

# The method of layered separation of $n$ -cubes along the main diagonal and its application in geometry

## Метод послойного разбиения $n$ -куба вдоль главной диагонали и его применение в геометрии

*Независимый исследователь  
Владислав Коцаков*

Представлена неочевидная возможность послойного разбиения любого  $n$ -куба, состоящего из  $x^n$   $n$ -кубиков (включая наглядно осязаемые  $2D$  и  $3D$ ), на слои этих кубиков, последовательно размещенных вдоль главной диагонали этого  $n$ -куба. При этом число  $n$ -кубиков в каждом слое оказалось тесно связанным с числами треугольника Паскаля. Вычислены коэффициенты разрезания каждого  $n$ -кубика из последних  $(n-1)$  слоев из них сечением размерности  $(n-1)D$ .

Приведены примеры, позволяющие наметить некоторые пути дальнейшего изучения данной возможности.

В Дополнении показана возможность использования данного метода для доказательства формулы объема тетраэдра без использования инфинитезимальных методов.

Начнем с достаточно несложного примера:

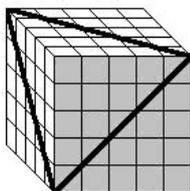


Рис.1

В обычном кубе  $5 \times 5 \times 5$  выполнена секущая плоскость. Вопрос: сколько кубиков она разрежет?

Если вы сможете за минуту их сосчитать, снимая по одному слою кубиков сверху (или снизу) большого куба, то у вас отличное пространственное воображение.

Второй вопрос сложнее:  $4$ -куб  $5 \times 5 \times 5 \times 5$  разрезан "плоским" сечением  $3D$  (это будет правильный тетраэдр) по аналогии с предыдущим.

Вопрос такой же: сколько  $4$ -кубиков разрежет это сечение?

Наглядность здесь явно не сможет помочь ввиду отсутствия у нас опыта наблюдения в  $4D$ , и без какого-либо математического метода подсчета ответить на вопрос не удастся.

Мне удалось обнаружить возможность послойного разбиения  $n$ -куба вдоль его главной диагонали на слои составляющих его  $n$ -кубиков.

Для двухмерного пространства:

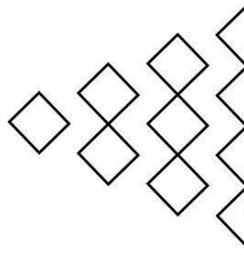


Рис.2 Половина квадрата разложена на слои квадратов

$$\frac{4^2}{2} = 1 + 2 + 3 + \frac{1}{2} \cdot 4$$

Целые числа показывают количество квадратов в каждом слое, а дробь  $1/2$  есть коэффициент разрезания квадратов последнего слоя.

Для  $3D$ :

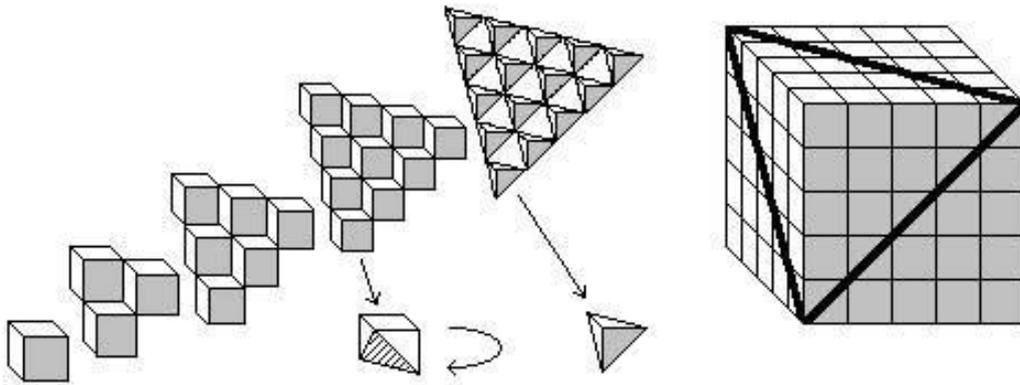


Рис.3 Одна шестая куба разложена на слои кубиков

$$\frac{5^3}{6} = 1 + 3 + 6 + \frac{5}{6} \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot 15$$

Целые числа показывают количество кубиков в каждом слое, которое тесно связано с числами треугольника Паскаля, а дроби  $5/6$  и  $1/6$  – коэффициенты разрезания кубиков предпоследнего и последнего слоев.

При этом получаем ответ на первый наш вопрос – разрезано будет 25 кубиков.

В  $4D$  и выше наглядность исчезает, однако можно воспользоваться следующим подходом: «При проектировании всех вершин  $n$ -куба на одну из его главных диагоналей последняя будет разделена ими на  $n$  одинаковых частей» (Д.Гильберт, С.Кон-Фоссен Наглядная геометрия).

При этом число вершин  $n$ -куба, спроектированных в каждую точку главной диагонали, представляет  $n$ -ую строку треугольника Паскаля: для квадрата – 1 2 1, для куба – 1 3 3 1, для 4-куба – 1 4 6 4 1 и т.д.

Любой  $n$ -куб можно разрезать на  $x^n$  одинаковых  $n$ -кубиков (элементов), где  $x$  – число разрезов каждого ребра большого куба.

Это позволит нам обойти необходимость наглядного представления самого  $n$ -куба и его слоев из элементов. Мы будем анализировать только взаимное расположение главных

диагоналей этих элементов в виде последовательных слоев вдоль главной диагонали  $n$ -куба.

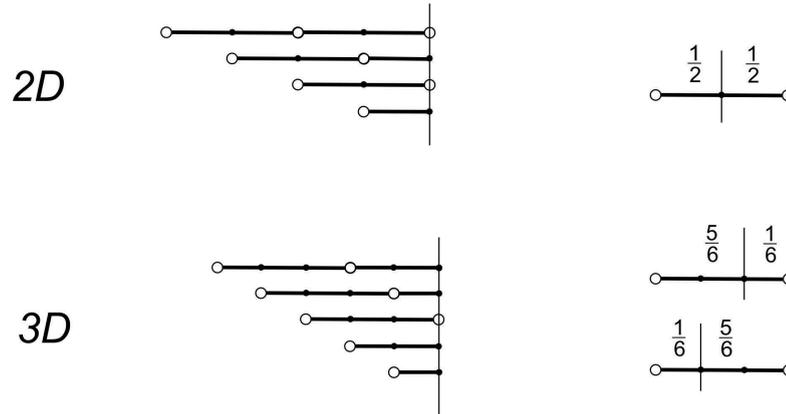


Рис. 4 Главные диагонали элементов для вышеприведенных квадрата и куба на рис.2 и 3  
Наблюдаем смещение главных диагоналей элементов, из которых составлены  $1/2$  квадрата и  $1/6$  куба, в каждом последующем слое. Справа показаны коэффициенты разрезания элементов последовательных слоев.

Покажем расположение главных диагоналей элементов  $4$ -куба.

Поскольку второй слой элементов соединяется плотно (вершина - к вершине, ребро - к ребру, грань - к грани ...) с первоначальным, состоящим из одного  $4$ -кубика, то главные диагонали элементов второго слоя будут смещены относительно исходного на  $1/4$  часть. Каждый последующий слой смещает свои главные диагонали по отношению к предыдущему на столько же. И только через четыре смещения диагонали текущего и исходного слоев совместятся.

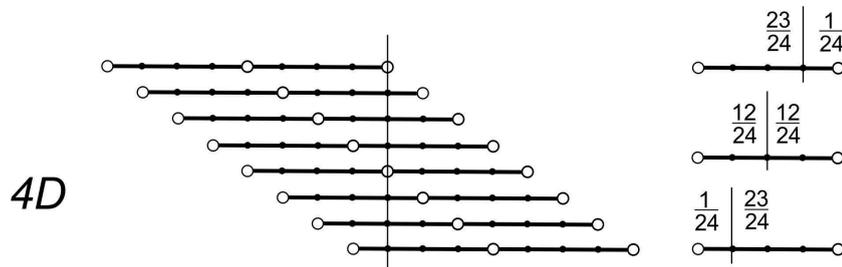


Рис.5  $4$ -мерный куб, смотрим прямо на главные диагонали его элементов. Показано только по одной диагонали каждого слоя. Справа приведены коэффициенты разбиения элементов последовательных слоев

Заменяя в этих рассуждениях цифру  $4$  на  $n$  можно увидеть расположение слоев элементов для любого  $n$ -куба.

Отсюда следует, что для любого  $nD$  разложение  $n$ -куба на слои элементов будет аналогичным по наглядности  $2D$  и  $3D$ , причем сечение размерности  $(n-1)D$  всегда разрежет  $(n-1)$  слоев элементов.

Подтвердим наши рассуждения следующей формулой для  $4$ -куба из  $x^4$  элементов:

$$\frac{x^4}{24} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} + \frac{23}{24} \frac{x(x-1)(x-2)}{6} + \frac{12}{24} \frac{(x+1)x(x-1)}{6} + \frac{1}{24} \frac{(x+2)(x+1)x}{6}$$

Первое слагаемое – это число неразрезанных 4-кубиков, а дроби  $\frac{23}{24}$ ,  $\frac{12}{24}$  и  $\frac{1}{24}$  – коэффициенты разрезания трех последующих слоев из 4-кубиков вдоль главной диагонали 4-куба с длиной ребра  $x$ .

Раскрывая скобки и приведя подобные, убеждаемся в справедливости равенства.

Несложно увидеть при этом и ответ на второй вопрос: для 4-куба при  $x=5$  будет разрезано 65 4-кубиков (послойно  $10+20+35$ ).

Для каждого  $nD$  существует свой набор коэффициентов разрезания  $n$ -кубиков, которые очень удобно разместились на треугольнике Паскаля.

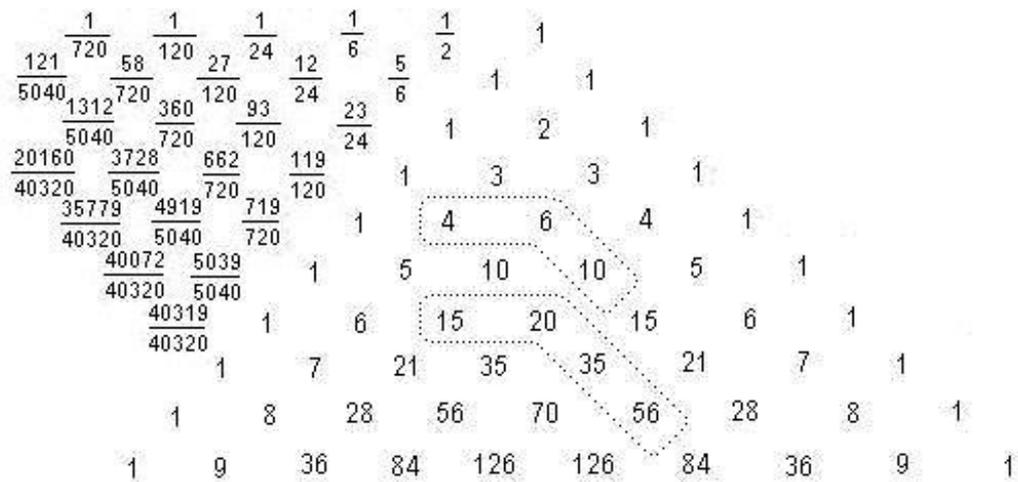


Рис.6 Треугольник Паскаля с коэффициентами разрезания  $n$ -кубиков

Вычисление коэффициентов для любого  $nD$  не сложно и начинается с разрезания первого слоя, состоящего из одного элемента ( $n$ -кубика), для которого коэффициент равен  $1/n!$ . Второй коэффициент вычисляется из анализа двух слоев элементов и так далее.

$$\frac{4^3}{6} = 1 + 3 + \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot 10$$

$$\frac{6^4}{24} = 1 + 4 + 10 + \frac{23}{24} \cdot 20 + \frac{12}{24} \cdot 35 + \frac{1}{24} \cdot 56$$

Эти числовые примеры показаны на рис.6, где выделены штриховыми линиями.

Если рис.2 обычен и понятен, то рис.3 достаточно психологически непросто. Мне удалось его увидеть только во время игр с ребенком простыми деревянными кубиками.

Приведем пример для восьмимерного пространства:

$$\frac{8^8}{8!} = \frac{35779}{40320} \cdot 1 + \frac{20160}{40320} \cdot 8 + \frac{4541}{40320} \cdot 36 + \frac{248}{40320} \cdot 120 + \frac{1}{40320} \cdot 330$$

Здесь дробные числа есть коэффициенты разрезания 8-мерных кубиков для каждого их слоя, а целые числа – количество элементов в каждом слое.

Второй пример будет наглядно-геометрический для четырехмерного пространства. Для 4-куба  $3 \times 3 \times 3 \times 3$  можно показать вид сечения  $3D$ , которым режутся три слоя 4-кубиков.

$$\frac{3^4}{24} = \frac{23}{24} \cdot 1 + \frac{12}{24} \cdot 4 + \frac{1}{24} \cdot 10$$

Сечение в этом случае должно состоять из пятнадцати элементов: одиннадцати тетраэдров и четырех октаэдров.

Один тетраэдр будет находиться в центре секущего тетраэдра, ко всем его четырем граням будут примыкать четыре октаэдра, а остальные 10 тетраэдров окажутся снаружи, образуя все четыре грани большого тетраэдра.

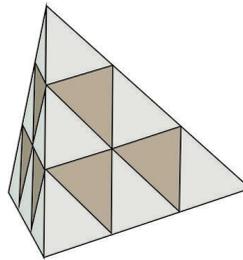


Рис.7 Вид 3D сечения для 4-куба 3x3x3x3

Считаем – четыре тетраэдра расположены в четырех углах большого тетраэдра и еще шесть находятся в середине каждого его ребра. Четыре октаэдра выделены темным цветом и мы наблюдаем только часть их наружных граней. Центральный маленький тетраэдр не виден ни с какой стороны большого тетраэдра.

В соответствии со следующим равенством:

$$\frac{4^4}{24} = 1 + \frac{23}{24} \cdot 4 + \frac{12}{24} \cdot 10 + \frac{1}{24} \cdot 20$$

покажем вид секущего тетраэдра для 4-куба 4x4x4x4:

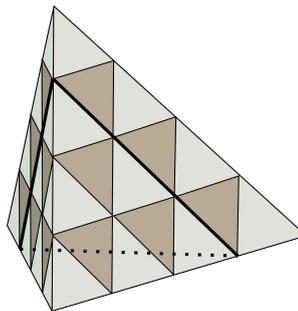


Рис.8 Вид 3D сечения для 4-куба 4x4x4x4

Замечаем, что он отличается от предыдущего тетраэдра только одним дополнительным слоем из малых 10 тетраэдров и 6 октаэдров – выделен плоскостью с жирным периметром. Подобное можно производить с любой из четырех его граней. Он обладает соответствующей симметрией.

Также можно сравнить плоский вид любой из граней этого тетраэдра с видом грани обычного куба 4x4x4, получившейся после отъема от него четырех слоев кубиков в духе рис.3. Отметим полное совпадение этих видов.

Можно попытаться даже представить 4D сечение 5-куба, состоящее из 4-тетраэдров и 4-октаэдров. Аналогия с рис.8 в помощь.

Предложенный **Метод послойного разбиения  $n$ -куба вдоль главной диагонали** позволяет по-новому взглянуть на особенности строения  $n$ -кубов и их представление в виде последовательных слоев из  $n$ -кубиков.

## **Дополнение**

Мне еще со школы запомнился рисунок под названием «чертова лестница». Запомнился некоторой своей странностью и несоответствием сложности доказательства и конечной простотой получаемого результата.

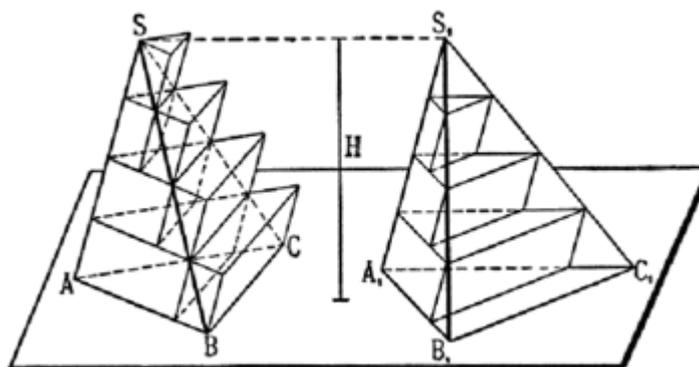


Рис.9

Метод исчерпывания (бесконечного приближения), открытый в античные времена, доказывает равенство объемов двух пирамид с равновеликими основаниями и одинаковыми высотами. В конечном итоге эта лемма позволяет строго доказать, что:

**Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту (1).**

Можно использовать для вывода этой формулы и интегральное исчисление.

В формулировке своей III проблемы Гильберт, опираясь на письма Гаусса Кристиану Герлингу, ставит вопрос: Можно ли отказаться от предельного перехода в выводе формулы объема треугольной пирамиды и ограничиться только методом равносоставленности. Первым ответ дал Макс Ден, и ответ этот отрицательный. Сегодня III проблема Гильберта считается окончательно закрытой.

А если математикам просто не повезло в поиске доказательства формулы (1) без перехода к пределу? (именно так ставит вопрос в своей книжке «Третья проблема Гильберта» В.Болтянский).

Эта проблема всегда, начиная с античных времен и вплоть до наших дней, рассматривалась в свете взаимоотношения исключительно двух объектов – треугольных призмы и пирамиды, имеющих общее основание и высоту.

Сейчас мы сделаем дерзкий шаг и усложним задачу – добавим еще одну призму в качестве объекта и посмотри, что из этого выйдет. Ведь иногда усложнение исходных условий может приводить к упрощению процесса решения (вспоминаем Д.Пойа).

Добавим такую треугольную призму, чтобы она, касаясь первой, образовывала бы параллелепипед. Замечаем, что в этом случае она должна быть симметрична имеющейся призме, и поэтому будет иметь равный ей объем, что уже достаточно давно доказано без привлечения интегралов и «чертовых лестниц».

Теперь выведем формулу объема треугольной пирамиды — тетраэдра, без традиционного перехода к пределу.

Тетраэдр  $ABCD$  - исходный, объем которого надо определить.

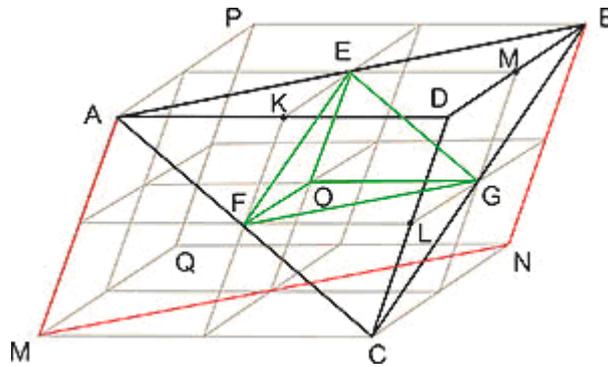


Рис.10

Дополним его до параллелепипеда следующим образом: выберем вершину  $D$  в качестве основной, а через вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  проведем плоскости, параллельные противоположным граням тетраэдра. И продолжим эти грани тетраэдра до пересечения с новыми плоскостями.

Получим параллелепипед  $DQ$ , состоящий из двух симметричных призм:  $ABDMNC$  и  $APBMQN$ . Первая призма целиком содержит тетраэдр  $ABCD$ , вторая, которую мы добавили, его не содержит. Площадь их соединения  $ABNM$  выделена красным цветом по периметру.

Разделим ребра параллелепипеда  $AD$ ,  $CD$ ,  $BD$  пополам точками  $K$ ,  $L$ ,  $M$  соответственно. Через них проведем новые плоскости, параллельные граням параллелепипеда. Получаем параллелепипед  $DQ$ , разбитый на восемь малых параллелепипедов, и все они подобны параллелепипеду  $DQ$ .

Обозначим объем малого параллелепипеда  $V_m$ . Тогда объем большого параллелепипеда

$$V_{DQ} = 8V_m$$

Исходный тетраэдр составляется из следующих объемов: три малых тетраэдра и малый параллелепипед без такого же тетраэдра, но симметричного им (выделен зеленым цветом на рис.10).

$$V_{ABCD} = V_{AEFK} + V_{EBGM} + V_{FGCL} + (V_{DO} - V_{EGFO})$$

Предполагая (докажем ниже), что отношение объема тетраэдра и параллелепипеда (обозначенное далее  $t$ ), при преобразовании подобия не меняется, можем написать следующее:

$$8V_m t = 3V_m t + (V_m - V_m t)$$

Сокращая все на  $V_m$ , получаем:

$$t = \frac{1}{6}$$

То есть тетраэдр занимает  $1/6$  часть параллелепипеда, состоящего в свою очередь из двух треугольных призм одинакового объема. Следовательно, любой тетраэдр занимает  $1/3$  часть объема треугольной призмы, имеющей с ним общее основание и высоту.

Ранее мы использовали утверждение, что отношение объема тетраэдра к объему параллелепипеда, в котором он выделен, не зависит от преобразования подобия.

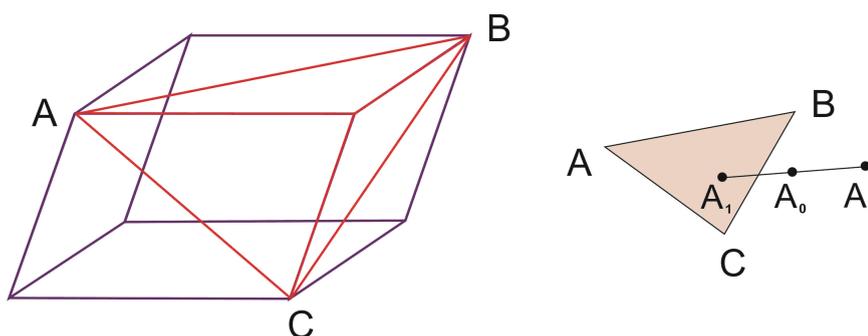


Рис.11

Предположим, что это не так, и какая-то часть внутренних точек тетраэдра при преобразовании подобия переходит в точки оставшейся части параллелепипеда, т.е. нарушается отношение их объемов.

Выберем из этих переходящих точек тетраэдра любую, пусть это будет точка  $A_0$ . Опустим из нее перпендикуляр на плоскость  $ABC$ , разделяющую рассматриваемые объемы, получим точку  $A_1$ . Продолжим перпендикуляр за точку  $A_0$  в сторону от плоскости  $ABC$ , не выходя за пределы тетраэдра. Получим точку  $A_2$ .

Так вот, преобразование подобия одним из следствий утверждает, что порядок точек на любой прямой при преобразовании подобия измениться не может.

Таким образом, точка  $A_0$  никогда не сможет перейти по другую сторону плоскости  $ABC$ . Аналогично доказывается, что ни одна из точек с другой стороны плоскости не может перейти в тетраэдр.

Следовательно, отношение объемов рассматриваемых многогранников при преобразовании подобия не изменяется, и мы имеем право использовать данный факт.

Кстати, требование перпендикулярности отрезка  $A_0A_1$  к плоскости  $ABC$  излишне, поскольку основное определение подобия позволяет сделать выбор любой пары точек, расстояние между которыми при преобразовании подобия изменяется с коэффициентом  $k$ .

Если первую точку  $A_0$  мы выбираем среди определенных (по предположению – переходящих через плоскость  $ABC$ ), то вторая  $A_1$  может быть любой из состава точек плоскости  $ABC$ .

Данное доказательство опирается на следующий примечательный факт: только куб и параллелепипед могут быть составлены из меньших, подобных им многогранников. Треугольная призма и другие многогранники такой способностью не обладают.

Таким образом, **Метод послойного разбиения  $n$ -куба вдоль его главной диагонали** позволил и здесь подойти неожиданным образом к старинному доказательству.

#### Литература

*Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен* Наглядная геометрия, Москва, Наука, 1981.

*В. Болтянский* Третья проблема Гильберта, Москва, Наука, 1977.