费马大定理的最简证明

梅晓春

福州原创物理研究所　理论物理与纯粹数学部

内容摘要　本文将费马方程写成二次不定方程的形式，将其解与二次不定方程的勾股数解进行比较，非常简单地证明，费马方程在 $p \geq 3$ 时不可能有整数解。

关键词：费马大定理，勾股定理，勾股数

一 前言

费马大定理的证明构成数学史上一个波澜壮阔，引人入胜的篇章。费马大定理认为，对于 $p \geq 3$ 的费马不定方程：

$$x^p + y^p = z^z \tag{1}$$

x, y, z 不可能都是整数。这个看似简单的问题，却困惑了全世界的数学家几百年。

1637 年，费马在一本数学书的页边上写道，他已经得到一个美妙的证明，但由于书页的空白太小，写下不来【1】。对于 $p = 4$ 的特殊情况，在该书的另外一个地方，费马大致地写下不存在整数解的证明，仍然是比较复杂的【2】。费马给数学世界留下一个大谜团，后代数学家努力了近四百年，都没有找费马所说的初等证明。因此不少人认为，费马大定理不存在初等证明，费马可能并没有得到他说的证明。

1995 年，英国数学家维尔斯宣布证明了费马大定理【3】。但他采用的是间接的方法，通过证明半稳定椭圆函数可以模式化，谷山—志村猜想成立，弗雷方程不存在来完成。证明过程非常复杂，涉及椭圆方程、群论和模理论。论文长达 130 页，一般人难以读懂。

本文以勾股定理为基础，提出一个简单的方法，将费马方程的解与二次不定方程的勾股数进行比较，证明方程（1）只在 $p = 2$ 的情况下有整数解，在 $p \geq 3$ 时无整数解，从而证明费马大定理。

二 费马大定理的证明

证：假设（1）式中的 x, y, z 有正整数解，将（1）式改写为：

$$(x^{p/2})^2 + (y^{p/2})^2 = (z^{p/2})^2 \tag{2}$$

令 $x^{p/2} = A$， $y^{p/2} = B$， $z^{p/2} = C$，（2）式变成：

$$A^2 + B^2 = C^2 \tag{3}$$

按照勾股定理，（3）式存在无穷多对的正整数解 (a_i, b_i, c_i)，比如【1】：

$$(3,\ 4,\ 5)，(5,\ 12,\ 13)，(6,\ 8,\ 10)，(7,\ 24,\ 25)，(8,\ 15,\ 17)$$

$$(9,\ 40,\ 41), (10,\ 23,\ 24), \ldots\ldots, (100,\ 2499,\ 2501)\cdots \tag{4}$$

或者说（3）式的正整数解只能取（4）式中的任何一对，不可能超出（4）式的范围。因此，如果（2）

和（3）式有正整数解，其解也必须取（4）式的形式，即：

$$A = x^{p/2} = a_i \qquad B = y^{p/2} = b_i \qquad C = z^{p/2} = c_i \tag{5}$$

得：
$$x = (a_i^2)^{1/p} \qquad y = (b_i^2)^{1/p} \qquad z = (c_i^2)^{1/p} \tag{6}$$

由于 a_i, b_i, c_i 只能按（4）式选取，（6）式的三个方程已经确定了 x，y，z 的数值。然而在 a_i, b_i, c_i 是正整数的情况下，如果 $p \neq 2$，要使 x，y，z 都是正整数，一般是不可能的。比如任意取 $p = 3$，$a_i = 3$，$b_i = 4$，$c_i = 5$，按照（6）式，得：

$$x = (3^2)^{1/3} = 2.080083823051\cdots$$

$$y = (4^2)^{1/3} = 2.519842099978\cdots$$

$$z = (5^2)^{1/3} = 2.924017738212\cdots \tag{7}$$

x，y，z 都不是整数。

此外，如果（4）式中至少有一组数 a_k, b_k, c_k 满足 x，y，z 是整数的要求，即存在以下关系：

$$x = (a_i^2)^{1/p} = a_k \qquad y = (b_i^2)^{1/p} = b_k \qquad z = (c_i^2)^{1/p} = c_k \tag{8}$$

其中 a_i, b_i, c_i 是（4）中的数组，满足 $a_i^2 + b_i^2 = c_i^2$。按照（8）式，就有：

$$a_k^p + b_k^p = c_k^p \tag{9}$$

但由于 a_k, b_k, c_k 也是方程（3）式的解，又有：

$$a_k^2 + b_k^2 = c_k^2 \tag{10}$$

然而，要使 a_k, b_k, c_k 同时满足（9）和（10）式是不可能的，除非 $p = 2$。

例如，在（4）式中取 $a_i = 100$，$b_i = 2499$，$c_i = 2501$，令 $p = 4$，按照（6）式，得：

$$x = (100^2)^{1/4} = 10$$

$$y = (2499^2)^{1/4} = 49.989998999799\cdots \neq 23$$

$$z = (2501^2)^{1/4} = 50.009999000199\cdots \neq 24 \tag{11}$$

式中 x 是整数，但 y 和 z 不是整数。有 $x = (a_i^2)^{1/4} = a_k = 10$，但 $y = (b_i^2)^{1/4} \neq b_k = 23$，$z = (c_i^2)^{1/4} \neq c_k = 24$。可见（11）式的数组不在（4）式中，不是（3）式的解。

因此 $p \geq 3$ 时，（1）式的 x，y，z 没有正整数解。证毕。

参考文献

1. 西蒙．辛哥格，费马大定理，广西师范大学出版社，2013，p. 47.
2. 陈景润，初等数论（I），哈尔滨工业大学出版社, 2012，p. 51.
3. Andrew John Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, Annals of Mathematics, 1995,141,443-551.