Sur le système de congruence $\begin{cases} x \equiv a_1[b_1] \\ \alpha x \equiv a_2[b_2] \end{cases}$ tel que $\alpha b_1 \equiv \pm\frac{10}{p}[b_2]$ avec $p \in \{1, 2, 5, 10\}$

MOHAMED Algoni
mohamedalgoni99@gmail.com

Résumé

On propose une méthode pour résoudre le système d'équation modulaire suivant :

$$(E) : \begin{cases} x \equiv a_1[b_1] \\ \alpha x \equiv a_2[b_2] \end{cases}$$

avec α, a_1, a_2, b_1 et $b_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $a_2 \geq \alpha a_1$ et $\alpha b_1 \equiv \pm\frac{10}{p}[b_2]$ avec $p \in \{1, 2, 5, 10\}$

Cette méthode s'appuie sur notre dernier travail [Alg24]" ***Sur l'équation diophantienne*** $\boldsymbol{ax+by=c}$ ***avec*** $\boldsymbol{a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]}$ ***et*** $\boldsymbol{p \in \{1,2,5,10\}}$". Elle repose donc sur l'analyse des unités de produits pb_2 et $p(a_2 - \alpha a_1)$, que nous désignons respectivement par u et u'. Elle se compose en deux étapes principales : La vérification de l'existence des solutions qui consiste à vérifier la divisibilité du PGCD de 10 et u' par le PGCD de 10 et u. Et la détermination de la solution exprimée sous la forme :

$$x = a_1 \pm pb_1\left(\frac{a_2 - \alpha a_1 + b_2(-1)^n uu'}{10}\right) \pm pb_1b_2k$$

$$\text{avec } n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Des exemples concrets sont fournis pour illustrer l'application de cette méthode.

Principales notations

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$	:	respectivement ensembles des entiers naturels et relatifs.
α, a_1, a_2, b_1 et b_2	:	entiers naturels non nuls tel que $a_2 \geq \alpha a_1$
a, b et c	:	substituants respectifs de αb_1, b_2 et $(a_2 - \alpha a_1)$.
p	:	élément de $\{1, 2, 5, 10\}$.
u	:	unité du produit pb_2.
u'	:	unité du produit $p(a_2 - \alpha a_1)$.
n	:	le reste de la division euclidienne par 3 du reste de la division euclidienne de u par 5 .
ε	:	entier multiple de 10 congru à $p(a_2 - \alpha a_1)$ modulo pb_2 .
k_1, k_2, k et q'	:	entiers relatifs.
$10 \wedge u$	:	PGCD de 10 et u.
$10 \wedge u'$	:	PGCD de 10 et u'.
$\lfloor\ \rfloor$	:	Fonction partie entière

Les équations diophantiennes sont un sujet d'intérêt majeur en mathématiques, trouvant des applications dans divers domaines allant de la théorie des nombres à la cryptographie. Dans ce document, nous nous intéressons particulièrement au système suivant :

$$(E) : \begin{cases} x \equiv a_1[b_1] \\ \alpha x \equiv a_2[b_2] \end{cases}$$

avec α, a_1, a_2, b_1 et $b_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $a_2 \geq \alpha a_1$ et $\alpha b_1 \equiv \pm\dfrac{10}{p}[b_2]$ avec $p \in \{1, 2, 5, 10\}$.

Classiquement, ce système se résout en deux étapes :

— Étape 1 : *Vérification de l'existence des solutions*
Pour vérifier l'existence des solutions, on détermine le PGCD de b_1 et b_2 à l'aide de l'algorithme d'Euclide. Si ce PGCD divise $(a_2 - \alpha a_1)$, alors le est résolvable, sinon il ne l'est pas.

— Étape 2 : *Détermination de la solution de l'équation*
Une fois l'existence confirmée, le système est rapportée à une équation diophantienne :

$$\begin{cases} x \equiv a_1[b_1] \\ \alpha x \equiv a_2[b_2] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha x \equiv \alpha a_1[\alpha b_1] \\ \alpha x \equiv a_2[b_2] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha x = \alpha a_1 + \alpha b_1 k_1 = a_2 + b_2 k_2$$

$$\Rightarrow \alpha a_1 + \alpha b_1 k_1 = a_2 + b_2 k_2$$

$$\Rightarrow \alpha b_1 k_1 - b_2 k_2 = a_2 - \alpha a_1$$

La solution de cette équation est de la forme :

$$x = k_1' + k \cdot \frac{b_2}{\alpha b_1 \wedge b_2}, \quad y = k_2' - k \cdot \frac{\alpha b_1}{\alpha b_1 \wedge b}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Et la solution du système est

$$x = a_1 + b_1 k_1' + k \cdot \frac{b_1 b_2}{\alpha b_1 \wedge b_2}$$

Il existe cependant plusieurs autres méthodes efficaces comme la célèbre méthodes des ***restes chinois***.

Dans ce document, nous introduisons une nouvelle méthode pour résoudre cette équation. Cette méthode est structurée en deux étapes très simples, tenant uniquement compte des unité respectives des produits pb_2 et $p(a_2 - \alpha a_1)$ que nous désignerons par u et u' :

En effet, le système se rapporte à l'équation diophantienne $\alpha b_1 k_1 - b_2 k_2 = a_2 - \alpha a_1$.

Posons $\alpha b_1 = a$, $b_2 = b$, $a_2 - \alpha a_1 = c$, $k_1 = X$ et $-k_2 = Y$.

L'équation devient $aX + bY = c$

De plus $\alpha b_1 \equiv \pm\frac{10}{p}[b_2] \Rightarrow a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$.

Nous nous retrouvons ainsi avec une équation diophantienne définie telle que :

$$aX + bY = c \quad \text{avec } a \equiv \pm\frac{10}{p}[b] \text{ et } p \in \{1, 2, 5, 10\}$$

Nous avons déjà étudié cette équation dans [Alg24] ***Sur l'équation diophantienne ax+by=c avec*** $\boldsymbol{a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]}$ ***et*** $\boldsymbol{p \in \{1, 2, 5, 10\}}$. En effet cette équation se résout en deux principales étapes :

— Étape 1 : *Vérification de l'existence des solutions*
Pour vérifier l'existence des solutions, on détermine $10 \wedge u$ et $10 \wedge u'$. Si $10 \wedge u$ divise $10 \wedge u'$, alors l'équation admet des solutions, sinon elle n'admet pas des solution.

Autrement dit :

$$\text{L'équation admet des solution si et seulement si } 10 \wedge u' \equiv 0[10 \wedge u]$$

— Étape 2 : *Détermination de la solution de l'équation*
La solution de cette équation est sous la forme :

$$X = \pm(\frac{\varepsilon}{10} + pbk), \quad Y = \frac{c \pm a(-\frac{\varepsilon}{10})}{b} \pm a(-pk), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{où} \quad \varepsilon = pc + pb(\frac{10}{10 \wedge u}q' + (-1)^n uu') \quad \text{avec } n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor \quad \text{et} \quad q' \in \mathbb{Z}$$

Prenons $q' = 0$

$$\Rightarrow \varepsilon = pc + (-1)^n pbuu'$$

$$\Rightarrow \varepsilon = p(c + (-1)^n buu')$$

$$\Rightarrow X = \pm p(\frac{c + (-1)^n buu'}{10}) \pm pbk$$

$$\Rightarrow k_1 = X = \pm p(\frac{a_2 - \alpha a_1 + (-1)^n b_2 uu'}{10}) \pm pb_2 k$$

$$\Rightarrow k_1 = \pm p(\frac{a_2 - \alpha a_1 + (-1)^n b_2 uu'}{10}) \pm pb_2 k$$

Or $x = a_1 + b_1 k_1$.

Alors

$$x = a_1 + b_1(\pm p(\frac{a_2 - \alpha a_1 + (-1)^n b_2 uu'}{10}) \pm pb_2 k)$$

$$\Rightarrow x = a_1 \pm pb_1(\frac{a_2 - \alpha a_1 + (-1)^n b_2 uu'}{10}) \pm pb_1 b_2 k$$

Ainsi la solution du système est :

$$\boxed{\begin{array}{c} x = a_1 \pm pb_1(\dfrac{a_2 - \alpha a_1 + (-1)^n b_2 uu'}{10}) \pm pb_1 b_2 k \\ \text{avec } n = u - 5\lfloor \dfrac{u}{5} \rfloor - 3\lfloor \dfrac{u - 5\lfloor \frac{u}{5} \rfloor}{3} \rfloor \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

1 Exemples de résolution

$$(E)_1 : \begin{cases} x \equiv 11[77] \\ 5x \equiv 68[129] \end{cases} \qquad (E)_2 : \begin{cases} x \equiv 2[5] \\ x \equiv 11[23] \end{cases}$$

$$(E)_3 : \begin{cases} x \equiv 5[15] \\ 9x \equiv 48[137] \end{cases} \qquad (E)_4 : \begin{cases} x \equiv 5[73] \\ 10x \equiv 68[144] \end{cases}$$

— Pour le système $(E)_1$.

$$(E)_1 : \begin{cases} x \equiv 11[77] \\ 5x \equiv 68[129] \end{cases}$$

$$5 \times 77 = 385 \equiv -2[128], \quad \Rightarrow p = 5$$

$$pb_2 = 5 \times 129 = 645 \Rightarrow u = 5 \quad \text{et} \quad p(a_2 - \alpha a_1) = 5(68 - 5 \times 11) = 65 \Rightarrow u' = 5$$

Comme $10 \wedge u = 5$ divise $10 \wedge u' = 5$, alors le système $(E)_1$ admet des solutions.

Cette solution est :

$$x = a_1 - pb_1(\frac{a_2 - \alpha a_1 + (-1)^n b_2 uu'}{10}) - pb_1 b_2 k \quad \text{avec } n = u - 5\lfloor \frac{u}{5} \rfloor - 3\lfloor \frac{u - 5\lfloor \frac{u}{5} \rfloor}{3} \rfloor \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Cherchons n :

$$n = u - 5\lfloor \frac{u}{5} \rfloor - 3\lfloor \frac{u - 5\lfloor \frac{u}{5} \rfloor}{3} \rfloor = 5 - 5\lfloor \frac{5}{5} \rfloor - 3\lfloor \frac{5 - 5\lfloor \frac{5}{5} \rfloor}{3} \rfloor = 0$$

$$x = a_1 - pb_1(\frac{a_2 - \alpha a_1 + b_2 uu'}{10}) - pb_1 b_2 k$$

$$x = 11 - 385(\frac{68 - 55 + 3225}{10}) - 49665k$$

$$x = 11 - 385(\frac{68 - 55 + 3225}{10}) - 49665k$$

$$x = -124652 - 49665k$$

$$x \equiv -124652[49665]$$

$$x \equiv 24343[49665]$$

$$\boxed{S = \{24343 + 49665k\}, k \in \mathbb{Z}}$$

— Pour le système $(E)_2$.

$$(E)_2 : \begin{cases} x \equiv 2[5] \\ x \equiv 11[23] \end{cases}$$

$$5 \equiv 5[23], \quad \Rightarrow p = 2$$

$$pb_2 = 2 \times 23 = 46 \Rightarrow u = 6 \quad \text{et} \quad p(a_2 - \alpha a_1) = 2(11-2) = 18 \Rightarrow u' = 8$$

Comme $10 \wedge u = 2$ divise $10 \wedge u' = 2$, alors le système $(E)_2$ admet des solutions.

Cette solution est :

$$x = a_1 + pb_1\left(\frac{a_2 - \alpha a_1 + (-1)^n b_2 uu'}{10}\right) + pb_1 b_2 k \quad \text{avec } n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Cherchons n :

$$n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 6 - 5\lfloor\frac{6}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{6 - 5\lfloor\frac{6}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 1$$

$$x = a_1 + pb_1\left(\frac{a_2 - \alpha a_1 - b_2 uu'}{10}\right) + pb_1 b_2 k$$

$$x = 2 + 10\left(\frac{11 - 2 - 1104}{10}\right) + 230k$$

$$x = 2 - 1100 + 230k$$

$$x = -1093 + 230k$$

$$x \equiv -1093[230]$$

$$x \equiv 57[230]$$

$$\boxed{S = \{57 + 230k\}, k \in \mathbb{Z}}$$

— Pour le système $(E)_3$.

$$(E)_3 : \begin{cases} x \equiv 5[15] \\ 9x \equiv 48[137] \end{cases}$$

$$9 \times 15 = 135 \equiv -2[137], \quad \Rightarrow p = 5$$

$$pb_2 = 5 \times 137 = 685 \Rightarrow u = 5 \quad \text{et} \quad p(a_2 - \alpha a_1) = 5(48 - 9 \times 5) = 15 \Rightarrow u' = 5$$

Comme $10 \wedge u = 5$ divise $10 \wedge u' = 5$, alors le système $(E)_3$ admet des solutions.

Cette solution est :

$$x = a_1 - pb_1\left(\frac{a_2 - \alpha a_1 + (-1)^n b_2 uu'}{10}\right) - pb_1 b_2 k \quad \text{avec } n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Cherchons n :

$$n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 5 - 5\lfloor\frac{5}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{5 - 5\lfloor\frac{5}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 0$$

$$x = a_1 - pb_1\left(\frac{a_2 - \alpha a_1 + b_2 uu'}{10}\right) - pb_1 b_2 k$$

$$x = 5 - 75(\frac{48 - 45 + 3425}{10}) - 10275k$$
$$x = 5 - 25710 - 10275k$$
$$x = -25705 - 10275k$$
$$x \equiv -25705[10275]$$
$$x \equiv 5120[10275]$$

$$\boxed{S = \{5120 + 10275k\}, k \in \mathbb{Z}}$$

— Pour le système $(E)_4$.

$$(E)_4 : \begin{cases} x \equiv 5[73] \\ 10x \equiv 68[144] \end{cases}$$
$$10 \times 73 = 730 \equiv 10[144], \quad \Rightarrow p = 1$$
$$pb_2 = 144 \Rightarrow u = 4 \quad \text{et} \quad p(a_2 - \alpha a_1) = (68 - 50) = 18 \Rightarrow u' = 8$$

Comme $10 \wedge u = 2$ divise $10 \wedge u' = 2$, alors le système $(E)_4$ admet des solutions.

Cette solution est :

$$x = a_1 + pb_1(\frac{a_2 - \alpha a_1 + (-1)^n b_2 uu'}{10}) + pb_1 b_2 k \quad \text{avec } n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Cherchons n :

$$n = u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{u - 5\lfloor\frac{u}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 4 - 5\lfloor\frac{4}{5}\rfloor - 3\lfloor\frac{4 - 5\lfloor\frac{4}{5}\rfloor}{3}\rfloor = 1$$

$$x = a_1 + pb_1(\frac{a_2 - \alpha a_1 - b_2 uu'}{10}) + pb_1 b_2 k$$
$$x = 5 + 73(\frac{68 - 50 - 1104}{10}) + 10512k$$
$$x = 5 - 33507 + 10512k$$
$$x = -33502 + 10512k$$
$$x \equiv -33502[10512]$$
$$x \equiv 8546[10512]$$

$$\boxed{S = \{8546 + 10512k\}, k \in \mathbb{Z}}$$

Références

[Alg24] Mohamed Algoni, *Sur l'équation diophantienne diophantienne $ax + by = c$ avec $a \equiv \pm\frac{10}{p}[b]$ et $p \in \{1, 2, 5, 10\}$*, http://vixra.org/abs/2412.0169?ref=16748650, December 2024.

[Kou17] Dimitris Koukoulopoulos, *Introduction à la théorie des nombres*, 2017, P.116-117 https://dms.umontreal.ca/~koukoulo/documents/notes/theorie_des_nombres.pdf.

[Sup11] MPSI Sup, *Cours de mathématiques*, 2011, P.748-755 http://les.mathematiques.free.fr/pdf/livre.pdf.

[Vin09] Valentin Vinoles, *Cours élémentaire d'arithmétique*, P.17 http://www.maths-mancini.fr/wp-content/uploads/2016/07/cours_arithmetique-ts.pdf.