Valeur d'une somme assez particulière

Mame Goumba Amar[1] and Aba Lo Amar[2]

[1] Etudiant à l'école polytechnique de Thiès
[2] Élève au lycée Mbacké 3
[*] abaloamar@gmail.com

Compiled August 27, 2024

Cet article se propose d'examiner la convergence d'une série particulière. Cette série est définie par une suite gouvernée par une relation de récurrence que nous analyserons en détail. Sa spécificité réside dans le fait qu'elle est constituée de blocs dont les termes sont sélectionnés selon un schéma de saut, ce qui en accentue l'élégance. L'établissement de la forme décrite confère à cette série des propriétés remarquables et distinctives. Nous explorerons ainsi la convergence de cette série et les relations intéressantes qui lient les blocs entre eux.

1. INTRODUCTION

L'étude des séries infinies et de leur convergence constitue un domaine fondamental en analyse mathématique. Parmi les nombreuses séries étudiées, certaines présentent des caractéristiques particulières qui méritent une attention spécifique. Cet article se concentre sur une série définie par une suite particulière, régie par une relation de récurrence que nous explorerons en détail. Cette série se distingue par sa construction originale, où les termes sont regroupés en blocs avec des intervalles de saut, un agencement qui confère à la série une structure à la fois élégante et complexe.

La complexité et l'élégance de cette série résident dans la manière dont les blocs sont formés et les relations entre eux. Nous nous intéresserons à la convergence de cette série en analysant la configuration des blocs ainsi que les relations qui les unissent. L'objectif de cet article est de fournir une compréhension approfondie de la convergence de cette série particulière, en mettant en lumière les propriétés intéressantes qui en découlent.

En dépit de sa structure non triviale, cette série offre des perspectives fascinantes sur les mécanismes de convergence et les interactions entre les blocs. Nous espérons que cette analyse apportera des contributions significatives à la compréhension des séries infinies et enrichira les connaissances sur les propriétés spécifiques de cette série en particulier.

2. MÉTHODOLOGIE

Les auteurs ont étudié la somme infinie des inverses des carrés et ont constaté qu'une partie de cette somme géométrique est comprise dans la somme des inverses des carrés. En réarrangeant les termes, la partie restante, que nous notons **T**, est telle que la somme des termes géométriques inclus dans la somme des inverses des carrés est équivalente à **2-T**, où 2 représente la somme infinie d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

En substituant cette relation dans l'expression originale de la somme des inverses des carrés, on obtient une expression de la forme **2-T+R**, où R est une somme supplémentaire. Cette somme **R** est notable pour ses relations et propriétés mathématiques intéressantes. Plutôt que de nous concentrer sur la valeur exacte de R, nous examinerons ses propriétés mathématiques et ses implications.

3. RÉSULTATS

La somme est définie par une suite définie par :

$$l_k = 2l_{k-1} - 1, \quad k \geq 1 \quad \text{avec} \quad l_1 = 3.$$

En réalité, la suite suit une loi de la forme :

$$l_k = 2^k + 1$$

(ce qui peut être démontré facilement par récurrence).

A. Simple Aperçu de la Série R

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=ln}^{2ln-3} \frac{1}{k^2}$$

B. Une somme de blocs

Table 1 Voici pour quelques valeurs de n, les blocs obtenus

Table 1. Apercu du saut de la somme !

Quelques valeurs de n	**Blocs**
$n = 1$	$\frac{1}{9}$
$n = 2$	$\frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49}$
$n = 3$	$\frac{1}{81} + \frac{1}{100} + \frac{1}{121} + \frac{1}{144} + \frac{1}{169} + \frac{1}{196} + \frac{1}{225}$
$n = 4$	$\frac{1}{289} + \frac{1}{324} + \frac{1}{361} + \frac{1}{400} + \frac{1}{441} + \frac{1}{484} + \frac{1}{529} + \frac{1}{576} + \frac{1}{625} + \frac{1}{676} + \frac{1}{729} + \frac{1}{784} + \frac{1}{841} + \frac{1}{900} + \frac{1}{961}$

4. INTERPRÉTATION

La différence entre le dénominateur du rationnel au début d'un bloc et celui à la fin d'un bloc qui le précède directement est toujours un multiple de 16 selon le numéro du bloc. Elle vaut 16 pour les deux premiers blocs, puis 32, puis 64 etc. Une étude plus approfondie nous a permis de traduire ça par une suite qui cache de multiples propriétés. Le nombre d'éléments de chaque bloc vaut

$$l_k - 2$$

On a pu établir l'expression de la série par :

$$\frac{\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\sum_{\mathrm{k}=\mathrm{ln}}^{2\mathrm{ln}-3}\frac{1}{\mathrm{k}^2} \text{ ou } \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\sum_{\mathrm{k}=2^{\mathrm{n}}+1}^{2^{\mathrm{n}+1}-1}\frac{1}{\mathrm{k}^2}}{l_k}$$

étant définie précédemment

5. VALEUR D'UNE TELLE SOMME

Considérons la somme des puissances d'un nombre q, pour $q = \frac{1}{2}$, donnée par :

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2.$$

Nous savons que cette somme converge vers 2. Cependant, considérons maintenant une autre somme classique : la série des inverses des carrés, définie par :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Nous pouvons réarranger les termes de la première somme pour obtenir une nouvelle série. Ainsi, en réarrangeant les termes de la somme précédente, nous obtenons :

$$\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} q^k = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \cdots = 2.$$

Notons par T la somme suivante :

$$T = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}.$$

Nous avons donc :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots + T = 2.$$

En isolant T, on obtient :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = 2 - T.$$

Cette nouvelle série est similaire à la série des inverses des carrés. Il reste une somme infinie R, que nous devons examiner de plus près. Nous avons donc :

$$2 - T + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Notons R la somme suivante :

$$R = \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \cdots.$$

Nous pouvons alors exprimer R comme :

$$R = \frac{\pi^2}{6} - 2 + T,$$

avec T étant une somme simple à calculer.
La valeur exacte de R est donc donnée par :

$$R = \frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{3}.$$

L'étude complète de R a donné naissance à une suite et à des blocs étroitement liés. En fait, la série R, que l'on ne pouvait initialement qu'approximer, a été rigoureusement évaluée comme étant :

$$R = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{3}.$$

6. CONCLUSION

La convergence de la série R n'a pas présenté de difficultés majeures, bien qu'elle dissimule des propriétés importantes. L'expression que nous avons établie confère à cette série une rigueur mathématique certaine. Une étude plus approfondie de cette série révélera probablement des propriétés plus complexes. En effet, les blocs qui composent cette série ne sont pas seulement liés par la relation de récurrence que nous avons explorée, mais sont aussi connectés par de nombreuses autres relations qu'il serait intéressant d'examiner davantage.

7. REMERCIEMENTS

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre frère Serigne Mbaye Sy Amar, qui nous a particulièrement aidé et conseillé tout au long de ce travail.