INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE DE POLYLOGARITHMES DE CARLITZ EN v-ADIQUE

DAVID ADAM ET LAURENT DENIS

Résumé. Dans cet article, nous prouvons deux résultats d'indépendance algébrique en caractéristique finie en une place finie. Nous déterminons toutes les relations algébriques entre les valeurs spéciales de la fonction zêta de Carlitz-Goss. En particulier cela répond à une conjecture énoncée par Chang et Yu en 2007. Dans le second, nous caractérisons l'indépendance algébrique de valeurs de polylogarithmes de Carlitz. Pour ce faire, nous surmontons les restrictions apparues dans la méthode de Mahler développée par la second auteur dans le cadre de la caractéristique finie. Le nouel outil mis en jeu est une généralisation du théorème de Nishioka sur l'indépendance algébrique des valeurs de fonctions mahlériennes. Cela nous met en position de montrer des résultats d'indépendance algébrique que la méthode motivique de Papanikolas ne permet pas encore d'obtenir.

1. Introduction

Soit p un nombre premier, $q = p^f$ $(f \in \mathbb{N}^*)$. Dans les années 1930, le long de plusieurs articles [7, 8, 9], Carlitz a introduit le premier exemple de module de Drinfeld, appelé maintenant *module de Carlitz*. C'est le $\mathbb{F}_q$-morphisme d'algèbre C défini par

$$C : \mathbb{F}_q[T] \to \mathrm{End}(\mathbb{G}_a);\ C_T = T + \tau.$$

Notons Ω le complété d'une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ de $\mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{T}\right)\right)$ pour la topologie induite par la valuation $-\deg$. Il existe une unique fonction entière sur Ω, appelée *exponentielle de Carlitz* et notée $\exp_C$, vérifiant les propriétés suivantes :

$$\text{pour tout } (a,z) \in \mathbb{F}_q[T] \times \Omega,\ C_a(\exp_C(z)) = \exp_C(a.z) \text{ et } \exp_C' = 1.$$

La fonction $\exp_C$ admet un factorisation de Weierstraß de la forme : pour tout $z \in \Omega$, on a

$$\exp_C(z) = \prod_{a \in \mathbb{F}_q[T]} \big(1 - \frac{t}{a\Pi}\big).$$

où $\Pi = \sqrt[q-1]{-T} \prod_{j=1}^{+\infty} (1 - T^{1-q^j})^{-1}$ (pour n'importe quel choix de la racine $(q-1)^{\mathrm{e}}$ de $-T$). L'exponentielle de Carlitz admet une fonction inverse, appelé *logarithme de Carlitz* noté Log_C, qui est défini sur $\{z \in \Omega \mid \deg(z) < \frac{q}{q-1}\}$ par

$$\mathrm{Log}_C(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{q^k}}{L_k},$$

où on a posé $L_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $L_k = \prod_{j=1}^{k} [j]$ avec $[j] = T^{q^j} - T$ $(j \in \mathbb{N}^*)$. Wade prouva un analogue du théorème de Hermite-Lindemann pour la fonction $\exp_C$ (voir [30]). Il fut plus tard capable de montrer un analogue du théorème de Gelfond-Schneider [31]. Dans les années 1990, utilisant la notion de T-modules introduite par Anderson, Yu a prouvé un analogue du théorème de Baker sur l'indépendance linéaire des logarithmes de Carlitz, d'abord dans le cas séparable (voir [33]) puis le cas général [34]. Le second auteur montra indépendamment le cas général en se basant sur le cas séparable obtenu

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11J81, 11T55.
Key words and phrases. Transcendance, caractéristique finie.

par Yu [13]. Pour un entier naturel non nul, définissons le n^e *polylogarithme de Carlitz* (ou *polylogarithme de poids* n) noté $\mathrm{Log}_{n,\mathcal{C}}$ par : pour tout $z \in \Omega$ avec $\deg(z) < \frac{nq}{q-1}$

$$\mathrm{Log}_{n,\mathcal{C}}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{nk} \frac{z^{q^k}}{L_k^n}.$$

En 2004, le second auteur a montré l'indépendance algébrique des valeurs en des éléments de $\mathbb{F}_q(T)$ de logarithmes $\mathbb{F}_q(T)$-linéairement indépendants [16]. En 2005, Papanikolas a réussi à prouver un analogue pour les T-motifs d'Anderson de la conjecture de Grothendick sur l'indépendance algébriques des valeurs de périodes. Papanikolas construit un T-motif dont les peéridoes sont les valeurs des logarithmes de Carlitz en des éléments de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$. Appliquant l'anologue de la conjecture de Grothendick, Papanikolas obtient alors la forme optimale d'indépendance algébrique des valeurs de logarithmes en des éléments de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$:

Théorème 1. [26, Theorem 6.4.2] *Soit* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Omega$ *tels que* $\exp_{\mathcal{C}}(\lambda_i) \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$. *Si* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *sont* $\mathbb{F}_q(T)$*-linéairement indépendants, ils sont* $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$*-algébriquement indépendants.*

Chang et Yu ont étendu le théorème précédent au cas des polylogarithmes de Carlitz [10, Corollary 4.2]. Pellarin a alors généralisé ce résultat en considérant l'indépendance algébrique de polylogarithmes de poids différents (voir [27]).

Soit v un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_q[T]$ de degré d, $\mathbb{F}_q(T)_v$ le complété de $\mathbb{F}_q(T)$ pour la topologie induite par la valuation $\boldsymbol{v}$ associée à v normalisée par $\boldsymbol{v}(v) = 1$. Fixons une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}_q(T)_v}$ de $\mathbb{F}_q(T)_v$ et notons Ω_v le complété de $\overline{\mathbb{F}_q(T)_v}$ pour la valuation $\boldsymbol{v}$. On notera aussi $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q(T)$ dans Ω_v et $\overline{\mathbb{F}_q}$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ dans Ω_v. D'après le lemme de Hensel, il existe un unique $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q}$ de degré d sur $\mathbb{F}_q$ tel que $\boldsymbol{v}(T - \alpha) = 1$. On notera $\mathbb{F}_\alpha$ le corps $\mathbb{F}_q(\alpha)$ et Ω_α au lieu de Ω_v. Les séries entières $\mathrm{Log}_{n,\mathcal{C}}$ définissent des fonction analytiques sur $\mathcal{D}_\alpha(0)$ où on a posé pour tout $r \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{D}_\alpha(r) = \{z \in \Omega_\alpha \mid \boldsymbol{v}(z) > r\}.$$

On note $\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},n,\mathcal{C}}$ ces séries entières pour insister sur le fait que les convergences seront prises dans Ω_α. Toujours dans [34], Yu a prouvé l'analogue du théorème de Baker pour le logarithme de Carlitz $\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},1,\mathcal{C}}$.

Jusqu'a présent, la méthode de Papanikolas n'a pas permis de prouver l'analogue v-adique du Théorème 1. Nous nous proposons dans cet article de prouver le résultat plus général suivant.

Théorème 2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$, *soit* $\lambda_{n,1}, \cdots, \lambda_{n,g_n}$ *des éléments de* $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ *de valuation strictement positive. Si l'ensemble* $\{\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},\mathcal{C},n}(\lambda_{n,i}) \mid n \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}, i \in [\![1, g_n]\!]\}$ *est* $\mathbb{F}_q(T)$*-linéairement indépendant, il est* $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$*-algébriquement indépendant.*

Remarque 3. En fait, nous montrerons une version un peu plus générale du Théorème 2 (Théorème 32) basée sur la possibilité, observée par Chang et Mishiba [11], de prolonger analytiquement les polylogaritmes de Carlitz.

Carlitz a aussi introduit un analogue de la fonction ζ : pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\zeta_{\mathcal{C}}(s) = \sum_{a \in \mathbb{F}_q[T] \text{ unitaire}} \frac{1}{a^s}$$

qui converge dans Ω. On a une relation triviale entre les valeurs de la fonction $\zeta_{\mathcal{C}}$ déduite du Frobenius : pour tout $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $\zeta_{\mathcal{C}}(np^m) = \zeta_{\mathcal{C}}^{p^m}(n)$. Soit n un entier naturel non nul. En utilisant l'étude du n^e produit tensoriel du module de Carlitz d'Anderson et Thakur [2], Yu a montré que $\zeta_{\mathcal{C}}(n)$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(T)$ ainsi que $\zeta_{\mathcal{C}}(n)/\Pi_{\mathcal{C}}^n$ si $n \notin (q-1)\mathbb{N}$. Peu de temps après ces résultats furent reprouvés par diverses méthodes (automatique, méthode de Wade ; voir [4], [14]). Carlitz avait déjà montré une relation analogue à celle d'Euler pour la fonction ζ : $\zeta_{\mathcal{C}}((q-1)n)/\Pi^{(q-1)n}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$. Chang et Yu ont déterminé toutes les relations algébriques entre les valeurs de $\zeta_{\mathcal{C}}$. Elles sont déduites du Frobenius et de l'existence de la relation d'Euler-Carlitz. En particulier, ils obtiennent le

Théorème 4. [10, Main Theorem] *Pour tout entier naturel n non nul, le degré de transcendance de $\mathbb{F}_q(T)(\Pi, \zeta_C(1), \cdots, \zeta_C(n))$ sur $\mathbb{F}_q(T)$ est de $n - [n/p] - [n/(q-1)] + [n/p(q-1)] + 1$.*

Une version faible de ce théorème, l'indépendance algébrique de $\zeta_C(s)$ ($1 \leqslant s < p$), avait été obtenue auparavant par le second auteur [16, Théorème 1.3].

Dans [20], Goss construit une version $\boldsymbol{v}$-adique de la fonction ζ_C : pour tout $s \in \mathbb{N}$, on pose

$$\zeta_{\boldsymbol{v},C}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{\substack{a \in \mathbb{F}_q[T] \text{ unitaire} \\ \deg(a)=k \\ (a,v)=1}} \frac{1}{a^s} \Big).$$

La fonction $\zeta_{\boldsymbol{v},C}$ admet des zéros : pour tout entier naturel s divisible par $q-1$, $\zeta_{\boldsymbol{v},C}(s) = 0$. La transcendance de $\zeta_{\boldsymbol{v},C}(n)$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus (q-1)\mathbb{N}$ fut prouvée par Yu de manière analogue et simultanée à celle de des valeurs aux entiers naturels de la fonction ζ_C [33, Theorem 3.8]. En analogie avec le Théorème 4, Chang et Yu conjecturent que la relation du Frobenius et la nullité de la fonction $\zeta_{\boldsymbol{v},C}$ aux entiers naturels multiples de $q-1$ sont les deux seules relations algébriques possibles pour la fonction $\zeta_{\boldsymbol{v},C}$ [10].

Conjecture (Chang-Yu)**.** *Pour tout entier naturel n non nul, le degré de transcendance du corps $\mathbb{F}_q(T)(\zeta_{\boldsymbol{v},C}(1), \cdots, \zeta_{\boldsymbol{v},C}(n))$ sur $\mathbb{F}_q(T)$ est de $n - [n/p] - [n/(q-1)] + [n/p(q-1)]$.*

Nous montrons dans cet article que la conjecture de Chang-Yu est vraie. C'est le sujet du Corollaire 24.

Les Théorèmes 1 et 4 sont obtenus en interprétant les valeurs mises en jeu comme périodes de T-motifs et en appliqueant le célèbre critère ABP d'Anderson, Brownawell et Papanikolas [3]. Comme vu précédemment, jusqu'à maintenant les résultats d'indépendance algébrique démontrés par la méthode motivique dépassaient ceux obtenus par la méthode Mahler. Cette dernière obligeait à se restreindre aux arguments rationnels (c'est-à-dire dans $\mathbb{F}_q(T)$). Cependant, très peu de résultats ont pu être prouvés par la méthode motivique dans le cadre $\boldsymbol{v}$-adique (voir cependant [12]). Dans cet article, nous éliminons la restriction sur les arguments dans la méthode de Mahler, répondant à une demande de Pellarin formulée dans [27]. Cela permet d'obtenir des résultats d'indépendance algébrique aussi définitifs que la méthode motivique tout en permettant une adaptation aisée dans le cadre $\boldsymbol{v}$-adique ; ce qui mène à des preuves du Théorème 2 et du Corollaire 24. Ainsi, dans cet article, nous amenons la théorie de l'indépendance algébrique en caractéristique finie pour les places finies au niveau de celle actuellement connue pour la place infinie. De plus, comme l'a remarqué le second auteur [17], la méthode de Mahler permet en sus des énoncés qualitatifs d'obtenir des énoncés quantitatifs. Qunatifier les preuves données dans cet article permettrait d'obtenir de telles mesures de trasncendance. Actuellement, de telles mesures de transcendance n'ont pu être obtenues par la méthode motivique.

2. Extension du théorème de Nishioka

On considère une valeur absolue $|.|$ sur $\mathbb{F}_q(T)$, $\mathbb{W}$ le complété d'une clôture algébrique du complété de $\mathbb{F}_q(T)$ par la topologie induite par $|.|$. Dans cette section, toutes les extensions seront considérées dans $\mathbb{W}$. On note $\mathbb{K}$ une extension finie de $\mathbb{F}_q(T)$ et pour un réel r positif, $\mathcal{D}_{\mathbb{W}}(r) = \{z \in \mathbb{W} \mid |z| < r\}$. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$. La *maison* de α est le rationnel $\overline{|\alpha|}$ défini comme le maximum des degrés de ses conjugués :

$$\overline{|\alpha|} = \max_{\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q(T)}(\mathbb{F}_q(T)(\alpha), \mathbb{W})} \deg(\sigma(\alpha)).$$

Pour une famille $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$, on appelle *dénominateur* de $\mathcal{F}$ tout polynôme $\mathcal{D}$ non nul de $\mathbb{F}_q[T]$ tel que $\mathcal{D}\alpha_j$ ($j \in [\![1, k]\!]$) soit entier sur $\mathbb{F}_q(T)$, c'est-à-dire appartient à la clôture intégrale de $\mathbb{F}_q(T)$ dans $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$. La hauteur logarithmique de Weil $h(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de $\mathcal{F}$ (relativement à $\mathbb{F}_q(T)$) (voir [19]) satisfait à l'inégalité

$$h(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} (0, \overline{|\alpha_i|}) + \deg(\mathcal{D}). \tag{1}$$

Fixons pour la suite de ce paragraphe un entier naturel d supérieur à 2 et n un entier naturel non nul. Soit i un entier naturel non nul et $\widetilde{\mathbb{K}}$ une extension algébrique finie de $\mathbb{K}$. On considère une suite $(h_{i,k})_k$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ une suite $(\boldsymbol{g}_{i,j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\widetilde{\mathbb{K}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

— il existe un réel $\mathfrak{c}_0$ tel que tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{F}_k = \{\boldsymbol{g}_{i,j,k}, \boldsymbol{h}_{i,k} \mid (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$ admet un dénominateur $\mathcal{D}_k$ de degré inférieur à $\mathfrak{c}_0 d^k$;

— il existe un réel $\mathfrak{c}_1$ tel que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $\boxed{\boldsymbol{g}_{i,j,k}} \leqslant \mathfrak{c}_1 d^k$ et $\boxed{\boldsymbol{h}_{i,k}} \leqslant \mathfrak{c}_1 d^k$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k et B_k les matrices

$$A_k = \Big(\boldsymbol{g}_{i,j,k}\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{h}_{1,k} \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_{n,k} \end{pmatrix}.$$

Soi r un réel strictement positif. Soit $f_1, \cdots, f_n$ des séries formelles de $\mathbb{K}[[X]]$ induisant des séries entières de $\mathbb{K}[[x]]$ de rayon de convergence inférieur à r. Dans la suite de ce paragraphe désignera un élément de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ tel que $|\alpha| < r$. Nous montrerons cette extension du théorème de Nishioka en caractéristique finie :

Théorème 5. *Soit d un entier supérieur à 2. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\begin{pmatrix} f_1(\alpha^{d^k}) \\ \vdots \\ f_n(\alpha^{d^k}) \end{pmatrix} = A_k \begin{pmatrix} f_1(\alpha^{d^{k-1}}) \\ \vdots \\ f_n(\alpha^{d^{k-1}}) \end{pmatrix} + B_k \qquad (\spadesuit)$$

Alors,

$$\operatorname{degtr}_{\mathbb{K}}\{f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)\} = \operatorname{degtr}_{\mathbb{K}(X)}\{f_1(X), \cdots, f_n(X)\}.$$

Corollaire 6. *Supposons que les séries entières $f_1, \cdots, f_n$ vérifient le système d'équations fonctionnelles*

$$\begin{pmatrix} f_1(z^d) \\ \vdots \\ f_n(z^d) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} + B(z)$$

où $A(z) = (\boldsymbol{a}_{i,j}(z))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{W}^{\mathcal{D}_{\mathbb{W}}(r)})$ et $B(z) = (\boldsymbol{b}_i(z))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{W}^{\mathcal{D}_{\mathbb{W}}(r)})$. S'il existe un réel $\mathfrak{c}_0$ tel que tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{F}_k = \{\boldsymbol{a}_{i,j}(\alpha^{d^k}), \boldsymbol{b}_i(\alpha^{d^k}) \mid (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$ admet un dénominateur $\mathcal{D}_k$ de degré inférieur à $\mathfrak{c}_0 d^k$ et un réel $\mathfrak{c}_1$ tel que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $\max(\boxed{\boldsymbol{a}_{i,j}}, \boxed{\boldsymbol{b}_i(\alpha^{d^k})}) \leqslant \mathfrak{c}_1 d^k$, alors

$$\operatorname{degtr}_{\mathbb{K}}\{f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)\} = \operatorname{degtr}_{\mathbb{K}(X)}\{f_1(X), \cdots, f_n(X)\}. \qquad (2)$$

Le théorème de Nishioka peut se déduire du corollaire précédent :

Théorème 7 ([25, Theorem 4.2.1])**.** *Supposons que les séries entières $f_1, \cdots, f_n$ vérifient le système d'équations fonctionnelles*

$$\begin{pmatrix} f_1(z^d) \\ \vdots \\ f_n(z^d) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} + B(z)$$

où $A(z)$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}(z))$ et $B(z)$ est une matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}(z))$ dont aucun des α^{d^k} ($k \in \mathbb{N}$) est pôle. Alors

$$\operatorname{degtr}_{\mathbb{K}}\{f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)\} = \operatorname{degtr}_{\mathbb{K}(X)}\{f_1(X), \cdots, f_n(X)\}. \qquad (3)$$

Démonstration. Soit $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{K}$. Posons $A(z) = \big(\boldsymbol{g}_{i,j}(z)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $\boldsymbol{g}_{i,j}(z) = \frac{\boldsymbol{a}_{i,j}(z)}{\boldsymbol{b}_{i,j}(z)}$ et $B(z) = (\widetilde{\boldsymbol{g}}_i(z))_{1\leqslant i\leqslant n}$ avec $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i(z) = \frac{\widetilde{\boldsymbol{a}_i}(z)}{\widetilde{\boldsymbol{b}_i}(z)}$ où les $\boldsymbol{a}_{i,j}$, $\boldsymbol{b}_{i,j}$, $\widetilde{\boldsymbol{a}_{i,j}}$, $\widetilde{\boldsymbol{b}}_i$ sont des polynômes de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$. Notons $\sigma(\boldsymbol{a}_{i,j})$, $\sigma(\boldsymbol{b}_{i,j})$, $\sigma(\widetilde{\boldsymbol{a}_i})$ et $\sigma(\widetilde{\boldsymbol{b}_i})$ leur degré, $\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{a}_{i,j})$,

$\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{b}_{i,j})$, $\widetilde{\sigma}(\widetilde{\boldsymbol{a}_i})$ et $\widetilde{\sigma}(\widetilde{\boldsymbol{b}_i})$ le maximum des maisons de leurs coefficients et $\boldsymbol{\delta}_\alpha$ le dénominateur de α. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\delta}_\alpha^{d^k}$ est un dénominateur de $\boldsymbol{a}_{i,j}(\alpha^{d^k})$ et $\boldsymbol{b}_{i,j}(\alpha^{d^k})$. Notons $\boldsymbol{B} = \prod_{i=1}^n \widetilde{\boldsymbol{b}_i} \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \boldsymbol{b}_{i,j}$ et $\boldsymbol{\gamma} = \sum_{i=1}^n \deg(\widetilde{\boldsymbol{a}_i}) + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \deg(\boldsymbol{a}_{i,j})$. La famille $\{\boldsymbol{g}_{i,j}(\alpha^{d^k}) \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n\} \cup \{\widetilde{\boldsymbol{g}_i}(\alpha^{d^k}) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ admet le polynôme $\boldsymbol{\Delta} := \boldsymbol{\delta}_\alpha^{(\boldsymbol{\gamma}+d_{\mathbb{K}}\deg(\boldsymbol{B}))d^k} N_{\mathbb{K}/\mathbb{F}_q(T)}(\boldsymbol{B}(\alpha^{d^k}))$ comme dénominateur qui est de degré inférieur à

$$d^k(\boldsymbol{\gamma} + d_{\mathbb{K}}\deg(\boldsymbol{B}))\deg(\boldsymbol{\delta}_\alpha) + d_{\mathbb{K}}(\overline{|\boldsymbol{B}|} + d^k \deg(\boldsymbol{B})\max(0, \overline{|\alpha|}))$$

où $d_{\mathbb{K}} = [K : \mathbb{F}_q(T)]$ et $\overline{|\boldsymbol{B}|}$ désigne le maximum des maisons des coefficients de $\boldsymbol{B}$. De plus, on a

$$\overline{|\boldsymbol{a}_{i,j}(\alpha^{d^k})|} \leqslant \widetilde{\sigma}(\boldsymbol{a}_{i,j}) + \sigma_{\boldsymbol{a}_{i,j}} d^k \max(0, \overline{|\alpha|})$$

et

$$\overline{|\boldsymbol{b}_{i,j}(\alpha^{d^k})|} \leqslant \widetilde{\sigma}(\boldsymbol{b}_{i,j}) + \sigma_{\boldsymbol{b}_{i,j}} d^k \max(0, \overline{|\alpha|}).$$

Puisque $\boldsymbol{b}_{i,j}(\alpha^{d^k}) \neq 0$, l'inégalité de Liouville [32, Lemma 2.1] implique que

$$\min_{\sigma\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q(T)}(\mathbb{F}_q(T)(\alpha),\mathbb{W})} \deg(\sigma(\boldsymbol{b}_{i,j}(\alpha^{d^k}))) \geqslant -2d_{\mathbb{K}} \max(\overline{|\boldsymbol{b}_{i,j}(\alpha^{d^k})|}, \deg(\boldsymbol{\Delta}).$$

On en déduit qu'il existe une constante $\mathfrak{c}_{i,j}$ ne dépendant que de i et j telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\overline{|\boldsymbol{g}_{i,j}(\alpha^{d^k})|} \leqslant d^k \mathfrak{c}_{i,j}.$$

De manière similaire,, il existe une constante $\mathfrak{c}_i$ ne dépendant que de i telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\overline{|\widetilde{\boldsymbol{g}_i}(\alpha^{d^k})|} \leqslant d^k \mathfrak{c}_i.$$

Ainsi, il existe un réel positif $\mathfrak{c}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$\left\{\overline{|\boldsymbol{g}_{i,j}(\alpha^{d^k})|} \mid (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\right\} \cup \left\{\overline{|\widetilde{\boldsymbol{g}_i}(\alpha^{d^k})|} \mid i \in [\![1,n]\!]\right\}$$

est majoré par $\mathfrak{c}d^k$. □

Dans [28], Philippon a montré un critère très général d'indépendance algébrique dont Fernandes en déduit le corollaire suivant. Cependant, en examinant la preuve du théorème de Nishioka fournie par Fernandes, on constate que ce qui est utilisé est légèrement plus fort que ce qui est proposé. Nous ne fournissons que l'énoncé nécessaire dans la suite, la preuve étant quasiment identique à celle du corollaire original. Rappelons (voir [19]) que la hauteur logarithmique de Weil $h(P)$ d'un polynôme homogène P de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}[X_0, \cdots, X_n]$ est la hauteur logarithmique de Weil de la famille constituée de ses coefficients.

Corollaire 8. [19, modification du Corollaire 3.2] *Soient $\boldsymbol{\omega} = (1, \omega_1, \cdots, \omega_n) \in \mathbb{W}^{n+1}$, $s \in \{0, \cdots, n\}$ et $(n(N))_{N\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres entiers pour laquelle il existe une constante c_2 indépendante de N telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$:*

$$n(N) \geqslant c_2 N^{s+1}. \tag{4}$$

Soit $c_1, c_2, \cdots$ des constantes strictement positives. Supposons que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_0(N)$ (ne dépendant que de N) telle que pour tout entier $k \geqslant c_0(N)$ il existe un polynôme homogène $P_{N,k} \in \mathbb{K}[X_0, \cdots, X_n]$ tel que :

$$\deg(P_{N,k}) \leqslant c_3 N,\ h(P_{N,k}) \leqslant c_4 d^k N, \tag{5}$$

$$-c_5 d^k n(N) \leqslant \log |P_{N,k}(\boldsymbol{\omega})| \leqslant -c_6 d^k n(N), \tag{6}$$

Alors :

$$\mathrm{degtr}_{\mathbb{K}}\{\omega_1, \cdots, \omega_n\} \geqslant s.$$

La démonstration du Théorème 5 que nous présentons s'inspire fortement de la preuve de Fernandes. Les principaux changements interviennent dans la dernière partie de la preuve.

Démonstration du Théorème 5. On peut se contenter de prouver le Théorème 5 pour une suite de systèmes homogènes. En effet, la suite de Systèmes (♠) est équivalent à la suite de systèmes

$$\begin{pmatrix} f_1(\alpha^{d^k}) \\ \vdots \\ f_n(\alpha^{d^k}) \\ 1 \end{pmatrix} = \widetilde{A_k} \begin{pmatrix} f_1(\alpha^{d^{k-1}}) \\ \vdots \\ f_n(\alpha^{d^{k-1}}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

où

$$\widetilde{A_k} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \boldsymbol{h}_{1,k} \\ & A_k & & \vdots \\ & & & \boldsymbol{h}_{n,k} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathbb{K}$ contient α, tous les $\boldsymbol{g}_{i,j}(\alpha^{d^k})$ ($(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $k \in \mathbb{N}$) et tous les coefficients des séries entières f_i ($i \in [\![1,n]\!]$). Notons $l = \mathrm{degtr}_{\mathbb{K}}(f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha))$ et $l' = \mathrm{degtr}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z), \cdots, f_n(z))$. Il suffit de prouver que $l \geqslant l'$. On peut supposer que $l' \geqslant 1$. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $f_1, \cdots, f_{l'}$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{K}(z)$. Pour un polynôme $R \in \mathbb{K}((z))[X_1, \cdots, X_n]$, on note $\deg_{\underline{X}}(R)$ le degré total de R en les variables $X_1, \cdots, X_n$ en tant que polynôme de $\mathbb{K}((z))[X_1, \cdots, X_n]$.

Lemme 9. *Il existe alors un polynôme non nul $R_N(z, X_1, \cdots, X_{l'}) \in (\mathbb{K}[z])[X_1, \cdots, X_{l'}]$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) $\deg_z(R_N) \leqslant N$;

(2) $\deg_{\underline{X}}(R_N) \leqslant N$;

(3) $n(N) := \mathrm{ord}_0 R(z, f_1(z), \cdots, f_{l'}(z)) \geqslant \frac{N^{l'+1}}{l'!} := c_1 N^{l'+1}$.

Démonstration. Cela revient à résoudre un système d'équations linéaires ayant strictement plus d'inconnues que d'équations. □

La fonction

$$E_N(z) = R_N(z, f_1(z), \cdots, f_{l'}(z)) = \sum_{j=n(N)}^{+\infty} a_j z^j \quad (a_j \in \mathbb{K}).$$

n'est pas identiquement nulle puisque les f_i ($1 \in [\![1,l']\!]$) sont algébriquement indépendants. Soit $R_{N,0}(z, X_0, \cdots, X_n) \in \mathbb{K}[z][X_0, \cdots, X_n]$ le polynôme homogène de degré N en $X_0, \cdots, X_n$ vérifiant :

$$R_{N,0}(z, 1, X_1, \cdots, X_n) = R_N(z, X_1, \cdots, X_{l'}). \tag{7}$$

On note $A_{i,k}$ la matrice la matrice ligne formée de la i^{e} ligne de la matrice A_k. Pour tout entier naturel non nul k, on définit le polynôme $R_{N,k}(z, X_0, X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{K}[z][X_0, \cdots, X_n]$ par :

$$R_{N,k}(z, X_0, X_1, \cdots, X_n) = R_{N,k-1}(z^d, X_0, A_{1,k}\overline{X}, \cdots, A_{n,k}\overline{X}), \tag{$\diamond$}$$

où $\overline{X} = {}^t(X_1, \cdots, X_n)$ et où l'on a identifié une matrice carrée de taille 1 avec son coefficient. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $R_{N,k}$ est un polynôme homogène de degré N en $X_0, \cdots, X_n$. Par récurrence sur k, on obtient que :

$$R_{N,k}(\alpha, 1, f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)) = E_N(\alpha^{d^k}). \tag{8}$$

Nous estimons maintenant $E_N(\alpha^{d^k})$.

Lemme 10. *Il existe une constante $c_0(N)$ telle que pour tout entier $k \geqslant c_0(N)$, on a*

$$E_N(\alpha^{d^k}) \neq 0, \tag{9}$$

et

$$\frac{3}{2}\log|\alpha|d^k n(N) \leqslant \log|E_N(\alpha^{d^k})| \leqslant \frac{1}{2}\log|\alpha|d^k n(N). \tag{10}$$

Démonstration. Par définition de $n(N)$, $a_{n(N)}$ est non nul. Il existe une contante $\tilde{\mathfrak{c}}(N)$ tel que pour tout entier $j \geqslant \tilde{\mathfrak{c}}(N)$, on ait $|a_j| \leqslant |\alpha|^{-j}$. L'estimation

$$\left|\frac{E_N(\alpha^{d^k})}{a_{n(N)}\alpha^{n(N)d^k}} - 1\right| \leqslant \frac{1}{a_{n(N)}}\sum_{j=n(N)+1}^{+\infty}|a_j||\alpha^{(j-n(N))d^k}| \leqslant \tilde{\mathfrak{c}}_1(N)|\alpha|^{d^k}$$

où $\tilde{\mathfrak{c}}_1(N)$ ne dépend que de N, mène à $|E_N(\alpha^{d^k})| \underset{k\to+\infty}{\sim} |a_{n(N)}\alpha^{n(N)d^k}|$. □

Le lemme suivant permet d'exprimer $R_{N,k}$ en fonction de $R_{N,0}$.

Définition 11. Soit $\mathcal{K}$ un corps commutatif.

(1) On dit qu'un polynôme $R \in \mathcal{K}[X_1,\cdots,X_n]$ est sans facteur carré si les seules puissances des indéterminées apparaisant dans les monômes de R sont 0 ou 1.
(2) Soit $l_0 \in \mathbb{N}$ et $Y_{i,j,l}$ des indéterminées ($(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $l \in [\![0,l_0]\!]$). On dit qu'un polynôme $R \in \mathcal{K}[Y_{i,j,l},(i,j)\in[\![1,n]\!]^2, l\in[\![0,l_0]\!]]$ est échelonné (suivant l) si pour tout $l \in [\![0,l_0]\!]$ et tout monôme de R, il existe au plus une indéterminée ayant pour troisième indice l.

Lemme 12. *Soit k et j deux entiers avec $1 \leqslant j < k$. Il existe des formes linéaires $U_{k,j,i}$ en les $X_1,\cdots,X_n$:*

$$U_{k,j,i} = \sum_{m=1}^{n} S_{k,j,i,m}X_m,$$

où les $S_{k,j,i,m}$ sont des polynômes homogènes à coefficients unitaires de degré au plus j, sans facteur carré et échelonnés en les $\boldsymbol{g}_{\mu,\nu,l}$ ($(\mu,\nu) \in [\![1,n]\!]^2$, $l \in [\![k-j+1,k]\!]$) tels que

$$R_{N,k}(z,X_0,X_1,\cdots,X_n) = R_{N,k-j}(z^{d^j},X_0,U_{k,j,1},\cdots,U_{k,j,n}).$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur j. Le cas $j=1$ n'est juste qu'une réécriture de la relation de définition ◇ de $R_{N,k}$. Posons $\widetilde{U_{k,j}} = {}^t(U_{k,j,1},\cdots,U_{k,j,n})$. On a

$$\begin{aligned}R_{N,k}(z,X_0,X_1,\cdots,X_n) &= R_{N,k-j}(z^{d^j},X_0,U_{k,j,1},\cdots,U_{k,j,n})\\ &= R_{N,k-j-1}(z^{d^{j+1}},X_0,A_{1,k-j}\widetilde{U_{k,j}},\cdots,A_{n,k-j}\widetilde{U_{k,j}}).\end{aligned}$$

On a pour $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}U_{k,j+1,i} = A_{i,k-j}\widetilde{U_{k,j}} &= \sum_{u=1}^{n}\boldsymbol{g}_{i,u,k-j}\sum_{m=1}^{n}S_{k,j,u,m}X_m\\ &= \sum_{m=1}^{n}\Big(\sum_{u=1}^{n}\boldsymbol{g}_{i,u,k-j}S_{k,j,u,m}\Big)X_m.\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence implique que pour tout $u \in [\![1,n]\!]$, $\boldsymbol{g}_{i,u,k-j}S_{k,j,u,m}$ est un polynôme homogène à coefficient unitaire de degré au plus $j+1$, sans facteur carré et échelonnés en les $\boldsymbol{g}_{\mu,\nu,l}$ ($(\mu,\nu)\in[\![1,n]\!]^2$, $l\in[\![k-j,k]\!]$). □

On pose $P_{N,k}(X_0,X_1,\cdots,X_n) = R_{N,k}(\alpha,X_0,X_1,\cdots,X_n)$.

Lemme 13. *Il existe $c_1(N)$ telle que pour tout $k \geq c_1(N)$ on ait $h(P_{N,k}) \leqslant c_9Nd^k$.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, on a

$$P_{N,k}(X_0,X_1,\cdots,X_n) = R_{N,0}(\alpha^{d^k},X_0,U_{k,k,1},\cdots,U_{k,k,n}).$$

Soit $(i,m) \in [\![1,n]\!]^2$. Puisque $S_{k,k,i,m}$ est un polynôme homogène à coefficients unitaires de degré au plus k, sans facteur carré et échelonnés en les $\boldsymbol{g}_{\mu,\nu}(z^{d^l})$, $\widetilde{\mathcal{D}_k} := \prod_{u=0}^{k-1}\mathcal{D}_u$ est un dénominateur de $S_{k,k,i,m}$ qui est de degré inférieur à

$$\sum_{u=0}^{k-1}\mathfrak{c}_0 d^u \leqslant c_6 d^k$$

et on a

$$\boxed{S_{k,k,i,m}} \leqslant \sum_{u=0}^{k-1} \mathfrak{c}_1 d^u \leqslant c_7 d^k.$$

Ecrivons

$$R_{N,0}(z, X_1, \cdots, X_n) = \sum_{\substack{\underline{i}=(i_0,\cdots,i_n)\in\mathbb{N}^{n+1} \\ i_0+\cdots+i_n=N}} \boldsymbol{b}_{\underline{i}}(z) X_1^{i_0} \cdots X_n^{i_n}.$$

où les $\boldsymbol{b}_{\underline{i}}$ appartiennent à $\mathbb{K}[z]$ et sont de degré inférieur à N. Posons M_{R_N} le maximum des maisons des coefficients de tous les polynômes $\boldsymbol{b}_{\underline{i}}$ et $\mathcal{D}_{R_N}$ un dénominateur de tous ces coefficients. Alors, pour tout $\underline{i}$

$$\boxed{\boldsymbol{b}_{\underline{i}}(\alpha^{d^k})} \leqslant M_{R_N} + Nd^k \max(0, \boxed{\alpha})$$

et $\mathcal{D}_\alpha^{q^k} \mathcal{D}_{R_N}$ est un dénominateur de tous les $\boldsymbol{b}_{\underline{i}}(\alpha^{d^k})$. En raison du fait que le polynôme $P_{N,k}(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ est une somme de monômes de degré N en $X_0, \cdots, X_n$ avec des coefficients de la forme

$$\boldsymbol{b}_{\underline{i}}(\alpha^{d^k}) S_{k,k,i_0,m_1}^{u_0} \cdots S_{k,k,i_n,m_n}^{u_n}$$

avec $u_1 + \cdots + u_n = N$, on en déduit que $P_{N,k}(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ admet $(\mathcal{D}_\alpha^{d^k} \mathcal{D}_{R_N} \widetilde{D}_k)^N$ comme dénominateur et tous ses coefficients ont une maison inférieure à

$$N \times c_7 d^k + M_{R_N} + Nd^k \max(0, \boxed{\alpha}) \leqslant c_8 N d^k.$$

Par conséquent, d'après l'Inégalité 1, $P_{N,k}(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ a des coeffcients de hauteur inférieure à $c_4 N d^k$. □

On achève la preuve du Théorème 5 en appliquant le Corollaire 8 aux polynômes $P_{N,k}$. □

Remarque 14. La démonstration de cette généralisation du théorème de Nishioka est rendue relativement facile par l'utilisation du Lemme 8. Cependant, sa preuve repose sur le théorème de Philippon qui, lui, est extrèmement difficile. Récemment, Adamczewski et Faverjon [1] ont donné une preuve autonome du théorème de Nishioka ne reposant pas sur les travaux de Nesterenko et Philippon. Ceci rend leur preuve beaucoup plus facile et agréable. On peut se demander si leur méthode permettrait de prouver le Théorème 5.

3. Indépendance des valeurs spéciales de la fonction $\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}$

Soit $(\mathcal{K}, |.|)$ un corps valué complet non-archimédien, r un réel strictement positif. L'ensemble

$$\mathbb{A}(r) = \{\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \mid (a_n)_n \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} |a_n| r^n = 0\}$$

des séries entières sur $\mathcal{D}_r = \{z \in \mathcal{K} \mid |z| < r\}$ (appelées aussi fonctions analytiques sur $\mathcal{D}_r$) est un anneau intègre commutatif. Son corps des fractions est aussi complet pour la norme infinie [18]. On le note $\mathbb{M}_r(\mathcal{K})$. On dit qu'*une série formelle* $f(Z) = \sum_n a_n Z^n$ *de* $\mathcal{K}[[Z]]$ *induit fonction sur* $\mathcal{D}_r$, si pour tout $z \in \mathcal{D}_r$, la suite $(|a_n| z^n)_n$ tend vers 0. On notera encore cette série entière f.

Proposition 15. *Soit f une série formelle de $\mathcal{K}[[Z]]$. On suppose que f induit une fonction sur $\mathcal{D}_r$ qui est la restriction d'une fonction méromophe g sur un disque $\mathcal{D}_{r'}$ avec $r' > r$. Si la série formelle f est algébrique sur $\mathcal{K}(Z)$, alors il existe des polynômes $P_0, \cdots, P_s$ de $\mathcal{K}[z]$ non tous nuls, alors pour tout $z \in \mathcal{D}_{r'}$ tel que $g(z)$ existe, on a*

$$\sum_{i=0}^{s} P_i(z) g^i(z) = 0.$$

Démonstration. Il existe des polynômes $P_0, \cdots, P_s$ de $\mathcal{K}[Z]$ ($P_s \neq 0$) tels que

$$\sum_{i=0}^{s} P_i(Z) f^i(Z) = 0.$$

La série formmelle nulle $\sum_{i=0}^{s} P_i(Z) f^i(Z)$ induit la série entière nulle sur $\mathcal{D}_r$: pour tout $z \in \mathcal{D}_r$

$$\sum_{i=0}^{s} P_i(z) f^i(z) = 0.$$

Ecrivons g sous la forme $g = h_1/h_2$ où h_1 et h_2 sont deux fonctions analytiques sur $\mathcal{D}_{r'}$. On a pour tout $z \in \mathcal{D}_r$,

$$\sum_{i=0}^{s} P_i(z) h_1^i(z) h_2^{s-i}(z) = 0.$$

La fonction entière $\sum_{i=0}^{s} P_i(z) h_1^i(z) h_2^{s-i}(z)$ de $\mathcal{D}_{r'}$ étant nulle sur $\mathcal{D}_r$, elle l'est aussi sur $\mathcal{D}_{r'}$. □

Notons pour tout entier naturel n non nul $\mathbb{L}_n(Z)$ la fraction rationnelle

$$\mathbb{L}_n(Z) = \prod_{u=1}^{n} (Z^{q^u} - T + \alpha^{q^u}).$$

Lemme 16. *Soit k et n des entiers naturels. La fraction rationnelle $\frac{1}{\mathbb{L}_k^n(Z)}$ admet dans $\mathbb{F}_\alpha(T)[[Z]]$ un développement Z-adique $\sum_{j\geqslant 0} a_{j,k,n} Z^j$ avec $\boldsymbol{v}(a_{j,k,n}) \geqslant -n\frac{k}{d} - \frac{j}{q^d}$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbb{L}_k^n(Z)} &= \prod_{u=1}^{k} (T - \alpha^{q^u})^{-n} \sum_{i_1=0}^{+\infty} \cdots \sum_{i_k=0}^{+\infty} \binom{-n}{i_1} \cdots \binom{-n}{i_k} \Big(\frac{Z^q}{T-\alpha^q}\Big)^{i_1} \cdots \Big(\frac{Z^{q^k}}{T-\alpha^{q^k}}\Big)^{i_k} \\ &= \prod_{u=1}^{k} (T - \alpha^{q^u})^{-n} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_k)\in\mathbb{N}^k \\ i_1 q + \cdots + i_k q^k = j}} \prod_{u=1}^{k} \binom{-n}{i_u} (T-\alpha^{q^u})^{-i_u} \right) Z^j. \end{aligned}$$

Si $\prod_{u=1}^{k} \binom{-n}{i_u} (T-\alpha^{q^u})^{i_u}$ est non nul, sa valuation est positive et est au plus de $\left[\frac{j}{q^d}\right]$ (pour $i_d = \left[\frac{j}{q^d}\right]$), sinon elle est nulle. On obtient pour tout entier naturel j

$$\boldsymbol{v}\left(\prod_{u=1}^{k} (T - \alpha^{q^u})^{-n} \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_k)\in\mathbb{N}^k \\ i_1 q + \cdots + i_k q^k = j}} \prod_{u=1}^{k} \binom{-n}{i_u} (T-\alpha^{q^u})^{-i_u} \right) \geqslant -n\frac{k}{d} - \frac{j}{q^d}.$$

□

Dans [2], Anderson et Thakur ont montré que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme H_n de $(\mathbb{F}_q[T])(X)$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$\sum_{\substack{a\in\mathbb{F}_q[T] \text{ unitaire} \\ \deg(a)=k}} \frac{1}{a^n} = (-1)^{kn} \frac{H_n(T^{q^k})}{(n-1)!_{\mathcal{C}} L_k^n}, \tag{11}$$

où $(n-1)!_{\mathcal{C}}$ désigne la $(n-1)^{\mathrm{e}}$ factorielle de Carlitz, définie de manière suivante : écrivons $n-1$ sous forme q-adique $n-1 = m_0 + m_1 q + \cdots + m_s q^l$ ($m_i \in [\![0, q[\![$, $l \in \mathbb{N}$). Alors

$$(n-1)!_{\mathcal{C}} = \prod_{u=0}^{s} D_u^{m_u},$$

avec la suite $(D_n)_n$ vérifiant $D_0 = 1$ et $D_n = [n]D_{n-1}^q$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (pour les propriétés de la factorielle de Carlitz, voir [6] ou [9]). Dans la suite, nous utiliserons juste le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n!_{\mathcal{C}} \in \mathbb{F}_q[T]$. L'égalité 11 se réécrit comme

$$\sum_{\substack{a\in\mathbb{F}_q[T] \text{ unitaire}\\ \deg(a)=k}} \frac{1}{a^n} = (-1)^{kn} \frac{H_{n,k}((T-\alpha)^{q^k})}{(n-1)!_{\mathcal{C}} L_k^n}$$

où $H_{n,k}(X)$ est le polynôme $H_n(X+\alpha^{q^k})$. On obtient alors que

$$(n-1)!_{\mathcal{C}}\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(n) = \left(\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^{kn}\frac{H_{n,k}((T-\alpha)^{q^k})}{L_k^n} + \sum_{k=d}^{+\infty}(-1)^{kn}\Big(\frac{H_{n,k}((T-\alpha)^{q^k})}{L_k^n} - \frac{(-1)^{nd}H_{n,k-d}((T-\alpha)^{q^{k-d}})}{v^n L_{k-d}^n}\Big)\right) \tag{12}$$

Soit k un entier k supérieur à d. Le polynôme $S_{n,k}(X)$ définit par

$$S_{n,k}(X) = v^n - (-1)^{nd}\prod_{u=k-d+1}^{k}(Z^{q^u} - T + \alpha^{q^u})^n$$

appartient à $Z^{q^{k-d+1}}(\mathbb{F}_\alpha[T])[[Z]]$. Ecrivons $H_{n,k}(Z)$ sous la forme

$$H_{n,k}(Z) = \sum_{i=0}^{l} h_{n,i}Z^i$$

avec les $h_{n,i} \in \mathbb{F}_\alpha[T]$ et $l \in \mathbb{N}$. Posons

$$W_{k,n} = \frac{H_{n,k}(Z^{q^k})}{\mathbb{L}_k^n(Z)} - \frac{(-1)^{nd}H_{n,k-d}(Z^{q^{k-d}})}{v^n\mathbb{L}_{k-d}^n(Z)}$$

On a alors

$$\begin{aligned} W_{k,n} &= \sum_{i=0}^{l} h_{n,i}\left(\frac{Z^{iq^k}}{\mathbb{L}_k^n(Z)} - \frac{(-1)^{nd}}{v^n}\frac{Z^{iq^{k-d}}}{\mathbb{L}_{k-d}^n(Z)}\right) \\ &= h_{n,0}\frac{S_{n,k}(Z)}{\mathbb{L}_k^n(Z)} + \sum_{i=1}^{l} h_{n,i}\left(\frac{Z^{iq^k}}{\mathbb{L}_k^n(Z)} - \frac{(-1)^{nd}}{v^n}\frac{Z^{iq^{k-d}}}{\mathbb{L}_{k-d}^n(Z)}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

et puisque $\mathbb{L}_k^n(Z)$ est inversible dans $\mathbb{F}_\alpha(T)[[Z]]$, on en déduit que $W_{k,n}$ est de valuation Z-adique supérieure à q^{k-d}. Ainsi, la série

$$\mathcal{F}_n(Z) := \sum_{k\geqslant d}(-1)^{kn}\Big(\frac{H_{n,k}(Z^{q^k})}{\mathbb{L}_k^n(Z)} - \frac{(-1)^{nd}H_{n,k-d}(Z^{q^{k-d}})}{v^n\mathbb{L}_{k-d}^n(Z)}\Big)$$

converge dans $\mathbb{F}_\alpha(T)[[Z]]$.

Proposition 17. *La série formelle $\mathcal{F}_n$ induit une fonction développable en série entière sur $\mathcal{D}_\alpha(q^{-d})$ à coefficients dans $\mathbb{F}_\alpha(T)$.*

Démonstration. Ecrivons $\mathcal{F}_n = \sum_{j\geqslant 0} b_{j,n}Z^k$ avec les $b_{j,n}$ dans $\mathbb{F}_\alpha(T)$. L'Égalité 13 implique que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $b_{j,n}$ est une somme de termes de la forme $u \times a_{m,k,n}$ avec $u \in \mathbb{F}_\alpha[T]$ et $(k,m) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $j = q^{k-d} + m$. Cela entraîne que

$$\boldsymbol{v}(b_{j,n}) \geqslant \min_{\substack{(k,m)\in\mathbb{N}^2\\ q^k+m=j}} -\frac{nk}{d} - \frac{m}{q^d} \geqslant -\frac{n\log_q j}{d} - \frac{j}{q^d},$$

$\square$

La d-périodicité de la suite $(H_{n,k})_k$ implique que $\mathcal{F}_n$ vérifie la relation

$$\mathcal{F}_n(Z^{q^d}) = (-1)^{nd}\mathbb{L}_d^n(Z)\big(\mathcal{F}_n(Z) - \mathbb{V}_n(Z)\big), \tag{14}$$

où l'on a posé

$$\mathbb{V}_n = \sum_{k=d}^{2d-1} \Big(\frac{H_{n,k}(Z^{q^k})}{\mathbb{L}_k^n(Z)} - \frac{(-1)^{nd} H_{n,k-d}(Z^{q^{k-d}})}{v^n \mathbb{L}_{k-d}^n(Z)} \Big).$$

On en déduit que $\mathcal{F}_n$ est prolongeable en une fonction méromorphe (que l'on notera encore $\mathcal{F}_n$) sur $\mathcal{A}_\alpha := \mathcal{D}_\alpha(0) \setminus \{ \sqrt[q^n]{T} - \alpha \mid n \in \mathbb{N}^* \}$.

Lemme 18. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la fonction $\mathcal{F}_n$ est algébrique sur $\Omega_\alpha(z)$, alors $\zeta_{v,\mathcal{C}}(n) = 0$.*

Démonstration. La fonction $\mathcal{F}_n$ n'ayant qu'un nombre fini de pôles, il existe un entier naturel s_0 tel que $z_0 = \sqrt[q^{s_0 d}]{T} - \alpha$ ne soit pas un pôle de $\mathcal{F}_n$. On déduit de l'égalité valable sur $\mathcal{A}_\alpha$

$$\mathcal{F}_n(z) = \sum_{k=d}^{s_0 d-1} (-1)^{nk} \Big(\frac{H_{n,k}(z^{q^k})}{\mathbb{L}_k^n(z)} - \frac{(-1)^{nd} H_{n,k-d}(z^{q^{k-d}})}{v^n \mathbb{L}_{k-d}^n(z)} \Big) - \sum_{k=(s_0-1)d}^{s_0 d-1} (-1)^{nk} \frac{H_{n,k}(z^{q^{k-d}})}{v^n \mathbb{L}_{k-d}^n(z)} +$$
$$\frac{1}{\mathbb{L}_{s_0 d}^n} \left(\sum_{k=s_0 d}^{(s_0+1)d-1} (-1)^{nk} \frac{H_{n,k}(z^{q^k})}{\mathbb{L}_k^n(z)/\mathbb{L}_{s_0 d}^n(z)} + \sum_{k=(s_0+1)d}^{+\infty} \Big(\frac{H_{n,k}(z^{q^k})}{\mathbb{L}_k^n(z)/\mathbb{L}_{s_0 d}^n(z)} - \frac{(-1)^{nd} H_{n,k-d}(z^{q^{k-d}})}{v^n \mathbb{L}_{k-d}^n(z)/\mathbb{L}_{s_0 d}^n(z)} \Big) \right)$$

que z_0 est un zéro de la fonction

$$\sum_{k=s_0 d}^{(s_0+1)d-1} (-1)^{nk} \frac{H_{n,k}(z^{q^k})}{\mathbb{L}_k^n(z)/\mathbb{L}_{s_0 d}^n(z)} + \sum_{k=(s_0+1)d}^{+\infty} \Big(\frac{H_{n,k}(z^{q^k})}{\mathbb{L}_k^n(z)/\mathbb{L}_{s_0 d}^n(z)} - \frac{(-1)^{nd} H_{n,k-d}(z^{q^{k-d}})}{v^n \mathbb{L}_{k-d}^n(z)/\mathbb{L}_{s_0 d}^n(z)} \Big).$$

On conclut grâce à l'égalité $z^{q^{s_0 d}} = T - \alpha$ et au changement d'indices $j = k - s_0 d$. $\square$

On pose $\mathfrak{V} = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \overline{\mathbb{F}_q}(T^{1/p^h})$ et pour une indéterminée X, $\mathfrak{U}_X$ le corps $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{V}((X^{1/p^k}))$. Tout élément $\mathcal{H}$ de $\mathfrak{U}_X$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\mathcal{H} = \sum_{i \geqslant i_0} \hbar_i X^{i/p^k} \qquad (\heartsuit)$$

où $k \in \mathbb{N}$ est minimal, $i_0 \in \mathbb{Z}$ et les $\hbar_i$ sont des éléments de $\mathfrak{V}$ avec la propriété que $\hbar_{i_0} \neq 0$. Le rationnel i/p^k s'appelle l'ordre en 0 de $\mathcal{H}$ et on le note $\mathrm{ord}_0(\mathcal{H})$. La fonction ord_0 définit sur $\mathfrak{U}_X$ une valuation qui en fait un corps complet pour la topologie induite. On note $\mathfrak{u}_X$ la clôture algébrique de $\mathfrak{V}(X)$ dans $\mathfrak{U}_X$. Voici deux lemmes qui nous seront utiles dans la suite.

Lemme 19. *L'application* $\boldsymbol{D} : \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{F}_q}(T)((X)) & \to & \overline{\mathbb{F}_q}(T)((X)) \\ \sum_{i \geqslant m} a_i X^i & \mapsto & \sum_{i \geqslant m} a_i' X^i \end{array}$ *est une dérivation qui prolonge la dérivation usuelle de $\overline{\mathbb{F}_q}(T)$ et qui laisse stable $\overline{\mathbb{F}_q}(T)((X)) \cap \mathfrak{u}_X$.*

Démonstration. Par la linéarité de $\boldsymbol{D}$, il suffit de prouver que pour deux monômes aX^i et bX^j de $\overline{\mathbb{F}_q}(T)((X))$ on a $\boldsymbol{D}(aX^i bX^j) = \boldsymbol{D}(aX^i) bX^j + aX^i \boldsymbol{D}(bX^j)$, ce qui est immédiat. Soit $a \in \overline{\mathbb{F}_q}(T)((X)) \cap \mathfrak{u}_X$ et $P_a[Y] \in \big(\overline{\mathbb{F}_q}(T)(X)\big)[Y]$ son polynôme minimal sur $\mathbb{F}_q(T)(X)$. Puisque l'extension $\overline{\mathbb{F}_q}(T)((X))/\overline{\mathbb{F}_q}(T)(X)$ est séparable (voir le lemme ci-dessous), $\frac{\partial P_a}{\partial Y}(a)$ est non nul. Par [22, Chapter VIII, §5],

$$\boldsymbol{D}(a) = -\frac{P_a^{(\boldsymbol{D})}(a)}{\frac{\partial P_a}{\partial Y}(a)},$$

où $P_a^{(\boldsymbol{D})}$ désigne le polynôme obtenu en appliquant $\boldsymbol{D}$ à tous les coefficients de P_a. Ainsi $\boldsymbol{D}(a)$ appartient à $\overline{\mathbb{F}_q}(T)((X)) \cap \mathfrak{u}_X$. $\square$

Le lemme suivant est bien connu (voir [5]).

Lemme 20. *Soit $\mathcal{K}$ un corps commutatif. Alors l'extension $\mathcal{K}((X))/\mathcal{K}(X)$ est séparable.*

Démonstration. On peut supposer que $\mathcal{K}$ est de caractéristique p non nulle. La $\mathcal{K}(X)$-algèbre $\mathcal{K}((X)) \otimes_{\mathcal{K}(X)} (\mathcal{K}(X))^{1/p}$ est réduite puisqu'elle s'injecte dans $\mathcal{K}^{1/p}((X^{1/p}))$. On conclut avec [23, Chapter 9]. $\square$

Lemme 21. *Soit $f \in \mathfrak{U}_X$, $P \in \mathfrak{V}[[X]]$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f satisfait à l'une des deux relations fonctionnelles*

$$f(X^{q^r}) = P(X)f(X) \text{ ou } f(X) = P(X)f(X^{q^r}).$$

Si P est constant, alors f appartient à $\mathfrak{V}$. Si $P(0) \notin \{0,1\}$, alors f est nulle.

Démonstration. On suppose que f satisfait à la relation $f(X^{q^r}) = P(X)f(X)$. La première assertion découle immédiatement de l'unicité de la représentation de f sous la forme ($\heartsuit$). Supposons maintenant que $P(0) \notin \{0,1\}$ et f non nulle. Nécessairement, f est d'ordre 0 puisque $\mathrm{ord}(P) = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f(X^{q^{kr}}) = f(X)\prod_{j=0}^{k-1} P(X^{q^{jr}}).$$

Puisque la suite $(f(X^{q^{kr}}))_k$ converge vers $f(0)$ dans $\mathfrak{U}_X$, il en de même pour la suite $(\prod_{j=0}^{k} P(X^{q^{jr}}))_k$. Par conséquent, la suite $(P(X^{q^{jr}}))_j$ converge vers 1 et le terme constant de P est 1 aussi. Dans le cas de la seconde relation fonctionnelle, il suffit de considérer la fonction $g = 1/f$. □

Proposition 22. *Les séries formelles $\mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N} \setminus (p\mathbb{N} \cup (q-1)\mathbb{N})$) sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{F}_q(T)[X]$.*

Démonstration. Soit n_0 minimal tel que $\mathcal{F}_{n_0}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)(X)\big(\{\mathcal{F}_n(X) \mid n \in [\![1, n_0[\![\}\big)$. Il existe un polynôme $P \in (\overline{\mathbb{F}_q}(T))(X)[X_1, \cdots, X_{n_0}]$ tel que

$$P(\mathcal{F}_1(X), \cdots, \mathcal{F}_{n_0}(X)) = 0.$$

et qui engendre les relations algébriques entre les $\mathcal{F}_n$ ($n \in [\![1, n_0[\![$). Comme

$$P(X^{q^d})(\mathcal{F}_1(X^{q^d}), \cdots, \mathcal{F}_{n_0}(X^{q^d})) = 0,$$

par les relations fonctionnelles 14, on a

$$\begin{aligned} P(X^{q^d})((-1)^d\mathbb{L}_d(X)(X_1 - \mathbb{V}_1(X)), \cdots, (-1)^{n_0 d}\mathbb{L}_d^{n_0}(X)(X_{n_0} - \mathbb{V}_{n_0}(X))) = \\ R(X)P(X)(X_1 \cdots, X_{n_0}) \end{aligned},$$

avec $R(X) \in \mathfrak{u}_X$. Il existe un polynôme Q de degré total en les X_n ($n \in [\![1, n_0]\!]$) minimal non nul dans l'ensemble $\mathcal{S}$ des polynômes $(Q(X))(X_1, \cdots, X_{n_0})$ de $\mathfrak{u}_X[X_1, \cdots, X_{n_0}]$ vérifiant la relation fonctionnelle

$$\begin{aligned} Q(X^{q^d})((-1)^d\mathbb{L}_d(X)(X_1 - \mathbb{V}_1(X)), \cdots, (-1)^{n_0 d}\mathbb{L}_d^{n_0}(X)(X_{n_0} - \mathbb{V}_{n_0}(X))) = \\ R_Q(X)Q(X)(X_1 \cdots, X_{n_0}) \end{aligned} \qquad (\star)$$

avec $R_Q(X) \in \mathfrak{u}_X$. On remarque, en dérivant la relation ($\star$), que $\frac{\partial Q}{\partial X_j}$ est un élément de $\mathcal{S}$ pour tout $j \in [\![1, n_0]\!]$. Puisque $\frac{\partial Q}{\partial X_j}$ est de degré total strictement plus petit que celui de Q, c'est un élément de $\mathfrak{U}_X$. On en déduit que

$$Q(X)(X_1, \cdots, X_n) = \sum_{j=1}^{n_0} \eta_j X_j + \sum_{\underline{i}=(i_1,\cdots,i_{n_0})\in\mathcal{I}} d_{\underline{i}} \prod_{u=1}^{n_0} X_u^{p i_u},$$

où $\mathcal{I}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^{n_0}$, les η_n ($n \in [\![1, n_0]\!]$) et les $d_{\underline{i}}$ ($\underline{i} \in \mathcal{I}$) sont des éléments de $\mathfrak{V}(X)$. Il existe $m \in [\![1, n_0]\!]$ tel que η_m est non nul car sinon, $\sqrt[p]{Q}$ serait un polynôme de S de degré total non nul et strictement plus petit que celui de Q. En réinjectant dans la relation ($\star$), on obtient que pour tout $n \in [\![1, n_0]\!]$

$$\eta_n(X^{q^d})\mathbb{L}_d^n(X) = R_Q(X)\eta_n(X)$$

et

$$d_{\underline{I}}(X^{q^d})\mathbb{L}_d^{p(i_1+\cdots+i_{n_0})}(X) = R_Q(X)d_{\underline{I}}(X)$$

où $\underline{I} = (i_1, \cdots, i_{n_0}) \in \mathcal{I}$ est tel que $\prod_{j=1}^{n_0} X_j^{p i_j}$ est de degré total maximal non nul. Il vient que

$$\left(\frac{\eta_n}{\eta_m}\right)(X^{q^d}) = \mathbb{L}_d^{n-m}(X)\left(\frac{\eta_n}{\eta_m}\right)(X)$$

et

$$\left(\frac{d_{\underline{I}}}{\eta_m}\right)(X^{q^d}) = \mathbb{L}_d^{p(i_1+\cdots+i_{n_0})-m}(X)\left(\frac{d_{\underline{I}}}{\eta_m}\right)(X).$$

Le Lemme 21 implique que $\eta_n = d_{\underline{I}} = 0$ (pour $d_{\underline{I}}$, cela provient du fait que m n'est pas divisible par p). On obtient que

$$Q(X)(X_1, \cdots, X_{n_0}) = \nu(X) + \eta_m(X)X_m,$$

avec $\nu \in \mathfrak{u}_X$. Comme Q est un polynôme de $\mathcal{S}$, le polynôme $\widetilde{Q} := \eta_m^{-1}Q$ l'est aussi. En posant $\widetilde{\nu} = \eta_m^{-1}\nu$, la relation $(\star)$ pour $\widetilde{Q}$ impose que $R_{\widetilde{Q}} = (-1)^m\mathbb{L}_d^m$ et

$$\widetilde{\nu}(X^{q^d}) - (-1)^{md}\mathbb{L}_d^m(X)\mathbb{V}_m(X) = (-1)^m\mathbb{L}_d^m(X)\widetilde{\nu}(X).$$

Il s'en suit par récurrence sur k que

$$\frac{\widetilde{\nu}(X^{q^{kd}})}{\mathbb{L}_{kd}^m(X)} = \sum_{l=1}^{k}(-1)^{lmd}\frac{\mathbb{V}_m(X^{q^{(l-1)d}})}{\mathbb{L}_{ld}^m(X)} + (-1)^{kmd}\widetilde{\nu}(X).$$

L'Égalité 14 et une récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ donnent

$$\frac{\mathcal{F}_m(X^{q^{kd}})}{\mathbb{L}_{kd}^m(X)} = \sum_{l=1}^{k}(-1)^{lmd}\frac{\mathbb{V}_m(X^{q^{(l-1)d}})}{\mathbb{L}_{ld}^m(X)} + (-1)^{kmd}\mathcal{F}_m(X).$$

Comme $\mathcal{F}_m$ est de valuation strictement positive et que $\mathbb{L}_{kd}^m$ est inversible dans $\mathfrak{U}_X$, la suite $\left((-1)^{kmd}\sum_{l=1}^k(-1)^{lmd}\frac{\mathbb{V}_m(X^{q^{(l-1)d}})}{\mathbb{L}_{ld}^m(X)}\right)_k$ converge vers $-\mathcal{F}_m$ dans $\mathfrak{U}_X$. On en déduit que la suite $\left(\widetilde{\nu}(X) - (-1)^{kmd}\frac{\widetilde{\nu}(X^{q^{kd}})}{\mathbb{L}_{kd}^m(X)}\right)_k$ converge aussi dans $\mathfrak{U}_X$ vers $-\mathcal{F}_m$. Cela oblige $\widetilde{\nu}$ d'être de valuation positive. Du fait que la suite $(\mathbb{L}_{kd}^m)_k$ ne converge pas dans $\mathfrak{U}_X$, le cas d'une valuation nulle est impossible. Ainsi ν est de valuation strictement positive et la suite $\left((-1)^{kmd}\frac{\widetilde{\nu}(X^{q^{kd}})}{\mathbb{L}_{kd}^m(X)}\right)_k$ converge vers 0. Ainsi, $\mathcal{F}_m = \widetilde{\nu}$ et est donc algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)(X)$. La fontion $\mathcal{F}_m(z)$ est donc algébrique sur $\Omega_\alpha(z)$ (voir Proposition 15). Par le Lemme 18, $\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(m) = 0$. Mais ceci est impossible puisque $q-1$ ne divise pas m. □

Posons $\mathcal{G} = \mathbb{N} \setminus (p\mathbb{N} \cup (q-1)\mathbb{N})$.

Théorème 23. *L'ensemble* $\{\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(n) \mid n \in \mathcal{G}\}$ *est algébriquement indépendant sur* $\mathbb{F}_q(T)$.

Démonstration. D'après la Proposition 22, les fonctions $\mathcal{F}_n$ $(n \in \mathcal{G})$ sont algébriquement indépendantes sur $(\mathbb{F}_q(T))(X)$ et sont égales à leur développement de Taylor sur $\mathcal{D}_\alpha(q^{-d})$. La version $\boldsymbol{v}$-adique du théorème de Nishioka (voir la section 2) appliquée aux $\mathcal{F}_n(T-\alpha)$ implique l'indépendance algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$ de l'ensemble $\{\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(n) \mid n \in \mathcal{G}\}$. □

En se souvenant que $\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}((q-1)m) = 0$ et $\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(m^p) = \zeta_{\boldsymbol{v}}^p(m)$ pour tout entier naturel non nul m, le principe d'inclusion-exclusion et le théorème précédent permet de confirmer la conjecture de Chang-Yu :

Corollaire 24. *Le degré de transcendance sur* $\mathbb{F}_q(T)$ *de l'ensemble* $\{\zeta_{\boldsymbol{v},\mathcal{C}}(n) \mid n \in [\![1, n]\!]\}$ *est* $n - [n/p] - [n/(q-1)] + [n/p(q-1)]$.

4. Indépendance algébrique des polylogarithmes de Carlitz

Jusqu'à présent, la méthode de Mahler utilisée dans les problèmes de transcendance ou d'indépendance algébrique en caractéristique finie était restreinte à des valeurs de la variables appartenant au complété du corps $\mathbb{F}_q(T)$. La proposition suivante permet de surpasser ce problème. Rappelons que $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q}$ est défini de sorte que $T-\alpha$ est une uniformisante de $\mathbb{F}_q(T)_{\boldsymbol{v}}$.

Proposition 25. *Soit $\beta_1, \cdots, \beta_n$ des éléments algébriques sur $\mathbb{F}_q(T)$ de valuation strictement positive. Il existe $u \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ de valuation strictement positive et $\delta \in \overline{\mathbb{F}_q}$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, β_i appartient à $u\mathbb{F}_\alpha(\delta)[[u]]$.*

Démonstration. Notons K le corps $\mathbb{F}_q(T)[\beta_1, \cdots, \beta_n]$, $\mathcal{O} = \{s \in K \mid \boldsymbol{v}(s) \geqslant 0\}$ l'anneau de valuation discrète de K associé à $\boldsymbol{v}$, $\mathfrak{M}$ son idéal maximal et u un paramètre de $\mathcal{O}$. En particulier, u est de valuation strictement positive et est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)$. Le complété $\hat{K}$ de K pour la topologie $\boldsymbol{v}$-adique est une extension finie de $\mathbb{F}_q(T)_{\boldsymbol{v}}$, donc est un corps local. Son corps résiduel k est (à isomorphisme près) une extension finie de $\mathbb{F}_\alpha$. Soit $\delta \in \hat{K} \cap \overline{\mathbb{F}_q}$ tel que $k = \mathbb{F}_\alpha(\overline{\delta})$, où $\overline{\delta}$ est l'image de δ dans k. L'anneau de valuation $\hat{\mathcal{O}}$ de $\hat{K}$ étant le complété de $\mathcal{O}$ (voir [24]), il est égal à $\mathbb{F}_\alpha(\delta)[[u]]$. Ceci conclut la preuve puisque que les β_i ($i \in [\![1, n]\!]$) appartiennent à $\mathfrak{M}$ qui est inclus dans $u\hat{\mathcal{O}}$. □

Dans [11, Section 4], Chang et Mishiba fournissent un prolongement continu des fonctions polylogarithmes de Carlitz sur $\mathcal{O}_\alpha = \{z \in \Omega_\alpha \mid \boldsymbol{v}(z) \geqslant 0\}$. Décrivons brièvement ce prolongement. Soit N un entier naturel non nul. On appelle N^e puissance tensorielle du module de Carlitz la donnée du couple $E = (G_a^N, \Phi_N))$ où G_a^N désigne le groupe additif de dimension N et Φ_N l' homomorphisme injectif d'anneau de $\mathbb{F}_q[T]$ dans l'anneau $\mathbb{W}_\alpha[[F]]$ des endomorphismes de G_a^N vérifiant :

$$\Phi_N(T) = A\tau^0 + E\tau$$

où A et E sont les matrices carrées de taille N définies par

$$A = \begin{pmatrix} T & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & T & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & T & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & T \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & & & & \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et τ est l'endomorphisme de Frobenius sur G_a^N, c'est-à-dire l'élévation à la puissance q. Il existe une unique série

$$\log_{\otimes^N} = \sum_{n \geqslant 0} P_i \tau^i \qquad (P_i \in \mathcal{M}_N(\mathbb{W}))$$

telle que

$$P_0 = I_N$$
$$\operatorname{Log}_{\otimes^N}(A + E\tau) = A \operatorname{Log}_N .$$

Soit $u \in \mathcal{O}_\alpha$. On pose

$$\operatorname{Log}_{\boldsymbol{v},N,\mathcal{C}}(u) = -\frac{1}{v-1} \times \text{la } N^{\text{e}} \text{ coordonnée de } \operatorname{Log}_{\otimes^N}\big((\Phi_N(v-1))^t(0, \cdots, 0, u)\big).$$

Un calcul élémentaire montre que la dernière coordonnée de $\operatorname{Log}_{\otimes^N}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix}$ est la série entière

$$g_N(z_1, \cdots, z_N) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{N-i} \sum_{n \geqslant 0} \frac{[n]^{N-i}}{L_n^N} z_i^{q^n}.$$

Soit n un entier naturel non nul et $u_{1,n}, \cdots, u_{\mu_n,n}$ des éléments algébriques sur $\mathbb{F}_q(T)$ de valuation positive. Pour tout $i \in [\![1, \mu_n]\!]$, il existe donc des éléments $\boldsymbol{u}_{i,1,n}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i,n,n}$ algébriques sur $\mathbb{F}_q(T)$ de valuation strictement positive tels que

$$\operatorname{Log}_{\boldsymbol{v},n,\mathcal{C}}(u_{i,n}) = g_N(\boldsymbol{u}_{i,1,n}, \cdots, \boldsymbol{u}_{i,n,n}).$$

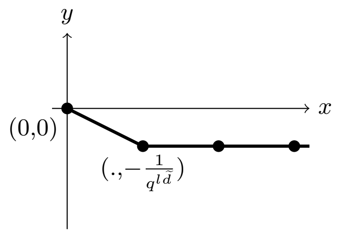
D'après la Proposition 25, il existe $\boldsymbol{u} \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ de valuation strictement positive, δ algébrique sur $\mathbb{F}_q$ tels que $T - \alpha$ et $\boldsymbol{u}_{i,j,n}$ (où on a écrit $\widetilde{\mathbb{F}_q} = \mathbb{F}_\alpha(\delta)$) appartiennent à $\boldsymbol{u}\widetilde{\mathbb{F}_q}[[\boldsymbol{u}]]$ pour tous $n \in [\![1, N]\!]$ et $(i, j) \in [\![1, \mu_n]\!] \times [\![1, n]\!]$. Notons $T - \alpha = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{u})$ et $\boldsymbol{u}_{i,j,n} = \boldsymbol{l}_{i,j,n}(\boldsymbol{u})$.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(\boldsymbol{l}^{k}(Z)-T+\alpha^{q^k})^{n-j}}{\mathbb{L}_k^n(\boldsymbol{l}(Z))}\boldsymbol{l}_{i,j,n}^{q^k}(Z)$ converge dans $\widetilde{\mathbb{F}_q}(T)[[Z]]$. On pose

$$\mathcal{G}_{i,n}(Z)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(\boldsymbol{l}^{q^k}(Z)-T+\alpha^{q^k})^{n-j}}{\mathbb{L}_k^n(\boldsymbol{l}(Z))}\boldsymbol{l}_{i,j,n}^{q^k}(Z).$$

Lemme 26. *Pour tout $l\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique élément $\boldsymbol{z}_l$ de $\mathcal{D}_\alpha(0)$ tel que $\boldsymbol{l}(z_l)=\sqrt[q^l]{T}-\alpha$.*

Démonstration. On remarque que le polygone de Newton de la fonction $1-\frac{1}{\sqrt[q^{l\tilde{d}}]{T}-\alpha}\boldsymbol{l}(z)$ est de la forme



D'après [21, Proposition 2.9], il existe un unique $\boldsymbol{z}_l\in\mathcal{D}_\alpha(0)$ tel que $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{z}_l)=\sqrt[q^{l\tilde{d}}]{T}-\alpha$. □

Lemme 27. *Soit $(\mathcal{K},\|.\|)$ un corps valué complet dont le corps résiduel est infini et $\widetilde{\mathcal{K}}$ un sous corps de $\mathcal{K}$. Si une suite $(f_n)_n$ de séries formelles de $\widetilde{\mathcal{K}}[[Z]]$ convergent vers 0 et induisent des fonctions analytiques sur $\mathcal{D}_{\mathcal{K},r}:=\{z\in\mathcal{K}\mid\|z\|\leqslant r\}$ $(r\in\|\mathcal{K}^*\|)$ qui y convergent uniformément vers 0, alors la fonction $\sum_n f_n(z)$ est analytique sur $\mathcal{D}_{\mathcal{K},r}$ et son développement de Taylor au voisinage de 0 est à coefficients dans $\widetilde{\mathcal{K}}$.*

Démonstration. L'analycité de la fonction $\sum_n f_n(z)$ est juste la Proposition [29, Proposition 44.2]. L'application

$$\varphi_n:\mathcal{K}[[Z]]\to\mathcal{K},\ \sum_n a_nZ^n\mapsto a_n$$

est continue. Notons $\mathfrak{A}_{\mathcal{K},r}$ l'ensemble des fonctions analytiques sur $\mathcal{D}_{\mathcal{K},r}$ muni de la norme infinie. Le principe du maximum (Proposition [29, Proposition 44.2]) implique que l'application

$$\widetilde{\varphi_n}:\ \mathfrak{A}_{\mathcal{K},r}\to\mathcal{K},\ \sum_n a_nz^n\mapsto a_n$$

est continue. On en déduit que

$$\widetilde{\varphi_n}(\sum_n f_n(z))=\sum_n\widetilde{\varphi_n}(f_n(z))=\sum_n\varphi_n(f_n(Z))=\varphi_n(\sum_n f_n(Z))\in\widetilde{\mathcal{K}}.$$

□

Proposition 28. *Soit $i\in[\![1,n]\!]$. La série formelle $\mathcal{G}_{i,n}$ induit une fonction développable en série entière sur $\mathcal{D}_\alpha(q^{-d/2})$ à coefficients dans $\widetilde{\mathbb{F}_q}(T)$.*

Démonstration. Soit $j\in[\![1,n]\!]$ et $z\in\mathcal{D}_\alpha(q^{-d/2})$. On a pour tout entier naturel k

$$\boldsymbol{v}\left(\frac{(\boldsymbol{l}^{q^k}(z)-T+\alpha^{q^k})^{n-j}}{\mathbb{L}_k^n(\boldsymbol{l}(z))}\boldsymbol{l}_{i,j,n}^{q^k}(z)\right)\geqslant-\frac{kn}{d}+q^{k-d/2}.$$

Par conséquent, la suite de fonctions $\left(\frac{(\boldsymbol{l}^{q^k}(z)-T+\alpha^{q^k})^{n-j}}{\mathbb{L}_k^n(\boldsymbol{l}(z))}\boldsymbol{l}_{i,j,n}^{q^k}(z)\right)_n$ converge uniformément vers 0 sur $\mathcal{D}_\alpha(q^{-d/2})$. On conclut avec la proposition précédente. □

L'entier $\widetilde{d} = [\widetilde{\mathbb{F}_q} : \mathbb{F}_q]$ est un multiple de d. La série formelle $\mathcal{G}_{i,n}$ vérifie la relation

$$\mathcal{G}_{i,n}(Z^{q^{\tilde{d}}}) = \mathbb{L}_{\tilde{d}}^{n}(\boldsymbol{l}(Z))\big(\mathcal{G}_{i,n}(Z) - \mathbb{M}_{i,n}(Z)\big), \tag{15}$$

où l'on a posé

$$\mathbb{M}_{i,n}(Z) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\sum_{k=0}^{\tilde{d}-1}\Big(\frac{(\boldsymbol{l}^{q^k}(Z) - T + \alpha^{q^k})^{n-j}}{\mathbb{L}_k^n(\boldsymbol{l}(Z))}\boldsymbol{l}_{i,j,n}^{q^k}(Z)\Big).$$

La relation fonctionnelle 15 permet de prolonger la fonction $\mathcal{G}_{i,n}(z)$ en une fonction méromorphe sur $\mathcal{D}_\alpha(0) \setminus \{\boldsymbol{z}_l \mid l \in \mathbb{N}\}$, fonction que l'on continue de noter $\mathcal{G}_{i,n}(z)$.

Lemme 29. *Soit $N_0 \in \mathbb{N}^*$ et $l \in \mathbb{N}$. Le polynôme $\widetilde{D_l} := \prod_{\substack{n\in[\![1,N_0]\!]\\ i\in[\![1,\mu_n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}} \boldsymbol{\delta}_{i,j,n}^{q^{(l+1)\tilde{d}}}$ est un dénominateur de la famille $\{\mathbb{L}_{\tilde{d}}^n(\boldsymbol{l}(\boldsymbol{u}^{q^{l\tilde{d}}})), \mathbb{L}_{\tilde{d}}^n(\boldsymbol{l}(\boldsymbol{u}^{q^{l\tilde{d}}}))\mathbb{M}_{i,n}(\boldsymbol{u}^{q^{l\tilde{d}}}) \mid n \in [\![1,N_0]\!], i \in [\![1,\mu_n]\!]\}$, où $\boldsymbol{\delta}_{i,jn}$ est le dénominateur de $\boldsymbol{u}_{i,j,n}$ (relativement à $\mathbb{F}_q(T)$). De plus pour tout $n \in [\![1,N_0]\!]$ et pour tout $i \in [\![1,\mu_n]\!]$, on a les majorations*

$$\left\lceil\mathbb{L}_{\tilde{d}}^n(\boldsymbol{u}^{q^{l\tilde{d}}})\right\rceil \leqslant 2N_0 q^{l\tilde{d}}$$

et

$$\left\lceil\mathbb{L}_{\tilde{d}}^n(\boldsymbol{u}^{q^{l\tilde{d}}})\mathbb{M}_{i,n}(\boldsymbol{u}^{q^{l\tilde{d}}})\right\rceil \leqslant q^{(l+1)\tilde{d}}\big(4N_0 + U + \deg(\widetilde{D_l})\big),$$

où $U = \max_{\substack{n\in[\![1,N_0]\!]\\ i\in[\![1,\mu_n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}} \lceil\boldsymbol{u}_{i,j,n}\rceil$.

Démonstration. Cela provient immédiatement des égalités

$$\mathbb{L}_{\tilde{d}}^n(\boldsymbol{u}^{q^{l\tilde{d}}}) = \prod_{j=1}^{\tilde{d}}[j + l\tilde{d}]^n$$

et

$$\mathbb{L}_{\tilde{d}}^n(\boldsymbol{u}^{q^{l\tilde{d}}})\mathbb{M}_{i,n}(\boldsymbol{u}^{q^{l\tilde{d}}}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\sum_{k=l\tilde{d}}^{(l+1)\tilde{d}-1}[k]^{n-j}\left(\frac{L_{(l+1)\tilde{d}}}{L_k}\right)^n \boldsymbol{u}_{i,j,n}^{q^k}$$

ainsi que de l'Égalité 1. □

On munit l'ensemble $I = \{(i,n) \mid i \in [\![1,\mu_n]\!] \times \mathbb{N}\}$ de l'ordre lexicographique $\prec$.

Proposition 30. *Si les séries formelles $\mathcal{G}_{n,i}$ ($n \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ et $i \in [\![1,\mu_n]\!]$) sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{F}_q(T)(X)$, alors il existe $N_0 \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ tel que la famille $\{\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},N_0,\mathcal{C}}(u_{i,N_0}) \mid i \in [\![1,\mu_{N_0}]\!]\}$ est $\mathbb{F}_q(T)$-linéairement dépendante.*

Démonstration. La preuve étant similaire à celle de la Proposition 22, nous serons succints sur certains passages. Soit (i_0,n_0) minimal pour $\prec$ et que tel que $\mathcal{G}_{i_0,n_0}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(T)(X)\big(\{\mathcal{G}_{i,n}(X) \mid (i,n) \precneqq (i_0,n_0)\}\big)$. On note I_0 l'ensemble des éléments de I plus petit que (i_0,n_0) pour $\prec$. Il existe un polynôme $P \in (\overline{\mathbb{F}_q}(T))(X)[(X_{i,n})_{(i,n)\in I_0}]$ tel que

$$P((\mathcal{G}_{i,n}(X))_{(i,n)\in I_0}) = 0.$$

et qui engendre les relations algébriques entre les $\mathcal{G}_{(i,n)}$ ($(i,n) \in I_0$)). Puisque $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{u})$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(\boldsymbol{u})$ et que $\boldsymbol{u}$ est transcendant sur $\overline{\mathbb{F}_q}$, $\boldsymbol{l}(X)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(X)$ et donc aussi $\mathbb{L}_{\tilde{d}}(\boldsymbol{l}(X))$. Comme

$$P(X^{q^{\tilde{d}}})((\mathcal{G}_{i,n}(X^{q^{\tilde{d}}}))_{(i,n)\in I_0}) = 0,$$

par les relations fonctionnelles 15, on a

$$P(X^{q^{\tilde{d}}})\big((\mathbb{L}_{\tilde{d}}^n(\boldsymbol{l}(X))(X_{i,n} - \mathbb{M}_{i,n}(X)))_{(i,n)\in I_0}\big) = R(X)P(X)((X_{i,n})_{(i,n)\in I_0})),$$

avec $R(X) \in \mathfrak{u}_X$. Il existe un polynôme Q de degré total en les $X_{(i,n)}$ ($(i,n) \in I_0$) minimal non nul dans l'ensemble $\mathcal{S}$ des polynômes $(Q(X))((X_{(i,n)})_{(i,n)\in I_0}))$ de $\mathfrak{u}[(X_{(i,n)})_{(i,n)\in I_0}]$ vérifiant la relation fonctionnelle

$$Q(X^{q^{\tilde{d}}})\big((\mathbb{L}_{\tilde{d}}^{n}(\boldsymbol{l}(X))(X_{i,n} - \mathbb{M}_{i,n}(X)))_{(i,n)\in I_0}\big) = R_Q(X)Q(X)((X_{i,n})_{(i,n)\in I_0})), \qquad (\star\star)$$

avec $R_Q(X) \in \mathfrak{u}_X$. Raisonnant comme dans la Proposition 22, on obtient que

$$Q(X)((X_{(i,n)})_{(i,n)\in I_0})) = \sum_{u\in I_0} \eta_u X_u + \sum_{\mathcal{J}\ni \underline{j}=(j_u)_{u\in I_0}} d_{\underline{j}} \prod_{u\in I_0} X_u^{pj_u},$$

où $\mathcal{J}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^{\mathrm{Card}(I_0)}$, les η_u et les $d_{\underline{j}}$ sont des éléments de $\mathfrak{V}(X)$. Il existe $u_1 = (i_1, n_1) \in I_0$ tel que η_{u_1} est non nul. Soit $\mathcal{J} \ni \underline{J} = (j_u)_{u\in I_0}$ tel que $\prod_{u\in I_0} X_u^{pj_u}$ est de degré total maximal non nul. On obtient les relations : pour tout $u = (i,n) \in I_0$

$$\left(\frac{\eta_{u_1}}{\eta_u}\right)(X^{q^{\tilde{d}}}) = \mathbb{L}_{\tilde{d}}^{n-n_1}(\boldsymbol{l}(X))\left(\frac{\eta_{u_1}}{\eta_u}\right)(X)$$

et

$$\left(\frac{d_{\underline{J}}}{\eta_{u_1}}\right)(X^{q^{\tilde{d}}}) = (\mathbb{L}_{\tilde{d}}(\boldsymbol{l}(X)))^{p(\sum_{u\in I_0} j_u)-n_1}\left(\frac{d_{\underline{J}}}{\eta_{u_1}}\right)(X).$$

Le Lemme 21 implique que $d_{\underline{J}} = 0$, $\eta_u = 0$ si $u = (i,n) \in I_0$ avec $n \neq n_1$ et pour tout $u = (i, n_1) \in I_0$, on a $\eta_u = \widetilde{\eta_u}\eta_{u_1}(X)$ avec $\widetilde{\eta_u} \in \mathfrak{V}$. On obtient que

$$Q(X)((X_u)_{u\in \mathbb{I}_0}) = \nu(X) + \eta_{u_1}(X) \sum_{\substack{u=(i,n)\in I_0\\ n=n_1}} \widetilde{\eta_u} X_u,$$

où $\nu \in \mathfrak{u}_X$. La relation $(\star\star)$ impose que $R_Q = \mathbb{L}_{\tilde{d}}^{n_1}(\boldsymbol{l}(X))$. Par conséquence, il existe $\widetilde{\nu} \in \mathfrak{u}_X$ tel que

$$\widetilde{\nu}(X^{q^{\tilde{d}}}) - \mathbb{L}_{\tilde{d}}^{n_1}(\boldsymbol{l}(X)) \sum_{(i,n_1)\in I_0} \widetilde{\nu_{i,n_1}}\mathbb{M}_{i,n_1}(X) = \mathbb{L}_{\tilde{d}}^{n_1}(\boldsymbol{l}(X))\widetilde{\nu}(X).$$

Il s'en suit par récurrence sur k que

$$\frac{\widetilde{\nu}(X^{q^{k\tilde{d}}})}{\mathbb{L}_{k\tilde{d}}^{n_1}(\boldsymbol{l}(X))} = \sum_{l=1}^{k} \sum_{(i,n_1)\in I_0} \widetilde{\eta_{(i,n_1)}} \frac{\mathbb{M}_{i,n_1}(X^{q^{(l-1)\tilde{d}}})}{\mathbb{L}_{l\tilde{d}}^{n_1}(\boldsymbol{l}(X))} + \widetilde{\nu}(X).$$

Cela permet de prouver que $\sum_{(i,n_1)\in I_0} \widetilde{\eta_{(i,n_1)}}\mathcal{G}_{i,n_1}(X) \in \mathfrak{u}_X$. Il existe un entier naturel j et des polynômes non tous nuls $\kappa_{(i,n_1)}$ ($i \in [\![1, \mu_{n_1}]\!]$) de $\overline{\mathbb{F}_q}[T]$ tels que

$$\sum_{(i,n_1)\in I_0} \kappa_{(i,n_1)}\mathcal{G}_{i,n_1}^{p^j}(X) \in \mathfrak{u}_X.$$

Notons j_0 le plus petit entier naturel tel qu'il existe des polynômes non tous nuls $\lambda_{(i,n_1)}$ ($i \in [\![1, \mu_{n_1}]\!]$) de $\overline{\mathbb{F}_q}[T]$ tels que

$$\sum_{(i,n_1)\in I_0} \lambda_{(i,n_1)}\mathcal{G}_{i,n_1}^{p^{j_0}}(X) \in \mathfrak{u}_X.$$

On munit l'ensemble $(\overline{\mathbb{F}_q}[T])^{I_0}$ de l'ordre partiel $\prec_{I_0}$ défini par :

$$(P_{(i,n)})_{(i,n)\in I_0} \prec_{I_0} (Q_{(i,n)})_{(i,n)\in I_0} \iff \forall (i,n) \in I_0 \ \deg(P_{(i,n)}) \leqslant \deg(Q_{(i,n)})$$

Considérons un élément non nul $(\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}})_{(i,n_1)\in I_0}$ de $(\overline{\mathbb{F}_q}[T])^{I_0}$ minimal pour $\prec_{I_0}$ tel que

$$\mathcal{G}(X) := \sum_{(i,n_1)\in I_0} \widetilde{\kappa_{(i,n_1)}}\mathcal{G}_{i,n_1}^{p^{j_0}}(X) \qquad \in \mathfrak{u}_X. \qquad (\spadesuit)$$

Un tel élément existe d'après la discussion ci-dessus. Par le Lemme 19, la fonction

$$\boldsymbol{D}(\mathcal{G}(X)) = \sum_{(i,n_1)\in I_0} \frac{d}{dT}\big(\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}}\big)\mathcal{G}_{i,n_1}^{p^{j_0}}(X)$$

appartient à $\mathfrak{u}_X$. Par minimalié de $(\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}})_{(i,n_1)\in I_0}$, pour tout $(i,n_1) \in I_0$, $\frac{d}{dT}\big(\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}}\big)$ est nul et donc appartient à $\overline{\mathbb{F}_q}[T^p]$. En extrayant une racine p^{e} de l'Appartenance $\spadesuit$, on contredit la minimalité de j_0. Ainsi $j_0 = 0$. Considérons l'endomorphisme σ de $\mathfrak{U}_X$ défini par $\sigma(x) = x^q$ si $x \in \overline{\mathbb{F}_q}$, $\sigma(T) = T$ et $\sigma(X) = X^q$. On a $\mathcal{G} - \sigma(\mathcal{G}) \in \mathfrak{u}_X$. De nouveau, la minimalité de $(\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}})_{(i,n_1)\in I_0}$ implique que pour tout $(i,n_1) \in I_0$, $\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}} = \sigma(\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}})$, c'est-à-dire que $\widetilde{\kappa_{(i,n_1)}}$ appartient à $\mathbb{F}_q[T]$. On conclut avec le Lemme 31 ci-dessous. □

Lemme 31. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda_{i,n}$ ($i \in [\![1,\mu_n]\!]$) des éléments de $\mathbb{F}_q(T)$. On suppose que la fonction $\sum_{i\in[\![1,\mu_n]\!]} \lambda_{(i,n)}\mathcal{G}_{i,n}(z)$ est algébrique sur $\Omega_\alpha(z)$. Alors la famille $\{\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},n,\mathcal{C}}(u_{i,n}) \mid i \in [\![1,\mu_n]\!]\}$ est $\mathbb{F}_q(T)$-linéairement indépendante.*

Démonstration. Notons $\mathcal{G}_n$ la fonction $\sum_{i\in[\![1,\mu_n]\!]} \lambda_{(i,n)}\mathcal{G}_{i,n}(z)$. Soit k un entier naturel. La fonction $\mathcal{G}_n$ étant algébrique sur $\Omega_\alpha(z)$ (Proposition 15), elle admet un nombre fini de pôles. Par conséquent, il existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tel que z_{s_0} ne soit pas un pôle de $\mathcal{G}_n$. On déduit de l'égalité valable sur $\mathcal{A}_\alpha$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_n(z) = &\sum_{i\in[\![1,\mu_n]\!]} \lambda_{(i,n)} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \sum_{k=0}^{s_0\tilde{d}-1} \frac{(\boldsymbol{l}^{q^k}(z) - T + \alpha^{q^k})^{n-j}}{\mathbb{L}_k^n(\boldsymbol{l}(z))} \boldsymbol{l}_{i,j,n}^{q^k}(z)\\ &+ \frac{1}{\mathbb{L}^n_{s_0\tilde{d}}(\boldsymbol{l}(z))} \sum_{i\in[\![1,\mu_n]\!]} \lambda_{(i,n)} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \sum_{k=s_0\tilde{d}}^{+\infty} \frac{(\boldsymbol{l}^{q^k}(z) - T + \alpha^{q^k})^{n-j}}{\mathbb{L}_k^n(\boldsymbol{l}(z))/\mathbb{L}^n_{s_0\tilde{d}}(\boldsymbol{l}(z))} \boldsymbol{l}_{i,j,n}^{q^k}(z)\end{aligned}$$

que z_{s_0} est un zéro de la fonction

$$\sum_{i\in[\![1,\mu_n]\!]} \lambda_{(i,n)} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \sum_{k=s_0\tilde{d}}^{+\infty} \frac{(\boldsymbol{l}^{q^k}(z) - T + \alpha^{q^k})^{n-j}}{\mathbb{L}_k^n(\boldsymbol{l}(z))/\mathbb{L}^n_{s_0\tilde{d}}(\boldsymbol{l}(z))} \boldsymbol{l}_{i,j,n}^{q^k}(z).$$

On conclut grâce à l'égalité $z^{q^{s_0d}} = T - \alpha$ et au changement d'indices $j = k - s_0 d$. □

Nous sommes en mesure de prouver le

Théorème 32. *Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$, soit $u_{1,n}, \cdots, u_{\mu_n,n}$ des éléments de $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ de valuation positive. La famille $\{\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},n,\mathcal{C}}(u_{i,n}) \mid n \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N},\ i \in [\![1,\mu_n]\!]\}$ est algébriquement dépendante sur $\mathbb{F}_q(T)$, si et seulement s'il existe $N_0 \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ tel que la famille $\{\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},n,\mathcal{C}}(u_{i,N_0}) \mid i \in [\![1,\mu_{N_0}]\!]\}$ est $\mathbb{F}_q(T)$-linéairement dépendante.*

Démonstration. Soit k un entier tel que $\boldsymbol{u}^{q^{k\tilde{d}}}$ soit dans le disque de convergence des séries entières $\mathcal{G}_{i,n}$. La famille $\{\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},n,\mathcal{C}}(u_{i,n}) \mid n \in \mathbb{N}\setminus p\mathbb{N},\ i \in [\![1,\mu_n]\!]\}$ est algébriquement indépendante sur $\mathbb{F}_q(T)$ si et seulement si la famille $\{\mathcal{G}_{i,n}(\boldsymbol{u}^{kd}) \mid n \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N},\ i \in [\![1,\mu_n]\!]\}$ l'est. Si pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ la famille $\{\mathrm{Log}_{\boldsymbol{v},n,\mathcal{C}}(u_{i,N}) \mid i \in [\![1,\mu_{N_0}]\!]\}$ est $\mathbb{F}_q(T)$-linéairement indépendante, la famille $\{\mathcal{G}_{i,n}(X) \mid n \in [\![1,M]\!], p \nmid n,\ i \in [\![1,\mu_n]\!]\}$ est algébriquement indépendante sur $\mathbb{F}_q(T)(X)$ d'après la Proposition 30. Par le Lemme 29 et l'extension du théorème de Nishioka (Théorème 5), la famille $\{\mathcal{G}_{i,n}(\boldsymbol{u}^{k\tilde{d}}) \mid n \in [\![1,M]\!], p \nmid n,\ i \in [\![1,\mu_n]\!]\}$ est $\mathbb{F}_q(T)$-algébriquement indépendante pour tout entier $M \geqslant 1$. Ce qui prouve le théorème. □

Références

[1] B. Adamczewski, C. Faverjon, *A new proof of Nishioka's theorem in Mahler's method*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **361** (2023), 1011–1028.

[2] G. W. Anderson, D. Thakur, *Tensor powers of the Carlitz module and zeta values*, Ann. Math. **132.1** (1990), 159–191.

[3] G. W. Anderson, W. D. Brownawell, M. A. Papanikolas, *Determination of the algebraic relations among special* Γ*-values*, Ann. Math. **160.2** (2004), 237–313.

[4] V. Berthe, *De nouvelles preuves « automatiques »de transcendance pour la fonction zêta de Carlitz*, Astérisque **209** (1992), 159–168.

[5] F. Brunault, W. Sawin, *Mathoverflow.*

[6] P.J. Cahen, J.L. Chabert, *Old problems and new questions around integer-valued polynomials and factorial sequences*, Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra, Springer (2006), 89–108.

[7] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Mathematical Journal **1** (1935), 137–168.

[8] L. Carlitz, *An analogue of the von Staudt-Clausen theorem*, Duke Mathematical Journal **3.3** (1937), 503–517.

[9] L. Carlitz, *A set of polynomials*, Duke Mathematical Journal, **6.2** (1940), 486–504.

[10] C.Y. Chang, J. Yu, *Determination of algebraic relations among special zeta values in positive characteristic*, Adv. Math. **216** (2007), 321–345.

[11] C.Y. Chang, Y. Mishiba, *On multiple polylogarithms in characteristic p : v-adic vanishing versus ∞-Eulerianness*, International Mathematics Research Notices **2019.3** (2019), 923–947.

[12] C.Y. Chang, F.T. Wei, J. Yu, *v-adic periods of Carlitz motives and Chowla-Selberg formula revisited*, prépublication ARXIV.

[13] L. Denis, *Baker Theorem and Drinfeld Modules*, J. Number Theo. **43.2** (1993), 203–215.

[14] G. Damamme, Y. Hellegouarch, *Transcendence of the values of the Carlitz zeta function by Wade's method*, J. Number Theo. **39.3** (1991), 257–278.

[15] L. Denis, *Indépendance algébrique des dérivées d'une période du module de Carlitz*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **69.1** (2000), 8–18.

[16] L. Denis, *Indépendance algébrique de logarithmes en caractéristique p*, Bull. Austral. Math. Soc. **74.3** (2006), 461–470.

[17] L. Denis, *Approximation algébrique en caractéristique p*, Acta Arith. **147.2** (2011), 101–113.

[18] A. Escassut, *p-adic analytic functions*, World Scientific (2021).)

[19] G. Fernandes, *Méthode de Mahler en caractéristique non nulle : un analogue du théorème de Ku. Nishioka*, Ann. Inst. Fourier **68.6** (2018), 2553–2580.

[20] D. Goss, *v-adic zeta functions, L-series and measures for function fields*, Invent Math **55** (1979), 107–116.

[21] D. Goss, *Basic Structures of Function Field Arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, **35**, Springer Berlin (1996).

[22] S. Lang, *Algèbre*, Dunod (2020).

[23] H. Matsumura, *Commutative rings theory*, Cambridge University Press (1986).

[24] J. Neukirch, *Algebraic number theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Springer (1995).

[25] Ku. Nishioka, *Mahler functions and transcendence*, Lecture Notes in Mathematics **1631** (1996).

[26] M.A. Papanikolas, *Tannakian duality for Anderson–Drinfeld motives and algebraic independence of Carlitz logarithms* , Invent. math. **171** (2008), 123–174.

[27] F. Pellarin, *An introduction to Mahler's method for transcendence and algebraic independence*, t-Motives : Hodge structures, transcendence and other motivic aspects, European Math. Soc. pub. (2020), 297–349.

[28] P. Philippon, *Critères pour l'indépendance algébrique dans les anneaux diophantiens*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **315.5** (1992), 511–515.

[29] W.H. Schikhof, *Ultrametric Calculus* Cambridge University Press (1982).

[30] L.I. Wade, *Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$*, Duke Math. J. **8.4** (1941), 701–720.

[31] L.I. Wade, *Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$, II*, Duke Math. J. **10** (1943), 587–594.

[32] J. Yu, *Transcendence theory over function fields*, Duke Math. J. **52** (1985), 517–527.

[33] J. Yu, *Transcendence and special zeta values in characteristic p*, Annals Math. **134.1** (1991), 1–23.

[34] J. Yu, *Analytic homomorphisms into Drinfeld modules*, Ann. of Math. *145.2* (1997), 215–233.

Tahiti, France
Email address: david.adam.tahiti@outlook.fr

Laboratoire Paul Painlevé UMR CNRS 8524, Université des Sciences et Technologies de Lille1, 59665 Villeneuve d'Ascq, France
Email address: laurent.denis@univ.lille1.fr