- La Transformation de Bursa-Wolf -
Présentation des Cas de 4,5 et 7 Paramètres

Abdelmajid BEN HADJ SALEM, Ingénieur Géographe Général

Résumé

Dans cette note, on présente la transformation de passage d'un système géodésique à un autre système géodésique dite de Bursa-Wolf à sept paramètres en montrant comment déterminer les 7 paramètres par la méthode des moindres carrés et les calculer numériquement suivant le nombre des paramètres 4,5 ou 7.

Abstract

In this note, we present the Bursa-Wolf seven-parameter transformation from one geodetic system to another, showing how to determine the 7 parameters by the method of least squares and calculate them numerically following the number of the parameters 4,5 or 7.

Mai 2024

Version 2.

Abdelmajid BEN HADJ SALEM,
e-mail : abenhadjsalem@gmail.com

- La Transformation de Bursa-Wolf -
Présentation des Cas de 4, 5 et 7 Paramètres

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM

A Mon Collègue et Ami Mohamed Charfi,
Ingénieur Géographe Général

1 INTRODUCTION

Avec l'introduction de la technologie de positionnement par GPS (Global Positioning System), laquelle fournit à l'utilisateur sa position (X,Y,Z) tridimensionnelle dans le système géocentrique mondial dit $WGS84$ (World Geodetic System 1984), il est nécessaire de savoir la transformation de passage du système géodésique mondial au système géodésique national ou local. On présente ci-après le modèle de Bursa-Wolf de transformations de passage à 7 paramètres.

On utilise par la suite les notations suivantes :
- (X_1,Y_1,Z_1) les coordonnées cartésiennes 3D dans le système local (système 1),
- (X_2,Y_2,Z_2) les coordonnées cartésiennes 3D dans le système géocentrique $WGS84$ (système 2),
- $(\varphi_1,\lambda_1,he_1)$ les coordonnées géodésiques dans le système 1,
- $(\varphi_2,\lambda_2,he_2)$ les coordonnées géodésiques dans le système 2.

2 LE MODÈLE DE BURSA - WOLF

Ce modèle s' écrit sous la forme vectorielle :

$$X_2 = T + (1+m).R(rx,ry,rz).X_1 \tag{1}$$

où :
- X_2 est le vecteur de composantes $(X_2,Y_2,Z_2)^T$, T désigne transposée,
- T est le vecteur translation de composantes $(T_X,T_Y,T_Z)^T$ entre les systèmes 1 et 2,
- $1+m$ est le facteur d'échelle entre les 2 systèmes,
- $R(rx,ry,rz)$ est la matrice de rotation 3×3 pour passer du système 1 au système 2,
- X_1 est le vecteur de composantes $(X_1,Y_1,Z_1)^T$.

En développant (1), on obtient :

$$\boxed{\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}} \tag{2}$$

avec (rx, ry, rz) les rotations comptées positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

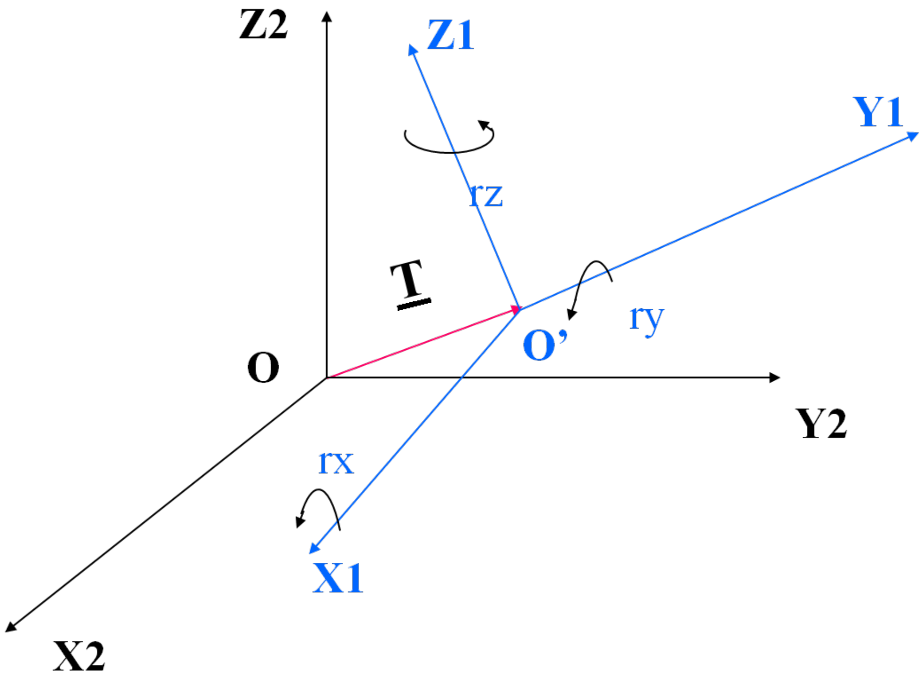

FIGURE 1 – Le Modèle de Burša-Wolf

3 Calcul des Paramètres du Modèle de Burša-Wolf par les Moindres Carrés

En considérant comme inconnues les paramètres $T_X, T_Y, T_Z, m, rx, ry, rz$, l'équation (2) s'écrit en gardant les termes du 1er ordre comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

En utilisant l'équation (4) pour les n points communs dans les systèmes 1 et 2 et en posant :

$$L = (X_{2i} - X_{1i})_{i=1,n}$$
$$U = (T_X, T_Y, T_Z, m, rx, ry, rz)^T$$

A la matrice $3n \times 7$:

$$A = {}_{3n}A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_i & 0 & -Z_i & Y_i \\ 0 & 1 & 0 & Y_i & Z_i & 0 & -X_i \\ 0 & 0 & 1 & Z_i & -Y_i & X_i & 0 \end{pmatrix}_{i=1,n} \tag{4}$$

et V le vecteur des résidus de la méthode des moindres carrés, la détermination des paramètres inconnus se fait par la résolution par les moindres carrés de l'équation :

$$AU = L + V \tag{5}$$

Soit :

$$\boxed{\overline{U} = (A^T.A)^{-1}.A^T.L} \tag{6}$$

La matrice $A^T.A$ est une matrice carrée 7×7 symétrique non singulière c'est-à-dire son déterminant non nul donc inversible.

Le vecteur résidu est donné par :

$$V = A.\overline{U} - L = A.(A^T.A)^{-1}.A^T.L - L$$

Le facteur de la variance unitaire est exprimé par la formule :

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{V^T V}{3n-7}} \tag{7}$$

et la matrice variance-covariance du vecteur $\overline{U}$ est donnée par :

$$\boxed{\sigma_{\overline{U}} = \sigma_0^2 (A^T A)^{-1}} \tag{8}$$

4 MÉTHODE PRATIQUE DU CALCUL DES PARAMÈTRES DE LA TRANSFORMATION DE BURSA-WOLF

En pratique, on dispose de n points connus dans le système 1 et dans le système 2.

4.1 Cas de 7 paramètres

On a donc pour un point l'équation :

$$\begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \tag{9}$$

Pour le vecteur $\boldsymbol{T}$, on peut écrire que $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_m + d\boldsymbol{T}$ avec :

$$\boldsymbol{T}_m = \begin{cases} Tx_m = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_{2i} - X_{1i})}{n} \\ Ty_m = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n}(Y_{2i} - Y_{1i})}{n} \\ Tz_m = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n}(Z_{2i} - Z_{1i})}{n} \end{cases} \quad , \quad d\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \end{pmatrix} \tag{10}$$

Le vecteur $\boldsymbol{T}_m = (Tx_m, Ty_m, Tz_m)^t$ est le vecteur translation moyenne et $d\boldsymbol{T} = (dTx, dTy, dTz)^t$ est le vecteur inconnu des corrections. Par suite, on obtient l'équation :

$$\begin{pmatrix} X_2 - X_1 - Tx_m \\ Y_2 - Y_1 - Ty_m \\ Z_2 - Z_1 - Tz_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \tag{11}$$

Pour faciliter les notations, l'indice en bas désigne le numéro du point, le système 1 sans indice et on indique par $'$, le système 2. Par exemple, pour le premier point, on a la relation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1' - X_1 - Tx_m \\ Y_1' - Y_1 - Ty_m \\ Z_1' - Z_1 - Tz_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{12}$$

avec (v_1, v_2, v_3) les résidus pour le point 1.

Ecrivons l'équation précédente pour les n points, on obtient l'équation des moindres carrés :

$$A.U = L + V \tag{13}$$

La matrice des coefficients $A = {}_{3n}A_7$, le vecteur des inconnues $U = {}_7U_1$, le vecteur des observables $L = {}_{3n}L_1$ et le vecteur résidu $V = {}_{3n}V_1$, on obtient successivement :

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\
0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\
0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & X_2 & 0 & -Z_2 & Y_2 \\
0 & 1 & 0 & Y_2 & Z_2 & 0 & -X_2 \\
0 & 0 & 1 & Z_2 & -Y_2 & X_2 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 0 & 0 & X_i & 0 & -Z_i & Y_i \\
0 & 1 & 0 & Y_i & Z_i & 0 & -X_i \\
0 & 0 & 1 & Z_i & -Y_i & X_i & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 0 & 0 & X_{n-1} & 0 & -Z_{n-1} & Y_{n-1} \\
0 & 1 & 0 & Y_{n-1} & Z_{n-1} & 0 & -X_{n-1} \\
0 & 0 & 1 & Z_{n-1} & -Y_{n-1} & X_{n-1} & 0 \\
1 & 0 & 0 & X_n & 0 & -Z_n & Y_n \\
0 & 1 & 0 & Y_n & Z_n & 0 & -X_n \\
0 & 0 & 1 & Z_n & -Y_n & X_n & 0
\end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$L = \begin{pmatrix}
X_1' - X_1 - Tx_m \\
Y_1' - Y_1 - Ty_m \\
Z_1' - Z_1 - Tz_m \\
X_2' - X_2 - Tx_m \\
Y_2' - Y_2 - Ty_m \\
Z_2' - Z_2 - Tz_m \\
\vdots \\
X_i' - X_i - Tx_m \\
Y_i' - Y_i - Ty_m \\
Z_i' - Z_i - Tz_m \\
\vdots \\
X_{n-1}' - X_{n-1} - Tx_m \\
Y_{n-1}' - Y_{n-1} - Ty_m \\
Z_{n-1}' - Z_{n-1} - Tz_m \\
X_n' - X_n - Tx_m \\
Y_n' - Y_n - Ty_m \\
Z_n' - Z_n - Tz_m
\end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix}
v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ \vdots \\ v_{3i-2} \\ v_{3i-1} \\ v_{3i} \\ \vdots \\ v_{3(n-1)-2} \\ v_{3(n-1)-1} \\ v_{3(n-1)} \\ v_{3n-2} \\ v_{3n-1} \\ v_{3n}
\end{pmatrix} \tag{15}$$

La solution par les moindres carrés est obtenue en minimisant la somme des carrés des résidus soit $\sum_i v_i^2 = V^t.V = ||V||^2$. Or la norme au carré du vecteur résidu est la fonction scalaire en fonction du vecteur U des inconnues soit :

$$F(U) = V^t.V = (A.U - L)^t.(A.U - L) = (U^tA^t - L^t).(A.U - L) = U^t.(A^t.A).U - 2L^t.A.U + L^t.L \tag{16}$$

On pose $N = A^t.A =_7 N_7$, cette matrice est carrée appelée matrice normale. Elle est inversible car la matrice N est définie positive c'est-'a-dire soit W est un vecteur 7×1, alors $W^T.N.W = W^t.A^t.A.W =$

$(A.W)^t.(A.W) = ||W||_A^2 \geq 0$ en définissant une norme par $||W||_A$ la norme habituelle du vecteur $A.W$, mais une norme vérifie si $||H||_A = 0 \Longrightarrow H = 0$. Il s'ensuit que si R vérifie $N.R = G$, alors cette équation a une seule solution égale à $R = N^{-1}.G$.

On démontre que $min F(U) \Longrightarrow dF(U) = 0$. On rappelle que si $y = X.X = X^t.X = ||X||^2$, alors $dy = 2X^t.dX = 2dX^t.X$, par suite :

$$dF = d(||A.U||^2 - 2L^t.A.U + ||L||^2)$$

Le vecteur L et la matrice A sont indépendants du vecteur U, par suite on obtient :

$$dF(U) = 2.(A.dU)^t.(A.U) - 2L^t.A.dU = 2dU^t(A^tA).U - 2dU^tA^t.L = 2dU^t.(N.U - A^t.L) \tag{17}$$

d'où :

$$dF(U) = 0 \Longrightarrow N.U - A^L = 0 \Longrightarrow U = N^{-1}A^t.L = (A^t.A)^{-1}.A^t.L \tag{18}$$

On trouve donc la solution des moindres carrés :

$$\boxed{\overline{U} = (A^t.A)^{-1}.A^t.L} \tag{19}$$

Dans notre étude, $A^t =_7 A^t_{3n}$ et $N = A^t.A$ est une matrice ${}_7N_7$. L'expression de la matrice A^t est comme suit :

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & X_2 & Y_2 & Z_2 & \cdots & X_i & Y_i & Z_i & \cdots & X_{n-1} & Y_{n-1} & Z_{n-1} & X_n & Y_n & Z_n \\ 0 & Z_1 & -Y_1 & 0 & Z_2 & -Y_2 & \cdots & 0 & Z_i & -Y_i & \cdots & 0 & Z_{n-1} & -Y_{n-1} & 0 & Z_n & -Y_n \\ -Z_1 & 0 & X_1 & -Z_2 & 0 & X_2 & \cdots & -Z_i & 0 & X_i & \cdots & -Z_{n-1} & 0 & X_{n-1} & -Z_n & 0 & X_n \\ Y_1 & -X_1 & 0 & Y_2 & -X_2 & 0 & \cdots & Y_i & -X_i & 0 & \cdots & Y_{n-1} & -X_{n-1} & 0 & Y_n & -X_n & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Le calcul de $N = A^t.A$ donne :

$$N = A^t.A = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \sum_i X_i & 0 & -\sum_i Z_i & \sum_i Y_i \\ 0 & n & 0 & \sum_i Y_i & \sum_i Z_i & 0 & -\sum_i X_i \\ 0 & 0 & n & \sum_i Z_i & -\sum_i Y_i & \sum_i X_i & 0 \\ \sum_i X_i & \sum_i Y_i & \sum_i Z_i & \sum_i D_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_i Z_i & -\sum_i Y_i & 0 & \sum_i (Y_i^2 + Z_i^2) & -\sum_i X_i Y_i & -\sum_i Z_i X_i \\ -\sum_i Z_i & 0 & \sum_i X_i & 0 & -\sum_i X_i Y_i & \sum_i (Z_i^2 + X_i^2) & -\sum_i Y_i Z_i \\ \sum_i Y_i & -\sum_i X_i & 0 & 0 & -\sum_i Z_i X_i & -\sum_i Y_i Z_i & \sum_i (X_i^2 + Y_i^2) \end{pmatrix} \tag{21}$$

avec $D_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2, \sum\limits_i = \sum\limits_{i=1}^{i=n}$. Notons :

$$\begin{cases} \Delta X_i = X_i' - X_i - Tx_m \\ \Delta Y_i = Y_i' - Y_i - Ty_m \\ \Delta Z_i = Z_i' - Z_i - Tz_m \end{cases}$$

On vérifie que $\sum_i \Delta X_i = \sum_i \Delta Y_i = \sum_i \Delta Z_i = 0$, avec cette notation le vecteur L s'écrit :

$$L = \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \end{pmatrix}_{i=1,n}$$

Le vecteur $A^t.L$ est un vecteur 7×1, il est donné par :

$$A^t.L = \begin{pmatrix} \sum_i \Delta X_i \\ \sum_i \Delta Y_i \\ \sum_i \Delta Z_i \\ \sum_i (X_i\Delta X_i + Y_i\Delta Y_i + Z_i\Delta Z_i) \\ \sum_i (Z_i\Delta Y_i - Y_i\Delta Z_i) \\ \sum_i (X_i\Delta Z_i - Z_i\Delta X_i) \\ \sum_i (Y_i\Delta X_i - X_i\Delta Y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum\limits_i (X_i\Delta X_i + Y_i\Delta Y_i + Z_i\Delta Z_i) \\ \sum\limits_i (Z_i\Delta Y_i - Y_i\Delta Z_i) \\ \sum\limits_i (X_i\Delta Z_i - Z_i\Delta X_i) \\ \sum\limits_i (Y_i\Delta X_i - X_i\Delta Y_i) \end{pmatrix} \tag{22}$$

On obtient la solution par les moindres carrés :

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \sum_i X_i & 0 & -\sum_i Z_i & \sum_i Y_i \\ 0 & n & 0 & \sum_i Y_i & \sum_i Z_i & 0 & -\sum_i X_i \\ 0 & 0 & n & \sum_i Z_i & -\sum_i Y_i & \sum_i X_i & 0 \\ \sum_i X_i & \sum_i Y_i & \sum_i Z_i & \sum_i D_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_i Z_i & -\sum_i Y_i & 0 & \sum_i (Y_i^2 + Z_i^2) & -\sum_i X_iY_i & -\sum_i Z_iX_i \\ -\sum_i Z_i & 0 & \sum_i X_i & 0 & -\sum_i X_iY_i & \sum_i (Z_i^2 + X_i^2) & -\sum_i Y_iZ_i \\ \sum_i Y_i & -\sum_i X_i & 0 & 0 & -\sum_i Z_iX_i & -\sum_i Y_iZ_i & \sum_i (X_i^2 + Y_i^2) \end{pmatrix}^{\textbf{-1}} .$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_i (X_i\Delta X_i + Y_i\Delta Y_i + Z_i\Delta Z_i) \\ \sum_i (Z_i\Delta Y_i - Y_i\Delta Z_i) \\ \sum_i (X_i\Delta Z_i - Z_i\Delta X_i) \\ \sum_i (Y_i\Delta X_i - X_i\Delta Y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \overline{U} \tag{23}$$

La résolution numérique peut se faire avec l'application Excel. Il suffit de créer les tableaux :
- $(X,Y,Z)_i, (X',Y',Z')_i, \Longrightarrow$ le vecteur translation approché $\boldsymbol{T}_m$.
- le vecteur L, la matrice A, la matrice $N = A^t.A$, le vecteur $A^t.L$.

Par la suite, calculer l'inverse de la matrice N, trouver $\overline{U}$, calculer le vecteur des résidus $V = A.\overline{U} - L$ et vérifier que $A^tV = 0$, sinon réitérer le processus.

4.2 Cas : 4 paramètres (dTx, dTy, dTz, m)

Le vecteur $\boldsymbol{T}_m = (Tx_m, Ty_m, Tz_m)^t$ est le vecteur translation moyenne et $d\boldsymbol{T} = (dTx, dTy, dTz)^t$ est le vecteur inconnu des corrections. Par suite, on obtient l'équation :

$$\begin{pmatrix} X_2 - X_1 - Tx_m \\ Y_2 - Y_1 - Ty_m \\ Z_2 - Z_1 - Tz_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \end{pmatrix} \tag{24}$$

Pour faciliter les notations, l'indice en bas désigne le numéro du point, le système 1 sans indice et on indique par $'$, le système 2. Par exemple, pour le premier point, on a la relation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_1 - X_1 - Tx_m \\ Y'_1 - Y_1 - Ty_m \\ Z'_1 - Z_1 - Tz_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{25}$$

avec (v_1, v_2, v_3) les résidus pour le point 1.

Ecrivons l'équation précédente pour les n points, on obtient l'équation des moindres carrés :

$$A.U = L + V \tag{26}$$

La matrice des coefficients $A = {}_{3n}A_4$, le vecteur des inconnues $U = {}_4U_1$, le vecteur des observables $L = {}_{3n}L_1$ et le vecteur résidu $V = {}_{3n}V_1$, on obtient successivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 \\ 1 & 0 & 0 & X_2 \\ 0 & 1 & 0 & Y_2 \\ 0 & 0 & 1 & Z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & X_i \\ 0 & 1 & 0 & Y_i \\ 0 & 0 & 1 & Z_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & X_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & Y_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & Z_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & X_n \\ 0 & 1 & 0 & Y_n \\ 0 & 0 & 1 & Z_n \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$
L = \begin{pmatrix} X'_1 - X_1 - Tx_m \\ Y'_1 - Y_1 - Ty_m \\ Z'_1 - Z_1 - Tz_m \\ X'_2 - X_2 - Tx_m \\ Y'_2 - Y_2 - Ty_m \\ Z'_2 - Z_2 - Tz_m \\ \vdots \\ X'_i - X_i - Tx_m \\ Y'_i - Y_i - Ty_m \\ Z'_i - Z_i - Tz_m \\ \vdots \\ X'_{n-1} - X_{n-1} - Tx_m \\ Y'_{n-1} - Y_{n-1} - Ty_m \\ Z'_{n-1} - Z_{n-1} - Tz_m \\ X'_n - X_n - Tx_m \\ Y'_n - Y_n - Ty_m \\ Z'_n - Z_n - Tz_m \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ \vdots \\ v_{3i-2} \\ v_{3i-1} \\ v_{3i} \\ \vdots \\ v_{3(n-1)-2} \\ v_{3(n-1)-1} \\ v_{3(n-1)} \\ v_{3n-2} \\ v_{3n-1} \\ v_{3n} \end{pmatrix} \tag{28}
$$

L'expression de la matrice A^t est comme suit :

$$
A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & X_2 & Y_2 & Z_2 & \cdots & X_i & Y_i & Z_i & \cdots & X_{n-1} & Y_{n-1} & Z_{n-1} & X_n & Y_n & Z_n \end{pmatrix} \tag{29}
$$

Le calcul de $N = A^t.A$ donne :

$$
N = A^t.A = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \sum_i X_i \\ 0 & n & 0 & \sum_i Y_i \\ 0 & 0 & n & \sum_i Z_i \\ \sum_i X_i & \sum_i Y_i & \sum_i Z_i & \sum_i D_i^2 \end{pmatrix} \tag{30}
$$

avec $D_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2, \sum_i = \sum_{i=1}^{i=n}$. Notons :

$$
\begin{cases} \Delta X_i = X'_i - X_i - Tx_m \\ \Delta Y_i = Y'_i - Y_i - Ty_m \\ \Delta Z_i = Z'_i - Z_i - Tz_m \end{cases}
$$

On vérifie que $\sum_i \Delta X_i = \sum_i \Delta Y_i = \sum_i \Delta Z_i = 0$, avec cette notation le vecteur L s'écrit :

$$
L = \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \end{pmatrix}_{i=1,n}
$$

Le vecteur $A^t.L$ est un vecteur 4×1, il est donné par :

$$
A^t.L = \begin{pmatrix} \sum_i \Delta X_i \\ \sum_i \Delta Y_i \\ \sum_i \Delta Z_i \\ \sum_i (X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_i (X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i) \end{pmatrix} \tag{31}
$$

On obtient la solution par les moindres carrés :

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \sum_i X_i \\ 0 & n & 0 & \sum_i Y_i \\ 0 & 0 & n & \sum_i Z_i \\ \sum_i X_i & \sum_i Y_i & \sum_i Z_i & \sum_i D_i^2 \end{pmatrix}^{\textbf{-1}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_i (X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \end{pmatrix} = \overline{U} \tag{32}$$

4.3 Cas : 5 paramètres (dTx, dTy, dTz, m, rz)

Par exemple, pour le premier point, on a la relation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1' - X_1 - Tx_m \\ Y_1' - Y_1 - Ty_m \\ Z_1' - Z_1 - Tz_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{33}$$

avec (v_1, v_2, v_3) les résidus pour le point 1.

Ecrivons l'équation précédente pour les n points, on obtient l'équation des moindres carrés :

$$A.U = L + V \tag{34}$$

La matrice des coefficients $A = {}_{3n}A_5$, le vecteur des inconnues $U = {}_5U_1$, le vecteur des observables $L = {}_{3n}L_1$ et le vecteur résidu $V = {}_{3n}V_1$, on obtient successivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 \\ 0 & 1 & 0 & Y_2 & -X_2 \\ 0 & 0 & 1 & Z_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & X_i & Y_i \\ 0 & 1 & 0 & Y_i & -X_i \\ 0 & 0 & 1 & Z_i & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & X_{n-1} & Y_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & Y_{n-1} & -X_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & Z_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & X_n & Y_n \\ 0 & 1 & 0 & Y_n & -X_n \\ 0 & 0 & 1 & Z_n & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \\ rz \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$L = \begin{pmatrix} X'_1 - X_1 - Tx_m \\ Y'_1 - Y_1 - Ty_m \\ Z'_1 - Z_1 - Tz_m \\ X'_2 - X_2 - Tx_m \\ Y'_2 - Y_2 - Ty_m \\ Z'_2 - Z_2 - Tz_m \\ \vdots \\ X'_i - X_i - Tx_m \\ Y'_i - Y_i - Ty_m \\ Z'_i - Z_i - Tz_m \\ \vdots \\ X'_{n-1} - X_{n-1} - Tx_m \\ Y'_{n-1} - Y_{n-1} - Ty_m \\ Z'_{n-1} - Z_{n-1} - Tz_m \\ X'_n - X_n - Tx_m \\ Y'_n - Y_n - Ty_m \\ Z'_n - Z_n - Tz_m \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ \vdots \\ v_{3i-2} \\ v_{3i-1} \\ v_{3i} \\ \vdots \\ v_{3(n-1)-2} \\ v_{3(n-1)-1} \\ v_{3(n-1)} \\ v_{3n-2} \\ v_{3n-1} \\ v_{3n} \end{pmatrix} \tag{36}$$

On trouve donc la solution des moindres carrés :

$$\boxed{\overline{U} = (A^t.A)^{-1}.A^t.L} \tag{37}$$

Dans notre étude, $A^t =_5 A^t_{3n}$ et $N = A^t.A$ est une matrice ${}_5N_5$. L'expression de la matrice A^t est comme suit :

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & X_2 & Y_2 & Z_2 & \cdots & X_i & Y_i & Z_i & \cdots & X_{n-1} & Y_{n-1} & Z_{n-1} & X_n & Y_n & Z_n \\ Y_1 & -X_1 & 0 & Y_2 & -X_2 & 0 & \cdots & Y_i & -X_i & 0 & \cdots & Y_{n-1} & -X_{n-1} & 0 & Y_n & -X_n & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Le calcul de $N = A^t.A$ donne :

$$N = A^t.A = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \sum_i X_i & \sum_i Y_i \\ 0 & n & 0 & \sum_i Y_i & -\sum_i X_i \\ 0 & 0 & n & \sum_i Z_i & 0 \\ \sum_i X_i & \sum_i Y_i & \sum_i Z_i & \sum_i D_i^2 & 0 \\ \sum_i Y_i & -\sum_i X_i & 0 & 0 & \sum_i (X_i^2 + Y_i^2) \end{pmatrix} \tag{39}$$

avec $D_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2, \sum\limits_i = \sum\limits_{i=1}^{i=n}$. Notons :

$$\begin{cases} \Delta X_i = X'_i - X_i - Tx_m \\ \Delta Y_i = Y'_i - Y_i - Ty_m \\ \Delta Z_i = Z'_i - Z_i - Tz_m \end{cases}$$

On vérifie que $\sum\limits_i \Delta X_i = \sum\limits_i \Delta Y_i = \sum\limits_i \Delta Z_i = 0$, avec cette notation le vecteur L s'écrit :

$$L = \begin{pmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \end{pmatrix}_{i=1,n}$$

Le vecteur $A^t.L$ est un vecteur 5×1, il est donné par :

$$A^t.L = \begin{pmatrix} \sum_i \Delta X_i \\ \sum_i \Delta Y_i \\ \sum_i \Delta Z_i \\ \sum_i (X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i) \\ \sum_i (Y_i \Delta X_i - X_i \Delta Y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_i (X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i) \\ \sum_i (Y_i \Delta X_i - X_i \Delta Y_i) \end{pmatrix} \tag{40}$$

On obtient la solution par les moindres carrés :

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \sum_i X_i & \sum_i Y_i \\ 0 & n & 0 & \sum_i Y_i & -\sum_i X_i \\ 0 & 0 & n & \sum_i Z_i & 0 \\ \sum_i X_i & \sum_i Y_i & \sum_i Z_i & \sum_i D_i^2 & 0 \\ \sum_i Y_i & -\sum_i X_i & 0 & 0 & \sum_i (X_i^2 + Y_i^2) \end{pmatrix}^{\textbf{-1}} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_i (X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i) \\ \sum_i (Y_i \Delta X_i - X_i \Delta Y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dTx \\ dTy \\ dTz \\ m \\ rz \end{pmatrix} = \overline{U} \tag{41}$$

5 Références

1. Abdelmajid Ben Hadj Salem. 2017. *Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés pour les Elèves-Ingénieurs Géomaticiens*, publié par Nour-Publishing. 2017. 365 pages. ISBN -13 : 978-3-330-96843-1.

(lien : https ://www.morebooks.de/store/gb/book/eléments-de-géodésie-et-de-la-théorie-des-moindres-carrés/isbn/978-3-330-96843-1).