftrightarrow\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)\Gamma(s;2j)=\Gamma(s;2j)S_{ab}(s,\varsigma;2j)\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)=S_{ab}(s,\varsigma;2j)\bar{\Gamma}(s;2j)$

推论1.14.2. $[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\otimes I_j]_{(A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots)A'_\varsigma}_{2s}}(s;2j)=\frac{1}{(2s-1)!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)$

1.15 常数矩阵$\Omega(s;2j),\sigma(s;2j)$的洛伦兹群表示

推论1.15.1. $\Omega(s;2j)\times\Omega(s;2j)=i\Omega(s;2j)[\Rightarrow]\sigma(s;2j)\times\sigma(s;2j)=i\sigma(s;2j)$

1.16 常数矩阵$\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j),S_{ab}(s,\varsigma;2j)$的洛伦兹群表示

推论1.16.1. $i[S_{ab}(j,\varsigma),S_{cd}(j,\varsigma)]=\delta_{ad}S_{bc}(j,\varsigma)-\delta_{ac}S_{bd}(j,\varsigma)+\delta_{bc}S_{ad}(j,\varsigma)-\delta_{bd}S_{ac}(j,\varsigma)$
$[\Rightarrow]i[\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j),\Omega_{cd}(s,\varsigma;2j)]=\delta_{ad}\Omega_{bc}(s,\varsigma;2j)-\delta_{ac}\Omega_{bd}(s,\varsigma;2j)+\delta_{bc}\Omega_{ad}(s,\varsigma;2j)-\delta_{bd}\Omega_{ac}(s,\varsigma;2j)$
$[\Rightarrow]i[S_{ab}(s,\varsigma;2j),S_{cd}(s,\varsigma;2j)]=\delta_{ad}S_{bc}(s,\varsigma;2j)-\delta_{ac}S_{bd}(s,\varsigma;2j)+\delta_{bc}S_{ad}(s,\varsigma;2j)-\delta_{bd}S_{ac}(s,\varsigma;2j)$

引理1.16.1. $\Gamma(s;2j)\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega(s;2j)\Gamma(s;2j)=\Omega(s;2j)\Gamma(s;2j)$

定义1.16.1. $\sigma(s;2j):=\bar{\Gamma}(s;2j)\Omega(s;2j)\Gamma(s;2j)$

推论1.16.2. $\Omega(s;2j)\times\Omega(s;2j)=i\Omega(s;2j)[\Rightarrow]\sigma(s;2j)\times\sigma(s;2j)=i\sigma(s;2j)$

定理1.16.1. $\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}{}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)\Gamma^{l_\varsigma}{}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)=\Gamma^{k_\varsigma}{}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)[\Leftrightarrow]\Omega(s;2j)\Gamma(s;2j)=\Gamma(s;2j)\sigma(s;2j)$

引理1.16.2. $\bar\Gamma(s;2j)\Omega(s;2j)\Gamma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j)=\bar\Gamma(s;2j)\Omega(s;2j)$

定理1.16.2. $\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}{}_{k_\varsigma}(s;2j)\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}{}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)=\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}{}_{l_\varsigma}(s;2j)[\Leftrightarrow]\bar\Gamma(s;2j)\Omega(s;2j)=\sigma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j)$

推论1.16.3.

$\bar\Gamma(s;2j)\Omega(s;2j)\Gamma(s;2j)=\sigma(s;2j)\Leftrightarrow\Omega(s;2j)\Gamma(s;2j)=\Gamma(s;2j)\sigma(s;2j)\Leftrightarrow\bar\Gamma(s;2j)\Omega(s;2j)=\sigma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j)$

推论1.16.4. $\Omega^2(s;2j)\Gamma(s;2j)=\Gamma(s;2j)\sigma^2(s;2j)$

推论1.16.5. $\bar\Gamma(s;2j)\Omega^2(s;2j)=\sigma^2(s;2j)\bar\Gamma(s;2j)$

推论1.16.6. $\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}{}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)\Gamma^{l_\varsigma}{}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)=\Gamma^{k_\varsigma}{}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)$

$\Leftrightarrow\sigma(j)^{A'_\varsigma}_{(A_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}{}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots)A'_\varsigma}_{2s}}(s;2j)=\Gamma^{k_\varsigma}{}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)$

1.17 推论：常数矩阵$\Gamma(s;2j),\bar\Gamma(s;2j)$的几个恒等式

性质1.17.1. $\begin{cases}\bar\Gamma(s;2j)\Omega(s;2j)\Gamma(s;2j)=\sigma(s;2j),[\Gamma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j),\Omega(s;2j)]=0\\\Gamma(s;2j)\sigma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j)=\Omega(s;2j)\Gamma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j)=\Gamma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j)\Omega(s;2j)\end{cases}$

性质1.17.2. $\begin{cases}\bar\Gamma(s;2j)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)\Gamma(s;2j)=S_{ab}(s,\varsigma;2j),[\Gamma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j),\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)]=0\\\Gamma(s;2j)S_{ab}(s,\varsigma;2j)\bar\Gamma(s;2j)=\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)\Gamma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j)=\Gamma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)\end{cases}$

性质1.17.3. $\begin{cases}\bar\Gamma(s;2j)[\vartheta\cdot\Omega(s;2j)]^n\Gamma(s;2j)=[\vartheta\cdot\sigma(s;2j)]^n,[\Gamma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j),[\vartheta\cdot\Omega(s;2j)]^n]=0\\\Gamma(s;2j)[\vartheta\cdot\sigma(s;2j)]^n\bar\Gamma(s;2j)=[\vartheta\cdot\Omega(s;2j)]^n\Gamma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j)=\Gamma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j)[\vartheta\cdot\Omega(s;2j)]^n\end{cases}$

性质1.17.4. $\begin{cases}\bar\Gamma(s;2j)[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)]^n\Gamma(s;2j)=[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j)]^n,[\Gamma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j),[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)]^n]=0\\\Gamma(s;2j)[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j)]^n\bar\Gamma(s;2j)=[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)]^n\Gamma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j)=\Gamma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j)[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)]^n\end{cases}$

推论1.17.1. $\begin{cases}\bar\Gamma(s;2j)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)}\Gamma(s;2j)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j)},[\Gamma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j),e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)}]=0\\\Gamma(s;2j)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j)}\bar\Gamma(s;2j)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)}\Gamma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j)=\Gamma(s;2j)\bar\Gamma(s;2j)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)}\end{cases}$

1.18 矩阵$\Gamma(s;2j),\bar\Gamma(s;2j)$的常数不变张量性质

定理1.18.1. $\Gamma(s;2j)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s;2j)}\Gamma(s;2j)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s;2j)}$

定理1.18.2. $\bar\Gamma(s;2j)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s;2j)}\bar\Gamma(s;2j)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s;2j)}$

推论1.18.1.

$$\begin{cases}S(s;2j)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s;2j)}S(s;2j)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot S^+(s;2j)\Omega(s;2j)S(s;2j)}\\S(s;2j)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot S(s;2j)\Omega(s;2j)S^+(s;2j)}S(s;2j)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s;2j)}\\S^+(s;2j)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s;2j)}S^+(s;2j)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot S(s;2j)\Omega(s;2j)S^+(s;2j)}\\S^+(s;2j)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot S^+(s;2j)\Omega(s;2j)S(s;2j)}S^+(s;2j)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s;2j)}\end{cases}$$

1.19 常数矩阵$I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j), I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)$的置换性质

推论1.19.1. $\Omega(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]=[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][\sigma(j)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]$

推论1.19.2. $[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\Omega(s;2j)=[\sigma(j)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]$

1.20 推论：常数矩阵$\Gamma(s-\frac{1}{2};2j),\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)$的几个恒等式

性质1.20.1.

$$\begin{cases}[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\Omega(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]=[\sigma(j)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]\\ [I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][\sigma(j)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\\ =\Omega(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]=[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\Omega(s;2j)\\ [[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)],\Omega(s;2j)]=0\end{cases}$$

性质1.20.2.

$$\begin{cases}[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]=[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]\\ [I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\\ =\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]=[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)\\ [[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)],\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)]=0\end{cases}$$

性质1.20.3.

$$\begin{cases}[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)][\vartheta\cdot\Omega(s;2j)]^n[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]=\{\vartheta\cdot[\sigma(j)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]\}^n\\ [I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]\{\vartheta\cdot[\sigma(j)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]\}^n[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\\ =[\vartheta\cdot\Omega(s;2j)]^n[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]=[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)][\vartheta\cdot\Omega(s;2j)]^n\\ [[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)],[\vartheta\cdot\Omega(s;2j)]^n]=0\end{cases}$$

性质1.20.4.

$$\begin{cases}[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)][\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)]^n[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]=\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]\}^n\\ [I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]\}^n[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\\ =[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)]^n[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\\ =[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)][\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)]^n\\ [[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)],[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)]^n]=0\end{cases}$$

推论1.20.1.

$$\begin{cases}[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)}[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]}\\ [I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]}[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\\ =e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)}[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]=[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)}\\ [[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)],e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j)}]=0\end{cases}$$

推论1.20.2.

$$\begin{cases}I_{(2j+1)^{2s-1}}\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)=\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}},\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)I_{(2j+1)^{2s-1}}=I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)\\ [I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\sigma(j)\otimes I_{(2j+1)^{2s-1}}[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]=\sigma(j)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}\\ [\sigma(j)\otimes I_{(2j+1)^{2s-1}}[I_{2j+1}]\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]=[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][\sigma(j)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}]\\ [I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)][\sigma(j)\otimes I_{(2j+1)^{2s-1}}]=[\sigma(j)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\end{cases}$$

1.21 常数矩阵$\Gamma(s;2j),\bar{\Gamma}(s;2j)$的对称置换性质

定义1.21.1. $S_{ex}(s,n)=(\overbrace{I_{2j+1}\otimes\cdot\cdot\otimes I_{2j+1}\otimes}^{n-1}S_{ex}\overbrace{\otimes I_{2j+1}\otimes\cdot\cdot\otimes I}^{2s-n-1})$

推论1.21.1. $\Gamma(s;2j) = S_{ex}(s,n)\Gamma(s;2j), \bar{\Gamma}(s;2j) = \bar{\Gamma}(s;2j)S_{ex}(s,n)$

推论1.21.2. $S_{ex}(s,n)\Omega(s;2j)S_{ex}(s,n) = \Omega(s;2j)$

推论1.21.3. $\hat{\psi}(s,\varsigma;2j) = S_{ex}(s,n)\hat{\psi}(s,\varsigma;2j), \forall n \in \{1,2,\cdot\cdot,2s+1\}$

1.22 矩阵$I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j), I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)$的常数不变张量性质

定理1.22.1. $[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)] = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s;2j)}[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(j)}\otimes e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2};2j)}$

定理1.22.2. $[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)] = e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(j)}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2};2j)}[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s;2j)}$

2 二阶完美常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j), N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)$

2.1 完美常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j), N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)$

定义2.1.1. $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s) := \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2}), N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s) := \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})$

定义2.1.2. $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j) := \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j), N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j) := \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};2j)$

推论2.1.1. $N(s;2j) = [I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\Gamma(s;2j), \bar{N}(s;2j) = \bar{\Gamma}(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]$

性质2.1.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j) = N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};2j), \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j) = N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)$

推论2.1.2. $\Gamma(s;2j) = [I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]N(s;2j), \bar{\Gamma}(s;2j) = \bar{N}(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)],$

性质2.1.2. $\Gamma(s;2j) = [I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)][I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\Gamma(s;2j)$

2.2 常数矩阵$N_{A_\varsigma}(s;2j), N^{A_\varsigma}(s;2j); \bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j), \bar{N}^{A_\varsigma}(s;2j); N(s;2j), \bar{N}(s;2j)$

定义2.2.1.

$$\begin{cases} N_{A_\varsigma}(s;2j) \prec N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j), N^{A_\varsigma}(s;2j) \prec N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)|_{I_{C^{2s}_{2s+2j}}\times I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}} \\ \bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j) := N^{+}_{A_\varsigma}(s;2j) \succ N_{A_\varsigma l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;2j), \bar{N}^{A_\varsigma}(s;2j) := N^{+A_\varsigma}(s;2j) \succ N^{A_\varsigma l_\varsigma}{}_{k_\varsigma}(s;2j)|_{I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}\times I_{C^{2s}_{2s+2j}}} \\ N(s;2j) \prec N_{A_\varsigma\otimes l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;2j)|_{(2j+1)I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}\times I_{C^{2s}_{2s+2j}}}, \bar{N}(s;2j) = N^{+}(s;2j) \prec N_{k_\varsigma}{}^{A_\varsigma\otimes l_\varsigma}(s;2j)|_{I_{C^{2s}_{2s+2j}}\times(2j+1)I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}} \end{cases}$$

2.3 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j), N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)$的基本性质

相等性：

性质2.3.1.

$$\begin{cases} N^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma l'_\varsigma}(s;2j) \simeq N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j) \simeq N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j) \simeq N^{A'_\varsigma l'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;2j) \\ [N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)]^* \simeq N^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma l'_\varsigma}(s;2j), [N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)]^* \simeq N^{A'_\varsigma l'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;2j) \end{cases}$$

推论2.3.1.

$$\begin{cases} N_{A_\varsigma}(s;2j) \simeq N^{A_\varsigma}(s;2j) \simeq N_{A'_\varsigma}(s;2j) \simeq N^{A'_\varsigma}(s;2j); \bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j) \simeq \bar{N}^{A_\varsigma}(s;2j) \simeq \bar{N}_{A'_\varsigma}(s;2j) \simeq \bar{N}^{A'_\varsigma}(s;2j) \\ N_{A_\varsigma}(s;2j) = N^*_{A_\varsigma}(s;2j), \bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j) = \bar{N}^*_{A_\varsigma}(s;2j); N(s;2j) = N^*(s;2j), \bar{N}(s;2j) = \bar{N}^*(s;2j) \end{cases}$$

2.4 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)$的正交性质

正交性：

引理2.4.1. $\sum_{k=0}^{2s-1}C^{2j}_{2j+k}=C^{2j+1}_{2j+2s}$

引理2.4.2. $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)N^{A'_\varsigma l_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;2j)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;2j)$

定理2.4.1.

$$\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j)=\delta^{k_\varsigma}_{m_\varsigma}[\Leftrightarrow]N^{A_\varsigma}(s;2j)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j)=I_{C^{2s}_{2s+2j}}[\Leftrightarrow]\bar{N}(s;2j)N(s;2j)=I_{C^{2s}_{2s+2j}}\\ N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)N^{A_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)=(1+\frac{j}{s})\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j)N^{A_\varsigma}(s;2j)=(1+\frac{j}{s})I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}\\ N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)N^{B_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)=\frac{1}{2j+1}C^{2s}_{2s+2j}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}[\Leftrightarrow]tr[\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j)N^{B_\varsigma}(s;2j)]=\frac{1}{2j+1}C^{2s}_{2s+2j}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\end{cases}$$

性质2.4.1.

$$\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)=\frac{1}{2s}[\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}+(2s-1)N^{m_\varsigma}_{A_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)]\\ \bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j)N^{B_\varsigma}(s;2j)=\frac{1}{2s}[\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+(2s-1)N^{B_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\bar{N}_{A_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)]\end{cases}$$

2.5 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)$的升降指标

升降指标：

性质2.5.1.

$$\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)=\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s;2j)\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}(j)\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)=\varepsilon_{k_\varsigma m_\varsigma}(s;2j)\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}(j)\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)N^{m_\varsigma}_{B_\varsigma n_\varsigma}(s;2j)\end{cases}$$

推论2.5.1.

$$\begin{cases}N_{A_\varsigma}(s;2j)\varepsilon(s-\frac{1}{2};2j)=\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}(j)\varepsilon(s;2j)N^{B_\varsigma}(s;2j),\varepsilon(s-\frac{1}{2};2j)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j)=\bar{N}^{B_\varsigma}(s;2j)\varepsilon_{B_\varsigma A_\varsigma}(j)\varepsilon(s;2j)\\ N^{A_\varsigma}(s;2j)\varepsilon(s-\frac{1}{2};2j)=\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}(j)\varepsilon(s;2j)N_{B_\varsigma}(s;2j),\varepsilon(s-\frac{1}{2};2j)\bar{N}^{A_\varsigma}(s;2j)=\bar{N}_{B_\varsigma}(s;2j)\varepsilon^{B_\varsigma A_\varsigma}(j)\varepsilon(s;2j)\\ N(s;2j)\varepsilon(s;2j)=[\varepsilon(j)\otimes\varepsilon(s-\frac{1}{2};2j)]N(s;2j),\varepsilon(s;2j)\bar{N}(s;2j)=\bar{N}(s;2j)[\varepsilon(j)\otimes\varepsilon(s-\frac{1}{2};2j)]\end{cases}$$

Penrose标准升降规则：

性质2.5.2.

$$\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)=(-1)^{2s}[\varsigma^{2s}\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s;2j)][-\varsigma\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}(j)][(-\varsigma)^{2s-1}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)]N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)=(-1)^{2s}[(-\varsigma)^{2s}\varepsilon_{k_\varsigma m_\varsigma}(s;2j)][\varsigma\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}(j)][\varsigma^{2s-1}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)]N^{m_\varsigma}_{B_\varsigma n_\varsigma}(s;2j)\end{cases}$$

2.6 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)$的自旋矩阵变换

性质2.6.1.

$$\begin{cases}N^{A_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)N^{l_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;2j)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)[\Leftrightarrow]N^{A_\varsigma}(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;2j)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;2j)\\ [\Leftrightarrow]\bar{N}(s;2j)\sigma(j)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}N(s;2j)=\frac{1}{2s}\sigma(s;2j)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;2j)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)[\Leftrightarrow]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)N^{A_\varsigma}(s;2j)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\end{cases}$$

性质2.6.2.

$$\begin{cases}N^{A_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)N^{l_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;2j)=\frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j)[\Leftrightarrow]N^{A_\varsigma}(s;2j)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;2j)=\frac{1}{2s}S_{ab}(s,\varsigma;2j)\\ [\Leftrightarrow]\bar{N}(s;2j)S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}N(s;2j)=\frac{1}{2s}S_{ab}(s,\varsigma;2j)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;2j)=\frac{1}{2s}S_{abm_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)[\Leftrightarrow]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;2j)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)N^{A_\varsigma}(s;2j)=\frac{1}{2s}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)\end{cases}$$

2.7 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j), N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)$的置换性质

定理2.7.1.

$$\begin{cases}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)+\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma m_\varsigma}(s;2j)=N^{j_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;2j)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)=\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{j_\varsigma}(s;2j)N^{B_\varsigma l_\varsigma}_{j_\varsigma}(s;2j)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;2j)+\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j)=\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;2j)\\ N^{A_\varsigma}(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+N^{B_\varsigma}(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)=\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;2j)N^{B_\varsigma}(s;2j)\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\sigma(j)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)]N(s;2j)=N(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;2j)\\ \bar{N}(s;2j)[\sigma(j)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)]=\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;2j)\bar{N}(s;2j)\end{cases}$$

定理2.7.2.

$$\begin{cases}S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)+S_{abl_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma m_\varsigma}(s;2j)=N^{j_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)S_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;2j)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)S_{abm_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)=S_{abk_\varsigma}{}^{j_\varsigma}(s;2j)N^{B_\varsigma l_\varsigma}_{j_\varsigma}(s;2j)\end{cases}$$

$$\begin{cases}S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;2j)+S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j)=\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j)S_{ab}(s,\varsigma;2j)\\ N^{A_\varsigma}(s;2j)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+N^{B_\varsigma}(s;2j)S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)=S_{ab}(s,\varsigma;2j)N^{B_\varsigma}(s;2j)\end{cases}$$

$$\begin{cases}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]N(s;2j)=N(s;2j)S_{ab}(s,\varsigma;2j)\\ \bar{N}(s;2j)[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]=S_{ab}(s,\varsigma;2j)\bar{N}(s;2j)\end{cases}$$

2.8 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_\varsigma}(s;2j), N^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j)$的性质

定义2.8.1. $\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;2j):=\Gamma^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;2j)\Gamma^{A_{\varsigma n+1}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}_{l_\varsigma}(s-\frac{n}{2};2j)\\ N^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{k_\varsigma}(s;2j):=\Gamma^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}_{k_\varsigma}(s;2j)\Gamma^{l_\varsigma}_{A_{\varsigma n+1}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s-\frac{n}{2};2j)\end{cases}$

相等性：

性质2.8.1. $N^{k'_\varsigma}_{A'_{\varsigma1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}(s;2j)\simeq N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;2j)\simeq N^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{k_\varsigma}(s;2j)\simeq N^{A'_{\varsigma1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}_{k'_\varsigma}(s;2j)$

性质2.8.2. $[N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;2j)]^*\simeq N^{k'_\varsigma}_{A'_{\varsigma1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}(s;2j),[N^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{k_\varsigma}(s;2j)]^*\simeq N^{A'_{\varsigma1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}_{k'_\varsigma}(s;2j)$

展开性：

性质2.8.3.

$$\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;2j)=N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}l_{\varsigma1}}(s;2j)N^{l_{\varsigma1}}_{A_{\varsigma2}l_{\varsigma2}}(s-\frac{1}{2};2j)\cdot\cdot N^{l_{\varsigma n-1}}_{A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s-\frac{n-1}{2};2j)\\ N^{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{k_\varsigma}(s;2j)=N^{A_{\varsigma1}l_{\varsigma1}}_{k_\varsigma}(s;2j)N^{A_{\varsigma2}l_{\varsigma2}}_{l_{\varsigma1}}(s-\frac{1}{2};2j)\cdot\cdot N^{A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{l_{\varsigma n-1}}(s-\frac{n-1}{2};2j)\end{cases}$$

性质2.8.4.

$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;2j)=N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}l_{\varsigma1}}(s;2j)N^{l_{\varsigma1}}_{A_{\varsigma2}l_{\varsigma2}}(s-\frac{1}{2};2j)\cdot\cdot N^{l_{\varsigma2s-1}}_{A_{\varsigma2s}l_{\varsigma2s}}(\frac{1}{2};2j)\\ \Gamma^{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}_{k_\varsigma}(s;2j)=N^{A_{\varsigma1}l_{\varsigma1}}_{k_\varsigma}(s;2j)N^{A_{\varsigma2}l_{\varsigma2}}_{l_{\varsigma1}}(s-\frac{1}{2};2j)\cdot\cdot N^{A_{\varsigma2s}l_{\varsigma2s}}_{l_{\varsigma2s-1}}(\frac{1}{2};2j)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;2j)\succ\Gamma_{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;2j)=N_{A_{\varsigma1}}(s;2j)N_{A_{\varsigma2}}(s-\frac{1}{2};2j)\cdot\cdot N_{A_{\varsigma2s}}(\frac{1}{2};2j)\\ \Gamma^{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}_{k_\varsigma}(s;2j)\succ\Gamma^{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;2j)=N^{A_{\varsigma1}}(s;2j)N^{A_{\varsigma2}}(s-\frac{1}{2};2j)\cdot\cdot N^{A_{\varsigma2s}}(\frac{1}{2};2j)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{\Gamma}(s;2j)=\bar{N}(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\bar{N}(s-\frac{1}{2};2j)]\cdot\cdot[I_{(2j+1)^{2s-2}}\otimes\bar{N}(1)][I_{(2j+1)^{2s-1}}\otimes\bar{N}(\frac{1}{2};2j)]\\ \Gamma(s;2j)=[I_{(2j+1)^{2s-1}}\otimes N(\frac{1}{2};2j)][I_{(2j+1)^{2s-2}}\otimes N(1)]\cdot\cdot[I_{2j+1}\otimes N(s-\frac{1}{2};2j)]N(s;2j)\end{cases}$$

2.9 推论1：常数矩阵$N(s;2j),\bar{N}(s;2j)$的几个恒等式

性质2.9.1.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;2j)[\sigma(j)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]N(s;2j)=\sigma(s;2j)\\ N(s;2j)\sigma(s;2j)\bar{N}(s;2j)=[\sigma(j)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]N(s;2j)\bar{N}(s;2j)\\ N(s;2j)\sigma(s;2j)\bar{N}(s;2j)=N(s;2j)\bar{N}(s;2j)\{\vartheta\cdot[\sigma(j)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]\}^n\\ [N(s;2j)\bar{N}(s;2j),\sigma(j)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]=0\end{cases}$$

性质2.9.2.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;2j)[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]N(s;2j)=S_{ab}(s,\varsigma;2j)\\ N(s;2j)S_{ab}(s,\varsigma;2j)\bar{N}(s;2j)=[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]N(s;2j)\bar{N}(s;2j)\\ N(s;2j)S_{ab}(s,\varsigma;2j)\bar{N}(s;2j)=N(s;2j)\bar{N}(s;2j)[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]\\ [N(s;2j)\bar{N}(s;2j),S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]=0\end{cases}$$

性质2.9.3.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;2j)\{\vartheta\cdot[\sigma(j)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]\}^nN(s;2j)=[\vartheta\cdot\sigma(s;2j)]^n\\ N(s;2j)[\vartheta\cdot\sigma(s;2j)]^n\bar{N}(s;2j)=\{\vartheta\cdot[\sigma(j)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]\}^nN(s;2j)\bar{N}(s;2j)\\ N(s;2j)[\vartheta\cdot\sigma(s;2j)]^n\bar{N}(s;2j)=N(s;2j)\bar{N}(s;2j)\{\vartheta\cdot[\sigma(j)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]\}^n\\ [N(s;2j)\bar{N}(s;2j),\{\vartheta\cdot[\sigma(j)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]\}^n]=0\end{cases}$$

性质2.9.4.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;2j)\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]\}^nN(s;2j)=[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j)]^n\\ N(s;2j)[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j)]^n\bar{N}(s;2j)=\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]\}^nN(s;2j)\bar{N}(s;2j)\\ N(s;2j)[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j)]^n\bar{N}(s;2j)=N(s;2j)\bar{N}(s;2j)\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]\}^n\\ [N(s;2j)\bar{N}(s;2j),\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]\}^n]=0\end{cases}$$

推论2.9.1.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;2j)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]}N(s;2j)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j)}\\ N(s;2j)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j)}\bar{N}(s;2j)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]}N(s;2j)\bar{N}(s;2j)\\ N(s;2j)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j)}\bar{N}(s;2j)=N(s;2j)\bar{N}(s;2j)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]}\\ [N(s;2j)\bar{N}(s;2j),e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]}]=0\end{cases}$$

2.10 推论2：常数矩阵$N(s;2j),\bar{N}(s;2j)$的另外几个恒等式

推论2.10.1.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;2j)\sigma(j)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}N(s;2j)=\frac{1}{2s}\sigma(s;2j)\\ \bar{N}(s;2j)I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)N(s;2j)=(1-\frac{1}{2s})\sigma(s;2j)\\ N^{A_\varsigma}(s;2j)\sigma(s-\frac{1}{2};2j)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j)=(1-\frac{1}{2s})\sigma(s;2j)\\ \bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j)\sigma(s;2j)N^{A_\varsigma}(s;2j)=(1+\frac{2j+1}{2s})\sigma(s-\frac{1}{2};2j)\end{cases}$$

推论2.10.2.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;2j)S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}N(s;2j)=\frac{1}{2s}S_{ab}(s,\varsigma;2j)\\ \bar{N}(s;2j)I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)N(s;2j)=(1-\frac{1}{2s})S_{ab}(s,\varsigma;2j)\\ N^{A_\varsigma}(s;2j)S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j)=(1-\frac{1}{2s})S_{ab}(s,\varsigma;2j)\\ \bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j)S_{ab}(s,\varsigma;2j)N^{A_\varsigma}(s;2j)=(1+\frac{2j+1}{2s})S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)\end{cases}$$

推论2.10.3.
$$\begin{cases}\bar{N}(1)[\sigma(j)\otimes I_2+I_{2j+1}\otimes\sigma(j)]N(1)=\sigma(1)\\ \bar{N}(\frac{3}{2})\{\sigma(j)\otimes I_3+I_{2j+1}\otimes\{\bar{N}(1)[\sigma(j)\otimes I_2+I_{2j+1}\otimes\sigma(j)]N(1)\}\}N(\frac{3}{2})=\sigma(\frac{3}{2})\\ \bar{N}(s;2j)\cdot\cdot\bar{N}(\frac{3}{2})\{\sigma(j)\otimes I_3+I_{2j+1}\otimes\{\bar{N}(1)[\sigma(j)\otimes I_2+I_{2j+1}\otimes\sigma(j)]N(1)\}\}N(\frac{3}{2})\cdot\cdot N(s;2j)=\sigma(s;2j)\end{cases}$$

2.11 矩阵$N(s;2j),\bar{N}(s;2j)$的常数不变张量性质

定理2.11.1. $N(s;2j)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(j)}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2};2j)}N(s;2j)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s;2j)}$

定理2.11.2. $\bar{N}(s;2j)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s;2j)}\bar{N}(s;2j)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(j)}\otimes e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2};2j)}$

3 二阶完美常数不变张量$X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j),X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)$

只有满足$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}(s;2j)=-\varepsilon_{B_\varsigma A_\varsigma}(s;2j)$反对称条件时，本章节内容才全部成立(j=半整数)，否则只有部分成立(j=整数)。对于j=整数的$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}(s;2n)=\varepsilon_{B_\varsigma A_\varsigma}(s;2n)$对称情形还需重新研究考虑，先放一放，等有时间了再说。

3.1 完美常数不变张量$X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j),X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)$

定义3.1.1. $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j):=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+2j}}\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}(j)N^{l_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j),X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j):=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+2j}}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}(j)N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)$

性质3.1.1. $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j)\simeq X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)$

3.2 常数矩阵$X(s;2j),\bar{X}(s;2j)$

定义3.2.1.
$$\begin{cases}X^{A_\varsigma}(s;2j)\prec X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j),X_{A_\varsigma}(s;2j)\prec X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)\\ \bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j)\prec X_{A_\varsigma l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s;2j),\bar{X}^{A_\varsigma}(s;2j)\prec X^{A_\varsigma l_\varsigma}{}_{m_\varsigma}(s;2j)\\ X(s;2j)\prec X_{A_\varsigma\otimes l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s;2j),\bar{X}(s;2j)\prec X_{m_\varsigma}{}^{A_\varsigma\otimes l_\varsigma}(s;2j)=X^+(s;2j)\end{cases}$$

3.3 常数不变张量$X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j),X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)$的升降指标

性质3.3.1.
$$\begin{cases}X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j)=\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\varepsilon_{m_\varsigma r_\varsigma}(s-1;2j)X^{r_\varsigma}_{B_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\\ X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)=\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\varepsilon^{m_\varsigma r_\varsigma}(s-1;2j)X^{B_\varsigma n_\varsigma}_{r_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\end{cases}$$

3.4 常数不变张量$X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j),X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)$的正交性

性质3.4.1. $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j)X^{n_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)=\delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}[\Leftrightarrow]X^{A_\varsigma}(s;2j)\bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j)=I_{C^{2s-2}_{2s-2+2j}}[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;2j)X(s;2j)=I_{C^{2s-2}_{2s-2+2j}}$

性质3.4.2. $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)=0$
$[\Leftrightarrow]X^{A_\varsigma}(s;2j)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j)=0,N_{A_\varsigma}(s;2j)\bar{X}^{A_\varsigma}(s;2j)=0[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;2j)N(s;2j)=0,\bar{N}(s;2j)X(s;2j)=0$

性质3.4.3. $X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)X^{A_\varsigma k_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j)=\frac{2s-1}{2s-1+2j}\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j)X^{A_\varsigma}(s;2j)=\frac{2s-1}{2s-1+2j}I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}$

性质3.4.4. $X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)X^{B_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j)=\frac{1}{2j+1}C^{2s-2}_{2s-2+2j}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}[\Leftrightarrow]tr[\bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j)X^{B_\varsigma}(s;2j)]=\frac{1}{2j+1}C^{2s-2}_{2s-2+2j}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}$

推论3.4.1. $\bar{N}(s;2j)N(s;2j)=I_{C^{2s}_{2s+2j}},\bar{X}(s;2j)X(s;2j)=I_{C^{2s-2}_{2s-2+2j}},\bar{N}(s;2j)X(s;2j)=0,\bar{X}(s;2j)N(s;2j)=0$

3.5 常数不变张量$X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j),X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)$的自旋变换

推论3.5.1. $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)X^{n_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)=-\frac{1}{2s-1+2j}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j)$
$[\Leftrightarrow]X^{A_\varsigma}(s;2j)\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\bar{X}_{B_\varsigma}(s;2j)=-\frac{1}{2s-1+2j}\sigma(s-1;2j)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;2j)\sigma(j)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}X(s;2j)=-\frac{1}{2s-1+2j}\sigma(s-1;2j)$

推论3.5.2. $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)X^{m_\varsigma}_{B_\varsigma k_\varsigma}(s;2j)=-\frac{1}{2s-1+2j}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}^{A_\varsigma}(s;2j)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)X_{B_\varsigma}(s;2j)=-\frac{1}{2s-1+2j}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)$

推论3.5.3. $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)X_{B_\varsigma l_\varsigma}^{n_\varsigma}(s;2j)=-\frac{1}{2s-1+2j}S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j)$
$[\Leftrightarrow]X^{A_\varsigma}(s;2j)S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-2+2j}^{2s-2}}\bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j)=-\frac{1}{2s-1+2j}S_{ab}(s-1,\varsigma;2j)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;2j)S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}X(s;2j)=-\frac{1}{2s-1+2j}S_{ab}(s-1,\varsigma;2j)$

推论3.5.4. $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)X_{B_\varsigma k_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;2j)=-\frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}^{A_\varsigma}(s;2j)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)X_{B_\varsigma}(s;2j)=-\frac{1}{2s-1+2j}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)$

3.6 常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j),X_{A_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;2j)$的置换性质

定理3.6.1.

$$\begin{cases}X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)]=\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j)X_{n_\varsigma}^{B_\varsigma k_\varsigma}(s;2j)\\ [\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)]X_{B_\varsigma k_\varsigma}^{n_\varsigma}(s;2j)=X_{A_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;2j)\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j)\end{cases}$$

$$\begin{cases}X^{A_\varsigma}(s;2j)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]=\sigma(s-1;2j)X^{B_\varsigma}(s;2j)\\ [\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]\bar{X}_{B_\varsigma}(s;2j)=\bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j)\sigma(s-1;2j)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{X}(s;2j)[\sigma(j)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]=\sigma(s-1;2j)\bar{X}(s;2j)\\ [\sigma(j)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]X(s;2j)=X(s;2j)\sigma(s-1;2j)\end{cases}$$

定理3.6.2.

$$\begin{cases}X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)]=S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j)X_{n_\varsigma}^{B_\varsigma\otimes k_\varsigma}(s;2j)\\ [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)]X_{B_\varsigma k_\varsigma}^{n_\varsigma}(s;2j)=X_{A_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;2j)S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j)\end{cases}$$

$$\begin{cases}X^{A_\varsigma}(s;2j)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]=S_{ab}(s-1,\varsigma;2j)X^{B_\varsigma}(s;2j)\\ [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]\bar{X}_{B_\varsigma}(s;2j)=\bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j)S_{ab}(s-1,\varsigma;2j)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{X}(s;2j)[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]=S_{ab}(s-1,\varsigma;2j)\bar{X}(s;2j)\\ [S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]X(s;2j)=X(s;2j)S_{ab}(s-1,\varsigma;2j)\end{cases}$$

推论3.6.1.

$$\begin{cases}N_{C_\varsigma m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}(j)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)]=\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j)N_{D_\varsigma n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\varepsilon^{D_\varsigma B_\varsigma}(j)\\ [\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)]\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}(j)N_{k_\varsigma}^{C_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)=\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}(j)N_{l_\varsigma}^{D_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j)\end{cases}$$

$$\begin{cases}N_{C_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}(j)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]=\sigma(s-1;2j)N_{D_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\varepsilon^{D_\varsigma B_\varsigma}(j)\\ [\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}(j)N^{C_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)=\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}(j)N^{D_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\sigma(s-1;2j)\end{cases}$$

推论3.6.2.

$$\begin{cases}N_{C_\varsigma m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}(j)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)]=S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j)N_{D_\varsigma n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\varepsilon^{D_\varsigma B_\varsigma}(j)\\ [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)]\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}(j)N_{k_\varsigma}^{C_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)=\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}(j)N_{l_\varsigma}^{D_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j)\end{cases}$$

$$\begin{cases}N_{C_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}(j)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]=S_{ab}(s-1,\varsigma;2j)N_{D_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)\varepsilon^{D_\varsigma B_\varsigma}(j)\\ [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}(j)N^{C_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)=\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}(j)N^{D_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j)S_{ab}(s-1,\varsigma;2j)\end{cases}$$

3.7 推论：关于常数矩阵$X(s;2j),\bar{X}(s;2j)$的重要性质

推论3.7.1.

$$\begin{cases}\bar{X}(s;2j)[\sigma(j)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]X(s;2j)=\sigma(s-1;2j)\\ X(s;2j)\sigma(s-1;2j)\bar{X}(s;2j)=[\sigma(j)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]X(s;2j)\bar{X}(s;2j)\\ [X(s;2j)\bar{X}(s;2j),\sigma(j)\otimes I_{C_{2s-1+2j}^{2s-1}}+I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)]=0\end{cases}$$

推论3.7.2.

$$\begin{cases}\bar{X}(s;2j)[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]X(s;2j)=S_{ab}(s-1,\varsigma;2j)\\ X(s;2j)S_{ab}(s,\varsigma-1,\varsigma;2j)\bar{X}(s;2j)=[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]X(s;2j)\bar{X}(s;2j)\\ [X(s;2j)\bar{X}(s;2j),S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j}}+I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)]=0\end{cases}$$

推论3.7.3. $X^{A_\varsigma}(s;2j)\sigma(s-\frac{1}{2};2j)\bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j)=\frac{2s+2j}{2s-1+2j}\sigma(s-1;2j)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;2j)I_{2j+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j)X(s;2j)=\frac{2s+2j}{2s-1+2j}\sigma(s-1;2j)$

推论3.7.4. $X^{A_\varsigma}(s;2j)I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)\bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j)=\frac{2s+2j}{2s-1+2j}S_{ab}(s-1,\varsigma;2j)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;2j)I_{2j+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j)X(s;2j)=\frac{2s+2j}{2s-1+2j}S_{ab}(s-1,\varsigma;2j)$

3.8 矩阵$X(s;2j),\bar{X}(s;2j)$的常数不变张量性质

定理3.8.1. $X(s;2j)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(j)}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2};2j)}X(s;2j)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1;2j)}$

定理3.8.2. $\bar{X}(s;2j)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1;2j)}\bar{X}(s;2j)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(j)}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2};2j)}$

3.9 常数矩阵$\Omega(s;2j),\sigma(s-1;2j)$的置换性质

推论3.9.1. $$\begin{cases}\Omega(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]X(s;2j)=[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]X(s;2j)\sigma(s-1;2j)\\ \bar{X}(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\Omega(s;2j)=\sigma(s-1;2j)\bar{X}(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\end{cases}$$

推论3.9.2. $$\begin{cases}\sigma(s;2j)=\bar{N}(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\Omega(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]N(s;2j)\\ \sigma(s-1;2j)=\bar{X}(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]\Omega(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]X(s;2j)\end{cases}$$

推论3.9.3. $$\begin{cases}[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s;2j)]^n=\bar{N}(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)][\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j)]^n[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]N(s;2j)\\ [\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-1;2j)]^n=\bar{X}(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)][\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j)]^n[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]X(s;2j)\end{cases}$$

推论3.9.4. $$\begin{cases}e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s;2j)}=\bar{N}(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j)}[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]N(s;2j)\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-1;2j)}=\bar{X}(s;2j)[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j)]e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j)}[I_{2j+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j)]X(s;2j)\end{cases}$$

3.10 常数矩阵$\Omega(s-l;2j),[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-l;2j)]^n,e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-l;2j)}$的同构性表示

推论3.10.1. $\Omega(s;2j)=\Omega(s-1;2j)\otimes I_{(2j+1)^2}+I_{(2j+1)^{2s-2}}\otimes\Omega(1;2j)$

推论3.10.2.
$$\begin{cases}\Omega(s;2j)I_{(2j+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{2j+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};2j)]X(1;2j)\}=I_{(2j+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{2j+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};2j)]X(1;2j)\}\Omega(s-1;2j)\\ I_{(2j+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;2j)[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};2j)]\}\Omega(s;2j)=\Omega(s-1;2j)I_{(2j+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;2j)[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};2j)]\}\end{cases}$$

推论3.10.3.
$$\begin{cases}\Omega(s-1;2j)=I_{(2j+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;2j)[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};2j)]\}\Omega(s;2j)I_{(2j+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{2j+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};2j)]X(1;2j)\}\\ [\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-1;2j)]^n=I_{(2j+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;2j)[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};2j)]\}[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j)]^nI_{(2j+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{2j+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};2j)]X(1;2j)\}\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-1;2j)}=I_{(2j+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;2j)[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};2j)]\}e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j)}I_{(2j+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{2j+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};2j)]X(1;2j)\}\end{cases}$$

定义3.10.1.
$$\begin{cases}T(s;2j):=I_{(2j+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{2j+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};2j)]X(1;2j)\}\\ \bar{T}(s;2j):=I_{(2j+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;2j)[I_{2j+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};2j)]\}=T^{+}(s;2j)\end{cases}$$

推论3.10.4.
$$\begin{cases}\Omega(s-l;2j)=\bar{T}(s-l+1;2j)\cdots\bar{T}(s-1;2j)\bar{T}(s;2j)\Omega(s;2j)T(s;2j)T(s-1;2j)\cdots T(s-l+1;2j)\\ [\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-l;2j)]^n=\bar{T}(s-l+1;2j)\cdots\bar{T}(s-1;2j)\bar{T}(s;2j)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j)]^nT(s;2j)T(s-1;2j)\cdots T(s-l+1;2j)\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-l;2j)}=\bar{T}(s-l+1;2j)\cdots\bar{T}(s-1;2j)\bar{T}(s;2j)e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j)}T(s;2j)T(s-1;2j)\cdots T(s-l+1;2j)\end{cases}$$

推论3.10.5.

$$\begin{cases}\sigma(s-l;2j)=\bar{\Gamma}(s-l;2j)\bar{T}(s-l+1;2j)\cdots\bar{T}(s;2j)\Omega(s;2j)T(s;2j)\cdots T(s-l+1;2j)\Gamma(s-l;2j)\\ [\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-l;2j)]^n=\bar{\Gamma}(s-l;2j)\bar{T}(s-l+1;2j)\cdots\bar{T}(s;2j)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j)]^nT(s;2j)\cdots T(s-l+1;2j)\Gamma(s-l;2j)\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-l;2j)}=\bar{\Gamma}(s-l;2j)\bar{T}(s-l+1;2j)\cdots\bar{T}(s;2j)e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j)}T(s;2j)\cdots T(s-l+1;2j)\Gamma(s-l;2j)\end{cases}$$

4 几个例子

4.1 例子一

推论4.1.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}(2;1)\sigma^{A_\varsigma B_\varsigma}_{\alpha_\varsigma}\sigma^{C_\varsigma D_\varsigma}_{\beta_\varsigma}=\Gamma^{k_\varsigma}_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}(2;1)???\Gamma^{\rho_\varsigma}_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma}(1;2)$

4.2 具体例子

定义4.2.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1;2)=\frac{1}{2!}\Gamma^{k_\varsigma}_{(A_\varsigma B_\varsigma)}(1;2)$

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{0_\varsigma\cdot\cdot 0_\varsigma}_{l_0}\underbrace{1_\varsigma\cdot\cdot 1_\varsigma}_{l_1}\underbrace{2_\varsigma\cdot\cdot 2_\varsigma}_{l_2}}(1;2)=\sqrt{\frac{l_0!l_1!l_2!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,\sum_{l=0}^{1}(\sum_{k=\lambda_{2l+2}}^{\lambda_{2l+1}}C^{2l}_{2l+2-k}-C^{2l}_{2l+2-\lambda_{2l}})\},l_0+l_1+l_2=2$$

定义4.2.2. $\Gamma_{k_\varsigma}^{A_\varsigma B_\varsigma}(1;2)=\frac{1}{2!}\Gamma_{k_\varsigma}^{(A_\varsigma B_\varsigma)}(1;2)$

$$\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{0_\varsigma\cdot\cdot 0_\varsigma}^{l_0}\overbrace{1_\varsigma\cdot\cdot 1_\varsigma}^{l_1}\overbrace{2_\varsigma\cdot\cdot 2_\varsigma}^{l_2}}(1;2)=\sqrt{\frac{l_0!l_1!l_2!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,\sum_{l=0}^{1}(\sum_{k=\lambda_{2l+2}}^{\lambda_{2l+1}}C^{2l}_{2l+2-k}-C^{2l}_{2l+2-\lambda_{2l}})\},l_0+l_1+l_2=2$$

性质4.2.1. $\bar{\Gamma}(1;2)\Gamma(1;2)=I_6$

$$\bar{\Gamma}(1;2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}\end{bmatrix},\Gamma(1;2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2}\end{bmatrix},\Gamma(1;2)\bar{\Gamma}(1;2)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&2&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&2\end{bmatrix}$$

性质4.2.2.

$$\bar{\Gamma}(1;2)[\sigma(1)\otimes I_3+I_3\otimes\sigma(1)]\Gamma(1;2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&\sqrt{2}&0&0&0&0\\\sqrt{2}&0&1&\sqrt{2}&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&\sqrt{2}&0&0&\sqrt{2}&0\\0&0&1&\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\0&0&0&0&\sqrt{2}&0\end{bmatrix},\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&-\sqrt{2}&0&0&0&0\\\sqrt{2}&0&-1&-\sqrt{2}&0&0\\0&1&0&0&-1&0\\0&\sqrt{2}&0&0&-\sqrt{2}&0\\0&0&1&\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}\\0&0&0&0&\sqrt{2}&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-2\end{bmatrix}$$

$$[\bar{\Gamma}(1;2)[\sigma(1)\otimes I_3+I_3\otimes\sigma(1)]\Gamma(1;2)]^2=\begin{bmatrix}6&0&0&0&0&0\\0&6&0&0&0&0\\0&0&2&2\sqrt{2}&0&0\\0&0&2\sqrt{2}&4&0&0\\0&0&0&0&6&0\\0&0&0&0&0&6\end{bmatrix}$$

性质4.2.3.

$$\bar{\Gamma}(1;2)(\gamma\otimes I_3+I_3\otimes\gamma)\Gamma(1;2)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&-i&0&0&0\\0&i&0&0&0&0\\0&0&0&0&-i\sqrt{2}&0\\0&0&0&i\sqrt{2}&0&-i\sqrt{2}\\0&0&0&0&i\sqrt{2}&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&i\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&0&i&0\\-i\sqrt{2}&0&0&0&0&i\sqrt{2}\\0&0&0&0&0&0\\0&-i&0&0&0&0\\0&0&-i\sqrt{2}&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-i\sqrt{2}&0&0&0&0\\i\sqrt{2}&0&0&-i\sqrt{2}&0&0\\0&0&0&0&-i&0\\0&i\sqrt{2}&0&0&0&0\\0&0&i&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$[\bar{\Gamma}(1;2)(\gamma\otimes I_3+I_3\otimes\gamma)\Gamma(1;2)]^2=\begin{bmatrix}4&0&0&-2&0&-2\\0&6&0&0&0&0\\0&0&6&0&0&0\\-2&0&0&4&0&-2\\0&0&0&0&6&0\\-2&0&-2&0&0&4\end{bmatrix}$$

5 高阶完美常数不变张量的一般推广

5.1 无穷扩展和推广(“二阶”名字的由来)

推论5.1.1.

$$\underbrace{\sigma(\tfrac{1}{2}),\varepsilon(\tfrac{1}{2})}_{\text{零阶}}\to\underbrace{\sigma(j),\varepsilon(j)}_{\text{一阶}}\to\underbrace{\sigma(s_1;2j),\varepsilon(s_1;2j)}_{\text{二阶}}\to\underbrace{\sigma(s_2,s_1;2j),\varepsilon(s_2,s_1;2j)}_{\text{三阶}}\to\underbrace{\sigma(s_3,s_2,s_1;2j),\varepsilon(s_3,s_2,s_1;2j)}_{\text{四阶}}\to\cdots$$

推论5.1.2. $\underbrace{\sigma(\tfrac{1}{2}),\varepsilon(\tfrac{1}{2})}_{\text{零阶}}\to\underbrace{\sigma(s_1),\varepsilon(s_1)}_{\text{一阶}}\to\underbrace{\sigma(s_2,s_1),\varepsilon(s_2,s_1)}_{\text{二阶}}\to\underbrace{\sigma(s_3,s_2,s_1),\varepsilon(s_3,s_2,s_1)}_{\text{三阶}}\to\cdots$

$\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow$

推论5.1.3. $\underbrace{\Gamma(s_1;1)}_{一阶} \to\to \underbrace{\Gamma(s_2;2s_1)}_{二阶} \to\to \underbrace{\Gamma(s_3;w<s_2,s_1>)}_{三阶} \to\to \underbrace{\Gamma(s_4;w<s_3,s_2,s_1>)}_{四阶} \to\to \cdots$

5.2 高阶完美常数不变张量的表示

推论5.2.1.

$\bar{N}(s_0;w_0)[\tau(\frac{1}{2})\otimes 1]N(s_0;w_0) = \frac{1}{2s_0}\tau(s_0;w_0); s=s_0, w_0=1; \tau(s_0)\equiv\tau(s_0;w_0)$

$\bar{N}(s_1,s_0;w_1)[\tau(s_0;w_0)\otimes I_{*_0}]N(s_1,s_0;w_1) = \frac{1}{2s_1}\tau(s_1,s_0;w_1); s=2s_1s_0, w_1=2s_0$

$\bar{N}(s_2,s_1,s_0;w_2)[\tau(s_1,s_0;w_1)\otimes I_{*_1}]N(s_2,s_1,s_0;w_2) = \frac{1}{2s_2}\tau(s_2,s_1,s_0;w_2); s=2s_22s_1s_0, w_2=?$

$\bar{N}(s_3,s_2,s_1,s_0;w_3)[\tau(s_2,s_1,s_0;w_1)\otimes I_{*_2}]N(s_3,s_2,s_1,s_0;w_3) = \frac{1}{2s_3}\tau(s_3,s_2,s_1,s_0;w_3); s=2s_32s_22s_1s_0, w_3=??$

推论5.2.2.

$\bar{N}(s_0;w_0)[\tau(\frac{1}{2})\otimes 1]N(s_0;w_0) = \frac{1}{2s_0}\tau(s_0;w_0); s=s_0, w_0=1; \tau(s_0)\equiv\tau(s_0;w_0)$

$\bar{N}(s_1;w_1)[\tau(s_0;w_0)\otimes I_{*_0}]N(s_1;w_1) = \frac{1}{2s_1}\tau(s_1,s_0;w_1); s=2s_1s_0, w_1=2s_0, [\tau(s_1,s_0;w_1)] = C^{2s_1}_{2s_1+w_1}$

$\bar{N}(s_2;w_2)[\tau(s_1,s_0;w_1)\otimes I_{*_1}]N(s_2;w_2) = \frac{1}{2s_2}\tau(s_2,s_1,s_0;w_2)$

$; s=2s_22s_1s_0, w_2=C^{2s_1}_{2s_1+w_1}-1, [\tau(s_2,s_1,s_0;w_2)] = C^{2s_2}_{2s_2+w_2}$

$\bar{N}(s_3;w_3)[\tau(s_2,s_1,s_0;w_2)\otimes I_{*_2}]N(s_3;w_3) = \frac{1}{2s_3}\tau(s_3,s_2,s_1,s_0;w_3); s=2s_32s_22s_1s_0, w_3=C^{2s_2}_{2s_2+w_2}-1$

推论5.2.3. $[N(s;w)] = (w+1)C^{2s-1}_{2s-1+w}\times C^{2s}_{2s+w}, [\bar{N}(s;w)] = C^{2s}_{2s+w}\times(w+1)C^{2s-1}_{2s-1+w}$

第四十一章　Dirac型完美常数不变张量

自我评述：本章主要是Dirac型完美常数不变张量的具体介绍，是对更一般完美常数不变张量的深入具体了解和具体扩展。若将中微子自旋矩阵替换为Dirac矩阵，就可以得到Dirac型完美常数不变张量。同时它是之前完美常数不变张量一般情形的特殊运用而已，故直接写出其结论即可，而无需再作证明。本章符号约定符合以往规范，出了本章也不会混淆。本章节的完美常数不变张量与$w=1$情形同构，所以同样满足重要的复合常数不变张量那一章的展开性质，并具有完全相同的展开系数，为了节省篇幅，不再重复写出。

1 Dirac型完美常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}(s;3),\Gamma^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;3)$

1.1 常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}(s;3),\Gamma^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;3)$

定义1.1.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;3)=\frac{1}{(2s)!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{(\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot)}_{2s}}(s;3)$

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}_{l_0}\underbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}_{l_1}\cdot\cdot\underbrace{3_\varsigma\cdot\cdot3_\varsigma}_{l_3}}(s;3)=\sqrt{\frac{l_0!l_1!\cdot\cdot l_3!}{(2s)!}}\delta\{k_\varsigma,\sum_{l=0}^{[s]}(\sum_{k=\lambda_{2l+2}}^{\lambda_{2l+1}}C^{2l}_{2l+3-k}-C^{2l}_{2l+3-\lambda_{2l}})\},l_0+l_1+\cdot\cdot+l_3=2s$$

定义1.1.2. $\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;3)=\frac{1}{(2s)!}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{(\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot)}^{2s}}(s;3)$

$$\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}^{l_0}\overbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}^{l_1}\cdot\cdot\overbrace{3_\varsigma\cdot\cdot3_\varsigma}^{l_3}}(s;3)=\sqrt{\frac{l_0!l_1!\cdot\cdot l_3!}{(2s)!}}\delta\{k_\varsigma,\sum_{l=0}^{[s]}(\sum_{k=\lambda_{2l+2}}^{\lambda_{2l+1}}C^{2l}_{2l+3-k}-C^{2l}_{2l+3-\lambda_{2l}})\},l_0+l_1+\cdot\cdot+l_3=2s$$

1.2 常数矩阵$\Gamma(s;3),\bar{\Gamma}(s;3)$

定义1.2.1. $\Gamma(s;3)\succ\Gamma_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\eta_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}{}^{k_\varsigma}(s;3),\bar{\Gamma}(s;3)\succ\Gamma_{k_\varsigma}{}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\eta_\varsigma\otimes\cdot\cdot}^{2s}}(s;3)\simeq\Gamma^T(s;3)$

推论1.2.1. $[\Gamma(s;3)]=4^{2s}\times C^{2s}_{2s+3},[\bar{\Gamma}(s;3)]=C^{2s}_{2s+3}\times4^{2s},[A_\varsigma]=3+1,[k_\varsigma]=C^{2s}_{2s+3}$

1.3 常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}(s;3),\Gamma^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;3)$ 的基本性质

相等性：

性质1.3.1. $\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;3)\simeq\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;3)\simeq\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;3)\simeq\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;3)$

性质1.3.2. $[\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;3)]^*\simeq\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;3),[\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;3)]^*\simeq\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;3)$

推论1.3.1. $\Gamma(s;3)=\Gamma^*(s;3),\bar{\Gamma}(s;3)=\bar{\Gamma}^*(s;3),\bar{\Gamma}(s;3)=\Gamma^+(s;3),\Gamma(s;3)=\bar{\Gamma}^+(s;3)$

正交性：

性质1.3.3. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;3)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;3)=\delta^{k_\varsigma}{}_{l_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar{\Gamma}(s;3)\Gamma(s;3)=I$

性质1.3.4. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\lambda_{1\varsigma}\lambda_{2\varsigma}\cdot\cdot\lambda_{2s\varsigma}}(s;3)\Gamma^{\mu_{1\varsigma}\mu_{2\varsigma}\cdot\cdot\mu_{2s\varsigma}}_{k_\varsigma}(s;3)=\frac{1}{(2s)!}\delta^{(\mu_{1\varsigma}}_{\lambda_{1\varsigma}}\delta^{\mu_{2\varsigma}}_{\lambda_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{\mu_{2s\varsigma})}_{\lambda_{2s\varsigma}}=\frac{1}{(2s)!}\delta^{\mu_{1\varsigma}}_{(\lambda_{1\varsigma}}\delta^{\mu_{2\varsigma}}_{\lambda_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{\mu_{2s\varsigma}}_{\lambda_{2s\varsigma})}$

对比性：

性质1.3.5. $\varepsilon_{a_1a_2\cdot\cdot a_n}\varepsilon^{b_1b_2\cdot\cdot b_n}=\delta^{[b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_n]}_{a_n}=\delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdot\cdot\delta^{b_n}_{a_n]}$

其它性质：

性质1.3.6. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma}(\frac{1}{2};3)=\delta^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma},\Gamma^{\lambda_\varsigma}_{k_\varsigma}(\frac{1}{2};3)=\delta^{\lambda_\varsigma}_{k_\varsigma};\Gamma(0;3)=1,\bar{\Gamma}(0;3)=1$

1.4 度规常数不变张量$\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;3)$的引入及其性质

度规定义：

定义1.4.1.
$$\begin{cases}\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;3):=\Gamma^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;3)\underbrace{\varepsilon_{\lambda_\varsigma\rho_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\varepsilon_{\mu_\varsigma\sigma_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\varepsilon_{\eta_\varsigma\tau_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\cdots}_{2s}\Gamma^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\cdots}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;3)\\ \varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;3):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3)\overbrace{\varepsilon^{\lambda_\varsigma\rho_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\varepsilon^{\mu_\varsigma\sigma_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\varepsilon^{\eta_\varsigma\tau_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\cdots}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3)\end{cases}$$

性质1.4.1.
$$\begin{cases}\underbrace{\varepsilon_{\lambda_\varsigma\rho_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\varepsilon_{\mu_\varsigma\sigma_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\varepsilon_{\eta_\varsigma\tau_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\cdots}_{2s}\Gamma^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\cdots}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;3)\text{关于}\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\ldots\text{全对称}\\ \overbrace{\varepsilon^{\lambda_\varsigma\rho_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\varepsilon^{\mu_\varsigma\sigma_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\varepsilon^{\eta_\varsigma\tau_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\cdots}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3)\text{关于}\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\ldots\text{全对称}\end{cases}$$

推论1.4.1. $\varepsilon(s;3):=\bar{\Gamma}(s;3)\underbrace{\varepsilon(\tfrac{1}{2};3)\otimes\cdots\otimes\varepsilon(\tfrac{1}{2};3)}_{2s}\Gamma(s;3);\varepsilon(\tfrac{1}{2};3)=\varepsilon(\tfrac{1}{2};1)=\varepsilon(\tfrac{1}{2};3)$

推论1.4.2. $\varepsilon(s;3)\varepsilon^{+}(s;3)=\varepsilon^{+}(s;3)\varepsilon(s;3)=1;\varepsilon(s;3)=\varepsilon^{*}(s;3),\varepsilon(s;3)=(-1)^{4sj}\varepsilon(s;3)$

升降指标：

性质1.4.2.
$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3)=\varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;3)\underbrace{\varepsilon_{\lambda_\varsigma\rho_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\varepsilon_{\mu_\varsigma\sigma_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\varepsilon_{\eta_\varsigma\tau_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\cdots}_{2s}\Gamma^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\cdots}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;3)\\ \Gamma^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;3)=\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;3)\overbrace{\varepsilon^{\lambda_\varsigma\rho_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\varepsilon^{\mu_\varsigma\sigma_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\varepsilon^{\eta_\varsigma\tau_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\cdots}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3)\end{cases}$$

推论1.4.3. $\Gamma(s;3)\varepsilon(s;3)=\underbrace{\varepsilon(\tfrac{1}{2};3)\otimes\cdots\otimes\varepsilon(\tfrac{1}{2};3)}_{2s}\Gamma(s;3),\varepsilon(s;3)\bar{\Gamma}(s;3)=\bar{\Gamma}(s;3)\underbrace{\varepsilon(\tfrac{1}{2};3)\otimes\cdots\otimes\varepsilon(\tfrac{1}{2};3)}_{2s}$

Penrose标准升降规则：

性质1.4.3.
$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3)=(-1)^{2s}[\varsigma^{2s}\varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;3)]\underbrace{[-\varsigma\varepsilon_{\lambda_\varsigma\rho_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)][-\varsigma\varepsilon_{\mu_\varsigma\sigma_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)][-\varsigma\varepsilon_{\eta_\varsigma\tau_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)]\cdots}_{2s}\Gamma^{\overbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\cdots}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;3)\\ \Gamma^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;3)=(-1)^{2s}[(-\varsigma)^{2s}\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;3)]\overbrace{[\varsigma\varepsilon^{\lambda_\varsigma\rho_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)][\varsigma\varepsilon^{\mu_\varsigma\sigma_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)][\varsigma\varepsilon^{\eta_\varsigma\tau_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)]\cdots}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{\rho_\varsigma\sigma_\varsigma\tau_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3)\end{cases}$$

1.5 常数不变张量$\Omega^{a}{}^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\cdots}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}(s;3)$,$\Omega^{a}(s;3)$的引入及其基本性质

定义1.5.1.
$$\Omega^{a}{}^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3):=\overbrace{\underbrace{\gamma^{a}{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\lambda'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\delta_{\mu_\varsigma}{}^{\mu'_\varsigma}\delta_{\eta_\varsigma}{}^{\eta'_\varsigma}\cdots}_{2s}+\underbrace{\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\lambda'_\varsigma}\gamma^{a}{}_{\mu_\varsigma}{}^{\mu'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\delta_{\eta_\varsigma}{}^{\eta'_\varsigma}\cdots}_{2s}+\underbrace{\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\lambda'_\varsigma}\delta_{\mu_\varsigma}{}^{\mu'_\varsigma}\gamma^{a}{}_{\eta_\varsigma}{}^{\eta'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\cdots}_{2s}+\cdots}^{2s}$$

[⇕] [⇕]

定义1.5.2. $\Omega^{a}(s;3):=\gamma^{a}\otimes I_{4^{2s-1}}+I_4\otimes\gamma^{a}\otimes I_{4^{2s-2}}+\cdots+I_{4^{2s-1}}\otimes\gamma^{a}$

推论1.5.1. $\Omega^{a}{}^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\cdots}^{2s+1}}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3):=\gamma^{a}{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\lambda'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\underbrace{\delta_{\mu_\varsigma}{}^{\mu'_\varsigma}\delta_{\eta_\varsigma}{}^{\eta'_\varsigma}\cdots}_{2s-1}+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\lambda'_\varsigma}\Omega^{a}{}^{\overbrace{\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};3)$

[⇕] [⇕]

推论1.5.2. $\Omega^{a}(s;3)=\gamma^{a}\otimes I_{4^{2s-1}}+I_4\otimes\Omega^{a}(s-\tfrac{1}{2};3)$

推论1.5.3. $\Omega^{a}(s;3)=\Omega^{a}(s-s';3)\otimes I_{4^{2s'}}+I_{4^{2(s-s')}}\otimes\Omega^{a}(s';3)$

1.6 常数不变张量$\Omega_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}(s;3)$,$\Omega_{ab}(s;3)$的引入及其基本性质

定义1.6.1.

$$\Omega_{ab}\overbrace{\underbrace{{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}}_{2s}}^{2s}(s;3):=\overbrace{\underbrace{S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s}+\underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}S_{abB_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s}+\underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}S_{abC_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};3)\cdots}_{2s}+\cdots}^{2s}$$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

定义1.6.2. $\Omega_{ab}(s;3):=S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+I_4\otimes S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}+\cdots+I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes S_{ab}(\frac{1}{2};3)$

推论1.6.1. $\Omega_{ab}\overbrace{\underbrace{{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}}_{2s}}^{2s+1}(s;3):=S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\underbrace{\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s-1}+\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Omega_{ab}\overbrace{\underbrace{{}^{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}}_{2s-1}}^{2s}(s-\frac{1}{2};3)$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

推论1.6.2. $\Omega_{ab}(s;3)=S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+I_4\otimes\Omega_{ab}(s-\frac{1}{2};3)$

推论1.6.3. $\Omega_{ab}(s;3)=\Omega_{ab}(s-s';3)\otimes I_{(w+1)^{2s'}}+I_{(w+1)^{2(s-s')}}\otimes\Omega_{ab}(s';3)$

1.7 自旋常数不变张量$\gamma^a{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;3),\gamma^a(s;3);S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;3),S_{ab}(s;3)$的引入

定义1.7.1.

$$\begin{cases}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;3)\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\zeta_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{\zeta_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3):=\frac{1}{2s}\gamma^a{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;3)[\Leftrightarrow]\gamma^a(s;3):=\bar{\Gamma}(s;3)\Omega^a(\frac{1}{2};3)\Gamma(s;3)\\ \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;3)S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\zeta_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{\zeta_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3):=\frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;3)[\Leftrightarrow]S_{ab}(s;3):=\bar{\Gamma}(s;3)\Omega_{ab}(s;3)\Gamma(s;3)\end{cases}$$

1.8 常数矩阵$\Omega_{ab}(s;3),S_{ab}(s;3)$与$\Omega_a(s;3),\gamma_a(s;3)$之间关系

推论1.8.1. $S_{ab}(\frac{1}{2};3)=-\frac{i}{4}[\gamma_a(\frac{1}{2};3),\gamma_b(\frac{1}{2};3)][\Rightarrow]\Omega_{ab}(s;3)=-\frac{i}{4}[\Omega_a(s;3),\Omega_b(s;3)][\Rightarrow]S_{ab}(s;3)=-\frac{i}{4}[\gamma_a(s;3),\gamma_b(s;3)]$

1.9 常数矩阵$\Omega^a(s;3),\Omega_{ab}(s;3)$的两个重要引理

引理1.9.1. $\Gamma(s;3)\bar{\Gamma}(s;3)\Omega^a(s;3)\Gamma(s;3)=\Omega^a(s;3)\Gamma(s;3),\bar{\Gamma}(s;3)\Omega^a(s;3)\Gamma(s;3)\bar{\Gamma}(s;3)=\bar{\Gamma}(s;3)\Omega^a(s;3)$

引理1.9.2. $\Gamma(s;3)\bar{\Gamma}(s;3)\Omega_{ab}(s;3)\Gamma(s;3)=\Omega_{ab}(s;3)\Gamma(s;3),\bar{\Gamma}(s;3)\Omega_{ab}(s;3)\Gamma(s;3)\bar{\Gamma}(s;3)=\bar{\Gamma}(s;3)\Omega_{ab}(s;3)$

1.10 关于常数矩阵$\bar{\Gamma}(s;3),\Omega^a(s;3),\gamma^a(s;3),\Gamma(s;3)$的置换性质

定理1.10.1. $\Omega^a(s;3)\Gamma(s;3)=\Gamma(s;3)\gamma^a(s;3)[\Leftrightarrow]\Omega^a\overbrace{\underbrace{{}^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\cdots}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}}_{2s}}^{2s}(s;3)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3)\gamma^a{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;3)$

定理1.10.2. $\bar{\Gamma}(s;3)\Omega^a(s;3)=\gamma^a(s;3)\bar{\Gamma}(s;3)[\Leftrightarrow]\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;3)\Omega^a\overbrace{\underbrace{{}^{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\cdots}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}}_{2s}}^{2s}(s;3)=\gamma^a{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;3)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\eta'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;3)$

推论1.10.1. $\bar{\Gamma}(s;3)\Omega^a(s;3)\Gamma(s;3)=\gamma^a(s;3)\Leftrightarrow\Omega^a(s;3)\Gamma(s;3)=\Gamma(s;3)\gamma^a(s;3)\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;3)\Omega^a(s;3)=\gamma^a(s;3)\bar{\Gamma}(s;3)$

1.11 关于常数矩阵$\bar{\Gamma}(s;3),\Omega_{ab}(s;3),S_{ab}(s;3),\Gamma(s;3)$的置换性质

定理1.11.1. $\Omega_{ab}(s;3)\Gamma(s;3)=\Gamma(s;3)S_{ab}(s;3)[\Leftrightarrow]\Omega_{ab}\overbrace{\underbrace{{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}}_{2s}}^{2s}(s;3)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;3)$

定理1.11.2. $\bar{\Gamma}(s;3)\Omega_{ab}(s;3)=S_{ab}(s;3)\bar{\Gamma}(s;3)[\Leftrightarrow]\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;3)\Omega_{ab}\overbrace{\underbrace{{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}}_{2s}}^{2s}(s;3)=S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;3)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;3)$

推论1.11.1. $\bar{\Gamma}(s;3)\Omega_{ab}(s;3)\Gamma(s;3)=S_{ab}(s,\varsigma;3)$
$\Leftrightarrow\Omega_{ab}(s;3)\Gamma(s,\varsigma;3)=\Gamma(s;3)S_{ab}(s,\varsigma;3)\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;3)\Omega_{ab}(s,\varsigma;3)=S_{ab}(s,\varsigma;3)\bar{\Gamma}(s;3)$

1.12 关于常数不变张量$\gamma^a{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;3), S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;3)$的重要推论

推论1.12.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;3)\gamma^a{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;3)=\frac{1}{(2s-1)!}\gamma^a{}_{(\lambda_\varsigma}{}^{\lambda'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot)\lambda'_\varsigma}_{2s}}(s;3)$

推论1.12.2. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;3)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;3)=\frac{1}{(2s-1)!}S_{ab}(\frac{1}{2};3)_{(A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)A'_\varsigma}_{2s}}(s;3)$

1.13 常数矩阵$\Omega_{ab}(s;3), S_{ab}(s;3)$的洛伦兹群表示

推论1.13.1. $i[S_{ab}(\frac{1}{2};3),S_{cd}(\frac{1}{2};3)]=\delta_{ad}S_{bc}(\frac{1}{2};3)-\delta_{ac}S_{bd}(\frac{1}{2};3)+\delta_{bc}S_{ad}(\frac{1}{2};3)-\delta_{bd}S_{ac}(\frac{1}{2};3)$

$[\Rightarrow]i[\Omega_{ab}(s;3),\Omega_{cd}(s;3)]=\delta_{ad}\Omega_{bc}(s;3)-\delta_{ac}\Omega_{bd}(s;3)+\delta_{bc}\Omega_{ad}(s;3)-\delta_{bd}\Omega_{ac}(s;3)$

$[\Rightarrow]i[S_{ab}(s;3),S_{cd}(s;3)]=\delta_{ad}S_{bc}(s;3)-\delta_{ac}S_{bd}(s;3)+\delta_{bc}S_{ad}(s;3)-\delta_{bd}S_{ac}(s;3)$

1.14 推论：常数矩阵$\Gamma(s;3),\bar\Gamma(s;3)$的几个恒等式

性质1.14.1. $\begin{cases}\bar\Gamma(s;3)\Omega^a(s;3)\Gamma(s;3)=\gamma^a(s;3),[\Gamma(s;3)\bar\Gamma(s;3),\Omega^a(s;3)]=0\\ \Gamma(s;3)\gamma^a(s;3)\bar\Gamma(s;3)=\Omega^a(s;3)\Gamma(s;3)\bar\Gamma(s;3)=\Gamma(s;3)\bar\Gamma(s;3)\Omega^a(s;3)\end{cases}$

性质1.14.2. $\begin{cases}\bar\Gamma(s;3)\Omega_{ab}(s;3)\Gamma(s;3)=S_{ab}(s;3),[\Gamma(s;3)\bar\Gamma(s;3),\Omega_{ab}(s;3)]=0\\ \Gamma(s;3)S_{ab}(s;3)\bar\Gamma(s;3)=\Omega_{ab}(s;3)\Gamma(s;3)\bar\Gamma(s;3)=\Gamma(s;3)\bar\Gamma(s;3)\Omega_{ab}(s;3)\end{cases}$

性质1.14.3. $\begin{cases}\bar\Gamma(s;3)[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;3)]^n\Gamma(s;3)=[\vartheta^{ab}S_{ab}(s;3)]^n,[\Gamma(s;3)\bar\Gamma(s;3),[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;3)]^n]=0\\ \Gamma(s;3)[\vartheta^{ab}S_{ab}(s;3)]^n\bar\Gamma(s;3)=[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;3)]^n\Gamma(s;3)\bar\Gamma(s;3)=\Gamma(s;3)\bar\Gamma(s;3)[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;3)]^n\end{cases}$

推论1.14.1. $\begin{cases}\bar\Gamma(s;3)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;3)}\Gamma(s;3)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s;3)},[\Gamma(s;3)\bar\Gamma(s;3),e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;3)}]=0\\ \Gamma(s;3)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s;3)}\bar\Gamma(s;3)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;3)}\Gamma(s;3)\bar\Gamma(s;3)=\Gamma(s;3)\bar\Gamma(s;3)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;3)}\end{cases}$

1.15 常数矩阵$\Gamma(s;3),\bar\Gamma(s;3)$的对称置换性质

定义1.15.1. $S_{ex}(s,n)=(\overbrace{I_4\otimes\cdot\cdot\otimes I_4\otimes}^{n-1}S_{ex}\overbrace{\otimes I_4\otimes\cdot\cdot\otimes I}^{2s-n-1})$

推论1.15.1. ??$\Gamma(s;3)=S_{ex}(s,n)\Gamma(s;3),\bar\Gamma(s;3)=\bar\Gamma(s;3)S_{ex}(s,n)$

推论1.15.2. $S_{ex}(s,n)\Omega^a(s;3)S_{ex}(s,n)=\Omega^a(s;3)$

推论1.15.3. $\hat\psi(s;3)=S_{ex}(s,n)\hat\psi(s;3),\forall n\in\{1,2,\cdot\cdot,2s+1\}$

1.16 矩阵$\Gamma(s;3),\bar\Gamma(s;3)$的常数不变张量性质

定理1.16.1. $\Gamma(s;3)=e^{(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega^a(s;3)}\Gamma(s;3)e^{-(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a(s;3)}$

定理1.16.2. $\bar\Gamma(s;3)=e^{(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a(s;3)}\bar\Gamma(s;3)e^{-(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega^a(s;3)}$

推论1.16.1.

$$\begin{cases}S(s;3)=e^{(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega^a(s;3)}S(s;3)e^{-(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot S^+(s;3)\Omega^a(s;3)S(s;3)}\\ S(s;3)=e^{(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot S(s;3)\Omega^a(s;3)S^+(s;3)}S(s;3)e^{-(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega^a(s;3)}\\ S^+(s;3)=e^{(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega^a(s;3)}S^+(s;3)e^{-(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot S(s;3)\Omega^a(s;3)S^+(s;3)}\\ S^+(s;3)=e^{(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot S^+(s;3)\Omega^a(s;3)S(s;3)}S^+(s;3)e^{-(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega^a(s;3)}\end{cases}$$

1.17 常数矩阵$I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3),I_4\otimes\bar\Gamma(s-\frac{1}{2};3)$的置换性质

推论1.17.1. $\Omega^a(s;3)[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]=[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][\gamma^a\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}+I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]$

推论1.17.2. $[I_4\otimes\bar\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]\Omega^a(s;3)=[\gamma^a\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}+I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)][I_4\otimes\bar\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]$

1.18 推论：常数矩阵$\Gamma(s-\frac{1}{2};3),\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)$的几个恒等式

性质1.18.1.

$$\begin{cases}[I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]\Omega^a(s;3)[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]=[\gamma^a\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}+I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]\\ [I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][\gamma^a\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}+I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)][I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]\\ =\Omega^a(s;3)[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]=[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]\Omega^a(s;3)\\ [[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)],\Omega^a(s;3)]=0\end{cases}$$

性质1.18.2.

$$\begin{cases}[I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]\Omega_{ab}(s;3)[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]=[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]\\ [I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)][I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]\\ =\Omega_{ab}(s;3)[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]=[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]\Omega_{ab}(s;3)\\ [[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)],\Omega_{ab}(s;3)]=0\end{cases}$$

性质1.18.3.

$$\begin{cases}[I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)][\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;3)]^n[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]=\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]\}^n\\ [I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]\}^n[I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]\\ =[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;3)]^n[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]=[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)][\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;3)]^n\\ [[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)],[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;3)]^n]=0\end{cases}$$

推论1.18.1.

$$\begin{cases}[I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;3)}[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]}\\ [I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]}[I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]\\ =e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;3)}[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]=[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;3)}\\ [[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)],e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s;3)}]=0\end{cases}$$

推论1.18.2.

$$\begin{cases}I_{4^{2s-1}}\Gamma(s-\frac{1}{2};3)=\Gamma(s-\frac{1}{2};3)I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}},\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)I_{4^{2s-1}}=I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)\\ [I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]\gamma^a\otimes I_{4^{2s-1}}[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]=\gamma^a\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}\\ [\gamma^a\otimes I_{4^{2s-1}}[I_4]\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]=[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][\gamma^a\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}]\\ [I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)][\gamma^a\otimes I_{4^{2s-1}}]=[\gamma^a\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}][I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]\end{cases}$$

1.19 矩阵$I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3),I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)$的常数不变张量性质

定理1.19.1. $[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]=e^{(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega^a(s;3)}[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]e^{-(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a}\otimes e^{-(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)}$

定理1.19.2. $[I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]=e^{(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a}\otimes e^{(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)}[I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]e^{-(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega^a(s;3)}$

2 Dirac型完美常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3),N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;3)$

2.1 完美常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3),N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;3)$

定义2.1.1. $N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s}}(s)\Gamma^{\overbrace{\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2}),N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s):=\Gamma^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})$

定义2.1.2. $N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3)\Gamma^{\overbrace{\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3),N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;3):=\Gamma^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;3)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};3)$

推论2.1.1. $N(s;3)=[I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]\Gamma(s;3),\bar{N}(s;3)=\bar{\Gamma}(s;3)[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]$

性质2.1.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3)=N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};3),\Gamma^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;3)=N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;3)\Gamma^{\overbrace{\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)$

推论2.1.2. $\Gamma(s;3)=[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]N(s;3),\bar{\Gamma}(s;3)=\bar{N}(s;3)[I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)],$

性质2.1.2. $\Gamma(s;3)=[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)][I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]\Gamma(s;3)$

推论2.1.3. $N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s)=N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;1),N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)=N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;1)$

自我评述：以上表明$N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)$,$N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;3)$是常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s)$,$N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)$ 的推广。

2.2 常数矩阵$N_{\lambda_\varsigma}(s;3),N^{\lambda_\varsigma}(s;3);\bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3),\bar{N}^{\lambda_\varsigma}(s;3);N(s;3),\bar{N}(s;3)$

定义2.2.1.

$$\begin{cases}N_{\lambda_\varsigma}(s;3)\prec N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3),N^{\lambda_\varsigma}(s;3)\prec N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;3)|_{I_{C^{2s}_{2s+3}}\times I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}}\\ \bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3):=N^{+}_{\lambda_\varsigma}(s;3)\succ N_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;3),\bar{N}^{\lambda_\varsigma}(s;3):=N^{+A_\varsigma}(s;3)\succ N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}{}_{k_\varsigma}(s;3)|_{I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}\times I_{C^{2s}_{2s+3}}}\\ N(s;3)\prec N_{\lambda_\varsigma\otimes l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;3)|_{(3+1)I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}\times I_{C^{2s}_{2s+3}}},\bar{N}(s;3)=N^{+}(s;3)\prec N_{k_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma\otimes l_\varsigma}(s;3)|_{I_{C^{2s}_{2s+3}}\times(3+1)I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}}\end{cases}$$

2.3 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3),N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;3)$的基本性质

相等性：

性质2.3.1.

$$\begin{cases}N^{k'_\varsigma}_{\lambda'_\varsigma l'_\varsigma}(s;3)\simeq N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)\simeq N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;3)\simeq N^{\lambda'_\varsigma l'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;3)\\ [N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)]^*\simeq N^{k'_\varsigma}_{\lambda'_\varsigma l'_\varsigma}(s;3),[N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;3)]^*\simeq N^{\lambda'_\varsigma l'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;3)\end{cases}$$

推论2.3.1.

$$\begin{cases}N_{\lambda_\varsigma}(s;3)\simeq N^{\lambda_\varsigma}(s;3)\simeq N_{\lambda'_\varsigma}(s;3)\simeq N^{\lambda'_\varsigma}(s;3);\bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3)\simeq\bar{N}^{\lambda_\varsigma}(s;3)\simeq\bar{N}_{\lambda'_\varsigma}(s;3)\simeq\bar{N}^{\lambda'_\varsigma}(s;3)\\ N_{\lambda_\varsigma}(s;3)=N^{*}_{\lambda_\varsigma}(s;3),\bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3)=\bar{N}^{*}_{\lambda_\varsigma}(s;3);N(s;3)=N^{*}(s;3),\bar{N}(s;3)=\bar{N}^{*}(s;3)\end{cases}$$

2.4 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3),N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;3)$的正交性质

正交性：

引理2.4.1. $\sum\limits_{k=0}^{2s-1}C^{3}_{3+k}=C^{3+1}_{3+2s}$

引理2.4.2. $N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)N^{\lambda'_\varsigma l_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;3)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;3)\Gamma^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;3)$

定理2.4.1.

$$\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;3)=\delta^{k_\varsigma}_{m_\varsigma}[\Leftrightarrow]N^{\lambda_\varsigma}(s;3)\bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3)=I_{C^{2s}_{2s+3}}[\Leftrightarrow]\bar{N}(s;3)N(s;3)=I_{C^{2s}_{2s+3}}\\ N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)N^{\lambda_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;3)=(1+\frac{j}{s})\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3)N^{\lambda_\varsigma}(s;3)=(1+\frac{j}{s})I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}\\ N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)N^{\mu_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;3)=\frac{1}{3+1}C^{2s}_{2s+3}\delta^{\mu_\varsigma}_{\lambda_\varsigma}[\Leftrightarrow]tr[\bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3)N^{\mu_\varsigma}(s;3)]=\frac{1}{3+1}C^{2s}_{2s+3}\delta^{\mu_\varsigma}_{\lambda_\varsigma}\end{cases}$$

性质2.4.1.

$$\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)N^{\mu_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;3)=\frac{1}{2s}[\delta^{\mu_\varsigma}_{\lambda_\varsigma}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}+(2s-1)N^{m_\varsigma}_{\lambda_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)N^{\mu_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)]\\ \bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3)N^{\mu_\varsigma}(s;3)=\frac{1}{2s}[\delta^{\mu_\varsigma}_{\lambda_\varsigma}I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}+(2s-1)N^{\mu_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)\bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)]\end{cases}$$

2.5 常数不变张量$N_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;3), N_{k_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)$的升降指标

升降指标：

性质2.5.1.

$$\begin{cases} N_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;3) = \varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s;3)\varepsilon_{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)N_{m_\varsigma}^{\mu_\varsigma n_\varsigma}(s;3) \\ N_{k_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3) = \varepsilon_{k_\varsigma m_\varsigma}(s;3)\varepsilon^{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)N_{\mu_\varsigma n_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3) \end{cases}$$

推论2.5.1.

$$\begin{cases} N_{\lambda_\varsigma}(s;3)\varepsilon(s-\frac{1}{2};3) = \varepsilon_{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\varepsilon(s;3)N^{\mu_\varsigma}(s;3), \varepsilon(s-\frac{1}{2};3)\bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3) = \bar{N}^{\mu_\varsigma}(s;3)\varepsilon_{\mu_\varsigma \lambda_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\varepsilon(s;3) \\ N^{\lambda_\varsigma}(s;3)\varepsilon(s-\frac{1}{2};3) = \varepsilon^{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\varepsilon(s;3)N_{\mu_\varsigma}(s;3), \varepsilon(s-\frac{1}{2};3)\bar{N}^{\lambda_\varsigma}(s;3) = \bar{N}_{\mu_\varsigma}(s;3)\varepsilon^{\mu_\varsigma \lambda_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\varepsilon(s;3) \\ N(s;3)\varepsilon(s;3) = [\varepsilon(\frac{1}{2};3)\otimes\varepsilon(s-\frac{1}{2};3)]N(s;3), \varepsilon(s;3)\bar{N}(s;3) = \bar{N}(s;3)[\varepsilon(\frac{1}{2};3)\otimes\varepsilon(s-\frac{1}{2};3)] \end{cases}$$

Penrose标准升降规则：

性质2.5.2.

$$\begin{cases} N_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;3) = (-1)^{2s}[\varsigma^{2s}\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s;3)][-\varsigma\varepsilon_{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)][(-\varsigma)^{2s-1}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)]N_{m_\varsigma}^{\mu_\varsigma n_\varsigma}(s;3) \\ N_{k_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3) = (-1)^{2s}[(-\varsigma)^{2s}\varepsilon_{k_\varsigma m_\varsigma}(s;3)][\varsigma\varepsilon^{\lambda_\varsigma \mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)][\varsigma^{2s-1}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)]N_{\mu_\varsigma n_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3) \end{cases}$$

2.6 常数不变张量$N_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;3), N_{k_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)$的自旋矩阵变换

性质2.6.1.

$$\begin{cases} N_{k_\varsigma}^{\lambda_\varsigma m_\varsigma}(s;3)\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N_{\mu_\varsigma m_\varsigma}^{l_\varsigma}(s;3) = \frac{1}{2s}\gamma^a{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;3)[\Leftrightarrow]N^{\lambda_\varsigma}(s;3)\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\bar{N}_{\mu_\varsigma}(s;3) = \frac{1}{2s}\gamma^a(s;3) \\ [\Leftrightarrow]\bar{N}(s;3)\gamma^a\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}N(s;3) = \frac{1}{2s}\gamma^a(s;3) \\ N_{k_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N_{\mu_\varsigma m_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;3) = \frac{1}{2s}\gamma^a{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)[\Leftrightarrow]\bar{N}_{\mu_\varsigma}(s;3)\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N^{\lambda_\varsigma}(s;3) = \frac{1}{2s}\gamma^a(s-\frac{1}{2};3) \end{cases}$$

性质2.6.2.

$$\begin{cases} N_{k_\varsigma}^{\lambda_\varsigma m_\varsigma}(s;3)S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N_{\mu_\varsigma m_\varsigma}^{l_\varsigma}(s;3) = \frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;3)[\Leftrightarrow]N^{\lambda_\varsigma}(s;3)S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\bar{N}_{\mu_\varsigma}(s;3) = \frac{1}{2s}S_{ab}(s;3) \\ [\Leftrightarrow]\bar{N}(s;3)S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}N(s;3) = \frac{1}{2s}S_{ab}(s;3) \\ N_{k_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N_{\mu_\varsigma m_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;3) = \frac{1}{2s}S_{abm_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)[\Leftrightarrow]\bar{N}_{\mu_\varsigma}(s;3)S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N^{\lambda_\varsigma}(s;3) = \frac{1}{2s}S_{ab}(s-\frac{1}{2};3) \end{cases}$$

2.7 常数不变张量$N_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;3), N_{k_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)$的置换性质

定理2.7.1.

$$\begin{cases} \gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N_{\mu_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;3) + \gamma^a{}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)N_{\lambda_\varsigma m_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;3) = N_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{j_\varsigma}(s;3)\gamma^a{}_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;3) \\ N_{k_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3) + N_{k_\varsigma}^{\mu_\varsigma m_\varsigma}(s;3)\gamma^a{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3) = \gamma^a{}_{k_\varsigma}{}^{j_\varsigma}(s;3)N_{j_\varsigma}^{\mu_\varsigma l_\varsigma}(s;3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\bar{N}_{\mu_\varsigma}(s;3) + \gamma^a(s-\frac{1}{2};3)\bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3) = \bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3)\gamma^a(s;3) \\ N^{\lambda_\varsigma}(s;3)\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3) + N^{\mu_\varsigma}(s;3)\gamma^a(s-\frac{1}{2};3) = \gamma^a(s;3)N^{\mu_\varsigma}(s;3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [\gamma^a\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}} + I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]N(s;3) = N(s;3)\gamma^a(s;3) \\ \bar{N}(s;3)[\gamma^a\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}} + I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)] = \gamma^a(s;3)\bar{N}(s;3) \end{cases}$$

定理2.7.2.

$$\begin{cases} S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N_{\mu_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;3) + S_{abl_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)N_{\lambda_\varsigma m_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;3) = N_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{j_\varsigma}(s;3)S_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;3) \\ N_{k_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3) + N_{k_\varsigma}^{\mu_\varsigma m_\varsigma}(s;3)S_{abm_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3) = S_{abk_\varsigma}{}^{j_\varsigma}(s;3)N_{j_\varsigma}^{\mu_\varsigma l_\varsigma}(s;3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\bar{N}_{\mu_\varsigma}(s;3) + S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)\bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3) = \bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3)S_{ab}(s;3) \\ N^{\lambda_\varsigma}(s;3)S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3) + N^{\mu_\varsigma}(s;3)S_{ab}(s-\frac{1}{2};3) = S_{ab}(s;3)N^{\mu_\varsigma}(s;3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}} + I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]N(s;3) = N(s;3)S_{ab}(s;3) \\ \bar{N}(s;3)[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}} + I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)] = S_{ab}(s;3)\bar{N}(s;3) \end{cases}$$

2.8 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma 1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_\varsigma}(s;3), N^{A_{\varsigma 1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;3)$的性质

定义2.8.1. $\begin{cases} N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma 1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;3) := \Gamma^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma 1}\cdot\cdot A_{\varsigma 2s}}(s;3)\Gamma^{A_{\varsigma n+1}\cdot\cdot A_{\varsigma 2s}}_{l_\varsigma}(s-\frac{n}{2};3) \\ N^{A_{\varsigma 1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{k_\varsigma}(s;3) := \Gamma^{A_{\varsigma 1}\cdot\cdot A_{\varsigma 2s}}_{k_\varsigma}(s;3)\Gamma^{l_\varsigma}_{A_{\varsigma n+1}\cdot\cdot A_{\varsigma 2s}}(s-\frac{n}{2};3) \end{cases}$

相等性：

性质2.8.1. $N^{k'_\varsigma}_{A'_{\varsigma 1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}(s;3) \simeq N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma 1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;3) \simeq N^{A_{\varsigma 1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{k_\varsigma}(s;3) \simeq N^{A'_{\varsigma 1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}_{k'_\varsigma}(s;3)$

性质2.8.2. $[N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma 1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;3)]^* \simeq N^{k'_\varsigma}_{A'_{\varsigma 1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}(s;3), [N^{A_{\varsigma 1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{k_\varsigma}(s;3)]^* \simeq N^{A'_{\varsigma 1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}_{k'_\varsigma}(s;3)$

展开性：

性质2.8.3.

$$\begin{cases} N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma 1}A_{\varsigma 2}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;3) = N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma 1}l_{\varsigma 1}}(s;3)N^{l_{\varsigma 1}}_{A_{\varsigma 2}l_{\varsigma 2}}(s-\frac{1}{2};3)\cdot\cdot N^{l_{\varsigma n-1}}_{A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s-\frac{n-1}{2};3) \\ N^{A_{\varsigma 1}A_{\varsigma 2}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{k_\varsigma}(s;3) = N^{A_{\varsigma 1}l_{\varsigma 1}}_{k_\varsigma}(s;3)N^{A_{\varsigma 2}l_{\varsigma 2}}_{l_{\varsigma 1}}(s-\frac{1}{2};3)\cdot\cdot N^{A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{l_{\varsigma n-1}}(s-\frac{n-1}{2};3) \end{cases}$$

性质2.8.4.

$$\begin{cases} \Gamma^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma 1}A_{\varsigma 2}\cdot\cdot A_{\varsigma 2s}}(s;3) = N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma 1}l_{\varsigma 1}}(s;3)N^{l_{\varsigma 1}}_{A_{\varsigma 2}l_{\varsigma 2}}(s-\frac{1}{2};3)\cdot\cdot N^{l_{\varsigma 2s-1}}_{A_{\varsigma 2s}l_{\varsigma 2s}}(\frac{1}{2};3) \\ \Gamma^{A_{\varsigma 1}A_{\varsigma 2}\cdot\cdot A_{\varsigma 2s}}_{k_\varsigma}(s;3) = N^{A_{\varsigma 1}l_{\varsigma 1}}_{k_\varsigma}(s;3)N^{A_{\varsigma 2}l_{\varsigma 2}}_{l_{\varsigma 1}}(s-\frac{1}{2};3)\cdot\cdot N^{A_{\varsigma 2s}l_{\varsigma 2s}}_{l_{\varsigma 2s-1}}(\frac{1}{2};3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma 1}A_{\varsigma 2}\cdot\cdot A_{\varsigma 2s}}(s;3) \succ \Gamma_{A_{\varsigma 1}A_{\varsigma 2}\cdot\cdot A_{\varsigma 2s}}(s;3) = N_{A_{\varsigma 1}}(s;3)N_{A_{\varsigma 2}}(s-\frac{1}{2};3)\cdot\cdot N_{A_{\varsigma 2s}}(\frac{1}{2};3) \\ \Gamma^{A_{\varsigma 1}A_{\varsigma 2}\cdot\cdot A_{\varsigma 2s}}_{k_\varsigma}(s;3) \succ \Gamma^{A_{\varsigma 1}A_{\varsigma 2}\cdot\cdot A_{\varsigma 2s}}(s;3) = N^{A_{\varsigma 1}}(s;3)N^{A_{\varsigma 2}}(s-\frac{1}{2};3)\cdot\cdot N^{A_{\varsigma 2s}}(\frac{1}{2};3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\Gamma}(s;3) = \bar{N}(s;3)[I_4\otimes\bar{N}(s-\frac{1}{2};3)]\cdot\cdot[I_{4^{2s-2}}\otimes\bar{N}(1)][I_{4^{2s-1}}\otimes\bar{N}(\frac{1}{2};3)] \\ \Gamma(s;3) = [I_{4^{2s-1}}\otimes N(\frac{1}{2};3)][I_{4^{2s-2}}\otimes N(1)]\cdot\cdot[I_4\otimes N(s-\frac{1}{2};3)]N(s;3) \end{cases}$$

2.9 推论1：常数矩阵$N(s;3), \bar{N}(s;3)$的几个恒等式

性质2.9.1.

$$\begin{cases} \bar{N}(s;3)[\gamma^a\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}} + I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]N(s;3) = \gamma^a(s;3) \\ N(s;3)\gamma^a(s;3)\bar{N}(s;3) = [\gamma^a\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}} + I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]N(s;3)\bar{N}(s;3) \\ N(s;3)\gamma^a(s;3)\bar{N}(s;3) = N(s;3)\bar{N}(s;3)\{\vartheta\cdot[\gamma^a\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}} + I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]\}^n \\ [N(s;3)\bar{N}(s;3), \gamma^a\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}} + I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)] = 0 \end{cases}$$

性质2.9.2.

$$\begin{cases} \bar{N}(s;3)[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}} + I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]N(s;3) = S_{ab}(s;3) \\ N(s;3)S_{ab}(s;3)\bar{N}(s;3) = [S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}} + I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]N(s;3)\bar{N}(s;3) \\ N(s;3)S_{ab}(s;3)\bar{N}(s;3) = N(s;3)\bar{N}(s;3)[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}} + I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)] \\ [N(s;3)\bar{N}(s;3), S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}} + I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)] = 0 \end{cases}$$

性质2.9.3.

$$\begin{cases} \bar{N}(s;3)\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}} + I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]\}^n N(s;3) = [\vartheta^{ab}S_{ab}(s;3)]^n \\ N(s;3)[\vartheta^{ab}S_{ab}(s;3)]^n\bar{N}(s;3) = \{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}} + I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]\}^n N(s;3)\bar{N}(s;3) \\ N(s;3)[\vartheta^{ab}S_{ab}(s;3)]^n\bar{N}(s;3) = N(s;3)\bar{N}(s;3)\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}} + I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]\}^n \\ [N(s;3)\bar{N}(s;3), \{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}} + I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]\}^n] = 0 \end{cases}$$

推论2.9.1.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;3)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]}N(s;3)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s;3)}\\ N(s;3)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s;3)}\bar{N}(s;3)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]}N(s;3)\bar{N}(s;3)\\ N(s;3)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s;3)}\bar{N}(s;3)=N(s;3)\bar{N}(s;3)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]}\\ [N(s;3)\bar{N}(s;3),e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]}]=0\end{cases}$$

2.10 推论2：常数矩阵$N(s;3),\bar{N}(s;3)$的另外几个恒等式

推论2.10.1.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;3)\gamma^a\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}N(s;3)=\frac{1}{2s}\gamma^a(s;3)\\ \bar{N}(s;3)I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)N(s;3)=(1-\frac{1}{2s})\gamma^a(s;3)\\ N^{\lambda_\varsigma}(s;3)\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)\bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3)=(1-\frac{1}{2s})\gamma^a(s;3)\\ \bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3)\gamma^a(s;3)N^{\lambda_\varsigma}(s;3)=(1+\frac{3+1}{2s})\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)\end{cases}$$

推论2.10.2.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;3)S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}N(s;3)=\frac{1}{2s}S_{ab}(s;3)\\ \bar{N}(s;3)I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)N(s;3)=(1-\frac{1}{2s})S_{ab}(s;3)\\ N^{\lambda_\varsigma}(s;3)S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)\bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3)=(1-\frac{1}{2s})S_{ab}(s;3)\\ \bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3)S_{ab}(s;3)N^{\lambda_\varsigma}(s;3)=(1+\frac{3+1}{2s})S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)\end{cases}$$

推论2.10.3.

$$\begin{cases}\bar{N}(1)[\gamma^a\otimes I_2+I_4\otimes\gamma^a]N(1)=\gamma^a(1)\\ \bar{N}(\frac{3}{2})\{\gamma^a\otimes I_3+I_4\otimes\{\bar{N}(1)[\gamma^a\otimes I_2+I_4\otimes\gamma^a]N(1)\}\}N(\frac{3}{2})=\gamma^a(\frac{3}{2})\\ \bar{N}(s;3)\cdot\cdot\bar{N}(\frac{3}{2})\{\gamma^a\otimes I_3+I_4\otimes\{\bar{N}(1)[\gamma^a\otimes I_2+I_4\otimes\gamma^a]N(1)\}\}N(\frac{3}{2})\cdot\cdot N(s;3)=\gamma^a(s;3)\end{cases}$$

2.11 矩阵$N(s;3),\bar{N}(s;3)$的常数不变张量性质

定理2.11.1. $N(s;3)=e^{(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a}\otimes e^{(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)}N(s;3)e^{-(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a(s;3)}$

定理2.11.2. $\bar{N}(s;3)=e^{(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a(s;3)}\bar{N}(s;3)e^{-(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a}\otimes e^{-(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)}$

3 Dirac型完美常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3),X_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3)$

3.1 完美常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3),X_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3)$

定义3.1.1. $X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3):=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+3}}\varepsilon^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N_{\mu_\varsigma m_\varsigma}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3),X_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3):=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+3}}\varepsilon_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N_{l_\varsigma}^{\mu_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)$

性质3.1.1. $X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)\simeq X_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3)$

3.2 常数矩阵$X(s;3),\bar{X}(s;3)$

定义3.2.1.

$$\begin{cases}X^{\lambda_\varsigma}(s;3)\prec X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3),X_{\lambda_\varsigma}(s;3)\prec X_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3)\\ \bar{X}_{\lambda_\varsigma}(s;3)\prec X_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s;3),\bar{X}^{\lambda_\varsigma}(s;3)\prec X^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}{}_{m_\varsigma}(s;3)\\ X(s;3)\prec X_{\lambda_\varsigma\otimes l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s;3),\bar{X}(s;3)\prec X_{m_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma\otimes l_\varsigma}(s;3)=X^{+}(s;3)\end{cases}$$

3.3 常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3),X_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3)$的升降指标

性质3.3.1.

$$\begin{cases}X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)=\varepsilon^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)\varepsilon_{m_\varsigma r_\varsigma}(s-1;3)X_{\mu_\varsigma n_\varsigma}^{r_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)\\ X_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3)=\varepsilon_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)\varepsilon^{m_\varsigma r_\varsigma}(s-1;3)X_{r_\varsigma}^{\mu_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)\end{cases}$$

3.4 常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3),X_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3)$的正交性

性质3.4.1. $X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)X_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{n_\varsigma}(s;3)=\delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}[\Leftrightarrow]X^{\lambda_\varsigma}(s;3)\bar{X}_{\lambda_\varsigma}(s;3)=I_{C_{2s-2+3}^{2s-2}}[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;3)X(s;3)=I_{C_{2s-2+3}^{2s-2}}$

性质3.4.2. $X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)N_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;3)=0$
$[\Leftrightarrow]X^{\lambda_\varsigma}(s;3)\bar{N}_{\lambda_\varsigma}(s;3)=0,N_{\lambda_\varsigma}(s;3)\bar{X}^{\lambda_\varsigma}(s;3)=0[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;3)N(s;3)=0,\bar{N}(s;3)X(s;3)=0$

性质3.4.3. $X_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3)X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma k_\varsigma}(s;3)=\frac{2s-1}{2s-1+3}\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar{X}_{\lambda_\varsigma}(s;3)X^{\lambda_\varsigma}(s;3)=\frac{2s-1}{2s-1+3}I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}$

性质3.4.4. $X_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3)X_{m_\varsigma}^{\mu_\varsigma l_\varsigma}(s;3)=\frac{1}{3+1}C_{2s-2+3}^{2s-2}\delta_{\lambda_\varsigma}^{\mu_\varsigma}[\Leftrightarrow]tr[\bar{X}_{\lambda_\varsigma}(s;3)X^{\mu_\varsigma}(s;3)]=\frac{1}{3+1}C_{2s-2+3}^{2s-2}\delta_{\lambda_\varsigma}^{\mu_\varsigma}$

推论3.4.1. $\bar{N}(s;3)N(s;3)=I_{C_{2s+3}^{2s}},\bar{X}(s;3)X(s;3)=I_{C_{2s-2+3}^{2s-2}},\bar{N}(s;3)X(s;3)=0,\bar{X}(s;3)N(s;3)=0$

3.5 常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3),X_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3)$的自旋变换

推论3.5.1. $X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)X_{\mu_\varsigma l_\varsigma}^{n_\varsigma}(s;3)=-\frac{1}{2s-1+3}\gamma^a{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;3)$
$[\Leftrightarrow]X^{\lambda_\varsigma}(s;3)\sigma_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\bar{X}_{\mu_\varsigma}(s;3)=-\frac{1}{2s-1+3}\gamma^a(s-1;3)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;3)\gamma^a\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}X(s;3)=-\frac{1}{2s-1+3}\gamma^a(s-1;3)$

推论3.5.2. $X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)X_{\mu_\varsigma k_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3)=-\frac{1}{2s-1+3}\gamma^a{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}^{\lambda_\varsigma}(s;3)\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)X_{\mu_\varsigma}(s;3)=-\frac{1}{2s-1+3}\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)$

推论3.5.3. $X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)X_{\mu_\varsigma l_\varsigma}^{n_\varsigma}(s;3)=-\frac{1}{2s-1+3}S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;3)$
$[\Leftrightarrow]X^{\lambda_\varsigma}(s;3)S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C_{2s-2+3}^{2s-2}}\bar{X}_{\lambda_\varsigma}(s;3)=-\frac{1}{2s-1+3}S_{ab}(s-1;3)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;3)S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}X(s;3)=-\frac{1}{2s-1+3}S_{ab}(s-1;3)$

推论3.5.4. $X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)X_{\mu_\varsigma k_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3)=-\frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}^{\lambda_\varsigma}(s;3)S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)X_{\mu_\varsigma}(s;3)=-\frac{1}{2s-1+3}S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)$

3.6 常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3),X_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3)$的置换性质

定理3.6.1.

$$\begin{cases}X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)[\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}\gamma^a{}_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)]=\gamma^a{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;3)X_{n_\varsigma}^{\mu_\varsigma k_\varsigma}(s;3)\\ [\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}\gamma^a{}_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)]X_{\mu_\varsigma k_\varsigma}^{n_\varsigma}(s;3)=X_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3)\gamma^a{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;3)\end{cases}$$

$$\begin{cases}X^{\lambda_\varsigma}(s;3)[\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]=\gamma^a(s-1;3)X^{\mu_\varsigma}(s;3)\\ [\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]\bar{X}_{\mu_\varsigma}(s;3)=\bar{X}_{\lambda_\varsigma}(s;3)\gamma^a(s-1;3)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{X}(s;3)[\gamma^a\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}+I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]=\gamma^a(s-1;3)\bar{X}(s;3)\\ [\gamma^a\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}+I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]X(s;3)=X(s;3)\gamma^a(s-1;3)\end{cases}$$

定理3.6.2.

$$\begin{cases}X_{m_\varsigma}^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)[S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)]=S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;3)X_{n_\varsigma}^{\mu_\varsigma\otimes k_\varsigma}(s;3)\\ [S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)]X_{\mu_\varsigma k_\varsigma}^{n_\varsigma}(s;3)=X_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;3)S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;3)\end{cases}$$

$$\begin{cases}X^{\lambda_\varsigma}(s;3)[S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]=S_{ab}(s-1;3)X^{\mu_\varsigma}(s;3)\\ [S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]\bar{X}_{\mu_\varsigma}(s;3)=\bar{X}_{\lambda_\varsigma}(s;3)S_{ab}(s-1;3)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{X}(s;3)[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]=S_{ab}(s-1;3)\bar{X}(s;3)\\ [S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]X(s;3)=X(s;3)S_{ab}(s-1;3)\end{cases}$$

推论3.6.1.

$$\begin{cases}N_{\eta_\varsigma m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)\varepsilon^{\eta_\varsigma\lambda_\varsigma}(\frac{1}{2};3)[\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}\gamma^a{}_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)]=\gamma^a{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;3)N_{\xi_\varsigma n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)\varepsilon^{\xi_\varsigma\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\\ [\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}\gamma^a{}_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)]\varepsilon_{\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N_{k_\varsigma}^{\eta_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)=\varepsilon_{\lambda_\varsigma\xi_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N_{l_\varsigma}^{\xi_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)\gamma^a{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;3)\end{cases}$$

$$\begin{cases}N_{\eta_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)\varepsilon^{\eta_\varsigma\lambda_\varsigma}(\frac{1}{2};3)[\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]=\gamma^a(s-1;3)N_{\xi_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)\varepsilon^{\xi_\varsigma\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\\ [\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]\varepsilon_{\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N^{\eta_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)=\varepsilon_{\lambda_\varsigma\xi_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N^{\xi_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)\gamma^a(s-1;3)\end{cases}$$

推论3.6.2.

$$\begin{cases} N_{\eta_\varsigma m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)\varepsilon^{\eta_\varsigma\lambda_\varsigma}(\frac{1}{2};3)[S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)]=S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;3)N_{\xi_\varsigma n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)\varepsilon^{\xi_\varsigma\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3) \\ [S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)]\varepsilon_{\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N_{k_\varsigma}^{\eta_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)=\varepsilon_{\lambda_\varsigma\xi_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N_{l_\varsigma}^{\xi_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{\eta_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)\varepsilon^{\eta_\varsigma\lambda_\varsigma}(\frac{1}{2};3)[S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]=S_{ab}(s-1;3)N_{\xi_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)\varepsilon^{\xi_\varsigma\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3) \\ [S_{ab\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}(\frac{1}{2};3)+\delta_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]\varepsilon_{\mu_\varsigma\eta_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N^{\eta_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)=\varepsilon_{\lambda_\varsigma\xi_\varsigma}(\frac{1}{2};3)N^{\xi_\varsigma}(s-\frac{1}{2};3)S_{ab}(s-1;3) \end{cases}$$

3.7 推论：关于常数矩阵$X(s;3),\bar{X}(s;3)$的重要性质

推论3.7.1.

$$\begin{cases} \bar{X}(s;3)[\gamma^a\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}+I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]X(s;3)=\gamma^a(s-1;3) \\ X(s;3)\gamma^a(s-1;3)\bar{X}(s;3)=[\gamma^a\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}+I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]X(s;3)\bar{X}(s;3) \\ [X(s;3)\bar{X}(s;3),\gamma^a\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}+I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]=0 \end{cases}$$

推论3.7.2.

$$\begin{cases} \bar{X}(s;3)[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]X(s;3)=S_{ab}(s-1;3) \\ X(s;3)S_{ab}(s,\varsigma-1;3)\bar{X}(s;3)=[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]X(s;3)\bar{X}(s;3) \\ [X(s;3)\bar{X}(s;3),S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C_{2s-1+3}^{2s-1}}+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]=0 \end{cases}$$

推论3.7.3. $X^{\lambda_\varsigma}(s;3)\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)\bar{X}_{\lambda_\varsigma}(s;3)=\frac{2s+3}{2s-1+3}\gamma^a(s-1;3)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;3)I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)X(s;3)=\frac{2s+3}{2s-1+3}\gamma^a(s-1;3)$

推论3.7.4. $X^{\lambda_\varsigma}(s;3)I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)\bar{X}_{\lambda_\varsigma}(s;3)=\frac{2s+3}{2s-1+3}S_{ab}(s-1;3)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;3)I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)X(s;3)=\frac{2s+3}{2s-1+3}S_{ab}(s-1;3)$

3.8 矩阵$X(s;3),\bar{X}(s;3)$的常数不变张量性质

定理3.8.1. $X(s;3)=e^{(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a}\otimes e^{(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)}X(s;3)e^{-(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a(s-1;3)}$

定理3.8.2. $\bar{X}(s;3)=e^{(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a(s-1;3)}\bar{X}(s;3)e^{-(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a}\otimes e^{(i\Omega^a+\varsigma\epsilon)\cdot\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)}$

3.9 常数矩阵$\Omega^a(s;3),\gamma^a(s-1;3)$的置换性质

推论3.9.1.
$$\begin{cases} \Omega^a(s;3)[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]X(s;3)=[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]X(s;3)\gamma^a(s-1;3) \\ \bar{X}(s;3)[I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]\Omega^a(s;3)=\gamma^a(s-1;3)\bar{X}(s;3)[I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)] \end{cases}$$

推论3.9.2.
$$\begin{cases} \gamma^a(s;3)=\bar{N}(s;3)[I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]\Omega^a(s;3)[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]N(s;3) \\ \gamma^a(s-1;3)=\bar{X}(s;3)[I_4\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};3)]\Omega^a(s;3)[I_4\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};3)]X(s;3) \end{cases}$$

3.10 常数矩阵$\Omega^a(s-l;3),[\vec{\vartheta}\cdot\Omega^a(s-l;3)]^n,e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega^a(s-l;3)}$的同构性表示

推论3.10.1. $\Omega^a(s;3)=\Omega^a(s-1;3)\otimes I_{4^2}+I_{4^{2s-2}}\otimes\Omega^a(1;3)$

推论3.10.2.

$$\begin{cases} \Omega^a(s;3)I_{4^{2s-2}}\otimes\{[I_4\otimes\Gamma(\frac{1}{2};3)]X(1;3)\}=I_{4^{2s-2}}\otimes\{[I_4\otimes\Gamma(\frac{1}{2};3)]X(1;3)\}\Omega^a(s-1;3) \\ I_{4^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;3)[I_4\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};3)]\}\Omega^a(s;3)=\Omega^a(s-1;3)I_{4^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;3)[I_4\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};3)]\} \end{cases}$$

推论3.10.3.

$$\begin{cases} \Omega^a(s-1;3)=I_{4^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;3)[I_4\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};3)]\}\Omega^a(s;3)I_{4^{2s-2}}\otimes\{[I_4\otimes\Gamma(\frac{1}{2};3)]X(1;3)\} \\ [\vec{\vartheta}\cdot\Omega^a(s-1;3)]^n=I_{4^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;3)[I_4\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};3)]\}[\vec{\vartheta}\cdot\Omega^a(s;3)]^nI_{4^{2s-2}}\otimes\{[I_4\otimes\Gamma(\frac{1}{2};3)]X(1;3)\} \\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega^a(s-1;3)}=I_{4^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;3)[I_4\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};3)]\}e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega^a(s;3)}I_{4^{2s-2}}\otimes\{[I_4\otimes\Gamma(\frac{1}{2};3)]X(1;3)\} \end{cases}$$

定义3.10.1.

$$\begin{cases}T(s;3) := I_{4^{2s-2}} \otimes \{[I_4 \otimes \Gamma(\frac{1}{2};3)]X(1;3)\} \\ \bar{T}(s;3) := I_{4^{2s-2}} \otimes \{\bar{X}(1;3)[I_4 \otimes \bar{\Gamma}(\frac{1}{2};3)]\} = T^+(s;3)\end{cases}$$

推论3.10.4.

$$\begin{cases}\Omega^a(s-l;3) = \bar{T}(s-l+1;3)\cdots\bar{T}(s-1;3)\bar{T}(s;3)\Omega^a(s;3)T(s;3)T(s-1;3)\cdots T(s-l+1;3) \\ [\vec{\vartheta}\cdot\Omega^a(s-l;3)]^n = \bar{T}(s-l+1;3)\cdots\bar{T}(s-1;3)\bar{T}(s;3)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega^a(s;3)]^n T(s;3)T(s-1;3)\cdots T(s-l+1;3) \\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega^a(s-l;3)} = \bar{T}(s-l+1;3)\cdots\bar{T}(s-1;3)\bar{T}(s;3)e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega^a(s;3)}T(s;3)T(s-1;3)\cdots T(s-l+1;3)\end{cases}$$

推论3.10.5.

$$\begin{cases}\gamma^a(s-l;3) = \bar{\Gamma}(s-l;3)\bar{T}(s-l+1;3)\cdots\bar{T}(s;3)\Omega^a(s;3)T(s;3)\cdots T(s-l+1;3)\Gamma(s-l;3) \\ [\vec{\vartheta}\cdot\gamma^a(s-l;3)]^n = \bar{\Gamma}(s-l;3)\bar{T}(s-l+1;3)\cdots\bar{T}(s;3)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega^a(s;3)]^n T(s;3)\cdots T(s-l+1;3)\Gamma(s-l;3) \\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\gamma^a(s-l;3)} = \bar{\Gamma}(s-l;3)\bar{T}(s-l+1;3)\cdots\bar{T}(s;3)e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega^a(s;3)}T(s;3)\cdots T(s-l+1;3)\Gamma(s-l;3)\end{cases}$$

4 高阶Dirac型完美常数不变张量

4.1 无穷扩展和推广

推论4.1.1.

$$\underbrace{\gamma^a,\varepsilon(\tfrac{1}{2};3)}_{\text{零阶}} \to \underbrace{\gamma^a(s_1;3),\varepsilon(s_1;3)}_{\text{一阶}} \to \underbrace{\gamma^a(s_2,s_1;3),\varepsilon(s_2,s_1;3)}_{\text{二阶}} \to \underbrace{\gamma^a(s_3,s_2,s_1;3),\varepsilon(s_3,s_2,s_1;3)}_{\text{三阶}} \to \cdots$$

推论4.1.2. $\underbrace{\gamma^a,\varepsilon(\tfrac{1}{2};3)}_{\text{零阶}} \to \underbrace{\gamma^a(s_1),\varepsilon(s_1)}_{\text{一阶}} \to \underbrace{\gamma^a(s_2,s_1),\varepsilon(s_2,s_1)}_{\text{二阶}} \to \underbrace{\gamma^a(s_3,s_2,s_1),\varepsilon(s_3,s_2,s_1)}_{\text{三阶}} \to \cdots$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

推论4.1.3. $\underbrace{\Gamma(s_1;3)}_{\text{一阶}} \to\to \underbrace{\Gamma(s_2;w<s_1>)}_{\text{二阶}} \to\to \underbrace{\Gamma(s_3;w<s_2,s_1>)}_{\text{三阶}} \to\to \underbrace{\Gamma(s_4;w<s_3,s_2,s_1>)}_{\text{四阶}} \to\to \cdots$

5 Dirac型常数不变张量的具体计算

5.1 Dirac型常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}(s;3),\Gamma^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;3)$的引入

定义5.1.1.

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;3) = \frac{1}{(2s)!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{(\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot)}_{2s}}(s;3)$$

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}_{l_0}\underbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}_{l_1}\underbrace{2_\varsigma\cdot\cdot2_\varsigma}_{l_2}\underbrace{3_\varsigma\cdot\cdot3_\varsigma}_{l_3}}(s;3) = \sqrt{\frac{l_0!l_1!l_2!l_3!}{(2s)!}}\delta\{k_\varsigma,\sum_{l=0}^{[s]}(\sum_{k=\lambda_{2l+2}}^{\lambda_{2l+1}}C^{2l}_{2l+3-k}-C^{2l}_{2l+3-\lambda_{2l}})\}, l_0+l_1+l_2+l_3=2s$$

定义5.1.2.

$$\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;3) = \frac{1}{(2s)!}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{(\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\cdot\cdot)}^{2s}}(s;3)$$

$$\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}^{l_0}\overbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}^{l_1}\overbrace{2_\varsigma\cdot\cdot2_\varsigma}^{l_2}\overbrace{3_\varsigma\cdot\cdot3_\varsigma}^{l_3}}(s;3) = \sqrt{\frac{l_0!l_1!l_2!l_3!}{(2s)!}}\delta\{k_\varsigma,\sum_{l=0}^{[s]}(\sum_{k=\lambda_{2l+2}}^{\lambda_{2l+1}}C^{2l}_{2l+3-k}-C^{2l}_{2l+3-\lambda_{2l}})\}, l_0+l_1+l_2+l_3=2s$$

5.2 Dirac型常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(1;3),\Gamma^{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}_{k_\varsigma}(1;3)$的性质

定义5.2.1.

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}_{l_0}\underbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}_{l_1}\underbrace{2_\varsigma\cdot\cdot2_\varsigma}_{l_2}\underbrace{3_\varsigma\cdot\cdot3_\varsigma}_{l_3}}(\tfrac{1}{2};3) = \delta\{k_\varsigma,\sum_{l=0}^{0}(\sum_{k=\lambda_{2l+2}}^{\lambda_{2l+1}}C^{2l}_{2l+3-k}-C^{2l}_{2l+3-\lambda_{2l}})\}, l_0+l_1+l_2+l_3=1$$
$$=\delta\{k_\varsigma,\lambda_1\}, l_0+l_1+l_2+l_3=1$$

定义5.2.2.

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(1;3)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\mu_\varsigma\lambda_\varsigma}(1;3)$$

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{0_\varsigma\cdots0_\varsigma}_{l_0}\underbrace{1_\varsigma\cdots1_\varsigma}_{l_1}\underbrace{2_\varsigma\cdots2_\varsigma}_{l_2}\underbrace{3_\varsigma\cdots3_\varsigma}_{l_3}}(1;3)=\sqrt{\frac{l_0!l_1!l_2!l_3!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,\sum_{l=0}^{[1]}(\sum_{k=\lambda_{2l+2}}^{\lambda_{2l+1}}C^{2l}_{2l+3-k}-C^{2l}_{2l+3-\lambda_{2l}})\},l_0+l_1+l_2+l_3=2$$

$$=\sqrt{\frac{l_0!l_1!l_2!l_3!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,(\lambda_1-\lambda_2)+(C^2_5-C^2_{5-\lambda_2})\},l_0+l_1+l_2+l_3=2$$

推论5.2.1.

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{0_\varsigma0_\varsigma}(1;3)=\sqrt{\frac{2!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,0\},\Gamma^{k_\varsigma}_{0_\varsigma1_\varsigma}(1;3)=\sqrt{\frac{0!1!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,1\},\Gamma^{k_\varsigma}_{0_\varsigma2_\varsigma}(1;3)=\sqrt{\frac{0!1!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,2\},\Gamma^{k_\varsigma}_{0_\varsigma3_\varsigma}(1;3)=\sqrt{\frac{0!1!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,3\}$$

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{1_\varsigma0_\varsigma}(1;3)=\sqrt{\frac{0!1!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,1\},\Gamma^{k_\varsigma}_{1_\varsigma1_\varsigma}(1;3)=\sqrt{\frac{2!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,4\},\Gamma^{k_\varsigma}_{1_\varsigma2_\varsigma}(1;3)=\sqrt{\frac{0!1!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,5\},\Gamma^{k_\varsigma}_{1_\varsigma3_\varsigma}(1;3)=\sqrt{\frac{0!1!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,6\}$$

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{2_\varsigma0_\varsigma}(1;3)=\sqrt{\frac{0!1!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,2\},\Gamma^{k_\varsigma}_{2_\varsigma1_\varsigma}(1;3)=\sqrt{\frac{0!1!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,5\},\Gamma^{k_\varsigma}_{2_\varsigma2_\varsigma}(1;3)=\sqrt{\frac{2!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,7\},\Gamma^{k_\varsigma}_{2_\varsigma3_\varsigma}(1;3)=\sqrt{\frac{0!1!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,8\}$$

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{3_\varsigma0_\varsigma}(1;3)=\sqrt{\frac{0!1!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,3\},\Gamma^{k_\varsigma}_{3_\varsigma1_\varsigma}(1;3)=\sqrt{\frac{0!1!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,6\},\Gamma^{k_\varsigma}_{3_\varsigma2_\varsigma}(1;3)=\sqrt{\frac{0!1!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,8\},\Gamma^{k_\varsigma}_{3_\varsigma3_\varsigma}(1;3)=\sqrt{\frac{2!}{2!}}\delta\{k_\varsigma,9\}$$

推论5.2.2.

$$\Gamma^{0_\varsigma}(1;3)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\Gamma^{1_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\Gamma^{2_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\Gamma^{3_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^{4_\varsigma}(1;3)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\Gamma^{5_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\Gamma^{6_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^{7_\varsigma}(1;3)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\Gamma^{8_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^{9_\varsigma}(1;3)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

5.3 Dirac型常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(1;3),N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(1;3)$的性质

推论5.3.1.

$$N_{0_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}\sqrt2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},N_{1_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&\sqrt2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},N_{2_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\sqrt2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},N_{3_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\sqrt2\end{bmatrix}$$

推论5.3.2.

$$\bar N_{0_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}\sqrt2&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\bar N_{1_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\sqrt2&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\bar N_{2_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt2&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix},\bar N_{3_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt2\end{bmatrix}$$

5.4 Dirac型常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(1;3),N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(1;3)$的性质I

引理5.4.1.

$$\begin{cases}\bar N_{0_\varsigma}(1;3)N_{0_\varsigma}(1;3)=\frac12\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\bar N_{0_\varsigma}(1;3)N_{1_\varsigma}(1;3)=\frac12\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\ \bar N_{0_\varsigma}(1;3)N_{2_\varsigma}(1;3)=\frac12\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\bar N_{0_\varsigma}(1;3)N_{3_\varsigma}(1;3)=\frac12\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar N_{1_\varsigma}(1;3)N_{0_\varsigma}(1;3)=\frac12\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\bar N_{1_\varsigma}(1;3)N_{1_\varsigma}(1;3)=\frac12\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\\ \bar N_{1_\varsigma}(1;3)N_{2_\varsigma}(1;3)=\frac12\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\bar N_{1_\varsigma}(1;3)N_{3_\varsigma}(1;3)=\frac12\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar N_{2_\varsigma}(1;3)N_{0_\varsigma}(1;3)=\frac12\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\bar N_{2_\varsigma}(1;3)N_{1_\varsigma}(1;3)=\frac12\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\ \bar N_{2_\varsigma}(1;3)N_{2_\varsigma}(1;3)=\frac12\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\bar N_{2_\varsigma}(1;3)N_{3_\varsigma}(1;3)=\frac12\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar N_{3_\varsigma}(1;3)N_{0_\varsigma}(1;3)=\frac12\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\bar N_{3_\varsigma}(1;3)N_{1_\varsigma}(1;3)=\frac12\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\ \bar N_{3_\varsigma}(1;3)N_{2_\varsigma}(1;3)=\frac12\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\bar N_{3_\varsigma}(1;3)N_{3_\varsigma}(1;3)=\frac12\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\end{cases}$$

定理5.4.1. $\bar{N}^{\lambda_\varsigma}(1;3)\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}N_{\mu_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{2}\gamma^{Ta},\bar{N}_{\mu_\varsigma}(1;3)\gamma^a{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}N^{\lambda_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{2}\gamma^a$

证明： $\bar{N}^{\lambda_\varsigma}(1;3)\gamma^x{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}N_{\mu_\varsigma}(1;3)$

$$=-i\bar{N}^{0_\varsigma}(1;3)N_{3_\varsigma}(1;3)-i\bar{N}^{1_\varsigma}(1;3)N_{2_\varsigma}(1;3)+i\bar{N}^{2_\varsigma}(1;3)N_{1_\varsigma}(1;3)+i\bar{N}^{3_\varsigma}(1;3)N_{0_\varsigma}(1;3)$$

$$=-\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}-\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{bmatrix}\qquad\square$$

证明： $\bar{N}^{\lambda_\varsigma}(1;3)\gamma^y{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}N_{\mu_\varsigma}(1;3)$

$$=-\bar{N}^{0_\varsigma}(1;3)N_{3_\varsigma}(1;3)+\bar{N}^{1_\varsigma}(1;3)N_{2_\varsigma}(1;3)+\bar{N}^{2_\varsigma}(1;3)N_{1_\varsigma}(1;3)-\bar{N}^{3_\varsigma}(1;3)N_{0_\varsigma}(1;3)$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}\qquad\square$$

证明： $\bar{N}^{\lambda_\varsigma}(1;3)\gamma^z{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}N_{\mu_\varsigma}(1;3)$

$$=-i\bar{N}^{0_\varsigma}(1;3)N_{2_\varsigma}(1;3)+i\bar{N}^{1_\varsigma}(1;3)N_{3_\varsigma}(1;3)+i\bar{N}^{2_\varsigma}(1;3)N_{0_\varsigma}(1;3)-i\bar{N}^{3_\varsigma}(1;3)N_{1_\varsigma}(1;3)$$

$$=-\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}+\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}-\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{bmatrix}\qquad\square$$

证明： $\bar{N}^{\lambda_\varsigma}(1;3)\gamma^4{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}N_{\mu_\varsigma}(1;3)$

$$=\varsigma\bar{N}^{0_\varsigma}(1;3)N_{2_\varsigma}(1;3)+\varsigma\bar{N}^{1_\varsigma}(1;3)N_{3_\varsigma}(1;3)+\varsigma\bar{N}^{2_\varsigma}(1;3)N_{0_\varsigma}(1;3)+\varsigma\bar{N}^{3_\varsigma}(1;3)N_{1_\varsigma}(1;3)$$

$$=\frac{\varsigma}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{\varsigma}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}+\frac{\varsigma}{2}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{\varsigma}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\frac{\varsigma}{2}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\qquad\square$$

证明： $\bar{N}^{\lambda_\varsigma}(1;3)\gamma^5{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}N_{\mu_\varsigma}(1;3)$

$$=\varsigma\bar{N}^{0_\varsigma}(1;3)N_{0_\varsigma}(1;3)+\varsigma\bar{N}^{1_\varsigma}(1;3)N_{1_\varsigma}(1;3)+\varsigma\bar{N}^{2_\varsigma}(1;3)N_{2_\varsigma}(1;3)+\varsigma\bar{N}^{3_\varsigma}(1;3)N_{3_\varsigma}(1;3)$$

$$=\frac{\varsigma}{2}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+\frac{\varsigma}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\frac{\varsigma}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\frac{\varsigma}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}=\frac{\varsigma}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\qquad\square$$

5.5 Dirac型常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(1;3),N^{\lambda_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(1;3)$的性质II

推论5.5.1.

$$N_{3_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{0_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},N_{3_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{1_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$N_{3_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{2_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0\end{bmatrix},N_{3_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{3_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&2\end{bmatrix}$$

推论5.5.2.

$$N_{2_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{0_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},N_{2_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{1_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$N_{2_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{2_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},N_{2_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{3_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

推论5.5.3.

$$N_{1_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{0_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},N_{1_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{1_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&2&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$N_{1_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{2_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},N_{1_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{3_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

推论5.5.4.

$$N_{0_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{0_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},N_{0_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{1_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$N_{0_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{2_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},N_{0_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{3_\varsigma}(1;3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

推论5.5.5. $[\gamma_a(\varsigma),\gamma_5(\varsigma)]=[(\sigma\otimes\sigma_y,\varsigma I\otimes\sigma_x),\varsigma I\otimes\sigma_z]$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{bmatrix},\varsigma\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\varsigma\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

性质5.5.1. $N^{\lambda_\varsigma}(1;3)\gamma^{x}{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}\bar{N}_{\mu_\varsigma}(1;3)$

$$=-iN^{0_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{3_\varsigma}(1;3)-iN^{1_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{2_\varsigma}(1;3)+iN^{2_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{1_\varsigma}(1;3)+iN^{3_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{0_\varsigma}(1;3)$$

$$=-\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}-\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0\\\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&-\sqrt{2}\\0&0&0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&-\sqrt{2}&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}^2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0&0&0&0&-2\\0&2&0&0&0&0&0&0&-2&0\\0&0&2&0&0&0&2&0&0&0\\0&0&0&4&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&2&0&0&-2&0&0\\0&0&0&0&0&4&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0&2&0&0&0\\0&0&0&0&-2&0&0&2&0&0\\0&-2&0&0&0&0&0&0&2&0\\-2&0&0&0&0&0&0&0&0&2\end{bmatrix}$$

性质5.5.2. $N^{\lambda_\varsigma}(1;3)\gamma^{y}{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}\bar{N}_{\mu_\varsigma}(1;3)$

$$=-N^{0_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{3_\varsigma}(1;3)+N^{1_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{2_\varsigma}(1;3)+N^{2_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{1_\varsigma}(1;3)-N^{3_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{0_\varsigma}(1;3)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0\\-\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&-\sqrt{2}\\0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&\sqrt{2}&0&0\\0&-1&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}^2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0&0&0&0&2\\0&2&0&0&0&0&0&0&-2&0\\0&0&2&0&0&0&-2&0&0&0\\0&0&0&4&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&2&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&0&4&0&0&0&0\\0&0&-2&0&0&0&2&0&0&0\\0&0&0&0&2&0&0&2&0&0\\0&-2&0&0&0&0&0&0&2&0\\2&0&0&0&0&0&0&0&0&2\end{bmatrix}$$

性质5.5.3. $N^{\lambda_\varsigma}(1;3)\gamma^{z}{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}\bar{N}_{\mu_\varsigma}(1;3)$

$$=-iN^{0_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{2_\varsigma}(1;3)+iN^{1_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{3_\varsigma}(1;3)+iN^{2_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{0_\varsigma}(1;3)-iN^{3_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{1_\varsigma}(1;3)$$

$$=-\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}-\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$
=\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}
0&0&-\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&-1&0&0&0&0\\
\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&-\sqrt{2}&0&0\\
0&-1&0&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&0&0&\sqrt{2}\\
0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&0
\end{bmatrix}^2
=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}
2&0&0&0&0&0&0&-2&0&0\\
0&2&0&0&0&0&0&0&2&0\\
0&0&4&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&2&0&-2&0&0&0&0\\
0&0&0&0&2&0&0&0&0&-2\\
0&0&0&-2&0&2&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&4&0&0&0\\
-2&0&0&0&0&0&0&2&0&0\\
0&2&0&0&0&0&0&0&2&0\\
0&0&0&0&-2&0&0&0&0&2
\end{bmatrix}
$$

性质5.5.4. $N^{\lambda_\varsigma}(1;3)\gamma^4{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}\bar{N}_{\mu_\varsigma}(1;3)$

$$
=\varsigma N^{0_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{2_\varsigma}(1;3)+\varsigma N^{1_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{3_\varsigma}(1;3)+\varsigma N^{2_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{0_\varsigma}(1;3)+\varsigma N^{3_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{1_\varsigma}(1;3)
$$

$$
=\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}
0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
+\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
+\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
+\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0
\end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}
0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&\sqrt{2}\\
0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0
\end{bmatrix}^2
=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}
2&0&0&0&0&0&0&2&0&0\\
0&2&0&0&0&0&0&0&2&0\\
0&0&4&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&2&0&2&0&0&0&0\\
0&0&0&0&2&0&0&0&0&2\\
0&0&0&2&0&2&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&4&0&0&0\\
2&0&0&0&0&0&0&2&0&0\\
0&2&0&0&0&0&0&0&2&0\\
0&0&0&0&2&0&0&0&0&2
\end{bmatrix}
$$

性质5.5.5. $N^{\lambda_\varsigma}(1;3)\gamma^5{}_{\lambda_\varsigma}{}^{\mu_\varsigma}\bar{N}_{\mu_\varsigma}(1;3)$

$$
=\varsigma N^{0_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{0_\varsigma}(1;3)+\varsigma N^{1_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{1_\varsigma}(1;3)-\varsigma N^{2_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{2_\varsigma}(1;3)-\varsigma N^{3_\varsigma}(1;3)\bar{N}_{3_\varsigma}(1;3)
$$

$$
=\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}
2&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
+\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&2&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
-\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&2&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
-\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&2
\end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{\varsigma}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}
2&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&2&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&2&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-2&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-2&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-2
\end{bmatrix}^2
=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}
4&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&4&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&4&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&4&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&4&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&4
\end{bmatrix}
$$

性质5.5.6.

$$
\frac{1}{2}\begin{bmatrix}
2&0&0&0&0&0&0&0&0&-2\\
0&2&0&0&0&0&0&0&-2&0\\
0&0&2&0&0&0&2&0&0&0\\
0&0&0&4&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&2&0&0&-2&0&0\\
0&0&0&0&0&4&0&0&0&0\\
0&0&2&0&0&0&2&0&0&0\\
0&0&0&0&-2&0&0&2&0&0\\
0&-2&0&0&0&0&0&0&2&0\\
-2&0&0&0&0&0&0&0&0&2
\end{bmatrix}
+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}
2&0&0&0&0&0&0&0&0&2\\
0&2&0&0&0&0&0&0&-2&0\\
0&0&2&0&0&0&-2&0&0&0\\
0&0&0&4&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&2&0&0&2&0&0\\
0&0&0&0&0&4&0&0&0&0\\
0&0&-2&0&0&0&2&0&0&0\\
0&0&0&0&2&0&0&2&0&0\\
0&-2&0&0&0&0&0&0&2&0\\
2&0&0&0&0&0&0&0&0&2
\end{bmatrix}
+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}
2&0&0&0&0&0&0&-2&0&0\\
0&2&0&0&0&0&0&0&2&0\\
0&0&4&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&2&0&-2&0&0&0&0\\
0&0&0&0&2&0&0&0&0&-2\\
0&0&0&-2&0&2&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&4&0&0&0\\
-2&0&0&0&0&0&0&2&0&0\\
0&2&0&0&0&0&0&0&2&0\\
0&0&0&0&-2&0&0&0&0&2
\end{bmatrix}
+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}
2&0&0&0&0&0&0&2&0&0\\
0&2&0&0&0&0&0&0&2&0\\
0&0&4&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&2&0&2&0&0&0&0\\
0&0&0&0&2&0&0&0&0&2\\
0&0&0&2&0&2&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&4&0&0&0\\
2&0&0&0&0&0&0&2&0&0\\
0&2&0&0&0&0&0&0&2&0\\
0&0&0&0&2&0&0&0&0&2
\end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}
8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&12&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&12&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&8&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&12&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&12&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&8&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&8&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&8
\end{bmatrix}
$$

推论5.5.6. $[\gamma_a(\varsigma)(1;3),\gamma_5(\varsigma)(1;3)]^2=6$

推论5.5.7.

$$
\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}
0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0\\
\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&-\sqrt{2}\\
0&0&0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&-\sqrt{2}&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}
0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0\\
-\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&-\sqrt{2}\\
0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&\sqrt{2}&0&0\\
0&-1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&-\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
$$

$$= \frac{i}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

推论5.5.8. $[\gamma_x(1;3), \gamma_y(1;3)] = i\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \{\gamma_x(1;3), \gamma_y(1;3)\} = i\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

第四十二章　多重完美常数不变张量

自我评述：本章主要是多重完美常数不变张量的具体介绍，是对更一般完美常数不变张量的深入具体了解和具体扩展。若将中微子自旋矩阵替换为多重矩阵，就可以得到多重完美常数不变张量。同时它是之前完美常数不变张量一般情形的特殊运用而已，故直接写出其结论即可，也无需再作证明。在此做出特别说明，本章的符号约定虽然尽量符合规范，但有些约定只限于本章，出了本章之外需重新约定，只有这样才不会出现混淆。本章节的完美常数不变张量与$w=1$情形同构，所以同样满足重要的复合常数不变张量那一章的展开性质，并具有完全相同的展开系数，为了节省篇幅，不再重复写出。

1 多重完美常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s;2j-1),\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;2j-1)$

1.1 常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s;2j-1),\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;2j-1)$

定义1.1.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j-1)=\frac{1}{(2s)!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)}_{2s}}(s;2j-1),w=2j-1$

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}_{l_0}\underbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}_{l_1}\cdot\cdot\underbrace{w_\varsigma\cdot\cdot w_\varsigma}_{l_w}}(s;2j-1)=\sqrt{\frac{l_0!l_1!\cdot\cdot l_w!}{(2s)!}}\delta\{k_\varsigma,\sum_{l=0}^{[s]}(\sum_{k=\lambda_{2l+2}}^{\lambda_{2l+1}}C^{2l}_{2l+2j-1-k}-C^{2l}_{2l+2j-1-\lambda_{2l}})\},l_0+l_1+\cdot\cdot+l_w=2s$$

定义1.1.2. $\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;2j-1)=\frac{1}{(2s)!}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{(A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)}^{2s}}(s;2j-1),w=2j-1$

$$\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}^{l_0}\overbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}^{l_1}\cdot\cdot\overbrace{w_\varsigma\cdot\cdot w_\varsigma}^{l_w}}(s;2j-1)=\sqrt{\frac{l_0!l_1!\cdot\cdot l_w!}{(2s)!}}\delta\{k_\varsigma,\sum_{l=0}^{[s]}(\sum_{k=\lambda_{2l+2}}^{\lambda_{2l+1}}C^{2l}_{2l+2j-1-k}-C^{2l}_{2l+2j-1-\lambda_{2l}})\},l_0+l_1+\cdot\cdot+l_w=2s$$

1.2 常数矩阵$\Gamma(s;2j-1),\bar{\Gamma}(s;2j-1)$

定义1.2.1. $\Gamma(s;2j-1)\succ\Gamma_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}{}^{k_\varsigma}(s;2j-1),\bar{\Gamma}(s;2j-1)\succ\Gamma_{k_\varsigma}{}^{\overbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma\otimes\cdot\cdot}^{2s}}(s;2j-1)\simeq\Gamma^T(s;2j-1)$

推论1.2.1. $[\Gamma(s;2j-1)]=(2j)^{2s}\times C^{2s}_{2s+2j-1},[\bar{\Gamma}(s;2j-1)]=C^{2s}_{2s+2j-1}\times(2j)^{2s},[A_\varsigma]=2j,[k_\varsigma]=C^{2s}_{2s+2j-1}$

1.3 常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s;2j-1),\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;2j-1)$ 的基本性质

相等性：

性质1.3.1. $\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j-1)\simeq\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j-1)\simeq\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;2j-1)\simeq\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;2j-1)$

性质1.3.2. $[\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j-1)]^*\simeq\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j-1),[\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;2j-1)]^*\simeq\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;2j-1)$

推论1.3.1. $\Gamma(s;2j-1)=\Gamma^*(s;2j-1),\bar{\Gamma}(s;2j-1)=\bar{\Gamma}^*(s;2j-1),\bar{\Gamma}(s;2j-1)=\Gamma^+(s;2j-1),\Gamma(s;2j-1)=\bar{\Gamma}^+(s;2j-1)$

正交性：

性质1.3.3. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;2j-1)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;2j-1)=\delta^{k_\varsigma}{}_{l_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Gamma(s;2j-1)=I$

性质1.3.4. $\Gamma^{k_\varsigma}_{A_{1\varsigma}A_{2\varsigma}\cdot\cdot A_{2s\varsigma}}(s;2j-1)\Gamma^{B_{1\varsigma}B_{2\varsigma}\cdot\cdot B_{2s\varsigma}}_{k_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{1}{(2s)!}\delta^{(B_{1\varsigma}}_{A_{1\varsigma}}\delta^{B_{2\varsigma}}_{A_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{B_{2s\varsigma})}_{A_{2s\varsigma}}=\frac{1}{(2s)!}\delta^{B_{1\varsigma}}_{(A_{1\varsigma}}\delta^{B_{2\varsigma}}_{A_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{B_{2s\varsigma}}_{A_{2s\varsigma})}$

对比性：

性质1.3.5. $\varepsilon_{a_1a_2\cdots a_n}\varepsilon^{b_1b_2\cdots b_n}=\delta^{[b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdots\delta^{b_n]}_{a_n}=\delta^{b_1}_{[a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdots\delta^{b_n}_{a_n]}$

其它性质：

性质1.3.6. $\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma}(\frac{1}{2};2j-1)=\delta^{k_\varsigma}_{A_\varsigma},\Gamma^{A_\varsigma}_{k_\varsigma}(\frac{1}{2};2j-1)=\delta^{A_\varsigma}_{k_\varsigma};\Gamma(0;2j-1)=1,\bar{\Gamma}(0;2j-1)=1$

1.4 度规常数不变张量$\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)$的引入及其性质

度规定义： $(\varepsilon\otimes I_j)_{A_\varsigma B_\varsigma}:=(\varepsilon\otimes I_j)_{A_\varsigma B_\varsigma}$

定义1.4.1.
$$\begin{cases}\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1):=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j-1)\underbrace{(\varepsilon\otimes I_j)_{A_\varsigma E_\varsigma}(\varepsilon\otimes I_j)_{B_\varsigma F_\varsigma}(\varepsilon\otimes I_j)_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdots}_{2s}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdots}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;2j-1)\\ \varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)\overbrace{(\varepsilon\otimes I_j)^{A_\varsigma E_\varsigma}(\varepsilon\otimes I_j)^{B_\varsigma F_\varsigma}(\varepsilon\otimes I_j)^{C_\varsigma G_\varsigma}\cdots}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)\end{cases}$$

性质1.4.1.
$$\begin{cases}\underbrace{(\varepsilon\otimes I_j)_{A_\varsigma E_\varsigma}(\varepsilon\otimes I_j)_{B_\varsigma F_\varsigma}(\varepsilon\otimes I_j)_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdots}_{2s}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdots}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;2j-1)\text{关于}ABC...\text{全对称}\\ \overbrace{(\varepsilon\otimes I_j)^{A_\varsigma E_\varsigma}(\varepsilon\otimes I_j)^{B_\varsigma F_\varsigma}(\varepsilon\otimes I_j)^{C_\varsigma G_\varsigma}\cdots}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)\text{关于}ABC...\text{全对称}\end{cases}$$

推论1.4.1. $\varepsilon(s;2j-1):=\bar{\Gamma}(s;2j-1)\underbrace{(\varepsilon\otimes I_j)\otimes\cdots\otimes(\varepsilon\otimes I_j)}_{2s}\Gamma(s;2j-1);(\varepsilon\otimes I_j)=\varepsilon(\frac{1}{2};2j-1)$

推论1.4.2. $\varepsilon(s;2j-1)\varepsilon^{+}(s;2j-1)=\varepsilon^{+}(s;2j-1)\varepsilon(s;2j-1)=1;\varepsilon(s;2j-1)=\varepsilon^{*}(s;2j-1),\varepsilon(s;2j-1)=(-1)^{4sj}\varepsilon(s;2j-1)$

升降指标：

性质1.4.2.
$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)=\varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)\underbrace{(\varepsilon\otimes I_j)_{A_\varsigma E_\varsigma}(\varepsilon\otimes I_j)_{B_\varsigma F_\varsigma}(\varepsilon\otimes I_j)_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdots}_{2s}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdots}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;2j-1)\\ \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j-1)=\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)\overbrace{(\varepsilon\otimes I_j)^{A_\varsigma E_\varsigma}(\varepsilon\otimes I_j)^{B_\varsigma F_\varsigma}(\varepsilon\otimes I_j)^{C_\varsigma G_\varsigma}\cdots}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)\end{cases}$$

推论1.4.3.
$$\begin{cases}\Gamma(s;2j-1)\varepsilon(s;2j-1)=\underbrace{(\varepsilon\otimes I_j)\otimes\cdots\otimes(\varepsilon\otimes I_j)}_{2s}\Gamma(s;2j-1)\\ \varepsilon(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)=\bar{\Gamma}(s;2j-1)\underbrace{(\varepsilon\otimes I_j)\otimes\cdots\otimes(\varepsilon\otimes I_j)}_{2s}\end{cases}$$

Penrose标准升降规则：

性质1.4.3.
$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)=(-1)^{2s}[\varsigma^{2s}\varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)]\underbrace{[-\varsigma(\varepsilon\otimes I_j)_{A_\varsigma E_\varsigma}][-\varsigma(\varepsilon\otimes I_j)_{B_\varsigma F_\varsigma}][-\varsigma(\varepsilon\otimes I_j)_{C_\varsigma G_\varsigma}]\cdots}_{2s}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdots}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;2j-1)\\ \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;2j-1)=(-1)^{2s}[(-\varsigma)^{2s}\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)]\overbrace{[\varsigma(\varepsilon\otimes I_j)^{A_\varsigma E_\varsigma}][\varsigma(\varepsilon\otimes I_j)^{B_\varsigma F_\varsigma}][\varsigma(\varepsilon\otimes I_j)^{C_\varsigma G_\varsigma}]\cdots}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)\end{cases}$$

1.5 自旋常数不变张量$\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j-1),S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)$

定义1.5.1.

$$\begin{cases}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{Z_\varsigma}(j)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{Z_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j-1)[\Leftrightarrow]\\ \bar{\Gamma}(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}(j)\Gamma(s;2j-1)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;2j-1)\\ \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;2j-1)S_{abA_\varsigma}{}^{Z_\varsigma}(j)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{Z_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)=\frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j-1)[\Leftrightarrow]\\ \bar{\Gamma}(s;2j-1)S_{ab}(j,\varsigma)\Gamma(s;2j-1)=\frac{1}{2s}S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\end{cases}$$

1.6 常数不变张量$\Omega^{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}(s;2j-1)$,$\Omega(s;2j-1)$的引入及其基本性质

定义1.6.1.

$$\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1):=\overbrace{\underbrace{[\sigma(\tfrac{1}{2})\otimes I_j]_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s}+\underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}[\sigma(\tfrac{1}{2})\otimes I_j]_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s}+\underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}[\sigma(\tfrac{1}{2})\otimes I_j]_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s}+\cdots}^{2s}$$

[⇕]　　[⇕]

定义1.6.2. $\Omega(s;2j-1):=[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{(2j)^{2s-1}}+I_{2j}\otimes[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{(2j)^{2s-2}}+\cdots+I_{(2j)^{2s-1}}\otimes[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]$

推论1.6.1. $\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s+1}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1):=[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\underbrace{\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s-1}+\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Omega^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};2j-1)$

[⇕]　　[⇕]

推论1.6.2. $\Omega(s;2j-1)=[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{(2j)^{2s-1}}+I_{2j}\otimes\Omega(s-\frac{1}{2};2j-1)$

推论1.6.3. $\Omega(s;2j-1)=\Omega(s-s';2j-1)\otimes I_{(2j)^{2s'}}+I_{(2j)^{2(s-s')}}\otimes\Omega(s';2j-1)$

1.7 常数不变张量$\Omega_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}(s;2j-1)$,$\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)$ 的引入及其基本性质

定义1.7.1.

$$\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)$$

$$:=\overbrace{\underbrace{S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};2j-1)\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s}+\underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}S_{abB_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};2j-1)\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s}+\underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}S_{abC_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};2j-1)\cdots}_{2s}+\cdots}^{2s}$$

[⇕]　　[⇕]

定义1.7.2. $\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)$
$:=S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+I_4\otimes S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}+\cdots+I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)$

推论1.7.1. $\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s+1}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1):=S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};2j-1)\underbrace{\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s-1}+\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Omega_{ab}{}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};2j-1)$

[⇕]　　[⇕]

推论1.7.2. $\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)=S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+I_4\otimes\Omega_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)$

推论1.7.3. $\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)=\Omega_{ab}(s-s',\varsigma;2j-1)\otimes I_{(w+1)^{2s'}}+I_{(w+1)^{2(s-s')}}\otimes\Omega_{ab}(s',\varsigma;2j-1)$

1.8 自旋常数不变张量$\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j-1),\sigma(s;2j-1)$的引入

定义1.8.1. $\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{Z_\varsigma}(\frac{1}{2};2j-1)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{Z_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1):=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j-1)$

$[\Leftrightarrow]\sigma(s;2j-1):=\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega(s;2j-1)\Gamma(s;2j-1)$

1.9 自旋常数不变张量$S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j-1),S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)$的引入

定义1.9.1. $\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;2j-1)S_{abA_\varsigma}{}^{Z_\varsigma}(\frac{1}{2};2j-1)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{Z_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1):=\frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j-1)$

$[\Leftrightarrow]S_{ab}(s,\varsigma;2j-1):=\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\Gamma(s;2j-1)$

1.10 常数矩阵$\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1),S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)$与$\Omega_{\alpha_\varsigma}(s;2j-1),\sigma_{\alpha_\varsigma}(s;2j-1)$之间关系

推论1.10.1. $S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)=\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2};2j-1)$

$[\Rightarrow]\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)=\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\Omega_{\alpha_\varsigma}(s;2j-1)[\Rightarrow]S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)=\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s;2j-1)$

1.11 常数矩阵$\Omega(s;2j-1)$的两个重要引理

引理1.11.1. $\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega(s;2j-1)\Gamma(s;2j-1)=\Omega(s;2j-1)\Gamma(s;2j-1)$

引理1.11.2. $\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega(s;2j-1)\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)=\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega(s;2j-1)$

1.12 常数矩阵$\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)$的两个重要引理

引理1.12.1. $\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\Gamma(s;2j-1)=\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\Gamma(s;2j-1)$

引理1.12.2. $\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)=\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)$

1.13 关于常数矩阵$\bar{\Gamma}(s;3),\Omega(s;3),\sigma(s;3),\Gamma(s;3)$的置换性质及其推论

定理1.13.1. $\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j-1)$

$[\Leftrightarrow]\Omega(s;2j-1)\Gamma(s;2j-1)=\Gamma(s;2j-1)\sigma(s;2j-1)$

定理1.13.2. $\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;2j-1)\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)=\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j-1)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;2j-1)$

$[\Leftrightarrow]\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega(s;2j-1)=\sigma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)$

推论1.13.1. $\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega(s;2j-1)\Gamma(s;2j-1)=\sigma(s;2j-1)$

$\Leftrightarrow\Omega(s;2j-1)\Gamma(s;2j-1)=\Gamma(s;2j-1)\sigma(s;2j-1)\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega(s;2j-1)=\sigma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)$

推论1.13.2. $\Omega^2(s;2j-1)\Gamma(s;2j-1)=\Gamma(s;2j-1)\sigma^2(s;2j-1)$

推论1.13.3. $\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega^2(s;2j-1)=\sigma^2(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)$

推论1.13.4. $[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]_{(A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots)A'_\varsigma}_{2s}}(s;2j-1)=\frac{1}{(2s-1)!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j-1)$

1.14 关于常数矩阵$\bar{\Gamma}(s;2j-1),\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1),S_{ab}(s,\varsigma;2j-1),\Gamma(s;2j-1)$的置换性质及其推论

定理1.14.1. $\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j-1)$

$[\Leftrightarrow]\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\Gamma(s;2j-1)=\Gamma(s;2j-1)S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)$

定理1.14.2. $\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;2j-1)\Omega_{ab\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;2j-1)=S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j-1)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;2j-1)$

$[\Leftrightarrow]\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)=S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)$

推论1.14.1. $\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\Gamma(s;2j-1)=S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)$

$\Leftrightarrow \Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\Gamma(s;2j-1)=\Gamma(s;2j-1)S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\Leftrightarrow \bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)=S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)$

推论1.14.2. $[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)\otimes I_j]_{(A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots)A'_\varsigma}_{2s}}(s;2j-1)=\frac{1}{(2s-1)!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j-1)$

1.15 常数矩阵$\Omega(s;2j-1),\sigma(s;2j-1)$的洛伦兹群表示

推论1.15.1. $\Omega(s;2j-1)\times\Omega(s;2j-1)=i\Omega(s;2j-1)[\Rightarrow]\sigma(s;2j-1)\times\sigma(s;2j-1)=i\sigma(s;2j-1)$

1.16 常数矩阵$\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1),S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)$的洛伦兹群表示

推论1.16.1. $i[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;2j-1),S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]$

$=\delta_{ad}S_{bc}(\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)-\delta_{ac}S_{bd}(\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)+\delta_{bc}S_{ad}(\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)-\delta_{bd}S_{ac}(\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)$

$[\Rightarrow]i[\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1),\Omega_{cd}(s,\varsigma;2j-1)]$

$=\delta_{ad}\Omega_{bc}(s,\varsigma;2j-1)-\delta_{ac}\Omega_{bd}(s,\varsigma;2j-1)+\delta_{bc}\Omega_{ad}(s,\varsigma;2j-1)-\delta_{bd}\Omega_{ac}(s,\varsigma;2j-1)$

$[\Rightarrow]i[S_{ab}(s,\varsigma;2j-1),S_{cd}(s,\varsigma;2j-1)]$

$=\delta_{ad}S_{bc}(s,\varsigma;2j-1)-\delta_{ac}S_{bd}(s,\varsigma;2j-1)+\delta_{bc}S_{ad}(s,\varsigma;2j-1)-\delta_{bd}S_{ac}(s,\varsigma;2j-1)$

1.17 推论：常数矩阵$\Gamma(s;2j-1),\bar{\Gamma}(s;2j-1)$的几个恒等式

性质1.17.1.

$$\begin{cases}\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega(s;2j-1)\Gamma(s;2j-1)=\sigma(s;2j-1),[\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1),\Omega(s;2j-1)]=0\\ \Gamma(s;2j-1)\sigma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)=\Omega(s;2j-1)\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)=\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega(s;2j-1)\end{cases}$$

性质1.17.2.

$$\begin{cases}\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\Gamma(s;2j-1)=S_{ab}(s,\varsigma;2j-1),[\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1),\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)]=0\\ \Gamma(s;2j-1)S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)=\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)\\ =\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\end{cases}$$

性质1.17.3.

$$\begin{cases}\bar{\Gamma}(s;2j-1)[\vartheta\cdot\Omega(s;2j-1)]^n\Gamma(s;2j-1)=[\vartheta\cdot\sigma(s;2j-1)]^n,[\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1),[\vartheta\cdot\Omega(s;2j-1)]^n]=0\\ \Gamma(s;2j-1)[\vartheta\cdot\sigma(s;2j-1)]^n\bar{\Gamma}(s;2j-1)=[\vartheta\cdot\Omega(s;2j-1)]^n\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)\\ =\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)[\vartheta\cdot\Omega(s;2j-1)]^n\end{cases}$$

性质1.17.4.

$$\begin{cases}\bar{\Gamma}(s;2j-1)[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)]^n\Gamma(s;2j-1)=[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)]^n\\ [\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1),[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)]^n]=0\\ \Gamma(s;2j-1)[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)]^n\bar{\Gamma}(s;2j-1)=[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)]^n\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)\\ =\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)]^n\end{cases}$$

推论1.17.1.

$$\begin{cases}\bar{\Gamma}(s;2j-1)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)}\Gamma(s;2j-1)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)},[\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1),e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)}]=0\\ \Gamma(s;2j-1)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)}\bar{\Gamma}(s;2j-1)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)}\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)\\ =\Gamma(s;2j-1)\bar{\Gamma}(s;2j-1)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)}\end{cases}$$

1.18 常数矩阵$\Gamma(s;2j-1),\bar{\Gamma}(s;2j-1)$的对称置换性质

定义1.18.1. $S_{ex}(s,n)=(\overbrace{I_{2j}\otimes\cdot\cdot\otimes I_{2j}\otimes}^{n-1}S_{ex}\overbrace{\otimes I_{2j}\otimes\cdot\cdot\otimes I}^{2s-n-1})$

推论1.18.1. $\Gamma(s;2j-1)=S_{ex}(s,n)\Gamma(s;2j-1),\bar{\Gamma}(s;2j-1)=\bar{\Gamma}(s;2j-1)S_{ex}(s,n)$

推论1.18.2. $S_{ex}(s,n)\Omega(s;2j-1)S_{ex}(s,n)=\Omega(s;2j-1)$

推论1.18.3. $\hat{\psi}(s,\varsigma;2j-1)=S_{ex}(s,n)\hat{\psi}(s,\varsigma;2j-1),\forall n\in\{1,2,\cdot\cdot,2s+1\}$

1.19 矩阵$\Gamma(s;2j-1),\bar{\Gamma}(s;2j-1)$的常数不变张量性质

定理1.19.1. $\Gamma(s;2j-1)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s;2j-1)}\Gamma(s;2j-1)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s;2j-1)}$

定理1.19.2. $\bar{\Gamma}(s;2j-1)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s;2j-1)}\bar{\Gamma}(s;2j-1)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s;2j-1)}$

推论1.19.1.

$$\begin{cases}S(s;2j-1)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s;2j-1)}S(s;2j-1)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot S^{+}(s;2j-1)\Omega(s;2j-1)S(s;2j-1)}\\S(s;2j-1)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot S(s;2j-1)\Omega(s;2j-1)S^{+}(s;2j-1)}S(s;2j-1)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s;2j-1)}\\S^{+}(s;2j-1)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s;2j-1)}S^{+}(s;2j-1)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot S(s;2j-1)\Omega(s;2j-1)S^{+}(s;2j-1)}\\S^{+}(s;2j-1)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot S^{+}(s;2j-1)\Omega(s;2j-1)S(s;2j-1)}S^{+}(s;2j-1)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s;2j-1)}\end{cases}$$

1.20 常数矩阵$I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1),I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)$的置换性质

推论1.20.1. $\Omega(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]=[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]$

推论1.20.2. $[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\Omega(s;2j-1)=[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]$

1.21 推论：常数矩阵$\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1),\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)$的几个恒等式

性质1.21.1.

$$\begin{cases}[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\Omega(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]=[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]\\[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\\=\Omega(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\\=[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\Omega(s;2j-1)\\[[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)],\Omega(s;2j-1)]=0\end{cases}$$

性质1.21.2.

$$\begin{cases}[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]=[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]\\[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\\=\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\\=[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\\[[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)],\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)]=0\end{cases}$$

性质1.21.3.

$$\begin{cases}[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)][\vartheta\cdot\Omega(s;2j-1)]^n[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]\\=\{\vartheta\cdot[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]\}^n\\[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]\{\vartheta\cdot[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]\}^n[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\\=[\vartheta\cdot\Omega(s;2j-1)]^n[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\\=[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)][\vartheta\cdot\Omega(s;2j-1)]^n\\[[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)],[\vartheta\cdot\Omega(s;2j-1)]^n]=0\end{cases}$$

性质1.21.4.

$$\begin{cases}[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)][\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)]^n[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]\\=\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]\}^n\\ [I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]\}^n[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\\=[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)]^n[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\\=[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)][\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)]^n\\ [[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)],[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)]^n]=0\end{cases}$$

推论1.21.1.

$$\begin{cases}[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)}[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]}\\ [I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]}[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\\=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)}[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\\=[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)}\\ [[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)],e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;2j-1)}]=0\end{cases}$$

推论1.21.2.

$$\begin{cases}I_{(2j)^{2s-1}}\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)=\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}},\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)I_{(2j)^{2s-1}}=I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\\ [I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)][\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{(2j)^{2s-1}}[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]=[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}\\ [[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{(2j)^{2s-1}}[I_{2j}]\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]=[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}]\\ [I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)][[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{(2j)^{2s-1}}]=[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\end{cases}$$

1.22 矩阵$I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1),I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)$的常数不变张量性质

定理1.22.1. $[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s;2j-1)}[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]}\otimes e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)}$

定理1.22.2. $[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)}[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\Omega(s;2j-1)}$

2 多重完美常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)$

2.1 完美常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)$

定义2.1.1. $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2}),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s):=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2})$

定义2.1.2.

$$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2};2j-1)$$

$$N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1):=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;2j-1)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};2j-1)$$

推论2.1.1. $N(s;2j-1)=[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\Gamma(s;2j-1),\bar{N}(s;2j-1)=\bar{\Gamma}(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]$

性质2.1.1.

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)=N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};2j-1)$$

$$\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;2j-1)=N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2};2j-1)$$

推论2.1.2. $\Gamma(s;2j-1)=[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]N(s;2j-1),\bar{\Gamma}(s;2j-1)=\bar{N}(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]$,

性质2.1.2. $\Gamma(s;2j-1)=[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)][I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\Gamma(s;2j-1)$

推论2.1.3. $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s)=N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;1),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)=N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;1)$

自我评述：以上表明$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)$,$N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)$是常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s)$,$N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s)$ 的推广。

2.2 常数矩阵$N_{A_\varsigma}(s;2j-1),N^{A_\varsigma}(s;2j-1);\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1),\bar{N}^{A_\varsigma}(s;2j-1);N(s;2j-1),\bar{N}(s;2j-1)$

定义2.2.1.

$$\begin{cases}N_{A_\varsigma}(s;2j-1)\prec N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1),N^{A_\varsigma}(s;2j-1)\prec N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)|_{I_{C^{2s}_{2s+2j-1}}\times I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}}\\ \bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1):=N^{+}_{A_\varsigma}(s;2j-1)\succ N_{A_\varsigma l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;2j-1)\\ \bar{N}^{A_\varsigma}(s;2j-1):=N^{+A_\varsigma}(s;2j-1)\succ N^{A_\varsigma l_\varsigma}{}_{k_\varsigma}(s;2j-1)|_{I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}\times I_{C^{2s}_{2s+2j-1}}}\\ N(s;2j-1)\prec N_{A_\varsigma\otimes l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;2j-1)|_{(2j)I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}\times I_{C^{2s}_{2s+2j-1}}}\\ \bar{N}(s;2j-1)=N^{+}(s;2j-1)\prec N_{k_\varsigma}{}^{A_\varsigma\otimes l_\varsigma}(s;2j-1)|_{I_{C^{2s}_{2s+2j-1}}\times(2j)I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}}\end{cases}$$

2.3 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)$的基本性质

相等性：

性质2.3.1.

$$\begin{cases}N^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma l'_\varsigma}(s;2j-1)\simeq N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)\simeq N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)\simeq N^{A'_\varsigma l'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;2j-1)\\ [N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)]^*\simeq N^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma l'_\varsigma}(s;2j-1),[N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)]^*\simeq N^{A'_\varsigma l'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;2j-1)\end{cases}$$

推论2.3.1.

$$\begin{cases}N_{A_\varsigma}(s;2j-1)\simeq N^{A_\varsigma}(s;2j-1)\simeq N_{A'_\varsigma}(s;2j-1)\simeq N^{A'_\varsigma}(s;2j-1)\\ \bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1)\simeq\bar{N}^{A_\varsigma}(s;2j-1)\simeq\bar{N}_{A'_\varsigma}(s;2j-1)\simeq\bar{N}^{A'_\varsigma}(s;2j-1)\\ N_{A_\varsigma}(s;2j-1)=N^*_{A_\varsigma}(s;2j-1),\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1)=\bar{N}^*_{A_\varsigma}(s;2j-1)\\ N(s;2j-1)=N^*(s;2j-1),\bar{N}(s;2j-1)=\bar{N}^*(s;2j-1)\end{cases}$$

2.4 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)$的正交性质

正交性：

引理2.4.1. $\sum\limits_{k=0}^{2s-1}C^{2j-1}_{2j-1+k}=C^{2j}_{2j-1+2s}$

引理2.4.2. $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)N^{A'_\varsigma l_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;2j-1)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;2j-1)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;2j-1)$

定理2.4.1.

$$\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j-1)=\delta^{k_\varsigma}_{m_\varsigma}\\ [\Leftrightarrow]N^{A_\varsigma}(s;2j-1)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1)=I_{C^{2s}_{2s+2j-1}}[\Leftrightarrow]\bar{N}(s;2j-1)N(s;2j-1)=I_{C^{2s}_{2s+2j-1}}\\ N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)N^{A_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)=(1+\frac{j}{s})\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1)N^{A_\varsigma}(s;2j-1)=(1+\frac{j}{s})I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}\\ N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)N^{B_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{1}{2j}C^{2s}_{2s+2j-1}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}[\Leftrightarrow]tr[\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1)N^{B_\varsigma}(s;2j-1)]=\frac{1}{2j}C^{2s}_{2s+2j-1}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\end{cases}$$

性质2.4.1.

$$\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{1}{2s}[\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}+(2s-1)N^{m_\varsigma}_{A_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\\ \bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1)N^{B_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{1}{2s}[\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+(2s-1)N^{B_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\bar{N}_{A_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\end{cases}$$

2.5 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)$的升降指标

升降指标：

性质2.5.1.

$$\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)=\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s;2j-1)(\varepsilon\otimes I_j)_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j-1)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)=\varepsilon_{k_\varsigma m_\varsigma}(s;2j-1)(\varepsilon\otimes I_j)^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)N^{m_\varsigma}_{B_\varsigma n_\varsigma}(s;2j-1)\end{cases}$$

推论2.5.1.

$$\begin{cases}N_{A_\varsigma}(s;2j-1)\varepsilon(s-\frac{1}{2};2j-1)=(\varepsilon\otimes I_j)_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon(s;2j-1)N^{B_\varsigma}(s;2j-1)\\ \varepsilon(s-\frac{1}{2};2j-1)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1)=\bar{N}^{B_\varsigma}(s;2j-1)\varepsilon_{B_\varsigma A_\varsigma}(j)\varepsilon(s;2j-1)\\ N^{A_\varsigma}(s;2j-1)\varepsilon(s-\frac{1}{2};2j-1)=(\varepsilon\otimes I_j)^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon(s;2j-1)N_{B_\varsigma}(s;2j-1)\\ \varepsilon(s-\frac{1}{2};2j-1)\bar{N}^{A_\varsigma}(s;2j-1)=\bar{N}_{B_\varsigma}(s;2j-1)\varepsilon^{B_\varsigma A_\varsigma}(j)\varepsilon(s;2j-1)\\ N(s;2j-1)\varepsilon(s;2j-1)=[(\varepsilon\otimes I_j)\otimes\varepsilon(s-\frac{1}{2};2j-1)]N(s;2j-1)\\ \varepsilon(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)=\bar{N}(s;2j-1)[(\varepsilon\otimes I_j)\otimes\varepsilon(s-\frac{1}{2};2j-1)]\end{cases}$$

Penrose标准升降规则：

性质2.5.2.

$$\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)=(-1)^{2s}[\varsigma^{2s}\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s;2j-1)][-\varsigma(\varepsilon\otimes I_j)_{A_\varsigma B_\varsigma}][(-\varsigma)^{2s-1}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;2j-1)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)=(-1)^{2s}[(-\varsigma)^{2s}\varepsilon_{k_\varsigma m_\varsigma}(s;2j-1)][\varsigma(\varepsilon\otimes I_j)^{A_\varsigma B_\varsigma}][\varsigma^{2s-1}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]N^{m_\varsigma}_{B_\varsigma n_\varsigma}(s;2j-1)\end{cases}$$

2.6 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)$的自旋矩阵变换

性质2.6.1.

$$\begin{cases}N^{A_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)N^{l_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j-1)\\ [\Leftrightarrow]N^{A_\varsigma}(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;2j-1)\\ [\Leftrightarrow]\bar{N}(s;2j-1)[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}N(s;2j-1)=\frac{1}{2s}\sigma(s;2j-1)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\\ [\Leftrightarrow]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)N^{A_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\end{cases}$$

性质2.6.2.

$$\begin{cases}N^{A_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)N^{l_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;2j-1)\\ [\Leftrightarrow]N^{A_\varsigma}(s;2j-1)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{1}{2s}S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\\ [\Leftrightarrow]\bar{N}(s;2j-1)S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}N(s;2j-1)=\frac{1}{2s}S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{1}{2s}S_{abm_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\\ [\Leftrightarrow]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;2j-1)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)N^{A_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{1}{2s}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)\end{cases}$$

2.7 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)$的置换性质

定理2.7.1.

$$\begin{cases}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)+\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma m_\varsigma}(s;2j-1)=N^{j_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;2j-1)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)=\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{j_\varsigma}(s;2j-1)N^{B_\varsigma l_\varsigma}_{j_\varsigma}(s;2j-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;2j-1)+\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1)=\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;2j-1)\\ N^{A_\varsigma}(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+N^{B_\varsigma}(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)=\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;2j-1)N^{B_\varsigma}(s;2j-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]N(s;2j-1)=N(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;2j-1)\\ \bar{N}(s;2j-1)[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]=\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)\end{cases}$$

定理2.7.2.

$$\begin{cases}S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)+S_{abl_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma m_\varsigma}(s;2j-1)=N^{j_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)S_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;2j-1)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)S_{abm_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)=S_{abk_\varsigma}{}^{j_\varsigma}(s;2j-1)N^{B_\varsigma l_\varsigma}_{j_\varsigma}(s;2j-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;2j-1)+S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1)=\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1)S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\\ N^{A_\varsigma}(s;2j-1)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+N^{B_\varsigma}(s;2j-1)S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)=S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)N^{B_\varsigma}(s;2j-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]N(s;2j-1)=N(s;2j-1)S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\\ \bar{N}(s;2j-1)[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]=S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)\end{cases}$$

2.8 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_\varsigma}(s;2j-1),N^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;2j-1)$的性质

定义2.8.1. $$\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;2j-1):=\Gamma^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;2j-1)\Gamma^{A_{\varsigma n+1}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}_{l_\varsigma}(s-\frac{n}{2};2j-1)\\ N^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{k_\varsigma}(s;2j-1):=\Gamma^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}_{k_\varsigma}(s;2j-1)\Gamma^{l_\varsigma}_{A_{\varsigma n+1}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s-\frac{n}{2};2j-1)\end{cases}$$

相等性：

性质2.8.1. $N^{k'_\varsigma}_{A'_{\varsigma1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}(s;2j-1)\simeq N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;2j-1)\simeq N^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{k_\varsigma}(s;2j-1)\simeq N^{A'_{\varsigma1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}_{k'_\varsigma}(s;2j-1)$

性质2.8.2. $[N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;2j-1)]^*\simeq N^{k'_\varsigma}_{A'_{\varsigma1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}(s;2j-1),[N^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{k_\varsigma}(s;2j-1)]^*\simeq N^{A'_{\varsigma1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}_{k'_\varsigma}(s;2j-1)$

展开性：

性质2.8.3.

$$\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;2j-1)=N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}l_{\varsigma1}}(s;2j-1)N^{l_{\varsigma1}}_{A_{\varsigma2}l_{\varsigma2}}(s-\frac{1}{2};2j-1)\cdot\cdot N^{l_{\varsigma n-1}}_{A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s-\frac{n-1}{2};2j-1)\\ N^{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{k_\varsigma}(s;2j-1)=N^{A_{\varsigma1}l_{\varsigma1}}_{k_\varsigma}(s;2j-1)N^{A_{\varsigma2}l_{\varsigma2}}_{l_{\varsigma1}}(s-\frac{1}{2};2j-1)\cdot\cdot N^{A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{l_{\varsigma n-1}}(s-\frac{n-1}{2};2j-1)\end{cases}$$

性质2.8.4.

$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;2j-1)=N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}l_{\varsigma1}}(s;2j-1)N^{l_{\varsigma1}}_{A_{\varsigma2}l_{\varsigma2}}(s-\frac{1}{2};2j-1)\cdot\cdot N^{l_{\varsigma2s-1}}_{A_{\varsigma2s}l_{\varsigma2s}}(\frac{1}{2};2j-1)\\ \Gamma^{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}_{k_\varsigma}(s;2j-1)=N^{A_{\varsigma1}l_{\varsigma1}}_{k_\varsigma}(s;2j-1)N^{A_{\varsigma2}l_{\varsigma2}}_{l_{\varsigma1}}(s-\frac{1}{2};2j-1)\cdot\cdot N^{A_{\varsigma2s}l_{\varsigma2s}}_{l_{\varsigma2s-1}}(\frac{1}{2};2j-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;2j-1)\succ\Gamma_{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;2j-1)=N_{A_{\varsigma1}}(s;2j-1)N_{A_{\varsigma2}}(s-\frac{1}{2};2j-1)\cdot\cdot N_{A_{\varsigma2s}}(\frac{1}{2};2j-1)\\ \Gamma^{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}_{k_\varsigma}(s;2j-1)\succ\Gamma^{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;2j-1)=N^{A_{\varsigma1}}(s;2j-1)N^{A_{\varsigma2}}(s-\frac{1}{2};2j-1)\cdot\cdot N^{A_{\varsigma2s}}(\frac{1}{2};2j-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{\Gamma}(s;2j-1)=\bar{N}(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\bar{N}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\cdot\cdot[I_{(2j)^{2s-2}}\otimes\bar{N}(1)][I_{(2j)^{2s-1}}\otimes\bar{N}(\frac{1}{2};2j-1)]\\ \Gamma(s;2j-1)=[I_{(2j)^{2s-1}}\otimes N(\frac{1}{2};2j-1)][I_{(2j)^{2s-2}}\otimes N(1)]\cdot\cdot[I_{2j}\otimes N(s-\frac{1}{2};2j-1)]N(s;2j-1)\end{cases}$$

2.9 推论1：常数矩阵$N(s;2j-1),\bar{N}(s;2j-1)$的几个恒等式

性质2.9.1.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;2j-1)[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]N(s;2j-1)=\sigma(s;2j-1)\\ N(s;2j-1)\sigma(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)=[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]N(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)\\ N(s;2j-1)\sigma(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)=N(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)\{\vartheta\cdot[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]\}^n\\ [N(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1),[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]=0\end{cases}$$

性质2.9.2.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;2j-1)[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]N(s;2j-1)=S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\\ N(s;2j-1)S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)=[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]N(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)\\ N(s;2j-1)S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)=N(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]\\ [N(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1),S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]=0\end{cases}$$

性质2.9.3.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;2j-1)\{\vartheta\cdot[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]\}^nN(s;2j-1)=[\vartheta\cdot\sigma(s;2j-1)]^n\\ N(s;2j-1)[\vartheta\cdot\sigma(s;2j-1)]^n\bar{N}(s;2j-1)\\ =\{\vartheta\cdot[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]\}^nN(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)\\ N(s;2j-1)[\vartheta\cdot\sigma(s;2j-1)]^n\bar{N}(s;2j-1)\\ =N(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)\{\vartheta\cdot[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]\}^n\\ [N(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1),\{\vartheta\cdot[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]\}^n]=0\end{cases}$$

性质2.9.4.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;2j-1)\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]\}^nN(s;2j-1)=[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)]^n\\ N(s;2j-1)[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)]^n\bar{N}(s;2j-1)\\ =\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]\}^nN(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)\\ N(s;2j-1)[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)]^n\bar{N}(s;2j-1)\\ =N(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]\}^n\\ [N(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1),\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]\}^n]=0\end{cases}$$

推论2.9.1.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;2j-1)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]}N(s;2j-1)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)}\\ N(s;2j-1)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)}\bar{N}(s;2j-1)\\ =e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]}N(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)\\ N(s;2j-1)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)}\bar{N}(s;2j-1)\\ =N(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]}\\ [N(s;2j-1)\bar{N}(s;2j-1),e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]}]=0\end{cases}$$

2.10 推论2：常数矩阵$N(s;2j-1),\bar{N}(s;2j-1)$的另外几个恒等式

推论2.10.1.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;2j-1)[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}N(s;2j-1)=\frac{1}{2s}\sigma(s;2j-1)\\ \bar{N}(s;2j-1)I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)N(s;2j-1)=(1-\frac{1}{2s})\sigma(s;2j-1)\\ N^{A_\varsigma}(s;2j-1)\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1)=(1-\frac{1}{2s})\sigma(s;2j-1)\\ \bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1)\sigma(s;2j-1)N^{A_\varsigma}(s;2j-1)=(1+\frac{2j}{2s})\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)\end{cases}$$

推论2.10.2.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;2j-1)S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}N(s;2j-1)=\frac{1}{2s}S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\\ \bar{N}(s;2j-1)I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)N(s;2j-1)=(1-\frac{1}{2s})S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\\ N^{A_\varsigma}(s;2j-1)S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1)=(1-\frac{1}{2s})S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)\\ \bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1)S_{ab}(s,\varsigma;2j-1)N^{A_\varsigma}(s;2j-1)=(1+\frac{2j}{2s})S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)\end{cases}$$

推论2.10.3.

$$\begin{cases}\bar{N}(1)[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_2+I_{2j}\otimes[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]]N(1)=\sigma(1)\\ \bar{N}(\frac{3}{2})\{[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_3+I_{2j}\otimes\{\bar{N}(1)[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_2+I_{2j}\otimes[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]]N(1)\}\}N(\frac{3}{2})=\sigma(\frac{3}{2})\\ \bar{N}(s;2j-1)\cdot\cdot\bar{N}(\frac{3}{2})\{[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_3+I_{2j}\otimes\{\bar{N}(1)[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_2+I_{2j}\otimes[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]]N(1)\}\}N(\frac{3}{2})\cdot\cdot N(s;2j-1)\\ =\sigma(s;2j-1)\end{cases}$$

2.11 矩阵$N(s;2j-1),\bar{N}(s;2j-1)$的常数不变张量性质

定理2.11.1. $N(s;2j-1)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)}N(s;2j-1)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s;2j-1)}$

定理2.11.2. $\bar{N}(s;2j-1)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s;2j-1)}\bar{N}(s;2j-1)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]}\otimes e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)}$

3 多重完美常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1),X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)$

3.1 完美常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1),X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)$

定义3.1.1.
$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1):=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+2j-1}}(\varepsilon\otimes I_j)^{A_\varsigma B_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)$
$X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1):=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s-1+2j-1}}(\varepsilon\otimes I_j)_{A_\varsigma B_\varsigma}N_{l_\varsigma}^{B_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)$

性质3.1.1. $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)\simeq X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)$

3.2 常数矩阵$X(s;2j-1),\bar{X}(s;2j-1)$

定义3.2.1.

$$\begin{cases}X^{A_\varsigma}(s;2j-1)\prec X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1),X_{A_\varsigma}(s;2j-1)\prec X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)\\ \bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j-1)\prec X_{A_\varsigma l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s;2j-1),\bar{X}^{A_\varsigma}(s;2j-1)\prec X^{A_\varsigma l_\varsigma}{}_{m_\varsigma}(s;2j-1)\\ X(s;2j-1)\prec X_{A_\varsigma\otimes l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s;2j-1),\bar{X}(s;2j-1)\prec X_{m_\varsigma}{}^{A_\varsigma\otimes l_\varsigma}(s;2j-1)=X^{+}(s;2j-1)\end{cases}$$

3.3 常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1),X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)$的升降指标

性质3.3.1.

$$\begin{cases}X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)=(\varepsilon\otimes I_j)^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\varepsilon_{m_\varsigma r_\varsigma}(s-1;2j-1)X^{r_\varsigma}_{B_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\\ X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)=(\varepsilon\otimes I_j)_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\varepsilon^{m_\varsigma r_\varsigma}(s-1;2j-1)X_{r_\varsigma}^{B_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\end{cases}$$

3.4 常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1),X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)$的正交性

性质3.4.1. $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)X^{n_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)=\delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}[\Leftrightarrow]X^{A_\varsigma}(s;2j-1)\bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j-1)=I_{C^{2s-2}_{2s-2+2j-1}}$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;2j-1)X(s;2j-1)=I_{C^{2s-2}_{2s-2+2j-1}}$

性质3.4.2. $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)=0$
$[\Leftrightarrow]X^{A_\varsigma}(s;2j-1)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;2j-1)=0,N_{A_\varsigma}(s;2j-1)\bar{X}^{A_\varsigma}(s;2j-1)=0$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;2j-1)N(s;2j-1)=0,\bar{N}(s;2j-1)X(s;2j-1)=0$

性质3.4.3. $X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma k_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{2s-1}{2s-1+2j-1}\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j-1)X^{A_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{2s-1}{2s-1+2j-1}I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}$

性质3.4.4. $X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)X_{m_\varsigma}^{B_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{1}{2j}C^{2s-2}_{2s-2+2j-1}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}[\Leftrightarrow]tr[\bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j-1)X^{B_\varsigma}(s;2j-1)]=\frac{1}{2j}C^{2s-2}_{2s-2+2j-1}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}$

推论3.4.1. $\bar{N}(s;2j-1)N(s;2j-1)=I_{C^{2s}_{2s+2j-1}},\bar{X}(s;2j-1)X(s;2j-1)=I_{C^{2s-2}_{2s-2+2j-1}}$
$\bar{N}(s;2j-1)X(s;2j-1)=0,\bar{X}(s;2j-1)N(s;2j-1)=0$

3.5 常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1),X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)$的自旋变换

推论3.5.1. $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)X^{n_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)=-\frac{1}{2s-1+2j-1}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j-1)$
$[\Leftrightarrow]X^{A_\varsigma}(s;2j-1)\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\bar{X}_{B_\varsigma}(s;2j-1)=-\frac{1}{2s-1+2j-1}\sigma(s-1;2j-1)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;2j-1)[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}X(s;2j-1)=-\frac{1}{2s-1+2j-1}\sigma(s-1;2j-1)$

推论3.5.2. $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)X^{m_\varsigma}_{B_\varsigma k_\varsigma}(s;2j-1)=-\frac{1}{2s-1+2j-1}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}^{A_\varsigma}(s;2j-1)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)X_{B_\varsigma}(s;2j-1)=-\frac{1}{2s-1+2j-1}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)$

推论3.5.3. $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)X^{n_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)=-\frac{1}{2s-1+2j-1}S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j-1)$
$[\Leftrightarrow]X^{A_\varsigma}(s;2j-1)S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-2}_{2s-2+2j-1}}\bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j-1)=-\frac{1}{2s-1+2j-1}S_{ab}(s-1,\varsigma;2j-1)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;2j-1)S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}X(s;2j-1)=-\frac{1}{2s-1+2j-1}S_{ab}(s-1,\varsigma;2j-1)$

推论3.5.4. $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)X_{B_\varsigma k_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;2j-1)=-\frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}^{A_\varsigma}(s;2j-1)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)X_{B_\varsigma}(s;2j-1)=-\frac{1}{2s-1+2j-1}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)$

3.6 常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1),X_{A_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;2j-1)$的置换性质

定理3.6.1.

$$\begin{cases}X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]=\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j-1)X_{n_\varsigma}^{B_\varsigma k_\varsigma}(s;2j-1)\\ [\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]X_{B_\varsigma k_\varsigma}^{n_\varsigma}(s;2j-1)=X_{A_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;2j-1)\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}X^{A_\varsigma}(s;2j-1)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]=\sigma(s-1;2j-1)X^{B_\varsigma}(s;2j-1)\\ [\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]\bar{X}_{B_\varsigma}(s;2j-1)=\bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j-1)\sigma(s-1;2j-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{X}(s;2j-1)[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C_{2s-1+2j-1}^{2s-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]=\sigma(s-1;2j-1)\bar{X}(s;2j-1)\\ [[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C_{2s-1+2j-1}^{2s-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]X(s;2j-1)=X(s;2j-1)\sigma(s-1;2j-1)\end{cases}$$

定理3.6.2.

$$\begin{cases}X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;2j-1)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]=S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j-1)X_{n_\varsigma}^{B_\varsigma\otimes k_\varsigma}(s;2j-1)\\ [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]X_{B_\varsigma k_\varsigma}^{n_\varsigma}(s;2j-1)=X_{A_\varsigma l_\varsigma}^{m_\varsigma}(s;2j-1)S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}X^{A_\varsigma}(s;2j-1)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]=S_{ab}(s-1,\varsigma;2j-1)X^{B_\varsigma}(s;2j-1)\\ [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]\bar{X}_{B_\varsigma}(s;2j-1)=\bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j-1)S_{ab}(s-1,\varsigma;2j-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{X}(s;2j-1)[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j-1}^{2s-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]=S_{ab}(s-1,\varsigma;2j-1)\bar{X}(s;2j-1)\\ [S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C_{2s-1+2j-1}^{2s-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]X(s;2j-1)=X(s;2j-1)S_{ab}(s-1,\varsigma;2j-1)\end{cases}$$

推论3.6.1.

$$\begin{cases}N_{C_\varsigma m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}(j)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\\ =\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j-1)N_{D_\varsigma n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\varepsilon^{D_\varsigma B_\varsigma}(j)\\ [\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}(j)N_{k_\varsigma}^{C_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\\ =\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}(j)N_{l_\varsigma}^{D_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}N_{C_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}(j)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]=\sigma(s-1;2j-1)N_{D_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\varepsilon^{D_\varsigma B_\varsigma}(j)\\ [\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}(j)N^{C_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)=\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}(j)N^{D_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\sigma(s-1;2j-1)\end{cases}$$

推论3.6.2.

$$\begin{cases}N_{C_\varsigma m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}(j)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\\ =S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j-1)N_{D_\varsigma n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\varepsilon^{D_\varsigma B_\varsigma}(j)\\ [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}(j)N_{k_\varsigma}^{C_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\\ =\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}(j)N_{l_\varsigma}^{D_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;2j-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}N_{C_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}(j)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]=S_{ab}(s-1,\varsigma;2j-1)N_{D_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)\varepsilon^{D_\varsigma B_\varsigma}(j)\\ [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(j)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}(j)N^{C_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)=\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}(j)N^{D_\varsigma}(s-\frac{1}{2};2j-1)S_{ab}(s-1,\varsigma;2j-1)\end{cases}$$

3.7 推论：关于常数矩阵$X(s;2j-1),\bar{X}(s;2j-1)$的重要性质

推论3.7.1.

$$\begin{cases}\bar{X}(s;2j-1)[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C_{2s-1+2j-1}^{2s-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]X(s;2j-1)=\sigma(s-1;2j-1)\\ X(s;2j-1)\sigma(s-1;2j-1)\bar{X}(s;2j-1)=[[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C_{2s-1+2j-1}^{2s-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]X(s;2j-1)\bar{X}(s;2j-1)\\ [X(s;2j-1)\bar{X}(s;2j-1),[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]\otimes I_{C_{2s-1+2j-1}^{2s-1}}+I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)]=0\end{cases}$$

推论3.7.2.

$$\begin{cases}\bar{X}(s;2j-1)[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]X(s;2j-1)=S_{ab}(s-1,\varsigma;2j-1)\\ X(s;2j-1)S_{ab}(s,\varsigma-1,\varsigma;2j-1)\bar{X}(s;2j-1)\\ =[S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]X(s;2j-1)\bar{X}(s;2j-1)\\ [X(s;2j-1)\bar{X}(s;2j-1),S_{ab}(j,\varsigma)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+2j-1}}+I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)]=0\end{cases}$$

推论3.7.3. $X^{A_\varsigma}(s;2j-1)\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)\bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{2s+2j-1}{2s-1+2j-1}\sigma(s-1;2j-1)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;2j-1)I_{2j}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)X(s;2j-1)=\frac{2s+2j-1}{2s-1+2j-1}\sigma(s-1;2j-1)$

推论3.7.4. $X^{A_\varsigma}(s;2j-1)I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)\bar{X}_{A_\varsigma}(s;2j-1)=\frac{2s+2j-1}{2s-1+2j-1}S_{ab}(s-1,\varsigma;2j-1)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;2j-1)I_{2j}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;2j-1)X(s;2j-1)=\frac{2s+2j-1}{2s-1+2j-1}S_{ab}(s-1,\varsigma;2j-1)$

3.8 矩阵$X(s;2j-1),\bar{X}(s;2j-1)$的常数不变张量性质

定理3.8.1. $X(s;2j-1)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)}X(s;2j-1)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1;2j-1)}$

定理3.8.2. $\bar{X}(s;2j-1)=e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-1;2j-1)}\bar{X}(s;2j-1)e^{-(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_j]}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(s-\frac{1}{2};2j-1)}$

3.9 常数矩阵$\Omega(s;2j-1),\sigma(s-1;2j-1)$的置换性质

推论3.9.1. $$\begin{cases}\Omega(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]X(s;2j-1)=[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]X(s;2j-1)\sigma(s-1;2j-1)\\ \bar{X}(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\Omega(s;2j-1)=\sigma(s-1;2j-1)\bar{X}(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\end{cases}$$

推论3.9.2. $$\begin{cases}\sigma(s;2j-1)=\bar{N}(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\Omega(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]N(s;2j-1)\\ \sigma(s-1;2j-1)=\bar{X}(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]\Omega(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]X(s;2j-1)\end{cases}$$

推论3.9.3. $$\begin{cases}[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s;2j-1)]^n=\bar{N}(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)][\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j-1)]^n[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]N(s;2j-1)\\ [\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-1;2j-1)]^n\\ =\bar{X}(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)][\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j-1)]^n[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]X(s;2j-1)\end{cases}$$

推论3.9.4. $$\begin{cases}e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s;2j-1)}=\bar{N}(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j-1)}[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]N(s;2j-1)\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-1;2j-1)}=\bar{X}(s;2j-1)[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};2j-1)]e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j-1)}[I_{2j}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};2j-1)]X(s;2j-1)\end{cases}$$

3.10 常数矩阵$\Omega(s-l;2j-1),[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-l;2j-1)]^n,e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-l;2j-1)}$的同构性表示

推论3.10.1. $\Omega(s;2j-1)=\Omega(s-1;2j-1)\otimes I_{(2j)^2}+I_{(2j)^{2s-2}}\otimes\Omega(1;2j-1)$

推论3.10.2.

$$\begin{cases}\Omega(s;2j-1)I_{(2j)^{2s-2}}\otimes\{[I_{2j}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};2j-1)]X(1;2j-1)\}=I_{(2j)^{2s-2}}\otimes\{[I_{2j}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};2j-1)]X(1;2j-1)\}\Omega(s-1;2j-1)\\ I_{(2j)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;2j-1)[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};2j-1)]\}\Omega(s;2j-1)=\Omega(s-1;2j-1)I_{(2j)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;2j-1)[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};2j-1)]\}\end{cases}$$

推论3.10.3.

$$\begin{cases}\Omega(s-1;2j-1)\\ =I_{(2j)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;2j-1)[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};2j-1)]\}\Omega(s;2j-1)I_{(2j)^{2s-2}}\otimes\{[I_{2j}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};2j-1)]X(1;2j-1)\}\\ [\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-1;2j-1)]^n\\ =I_{(2j)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;2j-1)[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};2j-1)]\}[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j-1)]^nI_{(2j)^{2s-2}}\otimes\{[I_{2j}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};2j-1)]X(1;2j-1)\}\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-1;2j-1)}\\ =I_{(2j)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;2j-1)[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};2j-1)]\}e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j-1)}I_{(2j)^{2s-2}}\otimes\{[I_{2j}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};2j-1)]X(1;2j-1)\}\end{cases}$$

定义3.10.1.

$$\begin{cases}T(s;2j-1):=I_{(2j)^{2s-2}}\otimes\{[I_{2j}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};2j-1)]X(1;2j-1)\}\\ \bar{T}(s;2j-1):=I_{(2j)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;2j-1)[I_{2j}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};2j-1)]\}=T^{+}(s;2j-1)\end{cases}$$

推论3.10.4.

$$\begin{cases}\Omega(s-l;2j-1)\\ =\bar{T}(s-l+1;2j-1)\cdots\bar{T}(s-1;2j-1)\bar{T}(s;2j-1)\Omega(s;2j-1)T(s;2j-1)T(s-1;2j-1)\cdots T(s-l+1;2j-1)\\ [\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-l;2j-1)]^{n}\\ =\bar{T}(s-l+1;2j-1)\cdots\bar{T}(s-1;2j-1)\bar{T}(s;2j-1)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j-1)]^{n}T(s;2j-1)T(s-1;2j-1)\cdots T(s-l+1;2j-1)\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-l;2j-1)}\\ =\bar{T}(s-l+1;2j-1)\cdots\bar{T}(s-1;2j-1)\bar{T}(s;2j-1)e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j-1)}T(s;2j-1)T(s-1;2j-1)\cdots T(s-l+1;2j-1)\end{cases}$$

推论3.10.5.

$$\begin{cases}\sigma(s-l;2j-1)\\ =\bar{\Gamma}(s-l;2j-1)\bar{T}(s-l+1;2j-1)\cdots\bar{T}(s;2j-1)\Omega(s;2j-1)T(s;2j-1)\cdots T(s-l+1;2j-1)\Gamma(s-l;2j-1)\\ [\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-l;2j-1)]^{n}\\ =\bar{\Gamma}(s-l;2j-1)\bar{T}(s-l+1;2j-1)\cdots\bar{T}(s;2j-1)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j-1)]^{n}T(s;2j-1)\cdots T(s-l+1;2j-1)\Gamma(s-l;2j-1)\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-l;2j-1)}\\ =\bar{\Gamma}(s-l;2j-1)\bar{T}(s-l+1;2j-1)\cdots\bar{T}(s;2j-1)e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;2j-1)}T(s;2j-1)\cdots T(s-l+1;2j-1)\Gamma(s-l;2j-1)\end{cases}$$

第四十三章　反对称完美常数不变张量

自我评述：本章类比前面章节全对称常数不变张量，建立了类似的反对称常数不变张量，得到很多类似的性质。并在最后给出它的一个具体应用，即反对称电磁张量的高旋量描述，从而验证了反对称常数不变张量法的正确性。

1 反对称指标排序

1.1 $w+1$阶反对称指标正向排序规律的严格证明(从0排起)

定义1.1.1. $\lambda_i = \{0,1,2,\cdot\cdot,w\}, 1 \le i \le 2s; \lambda_{2s+1} := -1$

定理1.1.1. $\pi(\lambda_{2s} \le \lambda_{2s-1} \cdot\cdot \le \lambda_1; w) = \sum\limits_{l=0}^{2s-1}(C_{w-\lambda_{l+2}}^{l+1} - C_{w+1-\lambda_{l+1}}^{l+1})$

证明: $\pi(\lambda_{2s} \le \lambda_{2s-1} \cdot\cdot \le \lambda_1; w) = \pi(\lambda_{2s-1} \cdot\cdot \lambda_1 - (\lambda_{2s}+1) \cdot\cdot (\lambda_{2s}+1); w - \lambda_{2s} - 1) + \sum\limits_{k=0}^{\lambda_{2s}-1} C_{w-k}^{2s-1}$

$= \pi(\lambda_{2s-2} \cdot\cdot \lambda_1 - (\lambda_{2s-1}+1) \cdot\cdot (\lambda_{2s-1}+1); w - \lambda_{2s-1} - 1) + \sum\limits_{k=0}^{\lambda_{2s}-1} C_{w-k}^{2s-1} + \sum\limits_{k=0}^{\lambda_{2s-1}-\lambda_{2s}-2} C_{w-\lambda_{2s}-1-k}^{2s-2}$

$= \pi(\lambda_1 - (\lambda_2+1); w - \lambda_2 - 1) + \sum\limits_{k=0}^{\lambda_{2s}-1} C_{w-k}^{2s-1} + \sum\limits_{k=0}^{\lambda_{2s-1}-\lambda_{2s}-2} C_{w-\lambda_{2s}-1-k}^{2s-2} \cdot\cdot + \sum\limits_{k=0}^{\lambda_2-\lambda_3-2} C_{w-\lambda_3-1-k}^{1}$

$= \sum\limits_{k=0}^{\lambda_{2s}-1} C_{w-k}^{2s-1} + \sum\limits_{k=0}^{\lambda_{2s-1}-\lambda_{2s}-2} C_{w-\lambda_{2s}-1-k}^{2s-2} \cdot\cdot + \sum\limits_{k=0}^{\lambda_2-\lambda_3-2} C_{w-\lambda_3-1-k}^{1} + \lambda_1 - \lambda_2 - 1$

$= \sum\limits_{l=1}^{2s-1} \sum\limits_{k=0}^{\lambda_{l+1}-\lambda_{l+2}-2} C_{w-\lambda_{l+2}-1-k}^{l} + (\lambda_1 - \lambda_2 - 1); \lambda_{2s+1} := -1$

$= \sum\limits_{l=1}^{2s-1} (\sum\limits_{k=0}^{\lambda_{l+1}-\lambda_{l+2}-1} C_{w-\lambda_{l+2}-1-k}^{l} - C_{w-\lambda_{l+1}}^{l}) + (\lambda_1 - \lambda_2 - 1)$

$= \sum\limits_{l=0}^{2s-1} (\sum\limits_{k=0}^{\lambda_{l+1}-\lambda_{l+2}-1} C_{w-\lambda_{l+2}-1-k}^{l} - C_{w-\lambda_{l+1}}^{l})$

$= \sum\limits_{l=0}^{2s-1} (C_{w-\lambda_{l+2}}^{l+1} - C_{w+1-\lambda_{l+1}}^{l+1})$ □

证明: $\pi[(w-2s+1) \le (w-2s+2) \cdot\cdot \le w; w]$

$= \sum\limits_{l=0}^{2s-1} (C_{w-\lambda_{l+2}}^{l+1} - C_{w+1-\lambda_{l+1}}^{l+1})$

$= (C_{w-\lambda_{2s+1}}^{2s} - C_{w+1-\lambda_{2s}}^{2s}) + \sum\limits_{l=0}^{2s-2} (C_{w-(w-l-1)}^{l+1} - C_{w+1-(w-l)}^{l+1})$

$= C_{w-\lambda_{2s+1}}^{2s} - C_{w+1-\lambda_{2s}}^{2s}$

$= C_{w+1}^{2s} - C_{w+1-(w-2s+1)}^{2s}$

$= C_{w+1}^{2s} - 1$ □

1.1.1 四阶反对称指标正向排序规律的验证

性质1.1.1. $0:0 \to 1:1 \to 2:2 \to 3:3$

性质1.1.2. $0:01 \to 1:02 \to 2:03 \to 3:12 \to 4:13 \to 5:23$

性质1.1.3. $0:012 \to 1:013 \to 2:023 \to 3:123$

性质1.1.4. $0:0123$

1.1.2 五阶反对称指标正向排序规律的验证

性质1.1.5. $0:0 \to 1:1 \to 2:2 \to 3:3 \to 4:4 \to$

性质1.1.6. $0:01 \to 1:02 \to 2:03 \to 3:04 \to 4:12 \to 5:13 \to 6:14 \to 7:23 \to 8:24 \to 9:34$

性质1.1.7. $0:012 \to 1:013 \to 2:014 \to 3:023 \to 4:024 \to 5:034 \to 6:123 \to 7:124 \to 8:134 \to 9:234$

性质1.1.8. $0:0123 \to 1:0124 \to 2:0134 \to 3:0234 \to 4:1234$

性质1.1.9. $0:01234$

2 完美常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s;w),\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;w)$

2.1 常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s;w),\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;w)$的引入

定义2.1.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)=\frac{1}{(2s)!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{[A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot]}_{2s}}(s;w)$

$$\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{0_\varsigma}_{l_0}\underbrace{1_\varsigma}_{l_1}\cdot\cdot\underbrace{w_\varsigma}_{l_w}}(s;w)=\sqrt{\frac{l_0!l_1!\cdot\cdot l_w!}{(2s)!}}\delta\{k_\varsigma,\sum_{l=0}^{2s-1}(C^{l+1}_{w-\lambda_{l+2}}-C^{l+1}_{w+1-\lambda_{l+1}})\},l_0+\cdot\cdot+l_w=2s,l_j=0|1$$

定义2.1.2. $\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{(2s)!}\Gamma^{\overbrace{[A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot]}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)$

$$\Gamma^{\overbrace{0_\varsigma}^{l_0}\overbrace{1_\varsigma}^{l_1}\cdot\cdot\overbrace{w_\varsigma}^{l_w}}_{k_\varsigma}(s;w)=\sqrt{\frac{l_0!l_1!\cdot\cdot l_w!}{(2s)!}}\delta\{k_\varsigma,\sum_{l=0}^{2s-1}(C^{l+1}_{w-\lambda_{l+2}}-C^{l+1}_{w+1-\lambda_{l+1}})\},l_0+\cdot\cdot+l_w=2s,l_j=0|1$$

推论2.1.1. $[A_\varsigma]=w+1,[k_\varsigma(s)]=C^{2s}_{w+1},Max(C^{2s}_{w+1})=C^{[(w+1)/2]}_{w+1}$

2.2 定义的解读

上述定义本质上是对所有$\underbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}_{l_0}\underbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}_{l_1}\cdot\cdot\underbrace{w_\varsigma\cdot\cdot w_\varsigma}_{l_w}$先进行排序编号。然后对每一个$\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}$赋值，即先排成$\underbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}_{l_0}\underbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}_{l_1}\cdot\cdot\underbrace{w_\varsigma\cdot\cdot w_\varsigma}_{l_w}$的形式，并与之前所有编号进行对比，如果与编号不一致的为零；与编号一致的不为零，并归一化，归一化系数是$\underbrace{0_\varsigma\cdot\cdot0_\varsigma}_{l_0}\underbrace{1_\varsigma\cdot\cdot1_\varsigma}_{l_1}\cdot\cdot\underbrace{w_\varsigma\cdot\cdot w_\varsigma}_{l_w}$全反对称化后所有种类数的倒数开方。以上常数不变张量只与旋量全反对称代数性质相关，与旋量变换性质无直接相关，是全反对称性张量内在固有的代数性质，与A_ς指标阶数直接本质相关。

2.3 常数矩阵$\Gamma(s;w),\bar\Gamma(s;w)$的引入

定义2.3.1. $\Gamma(s;w)\succ\Gamma_{\underbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma\otimes\cdot\cdot}_{2s}}{}^{k_\varsigma}(s;w),\bar\Gamma(s;w)\succ\Gamma_{k_\varsigma}{}^{\overbrace{A_\varsigma\otimes B_\varsigma\otimes C_\varsigma\otimes\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\simeq\Gamma^T(s;w)$

推论2.3.1. $[\Gamma(s;w)]=(w+1)^{2s}\times C^{2s}_{w+1},[\bar\Gamma(s;w)]=C^{2s}_{w+1}\times(w+1)^{2s}$

2.4 常数不变张量$\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}(s;w),\Gamma^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{k_\varsigma}(s;w)$ 的基本性质

相等性：

性质2.4.1. $\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\simeq\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\simeq\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\simeq\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;w)$

性质2.4.2. $[\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)]^*\simeq\Gamma^{k'_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w),[\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)]^*\simeq\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;w)$

推论2.4.1. $\Gamma(s;w)=\Gamma^*(s;w),\bar\Gamma(s;w)=\bar\Gamma^*(s;w),\bar\Gamma(s;w)=\Gamma^+(s;w),\Gamma(s;w)=\bar\Gamma^+(s;w)$

正交性：

性质2.4.3. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;w)=\delta^{k_\varsigma}{}_{l_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar\Gamma(s;w)\Gamma(s;w)=I$

性质2.4.4. $\Gamma^{k_\varsigma}_{A_{1\varsigma}A_{2\varsigma}\cdot\cdot A_{2s\varsigma}}(s;w)\Gamma^{B_{1\varsigma}B_{2\varsigma}\cdot\cdot B_{2s\varsigma}}_{k_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{(2s)!}\delta^{[B_{1\varsigma}}_{A_{1\varsigma}}\delta^{B_{2\varsigma}}_{A_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{B_{2s\varsigma}]}_{A_{2s\varsigma}}=\frac{1}{(2s)!}\delta^{B_{1\varsigma}}_{[A_{1\varsigma}}\delta^{B_{2\varsigma}}_{A_{2\varsigma}}\cdot\cdot\delta^{B_{2s\varsigma}}_{A_{2s\varsigma}]}$

其它性质：

性质2.4.5. $\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma}(\frac{1}{2};w)=\delta^{k_\varsigma}_{A_\varsigma},\Gamma^{A_\varsigma}_{k_\varsigma}(\frac{1}{2};w)=\delta^{A_\varsigma}_{k_\varsigma};\Gamma(0;w)=1,\bar{\Gamma}(0;w)=1$

2.5 度规常数不变张量$\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$的引入及其性质(存在$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}$为前提条件)

定义2.5.1. $\varepsilon(\frac{1}{2};w)\varepsilon^{+}(\frac{1}{2};w)=\varepsilon^{+}(\frac{1}{2};w)\varepsilon(\frac{1}{2};w)=1;\varepsilon(\frac{1}{2};w)=\varepsilon^{*}(\frac{1}{2};w)$

度规定义：

定义2.5.2.
$$\begin{cases}\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;w):=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;w)\\ \varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;w):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon^{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\end{cases}$$

性质2.5.1.
$$\begin{cases}\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;w)\text{关于}ABC...\text{全反对称}\\ \overbrace{\varepsilon^{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon^{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\text{关于}ABC...\text{全反对称}\end{cases}$$

推论2.5.1. $\varepsilon(s;w):=\bar{\Gamma}(s;w)\underbrace{\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(\frac{1}{2};w)}_{2s}\Gamma(s;w)$

推论2.5.2. $\varepsilon(s;w)\varepsilon^{+}(s;w)=\varepsilon^{+}(s;w)\varepsilon(s;w)=1;\varepsilon(s;w)=\varepsilon^{*}(s;w)$

升降指标：

性质2.5.2.
$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)=\varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;w)\\ \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)=\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon^{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\end{cases}$$

推论2.5.3. $\Gamma(s;w)\varepsilon(s;w)=\underbrace{\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(\frac{1}{2};w)}_{2s}\Gamma(s;w),\varepsilon(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\bar{\Gamma}(s;w)\underbrace{\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(\frac{1}{2};w)}_{2s}$

证明: $\varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;w)$

$$=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma E'_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma F'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma G'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E'_\varsigma F'_\varsigma G'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;w)$$

$$=\frac{1}{(2s)!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma E'_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma F'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma G'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\delta^{E_\varsigma}_{[E'_\varsigma}\delta^{F_\varsigma}_{F'_\varsigma}\delta^{G_\varsigma}_{G'_\varsigma}\cdot\cdot]\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}$$

$$=\frac{1}{(2s)!}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma[E_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma G_\varsigma]}\cdot\cdot}^{2s}\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}$$

$$=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma}\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma}\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}$$

$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdots$$

$$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w) \qquad \square$$

Penrose标准升降规则：

性质2.5.3.

$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w) = (-1)^{2s}[\varsigma^{2s}\varepsilon^{k_\varsigma l_\varsigma}(s;w)]\underbrace{(-\varsigma\varepsilon_{A_\varsigma E_\varsigma})(-\varsigma\varepsilon_{B_\varsigma F_\varsigma})(-\varsigma\varepsilon_{C_\varsigma G_\varsigma})\cdots}_{2s}\Gamma^{\overbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdots}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;w)\\ \Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w) = (-1)^{2s}[(-\varsigma)^{2s}\varepsilon_{k_\varsigma l_\varsigma}(s;w)]\overbrace{(\varsigma\varepsilon^{A_\varsigma E_\varsigma})(\varsigma\varepsilon^{B_\varsigma F_\varsigma})(\varsigma\varepsilon^{C_\varsigma G_\varsigma})\cdots}^{2s}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{E_\varsigma F_\varsigma G_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\end{cases}$$

2.6 常数不变张量$\Omega^{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}(s;w)$,$\Omega(s;w)$的引入及其基本性质

定义2.6.1.

$$\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w) := \overbrace{\underbrace{\sigma_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s} + \underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\sigma_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s} + \underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\sigma_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\cdots}_{2s} + \cdots}^{2s}$$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

定义2.6.2. $\Omega(s;w) := \sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}} + I_{w+1}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}} + \cdots + I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)$

定义2.6.3. $S(s;w) := \overbrace{S_{w+1}\otimes S_{w+1}\otimes S_{w+1}\otimes\cdots\otimes S_{w+1}}^{2s}, S_{w+1}S^{+}_{w+1} = S^{+}_{w+1}S_{w+1} = I_{w+1}$

推论2.6.1. $\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s+1}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w) := \sigma_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\underbrace{\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s-1} + \delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Omega^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

推论2.6.2. $\Omega(s;w) = \sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}} + I_{w+1}\otimes\Omega(s-\frac{1}{2};w)$

推论2.6.3. $\Omega(s;w) = \Omega(s-s';w)\otimes I_{(w+1)^{2s'}} + I_{(w+1)^{2(s-s')}}\otimes\Omega(s';w)$

2.7 常数不变张量$\Omega_{ab}{}^{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}(s;w)$,$\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)$的引入及其基本性质

定义2.7.1.

$$\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w) := \overbrace{\underbrace{S_{ab A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s} + \underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}S_{ab B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s} + \underbrace{\delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}S_{ab C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\cdots}_{2s} + \cdots}^{2s}$$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

定义2.7.2. $\Omega_{ab}(s,\varsigma;w) := S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}} + I_{w+1}\otimes S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}} + \cdots + I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)$

推论2.7.1. $\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s+1}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w) := S_{ab A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\underbrace{\delta_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\delta_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\cdots}_{2s-1} + \delta_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Omega_{ab}{}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$[\Updownarrow]$ $[\Updownarrow]$

推论2.7.2. $\Omega_{ab}(s,\varsigma;w) = S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}} + I_{w+1}\otimes\Omega_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)$

推论2.7.3. $\Omega_{ab}(s,\varsigma;w) = \Omega_{ab}(s-s',\varsigma;w)\otimes I_{(w+1)^{2s'}} + I_{(w+1)^{2(s-s')}}\otimes\Omega_{ab}(s',\varsigma;w)$

2.8 自旋常数不变张量$\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w),\sigma(s;w)$的引入

定义2.8.1. $\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{Z_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{Z_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w):=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)[\Leftrightarrow]\sigma(s;w):=\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)$

2.9 自旋常数不变张量$S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w),S_{ab}(s,\varsigma;w)$的引入

定义2.9.1.

$\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{Z_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{Z_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w):=\frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)[\Leftrightarrow]S_{ab}(s,\varsigma;w):=\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)$

2.10 常数矩阵$\Omega(s;w)$的两个重要引理

引理2.10.1. $\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\Omega(s;w)\Gamma(s;w)$

证明: $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A''_\varsigma B''_\varsigma C''_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A''_\varsigma B''_\varsigma C''_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)$

$\Leftrightarrow\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\Omega(s;w)\Gamma(s;w)$ □

引理2.10.2. $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)$

证明: $\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A''_\varsigma B''_\varsigma C''_\varsigma\cdots}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;w)=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Omega^{\overbrace{A''_\varsigma B''_\varsigma C''_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)$

$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)$ □

2.11 常数矩阵$\Omega_{ab}(s;w)$的两个重要引理

引理2.11.1. $\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s;w)=\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s;w)$

证明: $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A''_\varsigma B''_\varsigma C''_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A''_\varsigma B''_\varsigma C''_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)$

$\Leftrightarrow\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s;w)=\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s;w)$ □

引理2.11.2. $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s;w)$

证明: $\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A''_\varsigma B''_\varsigma C''_\varsigma\cdots}^{2s}}_{l_\varsigma}(s;w)=\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A''_\varsigma B''_\varsigma C''_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)$

$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s;w)$ □

2.12 关于常数矩阵$\bar{\Gamma}(s;w),\Omega(s;w),\sigma(s;w),\Gamma(s;w)$的置换性质及其推论

定理2.12.1. $\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)\sigma(s;w)[\Leftrightarrow]\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$

证明: $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\sigma(s;w)$

$\Leftrightarrow\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)\sigma(s;w)$

$\Leftrightarrow\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)\sigma(s;w)$

$\Leftrightarrow\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$ □

定理2.12.2. $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)=\sigma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)[\Leftrightarrow]\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Omega_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)=\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)$

证明: $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\sigma(s;w)$
$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\sigma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)$
$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)=\sigma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)$
$\Leftrightarrow\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Omega_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)=\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)$ □

推论2.12.1. $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\sigma(s;w)\Leftrightarrow\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)\sigma(s;w)\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)=\sigma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)$

推论2.12.2. $\Omega^2(s;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)\sigma^2(s;w),\bar{\Gamma}(s;w)\Omega^2(s;w)=\sigma^2(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)$

证明: $\Omega^2(s;w)\Gamma(s;w)$
$=\Omega(s;w)\cdot\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\Omega(s;w)\cdot\Gamma(s;w)\sigma(s;w)$
$=\Omega(s;w)\Gamma(s;w)\cdot\sigma(s;w)=\Gamma(s;w)\sigma(s;w)\cdot\sigma(s;w)$
$=\Gamma(s;w)\sigma^2(s;w)$ □

证明: $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega^2(s;w)$
$=\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\cdot\Omega(s;w)=\sigma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\cdot\Omega(s;w)$
$=\sigma(s;w)\cdot\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)=\sigma(s;w)\cdot\sigma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)$
$=\sigma^2(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)$ □

推论2.12.3. $\Omega^2(s)\Gamma(s)=s(s+1)\Gamma(s),\bar{\Gamma}(s)\Omega^2(s)=\bar{\Gamma}(s)s(s+1)$

2.13 关于常数矩阵$\bar{\Gamma}(s;w),\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),S_{ab}(s,\varsigma;w),\Gamma(s;w)$的置换性质及其推论

定理2.13.1. $\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$[\Leftrightarrow]\Omega_{ab\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$

证明: $\bar{\Gamma}(s,\varsigma;w)\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow\Omega_{ab\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$ □

定理2.13.2. $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{\Gamma}(s;w)$
$[\Leftrightarrow]\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Omega_{ab\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)=S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)$

证明: $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{\Gamma}(s;w)$
$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{\Gamma}(s;w)$
$\Leftrightarrow\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Omega_{ab\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)=S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)$ □

推论2.13.1. $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow\Omega_{ab}(s;w)\Gamma(s,\varsigma;w)=\Gamma(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{\Gamma}(s;w)$

2.14 关于常数矩阵$\Omega(s;w),\sigma(s;w)$的重要推论及洛伦兹群表示

推论2.14.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{(2s-1)!}\sigma(\frac{1}{2};w)_{(A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)$

证明: $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)=\Omega_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)$

$=\sigma(\frac{1}{2};w)_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)+\sigma(\frac{1}{2};w)_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B'_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)+\sigma(\frac{1}{2};w)_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)+\cdot\cdot$

$=\sigma(\frac{1}{2};w)_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+\sigma(\frac{1}{2};w)_{B_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+\sigma(\frac{1}{2};w)_{C_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+\cdot\cdot$

$=\frac{1}{(2s-1)!}\sigma(\frac{1}{2};w)_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{(B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+\frac{1}{(2s-1)!}\sigma(\frac{1}{2};w)_{B_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{(A_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+\frac{1}{(2s-1)!}\sigma(\frac{1}{2};w)_{C_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{(A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)\cdot\cdot$

$\Leftrightarrow\frac{1}{(2s-1)!}\sigma(\frac{1}{2};w)_{(A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)$ □

推论2.14.2. $\sigma(\frac{1}{2};w)\times\sigma(\frac{1}{2};w)=i\sigma(\frac{1}{2};w)[\Rightarrow]\Omega(s;w)\times\Omega(s;w)=i\Omega(s;w)[\Rightarrow]\sigma(s;w)\times\sigma(s;w)=i\sigma(s;w)$

证明: $\sigma(\frac{1}{2};w)\times\sigma(\frac{1}{2};w)=i\sigma(\frac{1}{2};w)$

$\Rightarrow\Omega(s;w)\times\Omega(s;w)$

$=[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}+\cdot\cdot+I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)]$

$\times[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}+\cdot\cdot+I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)]$

$=[\sigma(\frac{1}{2};w)\times\sigma(\frac{1}{2};w)]\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes[\sigma(\frac{1}{2};w)\times\sigma(\frac{1}{2};w)]\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}+\cdot\cdot+I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes[\sigma(\frac{1}{2};w)\times\sigma(\frac{1}{2};w)]$

$=i\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+iI_{w+1}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}+\cdot\cdot+iI_{(w+1)^{2s-1}}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)$

$=i\Omega(s;w)$ □

证明: $\Omega(s;w)\times\Omega(s;w)=i\Omega(s;w)$

$\Rightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\times\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=i\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)$

$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\times\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=i\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)$

$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)\times\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=i\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)$

$\Leftrightarrow\sigma(s;w)\times\sigma(s;w)=i\sigma(s;w)$ □

2.15 关于常数矩阵$\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),S_{ab}(s,\varsigma;w)$的重要推论及洛伦兹群表示

推论2.15.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{(2s-1)!}S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{(A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)$

证明: $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)=\Omega_{ab\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)$

$=S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)+S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{B_\varsigma}{}^{B'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B'_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)+S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{C_\varsigma}{}^{C'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)+\cdot\cdot$

$=S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{B_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{C_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma\cdot\cdot A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+\cdot\cdot$

$=\frac{1}{(2s-1)!}S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{(B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+\frac{1}{(2s-1)!}S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{B_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{(A_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)+\cdot\cdot$

$\Leftrightarrow\frac{1}{(2s-1)!}S_{ab}(\frac{1}{2};w)_{(A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot)A'_\varsigma}_{2s}}(s;w)$ □

推论2.15.2. $i[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w),S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)]=\delta_{ad}S_{bc}(\frac{1}{2},\varsigma;w)-\delta_{ac}S_{bd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)+\delta_{bc}S_{ad}(\frac{1}{2},\varsigma;w)-\delta_{bd}S_{ac}(\frac{1}{2},\varsigma;w)$

$[\Rightarrow]i[\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),\Omega_{cd}(s,\varsigma;w)]=\delta_{ad}\Omega_{bc}(s,\varsigma;w)-\delta_{ac}\Omega_{bd}(s,\varsigma;w)+\delta_{bc}\Omega_{ad}(s,\varsigma;w)-\delta_{bd}\Omega_{ac}(s,\varsigma;w)$

$[\Rightarrow]i[S_{ab}(s,\varsigma;w),S_{cd}(s,\varsigma;w)]=\delta_{ad}S_{bc}(s,\varsigma;w)-\delta_{ac}S_{bd}(s,\varsigma;w)+\delta_{bc}S_{ad}(s,\varsigma;w)-\delta_{bd}S_{ac}(s,\varsigma;w)$

证明：$i[\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),\Omega_{cd}(s,\varsigma;w)]$
$=i[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}+\cdot\cdot+I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)$
$,S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}+\cdot\cdot+I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)]$
$=i\{[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w),S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)]\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w),S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)]\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}$
$+\cdot\cdot+I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w),S_{cd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)]\}$
$=[\delta_{ad}S_{bc}(\frac{1}{2},\varsigma;w)-\delta_{ac}S_{bd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)+\delta_{bc}S_{ad}(\frac{1}{2},\varsigma;w)-\delta_{bd}S_{ac}(\frac{1}{2},\varsigma;w)]\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}$
$+I_{w+1}\otimes[\delta_{ad}S_{bc}(\frac{1}{2},\varsigma;w)-\delta_{ac}S_{bd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)+\delta_{bc}S_{ad}(\frac{1}{2},\varsigma;w)-\delta_{bd}S_{ac}(\frac{1}{2},\varsigma;w)]\otimes I_{(w+1)^{2s-2}}$
$+\cdot\cdot+I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes[\delta_{ad}S_{bc}(\frac{1}{2},\varsigma;w)-\delta_{ac}S_{bd}(\frac{1}{2},\varsigma;w)+\delta_{bc}S_{ad}(\frac{1}{2},\varsigma;w)-\delta_{bd}S_{ac}(\frac{1}{2},\varsigma;w)]$
$=\delta_{ad}\Omega_{bc}(s,\varsigma;w)-\delta_{ac}\Omega_{bd}(s,\varsigma;w)+\delta_{bc}\Omega_{ad}(s,\varsigma;w)-\delta_{bd}\Omega_{ac}(s,\varsigma;w)$ □

证明：$i[\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),\Omega_{cd}(s,\varsigma;w)]=\delta_{ad}\Omega_{bc}(s,\varsigma;w)-\delta_{ac}\Omega_{bd}(s,\varsigma;w)+\delta_{bc}\Omega_{ad}(s,\varsigma;w)-\delta_{bd}\Omega_{ac}(s,\varsigma;w)$
$\Rightarrow\bar{\Gamma}(s;w)i[\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),\Omega_{cd}(s,\varsigma;w)]\Gamma(s;w)$
$=\bar{\Gamma}(s;w)[\delta_{ad}\Omega_{bc}(s,\varsigma;w)-\delta_{ac}\Omega_{bd}(s,\varsigma;w)+\delta_{bc}\Omega_{ad}(s,\varsigma;w)-\delta_{bd}\Omega_{ac}(s,\varsigma;w)]\Gamma(s;w)$
$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)i[\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Omega_{cd}(s,\varsigma;w)-\Omega_{cd}(s,\varsigma;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]\Gamma(s;w)$
$=\bar{\Gamma}(s;w)[\delta_{ad}\Omega_{bc}(s,\varsigma;w)-\delta_{ac}\Omega_{bd}(s,\varsigma;w)+\delta_{bc}\Omega_{ad}(s,\varsigma;w)-\delta_{bd}\Omega_{ac}(s,\varsigma;w)]\Gamma(s;w)$
$\Leftrightarrow\bar{\Gamma}(s;w)i[\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{cd}(s,\varsigma;w)-\Omega_{cd}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]\Gamma(s;w)$
$=\bar{\Gamma}(s;w)[\delta_{ad}\Omega_{bc}(s,\varsigma;w)-\delta_{ac}\Omega_{bd}(s,\varsigma;w)+\delta_{bc}\Omega_{ad}(s,\varsigma;w)-\delta_{bd}\Omega_{ac}(s,\varsigma;w)]\Gamma(s;w)$
$\Leftrightarrow i[\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{cd}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)-\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{cd}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)]$
$=\bar{\Gamma}(s;w)[\delta_{ad}\Omega_{bc}(s,\varsigma;w)-\delta_{ac}\Omega_{bd}(s,\varsigma;w)+\delta_{bc}\Omega_{ad}(s,\varsigma;w)-\delta_{bd}\Omega_{ac}(s,\varsigma;w)]\Gamma(s;w)$
$\Leftrightarrow i[S_{ab}(s,\varsigma;w),S_{cd}(s,\varsigma;w)]=\delta_{ad}S_{bc}(s,\varsigma;w)-\delta_{ac}S_{bd}(s,\varsigma;w)+\delta_{bc}S_{ad}(s,\varsigma;w)-\delta_{bd}S_{ac}(s,\varsigma;w)$ □

2.16 常数矩阵$\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),S_{ab}(s,\varsigma;w)$与$\Omega(s;w),\sigma(s;w)$之间关系的讨论

性质2.16.1. $S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma)=\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2})[\Rightarrow]\Omega_{ab}(s,\varsigma)=\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\Omega_{\alpha_\varsigma}(s)[\Rightarrow]S_{ab}(s,\varsigma)=\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s)$

第一种可能的关系(四维时空自旋型)：

猜想2.16.1. $S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)=\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2};w)[\Rightarrow]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)=\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\Omega_{\alpha_\varsigma}(s;w)[\Rightarrow]S_{ab}(s,\varsigma;w)=\sigma^{\alpha_\varsigma}_{\varsigma ab}\sigma_{\alpha_\varsigma}(s;w)$

第二种可能的关系(任意时空自旋型,四维时空自旋型是其特例。)：

猜想2.16.2. $S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)=\begin{bmatrix}-i[\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2};w),\sigma_{\beta_\varsigma}(\frac{1}{2};w)] & -\varsigma\sigma_{\alpha_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\\ \varsigma\sigma_{\beta_\varsigma}(\frac{1}{2};w) & 0\end{bmatrix}$

$[\Rightarrow]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)=\begin{bmatrix}-i[\Omega_{\alpha_\varsigma}(s;w),\Omega_{\beta_\varsigma}(s;w)] & -\varsigma\Omega_{\alpha_\varsigma}(s;w)\\ \varsigma\Omega_{\beta_\varsigma}(s;w) & 0\end{bmatrix}$

$[\Rightarrow]S_{ab}(s,\varsigma;w)=\begin{bmatrix}-i[\sigma_{\alpha_\varsigma}(s;w),\sigma_{\beta_\varsigma}(s;w)] & -\varsigma\sigma_{\alpha_\varsigma}(s;w)\\ \varsigma\sigma_{\beta_\varsigma}(s;w) & 0\end{bmatrix}$

第三种可能的关系(高维时空型**Dirac**型)：

猜想2.16.3. $S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)=-\frac{i}{4}[\gamma_a(\frac{1}{2},\varsigma;w),\gamma_b(\frac{1}{2},\varsigma;w)]$
$[\Rightarrow]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)=-\frac{i}{4}[\Omega_a(s,\varsigma;w),\Omega_b(s,\varsigma;w)][\Rightarrow]S_{ab}(s,\varsigma;w)=-\frac{i}{4}[\gamma_a(s,\varsigma;w),\gamma_b(s,\varsigma;w)]$

第四种可能的关系(无关联型)：相对独立。

2.17 推论：常数矩阵$\Gamma(s;w),\bar{\Gamma}(s;w)$的几个恒等式

性质2.17.1. $\begin{cases}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\Gamma(s;w)=\sigma(s;w),[\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w),\Omega(s;w)]=0\\ \Gamma(s;w)\sigma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\Omega(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega(s;w)\end{cases}$

性质2.17.2. $\begin{cases}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w),[\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w),\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]=0\\ \Gamma(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\end{cases}$

性质2.17.3. $\begin{cases}\bar{\Gamma}(s;w)[\vartheta\cdot\Omega(s;w)]^n\Gamma(s;w)=[\vartheta\cdot\sigma(s;w)]^n,[\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w),[\vartheta\cdot\Omega(s;w)]^n]=0\\ \Gamma(s;w)[\vartheta\cdot\sigma(s;w)]^n\bar{\Gamma}(s;w)=[\vartheta\cdot\Omega(s;w)]^n\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)[\vartheta\cdot\Omega(s;w)]^n\end{cases}$

性质2.17.4. $\begin{cases}\bar{\Gamma}(s;w)[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]^n\Gamma(s;w)=[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)]^n,[\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w),[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]^n]=0\\ \Gamma(s;w)[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)]^n\bar{\Gamma}(s;w)=[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]^n\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]^n\end{cases}$

推论2.17.1. $\begin{cases}\bar{\Gamma}(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)},[\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w),e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}]=0\\ \Gamma(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\bar{\Gamma}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)=\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\end{cases}$

2.18 矩阵$\Gamma(s;w),\bar{\Gamma}(s;w)$的常数不变张量性质

定理2.18.1. $\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)},\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)}$

证明: $\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)=\Gamma(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow 0=\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)-\Gamma(s;w)\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow \Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}$ □

定理2.18.2. $\bar{\Gamma}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\bar{\Gamma}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)},\bar{\Gamma}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)}\bar{\Gamma}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}$

证明: $\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{\Gamma}(s;w)$
$\Leftrightarrow 0=-\bar{\Gamma}(s;w)\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{\Gamma}(s;w)$
$\Leftrightarrow \bar{\Gamma}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\bar{\Gamma}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}$ □

定理2.18.3. $\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)}$
$\Leftrightarrow \Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^+(s;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^+(s;w)\Gamma(s;w)}$

证明: $\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)}$
$\Leftrightarrow S^+(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}S^+(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)}$
$\Leftrightarrow S^+(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}S^+(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)}$
$\Leftrightarrow \Gamma(s;w)=[S(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}S^+(s;w)]\Gamma(s;w)[\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)]e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)}[\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)]^+$
$\Leftrightarrow \Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^+(s;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)S^+(s;w)\Gamma(s;w)}$
$\Leftrightarrow \Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^+(s;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^+(s;w)\Gamma(s;w)}$
$\Leftrightarrow \Gamma(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^+(s;w)}\Gamma(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^+(s;w)\Gamma(s;w)}$ □

推论2.18.1.
$e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^+(s;w)\Gamma(s;w)}=[\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\bar{\Gamma}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\Gamma(s;w)}[\bar{\Gamma}(s;w)S(s;w)\Gamma(s;w)]^+$

定理2.18.4. $S(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}S(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^+(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)}$

证明: $\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)=\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w),\forall\varsigma=\pm1$
$\Leftrightarrow S(s;w)S^+(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)=\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w),\forall\vartheta^{ab},\varsigma=\pm1$
$\Leftrightarrow 0=-S(s;w)\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^+(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w),\forall\vartheta^{ab},\varsigma=\pm1$
$\Leftrightarrow S(s;w)=S(s;w)[1-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^+(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)]+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w),\forall\vartheta^{ab},\varsigma=\pm1$
$\Leftrightarrow S(s;w)=[1+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]S(s;w)[1-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^+(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)],\forall\vartheta^{ab},\varsigma=\pm1$
$\Leftrightarrow S(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}S(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^+(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)},\forall\vartheta^{ab},\varsigma=\pm1$ □

定理2.18.5. $S(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^+(s;w)}S(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}$

证明：$S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)=S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),\forall\varsigma=\pm1$

$\Leftrightarrow S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)S(s;w)=S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),\forall\vartheta^{ab},\varsigma=\pm1$

$\Leftrightarrow 0=\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)S(s;w)-S(s;w)\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),\forall\vartheta^{ab},\varsigma=\pm1$

$\Leftrightarrow S(s;w)=[1+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)]S(s;w)-S(s;w)\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w),\forall\vartheta^{ab},\varsigma=\pm1$

$\Leftrightarrow S(s;w)=[1+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)]S(s;w)[1-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)],\forall\vartheta^{ab},\varsigma=\pm1$

$\Leftrightarrow S(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)}S(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)},\forall\vartheta^{ab},\varsigma=\pm1$ □

推论2.18.2.

$$\begin{cases}S(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}S(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^{+}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)}\\ S(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)}S(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\\ S^{+}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}S^{+}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S^{+}(s;w)}\\ S^{+}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S^{+}(s;w)\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)S(s;w)}S^{+}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\end{cases}$$

2.19 常数矩阵$I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w),I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)$的置换性质

推论2.19.1. $\Omega(s;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]$

证明：$\Omega(s;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]$

$=\Omega(s;w)I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)$

$=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}]+I_{w+1}\otimes[\Gamma(s-\frac{1}{2};w)\sigma(s-\frac{1}{2};w)]$

$=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]$ □

推论2.19.2. $[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega(s;w)=[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]$

证明：$[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega(s;w)$

$=[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega(s;w)$

$=[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]+I_{w+1}\otimes[\sigma(s-\frac{1}{2};w)\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]$

$=[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]$ □

2.20 推论：常数矩阵$\Gamma(s-\frac{1}{2};w),\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)$的几个恒等式

性质2.20.1.

$$\begin{cases}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega(s;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]\\ [I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\\ =\Omega(s;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega(s;w)\\ [[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)],\Omega(s;w)]=0\end{cases}$$

性质2.20.2.

$$\begin{cases}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\\ [I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\\ =\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)\\ [[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)],\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]=0\end{cases}$$

性质2.20.3.

$$\begin{cases}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)][\vartheta\cdot\Omega(s;w)]^{n}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=\{\vartheta\cdot[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]\}^{n}\\ [I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]\{\vartheta\cdot[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]\}^{n}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\\ =[\vartheta\cdot\Omega(s;w)]^{n}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)][\vartheta\cdot\Omega(s;w)]^{n}\\ [[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)],[\vartheta\cdot\Omega(s;w)]^{n}]=0\end{cases}$$

性质2.20.4.

$$\begin{cases}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)][\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]^n[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\}^n\\ [I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\}^n[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\\ =[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]^n[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)][\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]^n\\ [[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)],[\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)]^n]=0\end{cases}$$

推论2.20.1.

$$\begin{cases}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]}\\ [I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\\ =e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}\\ [[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)],e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}]=0\end{cases}$$

推论2.20.2.

$$\begin{cases}I_{(w+1)^{2s-1}}\Gamma(s-\frac{1}{2};w)=\Gamma(s-\frac{1}{2};w)I_{C_{w+1}^{2s-1}},\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)I_{(w+1)^{2s-1}}=I_{C_{w+1}^{2s-1}}\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)\\ [I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}\\ [\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}[I_{w+1}]\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}]\\ [I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)][\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{(w+1)^{2s-1}}]=[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\end{cases}$$

性质2.20.5. $(\sigma\otimes I_{(w+1)^{2s-1}},-i\varsigma)_a[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w)=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]Z_a(s,\varsigma;w)$

2.21 矩阵$I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w),I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)$的常数不变张量性质

定理2.21.1. $[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}$

证明: $\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]$
$\Leftrightarrow 0=\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]$
$-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]$
$\Leftrightarrow[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}$ □

定理2.21.2. $[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}$

证明: $[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)=[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]$
$\Leftrightarrow 0=-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)$
$+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]$
$\Leftrightarrow[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}\Omega_{ab}(s,\varsigma;w)}$ □

2.22 自洽性质验证

性质2.22.1. $\psi'=S\psi\Rightarrow\hat{\psi}'=\Gamma(s;w)\psi'=\Gamma(s;w)S\psi=\Gamma(s;w)S\bar{\Gamma}(s;w)\hat{\psi}$

性质2.22.2. $\hat{\psi}'=(S\otimes\cdot\cdot\otimes S)\hat{\psi}\Rightarrow\psi'=\bar{\Gamma}(s;w)\hat{\psi}'=\bar{\Gamma}(s;w)(S\otimes\cdot\cdot\otimes S)\hat{\psi}=\bar{\Gamma}(s;w)(S\otimes\cdot\cdot\otimes S)\Gamma(s;w)\psi$

性质2.22.3. $\psi'=S\psi,\hat{\psi}'=\Gamma(s;w)S\bar{\Gamma}(s;w)\hat{\psi},\hat{\psi}=\Gamma(s;w)\psi\Rightarrow\hat{\psi}'=\Gamma(s;w)\psi'$

3 完美常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w),N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$

3.1 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w),N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$的引入

定义3.1.1. $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w):=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w),N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w):=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

推论3.1.1. $N(s;w)=[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Gamma(s;w),\bar{N}(s;w)=\bar{\Gamma}(s;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]$

性质3.1.1. $\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)=N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w),\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)=N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

推论3.1.2. $\Gamma(s;w)=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w),\bar{\Gamma}(s;w)=\bar{N}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)],$

性质3.1.2. $\Gamma(s;w)=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Gamma(s;w)$

3.2 常数矩阵$N_{A_\varsigma}(s;w),N^{A_\varsigma}(s;w);\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w),\bar{N}^{A_\varsigma}(s;w);N(s;w),\bar{N}(s;w)$的引入

定义3.2.1.

$$\begin{cases}N_{A_\varsigma}(s;w)\prec N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w),N^{A_\varsigma}(s;w)\prec N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)|_{I_{C^{2s}_{w+1}}\times I_{C^{2s-1}_{w+1}}}\\ \bar{N}_{A_\varsigma}(s;w):=N^{+}_{A_\varsigma}(s;w)\succ N_{A_\varsigma l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;w),\bar{N}^{A_\varsigma}(s;w):=N^{+A_\varsigma}(s;w)\succ N^{A_\varsigma l_\varsigma}{}_{k_\varsigma}(s;w)|_{I_{C^{2s-1}_{w+1}}\times I_{C^{2s}_{w+1}}}\\ N(s;w)\prec N_{A_\varsigma\otimes l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;w)|_{(w+1)I_{C^{2s-1}_{w+1}}\times I_{C^{2s}_{w+1}}},\bar{N}(s;w)=N^{+}(s;w)\prec N_{k_\varsigma}{}^{A_\varsigma\otimes l_\varsigma}(s;w)|_{I_{C^{2s}_{w+1}}\times(w+1)I_{C^{2s-1}_{w+1}}}\end{cases}$$

推论3.2.1. $[N_{A_\varsigma}(s;w)]=C^{2s}_{w+1}\times C^{2s-1}_{w+1},[\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)]=C^{2s-1}_{w+1}\times C^{2s}_{w+1}$

推论3.2.2. $[N(s;w)]=(w+1)C^{2s-1}_{w+1}\times C^{2s}_{w+1},[\bar{N}(s;w)]=C^{2s}_{w+1}\times(w+1)C^{2s-1}_{w+1}$

3.3 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$的基本性质

相等性：

性质3.3.1.

$$\begin{cases}N^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma l'_\varsigma}(s;w)\simeq N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\simeq N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\simeq N^{A'_\varsigma l'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;w)\\ [N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)]^*\simeq N^{k'_\varsigma}_{A'_\varsigma l'_\varsigma}(s;w),[N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)]^*\simeq N^{A'_\varsigma l'_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;w)\end{cases}$$

推论3.3.1.

$$\begin{cases}N_{A_\varsigma}(s;w)\simeq N^{A_\varsigma}(s;w)\simeq N_{A'_\varsigma}(s;w)\simeq N^{A'_\varsigma}(s;w);\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)\simeq\bar{N}^{A_\varsigma}(s;w)\simeq\bar{N}_{A'_\varsigma}(s;w)\simeq\bar{N}^{A'_\varsigma}(s;w)\\ N_{A_\varsigma}(s;w)=N^*_{A_\varsigma}(s;w),\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)=\bar{N}^*_{A_\varsigma}(s;w);N(s;w)=N^*(s;w),\bar{N}(s;w)=\bar{N}^*(s;w)\end{cases}$$

3.4 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$的正交性质

正交性：

引理3.4.1. $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N^{A'_\varsigma l_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;w)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;w)$

证明：$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N^{A'_\varsigma l_\varsigma}_{k'_\varsigma}(s;w)$

$$=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$=\tfrac{1}{(2s-1)!}\delta^{B_\varsigma}_{[B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdots]\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;w)$$

$$=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;w)\overbrace{\delta^{B_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdots}^{2s-1}$$

$$=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k'_\varsigma}(s;w)$$ □

定理3.4.1.

$$\begin{cases} N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)=\delta^{k_\varsigma}_{m_\varsigma}[\Leftrightarrow]N^{A_\varsigma}(s;w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)=I_{C^{2s}_{w+1}}[\Leftrightarrow]\bar{N}(s;w)N(s;w)=I_{C^{2s}_{w+1}} \\ N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N^{A_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)=\frac{w+(2s)\%2}{2s}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)N^{A_\varsigma}(s;w)=\frac{w+(2s)\%2}{2s}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma} \\ N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N^{B_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{2s}[C^{2s-1}_{w+1}-\frac{(2s-1)\%2}{2s-1}C^{2s-2}_{w+1}]\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}[\Leftrightarrow]tr[\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)N^{B_\varsigma}(s;w)]=\frac{1}{2s}[C^{2s-1}_{w+1}-\frac{(2s-1)\%2}{2s-1}C^{2s-2}_{w+1}]\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma} \end{cases}$$

证明： $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)$

$$=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{m_\varsigma}(s;w)$$

$$=\delta^{k_\varsigma}_{m_\varsigma}$$ □

证明： $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N^{A_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$

$$=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\delta^{A_\varsigma}_{A'_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$=\frac{1}{(2s)!}\overbrace{\delta^{[A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdots]}^{2s}\delta^{A_\varsigma}_{A'_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$=\frac{1}{(2s)!}\delta^{[A_\varsigma}_{A_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots]}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$=\frac{1}{(2s)!}[\delta^{A_\varsigma}_{A_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{[B_\varsigma C_\varsigma\cdots]}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)-(2s-1)\%2\Gamma^{\overbrace{[A_\varsigma C_\varsigma\cdots]}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)]$$

$$=\frac{1}{(2s)!}[(2s-1)!\delta^{A_\varsigma}_{A_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)-(2s-1)\%2(2s-1)!\Gamma^{\overbrace{A_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)]$$

$$=\frac{1}{(2s)!}[(2s-1)!\delta^{A_\varsigma}_{A_\varsigma}-(2s-1)\%2(2s-1)!]\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}$$

$$=\frac{w+1-(2s-1)\%2}{2s}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}=\frac{w+(2s)\%2}{2s}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma}$$ □

证明： $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N^{A'_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$

$$=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)$$

$$=\frac{1}{(2s)!}\overbrace{\delta^{[A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdots]}^{2s}$$

$$=\frac{1}{(2s)!}[\overbrace{\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{[B_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdots]}^{2s}-\overbrace{\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{[A'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdots]}^{2s}+\overbrace{\delta^{C_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{[B_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdots]}^{2s}-\cdots]$$

$$=\frac{1}{(2s)!}[\overbrace{\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{[B_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdots]}^{2s}-\overbrace{\delta^{[A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdots]}^{2s}+\overbrace{\delta^{[B_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\cdots]}^{2s}-\cdots]$$

$$=\frac{1}{(2s)!}[\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\overbrace{\delta^{[B_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdots]}^{2s-1}-(2s-1)\%2\overbrace{\delta^{[A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdots]}^{2s-1}]$$

$$=\frac{1}{(2s)!}[\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}(2s-1)!\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)-(2s-1)\%2\overbrace{\delta^{[A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdots]}^{2s-1}]$$

$$=\frac{1}{(2s)!}[\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}(2s-1)!\delta^{l_\varsigma}{}_{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)-(2s-1)\%2\overbrace{\delta^{[A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdots]}^{2s-1}]$$

$= \frac{1}{(2s)!}[\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}(2s-1)!C^{2s-1}_{w+1} - (2s-1)\%2\overbrace{\delta^{[A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot]}^{2s-1}]$

$= \delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\frac{C^{2s-1}_{w+1}}{2s} - \frac{(2s-1)\%2}{2s}\frac{1}{(2s-1)!}\overbrace{\delta^{[A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot]}^{2s-1}$

$= \delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\frac{C^{2s-1}_{w+1}}{2s} - \frac{(2s-1)\%2}{2s}[\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\frac{C^{2s-2}_{w+1}}{2s-1} - \frac{(2s-2)\%2}{2s-1}\frac{1}{(2s-2)!}\overbrace{\delta^{[A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{D_\varsigma}_{D_\varsigma}\cdot\cdot]}^{2s-2}]$

$= [\frac{C^{2s-1}_{w+1}}{2s} - \frac{(2s-1)\%2}{2s}\frac{C^{2s-2}_{w+1}}{2s-1}]\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}$

$= \frac{1}{2s}[C^{2s-1}_{w+1} - \frac{(2s-1)\%2}{2s-1}C^{2s-2}_{w+1}]\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}$ □

性质3.4.1. $\begin{cases} N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w) = \frac{1}{2s}[\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma} - (2s-1)\%2N^{m_\varsigma}_{A_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)] \\ \bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)N^{B_\varsigma}(s;w) = \frac{1}{2s}[\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}I_{C^{2s-1}_{w+1}} - (2s-1)\%2N^{B_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)] \end{cases}$

证明： $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N^{A'_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$

$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$= \frac{1}{(2s)!}\overbrace{\delta^{[A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot]}^{2s}\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$= \frac{1}{(2s)!}[\overbrace{\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{[B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot]}^{2s} - \overbrace{\delta^{B'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{[A'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot]}^{2s} + \overbrace{\delta^{C'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{[B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot]}^{2s} - \cdots]\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$= \frac{1}{(2s)!}[\overbrace{\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{[B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot]}^{2s} - \overbrace{\delta^{B'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{[B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot]}^{2s} + \overbrace{\delta^{C'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{[B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot]}^{2s} - \cdots]\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$= \frac{1}{2s}(\overbrace{\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s} - \overbrace{\delta^{B'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s} + \overbrace{\delta^{C'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s} - \cdots)\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$= \frac{1}{2s}[\overbrace{\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s} - (2s-1)\%2\overbrace{\delta^{B'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{A'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}]\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$= \frac{1}{2s}[\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w) - (2s-1)\%2\Gamma^{\overbrace{A'_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)]$

$= \frac{1}{2s}[\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{m_\varsigma}_{l_\varsigma} - (2s-1)\%2N^{m_\varsigma}_{A_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{A'_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]$ □

3.5 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w), N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$的升降指标(存在$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}$为前提条件)

升降指标：

性质3.5.1.

$\begin{cases} N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w) = \varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s;w)\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w) \\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w) = \varepsilon_{k_\varsigma m_\varsigma}(s;w)\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{m_\varsigma}_{B_\varsigma n_\varsigma}(s;w) \end{cases}$

证明： $\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s;w)\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)$

$= \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma E'_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma F'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma G'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{E'_\varsigma F'_\varsigma G'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}$

$$\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{B''_\varsigma C''_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\underbrace{\varepsilon_{B''_\varsigma F''_\varsigma}\varepsilon_{C''_\varsigma G''_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s-1}\Gamma_{n_\varsigma}^{\overbrace{F''_\varsigma G''_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)N_{m_\varsigma}^{B_\varsigma n_\varsigma}(s;w)$$

$$=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma E'_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma F'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma G'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{E'_\varsigma F'_\varsigma G'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{B''_\varsigma C''_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\underbrace{\varepsilon_{B''_\varsigma F''_\varsigma}\varepsilon_{C''_\varsigma G''_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s-1}\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma F''_\varsigma G''_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)$$

$$=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma E'_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma F'_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma G'_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\frac{1}{(2s)!}\underbrace{\delta^{B_\varsigma}_{[E'_\varsigma}\delta^{F''_\varsigma}_{F'_\varsigma}\delta^{G''_\varsigma}_{G'_\varsigma}\cdot\cdot]}_{2s}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\underbrace{\varepsilon_{B''_\varsigma F''_\varsigma}\varepsilon_{C''_\varsigma G''_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s-1}\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{B''_\varsigma C''_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\overbrace{\varepsilon^{A'_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{B'_\varsigma F''_\varsigma}\varepsilon^{C'_\varsigma G''_\varsigma}\cdot\cdot}^{2s}\underbrace{\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{B''_\varsigma F''_\varsigma}\varepsilon_{C''_\varsigma G''_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{B''_\varsigma C''_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\underbrace{\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\delta^{B'_\varsigma}_{B''_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C''_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s}\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{B''_\varsigma C''_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$=N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$$ □

推论3.5.1.

$$\begin{cases}N_{A_\varsigma}(s;w)\varepsilon(s-\frac{1}{2};w)=\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon(s;w)N^{B_\varsigma}(s;w),\varepsilon(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)=\bar{N}^{B_\varsigma}(s;w)\varepsilon_{B_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon(s;w)\\ N^{A_\varsigma}(s;w)\varepsilon(s-\frac{1}{2};w)=\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon(s;w)N_{B_\varsigma}(s;w),\varepsilon(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}^{A_\varsigma}(s;w)=\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)\varepsilon^{B_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon(s;w)\\ N(s;w)\varepsilon(s;w)=[\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\varepsilon(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w),\varepsilon(s;w)\bar{N}(s;w)=\bar{N}(s;w)[\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\varepsilon(s-\frac{1}{2};w)]\end{cases}$$

证明：$\Gamma(s;w)\varepsilon(s;w)=\underbrace{\varepsilon(\frac{1}{2};w)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(\frac{1}{2};w)}_{2s}\Gamma(s;w)$

$$\Leftrightarrow[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\tfrac{1}{2};w)]\Gamma(s;w)\varepsilon(s;w)=[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\tfrac{1}{2};w)]\underbrace{\varepsilon(\tfrac{1}{2};w)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(\tfrac{1}{2};w)}_{2s}\Gamma(s;w)$$

$$\Leftrightarrow N(s;w)\varepsilon(s;w)=[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\tfrac{1}{2};w)]\underbrace{\varepsilon(\tfrac{1}{2};w)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(\tfrac{1}{2};w)}_{2s}\Gamma(s;w)$$

$$\Leftrightarrow N(s;w)\varepsilon(s;w)=\{\varepsilon(\tfrac{1}{2};w)\otimes[\bar{\Gamma}(s-\tfrac{1}{2};w)\underbrace{\varepsilon(\tfrac{1}{2};w)\otimes\cdot\cdot\otimes\varepsilon(\tfrac{1}{2};w)]}_{2s-1}\}\Gamma(s;w)$$

$$\Leftrightarrow N(s;w)\varepsilon(s;w)=[\varepsilon(\tfrac{1}{2};w)\otimes\varepsilon(s-\tfrac{1}{2};w)][I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\tfrac{1}{2};w)]\Gamma(s;w)$$

$$\Leftrightarrow N(s;w)\varepsilon(s;w)=[\varepsilon(\tfrac{1}{2};w)\otimes\varepsilon(s-\tfrac{1}{2};w)]N(s;w)$$ □

Penrose标准升降规则：

性质3.5.2.

$$\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)=(-1)^{2s}[\varsigma^{2s}\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s;w)](-\varsigma\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma})[(-\varsigma)^{2s-1}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)=(-1)^{2s}[(-\varsigma)^{2s}\varepsilon_{k_\varsigma m_\varsigma}(s;w)](\varsigma\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma})[\varsigma^{2s-1}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]N^{m_\varsigma}_{B_\varsigma n_\varsigma}(s;w)\end{cases}$$

3.6 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w),N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$的自旋矩阵变换

性质3.6.1.

$$\begin{cases}N^{A_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)[\Leftrightarrow]N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\\ [\Leftrightarrow]\bar{N}(s;w)\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{w+1}}N(s;w)=\frac{1}{2s}\sigma(s;w)\end{cases}$$

证明：$N^{A_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{A'_\varsigma m_\varsigma}(s;w)$

$$=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}(s;w)\frac{1}{(2s-1)!}\delta^{B_\varsigma}_{[B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdot\cdot]\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)$$

$= \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)$

$= \frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$ □

性质3.6.2. $N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;w) = -\frac{(2s-1)\%2}{2s(2s-1)}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$[\Leftrightarrow]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{A_\varsigma}(s;w) = -\frac{(2s-1)\%2}{2s(2s-1)}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

证明: $N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{A'_\varsigma m_\varsigma}(s;w)$

$= \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$= \frac{1}{(2s)!}\delta^{A_\varsigma}_{[A'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdots{}_]\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$= \frac{1}{(2s)!}[\delta^{A_\varsigma}_{A'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{[B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdots{}_] - \delta^{A_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{[A'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdots{}_] + \delta^{A_\varsigma}_{C'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{[B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{A'_\varsigma}\cdots{}_] - \cdots]\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$= \frac{1}{(2s)!}[\delta^{A_\varsigma}_{A'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{[B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdots{}_] - (2s-1)\%2\delta^{A_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{[A'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdots{}_]]\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$= \frac{-(2s-1)\%2}{(2s)!}\delta^{A_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{[A'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdots{}_]\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$= \frac{-(2s-1)\%2}{(2s)!}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{[A'_\varsigma C'_\varsigma\cdots]}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$= \frac{-(2s-1)\%2}{2s}\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$= -\frac{(2s-1)\%2}{2s(2s-1)}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$ □

性质3.6.3.
$$\begin{cases}N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma m_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;w) = \frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)[\Leftrightarrow]N^{A_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w) = \frac{1}{2s}S_{ab}(s,\varsigma;w)\\ [\Leftrightarrow]\bar{N}(s;w)S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{w+1}}N(s;w) = \frac{1}{2s}S_{ab}(s,\varsigma;w)\end{cases}$$

证明: $N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma m_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{A'_\varsigma m_\varsigma}(s;w)$

$= \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\Gamma^{m_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$

$= \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)\frac{1}{(2s-1)!}\delta^{B_\varsigma}_{[B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdots{}_]S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)$

$= \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}^{2s}}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)$

$= \frac{1}{2s}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$ □

性质3.6.4. $N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s;w) = -\frac{(2s-1)\%2}{2s(2s-1)}S_{abm_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$[\Leftrightarrow]\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{A_\varsigma}(s;w) = -\frac{(2s-1)\%2}{2s(2s-1)}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)$

证明： $N_{k_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N_{A'_\varsigma m_\varsigma}^{k_\varsigma}(s;w)$

$$= \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdots}^{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}^{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \tfrac{1}{(2s)!}\delta^{A_\varsigma}_{[A'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdots_{]}S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}^{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \tfrac{1}{(2s)!}[\delta^{A_\varsigma}_{A'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{[B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdots_{]} - \delta^{A_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{[A'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdots_{]} + \delta^{A_\varsigma}_{C'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{[B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{A'_\varsigma}\cdots_{]} - \cdots]S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}^{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \tfrac{1}{(2s)!}[\delta^{A_\varsigma}_{A'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{[B'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdots_{]} - (2s-1)\%2\delta^{A_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{[A'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdots_{]}]S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}^{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \tfrac{-(2s-1)\%2}{(2s)!}\delta^{A_\varsigma}_{B'_\varsigma}\delta^{B_\varsigma}_{[A'_\varsigma}\delta^{C_\varsigma}_{C'_\varsigma}\cdots_{]}S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}^{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \tfrac{-(2s-1)\%2}{(2s)!}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{[A'_\varsigma C'_\varsigma \cdots]}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}^{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= \tfrac{-(2s-1)\%2}{2s}\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}^{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{B'_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)$$

$$= -\tfrac{(2s-1)\%2}{2s(2s-1)}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)$$ □

3.7 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w), N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$的置换性质

定理3.7.1.

$$\begin{cases}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w) + \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma m_\varsigma}(s;w) = N^{j_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;w)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w) + N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w) = \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{j_\varsigma}(s;w)N^{B_\varsigma l_\varsigma}_{j_\varsigma}(s;w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w) + \sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w) = \bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\\ N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w) + N^{B_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w) = \sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)N^{B_\varsigma}(s;w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\sigma(\tfrac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{w+1}} + I_{w+1}\otimes\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)]N(s;w) = N(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\\ \bar{N}(s;w)[\sigma(\tfrac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{w+1}} + I_{w+1}\otimes\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)] = \sigma^{\alpha_\varsigma}(s;w)\bar{N}(s;w)\end{cases}$$

证明： $\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}_{2s}}(s;w) = \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdots}_{2s}}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$

$$\Rightarrow \Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdots}^{2s-1}}\Omega^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}_{2s}}(s;w) = \Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdots}^{2s-1}}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdots}_{2s}}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdots}^{2s-1}}[\sigma_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\underbrace{\delta^{B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdots}_{2s-1} + \delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\Omega^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}^{2s-1}}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdots}_{2s-1}}(s-\tfrac{1}{2};w)]\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}_{2s}}(s;w) = \Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdots}^{2s-1}}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdots}_{2s}}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$$

$$\Leftrightarrow [\sigma_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)\Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}^{2s-1}} + \delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\sigma_{j_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)\Gamma_{n_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}^{2s}}(s;w)]\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma \cdots}_{2s}}(s;w) = \Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma \cdots}^{2s-1}}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma \cdots}_{2s}}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{A_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{A'_\varsigma j_\varsigma}(s;w) + \sigma_{j_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{A_\varsigma n_\varsigma}(s;w) = N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma j_\varsigma}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$$

$$\Leftrightarrow \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\tfrac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w) + \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\tfrac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma m_\varsigma}(s;w) = N^{j_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;w)$$ □

定理3.7.2.

$$\begin{cases}S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)+S_{abl_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma m_\varsigma}(s;w)=N^{j_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)S_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;w)\\ N^{A_\varsigma l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)S_{abm_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)=S_{abk_\varsigma}{}^{j_\varsigma}(s;w)N^{B_\varsigma l_\varsigma}_{j_\varsigma}(s;w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{N}_{B_\varsigma}(s;w)+S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)=\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)\\ N^{A_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+N^{B_\varsigma}(s;w)S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)N^{B_\varsigma}(s;w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{w+1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]N(s;w)=N(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)\\ \bar{N}(s;w)[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{w+1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]=S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{N}(s;w)\end{cases}$$

证明： $\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$

$\Rightarrow\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{j_\varsigma}\Omega_{ab}{}^{\overbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{j_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$

$\Leftrightarrow\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{j_\varsigma}[S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\underbrace{\delta^{B'_\varsigma}_{B_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C_\varsigma}\cdot\cdot}_{2s-1}+\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\Omega_{ab}{}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{\underbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)]\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{j_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$

$\Leftrightarrow[S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{j_\varsigma}+\delta^{A'_\varsigma}_{A_\varsigma}\sigma_{j_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}^{2s}}_{n_\varsigma}(s;w)]\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{A'_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)=\Gamma^{\overbrace{B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}^{2s-1}}_{j_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdot\cdot}_{2s}}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$

$\Leftrightarrow S_{abA_\varsigma}{}^{A'_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{A'_\varsigma j_\varsigma}(s;w)+S_{abj_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{A_\varsigma n_\varsigma}(s;w)=N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma j_\varsigma}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$

$\Leftrightarrow S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)+S_{abl_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma m_\varsigma}(s;w)=N^{j_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)S_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;w)$ □

3.8 常数不变张量$N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_\varsigma}(s;w),N^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_\varsigma}_{k_\varsigma}(s;w)$的引入及其性质

定义3.8.1. $\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;w):=\Gamma^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;w)\Gamma^{A_{\varsigma n+1}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}_{l_\varsigma}(s-\frac{n}{2};w)\\ N^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{k_\varsigma}(s;w):=\Gamma^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\Gamma^{l_\varsigma}_{A_{\varsigma n+1}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s-\frac{n}{2};w)\end{cases}$

相等性：

性质3.8.1. $N^{k'_\varsigma}_{A'_{\varsigma1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}(s;w)\simeq N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;w)\simeq N^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{k_\varsigma}(s;w)\simeq N^{A'_{\varsigma1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}_{k'_\varsigma}(s;w)$

性质3.8.2. $[N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;w)]^*\simeq N^{k'_\varsigma}_{A'_{\varsigma1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}(s;w),[N^{A_{\varsigma1}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{k_\varsigma}(s;w)]^*\simeq N^{A'_{\varsigma1}\cdot\cdot A'_{\varsigma n}l'_{\varsigma n}}_{k'_\varsigma}(s;w)$

展开性：

性质3.8.3.

$$\begin{cases}N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s;w)=N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}l_{\varsigma1}}(s;w)N^{l_{\varsigma1}}_{A_{\varsigma2}l_{\varsigma2}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot N^{l_{\varsigma n-1}}_{A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}(s-\frac{n-1}{2};w)\\ N^{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{k_\varsigma}(s;w)=N^{A_{\varsigma1}l_{\varsigma1}}_{k_\varsigma}(s;w)N^{A_{\varsigma2}l_{\varsigma2}}_{l_{\varsigma1}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot N^{A_{\varsigma n}l_{\varsigma n}}_{l_{\varsigma n-1}}(s-\frac{n-1}{2};w)\end{cases}$$

性质3.8.4.

$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;w)=N^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}l_{\varsigma1}}(s;w)N^{l_{\varsigma1}}_{A_{\varsigma2}l_{\varsigma2}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot N^{l_{\varsigma2s-1}}_{A_{\varsigma2s}l_{\varsigma2s}}(\frac{1}{2};w)\\ \Gamma^{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}_{k_\varsigma}(s;w)=N^{A_{\varsigma1}l_{\varsigma1}}_{k_\varsigma}(s;w)N^{A_{\varsigma2}l_{\varsigma2}}_{l_{\varsigma1}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot N^{A_{\varsigma2s}l_{\varsigma2s}}_{l_{\varsigma2s-1}}(\frac{1}{2};w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Gamma^{k_\varsigma}_{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;w)\succ\Gamma_{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;w)=N_{A_{\varsigma1}}(s;w)N_{A_{\varsigma2}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot N_{A_{\varsigma2s}}(\frac{1}{2};w)\\ \Gamma^{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}_{k_\varsigma}(s;w)\succ\Gamma^{A_{\varsigma1}A_{\varsigma2}\cdot\cdot A_{\varsigma2s}}(s;w)=N^{A_{\varsigma1}}(s;w)N^{A_{\varsigma2}}(s-\frac{1}{2};w)\cdot\cdot N^{A_{\varsigma2s}}(\frac{1}{2};w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{\Gamma}(s;w)=\bar{N}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{N}(s-\frac{1}{2};w)]\cdot\cdot[I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\bar{N}(1)][I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes\bar{N}(\frac{1}{2};w)]\\ \Gamma(s;w)=[I_{(w+1)^{2s-1}}\otimes N(\frac{1}{2};w)][I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes N(1)]\cdot\cdot[I_{w+1}\otimes N(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w)\end{cases}$$

3.9 推论1：常数矩阵$N(s;w),\bar{N}(s;w)$的几个恒等式

性质3.9.1.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;w)[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w)=\sigma(s;w)\\ N(s;w)\sigma(s;w)\bar{N}(s;w)=[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w)\bar{N}(s;w)\\ N(s;w)\sigma(s;w)\bar{N}(s;w)=N(s;w)\bar{N}(s;w)\{\vartheta\cdot[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]\}^n\\ [N(s;w)\bar{N}(s;w),\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]=0\end{cases}$$

性质3.9.2.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;w)[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]N(s;w)=S_{ab}(s,\varsigma;w)\\ N(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{N}(s;w)=[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]N(s;w)\bar{N}(s;w)\\ N(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{N}(s;w)=N(s;w)\bar{N}(s;w)[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\\ [N(s;w)\bar{N}(s;w),S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]=0\end{cases}$$

性质3.9.3.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;w)\{\vartheta\cdot[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]\}^nN(s;w)=[\vartheta\cdot\sigma(s;w)]^n\\ N(s;w)[\vartheta\cdot\sigma(s;w)]^n\bar{N}(s;w)=\{\vartheta\cdot[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]\}^nN(s;w)\bar{N}(s;w)\\ N(s;w)[\vartheta\cdot\sigma(s;w)]^n\bar{N}(s;w)=N(s;w)\bar{N}(s;w)\{\vartheta\cdot[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]\}^n\\ [N(s;w)\bar{N}(s;w),\{\vartheta\cdot[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]\}^n]=0\end{cases}$$

性质3.9.4.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;w)\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\}^nN(s;w)=[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)]^n\\ N(s;w)[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)]^n\bar{N}(s;w)=\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\}^nN(s;w)\bar{N}(s;w)\\ N(s;w)[\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)]^n\bar{N}(s;w)=N(s;w)\bar{N}(s;w)\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\}^n\\ [N(s;w)\bar{N}(s;w),\{\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\}^n]=0\end{cases}$$

推论3.9.1.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]}N(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\\ N(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\bar{N}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]}N(s;w)\bar{N}(s;w)\\ N(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\bar{N}(s;w)=N(s;w)\bar{N}(s;w)e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]}\\ [N(s;w)\bar{N}(s;w),e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]}]=0\end{cases}$$

3.10 推论2：常数矩阵$N(s;w),\bar{N}(s;w)$的另外几个恒等式

推论3.10.1.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;w)\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}N(s;w)=\frac{1}{2s}\sigma(s;w)\\ \bar{N}(s;w)I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)N(s;w)=(1-\frac{1}{2s})\sigma(s;w)\\ N^{A_\varsigma}(s;w)\sigma(s-\frac{1}{2};w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)=(1-\frac{1}{2s})\sigma(s;w)\\ \bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)\sigma(s;w)N^{A_\varsigma}(s;w)=[\frac{w}{2s}+\frac{(2s)\%2}{2s-1}-\frac{1}{2s(2s-1)}]\sigma(s-\frac{1}{2};w)\end{cases}$$

推论3.10.2.

$$\begin{cases}\bar{N}(s;w)S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}N(s;w)=\frac{1}{2s}S_{ab}(s,\varsigma;w)\\ \bar{N}(s;w)I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)N(s;w)=(1-\frac{1}{2s})S_{ab}(s,\varsigma;w)\\ N^{A_\varsigma}(s;w)S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)=(1-\frac{1}{2s})S_{ab}(s,\varsigma;w)\\ \bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)N^{A_\varsigma}(s;w)=[\frac{w}{2s}+\frac{(2s)\%2}{2s-1}-\frac{1}{2s(2s-1)}]S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)\end{cases}$$

推论3.10.3.
$$\begin{cases}\bar{N}(1)[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_2+I_{w+1}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)]N(1)=\sigma(1)\\ \bar{N}(\frac{3}{2})\{\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_3+I_{w+1}\otimes\{\bar{N}(1)[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_2+I_{w+1}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)]N(1)\}\}N(\frac{3}{2})=\sigma(\frac{3}{2})\\ \bar{N}(s;w)\cdot\cdot\bar{N}(\frac{3}{2})\{\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_3+I_{w+1}\otimes\{\bar{N}(1)[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_2+I_{w+1}\otimes\sigma(\frac{1}{2};w)]N(1)\}\}N(\frac{3}{2})\cdot\cdot N(s;w)=\sigma(s;w)\end{cases}$$

3.11 矩阵$N(s;w),\bar{N}(s;w)$的常数不变张量性质

定理3.11.1. $N(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}N(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}$

证明: $[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{w+1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]N(s;w)=N(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow 0=[\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{w+1}}+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]N(s;w)-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}N(s;w)S_{ab}(s,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow N(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}N(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}$ □

定理3.11.2. $\bar{N}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\bar{N}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}$

证明: $\bar{N}(s;w)[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{w+1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]=S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{N}(s;w)$
$\Leftrightarrow 0=\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)\bar{N}(s;w)-\bar{N}(s;w)[\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{w+1}}+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]$
$\Leftrightarrow \bar{N}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s,\varsigma;w)}\bar{N}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}$ □

3.12 两个定理的另外一种证明

定理3.12.1. $\Omega(s)\Gamma(s)=\Gamma(s)\sigma(s),\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)=\sigma(s)\bar{\Gamma}(s)$

证明: 采用数学归纳法
1: 当$s=\frac{1}{2}$时,$\sigma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})=\Gamma(\frac{1}{2})\sigma(\frac{1}{2})$成立。
2: 假设$s=k$时,$\Omega(k)\Gamma(k)=\Gamma(k)\sigma(k)$成立。
3: 当$s=k+\frac{1}{2}$时
$\Omega(k+\frac{1}{2})\Gamma(k+\frac{1}{2})$
$=[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2^{2k}}+I\otimes\Omega(k)][I\otimes\Gamma(k)]N(k+\frac{1}{2})$
$=\{[I\otimes\Gamma(k)][\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2(k+1)}]+I\otimes[\Gamma(k)\sigma(k)]\}N(k+\frac{1}{2})$
$=[I\otimes\Gamma(k)][\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2(k+1)}+I\otimes\sigma(k)]N(k+\frac{1}{2})$
$=[I\otimes\Gamma(k)]N(k+\frac{1}{2})\sigma(k+\frac{1}{2})$
$=\Gamma(k+\frac{1}{2})\sigma(k+\frac{1}{2})$
所以命题成立，证毕。 □

定理3.12.2. $\bar{\Gamma}(s)\Omega(s)=\sigma(s)\bar{\Gamma}(s)$

证明: 采用数学归纳法
1: 当$s=\frac{1}{2}$时,$\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})\sigma(\frac{1}{2})=\sigma(\frac{1}{2})\bar{\Gamma}(\frac{1}{2})$成立。
2: 假设$s=k$时,$\bar{\Gamma}(k)\Omega(k)=\sigma(k)\bar{\Gamma}(k)$成立。
3: 当$s=k+\frac{1}{2}$时
$\bar{\Gamma}(k+\frac{1}{2})\Omega(k+\frac{1}{2})$
$=\bar{N}(k+\frac{1}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(k)]\{\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2^{2k}}+I\otimes\Omega(k)\}$
$=\bar{N}(k+\frac{1}{2})\{[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2(k+1)}][I\otimes\bar{\Gamma}(k)]+[I\otimes\sigma(k)][I\otimes\bar{\Gamma}(k)]\}$
$=\bar{N}(k+\frac{1}{2})[\sigma(\frac{1}{2})\otimes I_{2(k+1)}+I\otimes\sigma(k)][I\otimes\bar{\Gamma}(k)]$
$=\sigma(k+\frac{1}{2})\bar{N}(k+\frac{1}{2})[I\otimes\bar{\Gamma}(k)]$
$=\sigma(k+\frac{1}{2})\bar{\Gamma}(k+\frac{1}{2})$
所以命题成立，证毕。 □

4 完美常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w), X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$(存在$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}$为前提)

只有满足$\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}=\varepsilon_{B_\varsigma A_\varsigma}$对称条件时，本章节内容才全部成立，否则只有部分成立。

4.1 完美常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w), X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$的引入

定义4.1.1. $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w):=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w), X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w):=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

性质4.1.1. $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\simeq X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$

4.2 常数矩阵$X(s;w),\bar{X}(s;w)$的引入

定义4.2.1. $$\begin{cases}X^{A_\varsigma}(s;w)\prec X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w), X_{A_\varsigma}(s;w)\prec X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\\ \bar{X}_{A_\varsigma}(s;w)\prec X_{A_\varsigma l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s;w), \bar{X}^{A_\varsigma}(s;w)\prec X^{A_\varsigma l_\varsigma}{}_{m_\varsigma}(s;w)\\ X(s;w)\prec X_{A_\varsigma\otimes l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s;w), \bar{X}(s;w)\prec X_{m_\varsigma}{}^{A_\varsigma\otimes l_\varsigma}(s;w)=X^{+}(s;w)\end{cases}$$

4.3 常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w), X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$的升降指标

性质4.3.1.
$$\begin{cases}X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)=\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon_{m_\varsigma r_\varsigma}(s-1;w)X^{r_\varsigma}_{B_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\\ X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)=\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{m_\varsigma r_\varsigma}(s-1;w)X^{B_\varsigma n_\varsigma}_{r_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\end{cases}$$

证明: $N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)=\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-1;w)N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$\Leftrightarrow \varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)=\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-1;w)N^{B_\varsigma n_\varsigma}_{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$\Leftrightarrow X^{C_\varsigma k_\varsigma}_{l_\varsigma}(s;w)=\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}\varepsilon^{k_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon_{l_\varsigma n_\varsigma}(s-1;w)X^{n_\varsigma}_{A_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$\Leftrightarrow X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)=\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{l_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon_{m_\varsigma r_\varsigma}(s-1;w)X^{r_\varsigma}_{B_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$ □

4.4 常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w), X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$的正交性

性质4.4.1. $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)X^{n_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)=\delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}[\Leftrightarrow]X^{A_\varsigma}(s;w)\bar{X}_{A_\varsigma}(s;w)=I_{C^{2s-2}_{w+1}}[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;w)X(s;w)=I_{C^{2s-2}_{w+1}}$

证明: $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)X^{n_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$
$=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}N^{D_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$=\frac{2s-1}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\delta_{D_\varsigma}{}^{C_\varsigma}N^{D_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$=\frac{2s-1}{w+(2s-1)\%2}\frac{w+(2s-1)\%2}{2s-1}\delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}$
$=\delta_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}$ □

性质4.4.2. $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)=0$
$[\Leftrightarrow]X^{A_\varsigma}(s;w)\bar{N}_{A_\varsigma}(s;w)=0, N_{A_\varsigma}(s;w)\bar{X}^{A_\varsigma}(s;w)=0[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;w)N(s;w)=0,\bar{N}(s;w)X(s;w)=0$

证明: $X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$
$=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$
$=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{C_\varsigma C''_\varsigma D''_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{C''_\varsigma D''_\varsigma\cdots}^{2s-1}}(s-1;w)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma D'_\varsigma\cdots}_{2s-1}}(s;w)\Gamma_{l_\varsigma}^{\overbrace{B'_\varsigma C'_\varsigma D'_\varsigma\cdots}^{2s-1}}(s-\frac{1}{2};w)$
$=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}\frac{1}{(2s-1)!}\delta^{B'_\varsigma}_{[C_\varsigma}\delta^{C'_\varsigma}_{C''_\varsigma}\delta^{D'_\varsigma}_{D''_\varsigma}\cdots{}_{]}\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{C''_\varsigma D''_\varsigma\cdots}^{2s-1}}(s-1;w)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B'_\varsigma C'_\varsigma D'_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)$
$=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon^{A_\varsigma B_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C''_\varsigma D''_\varsigma\cdots}_{2s}}(s;w)\Gamma_{m_\varsigma}^{\overbrace{C''_\varsigma D''_\varsigma\cdots}^{2s-1}}(s-1;w)$
$=0$ □

性质4.4.3. $X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)X^{A_\varsigma k_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)=\frac{2s-1}{w+(2s-1)\%2}\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}[\Leftrightarrow]\bar{X}_{A_\varsigma}(s;w)X^{A_\varsigma}(s;w)=\frac{2s-1}{w+(2s-1)\%2}I_{C^{2s-1}_{w+1}}$

证明: $X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)X^{A_\varsigma k_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)$
$=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon_{A_\varsigma B_\varsigma}N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$=\frac{2s-1}{w+(2s-1)\%2}N^{B_\varsigma m_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$=\frac{2s-1}{w+(2s-1)\%2}\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}$ □

性质4.4.4. $X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)X^{B_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)=\frac{C^{2s-2}_{w+1}-\frac{(2s-2)\%2}{2s-2}C^{2s-3}_{w+1}}{w+(2s-1)\%2}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}[\Leftrightarrow]tr[\bar{X}_{A_\varsigma}(s;w)X^{B_\varsigma}(s;w)]=\frac{C^{2s-2}_{w+1}-\frac{(2s-2)\%2}{2s-2}C^{2s-3}_{w+1}}{w+(2s-1)\%2}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}$

证明: $X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)X^{B_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)$
$=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}N^{C_\varsigma m_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{D_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$=\frac{2s-1}{w+(2s-1)\%2}\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N^{C_\varsigma m_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{D_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$=\frac{2s-1}{w+(2s-1)\%2}\varepsilon_{A_\varsigma C_\varsigma}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}\frac{1}{2s-1}[C^{2s-2}_{w+1}-\frac{(2s-2)\%2}{2s-2}C^{2s-3}_{w+1}]\delta^{C_\varsigma}_{D_\varsigma}$
$=\frac{C^{2s-2}_{w+1}-\frac{(2s-2)\%2}{2s-2}C^{2s-3}_{w+1}}{w+(2s-1)\%2}\delta^{B_\varsigma}_{A_\varsigma}$ □

推论4.4.1. $\bar{N}(s;w)N(s;w)=I_{C^{2s}_{w+1}},\bar{X}(s;w)X(s;w)=I_{C^{2s-2}_{w+1}},\bar{N}(s;w)X(s;w)=0,\bar{X}(s;w)N(s;w)=0$

4.5 常数不变张量$X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w),X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$的自旋变换

推论4.5.1. $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X^{n_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{w+(2s-1)\%2}\frac{(2s-2)\%2}{2s-2}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)$
$[\Leftrightarrow]X^{A_\varsigma}(s;w)\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\bar{X}_{B_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{w+(2s-1)\%2}\frac{(2s-2)\%2}{2s-2}\sigma(s-1;w)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;w)\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{w+1}}X(s;w)=\frac{1}{w+(2s-1)\%2}\frac{(2s-2)\%2}{2s-2}\sigma(s-1;w)$

证明: $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X^{n_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$
$=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon_{B_\varsigma D_\varsigma}N^{D_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$=-\frac{2s-1}{w+(2s-1)\%2}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{D_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{D_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$=\frac{1}{w+(2s-1)\%2}\frac{(2s-2)\%2}{2s-2}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)$ □

推论4.5.2. $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X^{m_\varsigma}_{B_\varsigma k_\varsigma}(s;w)=-\frac{1}{w+(2s-1)\%2}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}^{A_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X_{B_\varsigma}(s;w)=-\frac{1}{w+(2s-1)\%2}\sigma^{\alpha_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$

证明: $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X^{m_\varsigma}_{B_\varsigma k_\varsigma}(s;w)$
$=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon_{B_\varsigma D_\varsigma}N^{D_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$=-\frac{2s-1}{w+(2s-1)\%2}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{D_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{D_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$=-\frac{1}{w+(2s-1)\%2}\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$ □

推论4.5.3. $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X^{n_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{w+(2s-1)\%2}\frac{(2s-2)\%2}{2s-2}S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)$
$[\Leftrightarrow]X^{A_\varsigma}(s;w)S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-2}_{2s-2+w}}\bar{X}_{A_\varsigma}(s;w)=\frac{1}{w+(2s-1)\%2}\frac{(2s-2)\%2}{2s-2}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;w)S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{w+1}}X(s;w)=\frac{1}{w+(2s-1)\%2}\frac{(2s-2)\%2}{2s-2}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)$

证明: $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X^{n_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$
$=\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon_{B_\varsigma D_\varsigma}N^{D_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$=-\frac{2s-1}{w+(2s-1)\%2}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)S_{abD_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{D_\varsigma n_\varsigma}_{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$=\frac{1}{w+(2s-1)\%2}\frac{(2s-2)\%2}{2s-2}S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)$ □

推论4.5.4. $X^{A_\varsigma l_\varsigma}_{m_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X^{m_\varsigma}_{B_\varsigma k_\varsigma}(s;w)=-\frac{1}{2s}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}^{A_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X_{B_\varsigma}(s;w)=-\frac{1}{w+(2s-1)\%2}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)$

证明：$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)X^{m_\varsigma}_{B_\varsigma k_\varsigma}(s;w)$
$= \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon_{B_\varsigma D_\varsigma}N^{D_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$= -\frac{2s-1}{w+(2s-1)\%2}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)S_{abD_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{D_\varsigma m_\varsigma}_{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$= -\frac{1}{w+(2s-1)\%2}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$ □

4.6 常数不变张量$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w), X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$的置换性质

引理4.6.1. $\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\varepsilon_{E_\varsigma B_\varsigma} = \sigma_{E_\varsigma}{}^{C_\varsigma}(\frac{1}{2};w)$

只有以上引理成立，以下结论才成立。

定理4.6.1.

$$\begin{cases} X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)] = \sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)X_{n_\varsigma}^{B_\varsigma k_\varsigma}(s;w) \\ [\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]X^{n_\varsigma}_{B_\varsigma k_\varsigma}(s;w) = X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)\end{cases}$$
$$\begin{cases} X^{A_\varsigma}(s;w)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma(s-\frac{1}{2};w)] = \sigma(s-1;w)X^{B_\varsigma}(s;w) \\ [\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma(s-\frac{1}{2};w)]\bar{X}_{B_\varsigma}(s;w) = \bar{X}_{A_\varsigma}(s;w)\sigma(s-1;w)\end{cases}$$
$$\begin{cases} \bar{X}(s;w)[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{w+1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)] = \sigma(s-1;w)\bar{X}(s;w) \\ [\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C^{2s-1}_{w+1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]X(s;w) = X(s;w)\sigma(s-1;w)\end{cases}$$

证明：$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma k_\varsigma}(s;w)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)] = \sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)X_{n_\varsigma}^{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$
$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)] = \sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{D_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$\Leftrightarrow \varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)] = \sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{D_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$\Leftrightarrow \varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s;w)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)] = \sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{D_\varsigma n_\varsigma}(s;w)$
$\Leftrightarrow \varepsilon_{E_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s;w)[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)] = \varepsilon_{E_\varsigma B_\varsigma}\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{D_\varsigma n_\varsigma}(s;w)$
$\Leftrightarrow N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s;w)[\sigma(\frac{1}{2};w)_{E_\varsigma}{}^{C_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}-\delta_{E_\varsigma}{}^{C_\varsigma}\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)] = -\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{E_\varsigma n_\varsigma}(s;w)$
$\Leftrightarrow [\sigma(\frac{1}{2};w)_{E_\varsigma}{}^{C_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s;w)+\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{E_\varsigma n_\varsigma}(s;w) = N^{k_\varsigma}_{E_\varsigma m_\varsigma}(s;w)\sigma_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$
$\Leftrightarrow \sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)+\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{l_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma m_\varsigma}(s;w) = N^{j_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)\sigma^{\alpha_\varsigma}{}_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;w)$ □

定理4.6.2.

$$\begin{cases} X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)] = S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)X_{n_\varsigma}^{B_\varsigma\otimes k_\varsigma}(s;w) \\ [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]X^{n_\varsigma}_{B_\varsigma k_\varsigma}(s;w) = X^{m_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)\end{cases}$$
$$\begin{cases} X^{A_\varsigma}(s;w)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)] = S_{ab}(s-1,\varsigma;w)X^{B_\varsigma}(s;w) \\ [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\bar{X}_{B_\varsigma}(s;w) = \bar{X}_{A_\varsigma}(s;w)S_{ab}(s-1,\varsigma;w)\end{cases}$$
$$\begin{cases} \bar{X}(s;w)[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{w+1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)] = S_{ab}(s-1,\varsigma;w)\bar{X}(s;w) \\ [S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C^{2s-1}_{w+1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]X(s;w) = X(s;w)S_{ab}(s-1,\varsigma;w)\end{cases}$$

证明：$X_{m_\varsigma}^{A_\varsigma k_\varsigma}(s;w)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)] = S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)X_{n_\varsigma}^{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)$
$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]$
$= S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{w+(2s-1)\%2}}\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{D_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$\Leftrightarrow \varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)] = S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{D_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)$
$\Leftrightarrow \varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s;w)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)] = S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{D_\varsigma n_\varsigma}(s;w)$
$\Leftrightarrow \varepsilon_{E_\varsigma B_\varsigma}\varepsilon^{A_\varsigma C_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s;w)[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)] = \varepsilon_{E_\varsigma B_\varsigma}S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{B_\varsigma D_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{D_\varsigma n_\varsigma}(s;w)$
$\Leftrightarrow N^{k_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s;w)[S_{abE_\varsigma}{}^{C_\varsigma}\delta_{k_\varsigma}{}^{l_\varsigma}-\delta_{E_\varsigma}{}^{C_\varsigma}S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)] = -S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{E_\varsigma n_\varsigma}(s;w)$
$\Leftrightarrow [S_{abE_\varsigma}{}^{C_\varsigma}N^{l_\varsigma}_{C_\varsigma m_\varsigma}(s;w)+S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{l_\varsigma}_{E_\varsigma n_\varsigma}(s;w) = N^{k_\varsigma}_{E_\varsigma m_\varsigma}(s;w)S_{abk_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s;w)$
$\Leftrightarrow S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{B_\varsigma l_\varsigma}(s;w)+S_{abl_\varsigma}{}^{m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)N^{k_\varsigma}_{A_\varsigma m_\varsigma}(s;w) = N^{j_\varsigma}_{A_\varsigma l_\varsigma}(s;w)S_{abj_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s;w)$ □

推论4.6.1.

$$\begin{cases}N_{C_\varsigma m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]=\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)N_{D_\varsigma n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{D_\varsigma B_\varsigma}\\ [\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}N_{k_\varsigma}^{C_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)=\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}N_{l_\varsigma}^{D_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma_{m_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}N_{C_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}[\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma(s-\frac{1}{2};w)]=\sigma(s-1;w)N_{D_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{D_\varsigma B_\varsigma}\\ [\sigma_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}\sigma(s-\frac{1}{2};w)]\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}N^{C_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)=\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}N^{D_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\sigma(s-1;w)\end{cases}$$

推论4.6.2.

$$\begin{cases}N_{C_\varsigma m_\varsigma}{}^{l_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]=S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)N_{D_\varsigma n_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{D_\varsigma B_\varsigma}\\ [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)\delta_{l_\varsigma}{}^{k_\varsigma}+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{abl_\varsigma}{}^{k_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)]\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}N_{k_\varsigma}^{C_\varsigma n_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)=\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}N_{l_\varsigma}^{D_\varsigma m_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)S_{abm_\varsigma}{}^{n_\varsigma}(s-1;w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}N_{C_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{C_\varsigma A_\varsigma}[S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]=S_{ab}(s-1,\varsigma;w)N_{D_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)\varepsilon^{D_\varsigma B_\varsigma}\\ [S_{abA_\varsigma}{}^{B_\varsigma}(\frac{1}{2};w)+\delta_{A_\varsigma}{}^{B_\varsigma}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]\varepsilon_{B_\varsigma C_\varsigma}N^{C_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)=\varepsilon_{A_\varsigma D_\varsigma}N^{D_\varsigma}(s-\frac{1}{2};w)S_{ab}(s-1,\varsigma;w)\end{cases}$$

4.7 推论：关于常数矩阵$X(s;w),\bar{X}(s;w)$的重要性质

推论4.7.1.

$$\begin{cases}\bar{X}(s;w)[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]X(s;w)=\sigma(s-1;w)\\ X(s;w)\sigma(s-1;w)\bar{X}(s;w)=[\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]X(s;w)\bar{X}(s;w)\\ [X(s;w)\bar{X}(s;w),\sigma(\frac{1}{2};w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)]=0\end{cases}$$

推论4.7.2.

$$\begin{cases}\bar{X}(s;w)[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]X(s;w)=S_{ab}(s-1,\varsigma;w)\\ X(s;w)S_{ab}(s,\varsigma-1,\varsigma;w)\bar{X}(s;w)=[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]X(s;w)\bar{X}(s;w)\\ [X(s;w)\bar{X}(s;w),S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]=0\end{cases}$$

推论4.7.3. $X^{A_\varsigma}(s;w)\sigma(s-\frac{1}{2};w)\bar{X}_{A_\varsigma}(s;w)=1+\frac{1}{w+(2s-1)\%2}\sigma(s-1;w)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;w)I_{w+1}\otimes\sigma(s-\frac{1}{2};w)X(s;w)=1+\frac{1}{w+(2s-1)\%2}\sigma(s-1;w)$

推论4.7.4. $X^{A_\varsigma}(s;w)I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)\bar{X}_{A_\varsigma}(s;w)=1+\frac{1}{w+(2s-1)\%2}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)$
$[\Leftrightarrow]\bar{X}(s;w)I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)X(s;w)=1+\frac{1}{w+(2s-1)\%2}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)$

4.8 矩阵$X(s;w),\bar{X}(s;w)$的常数不变张量性质

定理4.8.1. $X(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}X(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)}$

证明: $[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]X(s;w)=X(s;w)S_{ab}(s-1,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow 0=[\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]X(s;w)-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}X(s;w)S_{ab}(s-1,\varsigma;w)$
$\Leftrightarrow X(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}X(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)}$ □

定理4.8.2. $\bar{X}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)}\bar{X}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}$

证明: $\bar{X}(s;w)[S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]=S_{ab}(s-1,\varsigma;w)\bar{X}(s;w)$
$\Leftrightarrow 0=\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)\bar{X}(s;w)-\bar{X}(s;w)[\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)\otimes I_{C_{w+1}^{2s-1}}+\frac{i}{2}\vartheta^{ab}I_{w+1}\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)]$
$\Leftrightarrow \bar{X}(s;w)=e^{\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-1,\varsigma;w)}\bar{X}(s;w)e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(\frac{1}{2},\varsigma;w)}\otimes e^{-\frac{i}{2}\vartheta^{ab}S_{ab}(s-\frac{1}{2},\varsigma;w)}$ □

4.9 常数矩阵$\Omega(s;w),\sigma(s-1;w)$的置换性质

推论4.9.1. $$\begin{cases}\Omega(s;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]X(s;w)=[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]X(s;w)\sigma(s-1;w)\\ \bar{X}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega(s;w)=\sigma(s-1;w)\bar{X}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\end{cases}$$

推论4.9.2. $\begin{cases}\sigma(s;w)=\bar{N}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega(s;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w)\\ \sigma(s-1;w)=\bar{X}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]\Omega(s;w)[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]X(s;w)\end{cases}$

推论4.9.3. $\begin{cases}[\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s;w)]^n=\bar{N}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)][\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)]^n[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w)\\ [\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-1;w)]^n=\bar{X}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)][\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)]^n[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]X(s;w)\end{cases}$

推论4.9.4. $\begin{cases}e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s;w)}=\bar{N}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]N(s;w)\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-1;w)}=\bar{X}(s;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(s-\frac{1}{2};w)]e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)}[I_{w+1}\otimes\Gamma(s-\frac{1}{2};w)]X(s;w)\end{cases}$

4.10 常数矩阵$\Omega(s-l;w),[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-l;w)]^n,e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-l;w)}$的同构性表示

推论4.10.1. $\Omega(s;w)=\Omega(s-1;w)\otimes I_{(w+1)^2}+I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\Omega(1;w)$

推论4.10.2.

$$\begin{cases}\Omega(s;w)I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{w+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};w)]X(1;w)\}=I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{w+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};w)]X(1;w)\}\Omega(s-1;w)\\ I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};w)]\}\Omega(s;w)=\Omega(s-1;w)I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};w)]\}\end{cases}$$

推论4.10.3.

$$\begin{cases}\Omega(s-1;w)=I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};w)]\}\Omega(s;w)I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{w+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};w)]X(1;w)\}\\ [\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-1;w)]^n=I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};w)]\}[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)]^nI_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{w+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};w)]X(1;w)\}\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-1;w)}=I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};w)]\}e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)}I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{w+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};w)]X(1;w)\}\end{cases}$$

定义4.10.1.

$$\begin{cases}T(s;w):=I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{[I_{w+1}\otimes\Gamma(\frac{1}{2};w)]X(1;w)\}\\ \bar{T}(s;w):=I_{(w+1)^{2s-2}}\otimes\{\bar{X}(1;w)[I_{w+1}\otimes\bar{\Gamma}(\frac{1}{2};w)]\}=T^{+}(s;w)\end{cases}$$

推论4.10.4.

$$\begin{cases}\Omega(s-l;w)=\bar{T}(s-l+1;w)\cdots\bar{T}(s-1;w)\bar{T}(s;w)\Omega(s;w)T(s;w)T(s-1;w)\cdots T(s-l+1;w)\\ [\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-l;w)]^n=\bar{T}(s-l+1;w)\cdots\bar{T}(s-1;w)\bar{T}(s;w)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)]^nT(s;w)T(s-1;w)\cdots T(s-l+1;w)\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s-l;w)}=\bar{T}(s-l+1;w)\cdots\bar{T}(s-1;w)\bar{T}(s;w)e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)}T(s;w)T(s-1;w)\cdots T(s-l+1;w)\end{cases}$$

推论4.10.5.

$$\begin{cases}\sigma(s-l;w)=\bar{\Gamma}(s-l;w)\bar{T}(s-l+1;w)\cdots\bar{T}(s;w)\Omega(s;w)T(s;w)\cdots T(s-l+1;w)\Gamma(s-l;w)\\ [\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-l;w)]^n=\bar{\Gamma}(s-l;w)\bar{T}(s-l+1;w)\cdots\bar{T}(s;w)[\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)]^nT(s;w)\cdots T(s-l+1;w)\Gamma(s-l;w)\\ e^{\vec{\vartheta}\cdot\sigma(s-l;w)}=\bar{\Gamma}(s-l;w)\bar{T}(s-l+1;w)\cdots\bar{T}(s;w)e^{\vec{\vartheta}\cdot\Omega(s;w)}T(s;w)\cdots T(s-l+1;w)\Gamma(s-l;w)\end{cases}$$

5 反对称常数不变张量$\Gamma_{ab}^{k}(1;3)$的应用-电磁张量的高旋量描述

5.1 基础

$$\text{电磁张量:}F_{ab}=\begin{bmatrix}0&B_z&-B_y&-iE_x\\-B_z&0&B_x&-iE_y\\B_y&-B_x&0&-iE_z\\iE_x&iE_y&iE_z&0\end{bmatrix},\text{对偶张量:}*F_{ab}=\begin{bmatrix}0&-iE_z&iE_y&B_x\\iE_z&0&-iE_x&B_y\\-iE_y&iE_x&0&B_z\\-B_x&-B_y&-B_z&0\end{bmatrix}\tag{43.1}$$

推论5.1.1.

$$\sqrt{2}\Gamma_0^{ab}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=iR_z,\sqrt{2}\Gamma_1^{ab}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=-iR_y,\sqrt{2}\Gamma_2^{ab}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}=-iL_x$$

$$\sqrt{2}\Gamma_3^{ab}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=iR_x,\sqrt{2}\Gamma_4^{ab}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}=-iL_y,\sqrt{2}\Gamma_5^{ab}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}=-iL_z$$

推论5.1.2. $F_0 = \sqrt{2}B_z, F_1 = -\sqrt{2}B_y, F_2 = -i\sqrt{2}E_x, F_3 = \sqrt{2}B_x, F_4 = -i\sqrt{2}E_y, F_5 = -i\sqrt{2}E_z$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\vec{E} \\ \sqrt{2}\vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = SF, S := \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, SS^+ = S^+S = I_6$$

定理5.1.1. $tr(R_\alpha R_\beta R_\gamma) = tr(L_\alpha L_\beta R_\gamma) = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$

证明:

$tr(R_xR_yR_z) = tr(R_zR_xR_y) = tr(R_yR_zR_x) = i$

$tr(R_yR_xR_z) = tr(R_zR_yR_x) = tr(R_xR_zR_y) = -i$

$tr(R_x^2R_x) = tr(R_x^2R_y) = tr(R_x^2R_z) = 0$

$tr(R_y^2R_x) = tr(R_y^2R_y) = tr(R_y^2R_z) = 0$

$tr(R_z^2R_x) = tr(R_z^2R_y) = tr(R_z^2R_z) = 0$

$tr(R_\alpha R_\beta L_x) = tr(R_\alpha R_\beta L_y) = tr(R_\alpha R_\beta L_z) = 0$

$tr(L_\alpha L_\beta L_x) = tr(L_\alpha L_\beta L_y) = tr(L_\alpha L_\beta L_z) = 0$

$tr(L_xL_yR_x) = tr(L_xL_yR_y) = 0, tr(L_xL_yR_z) = i$

$tr(L_yL_zR_x) = i, tr(L_yL_zR_y) = tr(L_yL_zR_z) = 0$

$tr(L_zL_xR_x) = 0, tr(L_zL_xR_y) = i, tr(L_zL_xR_z) = 0$

$tr(L_yL_xR_x) = tr(L_yL_xR_y) = 0, tr(L_yL_xR_z) = -i$

$tr(L_zL_yR_x) = -i, tr(L_zL_yR_y) = tr(L_zL_yR_z) = 0$

$tr(L_xL_zR_x) = 0, tr(L_xL_zR_y) = -i, tr(L_xL_zR_z) = 0$ □

推论5.1.3. $tr(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma) = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$

推论5.1.4. ${R_k}^l(1;3) = 2\Gamma_k^{ab}{R_a}^{a'}\Gamma_{a'b}^l = -tr(\sqrt{2}\Gamma_k R\sqrt{2}\Gamma^l) \simeq -{R_l}^k(1;3)$

5.2 $SR^x(1;3)S^+$的计算

推论5.2.1.

${R^x}_0{}^1(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0R^x\sqrt{2}\Gamma^1) = -tr(R_zR^xR_y) = -i$

${R^x}_0{}^2(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0R^x\sqrt{2}\Gamma^2) = -tr(R_zR^xL_x) = 0$

${R^x}_0{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0R^x\sqrt{2}\Gamma^3) = tr(R_zR^xR_x) = 0$

${R^x}_0{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0R^x\sqrt{2}\Gamma^4) = -tr(R_zR^xL_y) = 0$

${R^x}_0{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0R^x\sqrt{2}\Gamma^5) = -tr(R_zR^xL_z) = 0$

推论5.2.2.

${R^x}_1{}^2(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1R^x\sqrt{2}\Gamma^2) = tr(R_yR^xL_x) = 0$

${R^x}_1{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1R^x\sqrt{2}\Gamma^3) = -tr(R_yR^xR_x) = 0$

${R^x}_1{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1R^x\sqrt{2}\Gamma^4) = tr(R_yR^xL_y) = 0$

${R^x}_1{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1R^x\sqrt{2}\Gamma^5) = tr(R_yR^xL_z) = 0$

推论5.2.3.

${R^x}_2{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2R^x\sqrt{2}\Gamma^3) = -tr(L_xR^xR_x) = 0$

${R^x}_2{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2R^x\sqrt{2}\Gamma^4) = tr(L_xR^xL_y) = 0$

${R^x}_2{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2R^x\sqrt{2}\Gamma^5) = tr(L_xR^xL_z) = 0$

推论5.2.4.

${R^x}_3{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_3R^x\sqrt{2}\Gamma^4) = -tr(R_xR^xL_y) = 0$

${R^x}_3{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_3R^x\sqrt{2}\Gamma^5) = -tr(R_xR^xL_z) = 0$

推论5.2.5.

${R^x}_4{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_4R^x\sqrt{2}\Gamma^5) = tr(L_yR^xL_z) = -i$

推论5.2.6.

$$R^x(1;3) = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

推论5.2.7.

$$SR^x(1;3)S^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$SR^x(1;3)S^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$SR^x(1;3)S^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} = \gamma^x \otimes I$$

5.3 $SR^y(1;3)S^+$的计算

推论5.3.1.

$${R^y}_0{}^1(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 R^y \sqrt{2}\Gamma^1) = -tr(R_z R^y R_y) = 0$$
$${R^y}_0{}^2(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 R^y \sqrt{2}\Gamma^2) = -tr(R_z R^y L_x) = 0$$
$${R^y}_0{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 R^y \sqrt{2}\Gamma^3) = tr(R_z R^y R_x) = -i$$
$${R^y}_0{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 R^y \sqrt{2}\Gamma^4) = -tr(R_z R^y L_y) = 0$$
$${R^y}_0{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 R^y \sqrt{2}\Gamma^5) = -tr(R_z R^y L_z) = 0$$

推论5.3.2.

$${R^y}_1{}^2(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 R^y \sqrt{2}\Gamma^2) = tr(R_y R^y L_x) = 0$$
$${R^y}_1{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 R^y \sqrt{2}\Gamma^3) = -tr(R_y R^y R_x) = 0$$
$${R^y}_1{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 R^y \sqrt{2}\Gamma^4) = tr(R_y R^y L_y) = 0$$
$${R^y}_1{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 R^y \sqrt{2}\Gamma^5) = tr(R_y R^y L_z) = 0$$

推论5.3.3.

$${R^y}_2{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2 R^y \sqrt{2}\Gamma^3) = -tr(L_x R^y R_x) = 0$$
$${R^y}_2{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2 R^y \sqrt{2}\Gamma^4) = tr(L_x R^y L_y) = 0$$
$${R^y}_2{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2 R^y \sqrt{2}\Gamma^5) = tr(L_x R^y L_z) = i$$

推论5.3.4.

$${R^y}_3{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_3 R^y \sqrt{2}\Gamma^4) = -tr(R_x R^y L_y) = 0$$
$${R^y}_3{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_3 R^y \sqrt{2}\Gamma^5) = -tr(R_x R^y L_z) = 0$$

推论5.3.5.

$${R^y}_4{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_4 R^y \sqrt{2}\Gamma^5) = tr(L_y R^y L_z) = 0$$

推论5.3.6.

$$R^y(1;3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

推论5.3.7.

$$SR^y(1;3)S^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$SR^y(1;3)S^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$SR^y(1;3)S^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix} = \gamma^y \otimes I$$

5.4 $SR^z(1;3)S^+$的计算

推论5.4.1.

$R^z{}_0{}^1(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 R^z \sqrt{2}\Gamma^1) = -tr(R_z R^z R_y) = 0$
$R^z{}_0{}^2(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 R^z \sqrt{2}\Gamma^2) = -tr(R_z R^z L_x) = 0$
$R^z{}_0{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 R^z \sqrt{2}\Gamma^3) = tr(R_z R^z R_x) = 0$
$R^z{}_0{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 R^z \sqrt{2}\Gamma^4) = -tr(R_z R^z L_y) = 0$
$R^z{}_0{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 R^z \sqrt{2}\Gamma^5) = -tr(R_z R^z L_z) = 0$

推论5.4.2.

$R^z{}_1{}^2(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 R^z \sqrt{2}\Gamma^2) = tr(R_y R^z L_x) = 0$
$R^z{}_1{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 R^z \sqrt{2}\Gamma^3) = -tr(R_y R^z R_x) = -i$
$R^z{}_1{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 R^z \sqrt{2}\Gamma^4) = tr(R_y R^z L_y) = 0$
$R^z{}_1{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 R^z \sqrt{2}\Gamma^5) = tr(R_y R^z L_z) = 0$

推论5.4.3.

$R^z{}_2{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2 R^z \sqrt{2}\Gamma^3) = -tr(L_x R^z R_x) = 0$
$R^z{}_2{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2 R^z \sqrt{2}\Gamma^4) = tr(L_x R^z L_y) = -i$
$R^z{}_2{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2 R^z \sqrt{2}\Gamma^5) = tr(L_x R^z L_z) = 0$

推论5.4.4.

$R^z{}_3{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_3 R^z \sqrt{2}\Gamma^4) = -tr(R_x R^z L_y) = 0$
$R^z{}_3{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_3 R^z \sqrt{2}\Gamma^5) = -tr(R_x R^z L_z) = 0$

推论5.4.5.

$R^z{}_4{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_4 R^z \sqrt{2}\Gamma^5) = tr(L_y R^z L_z) = 0$

推论5.4.6.

$$R^z(1;3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

推论5.4.7.

$$SR^z(1;3)S^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$SR^z(1;3)S^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$SR^z(1;3)S^+ = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \gamma^z \otimes I$$

5.5 $SL^x(1;3)S^+$的计算

推论5.5.1.

$L^x{}_0{}^1(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 L^x \sqrt{2}\Gamma^1) = -tr(R_z L^x R_y) = 0$
$L^x{}_0{}^2(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 L^x \sqrt{2}\Gamma^2) = -tr(R_z L^x L_x) = 0$
$L^x{}_0{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 L^x \sqrt{2}\Gamma^3) = tr(R_z L^x R_x) = 0$

$$L^x{}_0{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 L^x \sqrt{2}\Gamma^4) = -tr(R_z L^x L_y) = -i$$
$$L^x{}_0{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 L^x \sqrt{2}\Gamma^5) = -tr(R_z L^x L_z) = 0$$

推论5.5.2.

$$L^x{}_1{}^2(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 L^x \sqrt{2}\Gamma^2) = tr(R_y L^x L_x) = 0$$
$$L^x{}_1{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 L^x \sqrt{2}\Gamma^3) = -tr(R_y L^x R_x) = 0$$
$$L^x{}_1{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 L^x \sqrt{2}\Gamma^4) = tr(R_y L^x L_y) = 0$$
$$L^x{}_1{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 L^x \sqrt{2}\Gamma^5) = tr(R_y L^x L_z) = -i$$

推论5.5.3.

$$L^x{}_2{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2 L^x \sqrt{2}\Gamma^3) = -tr(L_x L^x R_x) = 0$$
$$L^x{}_2{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2 L^x \sqrt{2}\Gamma^4) = tr(L_x L^x L_y) = 0$$
$$L^x{}_2{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2 L^x \sqrt{2}\Gamma^5) = tr(L_x L^x L_z) = 0$$

推论5.5.4.

$$L^x{}_3{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_3 L^x \sqrt{2}\Gamma^4) = -tr(R_x L^x L_y) = 0$$
$$L^x{}_3{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_3 L^x \sqrt{2}\Gamma^5) = -tr(R_x L^x L_z) = 0$$

推论5.5.5.

$$L^x{}_4{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_4 L^x \sqrt{2}\Gamma^5) = tr(L_y L^x L_z) = 0$$

推论5.5.6.

$$L^x(1;3) = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&-i&0 \\ 0&0&0&0&0&-i \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ i&0&0&0&0&0 \\ 0&i&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

推论5.5.7.

$$SL^x(1;3)S^+ = \begin{bmatrix} 0&0&i&0&0&0 \\ 0&0&0&0&i&0 \\ 0&0&0&0&0&i \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&0&0&-i&0 \\ 0&0&0&0&0&-i \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ i&0&0&0&0&0 \\ 0&i&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&-1&0 \\ -i&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&-i&0&0&0&0 \\ 0&0&-i&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$SL^x(1;3)S^+ = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ -1&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&i \\ 0&0&0&0&-i&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&-1&0 \\ -i&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&-i&0&0&0&0 \\ 0&0&-i&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$SL^x(1;3)S^+ = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0 \end{bmatrix} = \gamma^x \otimes \sigma_y$$

5.6 $SL^y(1;3)S^+$的计算

推论5.6.1.

$$L^y{}_0{}^1(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 L^y \sqrt{2}\Gamma^1) = -tr(R_z L^y R_y) = 0$$
$$L^y{}_0{}^2(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 L^y \sqrt{2}\Gamma^2) = -tr(R_z L^y L_x) = i$$
$$L^y{}_0{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 L^y \sqrt{2}\Gamma^3) = tr(R_z L^y R_x) = 0$$
$$L^y{}_0{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 L^y \sqrt{2}\Gamma^4) = -tr(R_z L^y L_y) = 0$$
$$L^y{}_0{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 L^y \sqrt{2}\Gamma^5) = -tr(R_z L^y L_z) = 0$$

推论5.6.2.

$$L^y{}_1{}^2(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 L^y \sqrt{2}\Gamma^2) = tr(R_y L^y L_x) = 0$$
$$L^y{}_1{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 L^y \sqrt{2}\Gamma^3) = -tr(R_y L^y R_x) = 0$$
$$L^y{}_1{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 L^y \sqrt{2}\Gamma^4) = tr(R_y L^y L_y) = 0$$
$$L^y{}_1{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 L^y \sqrt{2}\Gamma^5) = tr(R_y L^y L_z) = 0$$

推论5.6.3.

$$L^y{}_2{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2 L^y \sqrt{2}\Gamma^3) = -tr(L_x L^y R_x) = 0$$

$L^y{}_2{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2 L^y \sqrt{2}\Gamma^4) = tr(L_x L^y L_y) = 0$
$L^y{}_2{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2 L^y \sqrt{2}\Gamma^5) = tr(L_x L^y L_z) = 0$

推论5.6.4.
$L^y{}_3{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_3 L^y \sqrt{2}\Gamma^4) = -tr(R_x L^y L_y) = 0$
$L^y{}_3{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_3 L^y \sqrt{2}\Gamma^5) = -tr(R_x L^y L_z) = -i$

推论5.6.5.
$L^y{}_4{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_4 L^y \sqrt{2}\Gamma^5) = tr(L_y L^y L_z) = 0$

推论5.6.6.
$$L^y(1;3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

推论5.6.7.
$$SL^y(1;3)S^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$SL^y(1;3)S^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$SL^y(1;3)S^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \gamma^y \otimes \sigma_y$$

5.7 $SL^z(1;3)S^+$的计算

推论5.7.1.
$L^z{}_0{}^1(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 L^z \sqrt{2}\Gamma^1) = -tr(R_z L^z R_y) = 0$
$L^z{}_0{}^2(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 L^z \sqrt{2}\Gamma^2) = -tr(R_z L^z L_x) = 0$
$L^z{}_0{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 L^z \sqrt{2}\Gamma^3) = tr(R_z L^z R_x) = 0$
$L^z{}_0{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 L^z \sqrt{2}\Gamma^4) = -tr(R_z L^z L_y) = 0$
$L^z{}_0{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_0 L^z \sqrt{2}\Gamma^5) = -tr(R_z L^z L_z) = 0$

推论5.7.2.
$L^z{}_1{}^2(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 L^z \sqrt{2}\Gamma^2) = tr(R_y L^z L_x) = i$
$L^z{}_1{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 L^z \sqrt{2}\Gamma^3) = -tr(R_y L^z R_x) = 0$
$L^z{}_1{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 L^z \sqrt{2}\Gamma^4) = tr(R_y L^z L_y) = 0$
$L^z{}_1{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_1 L^z \sqrt{2}\Gamma^5) = tr(R_y L^z L_z) = 0$

推论5.7.3.
$L^z{}_2{}^3(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2 L^z \sqrt{2}\Gamma^3) = -tr(L_x L^z R_x) = 0$
$L^z{}_2{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2 L^z \sqrt{2}\Gamma^4) = tr(L_x L^z L_y) = 0$
$L^z{}_2{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_2 L^z \sqrt{2}\Gamma^5) = tr(L_x L^z L_z) = 0$

推论5.7.4.
$L^z{}_3{}^4(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_3 L^z \sqrt{2}\Gamma^4) = -tr(R_x L^z L_y) = i$
$L^z{}_3{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_3 L^z \sqrt{2}\Gamma^5) = -tr(R_x L^z L_z) = 0$

推论5.7.5.
$L^z{}_4{}^5(1;3) = -tr(\sqrt{2}\Gamma_4 L^z \sqrt{2}\Gamma^5) = tr(L_y L^z L_z) = 0$

推论5.7.6.

$$L^z(1;3)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&i&0&0&0\\0&-i&0&0&0&0\\0&0&0&0&i&0\\0&0&0&-i&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

推论5.7.7.

$$SL^z(1;3)S^+=\begin{bmatrix}0&0&i&0&0&0\\0&0&0&0&i&0\\0&0&0&0&0&i\\0&0&0&1&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&i&0&0&0\\0&-i&0&0&0&0\\0&0&0&0&i&0\\0&0&0&-i&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&-1&0\\-i&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&-i&0&0&0&0\\0&0&-i&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$SL^z(1;3)S^+=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&i&0\\0&0&-i&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&-1&0\\-i&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&-i&0&0&0&0\\0&0&-i&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$SL^z(1;3)S^+=\begin{bmatrix}0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\gamma^z\otimes\sigma_y$$

5.8 $SR(1;3)S^+$的计算结果

推论5.8.1. $SR(1;3)S^+=\gamma\otimes I, SL(1;3)S^+=\gamma\otimes\sigma_y$

$\Rightarrow S\bar{\Gamma}(1;3)(e^{i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L}\otimes e^{i\omega\cdot R+\varsigma\epsilon\cdot L})\Gamma(1;3)S^+=Se^{i\omega\cdot R(1;3)+\varsigma\epsilon\cdot L(1;3)}S^+=e^{i\omega\cdot\gamma\otimes I+\varsigma\epsilon\cdot\gamma\otimes\sigma_y}$

定理5.8.1. $\begin{bmatrix}\vec{E}\\\vec{B}\end{bmatrix}\sim e^{i\omega\cdot\gamma\otimes I+\varsigma\epsilon\cdot\gamma\otimes\sigma_y}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}[e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}+e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}]&i[e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}-e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}]\\-i[e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}-e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}]&[e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}+e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}]\end{bmatrix}$

证明: $e^{i\omega\cdot\gamma\otimes I+\epsilon\cdot\gamma\otimes\sigma_y}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\omega\cdot\gamma\otimes I+\epsilon\cdot\gamma\otimes\sigma_y)^n$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(i\omega\cdot\gamma\otimes I)^{n-k}(\epsilon\cdot\gamma\otimes\sigma_y)^k$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}C_n^{2k}(i\omega\cdot\gamma\otimes I)^{n-2k}(\epsilon\cdot\gamma\otimes\sigma_y)^{2k}+\sum\limits_{k=0}^{[(n-1)/2]}C_n^{2k+1}(i\omega\cdot\gamma\otimes I)^{n-2k-1}(\epsilon\cdot\gamma\otimes\sigma_y)^{2k+1}]$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\{[\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}C_n^{2k}(i\omega\cdot\gamma)^{n-2k}(\epsilon\cdot\gamma)^{2k}]\otimes I+[\sum\limits_{k=0}^{[(n-1)/2]}C_n^{2k+1}(i\omega\cdot\gamma)^{n-2k-1}(\epsilon\cdot\gamma)^{2k+1}]\otimes\sigma_y\}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}C_n^{2k}(i\omega\cdot\gamma)^{n-2k}(\epsilon\cdot\gamma)^{2k}&-i\sum\limits_{k=0}^{[(n-1)/2]}C_n^{2k+1}(i\omega\cdot\gamma)^{n-2k-1}(\epsilon\cdot\gamma)^{2k+1}\\i\sum\limits_{k=0}^{[(n-1)/2]}C_n^{2k+1}(i\omega\cdot\gamma)^{n-2k-1}(\epsilon\cdot\gamma)^{2k+1}&\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}C_n^{2k}(i\omega\cdot\gamma)^{n-2k}(\epsilon\cdot\gamma)^{2k}\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\begin{bmatrix}[(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma)]^n+[(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma]^n&-i[(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma)]^n-[(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma]^n\\i[(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma)]^n-[(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma]^n&[(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma)]^n+[(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma]^n\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}[e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}+e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}]&i[e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}-e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}]\\-i[e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}-e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}]&[e^{(i\omega-\epsilon)\cdot\gamma}+e^{(i\omega+\epsilon)\cdot\gamma}]\end{bmatrix}$ □

5.9 反对称常数不变张量$\Gamma^k_{abc}(\frac{3}{2};3)$及与$\varepsilon^k{}_{abc}$的关系

引理5.9.1. $\frac{1}{2}\varepsilon_k{}^{abc}(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)_a{}^{a'}\delta_b{}^{b'}\delta_c{}^{c'}\varepsilon^{k'}{}_{a'b'c'}=(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)_k{}^{k'}$

证明: $\frac{1}{2}\varepsilon_k{}^{abc}(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)_a{}^{a'}\delta_b{}^{b'}\delta_c{}^{c'}\varepsilon^{k'}{}_{a'b'c'}$

$=\frac{1}{2}\varepsilon_k{}^{abc}\varepsilon^{k'}{}_{a'bc}(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)_a{}^{a'}$

$=(\delta_k^{k'}\delta_a^{a'}-\delta_{ka'}\delta^{k'a})(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)_a{}^{a'}$

$=-(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)^{k'}{}_k$

$=(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)_k{}^{k'}$ □

推论5.9.1. $3\Gamma_k^{abc}(\frac{3}{2};3)(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)_a{}^{a'}\delta_b{}^{b'}\delta_c{}^{c'}\Gamma^{k'}_{a'b'c'}(\frac{3}{2};3)=[(\sigma_y\otimes\sigma_x)(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)(\sigma_y\otimes\sigma_x)]_k{}^{k'}$

证明: $\sqrt{3!}\Gamma^0_{012}(\frac{3}{2};3)=1,\sqrt{3!}\Gamma^1_{013}(\frac{3}{2};3)=1,\sqrt{3!}\Gamma^2_{023}(\frac{3}{2};3)=1,\sqrt{3!}\Gamma^3_{123}(\frac{3}{2};3)=1$

$\Leftrightarrow\tilde{\Gamma}^l_{abc}(\frac{3}{2};3):=(i\sigma_y\otimes\sigma_x)^k{}_l\Gamma^l_{abc}(\frac{3}{2};3)$

$\Leftrightarrow\sqrt{3!}\tilde{\Gamma}^3_{012}(\frac{3}{2};3)=-1,\sqrt{3!}\tilde{\Gamma}^2_{013}(\frac{3}{2};3)=1,\sqrt{3!}\tilde{\Gamma}^1_{023}(\frac{3}{2};3)=-1,\sqrt{3!}\tilde{\Gamma}^0_{123}(\frac{3}{2};3)=1$

$\Leftrightarrow\sqrt{3!}\tilde{\Gamma}^k_{abc}(\frac{3}{2};3)=\varepsilon^k{}_{abc}\Leftrightarrow\Gamma^k_{abc}(\frac{3}{2};3)=(-i\sigma_y\otimes\sigma_x)^k{}_l\varepsilon^l{}_{abc}$

$\Rightarrow3\Gamma_k^{abc}(\frac{3}{2};3)(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)_a{}^{a'}\delta_b{}^{b'}\delta_c{}^{c'}\Gamma^{k'}_{a'b'c'}(\frac{3}{2};3)=[(\sigma_y\otimes\sigma_x)(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)(\sigma_y\otimes\sigma_x)]_k{}^{k'}$ □

5.10 反对称常数不变张量$\Gamma^{k}_{abcd}(2;3)=\varepsilon_{abcd}$

引理5.10.1. $\varepsilon,,abcd(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)_a{}^{a'}\delta_b{}^{b'}\delta_c{}^{c'}\delta_d{}^{d'}\varepsilon_{a'b'c'd'}=0$

推论5.10.1. $4\Gamma^{abcd}_{k}(2;3)(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)_a{}^{a'}\delta_b{}^{b'}\delta_c{}^{c'}\delta_d{}^{d'}\Gamma^{k'}_{a'b'c'd'}(2;3)=0$

证明: $\sqrt{4!}\Gamma^{0}_{0123}(2;3)=1\Leftrightarrow\sqrt{4!}\Gamma^{k}_{abc}(2;3)=\varepsilon_{abcd}$
$\Rightarrow 4\Gamma^{abcd}_{k}(2;3)(i\omega\cdot R+\epsilon\cdot L)_a{}^{a'}\delta_b{}^{b'}\delta_c{}^{c'}\delta_d{}^{d'}\Gamma^{k'}_{a'b'c'd'}(2;3)=0$ □

6 反对称常数不变对偶张量

6.1 反对称常数不变对偶张量$*\Gamma^{k}_{ab\cdots}(s;3)$的引入

定义6.1.1. $*\Gamma^{k}_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-2s}}(s;3):=\varepsilon_{\underbrace{ab\cdot\cdot}_{n-2s}}{}^{\overbrace{cd\cdot\cdot}^{2s}}\Gamma^{k}_{\underbrace{cd\cdot\cdot}_{2s}}(s;3)$

6.2 常数不变张量$\Gamma^{k}_{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdots}(n;3)$的引入

定义6.2.1. $\Gamma^{k}_{\underbrace{\alpha_\varsigma\beta_\varsigma\cdot\cdot}_{n}}(n;3):=\underbrace{\sigma^{ab}_{\varsigma\alpha_\varsigma}\sigma^{cd}_{\varsigma\beta_\varsigma}\cdot\cdot}_{n}\Gamma^{k}_{\underbrace{abcd\cdot\cdot}_{2n}}(n;3)$

第四十四章　有质量粒子的高旋量场量子化方案

自我评述：本章运用Dirac型完美常数不变张量，将四维时空中的Bargmann-Wigner方程等价改造成高旋量场形式。并从高旋量场角度重新描述有质量粒子，形式上与Dirac粒子更接近，可以类比讨论，更具统一形式。并对照之前章节的内容，直接写下对应的等价高旋量场表述结果。这为高自旋有质量粒子的量子化提供了另一个视角，并结合原来的方案就可以灵活切换，从多个角度审视检验各种物理结果。事实上就是无质量粒子自旋方程量子化方案的对应，这样对有质量粒子和无质量粒子都有两套量子化方案，即高旋量场方案和分量场方案。形式上更有统一性，更有美感，同时也体现了Dirac型完美常数不变张量方法的有用之处，找到了用武之地。特别说明一点，本章结论对高维时空中的Bargmann-Wigner方程原则上同样成立，只需将4维替换为N+1维即可，不再专章详述。

1 Bargmann-Wigner方程 [18]自旋基和平面波解的高旋量场表述

1.1 有质量粒子旋量与无质量粒子旋量的对比

无质量粒子波函数$=C^1_{2s+1}-$旋量，有质量粒子波函数$=C^3_{2s+3}-$旋量。
中微子波函数=2分量旋量，电子波函数=4分量旋量。
光子波函数=3分量旋量，有质量矢量粒子波函数=10分量旋量。
引力微子波函数=4分量旋量，有质量引力微子波函数=15分量旋量。
引力子波函数=5分量旋量，有质量引力子波函数=35分量旋量。

1.2 Bargmann-Wigner方程高旋量场自旋基的定义及推论

定义1.2.1.

$$\begin{cases} U_{k_\varsigma}(\vec{p},h;s) := \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(s;3)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)[\Leftrightarrow]U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) = \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(s;3)U_{k_\varsigma}(\vec{p},h;s) \\ V_{k_\varsigma}(\vec{p},h;s) := \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(s;3)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)[\Leftrightarrow]V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) = \Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(s;3)V_{k_\varsigma}(\vec{p},h;s) \end{cases}$$

推论1.2.1.

$$\begin{cases} U_{k_\varsigma}(\vec{p},h;s) = \sqrt{C^{s-h}_{2s}}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(s;3)\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdots u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h} \\ V_{k_\varsigma}(\vec{p},h;s) = \sqrt{C^{s-h}_{2s}}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(s;3)\underbrace{v_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})v_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdots v_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})v_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h} \end{cases}$$

1.3 Bargmann-Wigner方程平面波解的高旋量场表述

定理1.3.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(s;3)\psi_{k_\varsigma}(x;s)=0$

$$\psi_{k_\varsigma}(x;s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=s}^{-s}E^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}[a(\vec{p},h)U_{k_\varsigma}(\vec{p},h;s)e^{ip\cdot x}+b^+(\vec{p},h)V_{k_\varsigma}(\vec{p},h;s)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

$$U_{k_\varsigma}(\vec{p},h;s) := \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(s;3)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h), V_{k_\varsigma}(\vec{p},h;s) := \Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(s;3)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)$$

推论1.3.1.

$$\begin{cases} a(\vec{p},h) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}U^{+k_\varsigma}(\vec{p},h;s)\psi_{k_\varsigma}(x;s)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r} \\ b^+(\vec{p},h) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}V^{+k_\varsigma}(\vec{p},h;s)\psi_{k_\varsigma}(x;s)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r} \end{cases}$$

推论1.3.2. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(s;3)\psi_{k_\varsigma}(x;s)=0[\Leftrightarrow](\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)\psi_{k_\varsigma}(x;s)=0$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(s;3)\psi_{k_\varsigma}(x;s)=0$

$\Leftrightarrow(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)\Gamma^{l_\varsigma}_{\underbrace{\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s-1}}(s-\frac{1}{2};3)\psi_{k_\varsigma}(x;s)=0$

$\Leftrightarrow(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}N^{k_\varsigma}_{\lambda_\varsigma l_\varsigma}(s;3)\psi_{k_\varsigma}(x;s)=0$ □

推论1.3.3. $(\gamma^a\otimes I_{**}\partial_a+m)\Gamma(s;3)\psi(x;s)=0\Leftrightarrow(\gamma^a\otimes I_*\partial_a+m)N(s;3)\psi(x;s)=0$

1.4 Bargmann-Wigner高旋量场的自旋方程

推论1.4.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(s;3)\psi_{k_\varsigma}(x;s)=0\Leftrightarrow(\gamma^a\otimes I_{**}\partial_a+m)\Gamma(s;3)\psi(x;s)=0$

$\Rightarrow[s\partial_a+iS_{ab}(s;3)\partial^b]\psi(x;s)=-\frac{1}{2}m\gamma_a(s;3)\psi(x;s)$

证明: $(\gamma_a\partial^a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(s;3)\psi_{k_\varsigma}(x;s)=0$

$\Rightarrow\gamma_{a\eta_\varsigma}{}^{\kappa_\varsigma}(\gamma_b\partial^b+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(s;3)\psi_{k_\varsigma}(x;s)=0$

$\Leftrightarrow[(\frac{1}{2}\{\gamma_a,\gamma_b\}+\frac{1}{2}[\gamma_a,\gamma_b])_{\eta_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}+m\gamma_{a\eta_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}]\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(s;3)\psi_{k_\varsigma}(x;s)=0$

$\Leftrightarrow[(\delta_{ab}\partial^b+2iS_{ab}\partial^b)_{\eta_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}+m\gamma_{a\eta_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}]\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(s;3)\psi_{k_\varsigma}(x;s)=0,S_{ab}=-\frac{i}{4}[\gamma_a,\gamma_b]$

$\Rightarrow\Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{\eta_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(s;3)[(\delta_{ab}\partial^b+2iS_{ab}\partial^b)_{\eta_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}+m\gamma^a{}_{\eta_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}]\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(s;3)\psi_{k_\varsigma}(x;s)=0$

$\Leftrightarrow[\delta_{ab}\partial^b+\frac{i}{s}S_{ab}(s;3)\partial^b+\frac{1}{2s}m\gamma_a(s;3)]_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(x;s)=0$
$\Leftrightarrow[s\delta_{ab}+iS_{ab}(s;3)]\partial^b\psi(x;s)=-\frac{1}{2}m\gamma_a(s;3)\psi(x;s)$
$\Leftrightarrow[s\partial_a+iS_{ab}(s;3)\partial^b]\psi(x;s)=-\frac{1}{2}m\gamma_a(s;3)\psi(x;s)$ □

推论1.4.2. $(\gamma^a\otimes I_{**}\partial_a+m)\Gamma(s;3)\psi(x;s)=0\Rightarrow[s\partial_a+iS_{ab}(s;3)\partial^b]\psi(x;s)=-\frac{1}{2}m\gamma_a(s;3)\psi(x;s)$

推论1.4.3. $[s\partial_a+iS_{ab}(s;3)\partial^b]\psi(x;s)=-\frac{1}{2}m\gamma_a(s;3)\psi(x;s)$
$\Leftrightarrow[s\partial_a+i\Omega_{ab}(s;3)\partial^b]\Gamma(s;3)\psi(x;s)=-\frac{1}{2}m\Omega_a(s;3)\Gamma(s;3)\psi(x;s)$
$\Leftrightarrow\{s\partial_a+i[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_*+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]\partial^b\}N(s;3)\psi(x;s)=-\frac{1}{2}m[\gamma^a\otimes I_*+I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]N(s;3)\psi(x;s)$

证明: $[s\partial_a+iS_{ab}(s;3)\partial^b]\psi(x;s)=-\frac{1}{2}m\gamma_a(s;3)\psi(x;s)$
$\Leftrightarrow\Gamma(s;3)[s\partial_a+iS_{ab}(s;3)\partial^b]\psi(x;s)=-\frac{1}{2}m\Gamma(s;3)\gamma_a(s;3)\psi(x;s)$
$\Leftrightarrow[s\partial_a+i\Omega_{ab}(s;3)\partial^b]\Gamma(s;3)\psi(x;s)=-\frac{1}{2}m\Omega_a(s;3)\Gamma(s;3)\psi(x;s)$ □

证明: $[s\partial_a+iS_{ab}(s;3)\partial^b]\psi(x;s)=-\frac{1}{2}m\gamma_a(s;3)\psi(x;s)$
$\Leftrightarrow N(s;3)[s\partial_a+iS_{ab}(s;3)\partial^b]\psi(x;s)=-\frac{1}{2}mN(s;3)\gamma_a(s;3)\psi(x;s)$
$\Leftrightarrow\{s\partial_a+i[S_{ab}(\frac{1}{2};3)\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}+I_4\otimes S_{ab}(s-\frac{1}{2};3)]\partial^b\}N(s;3)\psi(x;s)$
$=-\frac{1}{2}m[\gamma^a\otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}}+I_4\otimes\gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]N(s;3)\psi(x;s)$ □

1.5 Bargmann-Wigner高旋量场的类Dirac方程

推论1.5.1. $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(s;3)\psi_{k_\varsigma}(x;s)=0\Rightarrow[\gamma^a(s;3)\partial_a+2sm]\psi(x;s)=0$

证明: $(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(s;3)\psi_{k_\varsigma}(x;s)=0$

$\Rightarrow\Gamma_{j_\varsigma}^{\overbrace{\kappa_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(s;3)(\gamma^a\partial_a+m)_{\kappa_\varsigma}{}^{\lambda_\varsigma}\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdot\cdot\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}_{2s}}(s;3)\psi_{k_\varsigma}(x;s)=0$

$\Leftrightarrow [\frac{1}{2s}\gamma^a(s;3)\partial_a + m]_{j_\varsigma}{}^{k_\varsigma}\psi_{k_\varsigma}(x;s) = 0$
$\Leftrightarrow [\frac{1}{2s}\gamma^a(s;3)\partial_a + m]\psi(x;s) = 0$
$\Leftrightarrow [\gamma^a(s;3)\partial_a + 2sm]\psi(x;s) = 0$ □

推论1.5.2. $[\gamma^a(s;3)\partial_a + 2sm]\psi(x;s) = 0 \Leftrightarrow [\Omega^a(s;3)\partial_a + 2sm]\Gamma(s;3)\psi(x;s) = 0$
$\Leftrightarrow \{[\gamma^a \otimes I_* + I_4 \otimes \gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]\partial_a + 2sm\}N(s;3)\psi(x;s) = 0$
$\Leftrightarrow [I_4 \otimes \gamma^a(s-\frac{1}{2};3)\partial_a + (2s-1)m]N(s;3)\psi(x;s) = 0$

证明: $[\gamma^a(s;3)\partial_a + 2sm]\psi(x;s) = 0$
$\Leftrightarrow \Gamma(s;3)[\gamma^a(s;3)\partial_a + 2sm]\psi(x;s) = 0$
$\Leftrightarrow [\Omega^a(s;3)\partial_a + 2sm]\Gamma(s;3)\psi(x;s) = 0$ □

证明: $[\gamma^a(s;3)\partial_a + 2sm]\psi(x;s) = 0$
$\Leftrightarrow N(s;3)[\gamma^a(s;3)\partial_a + 2sm]\psi(x;s) = 0$
$\Leftrightarrow \{[\gamma^a \otimes I_{C^{2s-1}_{2s-1+3}} + I_4 \otimes \gamma^a(s-\frac{1}{2};3)]\partial_a + 2sm\}N(s;3)\psi(x;s) = 0$ □

1.6 Bargmann-Wigner方程高旋量场自旋基的矩阵表述

定义1.6.1.

$$\begin{cases} U(\vec{p},h;s) := \bar{\Gamma}(s;3)U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)[\Leftrightarrow]U_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) = \Gamma(s;3)U(\vec{p},h;s) \\ V(\vec{p},h;s) := \bar{\Gamma}(s;3)V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h)[\Leftrightarrow]V_{\underbrace{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma\otimes\cdot\cdot\sigma_\varsigma\otimes\tau_\varsigma}_{2s}}(\vec{p},h) = \Gamma(s;3)U(\vec{p},h;s) \end{cases}$$

推论1.6.1.

$$\begin{cases} U(\vec{p},h;s) = \sqrt{C^{s-h}_{2s}}\bar{\Gamma}(s;3)\underbrace{u(\vec{p},\tfrac{1}{2})\otimes u(\vec{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot}_{s+h}\underbrace{\cdot\, u(\vec{p},-\tfrac{1}{2})\otimes u(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h} \\ V(\vec{p},h;s) = \sqrt{C^{s-h}_{2s}}\bar{\Gamma}(s;3)\underbrace{v(\vec{p},\tfrac{1}{2})\otimes v(\vec{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot}_{s+h}\underbrace{\cdot\, v(\vec{p},-\tfrac{1}{2})\otimes v(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h} \end{cases}$$

定义1.6.2.

$$\begin{cases} \bar{U}(\vec{p},h;s) := \bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{\gamma_4\otimes\gamma_4\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)U(\vec{p},h;s) \\ \bar{V}(\vec{p},h;s) := \bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{\gamma_4\otimes\gamma_4\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)V(\vec{p},h;s) \end{cases}$$

1.7 Bargmann-Wigner方程平面波解的高自旋矩阵表述

定理1.7.1. $(\gamma^a \otimes I_*\partial_a + m)\Gamma(s;3)\psi(x;s) = 0, * = 4^{2s-1}$

$$\psi(x;s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=s}^{-s}E^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}[a(\vec{p},h)U(\vec{p},h;s)e^{ip\cdot x} + b^+(\vec{p},h)V(\vec{p},h;s)e^{-ip\cdot x}]d^3\vec{p}$$

$$\begin{cases} a(\vec{p},h) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}U^+(\vec{p},h;s)\psi(x;s)e^{-ip\cdot x}d^3\vec{r} \\ b^+(\vec{p},h) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\vec{p}=-\infty}^{+\infty}E^{-(s-\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{m}{E}}^{2s}V^+(\vec{p},h;s)\psi(x;s)e^{ip\cdot x}d^3\vec{r} \end{cases}$$

1.8 Bargmann-Wigner方程的两种自旋基之间的关系

推论1.8.1. $u(\vec{p},h) = -\varsigma\gamma_5 v(\vec{p},h), v(\vec{p},h) = -\varsigma\gamma_5 u(\vec{p},h), h = -\frac{1}{2},\frac{1}{2}$

推论1.8.2.
$$\begin{cases} U(\vec{p},h;s) = (-\varsigma)^{2s}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{\gamma_5\otimes\gamma_5\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)V(\vec{p},h;s) \\ V(\vec{p},h;s) = (-\varsigma)^{2s}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{\gamma_5\otimes\gamma_5\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)U(\vec{p},h;s) \end{cases}$$

推论1.8.3. $\begin{cases} U^*(\vec{p},h;s)=(-1)^{s+h}\varsigma^{2s}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{\sigma_y\otimes\sigma_y\cdots}^{4s}\Gamma(s;3)V(\vec{p},-h;s) \\ V^*(\vec{p},h;s)=(-1)^{s-h}\varsigma^{2s}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{\sigma_y\otimes\sigma_y\cdots}^{4s}\Gamma(s;3)U(\vec{p},-h;s) \end{cases}$

推论1.8.4. $\begin{cases} U(\vec{p},-h;s)=(-1)^{s-h}\varsigma^{2s}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{\sigma_y\otimes\sigma_y\cdots}^{4s}\Gamma(s;3)V^*(\vec{p},h;s) \\ V(\vec{p},-h;s)=(-1)^{s+h}\varsigma^{2s}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{\sigma_y\otimes\sigma_y\cdots}^{4s}\Gamma(s;3)U^*(\vec{p},h;s) \end{cases}$

推论1.8.5. $\begin{cases} U^*(\vec{p},h;s)=(-1)^{s-h}\varsigma^{2s}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{(\gamma_2\gamma_5)\otimes(\gamma_2\gamma_5)\cdots}^{2s}\Gamma(s;3)U(\vec{p},-h;s) \\ V^*(\vec{p},h;s)=(-1)^{s+h}\varsigma^{2s}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{(\gamma_2\gamma_5)\otimes(\gamma_2\gamma_5)\cdots}^{2s}\Gamma(s;3)V(\vec{p},-h;s) \end{cases}$

1.9 实表象下Bargmann-Wigner方程的两种自旋基之间的关系

推论1.9.1. $u_s(\vec{p},h)=-\varsigma\gamma_{s5}v_s(\vec{p},h),v_s(\vec{p},h)=-\varsigma\gamma_{s5}u_s(\vec{p},h),h=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$

推论1.9.2. $\begin{cases} U_s(\vec{p},h;s)=(-\varsigma)^{2s}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{\gamma_{s5}\otimes\gamma_{s5}\cdots}^{2s}\Gamma(s;3)V_s(\vec{p},h;s) \\ V_s(\vec{p},h;s)=(-\varsigma)^{2s}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{\gamma_{s5}\otimes\gamma_{s5}\cdots}^{2s}\Gamma(s;3)U_s(\vec{p},h;s) \end{cases}$

推论1.9.3. $\begin{cases} U_s^*(\vec{p},h;s)=(-1)^{s-h}\varsigma^{2s}V_s(\vec{p},-h;s) \\ V_s^*(\vec{p},h;s)=(-1)^{s+h}\varsigma^{2s}U_s(\vec{p},-h;s) \end{cases}$ $\begin{cases} U_s(\vec{p},-h;s)=(-1)^{s+h}\varsigma^{2s}V_s^*(\vec{p},h;s) \\ V_s(\vec{p},-h;s)=(-1)^{s-h}\varsigma^{2s}U_s^*(\vec{p},h;s) \end{cases}$

推论1.9.4. $\begin{cases} U_s^*(\vec{p},h;s)=(-1)^{s+h}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{\gamma_{s5}\otimes\gamma_{s5}\cdots}^{2s}\Gamma(s;3)U_s(\vec{p},-h;s) \\ V_s^*(\vec{p},h;s)=(-1)^{s-h}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{\gamma_{s5}\otimes\gamma_{s5}\cdots}^{2s}\Gamma(s;3)V_s(\vec{p},-h;s) \end{cases}$

1.10 Bargmann-Wigner方程自旋基的正交性质

推论1.10.1. $\begin{cases} \bar{U}(\vec{p},h;s)U(\vec{p},h';s)=\delta_{hh'},\bar{U}(\vec{p},h;s)V(\vec{p},h';s)=0 \\ \bar{V}(\vec{p},h;s)V(\vec{p},h';s)=\delta_{hh'},\bar{V}(\vec{p},h;s)U(\vec{p},h';s)=0 \end{cases}$

推论1.10.2. $\begin{cases} U^+(\vec{p},h;s)U(\vec{p},h';s)=(\frac{E}{m})^{2s}\delta_{hh'},U^+(\vec{p},h;s)V(-\vec{p},h';s)=0 \\ V^+(\vec{p},h;s)V(\vec{p},h';s)=(\frac{E}{m})^{2s}\delta_{hh'},V^+(\vec{p},h;s)U(-\vec{p},h';s)=0 \end{cases}$

1.11 Dirac方程自旋基的广义二项式定理及其推论

定理1.11.1.

$$\sum_{h=s}^{-s}C_{2s}^{s-h}\underbrace{u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdot u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h}\underbrace{u^+_{(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdot u^+_{\sigma'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})u^+_{\tau'_\varsigma)}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h}$$

$$=\overbrace{\sum_{h=1/2}^{-1/2}u_{\{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{(\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)\sum_{h=1/2}^{-1/2}u_{\mu_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{\mu'_\varsigma}(\vec{p},h)\cdots\sum_{h=1/2}^{-1/2}u_{\sigma_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{\sigma'_\varsigma}(\vec{p},h)]\sum_{h=1/2}^{-1/2}u_{\tau_\varsigma\}}(\vec{p},h)u^+_{\tau'_\varsigma)}(\vec{p},h)]}^{2s}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{h=s}^{-s}C_{2s}^{s-h}\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(s;3)\underbrace{u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdot u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h}\underbrace{u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\cdots}_{s+h}\underbrace{\cdot u^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},-\tfrac{1}{2})}_{s-h}\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}^{2s}}(s;3)$$

$$=\Gamma_{k_\varsigma}^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\cdots\sigma_\varsigma\tau_\varsigma}^{2s}}(s;3)\overbrace{\sum_{h=1/2}^{-1/2}u_{\lambda_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{\lambda'_\varsigma}(\vec{p},h)\cdots\sum_{h=1/2}^{-1/2}u_{\tau_\varsigma}(\vec{p},h)u^+_{\tau'_\varsigma}(\vec{p},h)]}^{2s}\Gamma_{k'_\varsigma}^{\overbrace{\lambda'_\varsigma\mu'_\varsigma\cdots\sigma'_\varsigma\tau'_\varsigma}^{2s}}(s;3)$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{h=s}^{-s} U(\vec{p},h;s)U^{+}(\vec{p},h;s)=\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{\sum_{h=1/2}^{-1/2} u(\vec{p},h)u^{+}(\vec{p},h)\otimes\sum_{h=1/2}^{-1/2} u(\vec{p},h)u^{+}(\vec{p},h)\otimes\cdot\cdot\sum_{h=1/2}^{-1/2} u(\vec{p},h)u^{+}(\vec{p},h)}^{2s}\Gamma(s;3)$$

1.12 Bargmann-Wigner方程准投影算子的定义和性质

定义1.12.1. $\begin{cases}\Lambda_{+}(\vec{p};s):=\sum\limits_{h=s}^{-s} U(\vec{p},h;s)U^{+}(\vec{p},h;s)\\ \Lambda_{-}(\vec{p};s):=\sum\limits_{h=s}^{-s} V(\vec{p},h;s)V^{+}(\vec{p},h;s)\end{cases}$

推论1.12.1. $\Lambda_{\pm}(\vec{p};s)=\bar{\Gamma}(s;3)\underbrace{\Lambda_{\pm}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\otimes\Lambda_{\pm}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\otimes\cdot\cdot\otimes\Lambda_{\pm}(\vec{p},\tfrac{1}{2})}_{2s}\Gamma(s;3)$

推论1.12.2. $\Lambda_{\pm}(\vec{p};s)=\frac{1}{(2m)^{2s}}\bar{\Gamma}(s;3)\underbrace{[(\pm m-i\gamma^{a}p_{a})\gamma^{4}]\otimes[(\pm m-i\gamma^{b}p_{b})\gamma^{4}]\otimes\cdot\cdot\})}_{2s}\Gamma(s;3)$

推论1.12.3.

$$\begin{cases}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s-h}U(\vec{p},h;s)V^{T}(\vec{p},-h;s)=\varsigma^{2s}\underbrace{[\Lambda_{+}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\bar{C}\gamma_{4}]\otimes[\Lambda_{+}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\bar{C}\gamma_{4}]\otimes\cdot\cdot\otimes[\Lambda_{+}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\bar{C}\gamma_{4}]}_{2s}\\ \sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}V(\vec{p},h;s)U^{T}(\vec{p},-h;s)=\varsigma^{2s}\underbrace{[\Lambda_{-}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\bar{C}\gamma_{4}]\otimes[\Lambda_{-}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\bar{C}\gamma_{4}]\otimes\cdot\cdot\otimes[\Lambda_{-}(\vec{p},\tfrac{1}{2})\bar{C}\gamma_{4}]}_{2s}\end{cases}$$

推论1.12.4.

$$\begin{cases}\sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s-h}U(\vec{p},h;s)V^{T}(\vec{p},-h;s)=\frac{\varsigma^{2s}}{(2m)^{2s}}\underbrace{[(m-i\gamma^{a}p_{a})C]\otimes[(m-i\gamma^{a}p_{a})C]\otimes\cdot\cdot\otimes[(m-i\gamma^{a}p_{a})C]}_{2s}\\ \sum\limits_{h=s}^{-s}(-1)^{s+h}V(\vec{p},h;s)U^{T}(\vec{p},-h;s)=\frac{\varsigma^{2s}}{(2m)^{2s}}\underbrace{[(-m-i\gamma^{a}p_{a})C]\otimes[(-m-i\gamma^{a}p_{a})C]\otimes\cdot\cdot\otimes[(-m-i\gamma^{a}p_{a})C]}_{2s}\end{cases}$$

2 Bargmann-Wigner方程对易规则的高旋量场表述

2.1 Bargmann-Wigner方程的协变对易规则

定理2.1.1. $[a(\vec{p},h),a^{+}(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^{3}(\vec{p}-\vec{p}'),[b(\vec{p},h),b^{+}(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^{3}(\vec{p}-\vec{p}'),[rest]_{-^{2s+1}}=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x;s),\psi^{+}_{k'_\varsigma}(x';s)]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\{\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^{a}\partial_{a})\gamma^{4}]\otimes[(m-\gamma^{b}\partial_{b})\gamma^{4}]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta(x-x')\\ [rest]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[\psi_{k_\varsigma}(x;s),\psi^{+}_{k'_\varsigma}(x';s)]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\{\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^{a}\partial_{a})\gamma^{4}]\otimes[(m-\gamma^{b}\partial_{b})\gamma^{4}]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta(x-x')\\ [\psi^{(+)}_{k_\varsigma}(x;s),\psi^{(+)+}_{k'_\varsigma}(x';s)]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\{\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^{a}\partial_{a})\gamma^{4}]\otimes[(m-\gamma^{b}\partial_{b})\gamma^{4}]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta^{(+)}(x-x')\\ [\psi^{(-)}_{k_\varsigma}(x;s),\psi^{(-)+}_{k'_\varsigma}(x';s)]_{-^{2s+1}}=\frac{i}{2^{2s-1}}\{\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^{a}\partial_{a})\gamma^{4}]\otimes[(m-\gamma^{b}\partial_{b})\gamma^{4}]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta^{(-)}(x-x')\\ [rest]_{-^{2s+1}}=0\end{cases}$$

推论2.1.1. $[\psi_{k_\varsigma}(x;s),\psi^{+}_{k'_\varsigma}(x';s)]_{-^{2s+1}}=2im^{2s}\Lambda_{+}(-i\partial;s)$

2.2 Bargmann-Wigner方程玻色子对易规则的两种等价描述

定义2.2.1. $\mathbb{X}^{\overbrace{ab\cdot\cdot}^{n}}_{k_\varsigma}(x;n):=\frac{1}{(2n)!}\Gamma^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n;3)\underbrace{\mathbb{X}^{a}_{\{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^{b}_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x)\cdot\cdot\}}_{n}=\Gamma^{\overbrace{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma\eta_\varsigma\xi_\varsigma\cdot\cdot}^{2n}}_{k_\varsigma}(n;3)\underbrace{\mathbb{X}^{a}_{\lambda_\varsigma\mu_\varsigma}(x)\mathbb{X}^{b}_{\eta_\varsigma\xi_\varsigma}(x)\cdot\cdot}_{n}$

$[\Leftrightarrow]\mathbb{X}^{\overbrace{ab\cdot\cdot}^{n}}(x;n)=\bar{\Gamma}(n;3)\underbrace{\mathbb{X}^{a}_{\lambda_\varsigma\otimes\mu_\varsigma}(x)\otimes\mathbb{X}^{b}_{\eta_\varsigma\otimes\xi_\varsigma}(x)\otimes\cdot\cdot}_{n},\mathbb{X}^{+\overbrace{a'b'\cdot\cdot}^{n}}(x';n)=[\underbrace{\mathbb{X}^{a'}_{\lambda'_\varsigma\otimes\mu'_\varsigma}(x)\otimes\mathbb{X}^{b'}_{\eta'_\varsigma\otimes\xi'_\varsigma}(x)\otimes\cdot\cdot}_{n}]^{+}\Gamma(n;3)$

引理2.2.1. $\mathbb{X}^{a}(p;1)(\eta_{aa'}+\frac{p_a p^{+}_{a'}}{m^2})\mathbb{X}^{+a'}(p;1)=2\bar{\Gamma}(1;3)[(m-i\gamma^a p_a)\gamma^4]\otimes[(m-i\gamma^b p_b)\gamma^4]\Gamma(1;3)$

引理2.2.2. $\mathbb{X}^{a}(x;1)(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^{+}_{a'}}{m^2})\mathbb{X}^{+a'}(x';1)\Delta(x-x')=2\bar{\Gamma}(1;3)[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\Gamma(1;3)\Delta(x-x')$

定理2.2.1. $[a(\vec{p},h),a^{+}(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),[b(\vec{p},h),b^{+}(\vec{p}',h')]_{-^{2s+1}}=\delta_{hh'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),[rest]_{-^{2s+1}}=0$

$\Leftrightarrow[\psi_{k_\varsigma}(x;n),\psi^{+}_{k'_\varsigma}(x';n)]=\frac{i}{2^{2n-1}}\{\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{2n}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta(x-x')$

$\Leftrightarrow[\psi_{k_\varsigma}(x;n),\psi^{+}_{k'_\varsigma}(x';n)]=\frac{i}{2^{3n-1}}\{\bar{\Gamma}(n;3)\mathbb{X}^{\overbrace{ab\cdot\cdot}^{n}}(x;n)\mathbb{X}^{+\overbrace{a'b'\cdot\cdot}^{n}}(x';n)\Gamma(n;3)\underbrace{(\eta_{aa'}-\frac{\partial_a\partial^{+}_{a'}}{m^2})\cdot\cdot}_{n}\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta(x-x')$

2.3 Bargmann-Wigner方程的对易函数、因果函数和费曼传播子

引理2.3.1. $\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)$

$=\sum_{n=0}^{2s}C^n_{2s}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[-(\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[-(\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{n}\otimes\overbrace{(m\gamma^4)\otimes(m\gamma^4)\otimes\cdot\cdot}^{2s-n}\Gamma(s;3)$

$=\sum_{n=0}^{2s}(-1)^n m^{2s-n}C^n_{2s}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{(\gamma^a\gamma^4)\otimes(\gamma^b\gamma^4)\otimes\cdot\cdot}^{n}\otimes\overbrace{(\gamma^4)\otimes(\gamma^4)\otimes\cdot\cdot}^{2s-n}\Gamma(s;3)\overbrace{\partial_a\partial_b\cdot\cdot}^{n}$

引理2.3.2. $[\theta(t),\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)]_{-}{}^{2s+1}$

$=\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)\otimes(\gamma^j\gamma^4)\cdot\cdot}^{l}\otimes\overbrace{I_4\otimes I_4\cdot\cdot}^{n-l}\otimes\overbrace{(\gamma^4)\otimes(\gamma^4)\cdot\cdot}^{2s-n}\Gamma(s;3)[\partial_t^{n-1-l}\delta(t)]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{l}$

推论2.3.1.

$$\begin{cases}\Delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}(x;s):=\frac{1}{2^{2s-1}}\{\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta(x)\\ \Delta^{(+)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(x;s):=\frac{1}{2^{2s-1}}\{\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta^{(+)}(x)\\ \Delta^{(-)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(x;s):=\frac{1}{2^{2s-1}}\{\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta^{(-)}(x)\\ \Delta^{(l)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(x;s):=\frac{1}{2^{2s-1}}\{\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta^{(l)}(x)\end{cases}$$

推论2.3.2.

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(x;s):=\frac{1}{2^{2s-1}}\{\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta^{(c)}(x)+\frac{1}{2^{2s-1}}\\ \sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)\otimes(\gamma^j\gamma^4)\cdot\cdot}^{l}\otimes\overbrace{I_4\otimes I_4\cdot\cdot}^{n-l}\otimes\overbrace{(\gamma^4)\otimes(\gamma^4)\cdot\cdot}^{2s-n}\Gamma(s;3)[\partial_t^{n-1-l}\delta(t)]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{l}\Delta(x)\\ \Delta^{(F)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(x;s)=i\Delta^{(c)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(x;s):=\frac{1}{2^{2s-1}}\{\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta_F(x)+\frac{i}{2^{2s-1}}\\ \sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)\otimes(\gamma^j\gamma^4)\cdot\cdot}^{l}\otimes\overbrace{I_4\otimes I_4\cdot\cdot}^{n-l}\otimes\overbrace{(\gamma^4)\otimes(\gamma^4)\cdot\cdot}^{2s-n}\Gamma(s;3)[\partial_t^{n-1-l}\delta(t)]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{l}\Delta(x)\end{cases}$$

推论2.3.3.

$$\begin{cases}\Delta^{(ret)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(x;s):=\frac{1}{2^{2s-1}}\{\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta^{(ret)}(x)+\frac{1}{2^{2s-1}}\\ \sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)\otimes(\gamma^j\gamma^4)\cdot\cdot}^{l}\otimes\overbrace{I_4\otimes I_4\cdot\cdot}^{n-l}\otimes\overbrace{(\gamma^4)\otimes(\gamma^4)\cdot\cdot}^{2s-n}\Gamma(s;3)[\partial_t^{n-1-l}\delta(t)]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{l}\Delta(x)\\ \Delta^{(adv)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(x;s):=\frac{1}{2^{2s-1}}\{\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta^{(adv)}(x)+\frac{1}{2^{2s-1}}\\ \sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)\otimes(\gamma^j\gamma^4)\cdot\cdot}^{l}\otimes\overbrace{I_4\otimes I_4\cdot\cdot}^{n-l}\otimes\overbrace{(\gamma^4)\otimes(\gamma^4)\cdot\cdot}^{2s-n}\Gamma(s;3)[\partial_t^{n-1-l}\delta(t)]\overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{l}\Delta(x)\end{cases}$$

引理2.3.3. $\Delta(x)\partial_t^n\delta(t)=\sum_{l=0}^{[(n-1)/2]}C_n^{2l+1}(\nabla^2-m^2)^l\partial_t^{n-2l-1}\delta^4(x)$

推论2.3.4. $\Delta(x)\partial_t^{n-1-l}\delta(t)=\sum_{r=0}^{[(n-l-2)/2]}C_{n-1-l}^{2r+1}(\nabla^2-m^2)^r\partial_t^{n-l-2-2r}\delta^4(x)$

推论2.3.5.

$$\begin{cases}\Delta^{(c)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(x;s):=\frac{1}{2^{2s-1}}\{\bar\Gamma(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta^{(c)}(x)\\ +\frac{1}{2^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-2}\sum_{r=0}^{[(n-l-2)/2]}C_{n-l-1}^{2r+1}\frac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\bar\Gamma(s;3)\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)\otimes(\gamma^j\gamma^4)\cdot\cdot}^{l}\otimes\overbrace{I_4\otimes I_4\cdot\cdot}^{n-l}\otimes\overbrace{(\gamma^4)\otimes(\gamma^4)\cdot\cdot}^{2s-n}\Gamma(s;3)\\ \overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{l}(\nabla^2-m^2)^r\partial_t^{n-l-2-2r}\delta^4(x)\\ \Delta^{(F)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(x;s)=i\Delta^{(c)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(x;s):=\frac{1}{2^{2s-1}}\{\bar\Gamma(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta_F(x)\\ +\frac{i}{2^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-2}\sum_{r=0}^{[(n-l-2)/2]}C_{n-l-1}^{2r+1}\frac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\bar\Gamma(s;3)\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)\otimes(\gamma^j\gamma^4)\cdot\cdot}^{l}\otimes\overbrace{I_4\otimes I_4\cdot\cdot}^{n-l}\otimes\overbrace{(\gamma^4)\otimes(\gamma^4)\cdot\cdot}^{2s-n}\Gamma(s;3)\\ \overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{l}(\nabla^2-m^2)^r\partial_t^{n-l-2-2r}\delta^4(x)\\ \Delta^{(F)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(p;s)=\frac{-i}{2^{2s-1}}\frac{\bar\Gamma(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)}{p^2+m^2-i\varepsilon}+\cdots\end{cases}$$

推论2.3.6.

$$\begin{cases}\Delta^{(ret)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(x;s):=\frac{1}{2^{2s-1}}\{\bar\Gamma(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta^{(ret)}(x)\\ +\frac{1}{2^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-2}\sum_{r=0}^{[(n-l-2)/2]}C_{n-l-1}^{2r+1}\frac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\bar\Gamma(s;3)\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)\otimes(\gamma^j\gamma^4)\cdot\cdot}^{l}\otimes\overbrace{I_4\otimes I_4\cdot\cdot}^{n-l}\otimes\overbrace{(\gamma^4)\otimes(\gamma^4)\cdot\cdot}^{2s-n}\Gamma(s;3)\\ \overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{l}(\nabla^2-m^2)^r\partial_t^{n-l-2-2r}\delta^4(x)\\ \Delta^{(adv)}_{k_\varsigma k'_\varsigma}(x;s):=\frac{1}{2^{2s-1}}\{\bar\Gamma(s;3)\overbrace{[(m-\gamma^a\partial_a)\gamma^4]\otimes[(m-\gamma^b\partial_b)\gamma^4]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)\}_{k_\varsigma k'_\varsigma}\Delta^{(adv)}(x)\\ +\frac{1}{2^{2s-1}}\sum_{n=0}^{2s}\sum_{l=0}^{n-2}\sum_{r=0}^{[(n-l-2)/2]}C_{n-l-1}^{2r+1}\frac{i^{n+l}m^{2s-n}(2s)!}{l!(n-l)!(2s-n)!}\bar\Gamma(s;3)\overbrace{(\gamma^i\gamma^4)\otimes(\gamma^j\gamma^4)\cdot\cdot}^{l}\otimes\overbrace{I_4\otimes I_4\cdot\cdot}^{n-l}\otimes\overbrace{(\gamma^4)\otimes(\gamma^4)\cdot\cdot}^{2s-n}\Gamma(s;3)\\ \overbrace{\partial_i\partial_j\cdot\cdot}^{l}(\nabla^2-m^2)^r\partial_t^{n-l-2-2r}\delta^4(x)\end{cases}$$

2.4 Bargmann-Wigner方程的等时对易规则

引理2.4.1.

$$\Delta_{k_\varsigma k'_\varsigma}(x;s)|_{t=0}=\frac{-i}{2^{2s-1}}\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C_{2s}^{2l+1}\bar\Gamma(s;3)[\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec\gamma\cdot\nabla)\otimes(m\gamma^4+\gamma^4\vec\gamma\cdot\nabla)\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\otimes I_4]\Gamma(s;3)(m^2-\nabla^2)^l\delta^3(\vec r)$$

定理2.4.1. $[\psi_{k_\varsigma}(\vec r,t),\psi^+_{k_{-\cdot\varsigma}}(\vec r',t)]_{-^{2s+1}}$

$$=\frac{1}{2^{2s-1}}\sum_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C_{2s}^{2l+1}\bar\Gamma(s;3)[\overbrace{(m\gamma^4+\gamma^4\vec\gamma\cdot\nabla)\otimes(m\gamma^4+\gamma^4\vec\gamma\cdot\nabla)\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\otimes I_4]\Gamma(s;3)(m^2-\nabla^2)^l\delta^3(\vec r-\vec r')$$

2.5 Bargmann-Wigner方程的有关引理

引理2.5.1. $\bar\Gamma(s;3)\overbrace{[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec\gamma\cdot\vec p)+E]\otimes[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec\gamma\cdot\vec p)+E]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)$

$$=\sum_{l=0}^{2s}C_{2s}^lE^l\bar\Gamma(s;3)\overbrace{(m\gamma^4+i\gamma^4\vec\gamma\cdot\vec p)\otimes(m\gamma^4+i\gamma^4\vec\gamma\cdot\vec p)\cdot\cdot}^{2s-l}\otimes\overbrace{I_4\otimes I_4\cdot\cdot}^{l}\Gamma(s;3)$$

引理2.5.2. $\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})-E]\otimes[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})-E]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)$
$=\sum\limits_{l=0}^{2s}(-1)^lC_{2s}^lE^l\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})\otimes(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})\cdot\cdot}^{2s-l}\otimes\overbrace{I_4\otimes I_4\cdot\cdot}^{l}\Gamma(s;3)$

引理2.5.3. $\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})+E]\otimes[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})+E]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)$
$+\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})-E]\otimes[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})-E]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)$
$=2\sum\limits_{l=0}^{[s]}C_{2s}^{2l}E^{2l}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})\otimes(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})\cdot\cdot}^{2s-2l}\otimes\overbrace{I_4\otimes I_4\cdot\cdot}^{2l}\Gamma(s;3)$

引理2.5.4. $\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})+E]\otimes[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})+E]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)$
$-\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})-E]\otimes[(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})-E]\otimes\cdot\cdot}^{2s}\Gamma(s;3)$
$=2\sum\limits_{l=0}^{[s-\frac{1}{2}]}C_{2s}^{2l+1}E^{2l+1}\bar{\Gamma}(s;3)\overbrace{(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})\otimes(m\gamma^4+i\gamma^4\vec{\gamma}\cdot\vec{p})\cdot\cdot}^{2s-2l-1}\otimes\overbrace{I_4\otimes I_4\cdot\cdot}^{2l+1}\Gamma(s;3)$

2.6 Bargmann-Wigner方程能量动量算符的提取

定理2.6.1. $H(s)=\int\sum\limits_{h=s}^{-s}E[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}=\int\psi^+(\vec{r},t;s)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-l}}\psi(\vec{r},t;s)d^3\vec{r}$

推论2.6.1. $\begin{cases}H(n)=\int\psi^+(\vec{r},t;n)\frac{1}{(m^2-\nabla^2)^{n-1}}\psi_{k_\varsigma}(\vec{r},t;n)d^3\vec{r}\\ H(n+\frac{1}{2})=\int\psi^+(\vec{r},t;n+\frac{1}{2})\frac{i\partial_t}{(m^2-\nabla^2)^n}\psi(\vec{r},t;n+\frac{1}{2})d^3\vec{r}\end{cases}$

定理2.6.2. $P(s)=\int\sum\limits_{h=s}^{-s}\vec{p}[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}=\int\psi^+(\vec{r},t;s)\frac{-i\nabla(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-l}}\psi(\vec{r},t;s)d^3\vec{r}$

推论2.6.2. $\begin{cases}P(n)=\int\psi^+(\vec{r},t;n)\frac{(-i\nabla)(i\partial_t)}{(m^2-\nabla^2)^n}\psi(\vec{r},t;n)d^3\vec{r}\\ P(n+\frac{1}{2})=\int\psi^+(\vec{r},t;n+\frac{1}{2})\frac{-i\nabla}{(m^2-\nabla^2)^n}\psi(\vec{r},t;n+\frac{1}{2})d^3\vec{r}\end{cases}$

2.7 Bargmann-Wigner方程的各种物理算符

定理2.7.1.
$$\begin{cases}P_u(s)=\int\psi^+(\vec{r},t;s)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi(\vec{r},t;s)d^3\vec{r}=\int\sum\limits_h p_u[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}\\ Q(s)=\int\psi^+(\vec{r},t;s)\frac{(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi(\vec{r},t;s)d^3\vec{r}=\int\sum\limits_h[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s-1}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}\\ N(s)=\int\psi^+(\vec{r},t;s)\frac{(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{m^2-\nabla^2})^{4s-1}}\psi(\vec{r},t;s)d^3\vec{r}=\int\sum\limits_h[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}\\ \vec{S}(s)=\int\psi^+(\vec{r},t;s)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi(\vec{r},t;s)d^3\vec{r}=\int\sum\limits_h\hat{p}[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}\\ \vec{M}(s)=\int\psi^+(\vec{r},t;s)\frac{\hat{\nabla}(i\partial_t)^{2s}}{(\sqrt{m^2-\nabla^2})^{4s-1}}\psi(\vec{r},t;s)d^3\vec{r}=\int\sum\limits_h\hat{p}[a^+(\vec{p},h)a(\vec{p},h)+(-1)^{2s-1}b(\vec{p},h)b^+(\vec{p},h)]d^3\vec{p}\end{cases}$$

2.8 Bargmann-Wigner方程的量子方程

定理2.8.1. $\begin{cases}(\gamma^a\otimes I_*\partial_a+m)\Gamma(s;3)\psi(\vec{r},t;s)=0,*=4^{2s-1}\\ P_u(s)=\int\psi^+(\vec{r},t;s)\frac{-i\partial_u(i\partial_t)^{2s-1}}{(m^2-\nabla^2)^{2s-1}}\psi(\vec{r},t;s)d^3\vec{r}\end{cases}\Rightarrow -i\partial_u\psi(\vec{r},t;s)=[\psi(\vec{r},t;s),P_u]$

第四十五章　基本粒子内部分量作用

自我评述：在本章中我大胆猜测提出一种新型的相互作用：粒子内部相互作用，是否正确有待实践验证。

1 基本粒子内部分量假设

基本粒子内部分量假设：假设基本粒子存在内部分量，每个分量对应一个几何点。标量粒子存在一个内部分量，对应一个几何点；中微子 [6]存在两个内部分量，对应两个几何点；光子 [8,9]存在三个内部分量，对应三个几何点；引力微子 [21]存在四个内部分量，对应四个几何点；引力子 [12–15]存在五个内部分量，对应五个几何点；电子 [5]存在四个内部分量，对应四个几何点。

内部分量作用本质上就是量子纠缠，作用形式与传统相互作用不同，不是吸引和排斥，而是相互内部分量关联，是一种新的相互作用。但相互作用的传递速度仍为光速，而不是瞬时传递的；几个夸克形成重子就是完全内部分量作用；平时的平面波叠加就是无内部分量作用。

2 粒子复合理论

2.1 两个中微子合成一个光子的物理机制

起初有2个独立的中微子χ和φ，然后发生一种目前还不知道的新相互作用，即内部分量间的相互作用，该作用使第一个中微子χ的第2分量在任何参考系下恒等于第二个中微子φ的第1分量，即$\chi_2\equiv\varphi_1$，也就是内部分量的两个几何点重合，发生这个作用后，将无法维持之前独立的协变性，因为在各自独立的洛仑兹变换到其它参考系时，$\chi_2\equiv\varphi_1$不能成立。所以导致的结果是使2个粒子共同形成一个新的协变性，产生新的自旋，从而变为新的粒子：光子。过程如下：

$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{bmatrix}\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\\ (\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\end{cases}\Leftrightarrow(\sigma\otimes I,-i\varsigma)^a\partial_a\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\\ \varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\\ \varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes I \tag{45.1}$$

两个内部分量几何点重合：$\chi_2\equiv\varphi_1$，则有意义的方程变为

$$\to(\sigma\otimes I,-i\varsigma)^a\partial_a\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\equiv\varphi_1\\ \varphi_1\equiv\chi_2\\ \varphi_2\end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\equiv\varphi_1\\ \varphi_1\equiv\chi_2\\ \varphi_2\end{bmatrix}\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}{}_{\text{原}}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}{}_{\text{新}} \tag{45.2}$$

$$\Leftrightarrow[\partial_a+S_{ab}(1,\varsigma)\partial^b]\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\equiv\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\equiv\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\tau(1)} \tag{45.3}$$

2.2 2s个中微子合成一个自旋-s粒子的物理机制

起初有2s个独立的中微子${}^i\varphi,i=1,2,\cdots,2s$，然后发生一种目前还不知道的新相互作用，即内部分量间的相互作用，该作用使第i个中微子${}^i\varphi$的第2分量在任何参考系下恒等于第i+1个中微子${}^{i+1}\varphi$的第1分量，即${}^i\varphi_2\equiv{}^{i+1}\varphi_1$，也就是内部分量的两个相邻几何点重合，发生这个作用后，将无法维持之前独立的协变性，因为在各自独立的洛仑兹变换到其它参考系时，${}^i\varphi_2\equiv{}^{i+1}\varphi_1$不能成立。所以导致的结果是使2s个粒子共同形成一个新

的协变性，产生新的自旋，从而变为新的粒子：自旋-s粒子。过程如下：

$$\begin{cases}(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\begin{bmatrix}{}^1\varphi_1\\{}^1\varphi_2\end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix}{}^1\varphi_1\\{}^1\varphi_2\end{bmatrix}\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\\(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\begin{bmatrix}{}^2\varphi_1\\{}^2\varphi_2\end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix}{}^2\varphi_1\\{}^2\varphi_2\end{bmatrix}\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\\\cdots\cdots\\(\sigma,-i\varsigma)^a\partial_a\begin{bmatrix}{}^{2s}\varphi_1\\{}^{2s}\varphi_2\end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix}{}^{2s}\varphi_1\\{}^{2s}\varphi_2\end{bmatrix}\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\end{cases}\tag{45.4}$$

$$\Leftrightarrow(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^a\partial_a\begin{bmatrix}{}^1\varphi_1\\{}^1\varphi_2\\{}^2\varphi_1\\{}^2\varphi_2\\\cdots\\{}^{2s}\varphi_1\\{}^{2s}\varphi_2\end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix}{}^1\varphi_1\\{}^1\varphi_2\\{}^2\varphi_1\\{}^2\varphi_2\\\cdots\\{}^{2s}\varphi_1\\{}^{2s}\varphi_2\end{bmatrix}\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}\otimes I_{2s}\tag{45.5}$$

两个相邻粒子内部分量几何点重合：${}^i\varphi_2\equiv{}^{i+1}\varphi_1$，则有意义的方程变为：

$$\to(\sigma\otimes I_{2s},-i\varsigma)^a\partial_a\begin{bmatrix}{}^1\varphi_1\\{}^1\varphi_2\equiv{}^2\varphi_1\\{}^2\varphi_1\equiv{}^1\varphi_2\\{}^2\varphi_2\equiv{}^3\varphi_1\\\cdots\\{}^{2s-1}\varphi_2\equiv{}^{2s}\varphi_1\\{}^{2s}\varphi_2\end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix}{}^1\varphi_1\\{}^1\varphi_2\equiv{}^2\varphi_1\\{}^2\varphi_1\equiv{}^1\varphi_2\\{}^2\varphi_2\equiv{}^3\varphi_1\\\cdots\\{}^{2s-1}\varphi_2\equiv{}^{2s}\varphi_1\\{}^{2s}\varphi_2\end{bmatrix}\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\sigma(\frac{1}{2})}{}_{\text{原}}\otimes e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\tau(s-\frac{1}{2})}{}_{\text{新}}\tag{45.6}$$

$$\Leftrightarrow[s\partial_a+S_{ab}(s,\varsigma)\partial^b]\begin{bmatrix}{}^1\varphi_1\\{}^1\varphi_2\equiv{}^2\varphi_1\\{}^2\varphi_2\equiv{}^3\varphi_1\\\cdots\\{}^{2s-2}\varphi_2\equiv{}^{2s-1}\varphi_1\\{}^{2s-1}\varphi_2\equiv{}^{2s}\varphi_1\\{}^{2s}\varphi_2\end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix}{}^1\varphi_1\\{}^1\varphi_2\equiv{}^2\varphi_1\\{}^2\varphi_2\equiv{}^3\varphi_1\\\cdots\\{}^{2s-2}\varphi_2\equiv{}^{2s-1}\varphi_1\\{}^{2s-1}\varphi_2\equiv{}^{2s}\varphi_1\\{}^{2s}\varphi_2\end{bmatrix}\sim e^{(i\omega+\varsigma\epsilon)\cdot\tau(s)}\tag{45.7}$$

以上的数学过程可以按多种方式进行正确理解，即若干个中微子先分成几组，每一组合成为一个新粒子，然后这些新粒子，再分组，每一组又合成为一个新粒子，这个过程可以循环往复，直到合成为单个自旋-s粒子为止，因此这个合成过程可以有好多种组合方式实现。所以两个中微子可以合成为一个光子；三个中微子可以合成为一个引力微子，一个中微子和一个光子可以合成为一个引力微子；四个中微子可以合成为一个引力子，两个中微子和一个光子可以合成为一个引力子，两个光子可以合成为一个引力子，一个中微子和一个引力微子可以合成为一个引力子等等。

3 常数张量与新相互作用

3.1 新的相互作用

定义3.1.1. $S_I=G\int dx^4\psi_{k_\varsigma}(s)\Gamma^{k_\varsigma}_{\underbrace{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma\cdots}_{2s}}(s)\overbrace{\psi_1^{A_\varsigma}\psi_2^{B_\varsigma}\psi_3^{C_\varsigma}\cdots}^{2s}+\{\}^*$

3.2 引力子合成相互作用

定义3.2.1. $S_{I1111}=G\int dx^4\psi_{k_\varsigma}(2)\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}(2)\psi_1^{A_\varsigma}\psi_2^{B_\varsigma}\psi_3^{C_\varsigma}\psi_4^{D_\varsigma}+\{\}^*$

定义3.2.2. $S_{I211}=G\int dx^4\psi_{k_\varsigma}(2)\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}(2)\psi_1^{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_2^{C_\varsigma}\psi_3^{D_\varsigma}+\{\}^*$

定义3.2.3. $S_{I22}=G\int dx^4\psi_{k_\varsigma}(2)\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}(2)\psi_1^{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_2^{C_\varsigma D_\varsigma}+\{\}^*$

定义3.2.4. $S_{I31}=G\int dx^4\psi_{k_\varsigma}(2)\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}(2)\psi_1^{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma}\psi_2^{D_\varsigma}+\{\}^*$

3.3 引力微子合成相互作用

定义3.3.1. $S_{I111}=G\int dx^4\psi_{k_\varsigma}(\frac{3}{2})\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma}(\frac{3}{2})\psi_1^{A_\varsigma}\psi_2^{B_\varsigma}\psi_3^{C_\varsigma}+\{\}^*$

定义3.3.2. $S_{I21}=G\int dx^4\psi_{k_\varsigma}(\frac{3}{2})\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma C_\varsigma D_\varsigma}(\frac{3}{2})\psi_1^{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_2^{C_\varsigma}+\{\}^*$

3.4 光子合成相互作用

定义3.4.1. $S_{I11}=G\int dx^4\psi_{k_\varsigma}(1)\Gamma^{k_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}(1)\psi_1^{A_\varsigma}\psi_2^{B_\varsigma}+\{\}^*$

定义3.4.2. $S_{I11}=G\int dx^4\psi_{\alpha_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{A_\varsigma B_\varsigma}\psi_1^{A_\varsigma}\psi_2^{B_\varsigma}+\{\}^*$

定义3.4.3. $S_{I11}=G\int dx^4\psi_{\alpha_\varsigma}\sigma^{\alpha_\varsigma}_{k_\varsigma l_\varsigma}(s)\psi_1^{k_\varsigma}(s)\psi_2^{l_\varsigma}(s)+\{\}^*$

3.5 新的类电磁相互作用

定理3.5.1. $S=\int dx^4\{-\frac{e}{4}F^{ab}F_{ab}-\nu_e^+(\sigma,-i)^a\partial_a\nu_e-\nu_\mu^+(\sigma,-i)^a\partial_a\nu_\mu-\nu_\tau^+(\sigma,-i)^a\partial_a\nu_\tau\}$
$+\frac{1}{2}G\int dx^4\{F_{ab}\sigma^{ab}_{+\alpha}\sigma^\alpha_{AB}[(m_e-m_\mu)\nu_e^A\nu_\mu^B+(m_\mu-m_\tau)\nu_\mu^A\nu_\tau^B+(m_\tau-m_e)\nu_\tau^A\nu_e^B]\}$

定理3.5.2. $S_I=\frac{1}{2}G\int dx^4\{F_{ab}\sigma^{ab}_{+\alpha}\sigma^\alpha_{AB}[\alpha_{e\mu}\nu_e^A\nu_\mu^B+\alpha_{\mu\tau}\nu_\mu^A\nu_\tau^B+\alpha_{\tau e}\nu_\tau^A\nu_e^B]\}$

定理3.5.3. $S_I=\frac{1}{2}G\int dx^4\{F_{ab}\sigma^{ab}_{+\alpha}\sigma^\alpha_{AB}(\nu_e^A\nu_\mu^B+\nu_\mu^A\nu_\tau^B+\nu_\tau^A\nu_e^B)\}$

定理3.5.4.

$\nu_e\to\gamma+\bar\nu_\mu\to\nu_\tau:\alpha_{e\mu}\alpha_{\mu\tau}$
$\nu_e\to\gamma+\bar\nu_\tau\to\nu_\mu:\alpha_{\mu\tau}\alpha_{\tau e}$
$\nu_e\to\gamma+\bar\nu_\mu\to\nu_e:\alpha_{e\mu}\alpha_{e\mu}$
$\nu_e\to\gamma+\bar\nu_\tau\to\nu_e:\alpha_{\tau e}\alpha_{\tau e}$
$\nu_\mu\to\gamma+\bar\nu_\tau\to\nu_e$
$\Psi=\vec E+i\vec B=\vec E+i\nabla\times\vec A$
$\Psi_i=E_i+i\varepsilon_i{}^{jk}\partial_jA_k$
$[\Psi_i(x),\Psi_j(x')]=i\varepsilon_i{}^{kl}\partial_{x_k}[A_l(x),E_j(x')]+i\varepsilon_j{}^{kl}\partial_{x'_k}[E_i(x),A_l(x')]$
$[\Psi_i(x),\Psi_j(x')]=-\varepsilon_{ij}{}^k(\partial_{x_k}+\partial_{x'_k})\delta^3(x-x')=0$

定理3.5.5.

$\Psi=\vec E+i\vec B=\vec E+i\nabla\times\vec A$
$\Psi_i=E_i+i\varepsilon_i{}^{jk}\partial_jA_k$
$[\Psi_i(x),\Psi_j^+(x')]=i\varepsilon_i{}^{kl}\partial_{x_k}[A_l(x),E_j(x')]-i\varepsilon_j{}^{kl}\partial_{x'_k}[E_i(x),A_l(x')]$
$[\Psi_i(x),\Psi_j^+(x')]=-\varepsilon_{ij}{}^k(\partial_{x_k}-\partial_{x'_k})\delta^3(x-x')=-2\varepsilon_{ij}{}^k\partial_{(x_k-x'_k)}\delta^3(x-x')$

参考文献

[1] Roger Penrose and Wolfgang Rindler. *Spinors and Space-Time, Volume 1: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields.* Cambridge University Press, 1984. 1, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 29, 41, 42, 7, 123, 139, 140, 144, 145, 147, 155, 157, 158, 163, 167, 173, 175, 184, 186, 202, 211, 528, 806, 830, 834, 849, 851

[2] Roger Penrose and Wolfgang Rindler. *Spinors and Space-Time, Volume 2: Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry.* Cambridge University Press, 1986. 1, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 29, 41, 42, 7, 123, 139, 140, 144, 145, 147, 155, 157, 158, 163, 167, 173, 175, 184, 186, 188, 202, 203, 211, 528, 806, 830, 834, 849, 851

[3] R. Penrose. Twistor algebra. *Journal of Mathematical Physics*, 8(2):345–366, 1967. 1, 14, 188, 203

[4] 樊恽，钱吉林，岑嘉评，刘恒，穆汉林主编. 《代数学辞典》. 华中师范大学出版社, 1994年. 1, 3, 7, 68

[5] P.A.M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics.* Oxford:Clarendon Press, 1930. 1, 13, 15, 32, 40, 42, 43, 11, 137, 184, 206, 207, 218, 537, 543, 550, 615, 787, 803, 839, 847, 877, 977

[6] H. Weyl. Quantenmechanik und gruppentheorie. *Zeitschrift Für Physik*, 46(1-2):1–46, 1927. 1, 13, 40, 42, 135, 137, 184, 550, 803, 847, 977

[7] C.N. Yang and R.L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical Review*, 96(1):191–195, 1954. 1, 12, 13, 150, 184

[8] 余恒清，全泽松. 《电磁波理论解题指南》. 电子科技大学出版社, 1995年. 1, 11, 12, 13, 138, 141, 144, 147, 164, 168, 172, 176, 977

[9] 李子平. 《经典和量子约束系统及其对称性质》. 北京工业大学出版社, 1993年. 1, 13, 16, 10, 181, 233, 977

[10] J.D.比约肯，S.D.德雷尔. 《相对论量子力学》. 科学出版社, 1984年. 1, 15, 206, 207

[11] 胡瑶光. 《规范场论》. 华东师范大学出版社, 1984年. 1

[12] A.爱因斯坦. 《相对论的意义》. 科学出版社, 1979年. 1, 12, 150, 158, 169, 170, 977

[13] S.温伯格. 《引力论和宇宙论》. 科学出版社, 1980年. 1, 12, 16, 150, 158, 170, 233, 977

[14] 刘辽. 《广义相对论》. 高等教育出版社, 1987年. 1, 12, 150, 158, 170, 977

[15] S.W.霍金，G.F.R.埃利斯. 《时空的大尺度结构》. 湖南科技出版社, 2006年. 1, 12, 150, 158, 166, 170, 977

[16] Alan H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, 23(2):347–356, 1981. 1

[17] Edward Witten. M-theory. *American Mathematical Society Providence Ri*, 1, 1998. 1

[18] V. Bargmann and E.P. Wigner. Group theoretical discussion of relativistic wave equations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 34(5):211–23, 1948. 1, 14, 15, 30, 31, 32, 33, 38, 39, 40, 41, 42, 49, 205, 208, 211, 214, 215, 550, 568, 577, 592, 615, 616, 625, 626, 632, 746, 747, 755, 768, 769, 771, 776, 777, 793, 820, 822, 823, 827, 830, 835, 836, 837, 839, 841, 843, 844, 847, 969

[19] A. Salam, R. Delbourgo, and J. Strathdee. The covariant theory of strong interaction symmetries. *Proceedings of the Royal Society A*, 284(1396):146–158, 1965. 1, 15, 213

[20] 黄时中. 高自旋粒子的波动方程、波函数、投影算符和传播子研究. PhD thesis, 中国科学技术大学, 2002年. 1, 5, 15, 31, 32, 33, 38, 39, 42, 21, 214, 215, 577, 591, 592, 625, 626, 746, 768, 776, 822, 823, 827, 835, 836, 837, 841, 843, 844, 847

[21] William Rarita and Julian Schwinger. On a theory of particles with half-integral spin. *Physical Review*, 60(1):61, 1941. 1, 13, 15, 31, 33, 39, 178, 215, 217, 592, 626, 768, 977

[22] P.A.M. Dirac. Relativistic wave equations. *Proceedings of the Royal Society A*, 155:447–459, 1936. 1

[23] M. Fierz and W. Pauli. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society A*, 173(953):211–232, 1939. 1, 15, 31, 32, 37, 38, 39, 214, 217, 577, 625, 727, 746, 776

[24] J.D. Jackson. 《经典电动力学》. 人民教育出版社, 1980年. 2, 16, 17, 26, 27, 28, 235, 239, 242, 255, 257, 429, 471, 478

[25] 王永久，唐智明. 《引力理论与引力效应》. 湖南科学技术出版社, 1990年. 2, 16, 235, 239

[26] 张宗燧. 《电动力学及狭义相对论（第二版）》. 北京大学出版社, 2004年. 2, 16, 19, 26, 27, 28, 235, 239, 299, 429, 471, 478

[27] 周邦融. 《量子场论》. 高等教育出版社, 2007年. 2, 9, 10, 24, 25, 26, 38, 119, 120, 121, 122, 394, 399, 400, 412, 416, 440, 447, 747

[28] S. Weinberg. 《*The Quantum Theory of Fields Vol I: Foundations*》. Cambridge University Press, 1995年. 2, 9, 10, 24, 25, 26, 119, 120, 121, 122, 394, 412, 416, 440, 447

[29] R.E. Behrends and C. Fronsdal. *Physical Review*, 106(345), 1957. 2, 591, 728, 729

[30] C. Fronsdal. *Nuovo Cimento Suppl.*, 9(416), 1958. 2, 591, 728, 729

[31] 施水荣. 《各种粒子的量子方程》. 百度文库, 2006年. 2

[32] 施水荣. 《粒子方程的重新表述-第一版》. 豆丁文库, 2015年. 2

[33] S.R. Shi. *A New Formalism of Arbitrary Spin Particle Equations*. http://vixra.org/abs/1610.0277, 2016. 2

[34] 施水荣. 《各种自旋粒子方程的重新表述与推广》. 豆丁文库, 2016年. 2

[35] 施水荣. 《各种自旋粒子方程的重新表述与推广第二版》. 豆丁文库, 2018年. 2

[36] 施水荣. 《各种自旋粒子方程的重新表述与推广第三版》. 豆丁文库, 2019年. 2

[37] [德]W.顾莱纳，[美]缪勒. 《量子力学:对称性》. 北京大学出版社, 2002年. 4, 36, 1, 708, 711, 722

[38] 北京大学物理系编写组. 《量子统计物理学》. 北京大学出版社, 1987年. 9, 117

[39] A. Ashtekar. New variables for classical and quantum gravity. *Physical Review Letters*, 57(18):2244–2247, 1986. 12, 151, 152

[40] E.P. Wigner. On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. *Ann.math*, 40(1):149, 1939. 17, 257

[41] 何宝鹏，熊钰庆编著. 《量子场论导论》. 华南理工大学出版社, 1991年. 19, 300

[42] H.H.波戈留波夫，Д.B.希尔科夫. 《量子场论导引》. 科学出版社, 1957年. 23, 25, 26, 38, 384, 412, 415, 416, 440, 447, 747

[43] D.卢里著，董明德等译. 《粒子和场》. 科学出版社, 1981年. 25, 26, 38, 405, 412, 416, 440, 447, 747

[44] 杨泽森. 《高等量子力学》. 北京大学出版社, 2007年. 36, 708, 711

[45] 刘希明. 《高等量子力学》. 山东科学技术出版社, 2002年. 36, 8, 708, 711

[46] 张启仁. 《量子力学》. 科学出版社, 2002年. 36, 708, 711

[47] 李正中. 《固体物理-第二版》. 高等教育出版社, 2002年. 37, 723

[48] J. Polchinski. 《*String theory*》. Cambridge University Press, 1998年. 42, 848

[49] E. Kiritsis，吕海港翻译. 《超弦理论导论》. 2002年. 42, 854

[50] Ryoyu Utiyama. Invariant theoretical interpretation of interaction. *Physical Review*, 101(5):1597–1607, 1956. 159

[51] T.W.B. Kibble. Lorentz invariance and the gravitational field. *Journal of Mathematical Physics*, 2(2):212–221, 1961. 159

[52] 郭汉英，吴詠时，张元仲. 引力规范理论的一种方案. 科学通报, 18(2):72–74, 1973年. 159

[53] 邹振隆，黄硼，张元仲，李根道，安瑛，陈时，吴詠时，张历宁，何祚庥，郭汉英. 关于引力规范理论的研究. 中国科学, 22(04):366–372, 1979年. 159