

量子擦除實驗

Brian Chang

July 30, 2024

摘要

本文否定一個常見的觀點：「擦除路徑信息會導致干涉條紋重新出現。(Aharonov, 2005; Hillmer, 2007)」本文認為，把這個實驗叫做量子「擦除」其實是個誤解。與其說斜對角偏振片所起到的作用是「擦除」，不如說它們其實是對光子進行篩選，正是這樣的篩選行為使得干涉條紋重新出現。

更進一步地說，不需要引入反因果關係來解釋延遲選擇實驗。光子的波函數，從雙縫出來以後，到達屏幕所在的位置之前，是沒有塌縮的。這個過程你問光子走哪一條縫過來是沒意義的。所以這個實驗與其說叫做「量子擦除實驗」不如說叫做「量子篩選實驗」更為恰當，正是篩選的這個手段恢復了相干性。

關鍵詞：量子擦除實驗、延遲選擇實驗、雙狹縫干涉

目錄

1	前言	1
1.1	愛因斯坦的思想實驗	2
1.2	費曼的思想實驗	4
1.3	雙狹縫前方放置 Stern-Gerlach 儀	6
2	光子偏振的量子擦除實驗	11
3	量子「擦除」其實是個誤導性的用詞	20
4	使用「記錄」電子來說明量子擦除實驗	22
5	結論：量子擦除說明了「信息是物理的」	29

1 前言

在最原始的雙狹縫干涉實驗中，當電子從槍中射出時處於 $|\psi_0\rangle$ 的態，抵達雙狹縫板時只剩下能通過兩個孔的波函數，其餘都被板給吸收了。 $|\psi_1\rangle$ 或 $|\psi_2\rangle$ 分別代表電子處於孔 1 或孔 2 的波函數。

$$|\psi_0\rangle \rightarrow (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)$$

由於沒打到兩個孔上的電子都被板給吸收了，故上述演化不是么正的。又因為這兩個狹縫對稱，所以這兩個量子態可以等權重疊加。

電子穿過狹縫後會繼續飛向屏幕，演化成各個點處量子態的疊加。通過孔 1 的量子態的演化是：

$$|\psi_1\rangle \rightarrow \int a(z) |\varphi(z)\rangle dz$$

$|\varphi(z)\rangle$ 是電子處於不同 z 座標的量子態， $a(z)$ 是其權重。同理，通過孔 2 的量子態的演化是：

$$|\psi_2\rangle \rightarrow \int b(z) |\varphi(z)\rangle dz$$

$\{\varphi(z)\}$ 構成一組正交完備基底。有 $\langle \varphi(z') | \varphi(z) \rangle = 0$, $z' \neq z$ ，這代表電子不可能同時出現在屏幕上的兩處；且 $\int |\varphi(z)|^2 dz = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ ，代表所有穿過兩個孔的電子都落到了屏幕上。

而在位置 z 處探測到的電子數量為：

$$(a(z)+b(z))^*(a(z)+b(z)) = |a(z)+b(z)|^2 = |a(z)|^2 + |b(z)|^2 + a(z)^*b(z) + a(z)b(z)^*$$

$a(z)^*b(z) + a(z)b(z)^*$ 這兩項稱之為干涉項，在經典的情況下是沒有的。我們必須特

別強調：雙狹縫干涉是一個電子「自己和自己」在進行干涉所表現出來的結果，並非電子間互相干涉才產生干涉條紋，所以即便一顆一顆電子相隔很久時間慢慢射出，也會產生干涉條紋。

1.1 愛因斯坦的思想實驗

在第五屆索爾維會議上，愛因斯坦提出一個思想實驗：給雙狹縫板裝上滾輪，使它可以自由地左右滑動。當電子通過狹縫孔時會衝撞小孔，使板獲得向左或向右的動量，而我們可以由板獲得的動量來反推出電子從哪個孔通過（因為電子發射槍處於兩個孔中間，所以如果狹縫被撞得往左側跑去，代表電子從左邊的孔通過）。如此一來，根本不必去擾動電子，只要通過觀察板的運動，我們就可以得出電子走哪一條路徑。

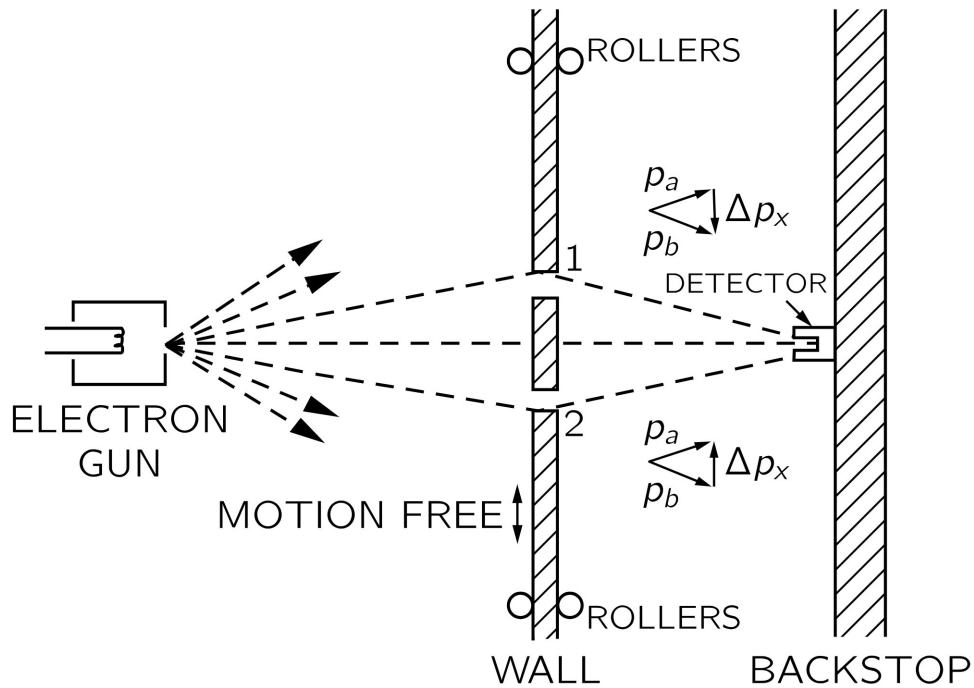


圖 1: 愛因斯坦思想實驗

玻爾回答說：你爲了做到這一點，必須知道電子通過板前的動量。這樣測出電子經過板後的動量時，就能推算出板的動量改變了多少。但是要記住，根據不確定原理，我們不

能同時以任意高的準確度知道板的位置。而如果我們不知道板的確切位置，就不能精確地說出兩個孔在哪裡。對於每個經過小孔的電子來說，小孔都將處於不同的位置，也就意味著對於每個電子來說，干涉圖樣的中心都在不同的位置上，於是干涉條紋將會消失。

假如我們足夠準確地測定板的動量從而由測量反衝的動量來確定電子經過的是哪一個孔，那麼按不確定原理，該板 x 位置的不確定度將使在屏上觀察到的圖樣沿 x 方向上下移動一個相當於從干涉條紋極大值到最近的極小值之間的距離。這樣一種無規則的移動正好將干涉圖樣抹去，因而觀察不到干涉現象。

玻爾用「互補性原理」來解釋波粒二象性，他說：「量子系統的行為既像粒子，又像波動，這取決於實驗設置的情況。」你用哪條路檢測器嘛，電子就表現為「粒子」；你放棄用哪條路檢測器嘛，電子就表現為「波動」。這實在有「觀測創造現實」之嫌。玻爾對此所作的物理解釋借助了海森伯不確定性原理，認為對微觀客體的觀測，必然給它帶來不可控制的動量、能量干擾。海森伯本人也曾用顯微鏡的思想實驗來說明動量-坐標不確性度關係，把不確定性歸結為光子給被觀測客體帶來動量衝擊的後果。

接下來我們以糾纏的觀點來給出另一種解釋，若電子通過孔 1 板將會向左偏移記為 $|left\rangle$ ，而電子通過孔 2 板將會向右偏移記為 $|right\rangle$ ，從電子槍到雙狹縫板的演化以下式描述：

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |left\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |right\rangle$$

電子的波函數和板移動的信息糾纏起來了，這和原始的雙狹縫實驗將會有甚麼區別呢？

屏上的干涉圖樣能以下式來描述：

$$|a(z)|^2 + |b(z)|^2 + a(z)^* b(z) \langle left|right\rangle + a(z)b(z)^* \langle right|left\rangle$$

在原始的雙狹縫實驗中，板被固定死了，因此 $|left\rangle$ 和 $|right\rangle$ 無法區分，可以看做

同一個態，於是 $\langle right|left\rangle = 1$ 。而如果是 $\langle right|left\rangle = 0$ 這就和拿光源探測電子穿過哪個孔的情形一樣，干涉條紋將消失。由於測量板子動量的不確定度很大，沒法精細的測出被電子踢一脚後板子動量的改變量，藉由測量板子也無法明確知道電子究竟通過了哪個孔，實驗上就表現為 $|left\rangle$ 和 $|right\rangle$ 這兩個態不正交。

我們已經發現只要發生糾纏就會導致退相干，但實驗上不一定是總是能做到最大糾纏，一般來說 $0 \leq \langle right|left\rangle \leq 1$ ，若這兩個態內積的值為 0 就是完全可區分，條紋將徹底消失；若為 1 則是完全不可區分，看到清晰的條紋；而如果內積的值處於中間，也就是沒那麼可區分，那干涉條紋會變模糊，但不至於消失。

我只要能使電子的波函數和某東西糾纏在一起，而且糾纏上的兩個態正交，干涉條紋便會消失。在下一個實驗中我們還會發現所謂的「測量」並不一定總是發生在宏觀儀器和微觀客體的相互作用時。

1.2 費曼的思想實驗

費曼在《費曼物理學講義》中使用照明系統作為哪條路檢測器，費曼也是用光子會對造成電子不可控制的衝擊來解釋干涉條紋消失。近年來的研究進展表明，哪條路檢測器的退相干作用，主要來自它與被探測客體與探測器之間量子態的糾纏，傳統看法中動量-能量的衝擊不是必需的。(Feynman, 1963)

費曼提出的一個思想實驗：我們在雙狹縫的後方放置一光源，利用這個光源，我們可以確定電子究竟是從哪個孔穿過去。當然此光源必須盡可能的弱以減小散射對電子動量的改變，以杜絕你可能會想說因為光子和電子碰撞把電子的軌跡打偏了，所以干涉條紋發生變化。

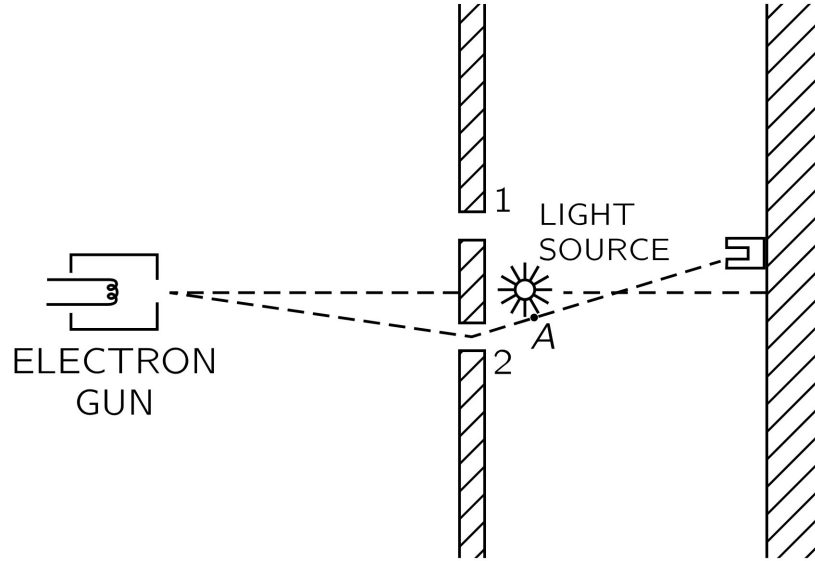


圖 2: 費曼思想實驗

我們對路徑進行探測而又不干擾從兩個孔演化的波函數，通過孔 1 的電子以 M_1 記錄而通過孔 2 的電子以 M_2 記錄，從電子槍到雙狹縫板的演化以下式描述：

$$|\psi_0\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle \otimes |M_1\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |M_2\rangle$$

電子的波函數和其路徑信息糾纏起來了，這和原始的雙狹縫實驗將會有甚麼區別呢？穿過狹縫後繼續飛向屏幕的演化為：

$$|\psi_1\rangle \otimes |M_1\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |M_2\rangle \rightarrow |M_1\rangle \otimes \int a(z) |\varphi(z)\rangle dz + |M_2\rangle \otimes \int b(z) |\varphi(z)\rangle dz$$

對上式求模平方可以得到在位置 z 處探測到的電子數量，由於探測信息的兩個態互相正交 (電子不可能同時被觀測到穿過孔 1 又穿過孔 2)， $\langle M_1|M_2\rangle = \langle M_2|M_1\rangle = 0$ ，於是干涉項 $a(z)^*b(z)$ 和 $a(z)b(z)^*$ 消失了。因為路徑信息和波函數發生糾纏，我們探測電子從哪個孔穿過，所以干涉條紋便消失了。

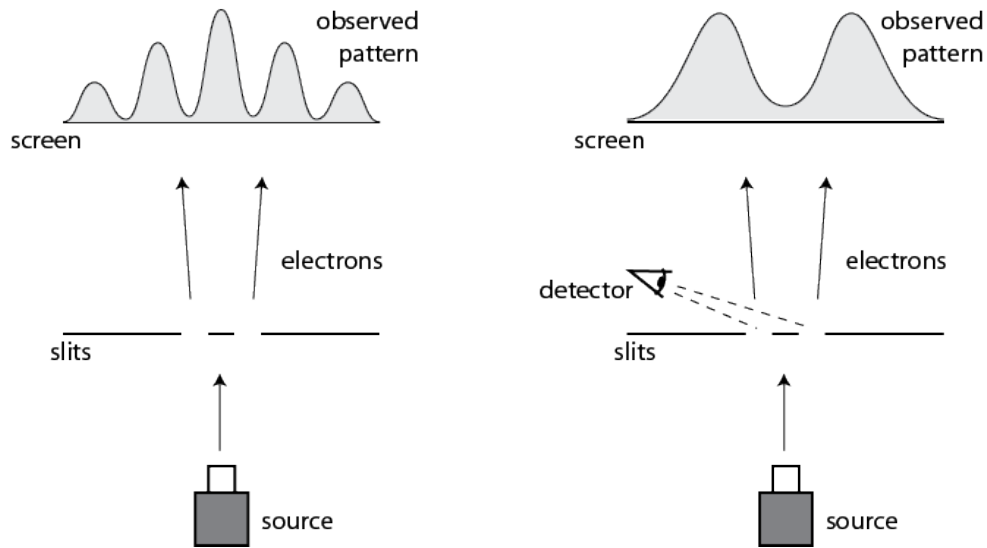


圖 3: 探測電子從哪個孔穿過會導致干涉條紋消失

以前我們認為在「哪條路」實驗中測量所導致的干涉條紋消失是來源於波粒二象性的互補原理。根據海森堡不確定性原理，通常認為測量會對粒子動量造成不可控制的擾動。但這並非是解釋干涉條紋消失的唯一機制，我們還可以用量子糾纏來解釋干涉條紋的消失。

1.3 雙狹縫前方放置 Stern-Gerlach 儀

我們在雙狹縫前面放一台 Stern-Gerlach 儀，為了避免羅倫茲力的干擾，還將電子換成中子。中子流在經過非均勻磁場後會分為上下兩束，適當調整雙狹縫板的位置，使這兩束中子可以正好分別通過雙狹縫。這樣還會有干涉條紋嗎？先說結論：沒有干涉。但為什麼呢？這個情形和普通的雙狹縫干涉有甚麼不同嗎，既然中子的自旋是隨機的那它也是隨機的通過兩個孔。

通過孔 1 的中子自旋向上而通過孔 2 的中子自旋向下，從中子源到雙狹縫板的演化以下式描述：

$$|\psi_0\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle \otimes |u\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |d\rangle$$

中子的空間位置和它的自旋狀態糾纏起來了，這是和以往的雙狹縫干涉最關鍵的區別。而在位置 z 處探測到的電子數量為：

$$|a(z)|^2 + |b(z)|^2 + a(z)^* b(z) \langle u|d \rangle + a(z)b(z)^* \langle d|u \rangle$$

由於自旋態正交， $\langle u|d \rangle = \langle d|u \rangle = 0$ ，干涉項 $a(z)^* b(z)$ 和 $a(z)b(z)^*$ 消失了。在這個實驗裡，對於每個單獨的中子我們依然不知道它是從哪個縫通過的，但是干涉條紋還是消失了。

在這個實驗裡，干涉現象的消失其實也是源於「測量」，只不過這個測量並不能明顯地看出。在「測量」過後，向上飛行的中子被貼上了一個標籤 $|u\rangle$ ，自旋向上；而向下飛行的中子被貼上了另一個標籤 $|d\rangle$ ，自旋向下。這個測量相當「隱蔽」：首先，測量結果或標籤 $|u\rangle$ 和 $|d\rangle$ 是微觀態；其次，這個自旋是中子自己的，並不是來自光子等其他粒子或系統。由於這個隱蔽性，我們從這個測量無法得知中子是從哪條縫穿過的，但干涉現象依然消失了。這個「測量」並不是通常意義上的那種和宏觀儀器相互作用的測量，而是以微觀的自旋自由度去做「標記」。

從上面的例子中我們看到，只要和任何東西（甚至是微觀的也可以）糾纏都會殺死干涉效應。只要讓兩個態變得可區分，干涉現象便會消失，而且可以用任何自由度去做「標記」，這裡又體現出了哥本哈根詮釋的缺陷，測量不需要和宏觀儀器相互作用，和微觀的自旋糾纏也可以。

以雙縫干涉或任何雙路干涉儀（如 Mach-Zehnder 干涉儀）為例，設電子（或光子）通過兩條路的分波分別為 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ ，儀器和環境的量子態為 $|D\rangle$ 。如果沒安裝哪條路檢測器，實驗設置的總量子態為：

$$|\Psi_0\rangle = (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \otimes |D\rangle$$

即儀器和環境對兩束粒子（或者說波）一視同仁，總量子態表現為直積形式，沒有糾

纏。當安裝了哪條路檢測器後，它對粒子通過某條路作出反應，總量子態就變為：

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |D_1\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |D_2\rangle$$

$|D_1\rangle$ 和 $|D_2\rangle$ 變得不同了，它們分別與兩條路的分波耦合，這樣才能分辨。再來我們看粒子的概率分布，它由 $|\Psi\rangle$ 的模平方來描述：

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\psi_1|\psi_1\rangle + \langle\psi_2|\psi_2\rangle + \langle\psi_1|\psi_2\rangle \langle D_1|D_2\rangle + \langle\psi_2|\psi_1\rangle \langle D_2|D_1\rangle$$

干涉項在沒安裝哪條路檢測器時， $|D_1\rangle = |D_2\rangle = |D\rangle$ ， $\langle D_1|D_2\rangle = \langle D|D\rangle = 1$ ，因此干涉項完全保留。

「兩條路可以完全區分」意味著 $|D_1\rangle$ 與 $|D_2\rangle$ 正交，即 $\langle D_1|D_2\rangle = 0$ ，干涉條紋不見了。介於以上兩者之間的情況是 $|D_1\rangle$ 與 $|D_2\rangle$ 不完全等同也不完全正交， $0 < |\langle D_1|D_2\rangle| < 1$ ，干涉條紋的反襯度下降，這屬於部分相干的情況。

哪條路檢測器的兩個狀態 $|D_1\rangle$ 與 $|D_2\rangle$ 是怎樣變得正交的？以上的討論也許有點抽象。我們可以把雙路干涉裝置概括成如下的圖示。粒子束被分束器 BS (beam splitter) 分成 1、2 兩束，經不同的路徑到達合束器 BM (beam merger) 後合二為一，發生干涉。

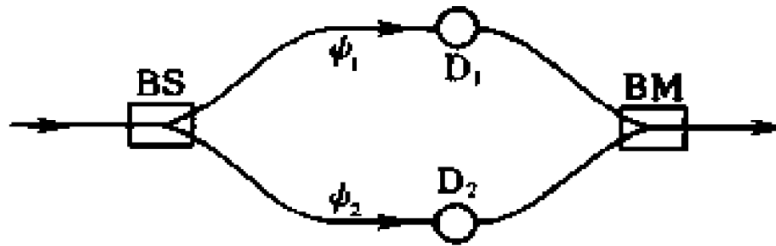


圖 4: 雙路干涉裝置

直到惠勒和費曼那個年代的人們都還認為，為了探測「哪條路」的信息，需要讓檢測器對經過的粒子作出反應，因此總要對粒子的運動產生不可控制的干擾，其實大可不必，譬如我們可以利用粒子的內部狀態來標記它的路徑。設想粒子有兩個內部狀態自旋朝上和

朝下 \uparrow 和 \downarrow ，這可以是電子的上下兩個自旋態，也可以是光子的兩個偏振態垂直偏振和水平偏振 V 和 H ，也可以是原子超精細分裂出來的兩個能級。探測粒子的內部狀態，原則上可以不干擾粒子的整體運動。可見，哪條路檢測器的退相干作用不一定是對粒子不可控制的衝擊造成的。

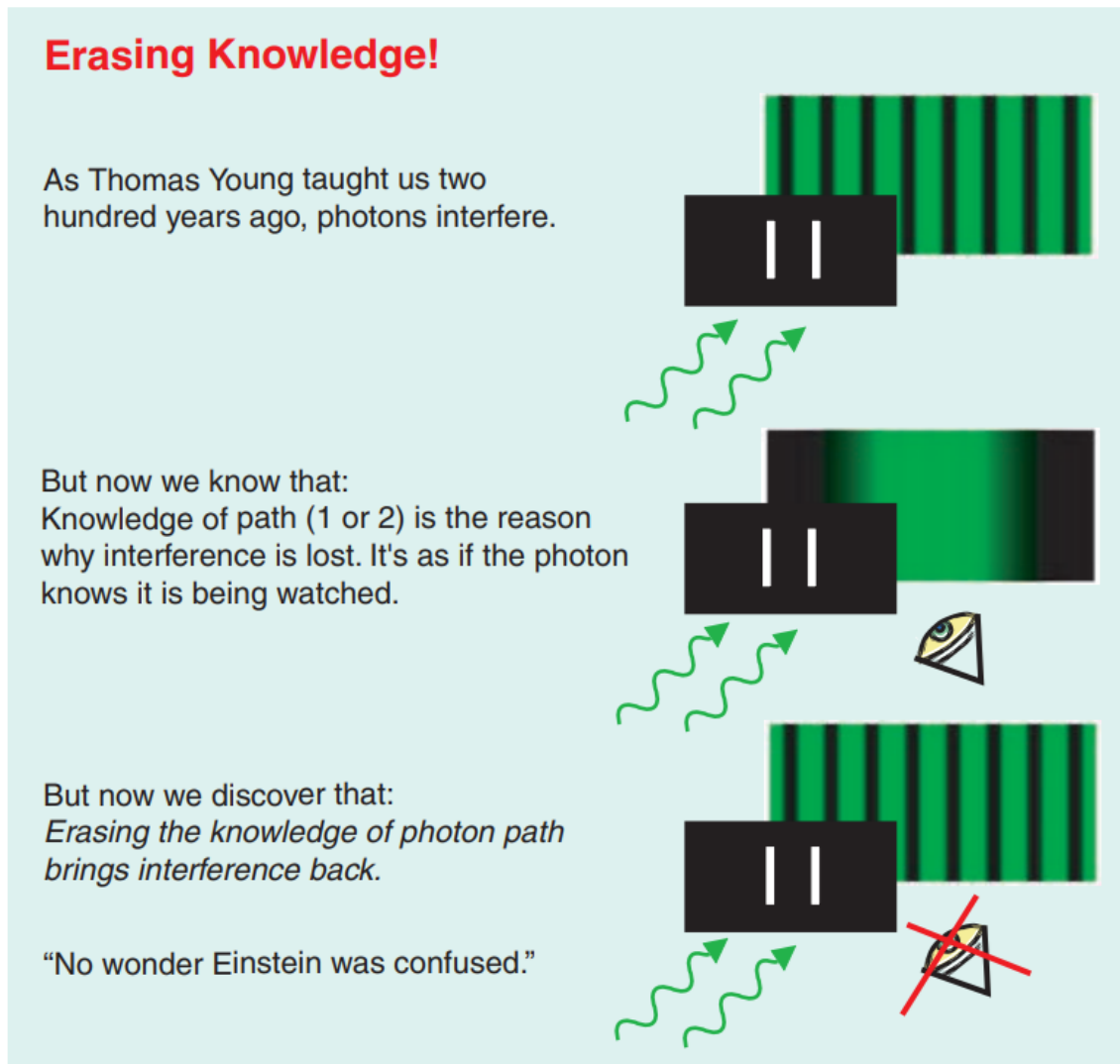


Fig. 1. Schematics for the Young's double-slit experiment. The which-path information wipes out the interference pattern. The interference pattern can be restored by erasing the which-path information.

圖 5: 擦除了路徑信息後便會重新恢復干涉條紋

本文欲探討的量子擦除實驗就是讓光子用它自身的垂直和水平兩種偏振狀態來對路徑信息做標記，因此干涉條紋會消失，再放上一個斜對角的偏振片（作為量子橡皮擦）干涉條紋又會重新出現。

本文否定一個常見的觀點：「擦除路徑信息會導致干涉條紋重新出現。(Aharonov, 2005; Hillmer, 2007)」本文認為，把這個實驗叫做量子「擦除」其實是個誤解。與其說斜對角偏振片所起到的作用是「擦除」，不如說它們其實是對光子進行篩選，正是這樣的篩選行為使得干涉條紋重新出現。

更進一步地說，不需要引入反因果關係來解釋延遲選擇實驗。光子的波函數，從雙縫出來以後，到達屏幕所在的位置之前，是沒有塌縮的。這個過程你問光子走哪一條縫過來是沒意義的。所以這個實驗與其說叫做「量子擦除實驗」不如說叫做「量子篩選實驗」更為恰當，正是篩選的這個手段恢復了相干性。

2 光子偏振的量子擦除實驗

光子偏振的量子擦除實驗設計為以下四步：

1. 對於傳統的雙狹縫實驗，光子的波函數會同時通過兩個狹縫，並形成干涉條紋

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|x_1\rangle + |x_2\rangle] \quad \Psi(p) = \langle p|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\langle p|x_1\rangle + \langle p|x_2\rangle]$$

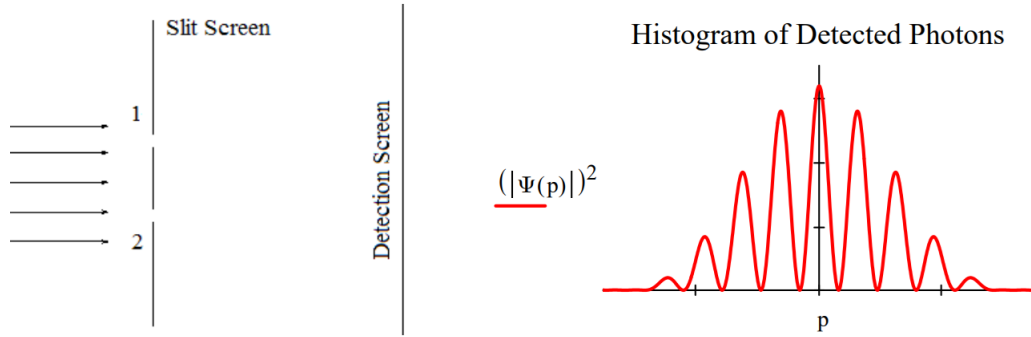


圖 6: 傳統的光子雙狹縫實驗裝置

為了計算干涉圖案，需要將方程式 $|\Psi\rangle$ 傅立葉變換為動量空間來獲得。(Rioux, 2004)

具體的數學推導如下所示：

$$\text{通過寬度為 } \delta \text{ 的狹縫的波函數為：} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-ipx} dx$$

通過兩個位於 x_1 和 x_2 寬度為 δ 的雙狹縫的波函數為：

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x_1\rangle + |x_2\rangle)$$

$$\Psi(p) = \langle p|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle p|x_1\rangle + \langle p|x_2\rangle)$$

$$\Psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{x_1-\frac{\delta}{2}}^{x_1+\frac{\delta}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-ipx} dx + \int_{x_2-\frac{\delta}{2}}^{x_2+\frac{\delta}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-ipx} dx \right)$$

干涉條紋為 $|\Psi(p)|^2$ ，函數圖形如下圖：

$$\text{Plot} \left[\text{Abs} \left[\int_{-1-0.2}^{-1+0.2} e^{-iPx} dx + \int_{1-0.2}^{1+0.2} e^{-iPx} dx \right]^2, \{p, -20, 20\} \right]$$

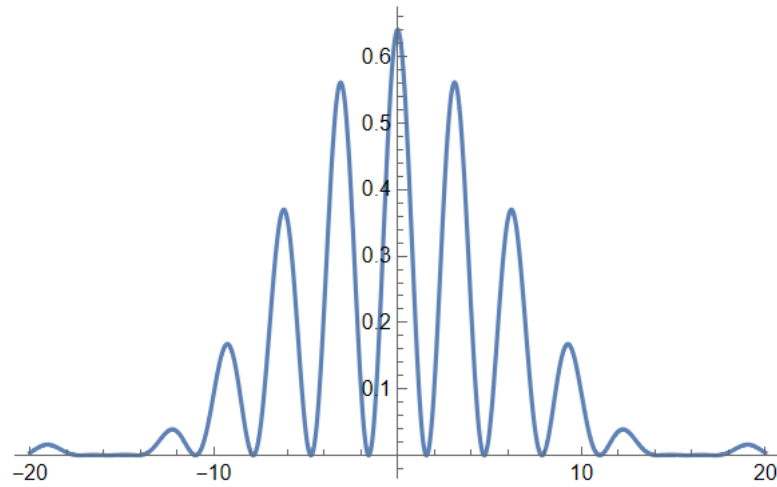


圖 7: 雙狹縫干涉條紋

2. 在雙狹縫後面分別放在水平和垂直的偏振片，由於來自雙狹縫的光子與路徑信息發生糾纏，因此干涉條紋會消失

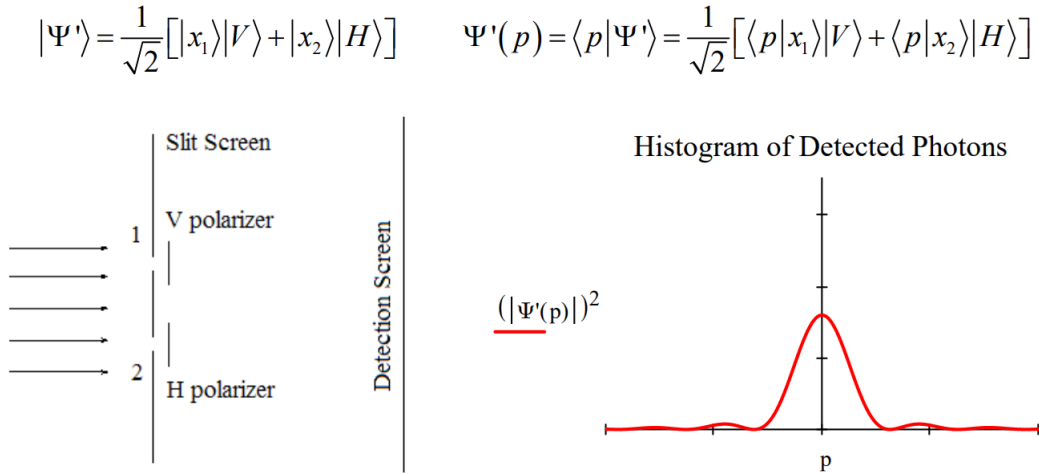


圖 8: 放上水平和垂直偏振片的雙狹縫實驗裝置

具體的數學推導如下所示：

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x_1\rangle |V\rangle + |x_2\rangle |H\rangle)$$

$$\langle \Psi' | \Psi' \rangle = \frac{1}{2} (\langle x_1 | x_1 \rangle \langle V | V \rangle + \langle x_1 | x_2 \rangle \langle V | H \rangle + \langle x_2 | x_1 \rangle \langle H | V \rangle + \langle x_2 | x_2 \rangle \langle H | H \rangle)$$

由於水平和垂直的偏振片是正交的，因此 $\langle V | H \rangle = \langle H | V \rangle = 0$ ，兩個交叉項干涉項消失了。將其投影至動量空間得到：

$$\langle \Psi(p)' | \Psi(p)' \rangle = \frac{1}{2} (\langle x_1 | p \rangle \langle p | x_1 \rangle + \langle x_2 | p \rangle \langle p | x_2 \rangle)$$

$$|\Psi(p)'|^2 = \frac{1}{2} \left(\left| \int_{x_1 - \frac{\delta}{2}}^{x_1 + \frac{\delta}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-ipx} dx \right|^2 + \left| \int_{x_2 - \frac{\delta}{2}}^{x_2 + \frac{\delta}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-ipx} dx \right|^2 \right)$$

Plot $\left[\left(\text{Abs} \left[\int_{-1-\theta.2}^{1+\theta.2} \text{Exp}[-i * p * x] \, dx \right] \right)^2 + \left(\text{Abs} \left[\int_{-1-\theta.2}^{-1+\theta.2} \text{Exp}[-i * p * x] \, dx \right] \right)^2, \{p, -2\theta, 2\theta\} \right]$

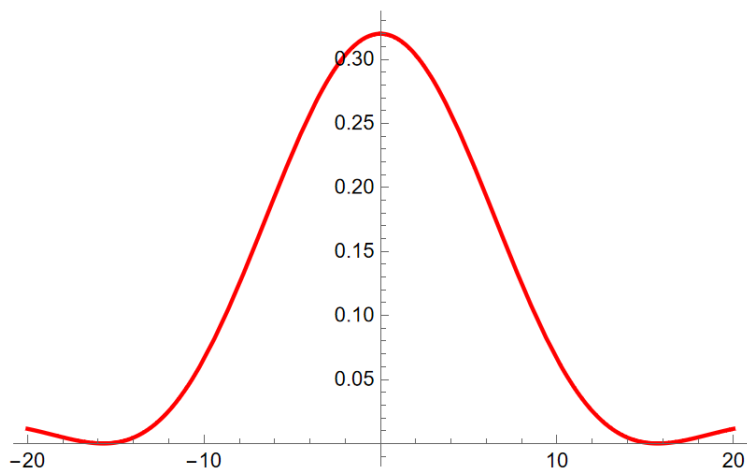


圖 9: 加上偏振片的雙狹縫條紋

看到不僅干涉條紋消失了，中央極大值的峰值光強也減少一半，這是因為有部分能量被拿去填補暗紋。

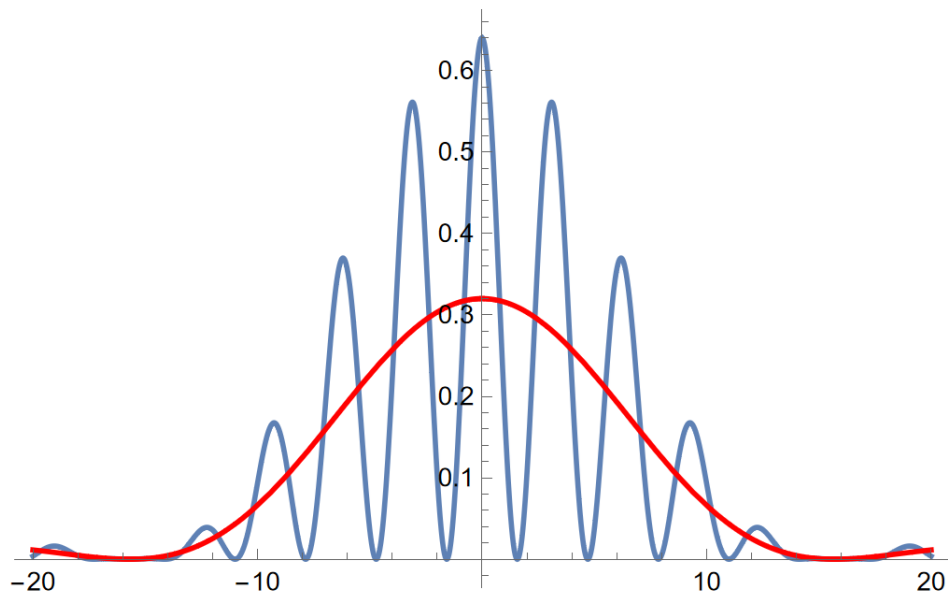


圖 10: 加偏振片與不加偏振片的雙狹縫條紋對比

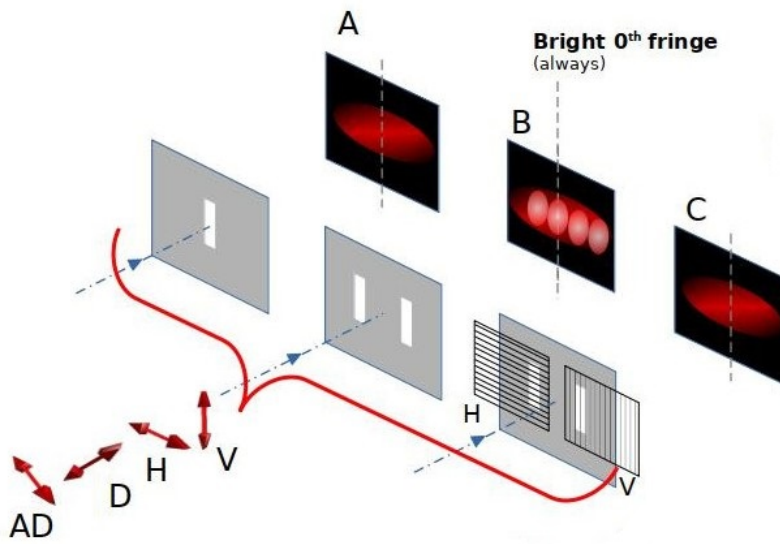


圖 11: 實驗裝置 1 和 2 對應此圖中的 B 和 C

3. 接下來放上斜 45° 的偏振片 Diagonal，作為「量子橡皮擦」，由於 $\langle D|V \rangle = \langle D|H \rangle = \frac{1}{2}$ ，干涉條紋又重新出現

$$\Psi''(p) = \langle D|\Psi'(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\langle p|x_1\rangle\langle D|V\rangle + \langle p|x_2\rangle\langle D|H\rangle] = \frac{1}{2}[\langle p|x_1\rangle + \langle p|x_2\rangle]$$

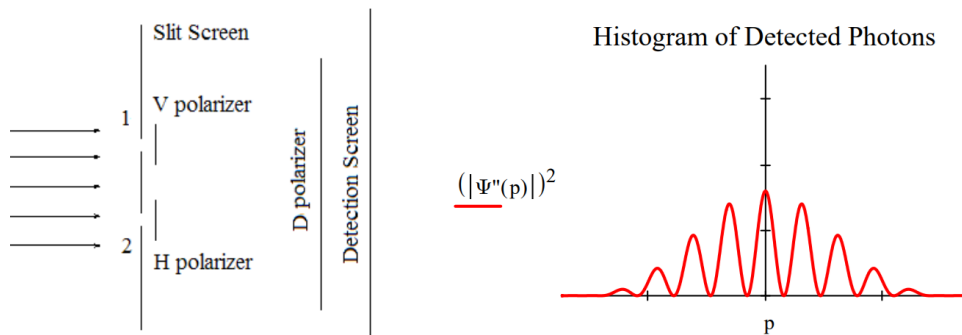


圖 12: 放上 $+45^\circ$ 偏振片的雙狹縫實驗裝置

注意 $|\Psi''(p)|^2$ 的函數圖像即為 $|\Psi(p)|^2$ 的一半。

4. 最後如果放上斜-45° 的偏振片 Anti-diagonal，則會看到干涉條紋和 +45° 的偏振片干涉條紋剛好差了 $\frac{\pi}{2}$ 的相位，呈現亮暗紋反轉

$$\Psi'''(p) = \langle A | \Psi''(p) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\langle p | x_1 \rangle \langle A | V \rangle + \langle p | x_2 \rangle \langle A | H \rangle] = \frac{1}{2} [\langle p | x_1 \rangle - \langle p | x_2 \rangle]$$

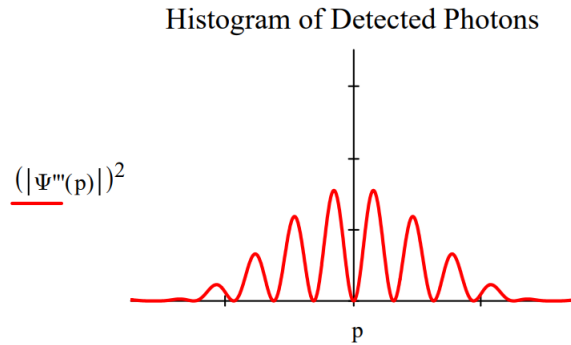


圖 13: 放上-45° 偏振片的雙狹縫實驗裝置

斜 45° 偏振片的兩種情況，也可以解釋為根據入射光的偏振方向和 45° 偏振片的偏振方向是同方向還是反方向，分別對應著中央極亮和中央極暗的兩種情況

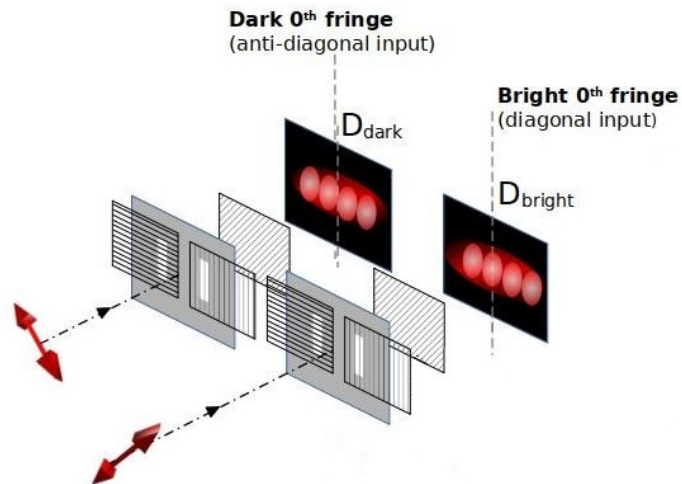


圖 14: 加上 $\pm 45^\circ$ 偏振片的雙狹縫條紋

如果把 D 偏振片的上半部和 A 偏振片的下半部合在一起，把這個混合橡皮擦放在光路中。會看到如下的現象：D 偏振橡皮擦對應的干涉條紋出現在光斑的上半部分，而 A 偏振橡皮擦的相應條紋出現在下半部。干涉圖樣看起來就像沒有對齊的牙齒。

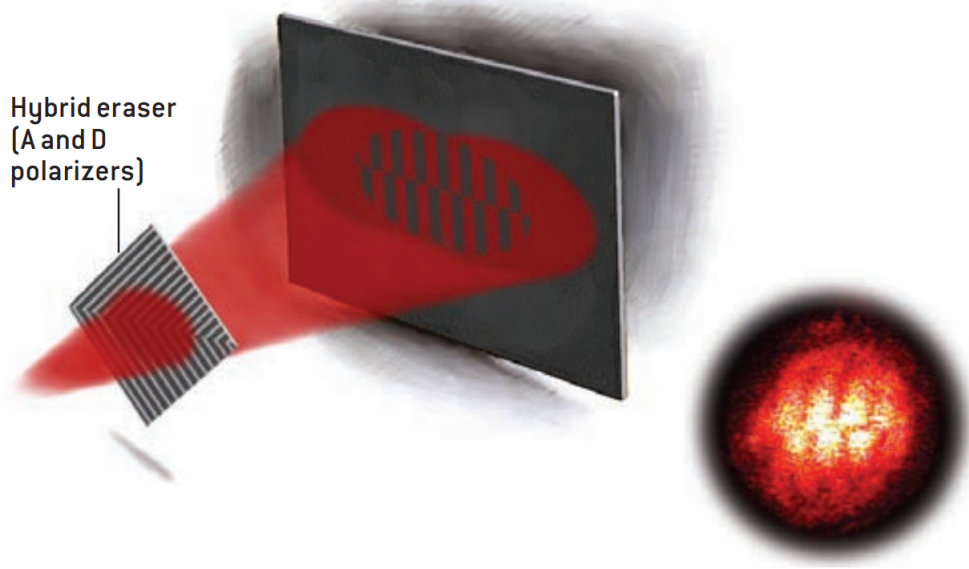


圖 15: 將 D 和 A 偏振片合在一起

最後將四個圖形放在一起對比，藍紅橘綠四條函數圖形分別代表 $|\Psi(p)|^2$, $|\Psi'(p)|^2$, $|\Psi''(p)|^2$, $|\Psi'''(p)|^2$

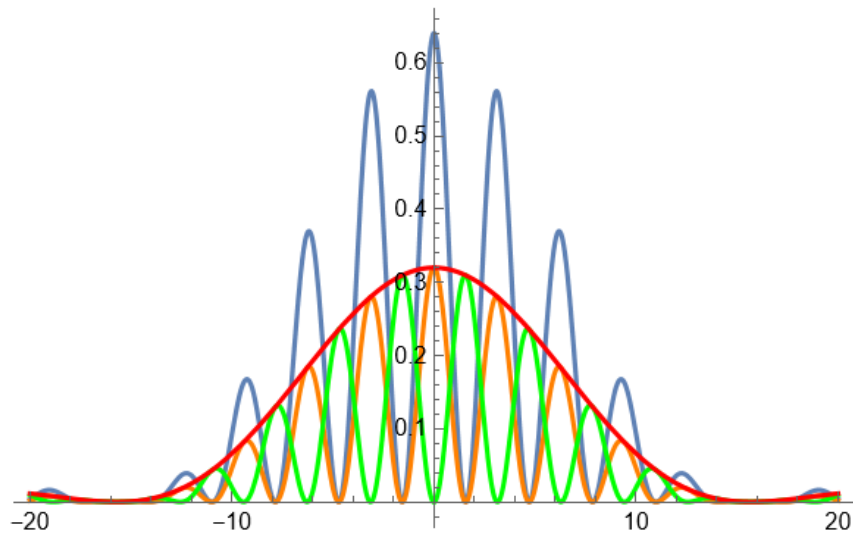


圖 16: 四個圖形

很容易延伸推得，如果橡皮擦偏振片是處於 $\pm 45^\circ$ 之間的角度，屏幕上看到的將會是一個反襯度下降的干涉條紋，這是部分相干的結果。

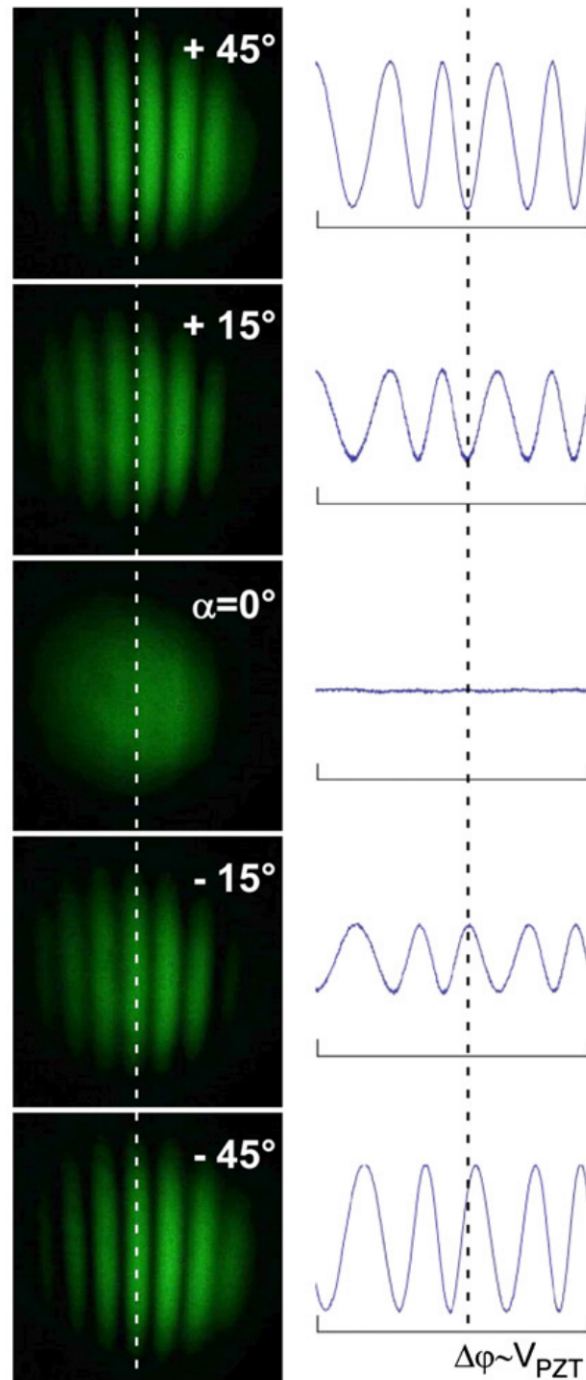


圖 17: 加上偏振片的雙狹縫條紋

5. 對於任何一個橡皮擦偏振片是處於 $\pm 45^\circ$ 之間的角度，可以推得一個普適性的通解。

在狹縫 1 依然放上垂直偏振片，而在狹縫 2 放上相對垂直方向角度為 θ 的偏振片。最後面的橡皮擦是相對垂直方向角度為 ϕ 的偏振片。

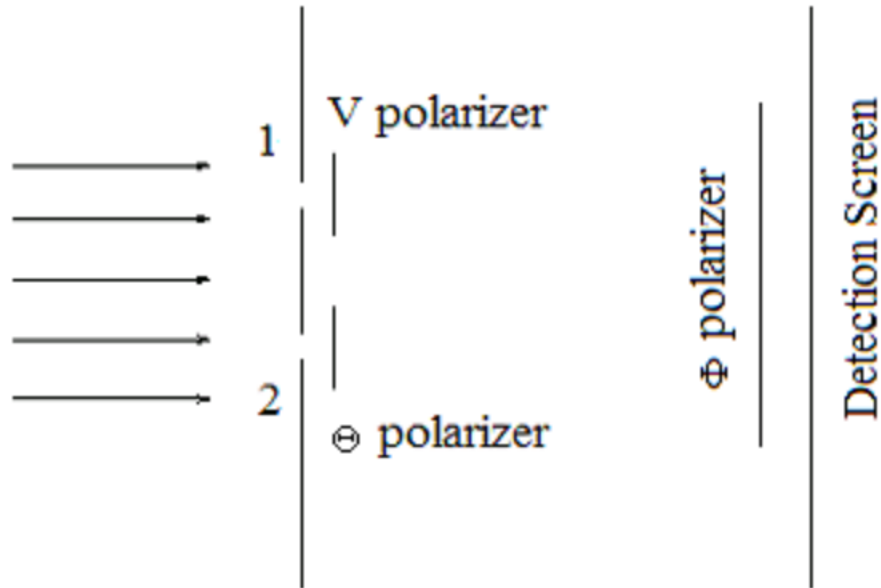


圖 18: 普適性的情況

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x_1\rangle |V\rangle + |x_2\rangle |\theta\rangle)$$

$$\Psi(p, \phi) = \langle p, \phi | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle p | x_1 \rangle \langle \phi | v \rangle + \langle p | x_2 \rangle \langle \phi | \theta \rangle)$$

$$\Psi(p, \phi) = \langle p, \phi | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle p | x_1 \rangle \cos \phi + \langle p | x_2 \rangle \cos (\theta - \phi))$$

3 量子「擦除」其實是個誤導性的用詞

對量子擦除實驗的通常解釋是，由於可以知道光子穿過了哪個狹縫，這樣的「信息」就會破壞干涉，因為光子不再處於同時穿過兩個狹縫的疊加狀態，而是穿過一個狹縫的混態加上穿過另一個狹縫的混態。

本文認為，把這個實驗叫做量子「擦除」其實是個誤導性的口語化用詞。偏振片所起到的作用就是只讓和偏振方向平行的光子通過。所以與其說是「擦除」，不如說是對光子做了「篩選」。

更好的解釋是，光子的狀態與偏振片進行「糾纏」，因此被打上「標籤」，由於 V/H 兩個「標籤」是正交的，所以 $|\Psi\rangle$ 干涉的交叉項就消失了，留下在屏幕上的圖案，是兩個單狹縫繞射圖案的總和。

當一個相對於垂直方向順時針旋轉 45° 的偏振片 (D) 放置在檢測屏幕之前時，干涉條紋又會重新出現。常見的觀點會說這代表對角偏振片 (D) 起到了一個「量子橡皮擦」的作用，對角偏振片 (D) 把來自兩孔的路徑信息給「擦除」了，所以恢復了相干性。對角偏振器 (D) 被稱為量子橡皮擦，因為它似乎恢復了由於 V/H 偏振器提供的路徑信息而丟失的干涉圖案。

在檢測屏幕之前放置一個反對角偏振器——相對於垂直方向逆時針旋轉 45° (A)，將導致恢復的干涉圖案發生 180° 的相位移 (亮暗紋發生錯位)。

這個相位偏移現象就無法以擦除路徑信息來解釋了。擦除意味著刪除路徑信息，如果路徑信息已經被刪除，原始的干涉圖案應該在不發生相位偏移的情況下恢復，也就是不論放上 A 或是 D，都應該看到同樣的干涉條紋。

所以，從這個分析中清楚地可以看出，對角偏振器實際上並不會擦除信息，它只是「篩選」出了 $|\Psi\rangle$ 的對角分量，只讓一半的光子通過，然後顯示出 $|\Psi(p)|^2$ 產生的原始干涉圖案的一半強度。

在圖16中，紅色圖形正好是橘色和綠色圖形之和，即 $|\Psi'(p)|^2 = |\Psi''(p)|^2 + |\Psi'''(p)|^2$ ，所以與其說 $\pm 45^\circ$ 偏振片是擦除，不如說它們其實是對光子進行篩選。

偏振片對光子起的作用分為兩步：1. 先做投影測量；2. 偏振角度不對的光子就擋下來不讓它過不去，塌縮到另一個方向的光子就被吸收掉了。

所以偏振片 A 或是 D 都沒有起到任何「擦除路徑信息」的作用，它們起到的作用只是篩選出角度合適的光子並放光子通過。更正確的理解是：這些角度合適的光子彼此間能互相干涉。

所以這個實驗與其說叫做「量子擦除實驗」不如說叫做「量子篩選實驗」更為恰當，正是篩選的這個手段恢復了相干性。

4 使用「記錄」電子來說明量子擦除實驗

假設對於每一個通過狹縫的「行進」電子，我們都有一個單獨的「記錄」電子。這對電子以如下方式糾纏：如果行進電子通過左狹縫，記錄電子處於自旋向上的狀態，如果行進電子通過右狹縫，記錄電子處於自旋向下的狀態 (Carroll, 2019)。我們得到：

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x_1\rangle |u\rangle + |x_2\rangle |d\rangle)$$

$$\langle\Psi'|\Psi'\rangle = \frac{1}{2} (\langle x_1|x_1\rangle \langle u|u\rangle + \langle x_1|x_2\rangle \langle u|d\rangle + \langle x_2|x_1\rangle \langle d|u\rangle + \langle x_2|x_2\rangle \langle d|d\rangle)$$

由於水平和垂直的偏振片是正交的，因此 $\langle u|d\rangle = \langle d|u\rangle = 0$ ，兩個交叉項干涉項消失了。將其投影至動量空間得到：

$$\langle\Psi(p)'|\Psi(p)'\rangle = \frac{1}{2} (\langle x_1|p\rangle \langle p|x_1\rangle + \langle x_2|p\rangle \langle p|x_2\rangle)$$

$$|\Psi(p)'\rangle^2 = \frac{1}{2} \left(\left| \int_{x_1-\frac{\delta}{2}}^{x_1+\frac{\delta}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-ipx} dx \right|^2 + \left| \int_{x_2-\frac{\delta}{2}}^{x_2+\frac{\delta}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-ipx} dx \right|^2 \right)$$

此即是和9一樣的狀況，干涉條紋消失了。

Plot $\left[\left(\text{Abs} \left[\int_{-1-\theta.2}^{1+\theta.2} \text{Exp}[-i * p * x] dx \right] \right)^2 + \left(\text{Abs} \left[\int_{-1-\theta.2}^{-1+\theta.2} \text{Exp}[-i * p * x] dx \right] \right)^2 \right], \{p, -2\theta, 2\theta\}$

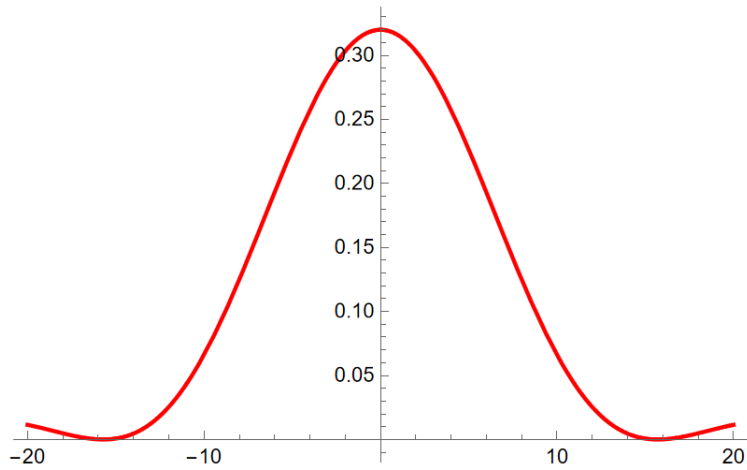


圖 19: 加上偏振片的雙狹縫條紋

現在讓我們改沿水平軸測量記錄自旋。水平和垂直自旋狀態之間有一個關係；我們可以寫成：

$$|\uparrow\rangle = |\rightarrow\rangle + |\leftarrow\rangle$$

$$|\downarrow\rangle = |\rightarrow\rangle - |\leftarrow\rangle$$

（為了簡化我們的符號，我們忽略了平方根二的各種因子）所以在我們進行這樣的測量之前，狀態是：

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |x_1\rangle (|\rightarrow\rangle + |\leftarrow\rangle) + |x_2\rangle (|\rightarrow\rangle - |\leftarrow\rangle) \\ &= |x_1\rangle |\rightarrow\rangle + |x_1\rangle |\leftarrow\rangle + |x_2\rangle |\rightarrow\rangle - |x_2\rangle |\leftarrow\rangle \\ &= (|x_1\rangle + |x_2\rangle) |\rightarrow\rangle + (|x_1\rangle - |x_2\rangle) |\leftarrow\rangle \end{aligned}$$

當我們在垂直方向測量記錄自旋時，得到的結果與行進電子的確定路徑糾纏在一起： $|\uparrow\rangle$ 與 $|x_1\rangle$ 糾纏， $|\downarrow\rangle$ 與 $|x_2\rangle$ 糾纏。所以通過進行那次測量，我們就能知道電子已經通過了一個或另一個狹縫。但現在當我們沿水平軸測量記錄自旋時，情況就不同了。在我們進行每次測量後，我們再次處於波函數的一個分支，其中行進電子通過了兩個狹縫。

干涉條紋為：

$$\begin{aligned}
 |\Psi|^2 = & \left[(|x_1\rangle + |x_2\rangle) \right]^2 \langle \rightarrow | \rightarrow \rangle \\
 & + (|x_1\rangle + |x_2\rangle)(|x_1\rangle - |x_2\rangle) \langle \rightarrow | \leftarrow \rangle \\
 & + (|x_1\rangle - |x_2\rangle)(|x_1\rangle + |x_2\rangle) \langle \leftarrow | \rightarrow \rangle \\
 & + \left[(|x_1\rangle - |x_2\rangle) \right]^2 \langle \leftarrow | \leftarrow \rangle
 \end{aligned}$$

還會發現，如果我們測量自旋向左，行進電子在其對波函數的貢獻中獲得了一個負號，這個負號導致干涉條紋的中央變成暗紋。

$\left[(|x_1\rangle - |x_2\rangle) \right]^2$ 的圖形是下圖的這個樣子

$$p1 = \text{Plot} \left[\left(\text{Abs} \left[\int_{-1-0.2}^{1+0.2} \text{Exp}[-i * p * x] dx - \int_{-1-0.2}^{-1+0.2} \text{Exp}[-i * p * x] dx \right] \right)^2 \right]$$

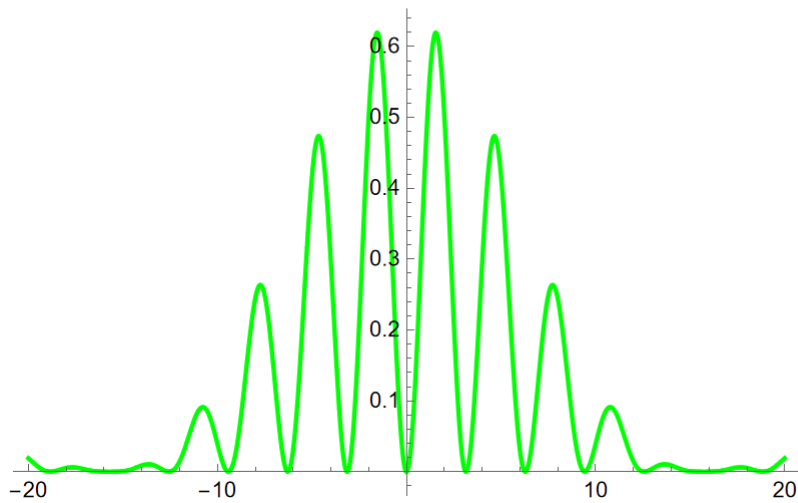


圖 20: $|(|x_1\rangle - |x_2\rangle)|^2$ 中央暗紋

通過選擇這樣的測量方式，我們抹去了關於電子通過哪個狹縫的信息。因此這被稱為「量子擦除實驗」。這種擦除不影響檢測屏幕上條紋的整體分佈。它仍然保持無干涉。

$|(|x_1\rangle + |x_2\rangle)|^2$ （藍色）和 $|(|x_1\rangle - |x_2\rangle)|^2$ （綠色）這兩個條紋圖案剛好是互補的，這兩個條紋相加就是紅色的條紋，也就是無干涉的情況。

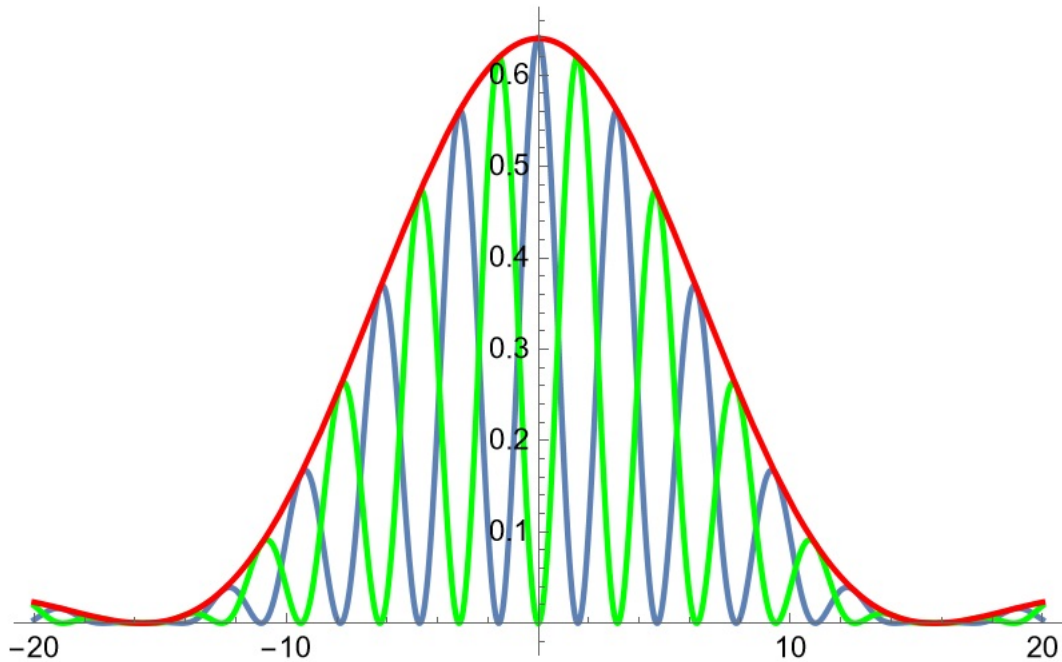


圖 21: 一個的峰值與另一個的谷值匹配

如果我們去電腦上將檢測屏幕上的閃光分成這兩組——那些與自旋向左記錄電子相關的，和那些與自旋向右相關的。現在我們看到什麼？

有趣的是，干涉圖案重新出現了。與自旋向左記錄電子相關的行進電子形成干涉圖樣，與自旋向右相關的也是如此。（記住，我們不會一下子看到圖樣，它會在我們檢測到許多單個閃光時逐漸出現。）但這兩個干涉圖樣略有偏移，因此一個的峰值與另一個的谷值匹配。原來在看起來像是無特徵的模糊分佈中，實際上隱藏著干涉條紋。

得到的會是下圖的結果，黃色和藍色的亮點分別是與記錄電子自旋向左和自旋向右相關的行進電子，一個的峰值恰好是另一個的谷值，彼此錯開。但如果我們不對行進電子進行篩選，組合在一起在屏幕上看就沒有干涉條紋了。

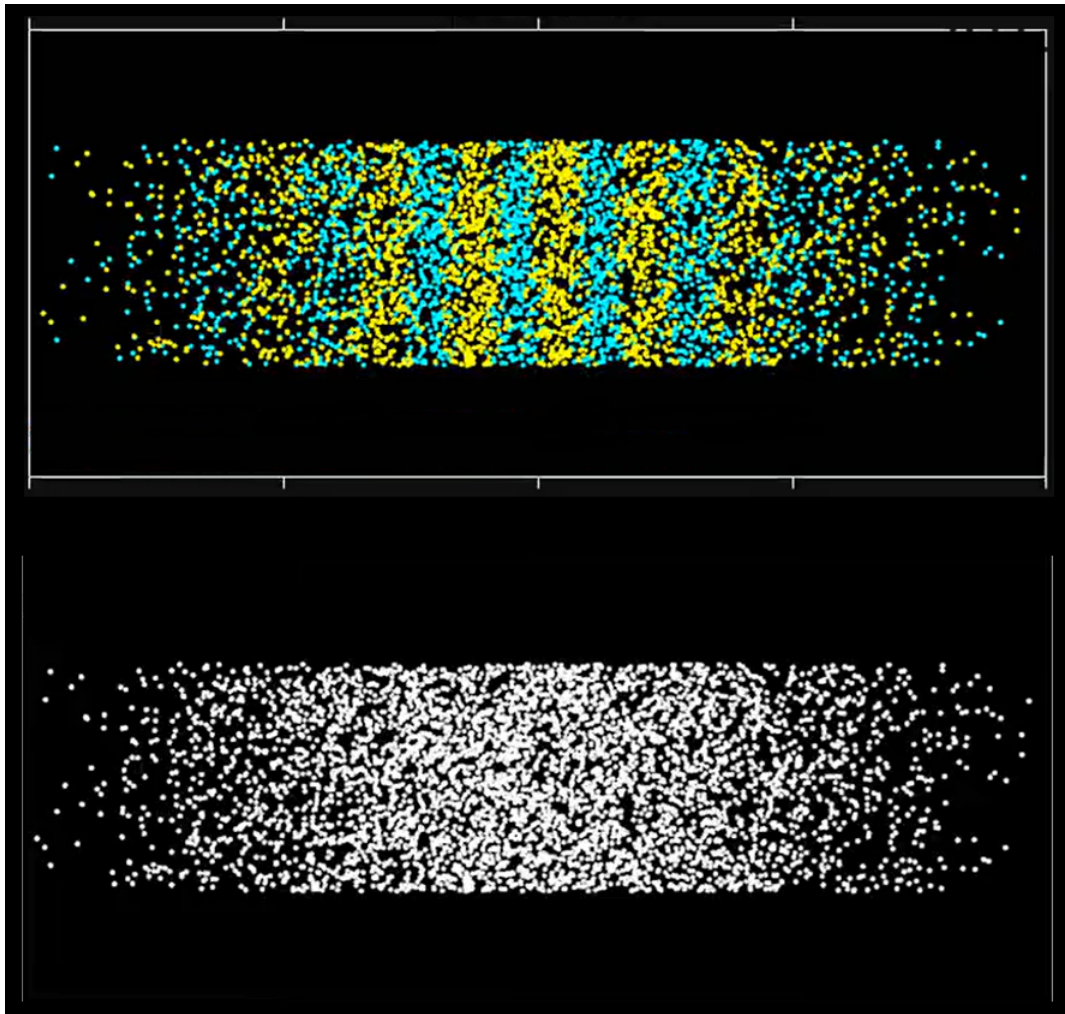


圖 22: 篩選出兩個分組

事後看來，這並不那麼令人驚訝。從觀察量子態 $|\Psi\rangle$ 如何與自旋向左和自旋向右的記錄電子寫在一起，我們就可以看出，每次測量都與通過兩個狹縫的行進電子糾纏在一起，所以它當然可以干涉。而那個負號只是錯開了一個圖案，使得兩個圖案合在一起時可以加起來形成一個平滑的分佈。

電子不會「選擇」通過一個或另一個狹縫。它的波函數（以及與它所糾纏的任何東西的波函數）總是按照薛定諤方程演化。電子不做選擇，電子的波函數明確地通過兩個狹縫。通過沿不同方向測量記錄電子，我們可以挑出那個糾纏波函數的不同部分，其中一些就會表現出干涉。實際上沒有什麼行為在向過去傳遞信息。

哥本哈根詮釋認為電子是「既有波動性又有粒子性質的東西」。如果我們相信哥本哈根詮釋，就會認為電子在通過狹縫時必須體現出波動性或粒子性的行為。所以才會得出，延遲選擇實驗必須向過去傳遞信息，以幫助電子做出決定，「選擇」通過哪一個狹縫。

所有這些想法都應該被抵制。電子不會選擇體現出波動性還是粒子性。但一些量子力學基礎研究者確實將延遲選擇量子擦除和類似的實驗（這些實驗已經成功完成）視為自然界中存在反因果關係的證據——信息向過去傳播以影響過去。

5 結論：量子擦除說明了「信息是物理的」

什麼是量子擦除？量子擦除簡單來說，就是透過改變測量基，來恢復相干性的一種手段。

可以看到在量子擦除實驗中都一定會涉及到篩選信息的過程。例如在本實驗圖16中橘色的光強只有藍色光強的一半，代表有一半的光子其實是被篩選掉了。而這個被篩選掉的光子就是綠色的光強。

「量子橡皮擦」的作用，就是透過篩選信息來恢復相干性。在圖16中，橘色圖形和綠色圖形兩種干涉條紋，都是被篩選出來的結果。

John Preskill 提出一種觀點：量子擦除說明了「信息是物理的」(Preskill, 1998)。篩選信息的這個行為就會造成物理現象。

從數學上嚴謹地說，改變測量基就是在進行一個被 HJW 定理所描述的制備不同系綜的手段。

不需要引入反因果關係來解釋延遲選擇實驗。光子的波函數，從雙縫出來以後，到達屏幕所在的位置之前，是沒有塌縮的。這個過程你問光子走哪一條縫過來是沒意義的。所以這個實驗與其說叫做「量子擦除實驗」不如說叫做「量子篩選實驗」更為恰當，正是篩選的這個手段恢復了相干性。

References

- [1] Hillmer, R., Kwiat, P. (2007). A do-it-yourself quantum eraser. *Scientific American*, 296(5), 90-95.
- [2] Dimitrova, T. L., Weis, A. (2010). Single photon quantum erasing: a demonstration experiment. *European journal of physics*, 31(3), 625.
- [3] Aharonov, Y., Zubairy, M. S. (2005). Time and the quantum: erasing the past and impacting the future. *Science*, 307(5711), 875-879.
- [4] Feynman, R. P. (1963). *The Feynman lectures on physics*. Vol. III.
- [5] Rioux, F., Johnson, B. J. (2004). Using optical transforms to teach quantum mechanics. *Chem. Educator*, 9, 12-16.
- [6] Preskill, J. (1998). *Lecture notes for physics 229: Quantum information and computation*. California Institute of Technology.
- [7] Carroll, S. (2019). *The Notorious Delayed-Choice Quantum Eraser*. Preposterous Universe blog.