Khalid Jerrari

Densité spatiale

Théorie spatiale

Évolution de l'expansion de l'Univers

Vitesse de rotation des galaxies

Expansion de l'Univers et courbe de rotation plate des galaxies spirales sans l'intervention de l'énergie noire et de la matière noire

Éditions Deux Plumes

Collection Les mystères de l'espace

© Éditions Deux Plumes
2, allée Saint John Perse, 95120 Ermont
ISBN : 979-10-96350-12-4

Ermont, octobre 2024

Table des matières

Avant-propos

Ce livre est principalement destiné aux scientifiques, en particulier à ceux qui s'intéressent à la physique fondamentale. Pour en tirer pleinement profit, il est essentiel d'être à l'aise avec des concepts mathématiques tels que les dérivées et les opérations algébriques avec des notations indicées. Bien que mes recherches ne soient pas menées dans un cadre académique ou professionnel, elles reposent en partie sur ma formation en sciences physiques, validée par un diplôme d'études approfondies, l'équivalent actuel d'un master de recherche. Il convient également de préciser qu'aucune relecture ou correction de cet ouvrage n'a été effectuée par une tierce personne aussi bien sur le fond que sur la forme.

Dans ce manuscrit, j'explore l'évolution de l'expansion de l'Univers et la rotation des galaxies spirales à travers le prisme de la « densité spatiale », un concept développé dans le cadre de la théorie spatiale. Une partie de ces recherches s'inspire de mon précédent ouvrage *Les mystères de l'espace : la création et le fonctionnement de l'Univers expliqués sous un autre angle*, publié en 2015, dans lequel j'ai, entre autres, développé la notion de densité spatiale. Bien que j'en fasse un rappel dans la première partie de ce présent livre, je vous recommande de le télécharger gratuitement sur *www.theorie-spatiale.fr* et de le lire attentivement.

Le présent ouvrage s'inscrit dans une démarche exploratoire visant à ouvrir de nouvelles perspectives sur la notion de la densité spatiale et à stimuler le débat scientifique. Le cadre théorique proposé, volontairement simplifié, offre un point de départ pour de futures développements de la théorie spatiale. Il est essentiel de souligner que ce modèle est susceptible d'évoluer au fur et à mesure que de nouvelles observations cosmologiques seront disponibles. Considérez cette théorie comme une ébauche, une base sur laquelle il est possible de s'appuyer pour approfondir la compréhension de notre Univers.

Entrons maintenant dans le cœur du sujet.

Introduction

Ce manuscrit poursuit l'exploration de la théorie spatiale initiée dans *Les mystères de l'espace*, qui constitue sa référence théorique fondamentale. Les équations et modèles présentés ici sont issus de développements originaux, tout en s'inscrivant dans le cadre des principes et résultats présentés dans *Les mystères de l'espace*. Bien entendu, mes recherches s'appuient également sur des lois de la physique universellement reconnues, telles que celles de Newton ou de Fourier, qui ne nécessitent pas de référence particulière.

Dans la théorie spatiale développée dans le livre *Les mystères de l'espace*, j'introduis le concept de densité spatiale, une forme d'énergie qui emplit l'Univers. Pour des raisons de cohérence physique, je l'exprime en termes de densité de masse plutôt qu'en densité d'énergie. Cette notion est le point central de cet ouvrage dont l'objectif est de décrire les mouvements des corps à l'échelle cosmologique à partir de l'accélération universelle sans recourir à l'énergie noire ni à la matière noire.

Pour ce faire, je commencerai par rappeler, dans une première partie, les principaux résultats de la théorie spatiale exposés dans *Les mystères de l'espace*. Ensuite, dans une seconde partie, j'étudierai l'évolution de l'expansion de l'Univers sans faire appel à l'énergie noire. Et enfin, dans une dernière partie, j'examinerai les courbes de rotation des galaxies spirales sans l'intervention de la matière noire.

Partie I : Quelques rappels de la théorie spatiale développée dans le livre « Les mystères de l’espace »

Chapitre 1 : Théorie spatiale

Dans ce chapitre, je présenterai les concepts de base qui m'ont permis de construire la théorie spatiale exposée dans mon livre *Les mystères de l'espace*. Je rappellerai dans un premier temps la relation entre l'espace et la matière, puis je présenterai le principe d'équilibre universel et je terminerai par l'explication de la notion d'espace propre.

a) Espace/matière : un couple indissociable

Dans le chapitre 1 de la partie I de mon livre *Les mystères de l'espace*, je mentionnais que l'Univers était principalement composé de matière ordinaire et d'espace, tandis que les autres éléments, tels que la lumière et toutes les formes d'énergie, n'étaient que des conséquences de ces deux composantes fondamentales.

Je précisais que l'espace était souvent perçu comme une dimension mathématique plutôt que comme une substance physique, mais son existence était indéniable, car nous pouvions nous y déplacer en son sein. Néanmoins je tiens à ajouter que, dans le cadre de la relativité générale, l'espace-temps est considéré comme une substance physique.

Par ailleurs, si nous admettions que l'espace et la matière étaient les constituants principaux de l'Univers, il devenait essentiel de s'interroger sur le lien qui les unissait et sur leurs conditions d'existence. C'est pourquoi, dans le chapitre 1 de la partie I du livre *Les mystères de l'espace*, je menai une réflexion à ce sujet sous deux angles :

1. Un Univers dépourvu de corps matériel aurait-il un sens ? Je précisais qu'un Univers vide de matière contenait au moins l'énergie qui l'avait engendré, tout particulièrement celle qui a créé son volume d'espace, et j'expliquais que cette énergie impliquait nécessairement la présence d'un corps matériel. Je concluais en conséquence qu'un Univers ne pouvait pas être vide et devait *a fortiori* contenir au moins un corps matériel.

2. Un Univers pourrait-il exister sans espace vide ? Non, car j'expliquais que toutes les particules connues sont en grande partie constituées de vide. Quand bien même une particule indivisible ne contenait aucun vide, elle occuperait un volume d'espace dans lequel elle se trouvait. Je démontrais ainsi que la présence d'un corps nécessitait l'existence d'un espace.

Il en résultait qu'un volume d'espace ne pouvait pas exister sans la présence de corps, tout comme les corps ne pouvaient pas exister sans espace. Ainsi j'en concluais que, dans notre Univers, l'espace et la matière se créaient simultanément. Chaque corps se formait avec son propre espace, et lors de son déplacement cet espace se déplaçait avec son corps massique associé. Ainsi, la réunion de chacun de ces espaces propres formait le volume total de l'Univers. Par ailleurs, je précisais que la cohabitation des espaces propres se faisait par superposition, et non par juxtaposition.

Enfin, je notais que notre Univers devait contenir au moins deux corps distincts, car le mouvement et le référentiel exigeaient la présence d'au moins deux corps. Cette dualité espace/matière semblait également obéir à des lois qui maintenaient un équilibre précis.

b) Principe d'Équilibre universel

Dans le chapitre 2 de la partie I de mon livre *Les mystères de l'espace*, j'introduisais le concept d'équilibre universel. Je constatais que l'Univers, loin d'être chaotique, suivait des lois physiques structurées et prévisibles qui nous permettaient de décrire, quantifier et anticiper les phénomènes naturels. Si la nature était imprévisible, la science perdrait tout son intérêt. Heureusement, notre Univers se conformait à des règles bien établies, valables en tout lieu et en tout temps. Les scientifiques s'efforçaient donc de découvrir ces lois, qui, bien que mystérieuses, étaient confirmées par l'observation. Cependant, je me demandais s'il existait une loi unique capable de toutes les réunir, tout en restant sceptique sur cette possibilité.

Je remarquais ainsi que les lois de la nature s'efforçaient toujours de rétablir un état d'équilibre. Lorsqu'un système était perturbé, des forces naturelles intervenaient pour restaurer l'harmonie. La rapidité de ce retour à l'équilibre dépendait de la résistance au changement du système. J'avais formulé ce phénomène dans mon livre *Les mystères de l'espace* sous le concept de principe d'équilibre universel. Pour appuyer mes propos, j'avais cité la deuxième loi de Newton ainsi que la loi de Fourier.

En effet, Newton avait formulé des lois largement utilisées, dont la loi fondamentale de la dynamique, représentée par l'équation $\vec{F} = m\vec{a}$. Cette équation stipulait qu'une force proportionnelle à la masse d'un objet était nécessaire pour en modifier la vitesse ou la direction. Plus la masse d'un objet était importante, plus il résistait à tout changement de sa trajectoire, cherchant ainsi à maintenir un mouvement rectiligne et uniforme. La trajectoire d'un objet semblait alors viser un équilibre dynamique, illustré par le principe d'inertie, selon lequel l'objet conservait sa vitesse et sa direction tant qu'aucune force extérieure n'intervenait.

La loi de Fourier, quant à elle, décrivait la conduction thermique, expliquant comment la chaleur se transférait d'un objet à un autre jusqu'à atteindre un équilibre thermique. La résistance au changement de température faisait que cet équilibre mettait un certain temps à s'établir.

Le principe d'équilibre universel suggérait également que tout déséquilibre ne pouvait qu'engendrer davantage de déséquilibres, créant ainsi une réaction en chaîne. Ce phénomène entropique, paradoxalement ordonné, soulignait que chaque perturbation d'un système conduisait inévitablement à de nouvelles perturbations. Finalement, bien que l'Univers tende toujours vers un équilibre, le chemin pour y parvenir restait complexe, marqué par des résistances et des déséquilibres successifs. C'est cet équilibre universel et les propriétés de l'espace qui me permettaient d'unifier certaines lois de la physique.

c) Propriétés de l'espace : notion d'espace propre

Dans mon livre *Les Mystères de l'Espace*, je partageais ma fascination pour l'espace dans lequel nous évoluons, un vaste volume qui contient tous les corps et permet leur mouvement, tout en restant mystérieux à bien des égards. Je m'interrogeais sur sa composition, ses propriétés, ses interactions avec la matière, ainsi que sur son rôle potentiel dans l'origine des lois de la physique.

Dans le chapitre 2 de la partie II de mon livre *Les mystères de l'espace*, j'avais proposé l'hypothèse selon laquelle les ondes électromagnétiques étaient véhiculées par la déformation de l'espace lui-même, suggérant que la propagation de ces ondes s'appuyait directement sur l'espace. J'avais également observé que la vitesse de la lumière dans le vide c, restait constante et indépendante du référentiel de l'observateur. Ainsi, qu'un observateur soit en mouvement ou non, il percevait toujours la lumière à cette même vitesse constante, quelle que soit la vitesse de la source lumineuse ou de l'observateur.

J'avais envisagé que chaque observateur possédait son propre volume d'espace, fixe par rapport à lui-même, qui l'accompagnait en permanence dans ses déplacements. Toute perturbation vibratoire dans cet espace se répercutait dans les espaces propres superposés des autres observateurs, se propageant également à la vitesse de la lumière, ce qui expliquait pourquoi cette vitesse restait constante pour tous, indépendamment de leur vitesse relative.

J’avais déterminé que le volume de cet espace propre dépendait de la masse de l’objet auquel il était associé. Par exemple, j’avais calculé que pour un corps de 80 kg, le rayon de son espace propre était d’environ un milliard de mètres. J’avais ainsi remarqué que l’espace propre de chaque individu sur Terre englobait la Lune. De plus, je soulignais que les espaces propres des objets interagissaient entre eux par superposition.

J’avais également évoqué l’importance de choisir l’espace propre approprié pour étudier un phénomène physique. Par exemple, on utilisait l’espace propre du système solaire pour analyser la rotation des planètes autour du Soleil, et celui de la Terre pour étudier la rotation des satellites autour de notre planète.

Par ailleurs, pour modéliser la déformation de l’espace, j’avais utilisé par analogie celle d’une corde vibrante, où la vitesse de propagation d’une onde dépendait de la tension de la corde et de sa masse linéique. En transposant ce modèle à un espace tridimensionnel, la tension spatiale s’exprimait en fonction de la densité spatiale et de la vitesse de la lumière. Cette tension, générée par la présence d’un corps dans l’espace, n’agissait pas comme une force traditionnelle, mais plutôt comme une différence de potentiel, influençant le mouvement des corps par les variations spatiales de cette tension.

Selon le principe d’équilibre spatial, que j’avais développé dans le chapitre 2 de la partie II de mon livre *Les mystères de l’espace* à partir du principe d’équilibre universel, toute variation de la tension spatiale dans l’espace entraînait un déplacement sous forme de flux vectoriel. Ce flux représentait l’accélération universelle que l’espace exerce sur un corps. J’avais suggéré que cette accélération pourrait être à l’origine de phénomènes tels que la gravitation universelle et l’expansion de l’Univers.

Chapitre 2 : Introduction à l'accélération universelle et à la densité spatiale

Dans ce chapitre, après une présentation des différentes étapes de la partie théorique de mon livre *Les Mystères de l'Espace*, je reviendrai sur le concept d'accélération universelle, puis j'exposerai la notion de densité spatiale et je finirai par le cas particulier de la densité créée dans l'espace par une boule de matière isolée.

a) Introduction

Dans le chapitre 3 de la partie II de mon livre *Les Mystères de l'Espace*, j'avais formulé une équation générale pour l'accélération universelle, que j'appliquais à diverses lois de la physique. Cette accélération était définie en fonction de la tension spatiale, laquelle était déterminée par la densité spatiale. Il était essentiel de comprendre comment la densité spatiale se structurait en fonction de la masse visible. En examinant les accélérations des corps pour les phénomènes physiques connus, j'avais exprimé les densités spatiales pour des cas spécifiques.

Ainsi, j'avais démontré qu'en appliquant l'accélération universelle à la loi de la gravitation universelle, il était possible de déterminer la densité spatiale créée par un corps isolé dans son propre espace. De plus, en utilisant l'accélération de l'Univers déduite de la loi de Hubble, j'avais pu définir la répartition de la densité spatiale à l'échelle cosmique et obtenir une équation décrivant l'expansion de l'Univers, en concordance avec l'équation de Friedmann. Enfin, pour traiter le problème des courbes de rotation plates des galaxies, j'avais introduit l'accélération centripète d'un mouvement circulaire afin d'exprimer la densité spatiale en fonction de la distance radiale, ce qui m'avait permis de déduire la répartition de la masse baryonique au sein des galaxies.

Dans mon livre *Les Mystères de l'Espace*, j'avais cherché à déterminer la densité spatiale à partir d'une accélération universelle connue. L'objectif dans ce présent ouvrage est de déterminer l'accélération universelle à partir d'une équation de densité spatiale fixée.

b) Accélération universelle

Tout d'abord, lors de la rédaction du livre *Les mystères de l'espace*, mon intention était de rendre le contenu accessible à un large public, y compris à ceux qui n'avaient pas de formation en mathématique. Cependant, il est clair que cet objectif n'a pas été atteint, car peu de lecteurs ont compris ma théorie, malgré mes efforts pour simplifier les équations jusqu'à éliminer la notion de vecteurs. En conséquence, dans cette section, je reformulerai les équations en utilisant le formalisme vectoriel. Ce choix est motivé par le besoin de représenter clairement les accélérations de sorte à distinguer celles qui sont de nature attractive ou répulsive.

Dans le chapitre 2 de la partie II de mon livre *Les mystères de l'espace*, j'avais établi deux relations fondamentales.

La première relation exprimait l'accélération universelle en fonction de la tension spatiale $\overrightarrow{a_U} = \frac{G}{c^2}\frac{dT_E}{dr}\overrightarrow{u_r}$, où $\overrightarrow{u_r}$ était le vecteur unitaire radial orienté d'un point quelconque de l'espace vers le centre de gravité du système étudie. J'avais désigné par a_U la composante radiale du vecteur accélération telle que $\overrightarrow{a_U} = a_U\overrightarrow{u_r}$ avec $a_U = \frac{G}{c^2}\frac{dT_E}{dr}$. Cette équation exprimait l'accélération universelle a_U en fonction de la constante gravitationnelle G, de la constante d'Einstein c, et du gradient de la tension spatiale T_E par rapport à la position radiale r. Par convention, j'avais choisi le vecteur $\overrightarrow{u_r}$, tel que $\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{MO}}{\|\overrightarrow{MO}\|} = \frac{\vec{r}}{r}$ où O est le centre de gravité du système étudié et M un point de l'espace repéré par sa position radiale dans les coordonnées sphériques.

Dans cet ouvrage, nous changeons la convention de signe pour l'expression de la densité spatiale. Pour des raisons de cohérence avec le signe de l'accélération universelle, il convient également de changer le sens du vecteur unitaire radial. Ainsi, nous choisirons par la suite $\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \frac{\vec{r}}{r}$ où O est le centre de gravité du système étudié et M un point de l'espace. Par conséquent $\overrightarrow{a_U} = -\frac{G}{c^2}\frac{dT_E}{dr}\overrightarrow{u_r}$

La seconde relation exprimait la tension spatiale $T_E = \frac{4}{3}\pi {r_E}^2\rho_E c^2$ en fonction de la densité spatiale ρ_E, de la constante d'Einstein c et du rayon spatial r_E qui correspondait à la distance entre le point de l'espace considéré en coordonnées sphériques et le centre de gravité du système étudié.

En combinant ces deux relations, nous obtenions une équation générale pour l'accélération universelle $\overrightarrow{a_U} = -\frac{4}{3}\pi G\frac{d{r_E}^2\rho_E}{dr}\overrightarrow{u_r}$. Dans la suite de l'ouvrage, je simplifierai la notation r_E en r.

En développant la dérivée du produit $r^2\rho_E$, l'accélération en fonction de la densité spatiale devenait $a_U = -\frac{4}{3}\pi G\left(2r\rho_E(r,t) + r^2\frac{d\rho_{E(r,t)}}{dr}\right)$

La densité ρ_E apparaît alors comme le paramètre central de l'accélération universelle.

c) Concept de densité spatiale

Dans le livre *Les mystère de l'espace*, je m'étais attaché à proposer une interprétation de la densité spatiale tout en restant conscient qu'elle pouvait être erronée et ne pas correspondre à la réalité. Ma démarche consistait à trouver un lien entre la distribution de masse baryonique et la densité spatiale ρ_E. J'ai alors ajouté une étape intermédiaire qui n'était pas indispensable au cadre théorique, mais qui me permettait de me raccrocher à une notion « intuitive » de la densité spatiale.

J'avais interprété cette densité en m'appuyant sur le cas d'un corps sphérique isolé et celui de la distribution de la masse ordinaire d'une galaxie. J'en déduisais que la répartition de la densité spatiale ρ_E dans l'espace, dont la dimension est celle d'une masse volumique, était une conséquence de la présence de la masse baryonique. J'aurai pu raisonner en densité d'énergie, mais nous aurions perdu l'origine de la construction de cette densité de nature massique.

À titre d'exemple, nous avions vu qu'un corps isolé de masse m_c et de rayon R_c engendrait une densité spatiale ρ_E selon la loi $\rho_E(r) = \frac{m_C}{\frac{4}{3}\pi r^3}$. La distance radiale r sépare le centre de gravité du corps O et la position d'un point de l'espace M quelconque tel que $r = OM$ et $r > R_c$. En revanche, la densité spatiale dans une galaxie était plus complexe puisque chaque étoile engendrait des densités spatiales qui se superposaient. Nous avions supposé une répartition isotrope de la distribution de masse dans une galaxie et avions établi la relation suivante entre la densité de masse baryonique ρ_M et la densité spatiale ρ_E telle que $\rho_M(r,t) = \frac{r}{3}\frac{d\rho_E(r,t)}{dr}$. Je rappelle que les signes des densités dans le livre *Les mystères de l'espace* et de ce présent ouvrage sont opposés puisque les conventions de signe y sont opposées.

En conclusion, la densité spatiale ρ_E joue un rôle fondamental dans notre compréhension de l'accélération universelle. Il est bénéfique de chercher à interpréter physiquement cette densité, en gardant à l'esprit les limites et les incertitudes de nos interprétations.

Dans la suite, nous verrons le lien entre la masse d'une boule isolée et la distribution de la densité spatiale ρ_E dans son espace propre associé.

d) Densité spatiale générée par une boule isolée

Contrairement au livre *Les Mystères de l'Espace*, nous adopterons dans la suite de cet ouvrage la convention selon laquelle la densité ρ_E est négative tandis que ρ_M est positive. Ce choix permettra d'éviter les erreurs de signe, puisque nous considérons généralement la masse de la matière comme étant exclusivement positive. Ainsi dans la suite de l'ouvrage $\rho_E = -\frac{m_C}{\frac{4}{3}\pi r^3}$.

Les deux relations $\overrightarrow{a_U} = -\frac{4}{3}\pi G \frac{dr^2\rho_E}{dr}\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{a_U} = -G\frac{m_C}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ nous permettent d'obtenir la densité spatiale dans le cas d'une boule isolée de masse m_C pour une position radiale r supérieure à son rayon R_C. Détaillons le calcul dans le cadre de la nouvelle convention de signe :

$$-\frac{4}{3}\pi G\frac{dr^2\rho_E}{dr} = -G\frac{m_C}{r^2}$$

$$dr^2\rho_E = \frac{m_C}{\frac{4}{3}\pi}\frac{1}{r^2}dr$$

Après avoir intégré l'expression, nous obtenons :

$$r^2\rho_E = -\frac{m_C}{\frac{4}{3}\pi}\frac{1}{r} + K$$

Soit,

$$\rho_E = -\frac{m_C}{\frac{4}{3}\pi r^3} + \frac{K}{r^2}$$

La condition limite $\rho_E(R_C) = -\frac{m_C}{\frac{4}{3}\pi r {R_C}^3}$ nous permet de déterminer $K = 0$. L'idée de cette hypothèse repose sur la continuité entre la valeur absolue de la densité spatiale et celle de la masse volumique de la boule à la frontière $r = R_C$, formalisée par la relation $|\rho_E(R_C)| = |\rho_M(R_C)|$. À noter que celle-ci est tout à fait contestable. Elle aura le mérite de simplifier la densité spatiale en imposant $K = 0$.

Par conséquent, la densité spatiale générée par une boule isolée de masse m_C et de rayon R_C tel que $r > R_C$ est donnée par la relation ci-dessous :

$$\rho_E = -\frac{m_C}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

Partie II : Description de l’expansion de l’Univers selon la densité spatiale de la théorie spatiale

Chapitre 3 : Divers candidats à la densité spatiale de l'Univers

Contrairement à l'approche adoptée dans *Les Mystères de l'Espace*, où nous avions d'abord défini l'accélération universelle pour en déduire l'expression de la densité spatiale, cette fois-ci, nous définissons la densité spatiale pour en déduire l'accélération universelle.

Nous pourrions obtenir la densité spatiale à partir de la masse volumique de la matière ordinaire, puisque nous avons une relation qui lie ces deux grandeurs : $\rho_M(r,t) = \frac{r}{3}\frac{d\rho_E(r,t)}{dr}$. Cependant, d'une part, modéliser la distribution de la masse baryonique de manière fidèle à la réalité est un défi majeur ; et d'autre part, cela supposerait qu'elle soit grossièrement « continue » à l'échelle de l'Univers, similaire par exemple à celle d'un gaz. Et quand bien même nous y parvenions, cette approche ne serait qu'une approximation. Idéalement, il serait préférable de s'orienter vers une approche mathématique discrète plutôt que continue. Toutefois, cette démarche nécessiterait des efforts considérables en modélisation numérique, avec des ressources matérielles et humaines importantes que je ne dispose pas. Rien n'empêche les grands laboratoires de cosmologie, d'astrophysique ou de physique fondamentale de se lancer dans ce type de recherche si une telle démarche leur semble prometteuse. De plus, nous n'avons aucune certitude de la véracité de la relation, utilisée dans cet ouvrage, qui lie la masse volumique de la matière baryonique à la densité spatiale. Quoi qu'il en soit, le principal défi pour la théorie spatiale est sans nul doute de saisir le lien entre la matière et la densité d'énergie qu'elle génère dans l'espace.

Pour toutes les raisons mentionnées ci-dessus, mon approche dans ce livre consiste à spéculer sur une densité spatiale afin de déterminer la dynamique des corps et de modéliser la répartition de la masse visible dans l'Univers. Il est à noter que, d'un point de vue calculatoire, il est généralement plus simple de dériver l'équation de la densité spatiale, pour obtenir celle de la distribution de masse ordinaire, que d'intégrer l'expression de la masse visible, pour en déduire celle de la densité spatiale. De plus, certaines intégrales n'admettent pas de primitives qui s'expriment à l'aide de fonctions usuelles.

La loi de Hubble nous indique que les galaxies s'éloignent les unes des autres proportionnellement à leur distance, ce qui suggère qu'à l'échelle de l'Univers la densité de matière baryonique devrait diminuer dans l'espace. Cela implique que l'Univers, bien qu'isotrope (ayant la même apparence dans toutes les directions, comme le montrent les observations), ne serait pas homogène (c'est-à-dire que la densité n'est pas uniforme partout).

Par conséquent, on devrait *a priori* s'attendre à une fonction de distribution de masse visible qui diminue avec la distance radiale et le temps.

Reprenons à présent la relation qui lie la densité spatiale à la masse volumique de la matière $\frac{d\rho_E(r,t)}{dr} = 3\frac{\rho_M(r,t)}{r}$. Par convention dans cet ouvrage, la densité de matière ρ_M est positive, ce qui implique que la variation de la densité spatiale ρ_E dans l'espace est également positive. En conséquence, ρ_E est une fonction croissante de la distance radiale r.

Dans cette section, pour décrire un Univers isotrope non homogène, je propose plusieurs modèles de densité spatiale parmi les nombreuses options possibles. Toutes les fonctions présentées ci-dessous incluent une masse volumique ρ_0 constante et positive. Pour rappel, nous avons adopté dans ce livre, par convention, une densité ρ_E qui est négative.

a) Fonction exponentielle croissante

Nous pouvons utiliser une fonction exponentielle négative croissante pour modéliser des processus où une quantité augmente rapidement à mesure que la distance augmente pour atteindre la valeur limite 0.

Je la définie comme suit $\rho_E(r) = -\rho_0 e^{-\alpha r}$ où ρ_0 est la densité caractéristique à $r = 0$ et α est une constante strictement positive qui détermine le taux de croissance.

Cette fonction est utile pour modéliser des distributions où la densité ρ_E de l'Univers augmente rapidement avec la distance radiale. En substituant cette expression dans notre équation générale : $a_U = -\frac{4}{3}\pi G\left(2r\rho_E(r,t) + r^2\frac{d\rho_{E(r,t)}}{dr}\right)$

Nous obtenons :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G\left(-2r\rho_0 e^{-\alpha r} + r^2\frac{d(-\rho_0 e^{-\alpha r})}{dr}\right)$$

Soit

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G(-2r\rho_0 e^{-\alpha r} + \alpha r^2\rho_0 e^{-\alpha r})$$

Après simplification, l'expression de l'accélération universelle de cette densité spatiale devient :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 e^{-\alpha r} r(\alpha r - 2)$$

Nous remarquons que a_U est du signe contraire du facteur $(\alpha r - 2)$. Si $\alpha r - 2 > 0$ alors $r > \frac{2}{\alpha}$. Par conséquent, a_U est strictement négative si $r > \frac{2}{\alpha}$ et strictement positive sinon. Ainsi, l'accélération de l'Univers est en expansion décélérée si $r > \frac{2}{\alpha}$ et en expansion accélérée si $r < \frac{2}{\alpha}$; et la transition de phase a lieu pour $r = \frac{2}{\alpha}$.

Exprimons à présent la distribution de masse baryonique dans l'Univers en substituant l'expression de la densité spatiale ρ_E dans l'équation $\rho_M(r,t) = \frac{r}{3}\frac{d\rho_E(r,t)}{dr}$.

Nous obtenons :

$$\rho_M(r,t) = \frac{r}{3}\frac{d(-\rho_0 e^{-\alpha r})}{dr}$$

$$\rho_M(r,t) = -\rho_0 \frac{r}{3}\frac{de^{-\alpha r}}{dr}$$

Ainsi,

$$\rho_M(r,t) = \frac{\alpha}{3} r\rho_0 e^{-\alpha r}$$

Nous pouvons alors exprimer de manière simple une relation qui lie la distribution de matière et celle de l'énergie dans l'espace :

$$\rho_M(r,t) = -\frac{\alpha}{3} r\rho_E(r,t)$$

b) Loi de puissance inverse

Nous pourrions également utiliser la loi de puissance inverse pour modéliser des distributions où la densité augmente rapidement avec la distance pour se stabiliser à la valeur nulle. Nous la définissons comme suit $\rho_E(r) = -\frac{\rho_0}{(1+\beta r)^n}$, où ρ_0 est la densité caractéristique, β et n sont des constantes strictement positives. Cette forme permet une croissance plus graduelle et peut être adaptée pour différents comportements en ajustant les valeurs de β et n.

En substituant $\rho_E(r) = -\frac{\rho_0}{(1+\beta r)^n}$ dans notre équation générale de l'accélération :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G\left(2r\rho_E(r,t) + r^2\frac{d\rho_{E(r,t)}}{dr}\right)$$

Nous obtenons,

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G\left(2r\frac{-\rho_0}{(1+\beta r)^n} + r^2\frac{d\left(\frac{-\rho_0}{(1+\beta r)^n}\right)}{dr}\right)$$

Soit,

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G\left(-2r\frac{\rho_0}{(1+\beta r)^n} + r^2\rho_0 n\beta(1+\beta r)^{-n-1}\right)$$

Ainsi l'accélération universelle exprimée en fonction de la distance radiale est donnée par la relation suivante :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G r\frac{\rho_0}{(1+\beta r)^n}\left(n\beta\frac{r}{(1+\beta r)} - 2\right)$$

Avec $r \leq ct$.

L'accélération a_U est du signe contraire du facteur $\left(n\beta\frac{r}{(1+\beta r)} - 2\right)$. Ainsi si ce facteur est positif, alors l'accélération universelle est négative, sinon celle-ci est positive. Etudions le signe de cette expression.

- Etudions le cas où l'expansion de l'Univers est en décélération

L'accélération universelle est strictement négative si $n\beta\frac{r}{(1+\beta r)} - 2 > 0$, soit :

$$n\beta r > 2(1+\beta r)$$

$$n\beta r - 2\beta r > 2$$

$$r(n-2) > \frac{2}{\beta}$$

Si $n = 2$, cette inégalité impliquerait que $\frac{2}{\beta} < 0$, alors que $\beta > 0$. Ce qui est impossible.

Pour étudier le signe de cette inégalité, il est nécessaire de distinguer deux cas :

$n - 2 > 0$ ou $n - 2 < 0$

Si $n - 2 < 0$, alors $r < \frac{2}{\beta(n-2)}$. Or le terme $\frac{2}{\beta(n-2)}$ est négatif pour les valeurs de n strictement inférieures à 2, ce qui impliquerait que la distance radiale est négative. Ce cas n'est donc pas possible. La seule possibilité est $n - 2 > 0$, et dans ce cas la distance radiale $r > \frac{2}{\beta(n-2)}$. J'en conclu que si $n > 2$ et $r > \frac{2}{\beta(n-2)}$, alors l'Univers est en expansion décélérée.

- Etudions le cas où l'expansion de l'Univers est en accélération

L'accélération universelle est positive si $n\beta \frac{r}{(1+\beta r)} - 2 < 0$, soit :

$$r(n-2) < \frac{2}{\beta}$$

Si $n = 2$, cette inégalité impliquerait que $\frac{2}{\beta} > 0$. Ce qui est tout le temps vrai puisque $\beta > 0$. Ainsi pour $n = 2$, l'Univers est en expansion accélérée quelle que soit la valeur de β.

Comme précédemment, pour étudier le signe de cette inégalité, il est nécessaire de distinguer deux cas :

$n - 2 > 0$ ou $n - 2 < 0$

- Si $n - 2 > 0$, alors $0 < r < \frac{2}{\beta(n-2)}$
- Si $n - 2 < 0$, alors $r > \frac{2}{\beta(n-2)}$. Le terme $\frac{2}{\beta(n-2)}$ est négatif pour les valeurs de n strictement inférieures à 2 et $r > 0$, ce qui implique que l'inégalité $r > \frac{2}{\beta(n-2)}$ est toujours vérifiée.

Par conséquent si, $n > 2$ et $0 < r < \frac{2}{\beta(n-2)}$ ou si $n \leq 2$, alors l'Univers est en expansion accélérée.

Exprimons à présent la densité de matière fonction de la distance radiale r. Nous savons que $\rho_M(r,t) = \frac{r}{3}\frac{d\rho_E(r,t)}{dr}$ et $\rho_E(r) = -\frac{\rho_0}{(1+\beta r)^n}$

Donc,

$$\rho_M(r,t) = \frac{r}{3}\frac{d\left(-\frac{\rho_0}{(1+\beta r)^n}\right)}{dr}$$

Soit,

$$\rho_M(r,t) = -\frac{r}{3}\rho_0\left(-n\beta\frac{1}{(1+\beta r)^{n+1}}\right)$$

Ainsi,

$$\rho_M(r,t) = \frac{1}{3}\beta n\rho_0\frac{r}{(1+\beta r)^{n+1}}$$

La relation qui lie la densité de masse et la densité d'espace est donnée par l'expression ci-dessous :

$$\rho_M(r,t) = -\frac{1}{3}\beta n\frac{r}{(1+\beta r)}\rho_E(r,t)$$

c) Fonction gaussienne

La fonction gaussienne est une autre option pour modéliser la densité spatiale, particulièrement utile pour des distributions de densité centrées. Elle est définie comme suit :

$\rho_E(r) = -\rho_0 e^{-(\sigma r)^2}$, où ρ_0 est la densité initiale et σ est une constante strictement positive liée à l'étalement de la distribution.

Cette fonction permet de modéliser une distribution où la densité évolue de manière symétrique autour d'un centre, avec σ contrôlant la largeur de la distribution. En substituant $\rho_E(r) = -\rho_0 e^{-(\sigma r)^2}$ dans notre équation générale $a_U = -\frac{4}{3}\pi G\left(2r\rho_E(r,t) + r^2\frac{d\rho_{E(r,t)}}{dr}\right)$, nous obtenons :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G\left(-2r\rho_0 e^{-(\sigma r)^2} + r^2\frac{d-\rho_0 e^{-(\sigma r)^2}}{dr}\right)$$

Soit,

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G\left(-2r\rho_0 e^{-(\sigma r)^2} + r^2 2\sigma^2 r\rho_0 e^{-(\sigma r)^2}\right).$$

Ainsi l'expression de l'accélération de l'expansion de l'Univers est donnée par la relation ci-dessous :

$$a_U = -\frac{8}{3}\pi G\rho_0 r e^{-(\sigma r)^2}((\sigma r)^2 - 1)$$

L'accélération a_U est du signe contraire du facteur $(\sigma r)^2 - 1$.

Si $(\sigma r)^2 - 1 < 0$, alors $a_U > 0$ et $-1 < \sigma r < 1$. L'Univers est par conséquent en expansion accélérée si $-\frac{1}{\sigma} < r < \frac{1}{\sigma}$ et en expansion décélérée si $r \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sigma}\right[\, U \left]\frac{1}{\sigma}, +\infty\right[$.

Exprimons à présent la densité de matière $\rho_M(r,t) = \frac{r}{3}\frac{d\rho_E(r,t)}{dr}$. Nous obtenons :

$$\rho_M(r,t) = \frac{r}{3}\frac{d\left(-\rho_0 e^{-(\sigma r)^2}\right)}{dr}$$

Soit,

$$\rho_M(r,t) = \frac{r}{3}\left(\rho_0 2\sigma^2 r e^{-(\sigma r)^2}\right)$$

Ainsi, nous obtenons la distribution de matière en fonction de la distance radiale suivante :

$$\rho_M(r,t) = \frac{2}{3}\rho_0(\sigma r)^2 e^{-(\sigma r)^2}$$

La relation qui lie la masse volumique et la densité spatiale est donnée par l'expression ci-dessous :

$$\rho_M(r,t) = -\frac{2}{3}(\sigma r)^2\rho_E(r,t)$$

En définissant la densité spatiale ρ_E comme une fonction négative croissante de r, nous pouvons modéliser et analyser l'accélération universelle dans divers scénarios. Les formes de fonctions, telles que la fonction exponentielle, la loi de puissance inverse et la fonction gaussienne, offrent plusieurs perspectives pour examiner cette relation dans un Univers isotrope non homogène. Chacune de ces fonctions présente des caractéristiques distinctes qui peuvent être adaptées pour mieux représenter la distribution de l'énergie de l'espace dans l'Univers.

En utilisant ces modèles, nous pouvons approfondir notre compréhension de l'influence de la densité spatiale sur l'accélération universelle et, par conséquent, sur la dynamique de l'Univers. Cependant, dans la suite de l'ouvrage j'examinerai, de manière davantage détaillée, une autre fonction pour étudier notamment la transition entre la décélération et l'accélération de l'expansion de l'Univers. Je ne prétends pas avoir découvert la fonction de densité spatiale décrivant avec précision l'expansion de l'Univers. Mon objectif est plutôt de proposer une piste de réflexion, pour mieux comprendre certaines observations cosmologiques qui ne concordent pas avec les théories actuellement acceptées, mais qui pourraient être éclairées par la théorie spatiale. Ajouter artificiellement des éléments comme la matière noire et l'énergie noire pour combler les écarts avec les observations ne me semble pas être une solution appropriée. Tout porte à croire qu'il est nécessaire de revisiter l'approche de la Relativité d'Einstein, en supposant que l'espace est isotrope mais non homogène. Il faudrait commencer par réécrire le quadrivecteur ds^2 et reformuler les équations de la relativité générale en partant de l'hypothèse que la métrique varie selon $\frac{1}{r^{a(t)}}$. Cependant, la complexité de ces équations rend cette tâche particulièrement difficile.

Chapitre 4 : Accélération universelle pour une densité spatiale en loi de puissance

Dans le livre *Les Mystères de l'Espace*, nous avions adopté la convention selon laquelle la densité $\rho_M(r,t)$ était négative et $\rho_E(r,t)$ positive. Pour éviter les confusions liées aux signes négatifs de la masse de la matière, nous inversons la convention de signe dans cet ouvrage. Il me paraît plus aisé pour le lecteur de considérer la masse des corps comme positive conformément aux usages habituels.

Dans ce chapitre, je vais étudier une densité spatiale obéissant à une loi de puissance de la forme $\rho_E(r,t) = k_\alpha r^\alpha$. Avant de l'examiner dans sa généralité, je vais me pencher sur le cas particulier où $\alpha = 0$, ce qui simplifie la fonction telle que $\rho_E(t) = k_0(t)$. Il est à noter que k_0 pourrait dépendre du temps, mais pas de la distance radiale. Ainsi, $\rho_E(t)$ serait homogène non constant.

a) Densité spatiale homogène

Commençons par examiner une densité spatiale homogène mais non constante de la forme $\rho_E(r,t) = -\rho_0(t)$, avec $\rho_0 \geq 0$. En appliquant la relation $\rho_M(r,t) = \frac{r}{3}\frac{d\rho_E(r,t)}{dr}$, nous obtenons $\rho_M(r,t) = 0$. Cela signifie que si l'Univers ne contenait aucun corps massique, sa densité d'énergie serait homogène et égale à $\rho_0(t)$.

Explorons maintenant l'expression de l'accélération de l'expansion de l'Univers dans ce contexte.

Injectons cette densité dans l'accélération $a_U = -\frac{4}{3}\pi G\frac{dr^2\rho_E(r,t)}{dr}$:

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G\frac{dr^2\big(-\rho_0(t)\big)}{dr}$$

Nous obtenons un Univers en expansion accélérée qui obéit à la loi suivante :

$$a_U = \frac{8}{3}\pi G\rho_0(t)r$$

Il y a deux possibilités :

1. Si $\rho_0(t)$ est nulle, alors l'accélération est nulle. Ce qui implique que l'Univers se dilate ou se contracte à une vitesse constante. Si cette vitesse est nulle au moment initial de l'expansion, l'Univers ne pourrait pas croître, conservant son rayon à zéro. Ainsi ce type d'Univers n'aurait pas eu « le temps » d'exister.

2. Si $\rho_0(t)$ est non nulle, cela indique que l'espace contient une énergie même en l'absence de corps massifs. Dans ce cas, comme a_U est positive, cela suggère que l'Univers se dilate de plus en plus vite. Vous noterez qu'il n'est pas nécessaire de faire intervenir l'énergie noire pour que l'Univers soit en expansion accélérée.

Quel que soit le cas, nous avions établi dans *Les mystères de l'espace* qu'un Univers constitué d'un volume d'espace ne pouvait pas exister sans la présence de matière. Par conséquent, il est très probable qu'une densité spatiale homogène ne reflète pas la réalité de notre Univers, sauf si la relation entre la densité spatiale et la répartition de la matière s'avérait incorrecte.

Passons maintenant à l'examen de la forme générale de cette loi de puissance.

b) Loi de puissance

L'un des principaux avantages de l'utilisation de la loi de puissance est sa simplicité mathématique. Elle permet de manipuler les équations de manière plus aisée et de dériver des résultats analytiques plus facilement. Ainsi, elle offre la possibilité de tester différentes hypothèses sans trop de complexité mathématique. De plus, cette approche reste suffisamment flexible pour être affinée selon les besoins de l'analyse.

Cette modélisation nous permet de traiter l'expansion d'un Univers isotrope et non homogène, facilitant ainsi la compréhension des phénomènes sous-jacents. Par ailleurs, cette fonction correspond aux observations qui semblent montrer que la distribution de densité de masse baryonique évolue en $\frac{1}{r^\beta}$ (avec $\beta > 0$ et $r > 0$).

Si les résultats obtenus avec la loi de puissance ne s'avèrent pas suffisamment précis ou pertinents, cette approximation servira dans un premier temps de base pour des modèles plus sophistiqués à l'avenir. Nous pourrions, par exemple, introduire des corrections ou des termes additionnels pour mieux représenter la distribution de la densité spatiale.

L'équation de la loi de puissance choisie dans cet ouvrage pour modéliser la densité spatiale, et qui semble la mieux correspondre aux observations cosmologiques selon mes connaissances, est $\rho_E(r,t) = k_\alpha r^\alpha$ avec $k_\alpha < 0$, de sorte que le signe de $\rho_E(r,t)$ soit négatif.

c) Densité spatiale et distribution de masse en fonction du paramètre α

La densité spatiale nous permettra de déterminer la distribution de masse ordinaire dans l'Univers, ce qui, à son tour, nous aidera à définir la masse totale de l'Univers. À partir de cette masse, nous en déduirons l'expression de k_α en fonction de α qui sera ensuite injectée dans la fonction puissance de la densité spatiale. Cette densité sera alors utilisée pour exprimer la densité de matière et l'accélération universelle en fonction du paramètre α.

En substituant l'expression de la densité spatiale $\rho_E(r,t) = k_\alpha r^\alpha$ dans la relation qui la lie à la distribution de matière $\rho_M(r,t) = \frac{r}{3}\frac{d\rho_E(r,t)}{dr}$, nous obtenons :

$$\rho_M(r,t) = \frac{r}{3}\frac{d(k_\alpha r^\alpha)}{dr}$$

Soit :

$$\rho_M(r,t) = \frac{r}{3}k_\alpha \alpha r^{\alpha-1}$$

Car k_α et α ne dépendent pas de la position radiale r.

En simplifiant cette expression, la relation devient : $\rho_M(r,t) = \frac{\alpha}{3}k_\alpha r^\alpha$

La densité de masse baryonique doit être positive, or $k_\alpha < 0$, par conséquent $\alpha < 0$.

La distribution de la matière est supposée isotrope et non homogène, ainsi le volume élémentaire pour le calcul de l'intégrale est $dV = 4\pi r^2 dr$. La position radiale r est exprimée dans le repère sphérique, avec pour origine le centre de l'Univers.

La masse ordinaire de l'Univers M_U se déduit en intégrant la masse élémentaire $dm = \rho_M(r,t)dV$, pour l'ensemble de l'Univers considéré sphérique, du centre $(r = 0)$ au rayon de l'Univers $(r = R_U)$. Soit,

$$M_U = \int_0^{R_U} \rho_M(r,t) 4\pi r^2 dr$$

Ainsi nous allons exprimer k_α en injectant l'expression $\rho_M(r,t) = \frac{\alpha}{3} k_\alpha r^\alpha$ dans cette intégrale. Nous obtenons,

$$\int_0^{R_U} \frac{\alpha}{3} k_\alpha r^\alpha 4\pi r^2 dr = M_U$$

Détaillons les étapes du calcul :

$$\frac{4\pi}{3} \alpha k_\alpha \int_0^{R_U} r^{\alpha+2} dr = M_U$$

$$\frac{4\pi}{3} \alpha k_\alpha \left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_0^{R_U} = M_U \text{ avec } \alpha \neq -3$$

$$\frac{4\pi}{3} \alpha k_\alpha \frac{{R_U}^{\alpha+3}}{\alpha+3} = M_U$$

Le coefficient k_α nous est donc donné par la relation ci-dessous :

$$k_\alpha = \frac{\alpha+3}{\alpha} \left(\frac{M_U}{\frac{4\pi}{3} {R_U}^3} \right) \frac{1}{{R_U}^\alpha} \; avec \; \alpha \neq 0 \; et \; R_U \neq 0$$

En posant la masse volumique de l'Univers $\rho_U = \frac{M_U}{\frac{4\pi}{3} {R_U}^3}$, l'expression de k_α simplifiée est :

$$k_\alpha = \frac{\alpha+3}{\alpha} \frac{\rho_U}{{R_U}^\alpha}$$

Dans le chapitre 4 de la partie II du livre *Les mystères de l'espace*, nous avions établi ces deux relations : $\rho_U = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi G {t_U}^2}$ et $R_U = c t_U$, avec t_U la durée d'expansion de l'Univers (abusivement appelée « l'âge » de l'Univers). Par ailleurs, dans le chapitre 5 suivant, où nous déterminerons la valeur numérique de $\alpha(t)$ pour « l'âge » actuel de l'Univers, nous supposerons, parmi plusieurs scénarios possibles, que les expressions de ρ_U et de R_U pourraient n'être valables que pour notre époque.

Injectons à présent les expressions de ρ_U et de R_U dans l'équation $k_\alpha = \frac{\alpha+3}{\alpha} \frac{\rho_U}{{R_U}^\alpha}$, donc :

$$k_\alpha = \frac{\alpha+3}{\alpha}\frac{\left(\frac{1}{\frac{4}{3}\pi G {t_U}^2}\right)}{(\mathrm{c}t_U)^\alpha}$$

Ainsi nous obtenons l'expression de k_α en fonction de t_U :

$$k_\alpha = \frac{1}{\frac{4\pi}{3}Gc^\alpha}\frac{\alpha+3}{\alpha}\frac{1}{{t_U}^{\alpha+2}}$$

Il faut être prudent vis-à-vis de cette équation de k_α qui pourrait, comme nous l'avons précisé précédemment, être valable uniquement pour la période t_U égale à « l'âge » de l'Univers actuel.

Revenons à l'expression du coefficient k_α de départ pour étudier son signe. Pour que $k_\alpha = \frac{\alpha+3}{\alpha}\frac{\rho_U}{{R_U}^\alpha}$ soit négatif, il est nécessaire que :

$$\frac{\alpha+3}{\alpha} < 0$$

Par conséquent, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$-3 < \alpha < 0$$

Pour exprimer la densité spatiale en fonction de α, on injecte l'expression de k_α dans $\rho_E(r,t) = k_\alpha r^\alpha$. Ainsi, nous obtenons :

$$\rho_E(r,t) = \frac{\alpha+3}{\alpha}\rho_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^\alpha$$

De la même manière, nous injectons l'expression de k_α dans celle la distribution de la matière $\rho_M(r,t) = \frac{\alpha}{3}k_\alpha r^\alpha$. Nous obtenons :

$$\rho_M(r,t) = \frac{\alpha}{3}\left(\frac{(\alpha+3)}{\alpha}\frac{\rho_U}{{R_U}^\alpha}\right)r^\alpha$$

Soit :

$$\rho_M(r,t) = \frac{\alpha+3}{3}\rho_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^\alpha$$

Nous obtenons également la relation qui lie la densité spatiale à la densité de matière suivante :

$$\rho_M(r,t) = \frac{\alpha}{3}\rho_E(r,t)$$

Les observations cosmologiques suggèrent que la masse volumique de la matière baryonique $\rho_M(r,t) = \frac{\alpha}{3}k_\alpha r^\alpha$ devrait diminuer avec la distance radiale r. Par conséquent, il est nécessaire que la valeur α soit comprise dans l'intervalle $]-\infty\,;0[$ car α et k_α ne dépendent pas de la position radiale r. C'est effectivement ce que nous avons obtenu précédemment avec l'inégalité $-3 < \alpha < 0$. Vérifier la cohérence des résultats est indispensable ; c'est ainsi que j'ai pu disqualifier de nombreuses théories développées au cours des vingt dernières années.

Reprenons l'étude de l'encadrement du paramètre α, en analysant cette fois-ci le signe de la masse volumique $\rho_M(r,t) = \frac{\alpha+3}{3}\rho_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^\alpha$. Pour que $\rho_M(r,t)$ soit positive, il est nécessaire que $\alpha + 3 \geq 0$, ce qui implique que $\alpha \in [-3\,;+\infty[$. Nous avons montré dans le paragraphe précédent que α doit être dans l'intervalle $]-\infty\,;0[$, cela restreint α à $[-3\,;0[$. De plus, les opérations d'intégration ont conduit à $\alpha \neq -3$. Ainsi, la valeur de α est comprise dans l'ensemble $]-3\,;0[$. C'est l'intervalle que nous avons trouvé en étudiant le signe de k_α, mais j'ai préféré refaire une démonstration en utilisant davantage le sens physique de nos résultats.

À ce stade, nous n'avons pas encore déterminé la valeur de α, bien que nous l'ayons restreinte à un intervalle plus étroit, mais il est possible que ce paramètre bien qu'homogène dans l'espace ne soit pas constant et varie avec le temps.

Par ailleurs, les observations semblent indiquer une transition de phase entre la décélération et l'accélération de l'expansion de l'Univers. Ce phénomène est-il également reflété par l'équation de l'accélération universelle ?

d) Équation de l'accélération de l'Univers et transition de phase en fonction du paramètre α

En remplaçant l'expression de la densité spatiale $\rho_E(r,t) = \frac{\alpha+3}{\alpha}\rho_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^\alpha$ dans l'équation de l'accélération universelle $a_U = -\frac{4}{3}\pi G\left(2r\rho_E(r,t) + r^2\frac{d\rho_{E(r,t)}}{dr}\right)$, nous trouvons :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G\left(2r\left(\frac{\alpha+3}{\alpha}\rho_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^{\alpha}\right) + r^2\frac{d\left(\frac{\alpha+3}{\alpha}\rho_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^{\alpha}\right)}{dr}\right)$$

Le paramètre α ne varie pas en fonction de la position radiale r. De même, les variables ρ_U et R_U sont indépendantes de la position radiale, mais changent avec le temps.

Détaillons les calculs intermédiaires ci-dessous :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G\left(2\frac{\alpha+3}{\alpha}\frac{\rho_U}{{R_U}^{\alpha}}r^{\alpha+1} + r^2\frac{\alpha+3}{\alpha}\frac{\rho_U}{{R_U}^{\alpha}}\alpha r^{\alpha-1}\right)$$

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G\left(2\left(\frac{\alpha+3}{\alpha}\frac{\rho_U}{{R_U}^{\alpha}}r^{\alpha+1}\right) + \alpha\left(\frac{\alpha+3}{\alpha}\frac{\rho_U}{{R_U}^{\alpha}}r^{\alpha+1}\right)\right)$$

Après un arrangement des termes, nous obtenons l'accélération universelle suivante :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G\frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{\alpha}\rho_U R_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^{\alpha+1}$$

Cette expression nous permet d'étudier l'évolution de l'expansion de l'Univers en analysant le signe de l'accélération universelle en fonction de la valeur de α. Le changement de la diminution à l'augmentation de la vitesse d'expansion de l'Univers indique une transition de phase dans cette dynamique. Quelle condition est nécessaire pour que cette transition se produise ?

Cette transition de phase d'expansion de l'Univers passe *a fortiori* par une accélération a_U nulle, et dans ce cas le produit $(\alpha+2)(\alpha+3) = 0$ dans le domaine de définition $\alpha \in\ ]-3\,;0[$. Cette condition doit être respectée pour toute position radiale r dans l'Univers. Dans cet intervalle, $\alpha \neq -3$, donc le facteur $\alpha + 3$ ne peut pas être nul. Seul le facteur $(\alpha + 2)$ pourrait s'annuler, par conséquent :

$\forall\, r \in [0; +\infty[$ tel que $\alpha \in\ ]-3\,;0[\ \ a_U = 0$ si et seulement si $\alpha = -2$

Cela implique une unique valeur de α pour laquelle la transition de phase de l'expansion de l'Univers est possible. Il est toutefois nécessaire d'examiner le sens de variation de la vitesse de l'expansion, car l'accélération a_U pourrait s'annuler à un point d'inflexion, qui ne correspondrait pas alors à une transition de phase.

Le signe de a_U est du signe contraire de l'expression $\frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{\alpha}$. Ainsi, l'évolution de la vitesse d'expansion de l'Univers est entièrement déterminée par le paramètre α. Ci-dessous le tableau de variation de l'accélération a_U en fonction de α :

α	-3	$-$	-2	$-$	0
$(\alpha + 2)$		$-$	0	$+$	
$(\alpha + 3)$	0	$+$		$+$	
$\boldsymbol{\frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{\alpha}}$		$+$	0	$-$	
a_U < 0 (expansion décélérée) a_U > 0 (expansion accélérée)		$-$	0	$+$	
Sens de variation de l'expansion de l'Univers (Variation de la vitesse dans le temps)		↘		↗	

Pour $\alpha \in \left]-3;-2\right[$, l'accélération a_U est négative, ce qui signifie que le vecteur vitesse d'expansion de l'Univers diminue dans le temps. En revanche, pour $\alpha \in$ à $\left]-2;0\right[$, l'accélération est positive, ce qui implique que le vecteur vitesse d'expansion de l'Univers augmente dans le temps. Par conséquent, il existe une valeur unique de α où se produit une transition de phase d'expansion de l'Univers.

Plus formellement,

$\forall\, r \in [0;+\infty[$; $a_U \leq 0$ pour $\alpha \in \left]-3\,;-2\right]$ et $a_U > 0$ pour $\alpha \in \left]-2\,;-0\right[$; et la vitesse d'expansion atteint un minimum pour $\alpha = 2$

La vitesse d'expansion de l'Univers diminue ou augmente selon la valeur du paramètre α. Pour qu'une transition de phase survienne dans cette expansion, il faut donc que le paramètre α évolue au fil du temps. Comment déterminer théoriquement cette fonction ?

Jusqu'à présent, nous avons réussi à circonscrire les valeurs de α dans l'intervalle $]-3; -0[$. Mais comment calculer la valeur précise de cette variable à notre époque ? Pour ce faire, il est nécessaire de restreindre les équations pour obtenir une solution aussi fine que possible tout en évitant d'y ajouter des éléments purement arbitraires. C'est ainsi que j'évalue l'efficacité et la pertinence d'une théorie, y compris les miennes.

Chapitre 5 : Évolution de l'accélération de l'Univers et transition de phase en fonction du temps

Dans ce chapitre, nous déterminerons la valeur du paramètre α pour l'âge actuel de l'Univers, avant de développer une fonction de α en fonction du temps. Cette expression nous servira à définir la distribution de matière, la densité spatiale et l'accélération universelle en fonction de la position radiale et du temps. Enfin, nous conclurons par un calcul numérique de l'âge de transition de phase, marquant le passage de la décélération à l'accélération de l'Univers

a) Valeur de α(tu)

Reprenons l'expression de l'accélération $a_U = -\frac{4}{3}\pi G \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{\alpha}\rho_U R_U \left(\frac{r}{R_U}\right)^{\alpha+1}$ obtenue à partir de la densité spatiale $\rho_E(r,t) = \frac{\alpha+3}{\alpha}\rho_U \left(\frac{r}{R_U}\right)^{\alpha}$.

Nous rappelons que R_U et ρ_U sont respectivement le rayon et la masse volumique de l'Univers, et G la constante de gravitation universelle.

Posons t_U , la durée de la phase d'expansion de l'Univers jusqu'à maintenant. L'accélération d'un corps qui se trouverait « au bord » de l'Univers à $t = t_U$, tel que $r = R_U(t_U)$, serait $a_U = \mp\frac{c}{t_U}$ (cf. chapitre 4 de la partie II du livre *Les mystères de l'espace*). Ainsi, nous obtenons l'expression suivante pour l'accélération universelle :

$$a_U(t_U) = -\frac{4}{3}\pi G \frac{(\alpha(t_U)+2)(\alpha(t_U)+3)}{\alpha(t_U)}\rho_U(t_U)R_U(t_U) = \mp\frac{c}{t_U}$$

Le signe de l'accélération a_U dépend de l'évolution de la vitesse d'expansion de l'Univers. Lorsque l'Univers est dans une phase d'expansion décélérée, a_U est négative, et lorsqu'il est dans une phase accélérée, a_U est positive.

- <u>Dans le cas de l'expansion accélérée :</u> $a_U = \frac{c}{t_U}$

Détaillons les calculs :

$$a_U(t_U) = -\frac{4}{3}\pi G \frac{(\alpha(t_U)+2)(\alpha(t_U)+3)}{\alpha(t_U)}\rho_U(t_U)R_U(t_U) = \frac{c}{t_U}$$

Ainsi :

$$\frac{(\alpha(t_U)+2)(\alpha(t_U)+3)}{\alpha(t_U)} = -\frac{\left(\frac{c}{R_U(t_U)}\right)}{\left(\frac{4}{3}\pi G\rho_U(t_U)\right)t_U}$$

Or dans le livre *Les mystères de l'espace*, nous avions établi les relations suivantes : $\frac{4}{3}\pi G\rho_U(t_U) = \frac{1}{{t_U}^2}\ et \frac{c}{R_U(t_U)} = \frac{1}{t_U}$.

En injectant ces expressions dans l'accélération universelle, nous obtenons :

$$\frac{(\alpha(t_U)+2)(\alpha(t_U)+3)}{\alpha(t_U)} = -1$$

Soit :

$$(\alpha(t_U)+2)(\alpha(t_U)+3) = -\alpha(\mathrm{t}_U)$$

En développant cette expression, nous obtenons une équation du second degré pour $\alpha(t_U)$:

$$\alpha(t_U)^2 + 6\alpha(t_U) + 6 = 0$$

Résolvons cette équation du second degré en calculant le discriminant Δ :

$$\Delta = 6^2 - 4\text{x}6 = 12$$

Ainsi, nous obtenons deux solutions possibles : $\alpha(t_U) = \frac{-6\pm\sqrt{12}}{2} = -3 \pm \sqrt{3}$

Comme $0 > \alpha > -3$, la seule solution possible est :

$$\alpha(\mathrm{t}_U) = -3 + \sqrt{3} \approx -1{,}27$$

Nous pouvons constater que le paramètre $\alpha(t_U)$ ne dépend pas de l'âge de l'Univers. Cela impliquerait que, durant la phase d'expansion accélérée, α reste constant, bien que nous ayons supposé qu'il ait varié dans le temps pour qu'une transition de phase se produise. Ce résultat mérite une réflexion approfondie. Parmi de nombreuses explications possibles, j'en exposerai que quelques-unes à titre d'illustration.

Analysons par exemple l'expression de l'accélération a_U utilisée pour déterminer $\alpha(\mathrm{t}_U)$. Celle-ci est composée de deux équations :

Équation 1 : $a_U(t_U) = -\frac{4}{3}\pi G \frac{(\alpha(t_U)+2)(\alpha(t_U)+3)}{\alpha(t_U)} \rho_U(t_U) R_U(t_U)$

Équation 2 : $a_U(t_U) = \mp \frac{c}{t_U}$

L'équation 1 est valable quel que soit « l'âge » de l'Univers t_U, et pas uniquement pour « l'âge » actuel. L'équation 2 est plus nuancée, car dans *Les mystères de l'espace* celle-ci a était obtenue à l'aide de la loi d'Hubble. Or le paramètre d'Hubble H_0 est caractéristique de « l'âge » actuel de l'Univers. Ainsi l'équation 2, tout comme les expressions de ρ_U et de R_U injectées dans l'équation 1, pourraient n'être valables que pour l'âge actuel de l'Univers, voir même que le chapitre 4 de la partie II traitant des constantes universelles dans le livre *Les mystères de l'espace* soit à revoir. Il ne faut pas non plus exclure le fait que l'expression du paramètre choisie k_α ne soit tout simplement pas correcte. Il est à noter que nous pourrions déterminer de manière empirique la fonction $\alpha(t)$ en cartographiant la distribution de masse ordinaire de l'Univers à plusieurs époques, de sorte à obtenir l'évolution de sa masse volumique.

Quoi qu'il en soit, pour illustrer les possibilités offertes par la théorie spatiale, nous allons par la suite admettre que le paramètre $a_U(t_U)$ obtenu correspond à celui de l'âge actuel de l'Univers.

- Dans le cas de l'expansion décélérée : $\mathrm{a}_U = -\frac{c}{t_U}$

Tout d'abord, notons que ce cas est prévu dans le chapitre 4 de la partie II du livre *Les mystères de l'espace*.

L'expression de l'accélération universelle devient :

$$\frac{(\alpha(t_U)+2)(\alpha(t_U)+3)}{\alpha(t_U)} = 1$$

Soit :

$$(\alpha(t_U)+2)(\alpha(t_U)+3) = \alpha(t_U)$$

En développant les termes de cette équation, nous obtenons l'équation du second degré suivante :

$$\alpha(t_U)^2 + 4\alpha(t_U) + 6 = 0$$

La résolution de cette équation nous donne :

$\Delta = 4^2 - 4x6 = -8$

Nous obtenons ainsi deux solutions dans le domaine des nombres complexes :

$$\alpha(t_U) = \frac{-4 \pm i\sqrt{8}}{2}$$

$$\alpha(t_U) = -2 \pm i\sqrt{2}$$

Le paramètre α n'admet pas de solution dans l'ensemble des réels. Par conséquent, aucune des deux solutions ne répond aux conditions du paramètre $\alpha(t_U)$.

Nous avons donc démontré que, parmi les deux scénarios possibles pour l'évolution de l'expansion de l'Univers, seul celui d'une expansion accélérée est plausible. Cela suggère que l'Univers est actuellement en phase d'expansion accélérée, en accord avec les observations cosmologiques. Nous avons également établi que la valeur actuelle du paramètre α de l'Univers est unique et égale à $-3 + \sqrt{3}$. Par ailleurs, comme le montre le tableau de variation présenté précédemment, l'accélération universelle pour cette valeur de α est effectivement positive, ce qui confirme la cohérence de nos résultats.

Après avoir déterminé la valeur du paramètre α pour l'époque actuelle, nous allons maintenant examiner son évolution dans le temps. En optant pour une fonction monotone de $\alpha(t)$, nous garantissons que l'Univers ne subira, au maximum, qu'une seule transition de phase. Bien que des fonctions non monotones puissent également conduire à une transition de phase unique, nous choisissons une fonction monotone pour simplifier l'analyse et illustrer le potentiel de la théorie spatiale. Nous examinerons donc deux scénarios : l'un où la fonction α est croissante, et l'autre où elle est décroissante.

b) Expression du paramètre α et de la transition de phase en fonction du temps – scénario 1 : la fonction α est décroissante

Reprenons l'expression de la densité de masse $\rho_M(r,t) = \frac{\alpha+3}{3}\rho_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^{\alpha}$

Étant donné que l'Univers est en expansion, il est probable que la fonction de distribution de masse $\rho_M(r,t)$ diminue avec le temps pour une position fixe r, et qu'elle décroisse également avec la position radiale r à un instant donné. Par conséquent, α jouerait un rôle crucial dans l'évolution du terme $\left(\frac{r}{R_U}\right)^{\alpha}$. En effet, à mesure que l'Univers s'étend, les galaxies s'éloignent de plus en plus les unes des autres, ce qui devrait entraîner une diminution de la densité de matière à la fois dans le temps et dans l'espace.

Cherchons à déterminer cette fonction $\alpha(t)$. Dans ce premier scénario, nous choisirons une fonction $\alpha(t)$ décroissante du temps.

Ainsi, elle doit répondre à plusieurs critères :

1) La fonction $\alpha(t)$ doit être décroissante dans le temps : $\frac{d\alpha(t)}{dt} < 0$

2) Comme $\alpha(t) \in \,]-3\,;0[$: $\lim\limits_{t \to 0^+} \alpha(t) = 0^-$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \alpha(t) = -3^+$

Ainsi, la fonction $\alpha(t)$ doit satisfaire trois conditions :

1) $\frac{d\alpha(\mathrm{t})}{dt} < 0$

2) $\lim\limits_{t \to 0^+} \alpha(t) = 0$

3) $\lim\limits_{t \to +\infty} \alpha(t) = -3$

Une fonction simple qui pourrait convenir est : $\alpha(t) = -3\left(1 - e^{-\frac{t}{t_0}}\right) \ avec \ t_0 > 0$

Cette forme de $\alpha(t)$ est typique des processus où une variable se rapproche d'une asymptote, avec une vitesse initiale qui ralentit au fil du temps.

Déterminons maintenant t_1 l'instant de l'Univers pour laquelle la transition de phase a eu lieu. Pour rappel, cette transition correspond à $\alpha(t_1) = -2$.

Nous savons que $\forall\, r \in [0\,;+\infty[\,,\ a_U(t_1) = 0$ et $\alpha(t_1) = -2$

Ainsi, $\alpha(t_1) = -3\left(1 - e^{-\frac{t_1}{t_0}}\right) = -2$

Isolons désormais t_1 de cette équation :

$$\left(1 - e^{-\frac{t_1}{t_0}}\right) = \frac{2}{3}$$

$$-e^{-\frac{t_1}{t_0}} = \frac{2}{3} - 1$$

$$e^{-\frac{t_1}{t_0}} = \frac{1}{3}$$

Ainsi, l'époque de l'Univers à laquelle se produit la transition de phase entre la décélération et l'accélération est :

$$t_1 = t_0\, ln(3)$$

Exprimons à présent $\rho_E(r,t)$ en fonction de « l'âge » de l'Univers t et de la position radiale r. En injectant $\alpha(t) = -3\left(1 - e^{-\frac{t}{t_0}}\right)$ dans la relation de la densité spatiale $\rho_E(r,t) = \frac{\alpha+3}{\alpha}\rho_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^{\alpha}$, nous obtenons l'expression ci-dessous :

$$\rho_E(r,t) = \frac{-3\left(1 - e^{-\frac{t}{t_0}}\right) + 3}{-3\left(1 - e^{-\frac{t}{t_0}}\right)}\rho_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^{-3\left(1-e^{-\frac{t}{t_0}}\right)}$$

En inversant $\frac{r}{R_U}$ et après simplification de cette expression, la densité spatiale devient :

$$\rho_E(r,t) = -\frac{e^{-\frac{t}{t_0}}}{\left(1 - e^{-\frac{t}{t_0}}\right)}\rho_U\left(\frac{R_U}{r}\right)^{3\left(1-e^{-\frac{t}{t_0}}\right)} \quad avec\; r \leq R_U \leq ct$$

Cependant ρ_U et R_U dépendent également du temps. Nous savons que $\rho_U = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi G t^2}$ et $R_U = ct$. Dans ces équations le paramètre t correspond à la période de la phase d'expansion (appelée abusivement « âge » de l'Univers). Injectons l'expression de la masse volumique visible et du rayon de l'Univers dans la densité spatiale :

$$\rho_E(r,t) = -\frac{e^{-\frac{t}{t_0}}}{\left(1 - e^{-\frac{t}{t_0}}\right)}\frac{1}{\frac{4}{3}\pi G t^2}\left(\frac{ct}{r}\right)^{3\left(1-e^{-\frac{t}{t_0}}\right)}$$

La densité spatiale en fonction de « l'âge » de l'Univers et de la position radiale dans l'Univers est donnée par la relation suivante :

$$\rho_E(r,t) = -\frac{1}{\frac{4}{3}\pi G}\,\frac{e^{-\frac{t}{t_0}}}{\left(1-e^{-\frac{t}{t_0}}\right)}\left(\frac{ct}{r}\right)^{3\left(1-e^{-\frac{t}{t_0}}\right)}\frac{1}{t^2}\ avec\ r \leq ct$$

Avec la relation $\rho_M(r,t) = \frac{\alpha}{3}\rho_E(r,t)$, nous pouvons également exprimer la distribution de matière baryonique en fonction du temps et de la position radiale :

$$\rho_M(r,t) = \frac{-3\left(1-e^{-\frac{t}{t_0}}\right)}{3}\left(-\frac{1}{\frac{4}{3}\pi G}\frac{e^{-\frac{t}{t_0}}}{\left(1-e^{-\frac{t}{t_0}}\right)}\left(\frac{ct}{r}\right)^{3\left(1-e^{-\frac{t}{t_0}}\right)}\frac{1}{t^2}\right)$$

Ainsi la distribution de la masse baryonique en fonction de « l'âge de l'Univers » et de la position radiale nous est donnée par l'équation suivante :

$$\rho_M(r,t) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi G}\,e^{-\frac{t}{t_0}}\left(\frac{ct}{r}\right)^{3\left(1-e^{-\frac{t}{t_0}}\right)}\frac{1}{t^2}\ avec\ r \leq ct$$

De la même manière, injectons $\alpha(t) = -3\left(1-e^{-\frac{t}{t_0}}\right)$ dans la relation de l'accélération universelle $a_U = -\frac{4}{3}\pi G\frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{\alpha}\rho_U R_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^{\alpha+1}$, nous obtenons :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G\frac{\left(-3\left(1-e^{-\frac{t}{t_0}}\right)+2\right)\left(-3\left(1-e^{-\frac{t}{t_0}}\right)+3\right)}{-3\left(1-e^{-\frac{t}{t_0}}\right)}\rho_U R_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^{-3\left(1-e^{-\frac{t}{t_0}}\right)+1}$$

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G\frac{\left(3e^{-\frac{t}{t_0}}-1\right)\left(3e^{-\frac{t}{t_0}}\right)}{-3\left(1-e^{-\frac{t}{t_0}}\right)}\rho_U R_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^{3\left(e^{-\frac{t}{t_0}}\right)-2}$$

Soit :

$$a_U = \frac{4}{3}\pi G\left(3e^{-\frac{t}{t_0}}-1\right)\frac{e^{-\frac{t}{t_0}}}{1-e^{-\frac{t}{t_0}}}\rho_U R_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^{3\left(e^{-\frac{t}{t_0}}\right)-2}\ avec\ r \leq R_U \leq ct$$

Injectons à présent l'expression de la masse volumique et du rayon de l'Univers, respectivement $\rho_U = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi G t^2}$ et $R_U = ct$ dans l'accélération universelle :

$$a_U = \frac{4}{3}\pi G \frac{\left(3e^{-\frac{t}{t_0}} - 1\right)\left(e^{-\frac{t}{t_0}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{t}{t_0}}\right)} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi G t^2} ct \left(\frac{r}{ct}\right)^{3\left(e^{-\frac{t}{t_0}}\right)-2}$$

Ainsi, l'accélération universelle en fonction du temps et de la position radiale s'exprime comme suit :

$$a_U = \left(3e^{-\frac{t}{t_0}} - 1\right) \frac{e^{-\frac{t}{t_0}}}{1 - e^{-\frac{t}{t_0}}} \left(\frac{r}{ct}\right)^{3\left(e^{-\frac{t}{t_0}}\right)-2} \frac{c}{t} \ avec\ r \leq ct$$

Je rappelle que ces trois expressions ci-dessus, $\rho_E(r,t), \rho_M(r,t)$ et a_U pourraient, comme nous l'avons expliqué précédemment, n'être valables que pour t égal à « l'âge » de l'Univers actuel.

Déterminons à présent la valeur du temps caractéristique t_0 à partir de l'expression de $\alpha(t_U) = -3\left(1 - e^{-\frac{t_U}{t_0}}\right)$ avec t_U « l'âge » de l'Univers actuel :

$$\alpha(t_U) = -3 + 3e^{-\frac{t_U}{t_0}}$$

$$e^{-\frac{t_U}{t_0}} = \frac{\alpha(t_U) + 3}{3}$$

$$-\frac{t_U}{t_0} = ln\left(\frac{\alpha(t_U)}{3} + 1\right)$$

Ainsi le paramètre t_0 peut s'écrire de la manière suivante :

$$t_0 = -\frac{1}{ln\left(\frac{\alpha(t_U)}{3} + 1\right)} t_U$$

Injectons la valeur trouvée précédemment $\alpha(\mathrm{t}_U) = -3 + \sqrt{3}$ dans cette expression :

$$t_0 = -\frac{1}{ln\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{3}+1\right)} t_U$$

$$t_0 = -\frac{1}{ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} t_U$$

$$\boxed{t_0 = \frac{2}{ln(3)} t_U}$$

En considérant que l'Univers a 13,8 milliards d'années, nous avons

$$t_0 \approx 1{,}82 * 13{,}8 \approx 25{,}1$$

Soit un temps caractéristique qui vaut 25,1 milliards d'années.

Exprimons enfin « l'âge » de l'Univers au moment de la transition de phase en fonction de son « âge » actuel. Pour ce faire injectons $t_0 = -\frac{t_U}{\ln\left(\frac{\alpha(t_U)}{3}+1\right)}$ dans la relation établie précédemment $t_1 = t_0\, ln(3)$, nous obtenons :

$$\boxed{t_1 = -\frac{ln(3)}{ln\left(\frac{\alpha(t_U)}{3}+1\right)} t_U}$$

Selon les observations cosmologiques, la transition de phase s'est déjà produite. Par conséquent, cette expression doit vérifier l'inégalité suivante : $0 < t_1 < t_U$, soit $0 < \frac{t_1}{t_U} < 1$. Nous avons alors l'encadrement suivant :

$$0 < -\frac{ln(3)}{ln\left(\frac{\alpha(t_U)}{3}+1\right)} < 1$$

Regardons le signe de $ln\left(\frac{\alpha(t_U)}{3}+1\right)$ afin de manipuler correctement les opérations sur les encadrements :

$$-3 < \alpha(t_U) < 0$$

$$-1 < \frac{\alpha(t_U)}{3} < 0$$

$$0 < \frac{\alpha(t_U)}{3} + 1 < 1$$

$$ln\left(\frac{\alpha(t_U)}{3} + 1\right) < 0$$

Revenons désormais à l'encadrement de départ : $0 < -\frac{ln(3)}{ln\left(\frac{\alpha(t_U)}{3}+1\right)} < 1$

Multiplions notre encadrement par l'expression $ln\left(\frac{\alpha(t_U)}{3} + 1\right)$ qui est strictement négative, nous obtenons :

$$0 > -\frac{ln(3)}{ln\left(\frac{\alpha(t_U)}{3} + 1\right)} ln\left(\frac{\alpha(t_U)}{3} + 1\right) > ln\left(\frac{\alpha(t_U)}{3} + 1\right)$$

$$0 > -ln(3) > ln\left(\frac{\alpha(t_U)}{3} + 1\right)$$

$$ln\left(\frac{\alpha(t_U)}{3} + 1\right) < ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

La fonction ln est croissante, donc :

$$\frac{\alpha(t_U)}{3} + 1 < \frac{1}{3}$$

Soit,

$$\alpha(t_U) < -2$$

Or, nous avons précédemment trouvé une valeur de $\alpha(t_U) = -3 + \sqrt{3} \approx -1{,}27$ plus grande que -2. Par conséquent, la fonction $\alpha(t)$ ne peut pas être décroissante.

Nous aurions également pu exprimer t_1 en fonction de t_U en utilisant les relations $t_0 = \frac{2}{ln(3)} t_U$ et $t_1 = t_0\, ln(3)$, ce qui donne $t_1 = 2t_U$. Cela impliquerait que la transition de phase se produirait dans 13,8 milliards d'années. Cependant, dans notre modèle, cette transition est unique et s'est déjà produite. Par conséquent, la fonction $\alpha(t)$ ne peut pas être décroissante.

Examinons alors le cas où le paramètre $\alpha(t)$ est croissant.

c) Expression du paramètre α et de la transition de phase en fonction du temps – scénario 2 : la fonction α est croissante

Reprenons l'expression de la densité de masse $\rho_M(r,t) = \frac{\alpha+3}{3}\rho_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^{\alpha}$

Considérons un scénario dans lequel la distribution de masse dans l'Univers tend à devenir homogène. L'équilibre thermodynamique à l'échelle de l'Univers sera alors atteint, avec une pression, une température et une densité homogènes. Dans ce cas, α augmenterait au fil du temps jusqu'à atteindre la valeur 0, de sorte que $\rho_M(t) \to \rho_U(t)$.

Cherchons donc à déterminer cette fonction $\alpha(t)$.

Elle doit répondre à plusieurs critères :

- La fonction α est croissante dans le temps, donc $\frac{d\alpha}{dt} > 0$
- $\alpha \in \left]-3\,;0\right[$, par conséquent $\lim\limits_{t\to 0^+} \alpha(t) = -3^+ \; et \; \lim\limits_{t\to +\infty} \alpha(t) = 0^-$

Par conséquent α doit satisfaire trois conditions :

1. $\frac{d\alpha}{dt} > 0$
2. $\lim\limits_{t\to 0^+} \alpha(t) = -3$
3. $\lim\limits_{t\to +\infty} \alpha(t) = 0$

La fonction la plus simple qui pourrait correspondre est $\alpha(t) = -3e^{-\frac{t}{t_0}}$

Déterminons « l'âge » de l'Univers t_1 à laquelle la transition de phase a eu lieu.

Nous savons que $\forall\, r \in [0\,;+\infty[\,,\; \alpha(t_1) = -2$ et $a_U(t_1) = 0$.

Ainsi, $\alpha(t_1) = -3e^{-\frac{t_1}{t_0}} = -2$

Exprimons t_1 en fonction de t_0 :

$$e^{-\frac{t_1}{t_0}} = \frac{2}{3}$$

$$-\frac{t_1}{t_0} = ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$t_1 = -t_0 ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Par conséquent « l'âge » de l'Univers à laquelle a lieu la transition de phase entre la décélération et l'accélération est :

$$t_1 = t_0 ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

En injectant $\alpha(t) = -3e^{-\frac{t}{t_0}}$ dans la relation de la densité $\rho_E(r,t) = \frac{\alpha+3}{\alpha}\rho_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^{\alpha}$, nous obtenons :

$$\rho_E(r,t) = \frac{-3e^{-\frac{t}{t_0}} + 3}{-3e^{-\frac{t}{t_0}}}\rho_U\left(\frac{r}{R_U}\right)^{-3e^{-\frac{t}{t_0}}}$$

En inversant $\frac{r}{R_U}$, la densité spatiale devient :

$$\rho_E(r,t) = \frac{e^{-\frac{t}{t_0}} - 1}{e^{-\frac{t}{t_0}}}\rho_U\left(\frac{R_U}{r}\right)^{3e^{-\frac{t}{t_0}}}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $e^{\frac{t}{t_0}}$, nous obtenons :

$$\rho_E(r,t) = \left(1 - e^{\frac{t}{t_0}}\right)\rho_U\left(\frac{R_U}{r}\right)^{3e^{-\frac{t}{t_0}}}$$

Or, ρ_U et R_U varient avec le temps. En remplaçant, comme précédemment, les expressions $\rho_U = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi G t^2}$ et $R_U = ct$ dans l'équation de la densité spatiale, nous obtenons :

$$\rho_E(r,t) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi G t^2}\left(1 - e^{\frac{t}{t_0}}\right)\left(\frac{ct}{r}\right)^{3e^{-\frac{t}{t_0}}}$$

En utilisant la relation $\rho_M(r,t) = \frac{\alpha}{3}\rho_E(r,t)$, nous pouvons également exprimer la densité de matière en fonction du temps et de la position radiale :

$$\rho_M(r,t) = \frac{\left(-3e^{-\frac{t}{t_0}}\right)}{3} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi G t^2} \left(1 - e^{\frac{t}{t_0}}\right) \left(\frac{ct}{r}\right)^{3e^{-\frac{t}{t_0}}}$$

La distribution de la matière visible dans l'Univers est alors décrite par la densité suivante :

$$\rho_M(r,t) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi G t^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{t_0}}\right) \left(\frac{ct}{r}\right)^{3e^{-\frac{t}{t_0}}}$$

De même, en substituant $\alpha(t) = -3e^{-\frac{t}{t_0}}$ dans l'expression de l'accélération universelle $a_U = -\frac{4}{3}\pi G \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{\alpha} \rho_U R_U \left(\frac{r}{R_U}\right)^{\alpha+1}$, nous obtenons :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G \frac{\left(-3e^{-\frac{t}{t_0}} + 2\right)\left(-3e^{-\frac{t}{t_0}} + 3\right)}{-3e^{-\frac{t}{t_0}}} \rho_U R_U \left(\frac{r}{R_U}\right)^{-3e^{-\frac{t}{t_0}} + 1}$$

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G \frac{\left(-3e^{-\frac{t}{t_0}} + 2\right)\left(e^{-\frac{t}{t_0}} - 1\right)}{e^{-\frac{t}{t_0}}} \rho_U R_U \left(\frac{r}{R_U}\right)^{1-3e^{-\frac{t}{t_0}}}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $e^{\frac{t}{t_0}}$, nous obtenons :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G \left(-3 + 2e^{\frac{t}{t_0}}\right)\left(e^{-\frac{t}{t_0}} - 1\right) \rho_U R_U \left(\frac{r}{R_U}\right)^{1-3e^{-\frac{t}{t_0}}}$$

Injectons les expressions de R_U et de ρ_U :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G \left(2e^{\frac{t}{t_0}} - 3\right)\left(e^{-\frac{t}{t_0}} - 1\right) \frac{1}{\frac{4}{3}\pi G t^2} ct \left(\frac{r}{ct}\right)^{1-3e^{-\frac{t}{t_0}}}$$

L'accélération de l'Univers, en fonction de r et de son « âge », s'exprime ainsi :

$$a_U = -\left(2e^{\frac{t}{t_0}} - 3\right)\left(e^{-\frac{t}{t_0}} - 1\right) \left(\frac{r}{ct}\right)^{1-3e^{-\frac{t}{t_0}}} \frac{c}{t}$$

Je rappelle que ces trois expressions ci-dessus, ρ_E, ρ_M et a_U, pourraient, comme nous l'avons expliqué précédemment, n'être valables que pour t égal à « l'âge » de l'Univers actuel.

Calculons la limite de cette accélération quand t tend vers l'infini.

$$\lim_{t\to+\infty} a_U = \lim_{t\to+\infty} -\left(2e^{\frac{t}{t_0}} - 3\right)\left(e^{-\frac{t}{t_0}} - 1\right)\left(\frac{r}{ct}\right)^{1-3e^{-\frac{t}{t_0}}}\frac{c}{t}$$

$$\lim_{t\to+\infty} a_U = \lim_{t\to+\infty} 2e^{\frac{t}{t_0}}\frac{r}{t^2}$$

Il est à noter que cette accélération diverge.

Pour clôturer ce scénario, nous allons calculer « l'âge » de l'Univers au moment où la transition de phase s'est produite. Pour cela, commençons par exprimer t_0 en fonction de t_U. Le paramètre $\alpha(t)$ évalué à « l'âge » actuel de l'Univers $t = t_U$, est donné par la relation suivante :

$$\alpha(t_U) = -3e^{-\frac{t_U}{t_0}}$$

Isolons à présent t_0 :

$$e^{-\frac{t_U}{t_0}} = -\frac{\alpha(t_U)}{3}$$

$$-\frac{t_U}{t_0} = ln\left(-\frac{\alpha(t_U)}{3}\right)$$

$$\frac{t_U}{t_0} = -\,ln\left(-\frac{\alpha(t_U)}{3}\right)$$

$$t_0 = \frac{t_U}{-ln\left(-\frac{\alpha(t_U)}{3}\right)}$$

$$t_0 = \frac{t_U}{ln\left(-\frac{3}{\alpha(t_U)}\right)}$$

Or nous avons établi précédemment que $t_1 = t_0\, ln\left(\frac{3}{2}\right)$. Remplaçons t_0 par l'expression trouvée précédemment. Ainsi, nous obtenons :

$$t_1 = \frac{ln\left(\frac{3}{2}\right)}{ln\left(-\frac{3}{\alpha(t_U)}\right)} t_U$$

Comme pour le premier scénario, l'encadrement suivant doit être vérifié :

$$0 < \frac{t_1}{\mathrm{t_U}} < 1$$

Donc,

$$0 < \frac{ln\left(\frac{3}{2}\right)}{ln\left(-\frac{3}{\alpha(t_U)}\right)} < 1$$

Commençons par déterminer le signe de $ln\left(-\frac{3}{\alpha(t_U)}\right)$

$$-3 < \alpha(t_U) < 0$$

$$0 < -\frac{\alpha(\mathrm{t_U})}{3} < 1$$

$$1 < -\frac{3}{\alpha(\mathrm{t_U})} < +\infty$$

$$0 < ln\left(-\frac{3}{\alpha(\mathrm{t_U})}\right) < +\infty$$

Ainsi l'expression $ln\left(-\frac{3}{\alpha(\mathrm{t_U})}\right)$ est strictement positive.

Revenons à notre encadrement précédent,

$$0 < \frac{ln\left(\frac{3}{2}\right)}{ln\left(-\frac{3}{\alpha(t_U)}\right)} < 1$$

En multipliant cette inégalité par $ln\left(-\frac{3}{\alpha(t_U)}\right)$, nous obtenons :

$$ln\left(\frac{3}{2}\right) < ln\left(-\frac{3}{\alpha(t_U)}\right)$$

Multiplions cette expression par -1 de chaque côté, l'inégalité devient :

$$-\ln\left(-\frac{3}{\alpha(t_U)}\right) < -\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Soit,

$$\ln\left(-\frac{\alpha(t_U)}{3}\right) < \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Étant donné que la fonction ln est croissante, la relation se simplifie ainsi :

$$-\frac{\alpha(t_{\mathrm{U}})}{3} < \frac{2}{3}$$

Nous obtenons alors l'inégalité suivante :

$$\alpha(t_U) > -2$$

Cet encadrement est cette fois en accord avec la valeur de $\alpha(t_U)$ déterminée au début de ce chapitre. Pour rappel, $\alpha(t_U) = -3 + \sqrt{3} \approx -1{,}27$. Si cette valeur s'avérait incorrecte, il serait nécessaire de trouver une autre valeur de $\alpha(t_U)$ correspondant à « l'âge » actuel de l'Univers, en accord avec les observations. Cela pourrait être accompli en mesurant la distribution de matière dans l'Univers.

Reprenons l'expression qui lie t_0 à t_U, obtenue ci-dessus :

$$t_0 = \frac{t_U}{\ln\left(-\frac{3}{\alpha(t_U)}\right)}$$

Remplaçons $\alpha(t_U)$ par sa valeur :

$$t_0 = \frac{t_U}{\ln\left(-\frac{3}{-3+\sqrt{3}}\right)}$$

Nous obtenons :

$$t_0 = \frac{t_U}{\ln\left(\frac{3}{3-\sqrt{3}}\right)}$$

En multipliant le dénominateur et le numérateur dans la fonction ln par le facteur $\left(3+\sqrt{3}\right)$, nous obtenons :

$$t_0 = \frac{t_U}{ln\left(\frac{3\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}\right)}$$

En simplifiant, l'expression de t_0 devient :

$$t_0 = \frac{t_U}{ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Le calcul numérique nous donne le temps caractéristique suivant :

$$t_0 \approx 1{,}16\, t_U$$

Déterminons maintenant « l'âge » de la transition, t_1, en fonction de « l'âge » actuel de l'Univers, t_U. Pour ce faire injectons $t_0 = \frac{t_U}{ln\left(-\frac{3}{\alpha(t_U)}\right)}$ dans la relation $t_1 = t_0\, ln\left(\frac{3}{2}\right)$. Nous obtenons :

$$t_1 = \frac{ln\left(\frac{3}{2}\right)}{ln\left(-\frac{3}{\alpha(t_U)}\right)} t_U$$

En substituant $\alpha(t_U)$ par sa valeur $-3+\sqrt{3}$, nous obtenons :

$$t_1 = \frac{ln\left(\frac{3}{2}\right)}{ln\left(-\frac{3}{-3+\sqrt{3}}\right)} t_U$$

Soit,

$$t_1 = \frac{ln\left(\frac{3}{2}\right)}{ln\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} t_U$$

Le calcul numérique nous donne « l'âge » de la transition de phase t_1 en fonction de « l'âge » de l'Univers suivant :

$t_1 \approx 0{,}47\ t_U$

Calculons également la durée écoulée, Δt, depuis la transition de phase de l'expansion de l'Univers, t_1, jusqu'à aujourd'hui, t_U :

$$\Delta t = t_U - t_1$$

$$\Delta t = t_U - 0{,}47\ t_U$$

$$\Delta t = (1 - 0{,}47)\ t_U$$

$$\Delta t = 0{,}53\ t_U$$

En admettant que « l'âge » actuel t_U de l'Univers est de 13,8 milliards d'années, nous obtenons :

$$\Delta t = 0{,}53 * 13{,}8 = 7{,}3$$

Ainsi la transition de phase de l'expansion de l'Univers, passant de la décélération à l'accélération, s'est produite il y a environ 7 milliards d'années.

Partie III : Courbes de rotation déduites de la densité spatiale de la théorie spatiale

Dans ce chapitre, nous allons déterminer la densité spatiale en supposant une accélération centripète, avec une vitesse de rotation constante des galaxies. Cette densité nous permettra de calculer la répartition de la masse ordinaire dans la région plate de la courbe de rotation, puis d'en déduire la masse totale du disque galactique. À partir de cette masse, nous établirons une relation permettant de déterminer la vitesse de rotation du disque. Notre approche se concentre exclusivement sur les galaxies spirales.

Chapitre 6 : Courbe de rotation de la partie plate de la galaxie

La densité spatiale associée à la courbe de rotation plate d'une galaxie est exprimée par la relation suivante (cf. livre *Les mystères de l'espace*) :

$$\rho_E(r) = -\frac{3v^2}{4\pi G}\frac{ln(\frac{r}{r_0})}{r^2}$$

v représente la vitesse de rotation constante de la galaxie, et r la distance radiale entre le centre de la galaxie et un point situé sur son disque, avec $r > r_0 > 0$.

Pour déterminer le rayon caractéristique r_0, nous commencerons par exprimer la distribution de la masse ordinaire du disque galactique à partir de la densité spatiale.

a) Distribution de masse ordinaire du disque

Utilisons l'équation reliant la masse volumique ordinaire à la densité spatiale :

$$\rho_M = \frac{r}{3}\frac{d\rho_E(r)}{dr}$$

Injectons la densité spatiale dans cette expression :

$$\rho_M = \frac{r}{3}\frac{d\left(-\frac{3v^2}{4\pi G}\frac{ln(\frac{r}{r_0})}{r^2}\right)}{dr}$$

Détaillons les calculs :

$$\rho_M = -\frac{rv^2}{4\pi G}\frac{d\left(\frac{ln(\frac{r}{r_0})}{r^2}\right)}{dr}$$

$$\rho_M = -\frac{rv^2}{4\pi G}\left(\frac{1}{r^3} - 2\frac{ln(\frac{r}{r_0})}{r^3}\right)$$

Nous obtenons ci-dessous la distribution de la masse baryonique dans la région plate de la courbe de rotation de la galaxie en fonction de la distance radiale r :

$$\rho_M = \frac{v^2}{4\pi G}\left(\frac{2ln(\frac{r}{r_0}) - 1}{r^2}\right)$$

Il nous reste maintenant à déterminer le rayon caractéristique r_0.

b) Expression du rayon caractéristique r0

Modélisons le disque de la galaxie spirale par un anneau de rayon intérieur Ri, de rayon extérieur R_D et d'épaisseur h.

La densité de matière sur un point situé à la frontière du rayon intérieur Ri est nulle. Nous avons donc la condition limite ci-dessous :

$$\rho_M(Ri) = \frac{v^2}{4\pi G}\left(\frac{2ln(\frac{Ri}{r_0}) - 1}{Ri^2}\right) = 0$$

Soit,

$$2ln(\frac{Ri}{r_0}) - 1 = 0$$

$$ln(\frac{Ri}{r_0}) = \frac{1}{2}$$

$$ln(\frac{r_0}{Ri}) = -\frac{1}{2}$$

Par conséquent le rayon caractéristique r_0 nous est donné par la relation suivante :

$$r_0 = Ri.e^{-\frac{1}{2}}$$

On vérifie que $r > r_0$ de sorte à s'assurer que la densité spatiale est négative. En effet, puisque la distance radiale r est supérieure à Ri, cela implique que r est également supérieur à $Ri.e^{-\frac{1}{2}}$, et comme $r_0 = Ri.e^{-\frac{1}{2}}$ alors $r > r_0$.

Après avoir déterminé le rayon caractéristique r_0, nous pouvons désormais définir entièrement la densité spatiale et la distribution de la masse baryonique dans le disque de la galaxie.

c) Densité spatiale et répartition de la matière du disque galactique

Injectons alors l'expression du rayon caractéristique r_0 dans la densité spatiale :

$$\rho_E(r) = -\frac{3v^2}{4\pi G}\frac{ln(\frac{r}{r_0})}{r^2}$$

Donc

$$\rho_E(r) = -\frac{3v^2}{4\pi G}\frac{ln\left(\frac{r}{Ri.e^{-\frac{1}{2}}}\right)}{r^2}$$

L'expression de la densité spatiale du disque de la galaxie en fonction de la position radiale r et du rayon intérieur Ri du disque est alors :

$$\rho_E(r) = -\frac{3v^2}{4\pi G}\frac{ln\left(\frac{r}{Ri}\right) + \frac{1}{2}}{r^2}$$

De manière similaire, nous exprimons la répartition de la masse ordinaire $\rho_M = \frac{v^2}{4\pi G}\left(\frac{2ln(\frac{r}{r_0})-1}{r^2}\right)$ en y injectant l'expression de r_0 :

$$\rho_M = \frac{v^2}{4\pi G}\left(\frac{2ln\left(\frac{r}{Ri.e^{-\frac{1}{2}}}\right) - 1}{r^2}\right)$$

Soit,

$$\rho_M = \frac{v^2}{4\pi G}\left(\frac{2\left(ln\left(\frac{r}{Ri}\right) + \frac{1}{2}\right) - 1}{r^2}\right)$$

$$\rho_M = \frac{v^2}{4\pi G}\left(\frac{2ln\left(\frac{r}{Ri}\right)}{r^2}\right)$$

L'expression de la distribution de masse baryonique du disque de la galaxie en fonction de la position radiale et du rayon intérieur du disque est alors :

$$\rho_M = \frac{v^2}{2\pi G}\frac{ln\left(\frac{r}{Ri}\right)}{r^2}$$

Étant donné que r est supérieur à Ri, on vérifie que $\rho_M > 0$. Maintenant que nous avons défini intégralement la densité de la matière, nous pouvons déterminer la masse totale du disque de la galaxie.

d) Masse ordinaire du disque galactique

Intégrons la masse volumique ρ_M du rayon Ri jusqu'à r afin d'obtenir la masse du disque de la galaxie spirale $M_D(r)$ en fonction de la position radiale r. Pour rappel, le disque de la galaxie est modélisé par un anneau de rayon intérieur Ri, de rayon extérieur R_D et d'épaisseur h. Ainsi, la masse du disque galactique est donnée par l'intégrale suivante :

$$M_D(r) = \int_{Ri}^{r} \rho_M(r) 2\pi rhdr$$

En insérant l'expression de la densité de masse précédemment obtenue, nous obtenons :

$$M_D(r) = \int_{Ri}^{r} \frac{v^2}{2\pi G}\frac{ln\left(\frac{r}{Ri}\right)}{r^2} 2\pi rhdr$$

La vitesse v de rotation et l'épaisseur h du disque galactique sont supposées constantes, ainsi :

$$M_D(r) = \frac{v^2 h}{G} \int_{Ri}^{r} \frac{ln\left(\frac{r}{Ri}\right)}{r} dr$$

Exprimée avec la primitive, cette expression devient :

$$M_D(r) = \frac{v^2 h}{G} \left(\left[\frac{ln^2\left(\frac{r}{Ri}\right)}{2} \right]_{Ri}^{r} \right)$$

La masse du disque de la galaxie en fonction de la distance radiale nous est alors donnée par :

$$M_D(r) = \frac{v^2 h}{2G} ln^2\left(\frac{r}{Ri}\right)$$

Cette expression nous permettra de déterminer l'équation de la vitesse v correspondant à la région plate de la courbe de rotation de la galaxie.

e) Expression de la vitesse de rotation du disque galactique

Notons M_D la masse totale du disque de la galaxie, alors $M_D(R_D) = M_D$.

Par conséquent,

$$M_D = \frac{v^2 h}{2G} ln^2\left(\frac{R_D}{Ri}\right)$$

Isolons à présent la vitesse de rotation v,

$$v^2 = \frac{2GM_D}{h.\, ln^2\left(\frac{R_D}{Ri}\right)}$$

Ainsi la vitesse v de rotation du disque de la galaxie est donnée par la relation ci-dessous :

$$v = \sqrt{\frac{2GM_D}{h.\, ln^2\left(\frac{R_D}{Ri}\right)}}$$

Bien que nos vitesses de rotation théoriques des galaxies spirales soient proches de celles observées, cette relation est-elle vraiment correcte ? Pour évaluer la pertinence de cette expression, calculons l'accélération universelle correspondante :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G \frac{dr^2\rho_E(r,t)}{dr} \text{ et } \rho_E(r,t) = -\frac{3v^2}{4\pi G}\frac{ln(\frac{r}{r_0})}{r^2}$$

Par conséquent :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G \frac{d\left(r^2\left(-\frac{3v^2}{4\pi G}\frac{ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{r^2}\right)\right)}{dr}$$

En simplifiant l'accélération universelle, je trouve $a_U = \frac{v^2}{r}$.

On remarque que cette accélération est positive, ce qui implique que les corps présents dans le disque de la galaxie subissent une « force centrifuge ». Ce qui semble être en contradiction avec l'observation.

Essayons de formuler une nouvelle expression pour la densité spatiale en recherchant cette fois une relation de type centripète. Pour cela, je vais considérer une dépendance en $\frac{1}{r^2}$, mais en ajustant le numérateur afin d'obtenir une dérivée qui change de signe. La fonction exponentielle semble la plus appropriée, d'autant plus qu'elle est couramment utilisée dans diverses modélisations cosmologiques.

Chapitre 7 : Vitesse de rotation pour l'ensemble de la galaxie (Bulbe et disque)

Dans ce chapitre, nous combinons deux densités spatiales : l'une correspondant au disque de la galaxie, qui est arbitraire, et l'autre pour le bulbe galactique. Cette approche nous permettra de calculer l'accélération universelle et de formuler une expression de la vitesse de rotation en fonction de la distance radiale pour l'ensemble de la galaxie spirale.

La densité spatiale que je propose pour modéliser le disque d'une galaxie spirale est la suivante :

$$\rho_E = -\rho_0 {r_0}^2 \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r^2} \ avec\ r > 0$$

La masse volumique caractéristique ρ_0 et le rayon caractéristique r_0 sont des constantes strictement positives que je déterminerai ultérieurement.

Dans ce chapitre, le disque de la galaxie sera modélisé comme précédemment, par un anneau de rayon intérieur Ri , de rayon extérieur R_D et d'épaisseur h. La distribution de la densité est supposée isotrope non homogène et h constante.

Commençons par exprimer l'accélération universelle associée à cette densité spatiale.

a) Accélération universelle

Injectons cette expression de densité spatiale dans l'accélération ci-dessous :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G \frac{dr^2 \rho_E}{dr}$$

Nous obtenons :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G \frac{d\left(r^2\left(-\rho_0 {r_0}^2 \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r^2}\right)\right)}{dr}$$

Les paramètres ρ_0 et r_0 étant constants, l'accélération pour $r \neq 0$ devient :

$$a_U = \frac{4}{3}\pi G \rho_0 {r_0}^2 \frac{de^{-\frac{r}{r_0}}}{dr}$$

Soit,

$$a_U = \frac{4}{3}\pi G \rho_0 {r_0}^2 \left(-\frac{1}{r_0}\right) e^{-\frac{r}{r_0}}$$

L'accélération universelle d'un corps situé dans le disque galactique est donnée par la relation suivante :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G \rho_0 r_0 e^{-\frac{r}{r_0}}$$

Il est important de souligner que, cette fois, l'accélération est négative, entraînant ainsi une force centripète exercée sur le système, ce qui était notre objectif. Vous remarquerez que cette accélération ne dépend pas du temps. Pour prendre en compte son évolution, nous pourrions introduire une masse volumique et un rayon caractéristique ρ_0 et r_0 qui dépendent du temps.

Déterminons à présent la densité de matière baryonique

b) Densité de masse baryonique

La répartition de la masse ordinaire dans la galaxie peut être déterminée à partir de la densité spatiale en utilisant la relation suivante : $\rho_M(r,t) = \frac{r}{3}\frac{d\rho_E(r,t)}{dr}$.

Injectons l'expression de la densité spatiale dans cette équation, nous obtenons :

$$\rho_M(r,t) = \frac{r}{3}\frac{d\left(-\rho_0 {r_0}^2 \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r^2}\right)}{dr}$$

Détaillons les étapes du calcul :

$$\rho_M(r,t) = -\rho_0 {r_0}^2 \frac{r}{3}\frac{d\left(\frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r^2}\right)}{dr}$$

Après avoir dérivé, nous obtenons :

$$\rho_M(r,t) = -\rho_0 {r_0}^2 \frac{r}{3}\left(-2\frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r^3} - \frac{1}{r_0}\frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r^2}\right)$$

Soit,

$$\rho_M(r,t) = \rho_0 {r_0}^2 \frac{r}{3} \frac{1}{r^2} e^{-\frac{r}{r_0}} \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{r_0}\right)$$

$$\rho_M(r,t) = \frac{1}{3} \rho_0 {r_0}^2 \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r} \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{r_0}\right)$$

Après réécriture, nous obtenons comme masse volumique du disque, en fonction de la position radiale r, la relation ci-dessous :

$$\rho_M(r,t) = \frac{\rho_0}{3} \left(2 + \frac{r}{r_0}\right) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 e^{-\frac{r}{r_0}}$$

Comme pour l'accélération universelle, la masse volumique ρ_M ne dépend pas du temps. Nous pouvons prendre en compte son évolution en considérant une fonction ρ_0 et r_0 qui dépendent du temps.

À partir de cette distribution de matière, nous pouvons exprimer la masse totale du disque de la galaxie en fonction du rayon radiale r.

c) Masse totale du disque galactique

Pour obtenir la masse totale M_D du disque de la galaxie, intégrons la masse volumique entre le rayon intérieur et le rayon extérieur du disque.

$$M_D = \int_{Ri}^{R_D} \rho_M(r,t) 2\pi r h \, dr$$

Détaillons les étapes du calcul :

$$M_D = \int_{Ri}^{R_D} \frac{\rho_0}{3} \left(2 + \frac{r}{r_0}\right) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 e^{-\frac{r}{r_0}} 2\pi r h dr$$

$$M_D = \frac{2\pi}{3} h \rho_0 {r_0}^2 \int_{Ri}^{R_D} \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{r_0}\right) e^{-\frac{r}{r_0}} dr$$

$$M_D = \frac{2\pi}{3} h \rho_0 {r_0}^2 \int_{Ri}^{R_D} \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{r_0}\right) e^{-\frac{r}{r_0}} \, dr$$

Posons $I = \int_{Ri}^{R_D} \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{r_0}\right) e^{-\frac{r}{r_0}}\ dr$ et faisons un changement de variable pour calculer cette intégrale en posant $u = \frac{r}{r_0}$.

Commençons par réorganiser les termes de l'intégrale de manière plus explicite :

$$I = \int_{Ri}^{R_D} e^{-\frac{r}{r_0}} \left(\frac{2}{\frac{r}{r_0}} + 1\right) d\frac{r}{r_0}$$

Posons $u = \frac{r}{r_0}$, alors :

$$I = \int_{\frac{Ri}{r_0}}^{\frac{R_D}{r_0}} e^{-u} \left(\frac{2}{u} + 1\right) du$$

Décomposons cette intégrale en deux parties, nous obtenons :

$$I = 2\int_{\frac{Ri}{r_0}}^{\frac{R_D}{r_0}} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_{\frac{Ri}{r_0}}^{\frac{R_D}{r_0}} e^{-u} du$$

La fonction exponentielle intégrale $E_i(x)$ est définie telle que :

$$E_i(x) = -\int_{-x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Soit $b > a$, alors :

$$\int_{a}^{b} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{-\infty}^{b} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{-\infty}^{a} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Or,

$$E_i(-x) = -\int_{x}^{-\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Donc,

$$\int_{-\infty}^{b} \frac{e^{-t}}{t} dt = E_i(-b) \; et \; \int_{-\infty}^{a} \frac{e^{-t}}{t} dt = E_i(-a)$$

Ainsi,

$$\int_{a}^{b} \frac{e^{-t}}{t} dt = E_i(-b) - E_i(-a)$$

Cette relation va nous permettre d'exprimer l'intégrale I en fonction de l'exponentielle intégrale :

$$I = 2[Ei(-u)]_{\frac{Ri}{r_0}}^{\frac{R_D}{r_0}} + [-e^{-u}]_{\frac{Ri}{r_0}}^{\frac{R_D}{r_0}}$$

Ainsi, nous obtenons l'intégrale I ci-dessous :

$$I = 2\left(Ei\left(-\frac{R_D}{r_0}\right) - Ei\left(-\frac{R_i}{r_0}\right)\right) - e^{-\frac{R_D}{r_0}} + e^{-\frac{Ri}{r_0}}$$

Par conséquent, la masse totale du disque d'une galaxie spirale est :

$$M_D = \frac{2\pi}{3} h\rho_0 {r_0}^2 \left(2Ei\left(-\frac{R_D}{r_0}\right) - 2Ei\left(-\frac{Ri}{r_0}\right) - e^{-\frac{R_D}{r_0}} + e^{-\frac{Ri}{r_0}}\right)$$

Nous pouvons désormais déterminer la vitesse de rotation de la galaxie.

d) Expression de la vitesse de rotation pour l'ensemble de la galaxie

Le principe de superposition présenté dans le livre *Les mystères de l'espace* s'applique à la densité spatiale. Soit ρ_E^B la contribution de la densité spatiale engendrée par le bulbe de la galaxie spirale et ρ_E^D celle due au disque de la galaxie spirale, l'accélération universelle est alors exprimée par la relation suivante :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G \frac{d\mathrm{r}^2(\rho_E^B + \rho_E^D)}{dr}$$

En développant cette expression, nous obtenons une décomposition en deux termes : l'un provenant du bulbe de la galaxie et l'autre de son disque :

$$a_U = -\frac{4}{3}\pi G \frac{dr^2 \rho_E^B}{dr} - \frac{4}{3}\pi G \frac{dr^2 \rho_E^D}{dr}$$

Posons : $a_U^B = -\frac{4}{3}\pi G \frac{dr^2 \rho_E^B}{dr}$ et $a_U^D = -\frac{4}{3}\pi G \frac{dr^2 \rho_E^D}{dr}$, nous obtenons :

$$a_U = a_U^B + a_U^D$$

Nous avons déterminé a_U^D précédemment, $a_U = -\frac{4}{3}\pi G \rho_0 r_0 e^{-\frac{r}{r_0}}$.

Nous poserons par la suite, à titre d'illustration et de manière arbitraire, $r_0 = R_D$. Ainsi, nous pouvons exprimer la constante ρ_0 à partir de l'expression de la masse totale du disque. Nous obtenons ainsi :

$$\rho_0(r_0 = R_D) = \frac{M_D}{\frac{2\pi}{3} h {r_0}^2 \left(2Ei\left(-\frac{R_D}{r_0}\right) - 2Ei\left(-\frac{Ri}{r_0}\right) - e^{-\frac{R_D}{r_0}} + e^{-\frac{Ri}{r_0}}\right)}$$

Notons $\rho_0 = \rho_D$, par conséquent :

$$\rho_0 = \rho_D = \frac{M_D}{\frac{2\pi}{3} h {R_D}^2 \left(2Ei(-1) - 2Ei\left(-\frac{Ri}{R_D}\right) - e^{-1} + e^{-\frac{Ri}{R_D}}\right)}$$

Substituions r_0 par R_D et ρ_0 par ρ_D dans l'accélération $a_U = \frac{4}{3}\pi G \rho_0 r_0 e^{-\frac{r}{r_0}}$, nous obtenons :

$$a_U^D = -\frac{4}{3}\pi G \frac{M_D}{\frac{2\pi}{3} h {R_D}^2 \left(2Ei(-1) - 2Ei\left(-\frac{Ri}{R_D}\right) - e^{-1} + e^{-\frac{Ri}{R_D}}\right)} R_D e^{-\frac{r}{R_D}}$$

Soit,

$$a_U^D = -\frac{2GM_D}{hR_D \left(2Ei(-1) - e^{-1} - 2Ei\left(-\frac{Ri}{R_D}\right) + e^{-\frac{Ri}{R_D}}\right)} e^{-\frac{r}{R_D}}$$

$a_U^D < 0$, donc c'est une force centripète, c'est également le cas pour a_U^B.

Nous savons que l'accélération exercée par le bulbe est :

$$a_U^B = -\frac{GM_B(r)}{r^2}$$

Ainsi, la forme globale de l'accélération de la galaxie est donnée par l'expression ci-dessous :

$$a_U = -\frac{GM_B(r)}{r^2} - 1|_{[Ri,R_D]}(r)\frac{2GM_D}{hR_D\left(2Ei(-1) - e^{-1} + e^{-\frac{Ri}{R_D}} - 2Ei\left(-\frac{Ri}{R_D}\right)\right)}e^{-\frac{r}{R_D}}$$

Avec $1|_{[Ri,R_D]}(r)$ la fonction indicatrice qui vaut 1 quand $Ri \leq r \leq R_D$ et 0 sinon, et $M_B(r)$ la masse du bulbe à l'intérieur du rayon r.

Nous pouvons désormais déterminer la vitesse de rotation d'une galaxie spirale en fonction de la distance radiale.

$$-\frac{v^2}{r} = -\frac{GM_B(r)}{r^2} - 1|_{[Ri,R_D]}(r)\frac{2GM_D}{hR_D\left(2Ei(-1) - e^{-1} + e^{-\frac{Ri}{R_D}} - 2Ei\left(-\frac{Ri}{R_D}\right)\right)}e^{-\frac{r}{R_D}}$$

$$v^2 = \frac{GM_B(r)}{r} + 1|_{[Ri,R_D]}(r)\frac{2GM_D}{hR_D\left(2Ei(-1) - e^{-1} + e^{-\frac{Ri}{R_D}} - 2Ei\left(-\frac{Ri}{R_D}\right)\right)}re^{-\frac{r}{R_D}}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_B(r)}{r} + 1|_{[Ri,R_D]}(r)\frac{2GM_D}{hR_D\left(2Ei(-1) - e^{-1} + e^{-\frac{Ri}{R_D}} - 2Ei\left(-\frac{Ri}{R_D}\right)\right)}re^{-\frac{r}{R_D}}}$$

e) Synthèse des résultats

On fixe r_0, et on en déduit ρ_0 :

$$\rho_0 = \frac{M_D}{\frac{2\pi}{3}h{r_0}^2\left(2Ei\left(-\frac{R_D}{r_0}\right) - 2Ei\left(-\frac{Ri}{r_0}\right) - e^{-\frac{R_D}{r_0}} + e^{-\frac{Ri}{r_0}}\right)}$$

Avec $r_0 = R_D$, nous obtenons $\rho_0 = \rho_D$:

$$\rho_D = \frac{M_D}{\frac{2\pi}{3}h{R_D}^2\left(2Ei(-1) - 2Ei\left(-\frac{Ri}{R_D}\right) - e^{-1} + e^{-\frac{Ri}{R_D}}\right)}$$

$$\rho_E = -\rho_D \frac{e^{-\frac{r}{R_D}}}{\left(\frac{r}{R_D}\right)^2}$$

$$\rho_M(r,t) = \frac{\rho_D}{3} \frac{\left(2 + \frac{r}{R_D}\right)}{\left(\frac{r}{R_D}\right)^2} e^{-\frac{r}{R_D}}$$

$$a_U = -\frac{GM_B(r)}{r^2} - 1|_{[Ri,R_D]}(r) \frac{4}{3} \pi G \rho_D R_D e^{-\frac{r}{R_D}}$$

Conclusion

Cette exploration plus approfondie de la théorie spatiale propose une nouvelle perspective sur l'Univers, une perspective qui pourrait remettre en question certains des fondements les plus établis de la cosmologie moderne. La théorie spatiale, avec son concept central de densité spatiale, s'efforce de remplacer des notions telles que l'énergie noire et la matière noire, qui sont actuellement employées pour expliquer des phénomènes comme l'expansion accélérée de l'Univers ou les courbes de rotation des galaxies.

La théorie spatiale avance l'idée que l'espace et la matière sont intrinsèquement liés, formant une entité unique et indissociable qui gouverne la dynamique de l'Univers. Ce concept de densité spatiale, qui serait une forme d'énergie omniprésente, pourrait offrir une explication alternative aux observations cosmologiques sans recourir à des hypothèses non encore détectées, comme l'énergie sombre et la matière noire.

Dans les différents chapitres de ce livre, je démontre comment cette densité spatiale pourrait être utilisée pour expliquer l'expansion de l'Univers, en proposant des modèles mathématiques robustes qui suggèrent une nouvelle manière de comprendre cette expansion. De même, en étudiant les courbes de rotation des galaxies, je montre que cette théorie pourrait offrir des explications cohérentes à des observations qui, jusque-là, défiaient les modèles traditionnels.

Cependant, il est crucial de noter que cette théorie, bien que prometteuse, reste encore en phase de développement. Elle nécessite des validations expérimentales rigoureuses et une confrontation directe avec les données observables pour être pleinement acceptée au sein de la communauté scientifique. Néanmoins, elle ouvre des perspectives fascinantes qui pourraient non seulement résoudre certaines énigmes actuelles, mais aussi redéfinir les contours mêmes de la cosmologie.

En somme, la *densité spatiale* n'est pas simplement une nouvelle notion parmi d'autres ; c'est une véritable invitation à repenser la manière dont nous concevons l'Univers. Je pose ici les bases d'une cosmologie potentiellement révolutionnaire, qui pourrait, si elle est confirmée, bouleverser notre compréhension de la structure et de la dynamique du cosmos.

À bientôt pour de nouvelles aventures afin de construire ensemble la théorie ultime de la physique.

Edition numérique

Version « brouillon »

Éditions Deux Plumes
2, allée Saint-John Perse, 95120 Ermont

Impression : Imprimer Mon Livre
1140, rue Ampère, 13290 Aix-en-Provence
https://www.imprimer-mon-livre.fr

Distribution et diffusion : La SODDIL
7, rue Henri François, 77330 Ozoir-la-Ferrière
http://www.soddil.com

Dépôt légal : Octobre 2024

Imprimé en France