Новый взгляд на пифагоровы тройки и его расширение

Владислав Кощаков

Все решения уравнения

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (1)$$

в натуральных числах являются пифагоровыми тройками.

Самая известная из них 3, 4, 5.
Также запоминаемы: (5, 12, 13)
(15, 8, 17)
(7, 24, 25)
(21, 20, 29)

Интересны для анализа именно примитивные тройки, у которых x, y и z являются взаимно простыми числами (тройка 10, 24, 26 менее интересна).
Таких троек бесконечное множество и все они определяются формулами:

$$\begin{aligned} x &= 2ab \\ y &= b^2 - a^2 \\ z &= b^2 + a^2 \end{aligned} \qquad (2)$$

где a и b, произвольные целые числа разной четности и $b>a$.

Геометрический смысл пифагоровых троек состоит в том, что они выражают стороны прямоугольного треугольника. Прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 и гипотенузой 5 называется египетским треугольником, Его периметр равен 12, поэтому с помощью веревки, разделенной узлами на 12 равных частей, древние египтяне могли строить прямоугольный треугольник и находили прямой угол, необходимый им при землемерных работах.

Новый взгляд

Представим безмассовую, безразмерную в диаметре подвижную ось, к которой перпендикулярно и в одной плоскости прикреплены три стержня с одинаковой линейной массой. Поместим эту конструкцию в однородное гравитационное поле.

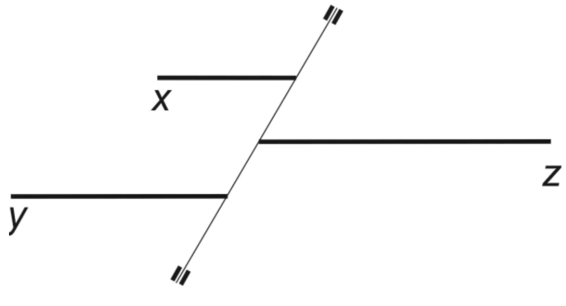

Рис.1

Пусть справа от оси стержень длиной 137 и слева два стержня: 105 и x. Система находится в равновесии. Найдите x. Можно в уме, поскольку задача достаточно тривиальна.

Ответ: какое-то четное число, сумма простых делителей которого равна 17.

Действительно, раз моменты сил справа и слева равны и масса стержня пропорциональна его длине, а центр тяжести есть середина стержня, то смотрим на рис.2:

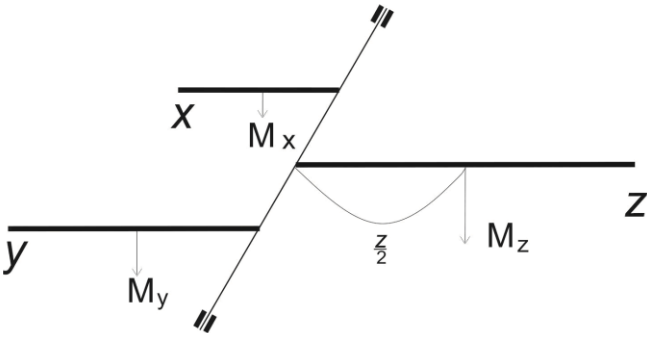

Рис.2

и приходим к нашему выражению (1).

Ну и что? Очередная интерпретация однородного квадратного уравнения, не несущая никакой новой информации. Я вначале тоже так думал.

Но потом пришла мысль – передвинем параллельно самому себе вдоль подвижной оси стержень, например, y так, чтобы он совместился со стержнем z.
Можно заметить, что у нас получилось только два стержня: x и $(z+y)$.

Новый стержень имеет момент в виде произведения своей массы на плечо силы, и который по-прежнему равен моменту отрезка x:

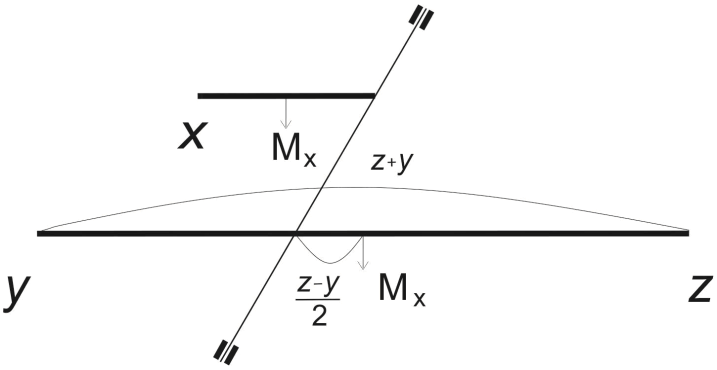

Рис.3

$$M_x = M_{z+y} \to x\frac{x}{2} = (z+y)(\frac{z-y}{2}) \qquad (3)$$

Можно выполнить и другую операцию с передвинутым отрезком y – не присоединять его к отрезку z, а вычесть из него отрезок y, и система по-прежнему останется в равновесии.

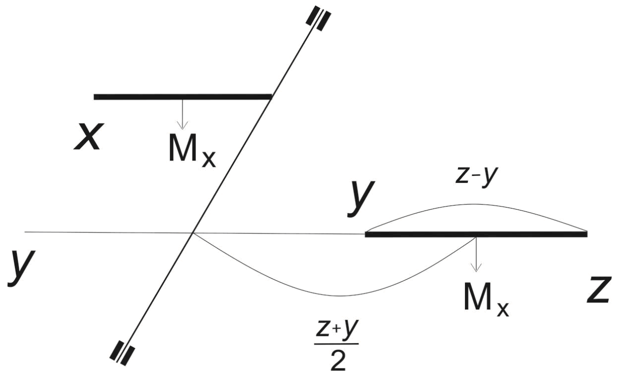

Рис.4

$$M_x = M_{z-y} \to x\frac{x}{2} = (z-y)(\frac{z+y}{2}) \qquad (4)$$

Далее нам будет более полезен следующий показ отрезков x, y *и* z:

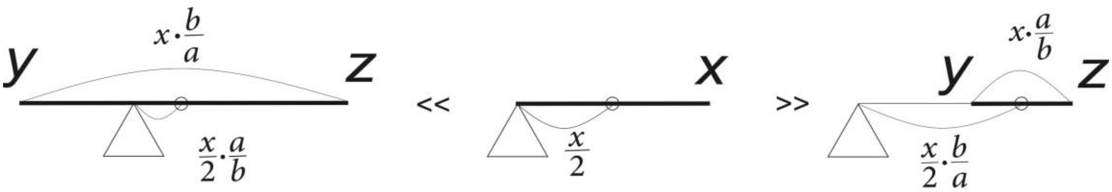

Рис.5

Передвигая вправо или влево за центр тяжести отрезок x на любое значение $\frac{b}{a}$ с сохранением момента, мы получаем все значения пифагоровых троек.
В обоих случаях легко находится связь z и y относительно x через значения a и b – приходим к формулам (2) наглядным путем (от правого конца отрезка x движемся через его центр тяжести вправо до центра тяжести смещенного отрезка x, затем, через его изменившуюся длину, налево – к y, или направо – к z).

По сути, мы изображаем на чертежах простую алгебраическую формулу:

$$x^2 = (\frac{b}{a}x)(\frac{a}{b}x) \qquad (5)$$

Такое графическое представление этой формулы более информативно, ибо позволяет наглядно представить каждый из сомножителей в виде конкретного графического объекта: самого отрезка в виде линейной массы и его плеча – расположения (через его центр тяжести) относительно другого объекта – подвижной оси.

> Может кто-то увидит здесь корреляцию, пусть и слабую, данного графического представления отрезков с методом Архимеда по нахождению объема шара.

Заметим, что можно брать для совмещения с отрезком z не только y (см. рис.3) но и x.

Понятно, что значения смещения вправо-влево при этом будут отличаться от значений a и b, поскольку $x \neq y$, хотя сами значения данной пифагоровой тройки должны остаться неизменными.
Действительно, целые a и b однозначно определяют каждую конкретную пифагорову тройку, а тут должны появиться еще два других значения – c и d, которые также должны давать в соответствии с формулами (2) эту же тройку.
Это не парадокс, – покажем взаимосвязь c и d с уже имеющимися a и b:

$$\frac{c}{d} = \frac{b-a}{b+a} \qquad (6) \qquad \text{И, соответственно:} \qquad \frac{a}{b} = \frac{d-c}{d+c} \qquad (7)$$

Подставляя в формулы (2) вместо a и b значения из формулы (7), отмечаем, как элегантно природа выходит из этого неудобного положения:

$$\begin{aligned} x &= 2ab = 2(d-c)(d+c) = 2(d^2 - c^2) \\ y &= b^2 - a^2 = (d+c)^2 - (d-c)^2 = 4dc \\ z &= b^2 + a^2 = (d+c)^2 + (d-c)^2 = 2(d^2 + c^2) \end{aligned} \qquad (8)$$

Обратим внимание, что числа c и d нечетные, а значения x и y в формулах (8) поменялись местами.

Расширение на малое число

Метод весов сдвиговых – ***МВС***, который мы использовали ранее, можно попробовать применить и для следующего по порядку неопределенного уравнения. Величину сдвига $\frac{b}{a}$ (или $\frac{a}{b}$) назовем *коэффициентом сдвига* ***КС***, сумму его числителя и знаменателя – *суммой сдвига* ***СС***.

Будем взвешивать для этого случая массу какой-то площади, умноженной на ее плечо относительно подвижной оси по аналогии с рис.1.

$$x^3 = \left(\frac{b}{a}x\right)\left(\frac{a}{b}x^2\right) \qquad (9)$$

Площадь удобно будет представить в виде равнобедренного прямоугольного треугольника (половины квадрата), прикрепленного к оси за один из его острых углов по аналогии с рис.5.
Пусть масса равномерно «размазана» по площади всех фигур на следующем чертеже:

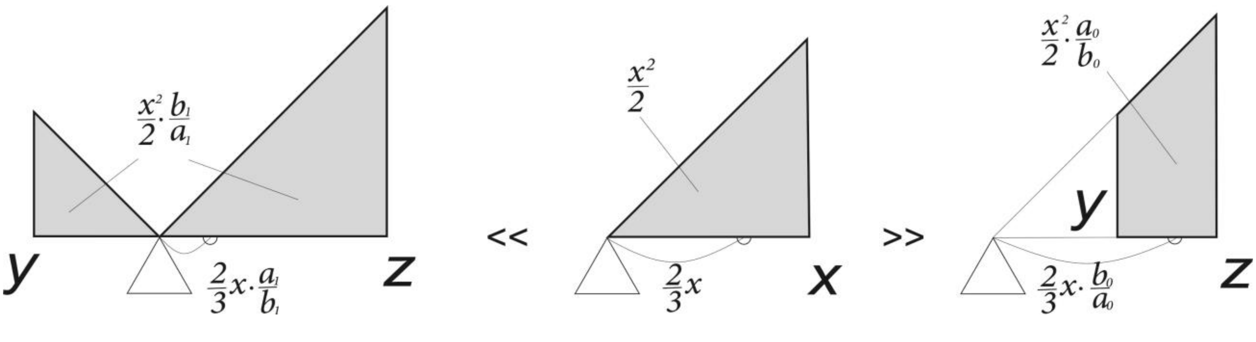

Рис.6

Мы сдвигаем треугольник $\frac{x^2}{2}$ вправо-влево по аналогии со стержнями за центр тяжести так, чтобы получить одинаковые значения z и y для обоих сдвигов.

При сдвиге вправо плечо увеличивается в $\frac{b_0}{a_0}$ раз, а площадь (ее масса) уменьшается в эту же величину для сохранения момента сил:

$$x^2 \frac{a_0}{b_0} = z^2 - y^2 \qquad (10)$$

При желании можно и здесь выразить значения y и z относительно x через значения a_0 и b_0, аналогично квадратному случаю. Ведь у получившейся фигуры, состоящей из прямоугольника и равнобедренного прямоугольного треугольника, легко находятся и центр тяжести, и масса в виде площади (см. рис.6).
Одна тонкость здесь возникает: в эти потенциально возможные формулы упрямо лезет необходимость разрешения уравнения (12) в целых числах, в частности – при нахождении величины плеча:

$$x \frac{b_0}{a_0} = \frac{z^3 - y^3}{z^2 - y^2} \qquad (11)$$

Если перемножить между собой (10) и (11) мы получаем наше исходное уравнение (12), что говорит о правильности подхода.

Если же в числитель формулы (11) подставить формулу (12), то после приведения подобных получаем формулу (10) в обратном виде, что говорит о правильности разделения величины плеча и массы в соответствии с формулой (9).

Если вернуться к пифагоровым тройкам – формулам (3) и (4), можно заметить, что они есть не что иное, как упрощенные формулы (10) и (11) для плеча силы и массы соответственно. Вот как выглядит формула (11) в случае квадратного уравнения: $x \frac{b_0}{a_0} = \frac{z^2 - y^2}{z - y}$

Итак, мы разделили уравнение (12) на два рациональных сомножителя в соответствии с формулой (9). А произведение двух рациональных сомножителей всегда рационально, а это возможно лишь при наличии решения (12).
Более полезно для нас обратное утверждение: только рациональное число можно разделить на два рациональных сомножителя путем использования рациональных коэффициентов сдвига в соответствии с формулой (9).

Если предположить существование в целых числах хотя бы одного решения уравнения

$$x_0^3 = z_0^3 - y_0^3 \qquad (12)$$

то по формуле (10) обязательно получаем соответствующий рациональный коэффициент сдвига $\frac{a_0}{b_0}$. И обратно – сдвигая за центр тяжести треугольник $\frac{x^2}{2}$ вправо на величину $\frac{b_0}{a_0}$ и уменьшая его площадь в $\frac{a_0}{b_0}$ раз, чтобы сохранить момент силы, мы обязаны получить предполагаемое решение в целых числах (12).

Таким образом, предполагая наличие хотя бы одного решения (12), мы должны допустить существование каких-то формул обратного преобразования от величины ***КС*** к целочисленному решению (12) по аналогии с квадратным уравнением, где $\frac{a_0}{b_0}$ есть аргумент, а $\frac{z}{x}$ и $\frac{y}{x}$ суть их функции.

Выпишем эти формулы отдельно.
Вот они:

$$\frac{z}{x} = \varphi_z\left(\frac{a}{b}\right)$$
$$\frac{y}{x} = \varphi_y\left(\frac{a}{b}\right) \qquad (13)$$

Тогда любое значение a и b будет давать свою тройку целых чисел для n=3 аналогично квадратному случаю.
Или, если этих формул все же не существует, то ни одной тройки в целых числах получить не удастся при любом рациональном сдвиге.
Не может существовать только какое-то одно или даже несколько решений.
Или всё, или ничего!

Теперь посмотрим на сдвиг влево на рис.6:

$$x^2\frac{b_1}{a_1} = z^2 + y^2 \qquad (14)$$

Почему же мы указываем здесь разные коэффициенты для величин сдвига вправо и влево? Ведь в случае отрезков такого не наблюдалось и величина сдвига была одинаковой.

В этом и есть коренное отличие второй степени от всех остальных степеней.

Действительно, перемножая формулы изменения длины отрезка в квадратном случае при разных сдвигах (см. рис.5):

вправо: $x\frac{a}{b} = z - y$

влево: $x\frac{b}{a} = z + y$

мы получаем наше исходное уравнение: $x^2 = z^2 - y^2$

А что мы получим от перемножения формул (10) и (14) в случае одинаковых коэффициентов сдвига? Мы получим вот это:

$$x^4 = z^4 - y^4,$$

что совсем не является целью наших текущих рассуждений.

Следовательно, коэффициенты сдвига вправо-влево для получения равных *y* и *z* для любой степени однородного уравнения вида (1), кроме равной двум, одинаковыми быть не могут!

Итак, любое возможное решение однородного уравнения при n=3 в целых числах обладает двумя разными ***КС***. Это его особенность, этого никак не избежать, с этим следует смириться и смотреть, что из этого можно извлечь.

Рассмотрим все варианты подхода к нему в свете вышеизложенного:

А. Самое простое – такого решения не существует, и проблема существования одновременно двух пар коэффициентов сдвига уходит с повестки дня.

Б. За основу берем только сдвиг вправо и рассматриваем исключительно коэффициенты a_0 и b_0. Сдвиг влево не учитываем в рассуждениях, считаем несущественным. Подход опровергается наличием уравнения (14).

В. За основу берем только сдвиг влево и рассматриваем исключительно коэффициенты a_1 и b_1. Сдвиг вправо не учитываем, считаем несущественным. Подход опровергается наличием уравнения (10).

Г. Учитываем наличие двух разных пар коэффициентов сдвига в каждом возможном целом решении уравнения для n=3 и смотрим, к чему это может привести.

Четвертый вариант требует более внимательного анализа.

Для начала заметим, суммы сдвига ***СС*** для правого (10) и левого (14) графического представления формулы (11) не могут быть равны, потому что всегда выполняется неравенство:

$$a_1 + b_1 > a_0 + b_0 \qquad (15)$$

Действительно, из формул (10) и (14) получаем:

$z_0^2 + y_0^2 + x_0^2 > z_0^2 - y_0^2 + x_0^2$, следовательно $2y_0^2 > 0$, а это выполняется всегда.

Возникает естественный вопрос: а что будет, если применить коэффициент правого сдвига к левому?

Оба ***КС*** являются внутренней сущностью предполагаемого целочисленного решения уравнения (12) и имеют одинаковые права, поэтому мы имеем возможность применять любой из них к любому направлению сдвига, ибо они не содержат в себе какой-либо элемент, указывающий на направление сдвига, их породившее.
Естественно, формулы для левого сдвига будут другие, но они обязаны существовать при допущении наличия решения уравнения (12).
Вот они:

$$\frac{z}{x} = \phi_z\left(\frac{a_1}{b_1}\right)$$
$$\frac{y}{x} = \phi_y\left(\frac{a_1}{b_1}\right) \qquad (16)$$

В результате такого сдвига получаем новое решение уравнения (12):

$$x_1^3 = z_1^3 - y_1^3 \qquad (17)$$

Возможные общие множители в нем мы уже удалили.

Получение решения уравнения (17) в целых числах возможно потому, что мы предположили ранее существование решения уравнения (12) в целых числах и, соответственно, сделали реальными формулы (13) и (16).

Находим новые коэффициенты сдвига для этого решения по формулам (10) и (14).
Для правого сдвига: a_2 и b_2
Для левого сдвига: a_3 и b_3

Несложно увидеть, что $a_2 + b_2 < a_0 + b_0$

Подобный процесс можно повторять бесконечное число раз, но количество-то целых чисел, меньших первоначальной суммы $a_0 + b_0$, конечно.

Следовательно, наше предположение о наличии решения уравнения в целых числах для n=3 ошибочно – таких решений не существует.

Расширение на любое число

Для случая однородного уравнения степени n можно использовать площадь под кривой функции $u = v^{n-2}$

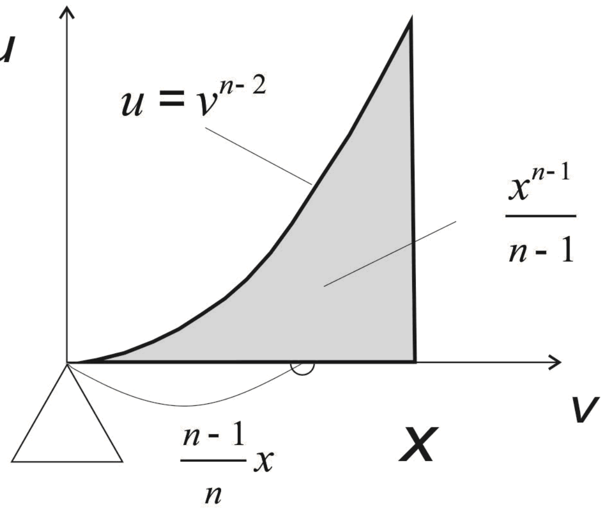

Рис.7

Площадь под ней равна: $\frac{x^{n-1}}{n-1}$, ее центр тяжести относительно опоры: $\frac{n-1}{n}x$

И при сдвиге вправо этой площади на величину $\frac{b_0}{a_0}$ получаем следующие значения плеча и массы «площади»:

плечо – $x\frac{b_0}{a_0} = \frac{z^n - y^n}{z^{n-1} - y^{n-1}}$ масса – $x^{n-1}\frac{a_0}{b_0} = z^{n-1} - y^{n-1}$

И основополагающая общая формула – $x^n = (\frac{b_0}{a_0}x)(\frac{a_0}{b_0}x^{n-1})$

Далее рассуждения аналогичны случаю n=3.

Для общего случая можно также написать следующее:
По методу весов сдвиговых ***МВС*** имеем:

$$x \cdot x^{n-1} = z \cdot z^{n-1} - y \cdot y^{n-1}$$

По перемножению величин площадей при одинаковых сдвигах вправо-влево:

$$x^{2(n-1)} = z^{2(n-1)} - y^{2(n-1)}$$

Целочисленные решения существуют только для тех n>1, для которых эти уравнения одинаковы.