黎曼 Zeta 函数方程没有非平凡零点的严格证明

梅 晓 春

理论物理与纯粹数学部 福州原创物理研究所

内容摘要 本文采用一个标准的方法严格证明，在整个复平面上黎曼 Zeta 函数方程都没有非平凡零点，平凡零点只出现在实轴上。将黎曼 Zeta 函数方程中的各个量都写成实部和虚部相加的形式，令 $\zeta(a+ib)=\zeta_1(a,b)+i\zeta_2(a,b)$，代入 Zeta 函数方程的两边进行比较，得到关于 a 和 b 的一个方程组。本文证明该方程组只有平凡零点解，没有非平凡零点解。因此 Zeta 函数方程非平凡零点只能出现在 $\zeta_1(a,b)$ 和 $\zeta_2(a,b)$ 同时等于零的情况下。利用无穷级数的比较方法，本文证明 $\zeta_1(a,b)$ 和 $\zeta_2(a,b)$ 不可能同时等于零。因此黎曼 Zeta 函数方程没有非平凡零点，黎曼猜想不成立。

关键词：黎曼猜想，黎曼 Zeta 函数方程，黎曼-西格尔公式，非平凡零点，柯西—黎曼定理

一 前言

作者在文章《黎曼 Zeta 函数方程的不一致性问题》中证明，黎曼 Zeta 函数方程的值在复平面的实轴上存在严重的存在严重矛盾。导致这种不一致性的原因在于，黎曼 1859 年的推导 Zeta 函数方程的原始论文中，存在四个基本的错误，以至于黎曼 Zeta 函数方程是不成立的，因此黎曼猜想也就变得没有意义【1】。

目前在黎曼 Zeta 函数零点的计算中，一般都采用级数展开的近似方法。Zeta 函数方程的实部和虚部经常被混在一起，使问题变得复杂化。由于解析函数需要满足的柯西—黎曼定理被破坏，得到的非平凡零点实际上都不是严格的 Zeta 函数真正的零点【1】。

本文假设黎曼 Zeta 函数方程仍然成立，继续讨论黎曼 Zeta 函数方程的零点问题。文中提出一种标准的方法，将 Zeta 函数方程的实部和虚部完全分开。然后将方程两边的实部和虚部分别进行比较，严格证明 Zeta 函数方程在整个复平面上没有非平凡零点，平凡零点都位于实轴上。在实轴 $a=1/2$ 的点上，Zeta 函数的值是无穷大，而不是零，由此证明黎曼猜想不成立。

黎曼 Zeta 函数有两种形式，一种是级数求和形式，另外一种是积分形式。Zeta 函数的级数求和形式是更基本的，写为：

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s} \qquad \mathrm{Re}(s)>1 \tag{1}$$

其中 $s=a+ib$ 是一个复数。在（1）式的基础上，黎曼引入 $\Gamma(s)$ 函数和复变函数围道积分，导出以下 Zeta 函数代数方程（简称 Zeta 函数方程）【2】【3】【4】：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=2(2\pi)^{s-1}\sin(s\pi/2)\Gamma(1-s)\sum_{n=1}^{\infty}n^{-(1-s)} \tag{2}$$

———————————

原文发表于 Advances in Pure Mathematics, 2020, 10, 86-99, doi.org/10.4236/apm.2020.102006.

按照（1）式的定义，有：

$$\zeta(1-s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1-s)} \tag{3}$$

就可以将（2）式写为：

$$\zeta(s)=2(2\pi)^{s-1}\sin(s\pi/2)\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \qquad \mathrm{Re}(s)\neq 1 \tag{4}$$

按照目前一般的理解，（4）式被认为是考虑到复延拓后 Zeta 函数的新定义，其定义域从（1）式的 $\mathrm{Re}(s)>1$ 延拓到除了 $\mathrm{Re}(s)=1$ 点外的整个复平面。然而仔细考察黎曼的推导过程，就会发现，（4）式中的 $\zeta(s)$ 只是一种简化符号表述形式，它的原始形式应当是（2）式。因此（4）式并不是 Zeta 函数新的定义，而是黎曼发现的 Zeta 函数 $\zeta(s)$ 和 $\zeta(1-s)$ 之间的一种关系。由于 $\zeta(s)$ 仍然用（1）式来描述，（4）式的定义域仍然应当是 $\mathrm{Re}(s)>1$，而不是黎曼认为的 $\mathrm{Re}(s)\neq 1$。

在（4）式的基础上，黎曼进一步引入函数【5】：

$$\xi(s)=\frac{1}{2}\pi^{-s/2}s(s-1)\Gamma\left(s/2\right)\zeta(s) \tag{5}$$

利用雅可比函数的性质 $\theta(x)=\sqrt{x}\theta(1/x)$，黎曼证明这个函数具有对称性 $\xi(s)=\xi(1-s)$。由于 $\xi(s)$ 和 $\zeta(s)$ 被认为有相同的非平凡零点，黎曼猜想的讨论一般采用（5）式。

黎曼在 1859 年的原始论文中提出，Zeta 函数方程的所有非平凡零点可能都落在复平面 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的临界线上，但没有给出任何一个非平凡零点的具体数值。一百多年来，数学家对黎曼猜想做了大量的研究，试图证明或者证伪黎曼猜想，但都不成功，黎曼猜想成了世界难题。

作者在论文【1】中证明，在复平面的实轴上，黎曼 Zeta 函数方程的两边是不相容的。（2）式的左边是一个有限值时，右边可能是一个无穷大，反之亦然。文章同时还证明，在复平面的实轴上，黎曼 Zeta 函数方程只在 $a=1/2$ 的点上成立【1】。然而在这个点上，黎曼 Zeta 函数方程的值是无穷大，而不是零，黎曼猜想不成立意义。

导致 Zeta 函数方程不成立的原因在于，黎曼原始论文的推导过程存在四个基本错误，它们是：

1. 黎曼在推导 Zeta 函数积分形式时，忽略了绕坐标原点的严格积分项。该项在 Re(s)>1 时收敛，在 Re(s)<1 时是发散的。经过复延拓后，黎曼 Zeta 函数没有改变其级数求和形式的发散性，在 Re(s)>1 时仍然是没有意义的，因此黎曼 Zeta 函数方程（2）和（4）式不成立。

2. 黎曼在推导 Zeta 函数积分形式时，采用了一个求和公式。该公式在积分下限 $x=0$ 是无穷大，因此这个公式不能用，Zeta 函数的积分形式不成立。

3. 由于黎曼 Zeta 函数积分的下限为零，被积函数不是一致收敛的，积分号与求和号是不可以交换的。然而黎曼把它们看成是可交换的，导致 Zeta 函数的积分形式不成立。

4. 黎曼在论文中使用了雅可比函数公式 $\theta(x)=\sqrt{x}\theta(1/x)$，该公式成立的条件是 $x>0$。由于黎曼的推导过程涉及到积分的下限是 $x=0$【5】。因此这个公式也不能用，黎曼 Zeta 函数的对称性关系 $\xi(s)=\xi(1-s)$ 不存在。

文中讨论了黎曼 Zeta 函数的零点计算问题。目前通过人工计算和计算机数值方法证明，在复平面 $a=1/2$ 的直线上存在非常多的 b 能使 Zeta 函数等于零，数目已经超过十万亿个【6】。文章指出这种计算采用的都是近似方法，比如将（5）式展开成称为黎曼-西格尔公式的无穷级数，然后计算不同项数的多项式的零点【7】。这种做法破坏了解析函数需要满足的柯西—黎曼公式，得到的都不

是严格的 Zeta 函数真正的零点。

本文假设黎曼 Zeta 函数方程仍然成立，从更一般的角度来讨论 Zeta 函数方程的零点问题。具体的做法是，将（5）式中的每个部分都写成实部和虚部分离的形式，令 $\xi=\xi_1+i\xi_2=0$ 和 $\zeta=\zeta_1+i\zeta_2\neq 0$。各项相乘后将方程的实部和虚部彻底分离，再分别讨论实部和虚部的零点。

首先假设 $\xi_1=0$ 和 $\xi_2=0$，但 $\zeta_1\neq 0$ 和 $\zeta_2\neq 0$，由此得到关于 a 和 b 的一个方程组。本文证明该方程组的零点是 $a=1$ 和 $b=0$，它只是平凡零点，不是非平凡零点，因此方程（5）没有非平凡零点。采用相同的方法证明，在 $\zeta_1\neq 0$ 和 $\zeta_2\neq 0$ 的条件下，方程（4）也没有非平凡零点，平凡零点在实轴 $a=-2n$（$n=0,\ 1,\ 2\cdots$）和 $b=0$ 的点上。

因此为了得到（4）和（5）式的非平凡零点，唯有令 ζ_1 和 ζ_2 同时等于零。利用无穷级数比较的方法，本文证明 ζ_1 和 ζ_2 不可能同时等于零。因此黎曼 Zeta 函数方程没有非平凡零点，黎曼猜想不成立。

二 黎曼 Zeta 函数方程（5）没有非平凡零点的证明

以下假设（4）和（5）式仍然成立，先讨论（5）式的零点，下一节再讨论（4）式的零点。

定理 1. 在复平面上，如果 Zeta 函数 $\zeta(s)$ 的实部和虚部都不等于零，Zeta 函数方程（5）式就没有非平凡零点，平凡零点在实轴 $a=1$ 和 $b=0$ 的点上。

证：将（5）式的 $\xi(s)$ 和 $\zeta(s)$ 写成实部与虚部分离的形式，令：

$$\xi(s)=\xi_1(a,b)+i\xi_2(a,b) \tag{6}$$

$$\zeta(s)=\zeta_1(a,b)+i\zeta_2(a,b) \tag{7}$$

ξ_1 和 ξ_2 是实函数，ζ_1 和 ζ_2 也是实函数。利用公式 $t=e^{\ln t}$，有：

$$\pi^{-s/2}=\pi^{-(a+ib)/2}=\pi^{-a/2}\pi^{-ib/2}$$

$$=\pi^{-a/2}(e^{\ln\pi})^{-ib/2}=\pi^{-a/2}e^{-i(b\ln\pi)/2}$$

$$=\pi^{-a/2}\Big[\cos[(b\ln\pi)/2]-i\sin[(b\ln\pi)/2]\Big] \tag{8}$$

$$s(s-1)=(a+ib)(a-1+ib)=a(a-1)-b^2+i(2ab-b) \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}\pi^{-s/2}s(s-1)=\frac{1}{2}\pi^{-a/2}\Big[[a(a-1)-b^2]\cos[(b\ln\pi)/2]+(2ab-b)\sin[(b\ln\pi)/2]\Big]$$

$$+i\frac{1}{2}\pi^{-a/2}\Big[(2ab-b)\cos[(b\ln\pi)/2]-[a(a-1)-b^2]\sin[(b\ln\pi)/2]\Big] \tag{10}$$

令 $$G_1=\frac{1}{2}\pi^{-a/2}\Big[[a(a-1)-b^2]\cos[(b\ln\pi)/2]+(2ab-b)\sin[(b\ln\pi)/2]\Big]$$

$$G_2=\frac{1}{2}\pi^{-a/2}\left[(2ab-b)\cos[(b\ln\pi)/2]-[a(a-1)-b^2]\sin[(b\ln\pi)/2]\right] \quad (11)$$

就有：

$$\frac{1}{2}\pi^{-s/2}s(s-1)=G_1+iG_2 \quad (12)$$

G_1 和 G_2 都是实函数。此外，实数的 Gama 函数定义为【8】：

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-t}t^{a-1}dt>0 \qquad a>0 \quad (13)$$

令 $a\to s=a+ib$，就得到复延拓的 Gama 函数。在（5）式中，我们有：

$$\Gamma(s/2)=\int_0^\infty e^{-t}t^{s/2-1}dt=\int_0^\infty e^{-t}t^{a/2-1}t^{ib/2}dt=\int_0^\infty e^{-t}t^{a/2-1}e^{i(b\ln t)/2}dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-t}t^{a/2-1}\left(\cos[(b\ln t)/2]+i\sin[(b\ln t)/2]\right)dt$$

$$=\Gamma_1(a,b)+i\Gamma_2(a,b) \quad (14)$$

$$\Gamma_1(a,b)=\int_0^\infty e^{-t}t^{a/2-1}\cos[(b\ln t)/2]dt$$

$$\Gamma_2(a,b)=\int_0^\infty e^{-t}t^{a/2-1}\sin[(b\ln t)/2]dt \quad (15)$$

Γ_1 和 Γ_2 也都是实函数。（5）式就可以写为：

$$\xi_1+i\xi_2=(G_1+iG_2)(\Gamma_1+i\Gamma_2)(\zeta_1+i\zeta_2)$$

$$=(G_1\Gamma_1-G_2\Gamma_2)\zeta_1-(G_1\Gamma_2+G_2\Gamma_1)\zeta_2$$

$$+i\left[(G_1\Gamma_2+G_2\Gamma_1)\zeta_1+(G_1\Gamma_1-G_2\Gamma_2)\zeta_2\right] \quad (16)$$

按照（6）式，将（16）式的虚部和实部分开，就有：

$$\xi_1=(G_1\Gamma_1-G_2\Gamma_2)\zeta_1-(G_1\Gamma_2+G_2\Gamma_1)\zeta_2 \quad (17)$$

$$\xi_2=(G_1\Gamma_2+G_2\Gamma_1)\zeta_1+(G_1\Gamma_1-G_2\Gamma_2)\zeta_2 \quad (18)$$

如果（5）式有零点，它的实部和虚部就必须同时等于零。令 $\xi_1=0$，$\xi_2=0$，得：

$$(G_1\Gamma_1-G_2\Gamma_2)\zeta_1-(G_1\Gamma_2+G_2\Gamma_1)\zeta_2=0 \quad (19)$$

$$(G_1\Gamma_2+G_2\Gamma_1)\zeta_1+(G_1\Gamma_1-G_2\Gamma_2)\zeta_2=0 \quad (20)$$

设$\zeta_1 \neq 0$和$\zeta_2 \neq 0$，从（19）式解出：

$$\zeta_1 = \frac{G_1\Gamma_2 + G_2\Gamma_1}{G_1\Gamma_1 - G_2\Gamma_2}\zeta_2 \tag{21}$$

代入（20）式，得：

$$\frac{(G_1\Gamma_2 + G_2\Gamma_1)^2}{G_1\Gamma_1 - G_2\Gamma_2}\zeta_2 + (G_1\Gamma_1 - G_2\Gamma_2)\zeta_2 = 0 \tag{22}$$

有：
$$(G_1\Gamma_2 + G_2\Gamma_1)^2 + (G_1\Gamma_1 - G_2\Gamma_2)^2 = 0 \tag{23}$$

由于是两项的平方和，（23）式的解只能是两项同时等于零，即：

$$G_1\Gamma_2 + G_2\Gamma_1 = 0 \tag{24}$$

$$G_1\Gamma_1 - G_2\Gamma_2 = 0 \tag{25}$$

从（25）式得$\Gamma_1 = G_2\Gamma_2 / G_1$，代入（24）式，得$G_1^2 + G_2^2 = 0$。同样地，我们有$G_1 = 0$和$G_2 = 0$。按照（11）式，就有：

$$[a(a-1)-b^2]\cos[(b\ln\pi)/2]+(2ab-b)\sin[(b\ln\pi)/2]=0 \tag{26}$$

$$-[a(a-1)-b^2]\sin[(b\ln\pi)/2]+(2ab-b)\cos[(b\ln\pi)/2]=0 \tag{27}$$

把（26）和（27）式平方后相加，得：

$$[a(a-1)-b^2]^2 + (2ab-b)^2 = 0 \tag{28}$$

（28）式意味着$a(a-1)-b^2=0$和$b(2a-1)=0$，其解是$a=0, 1$和$b=0$。显然它们都是平凡的零点，而且都在$b=0$的实轴上。除此之外，就没有非平凡零点。事实上，由于$\pi^{-s/2} \neq 0$，这个解就是令（9）式等于零的结果。对于$s(s-1)=0$，令其实部和虚部同时等于零，得$a(a-1)-b^2=0$和$b(2a-1)=0$，其解就是$a=0, 1$和$b=0$。显然，黎曼猜想的$a=1/2$不是（28）式的解。

以上结果与$\Gamma(s)$函数无关，我们还要考虑$\Gamma(s)$函数的零点问题。显然在$b \neq 0$的情况下，用（15）式表示的$\Gamma_1(a,b)$和$\Gamma_2(a,b)$是不相等的，除非$b=\pi/(4\ln t)$，$\cos(\text{blnt}) = \sin(\text{blnt}) = \sqrt{2}/2$。然而$b$是一个常数，$t$是一个积分变数，因此$b \neq \pi/(4\ln t)$ 因此$\cos(\text{blnt}) \neq \sin(\text{blnt})$，$\Gamma_1(a,b)$和$\Gamma_2(a,b)$不可能同时等于零（如果它们有零点）。也就是说与实的$\Gamma(a)$函数一样，经过复延拓的$\Gamma(s)$函数也是没有零点的。

已知在$b=0$，$a/2>0$或$a>0$时$\Gamma(a/2)$收敛。在$a/2=0, -1, -2, \cdots$，或$a=0, -2, -4, \cdots$时，$\Gamma(a/2)$发散【7】。因此考虑$\Gamma(s/2)$函数后，（28）式在$a=0$时的零点被消除，（5）式的平凡零点是$a=1$和$b=0$。定理 1 证毕。

除此之外，要使$\xi(s)=0$，还存在ζ_1和ζ_2同时等于零的可能性。这就涉及 Zeta 函数级数求和形式是否能够等于零的问题，我们将在第五章中讨论。

三 Zeta 函数方程（4）没有非平凡零点的证明

定理 2. 在复平面上，如果函数$\zeta(1-s)$的实部和虚部不同时等于零，Zeta 函数方程（4）式就没有非平凡零点。平凡零点位于$b=0$和$a=-n$（$n=0, 1, 2, 3, 4\cdots$）的实轴上。

证：令$\zeta(s)\to\zeta'(s)$，将（4）式写为：

$$\zeta'(s)=2(2\pi)^{s-1}\sin(s\pi/2)\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{29}$$

按照现在的理解，方程左边的$\zeta'(s)$是经过复延拓的 Zeta 函数，其形式与（1）式可以不一样。但方程（4）右边的$\zeta(1-s)$仍然具有（1）式的形式，这是由于黎曼在推导过程的最后一步用了（3）式。考虑到$i=e^{i\pi/2}$，有：

$$\sin(s\pi/2)=\frac{e^{is\pi/2}-e^{-is\pi/2}}{2i}=\frac{e^{-i\pi/2}}{2}\left[e^{i(a+ib)\pi/2}-e^{-i(a+ib)\pi/2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{-b\pi/2}e^{i(a-1)\pi/2}-e^{b\pi/2}e^{-i(a+1)\pi/2}\right] \tag{30}$$

$$2(2\pi)^{s-1}=2(2\pi)^{a-1+ib}=2(2\pi)^{a-1}(2\pi)^{ib}=2(2\pi)^{a-1}e^{ib\ln 2\pi} \tag{31}$$

$$2(2\pi)^{s-1}\sin(s\pi/2)=(2\pi)^{a-1}e^{ib\ln 2\pi}\left[e^{-b\pi/2}e^{i(a-1)\pi/2}-e^{b\pi/2}e^{-i(a+1)\pi/2}\right]$$

$$=(2\pi)^{a-1}\left[e^{-b\pi/2}e^{i[(a-1)\pi/2+b\ln 2\pi]}-e^{b\pi/2}e^{-i[(a+1)\pi/2-b\ln 2\pi]}\right] \tag{32}$$

令：$$A=(a-1)\pi/2+b\ln 2\pi \qquad B=(a+1)\pi/2-b\ln 2\pi \tag{33}$$

可以将（32）式写成：

$$2(2\pi)^{s-1}\sin(s\pi/2)=G_1+iG_2$$

$$=(2\pi)^{a-1}\left[e^{-b\pi/2}(\cos A+i\sin A)-e^{b\pi/2}(\cos B-i\sin B)\right]$$

$$=(2\pi)^{a-1}\left[e^{-b\pi/2}\cos A-e^{b\pi/2}\cos B+i\left(e^{-b\pi/2}\sin A+e^{b\pi/2}\sin B\right)\right] \tag{34}$$

$$G_1=(2\pi)^{a-1}(e^{-b\pi/2}\cos A-e^{b\pi/2}\cos B)$$

$$G_2=(2\pi)^{a-1}(e^{-b\pi/2}\sin A+e^{b\pi/2}\sin B) \tag{35}$$

A，B，G_1和G_2都是实函数。按照复延拓的 Gama 函数的定义，有【7】：

$$\Gamma(1-s)=\int_0^\infty e^{-t}t^{-s}dt=\int_0^\infty e^{-t}t^{-a}t^{-ib}dt=\int_0^\infty e^{-t}t^{-a}e^{-ib\ln t}dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-t}t^{-a}\left(\cos(b\ln t)-i\sin(b\ln t)\right)dt=\Gamma_1(a,b)+i\Gamma_2(a,b) \quad (36)$$

$$\Gamma_1(a,b)=\int_0^\infty e^{-t}t^{-a}\cos(b\ln t)dt \qquad \Gamma_2(a,b)=-\int_0^\infty e^{-t}t^{-a}\sin(b\ln t)dt \quad (37)$$

Γ_1和Γ_2也都是实函数。（4）式就可以写为：

$$\zeta'=\zeta_1'+i\zeta_2'=\left(G_1+iG_2\right)\left(\Gamma_1+i\Gamma_2\right)\left(\zeta_1+i\zeta_2\right)$$

$$=\left(G_1\Gamma_1-G_2\Gamma_2\right)\zeta_1-\left(G_1\Gamma_2+G_2\Gamma_1\right)\zeta_2$$

$$+i\left[\left(G_1\Gamma_2+G_2\Gamma_1\right)\zeta_1+\left(G_1\Gamma_1-G_2\Gamma_2\right)\zeta_2\right] \quad (38)$$

将虚部和实部分开，就有：

$$\zeta_1'=\left(G_1\Gamma_1-G_2\Gamma_2\right)\zeta_1-\left(G_1\Gamma_2+G_2\Gamma_1\right)\zeta_2 \quad (39)$$

$$\zeta_2'=\left(G_1\Gamma_2+G_2\Gamma_1\right)\zeta_1+\left(G_1\Gamma_1-G_2\Gamma_2\right)\zeta_2 \quad (40)$$

如果黎曼 Zeta 函数有零点，它的实部和虚部就必须同时等于零。令$\zeta_1\neq 0$，$\zeta_2\neq 0$，按照相同的程序，同样可以得到：

$$G_1\Gamma_2+G_2\Gamma_1=0 \quad (41)$$

$$G_1\Gamma_1-G_2\Gamma_2=0 \quad (42)$$

从（42）式得$\Gamma_1=G_2\Gamma_2/G_1$，代入（41）式，得$G_1^2+G_2^2=0$。由于G_1^2和G_2^2都不可能是负数，因此唯有$G_1=0$和$G_2=0$。按照（35）式，就有：

$$e^{-b\pi/2}\cos A-e^{b\pi/2}\cos B=0 \quad (43)$$

$$e^{-b\pi/2}\sin A+e^{b\pi/2}\sin B=0 \quad (44)$$

把它们各自平方后相加，得：

$$e^{-b\pi}+e^{b\pi}=2\cos(A+B) \quad (45)$$

将它们各自平方后相减，得：

$$e^{-b\pi}\cos 2A+e^{b\pi}\cos 2B=2\cos(A-B) \quad (46)$$

将（33）式代入（45）和（46）式，得：

$$e^{-b\pi}+e^{b\pi}=2\cos(a\pi) \quad (47)$$

$$-e^{-b\pi}\cos(a\pi+2b\ln 2\pi)-e^{b\pi}\cos(a\pi-2b\ln 2\pi)=-2\cos(2b\ln 2\pi) \quad (48)$$

如果$b\neq 0$，将$e^{-b\pi}$和$e^{b\pi}$展开成级数，可证$e^{-b\pi}+e^{b\pi}>2$。然而$2\cos(a\pi)\leq 2$，（47）式不成立。

因此（47）式的解是$b=0$和$a=\pm n$，n是奇数时取正号，n是偶数是取正负号。它代表 Zeta 函数的平凡零点，而且都在实轴上。在这种情况下，（47）式和（48）式变成一样，有相同的解。

如果$a=1/2$，b取任意值，则有$2\cos(\pi/2)=0$，但$e^{-b\pi}+e^{b\pi}\neq 0$，（47）式仍然不成立，因此$a=1/2$不是（4）式的零点。事实上，由于 $(2\pi)^{is}\neq 0$，这个解就是在（29）式中令$\sin(s\pi/2)=0$的解，也与Γ函数无关。

但如果在（37）式中令$b=0$和$-a=a'-1$，则在$a'\leq 0$时$\Gamma_1\to\infty$。由于$a'=1-a$，这意味着在$a\geq 1$和$b=0$时$\Gamma_1\to\infty$。因此在$a=2,\ 4,\ 6\cdots$时，（4）式相应的零点会被消除。Zeta 函数方程（4）式的平凡零点只出现在$b=0$和$a=-n$（$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots$）的点上。定理 2 证毕。

因此如果方程（4）式存在非平凡零点，只能考虑ζ_1和ζ_2同时等于零的情况。与（5）式的情况一样，涉及到 Zeta 函数的求和形式本身是否有零点的问题。按照（1）式，有：

$$\begin{aligned}\zeta(1-s)&=\zeta_1(1-a,b)+i\zeta_2(1-a,b)\\&=1+\frac{1}{2^{1-s}}+\frac{1}{3^{1-s}}+\cdots+\frac{1}{n^{1-s}}+\cdots\\&=1+2^{a-1}e^{ib\ln 2}+3^{a-1}e^{ib\ln 3}+\cdots+n^{a-1}e^{ib\ln n}+\cdots\\&=1+2^{a-1}\cos(b\ln 2)+3^{a-1}\cos(b\ln 3)+\cdots+n^{a-1}\cos(b\ln n)+\cdots\\&\quad+i\left(2^{a\text{-}1}\sin(b\ln 2)+3^{a\text{-}2}\sin(b\ln 3)+\cdots+n^{a\text{-}3}\sin(b\ln n)+\cdot\cdot\right)\end{aligned}\tag{49}$$

就有：

$$\zeta_1(1-a,b)=1+2^{a-1}\cos(b\ln 2)+3^{a-1}\cos(b\ln 3)+\cdots+n^{a-1}\cos(b\ln n)+\cdots\tag{50}$$

$$\zeta_2(1-a,b)=2^{a\text{-}1}\sin(b\ln 2)+3^{a\text{-}2}\sin(b\ln 3)+\cdots+n^{a\text{-}3}\sin(b\ln n)+\cdots\tag{51}$$

我们在下一章讨论（50）和（51）式的零点问题。

四 黎曼 Zeta 函数的级数求和没有零点的证明

4.1 Zeta 函数级数求和公式的收敛性

为了讨论 Zeta 函数级数求和形式的零点，需要先讨论它的收敛性。如果（1）式中$s=a$是实数，$a<1$时级数发散，就没有零点。当$a>1$时级数收敛，求和结果大于零，（1）式也没有零点。证明摘录如下【8】。设$\mathrm{Re}(s)=a>1$，采用欧拉素数乘积公式，有：

$$\left|\zeta(a)\right|=\prod_p\left|1-p^{-a}\right|^{-1}\geq\prod_p\left|1+p^{-a}\right|^{-1}=\exp\left[-\sum_p\ln(1+p^{-a})\right]\tag{52}$$

其中p是素数（$p>1$）。对于任意$x>0$，有$\ln(1+x)<x$。由于$\sum p^{-a}<\infty$是收敛，就有：

$$\left|\zeta(a)\right|\geq\exp\left[-\sum_p p^{-a}\right]>0\tag{53}$$

如果$s=a+ib$是复数，情况就比较复杂。目前没有严格的证明，使我们确信$\zeta(s)\neq 0$。以下来讨论这个问题。按照复变函数级数的收敛性判断公式，对（1）式采用绝对值进行比较，有：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^{a+ib}}{(n+1)^{a+ib}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^{a+ib}\right|=1 \tag{54}$$

收敛半径等于 1，无法判断（54）式的收敛性。利用欧拉公式 $e^{ib}=\cos b+i\sin b$，将（1）式写成：

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^{a+ib}}+\frac{1}{3^{a+ib}}+\cdots+\frac{1}{n^{a+ib}}+\cdots$$

$$=1+2^{-a}\cos(b\ln 2)+3^{-a}\cos(b\ln 3)+\cdots+n^{-a}\cos(b\ln n)+\cdots$$

$$-i\left(2^{-a}\sin(b\ln 2)+3^{-a}\sin(b\ln 3)+\cdots+n^{-a}\sin(b\ln n)+\cdot\cdot\right) \tag{55}$$

将实部与虚部分开，有：

$$u(a,b)=1+2^{-a}\cos(b\ln 2)+3^{-a\cdot}\cos(b\ln 3)+\cdots+n^{-a}\cos(b\ln n)+\cdots \tag{56}$$

$$v(a,b)=-\left(\ 2^{-a}\sin(b\ln 2)+3^{-a}\sin(b\ln 3)+\cdots+n^{-a}\sin(b\ln n)+\cdots\right) \tag{57}$$

利用公式 $\ln(n+1)=\ln n+\ln(1+1/n)$，考虑（56）和（57）式的收敛性，我们有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^a\cos\left(b\ln(n+1)\right)}{(n+1)^a\cos(b\ln n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\left(b\ln n+b\ln(1+1/n)\right)}{(1+1/n)^a\cos(b\ln n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(b\ln n)}{\cos(b\ln n)}=1 \tag{58}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^a\sin\left(b\ln(n+1)\right)}{(n+1)^a\sin(b\ln n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(b\ln n)}{\sin(b\ln n)}=1 \tag{59}$$

收敛半径也等于 1，（56）和（57）式的收敛性仍然不确定。由于公式中包含三角函数，其中各项即可以是正的，也可以是负的，就不能保证求和的结果一定大于零。这个结果与 a 和 b 大于零还是小于零无关，与 s 是实数的情况是不同的。

4.2 一般解析函数的零点

在复变函数理论中，函数的解析性是非常重要的。如果一个函数是非解析的，许多定理都不能。例如，留数定理仅对解析函数有效。另一方面，一个复变函数总可以将实部和虚部分开，写成：

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{60}$$

其中 $z=x+iy$，如果 $f(z)$ 是解析函数，它的实部和虚部就不是独立的， 二者必须满足以下柯西—黎曼方程【7】：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{61}$$

在目前的黎曼 Zeta 函数零点计算中，采用的是近似方法，（61）式被忽略，得到的都不是严格的 Zeta 函数的真正的零点。需要强调，在讨论解析函数的零点问题时，我们有必要将实部和虚部分开。因为有可能出现实部或虚部等于零，但二者不同时等于零的情况。在这种情况下得到的零点不

是真正的零点。在目前的对黎曼猜想的讨论中，经常是将实部和虚部混在一起，使问题变的含糊不清。

4.3 黎曼 Zeta 函数级数求和公式没有零点的证明

定理 3. 黎曼 Zeta 函数级数求和公式在整个复平面上没有零点。

证： 利用 $n^a = e^{a\ln n}$，将（50）和（51）式改写为：

$$\zeta_1(1-a,b) = u(a,b) = 1 + e^{(a-1)\ln 2}\cos(b\ln 2) + e^{(a-1)\ln 3}\cos(b\ln 3) + \cdots \tag{62}$$

$$\zeta_2(1-a,b) = v(a,b) = -\left(e^{(a-1)\ln 2}\sin(b\ln 2) + e^{(a-1)\ln 3}\sin(b\ln 3) + \cdots\right) \tag{63}$$

容易证明，（62）和（63）式满足（61）式，因此用（1）式表示的黎曼 Zeta 函数是解析函数。以下证明（62）和（63）式不可能同时等于零。

先讨论最简单的情况，取（49）式的头两项并令它等于零，按照（62）和（63）式，就有：

$$1 + e^{(a-1)\ln 2}\cos(b\ln 2) = 0 \tag{64}$$

$$e^{(a-1)}\sin(b\ln 2) = 0 \tag{65}$$

设 a 是一个有限值，（65）式的解是 $b\ln 2 = n\pi$。当 n 是偶数时 $\cos n\pi = 1$，代入（64）式，得：

$$1 + e^{(a-1)\ln 2} = 0 \qquad \text{或} \qquad (a-1)\ln 2 = \ln(-1) \tag{66}$$

由于 a 是实数， $\ln(-1) = \ln e^{i\pi} = i\pi$ 不是实数，因此 n 是偶数时（64）式无实数解。 n 是奇数时 $\cos n\pi = -1$，代入（75）式，得：

$$1 - e^{(a-1)\ln 2} = 0 \qquad \text{或} \qquad (a-1)\ln 2 = \ln 1 = 0 \tag{67}$$

因此（64）和（65）式的解是 $a = 1$ 和 $b = (2n+1)\pi/\ln 2$, ($n = 0,1,2,\cdots$)。如果 $a \neq 1$，（64）和（65）式就不能同时等于零。

再来讨论（49）式的前三项的零点。将（49）式的前三项乘上 $2^{1-s}3^{1-s}$，并令其等于零。利用 $n^a = e^{a\ln n}$， $n^{ib} = e^{ib\ln n}$，得：

$$(2\cdot 3)^{1-a}e^{-ib\ln(2\cdot 3)} + 2^{1-a}e^{-ib\ln 2} + 3^{1-a}e^{-ib\ln 3} = 0 \tag{68}$$

利用欧拉公式，并将虚部与实部分开，得：

$$(2\cdot 3)^{1-a}\cos\left(b\ln(2\cdot 3)\right) + 2^{1-a}\cos(b\ln 2) + 3^{1-a}\cos(b\ln 3) = 0 \tag{69}$$

$$(2\cdot 3)^{1-a}\sin\left(b\ln(2\cdot 3)\right) + 2^{1-a}\sin(b\ln 2) + 3^{1-a}\sin(b\ln 3) = 0 \tag{70}$$

将（70）式改写为：

$$(2\cdot 3)^{1-a}\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\ln(2\cdot 3)\right) + 2^{1-a}\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\ln 2)\right) + 3^{1-a}\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\ln 3)\right) = 0 \tag{71}$$

可以看出，（69）和（71）式完全对称，余弦函数前的系数完全一样。由于 a 和 b 是相互独立的，要使它们对任意的 a 和 b 能同时成立，唯有令：

$$b\ln(2\cdot 3)=\frac{\pi}{2}-b\ln(2\cdot 3) \qquad b\ln 2=\frac{\pi}{2}-b\ln 2 \qquad b\ln 3=\frac{\pi}{2}-b\ln 3 \tag{72}$$

或：
$$b=\frac{\pi}{4\ln(2\cdot 3)} \qquad b=\frac{\pi}{4\ln 2} \qquad b=\frac{\pi}{4\ln 3} \tag{73}$$

显然，（73）式的三个关系是不可能同时成立的，因此（69）和（70）式不可能同时为零。

当然，对于项数有限的级数，以上的证明不是真正严格的。然而对于无穷级数，这种方法却是标准的方法。对于：

$$\zeta(1-s)=1+\frac{1}{2^{1-s}}+\frac{1}{3^{1-s}}+\cdots+\frac{1}{p_n^{1-s}}+\cdots=0 \tag{74}$$

将（74）式乘上 $(2\cdot 3\cdots p_n)^{(1-s)}=(p_2p_3\cdots p_{n-1}p_n)^{(1-a)}e^{-ib\ln(p_2p_3\cdots p_{n-1}p_n)}$，得：

$$\begin{aligned}&(p_2p_3\cdots p_{n-1})^{(1-a)}e^{-ib\ln(p_2p_3\cdots p_{n-1})}+(p_2p_3\cdots p_{n-2}p_n)^{(1-a)}e^{-ib\ln(p_2p_3\cdots p_{n-2}p_n)}+\cdots\\&+(p_3\cdots p_{n-1}p_n)^{(1-a)}e^{-ib\ln(p_2p_3\cdots p_{n-1})}+(p_2p_3\cdots p_{n-1}p_n)^{(1-a)}e^{-ib\ln(p_2p_3\cdots p_{n-1}p_n)}=0\end{aligned} \tag{75}$$

对于无穷级数，令 $p_n\to\infty$。将实数部分与虚数部分分开，与（69）和（71）式类似，就有:

$$\begin{aligned}&(p_2p_3\cdots p_{n-1})^{(1-a)}\cos\big(b\ln(p_2p_3\cdots p_{n-1})\big)\\&+(p_2p_3\cdots p_{n-2}p_n)^{(1-a)}\cos\big(b\ln(p_2p_3\cdots p_{n-2}p_n)\big)\\&\cdots+(p_3\cdots p_{n-1}p_n)^{(1-a)}\cos\big(b\ln(p_3\cdots p_{n-1}p_n)\big)\\&+(p_2p_3\cdots p_{n-1}p_n)^{(1-a)}\cos\big(b\ln(p_2p_3\cdots p_{n-1}p_n)\big)=0\end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned}&(p_2p_3\cdots p_{n-1})^{(1-a)}\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\ln(p_2p_3\cdots p_{n-1})\right)\\&+(p_2p_3\cdots p_{n-2}p_n)^{(1-a)}\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\ln(p_2p_3\cdots p_{n-2}p_n)\right)\\&\cdots+(p_3\cdots p_{n-1}p_n)^{(1-a)}\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\ln(p_3\cdots p_{n-1}p_n)\right)\\&+(p_2p_3\cdots p_{n-1}p_n)^{(1-a)}\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\ln(p_2p_3\cdots p_{n-1}p_n)\right)=0\end{aligned} \tag{77}$$

从无穷级数理论知道，当求和项数趋于无穷时，要使（76）和（77）式同时成立，除了 $a\to\infty$，唯有令对应项一一相等，就有：

$$b=\frac{\pi}{4\ln(p_2p_3\cdots p_{n-1})} \qquad b=\frac{\pi}{4\ln(p_2p_3\cdots p_{n-2}p_n)}$$

$$b = \frac{\pi}{4\ln(p_3 \cdots p_{n-1} p_n)} \qquad\qquad b = \frac{\pi}{4\ln(p_2 p_3 \cdots p_{n-1} p_n)} \tag{78}$$

如此等等。显然这是不可能的，因此（76）和（77）式不可能同时成立，Zeta 函数$\zeta(1-s)$的无穷级数求和形式没有零点。对于$\zeta(s')$令$s' \to 1-s$，结果有一样，定理 3 证毕。

以上结果与a的取值无关，只要$a<\infty$，不论$a>1$还是$a \le 1$。如果令$b=0$，即在实轴上，（51）式等于零，但（50）式不等于零，有：

$$\zeta(1-a) = \zeta_1(1-a) = 1 + 2^{a-1} + 3^{a-1} + \cdots + n^{a-1} + \cdots \neq 0 \tag{79}$$

如果取$a=1/2$，则$1-a=1/2$。作者在论文【1】中证明，只有在这种情况下，（2）式两边才恰好完全相等。但结果不是零，而是无穷的大，没有意义：

$$\zeta(1/2) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots \to \infty \tag{80}$$

由于 Zeta 函数方程（4）和（5）式都没有非平凡零点，也就无所谓黎曼猜想了。至此，我们完整地阐述了黎曼猜想是否存在的问题，得到以下定理 4。

定理 4：黎曼 Zeta 函数方程（4）和（5）式在整个复平面上没有非平凡零点，黎曼猜想不成立。

五 结论

黎曼 Zeta 函数方程有两种形式，它们被认为具有相同的零点。黎曼猜想认为 Zeta 函数方程的零点全部位于复平面$\mathrm{Re}(s)=1/2$的临界线上，但这个论断一直无法得到证明。黎曼猜想对素数分布理论及其重要，在假定它是正确的基础上，已经证明了一千多条定理【9】，并被应用于更为广阔的数学和物理学领域【10, 11, 12, 13, 14】。如果黎曼猜想不成立，后果是及其严重的，数学界对这个问题应当有一个明确的结论。

在作者此前的论文《黎曼 Zeta 函数方程的不一致性》中，业已证明黎曼 1859 年的原始论文存在四个基本错误。因此黎曼 Zeta 函数方程不成立，黎曼猜想没有意义。

目前采用人工和计算机计算 Zeta 函数零点，采用的都是近似的方法，破坏了柯西—黎曼定理，得到的实际上不是真正的零点。此外，这类方法没有将 Zeta 函数方程的实部和虚部分开，计算过程过于复杂导致混乱。

本文假设黎曼 Zeta 函数方程仍然成立，采用一个标准而严格的方法，将 Zeta 函数方程分解成实部和虚部，然后分别进行比较。由此证明黎曼 Zeta 函数方程的两种形式都没有非平凡零点，黎曼 Zeta 函数本身的级数求和形式也没有零点，由此证明黎曼猜想不成立。

参考文献

【1】 Mei Xiaochun, The inconsistency problem of Riemann Zeta function Equation, Mathematics Letters, 2019; 5(2): 13-22., doi: 10.11648/j.ml.20190502.11, http://www.sciencepublishinggroup.com/journal/paperinfo?journalid=348&doi=10.11648/j.ml.20190502.11

【2】 Riemann G. F. B., (1859), Uber die Anzabl der Primahlem unter einer gegebenen Grosse, Monatsberichte der Berliner Akademine, 2, 671- 680.

【3】Bent E. Petersen, Riemann Zeta Function, https://pan.baidu.com/s/1geQsZxL.

【4】 谢国芳，黎曼提出黎曼猜想的原始论文的译注，https://wenku.baidu.com/view/8029b653be23482fb4da4cff.html.

【5】Neukirch, J. (1999). Algebraic Number Theory. Springer, Berlin, Heidelberg (The original German edition was published in 1992 under the title Algebraische Zahlentheorie).

【6】Gourdon X., The 10^(13) first zeros of the Riemann Zeta function, and zeros computation at very large height, 2004, http://pdfs.semanticscholar.org/6eff/62ff5d98e8ad2ad8757c0faf4bac87546f27.pdf.

【7】卢昌海，黎曼猜想漫谈，清华大学出版社，2016，p. 192.

【8】郭敦仁，数学物理方法，人民教育出版社，1965，p. 109.

【9】Jessen, B. , Wintner, A., Distribution functions and the Riemann zeta function. Transactions of the American Mathematical Society, 1935, 38(1), 48 – 88.

【10】 Chen G, Guo G, Yang K, Yang D. Multi-step prediction of zero series and gap series of Riemann zeta function. Results in Physics. 2021 Aug 1;27:104449.

【11】Matiyasevich Y. Continuous crop circles drawn by Riemann's zeta function. Journal of Number Theory. 2021 Dec 1;229:199-217.

【12】 Berry, M. V., Keating, J. P., The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics. Siam Review, 1999, 41(2), 236–266.

【13】Sierra, G., Townsend, P. K. Landau levels and riemann zeros. Physica Review Letters, 2008, 101(9), 110201.

【14】Bender, C. M., Brody, D. C., Muller, M. P., Hamiltonian for the zeros of the Riemann Zeta function. Physical Review Letters, 2017,118(13), 130201.