

# Calculation and Prediction of the Frequency of the $^{229}\text{Th}$ Nuclear Transition

Gang Chen<sup>†</sup>, Tianman Chen, Tianyi Chen

<sup>†</sup>Correspondence to: gang137.chen@connect.polyu.hk

## Abstract

The accurate measurements of the frequency of the nuclear energy level transition of  $^{229}\text{Th}$  base state to excited state  $^{229\text{m}}\text{Th}$  (the frequency of  $^{229}\text{Th}$  nuclear transition for short) is critical to realize nuclear clocks. On 04 December 2024 Prof. Jun Ye's laboratory reported the most accurate measured value for this frequency, i.e.,  $2.020407384335(2)\times 10^{15}$  Hz, with 12 precise digits, and gave its ratio with the frequency of  $^{87}\text{Sr}$  optical atomic clock, i.e., 4.707072615078(5). In this paper, we construct reasonable formulas, and calculate out the reciprocal of the frequency of  $^{229}\text{Th}$  nuclear transition in atomic units, the reciprocal of the frequency of  $^{87}\text{Sr}$  optical atomic clock in atomic units and the ratio between them, which are 20.461899741458143308, 96.315647925496289349 and 4.7070726150783448253 respectively. As the most accurate measured frequency of  $^{87}\text{Sr}$  optical atomic clock is 429228004229873.19(15) Hz, we calculate out the frequency of  $^{229}\text{Th}$  nuclear transition which is 2020407384335168.05(0.71) Hz, with 15 precise digits. We also calculate out the more precise values of the atomic unit of time, which is  $2.41888432658653170(85)\times 10^{-17}$  s, and hence calculate out more precise Rydberg constant, Hartree energy, Bohr radius, classical electron radius and electron mass.

**Keywords:**  $^{229}\text{Th}$ , nuclear transition, frequency, nuclear clock,  $^{87}\text{Sr}$ , optical atomic clock, atomic unit of time, Rydberg constant, Hartree energy, Bohr radius, classical electron radius, electron mass.

## 摘要

$^{229}\text{Th}$  原子核基态至激发态  $^{229\text{m}}\text{Th}$  的核跃迁频率（简称  $^{229}\text{Th}$  核跃迁频率）的精确测量是实现核钟的关键。叶军教授实验室于 2024 年 9 月 4 日报道了对此频率的最精确测量值，即  $2.020407384335(2)\times 10^{15}$  Hz，具有 12 位准确数字，并给

出其与  $^{87}\text{Sr}$  光原子钟频率的比值，即 4.707072615078(5)。本文中我们构建合理公式，计算出原子单位制中  $^{229}\text{Th}$  核跃迁频率的倒数、原子单位制中  $^{87}\text{Sr}$  光原子钟频率的倒数和它们的比值分别为 20.461899741458143308、96.315647925496289349 和 4.7070726150783448253。由于  $^{87}\text{Sr}$  光原子钟频率的最精确测量值为 429228004229873.19(0.15) Hz，我们计算出  $^{229}\text{Th}$  核跃迁频率为 2020407384335168.05(0.71) Hz，具有 15 位准确数字。我们也计算出原子单位时间的更精确值，即  $2.41888432658653170(85)\times 10^{-17}$  s，并由此计算出更精确的 Rydberg 常数、Hartree 能量、玻尔半径、经典电子半径和电子质量。

**关键词：**钍 229，核跃迁，频率，核钟，铯 87，光原子钟，原子单位时间，里德伯常数，哈特里能量，玻尔半径，经典电子半径，电子质量。

## 1. 介绍

们知道数学和科学起源于古希腊，形象说古希腊有数学和科学的种子，这种种子很可能包含了数学和科学的原初基因。例如古希腊毕达哥拉斯（Pythagoras）学派认为“万物皆数（自然数）、万物皆比例（有理数）”，虽然人类后来发现了无理数，对他们的观点形成了超越，但作为数学和科学的鼻祖，毕达哥拉斯学派的观点是不能忽视、不可小觑的，是应该敬仰和重视的。特别是按照我们的观点，无理数在现实中不存在的，实数与数轴上的点一一对应是错误的（认为点没有大小是错误的，且与现实不合）[1]，尤其是亚原子世界（例如原子核中）是一个自然数世界，因此毕达哥拉斯学派的观点在亚原子世界（例如原子核中）是正确的。因此我们将毕达哥拉斯学派的“万物皆数（自然数）、万物皆比例（有理数）”的观点称为毕达哥拉斯公理或原理。另外，19 世纪德国数学家克罗内克（Kroneker, 1823-1891）也有名言“God made natural numbers, all else is the work of man”，即“上帝创造了自然数，其余是人的工作”。本文作者秉承毕达哥拉斯学派和克罗内克等的观点，认为亚原子世界是自然数世界，其中的自然数及其比例都是有意义的，我们需要发现和解释它们。

利用原子中的电子能级跃迁，人类已经制造出了微波频率的原子钟（微波原子钟或原子钟）和可见光频率的原子钟（光原子钟或光钟），下一步人类将探索利用原子核的能级跃迁的核钟。原子核的跃迁能量基本上都是几十、几百 keV 级别的，对应伽马射线，频率太高，但  $^{229}\text{Th}$  的基态至激发态  $^{229\text{m}}\text{Th}$  的跃迁

能量低至 8.36eV，对应的电磁波为真空紫外光（VUV），这就为人类制造核钟开了一扇窗户。精确测量  $^{229}\text{Th}$  的核跃迁频率是制造核钟为关键，目前叶军教授实验室取得了最精确的测量结果[2]，给出  $2.020407384335(2)\times 10^{15}$  Hz 的测量值，有 12 位准确数字，并给出其与  $^{87}\text{Sr}$  光原子钟频率的比值即 4.707072615078(5)。

本文将构建合理的公式，对  $^{229}\text{Th}$  的核跃迁频率进行计算和预测，并解释公式中的自然数和比例的意义。也计算出更准确的原子单位时间，由此也计算出更精确的玻尔半径、Rydberg 常数、Hartree 能量、经典电子半径和电子质量。

## 2. 手性理论的五条原理

在我们以前的文章中，我们提出了手性理论的四条原理，现在我们增加一条原理，成为手性理论的五条原理[1, 3-8]。

### 原理一 (Principle 1):

手性(Chirality) =  $\pm 2\pi$

一双手可抽象为反时针或顺时针的圆； $\pm 2\pi$ 代表右手和左手

### 原理二 (Principle 2):

在亚原子世界，圆应该分为 $420^\circ$ ，手性与 $840^\circ$ 相对应。

圆 =  $2\pi = 420^\circ$ ，一双手可以抽象为反、顺时针的两个圆，

所以：一双手 = 手性(Chirality) =  $\pm 2\pi = \pm 420^\circ = 840^\circ$

右撇子和左撇子两双手： $\pm \text{Chirality} = \pm 840^\circ$

$840^\circ = 1(2\ 4\ 8)(3\ 5\ 7)$ ， $\pm 840^\circ = \pm 1(2\ 4\ 8)(3\ 5\ 7)$

一双手中的最大的也是最稳定的稳定数是56

右撇子、左撇子中最大的稳定数是 $2 \times 56 = 112$

亚原子世界例如原子核处于手性空间，适用 $840^\circ$ 。

其中最稳定数为 $56 = 8 \times 7$ ，元素的自然终点为112号 $Cn^*$ 。

### 原理三 (Principle 3):

$$2\pi - e \text{公式: } 2\pi = \left(\frac{e}{e^{\gamma_c}}\right)^2 = e^2 \frac{e^2}{\left(\frac{2}{1}\right)^3} \frac{e^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^5} \frac{e^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^7} \dots$$

$$(2\pi)_{\text{Chen-k}} = \left(\frac{e}{e^{\gamma_{c,k}}}\right)^2 = e^2 \frac{e^2}{\left(\frac{2}{1}\right)^3} \frac{e^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^5} \dots \frac{e^2}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{2k+1}}$$

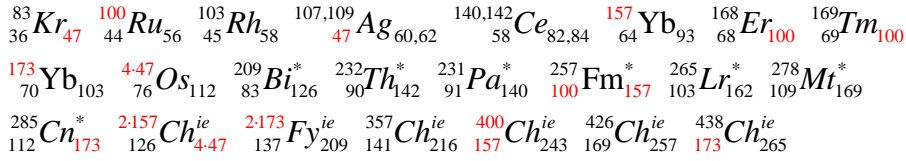
### 原理四 (Principle 4):

在亚原子世界，适用的数轴为百分度的自然数数轴(NNA-100)，

此时无理数例如 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 和 $\pi$ 表现为 $141/100$ 、 $173/100$ 和 $314/100$ ，

且有 $141+173=314$ ，或 $\frac{141}{2} + \frac{173}{2} = 157$ ，注意 $141 = 3 \cdot 47$ ，

并与元素核素对应，例如：



**原理五 (Principle 5):**

进制具有科学性。在原子核中同时存在了4、6、10和14进制，它们都是科学的，这些进制组成了元素核素的基本骨架。元素的宇宙大爆炸阶段主要合成H和He，此时适用的进制是2进制；元素恒星合成阶段合成其它元素，此时适用的进制是2、6、10和14进制，这些进制互相配合并决定了元素的数量和基本元素的种类。在人类的世界也有这些进制的存在，其中10进制最常用。除这些自然数进制外，还有以自然对数的底数e为基础的e进制，其应是自然数进制的综合，并适用于自然和科学中。

**3. 原子单位制**

我们发现在亚原子世界例如原子核中，适用的数轴是百分度的自然数数轴 (NNA-100)，由此我们对 Hartree 原子单位制进行了如下的改进[1, 3-8]。

Hartree Atomic Units (*au*):

$$\hbar_{au} = e_{au} = a_{0/au} = m_{e/au} = 1, \quad \hbar_{au} = \frac{h_{au}}{2\pi} = 1, \quad h_{au} = 2\pi$$

Hartree-Chen Atomic Units (still abbreviated as *au*):

$$\hbar_{au} = e_{au} = a_{0/au} = m_{e/au} = 1$$

$$\hbar_{au} = \frac{h_{au}}{(2\pi)_{au}} = 1, \quad h_{au} = (2\pi)_{au} = \frac{4 \cdot 157}{100} = 6.28, \quad (2\pi)_{au} = 420^\circ$$

In the subatomic world,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  and  $\pi$  express as rational numbers

$$(\sqrt{2})_{au} = \frac{141}{100} = 1.41, \quad (\sqrt{3})_{au} = \frac{173}{100} = 1.73$$

$$(\pi)_{au} = \frac{2 \cdot 157}{100} = 3.14, \quad (2\pi)_{au} = \frac{4 \cdot 157}{100} = 6.28$$

$$(\sqrt{2})_{au} + (\sqrt{3})_{au} = (\pi)_{au}, \quad 1.41 + 1.73 = 3.14, \quad 141 + 173 = 2 \cdot 157$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{au} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)_{au} = \left(\frac{\pi}{2}\right)_{au}, \quad \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)_{au} + \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)_{au} = \left(\frac{\pi}{2}\right)_{au}$$

$$\frac{141}{2} + \frac{173}{2} = 157$$

In the subatomic world, a circle should be divided into 420°

$$(2\pi)_{au} = 420^\circ, \quad \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)_{au} = \left(\sin 70^\circ\right)_{au} = \frac{173}{2 \cdot 100} \quad ({}^{173}_{70}\text{Yb}_{103})$$

#### 4. 精细结构常数公式

精细结构常数为物理学的百年之谜，1916年由物理学家 Sommerfeld 引入。物理学家 Feynman 根据精细结构常数的定义，认为最大的类氢原子（即只有一个电子但核电荷可以增加的原子）其核电荷数不能超过 137，否则基态电子的等效速度将超过光速。所以他认为最大的元素是 137 号，可称为元素的费曼终点（Fy）。我们由此通过以下步骤推导出精细结构常数公式[3, 9-12]。

精细结构常数 $\alpha$ 的定义之一为H原子基态电子等效线速度与光速之比，

$$\text{即: } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{v_e}{c} \approx \frac{1}{137.036}$$

Feynman注意到类H原子（Z个质子但仍然只有1个电子的原子）基态：

$$Z\alpha = \frac{v}{c} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{Zv_e}{c},$$

由于电子速度v不能超过光速c，所以： $Z_{\text{max-ideal}} = 137 \approx \frac{1}{\alpha}$ ，即： $\alpha = \frac{1}{Z_{\text{max-ideal}}}$

这是一个粗略的精细结构常数公式，是我们比Feynman多走的第一步。

我们根据原子核的手性模型[3]、核素周期表[3]和新的元素周期表[6, 7]认为 112 号元素 Cn\*为元素的自然终点。试问其与元素的费曼终点是什么关系，由此将 112 变换为 137 即得到合理和精确的精细结构常数公式[2, 8-11]。

$$\alpha = F(ZNA) = f(ZNA) \frac{1}{Z_{\text{max-real}}} \approx \frac{1}{Z_{\text{max-ideal}}} \quad (ZNA \text{代表质子、中子和总核子数})$$

$$\text{例证: } {}_{56}^{136,137,138}\text{Ba}_{80,81,82} \quad {}_{86}^{222}\text{Ac}_{136}^* \quad {}_{87}^{223,224}\text{Fr}_{136,137}^* \quad {}_{88}^{226}\text{Ra}_{138}^* \quad {}_{89}^{227}\text{Ac}_{138}^* \quad {}_{136,137,138}^{344,2173,348}\text{Fy}_{208,209,210}^{ie}$$

根据原子核的手性模型、核素周期表和新的元素周期表： $Z_{\text{max-real}} = 112$

$$\text{根据精细结构常数的定义: } \alpha = \frac{\lambda_e}{2\pi a_0}, \quad \alpha = \frac{2\pi r_e}{\lambda_e}$$

$$\text{我们认为有两个精细结构常数, 即: } \alpha_1 = \frac{\lambda_e}{2\pi a_0}, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi r_e}{\lambda_e}$$

引入 $2\pi$ 因子，再代入 $2\pi - e$ 公式和考虑 $2\pi$ 是平方数，

由此构建如下两个精细结构常数公式：

$$\alpha_1 = \frac{36}{7(2\pi)_{\text{Chen-112}}} \frac{1}{112 + \frac{1}{75^2}} = 1/137.035999037435$$

注意： $\alpha_1$ 公式中两个112的巧合，36和 $2\pi$ 都为平方数。

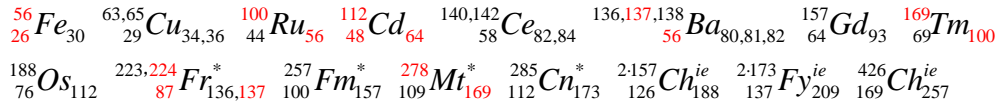
由于 $\alpha$ 为核子数Z、N、A的函数，我们认为该公式中的因子为核子数，

因此该公式与以下元素核素相关联：

$$\begin{array}{cccccccc}
^{83,84}_{36}\text{Kr}_{47,48} & ^{136,137,138}_{56}\text{Ba}_{80,81,82} & ^{185,187}_{75}\text{Re}_{110,112} & ^{209}_{83}\text{Bi}_{126}^* & ^{209}_{84}\text{Po}_{125}^* & ^{285}_{112}\text{Cn}_{173}^* & ^{2-173}_{137}\text{Fy}_{209}^{ie} \\
\alpha_2 = \frac{13(2\pi)_{\text{Chen-278}}}{100} \frac{1}{112 - \frac{1}{64 \cdot 3 \cdot 29}} = 1/137.035999111818
\end{array}$$

注意：100和 $2\pi$ 都为平方数。

同理，与以下元素核素相关联：



## 5. 原子单位制中的光速公式

人类将光速定义为 299792458 米/秒，即约等于 30 万公里每秒，但这是人类眼中的光速，不具有宇宙的普遍意义。宇宙中可能有一个标准的光速，即以氢原子中基态电子的等效线速度  $v_e$  为 1，光速即为 137.035999...，这称为原子单位制中的光速，形象说是氢原子眼中的光速。以下是我们推导出的原子单位制中的光速公式[13]，其中同时出现 141、173 和 157 因子，这样神奇的巧合说明它们与百分度的自然数数轴（NNA-100）中的根号 2、根号 3 和  $\pi$  相联系。

$$\begin{aligned}
\text{Maxwell formula: } c &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \\
c_{au} &= \frac{c}{v_e} = \frac{1}{\alpha_c} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \\
&= \sqrt{112(168 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4 \cdot 141} - \frac{1}{14 \cdot 112(2 \cdot 173 + 1)})} \\
&= \sqrt{112(167 + \frac{126}{188} - \frac{1}{4 \cdot 141} - \frac{1}{14 \cdot 112(2 \cdot 173 + 1)})} \\
&= \sqrt{112(166 + \frac{2 \cdot 157}{188} - \frac{1}{4 \cdot 141} - \frac{1}{14 \cdot 112(2 \cdot 173 + 1)})} \\
&= 137.035999074626 \\
\frac{c_{au}}{2} &= \sqrt{56(84 - \frac{1}{6} + \frac{1}{8 \cdot 141} - \frac{1}{56^2(2 \cdot 173 + 1)})} \\
&= \sqrt{56(83 + \frac{157}{4 \cdot 47} - (\frac{1}{8 \cdot 141} + \frac{1}{56^2(2 \cdot 173 + 1)})} \\
&= 137.035999074626 / 2
\end{aligned}$$

56为原子核中的最稳定数，56主要代表56号元素Ba。

83号元素Bi为稳定元素的终点和放射性元素的起点。

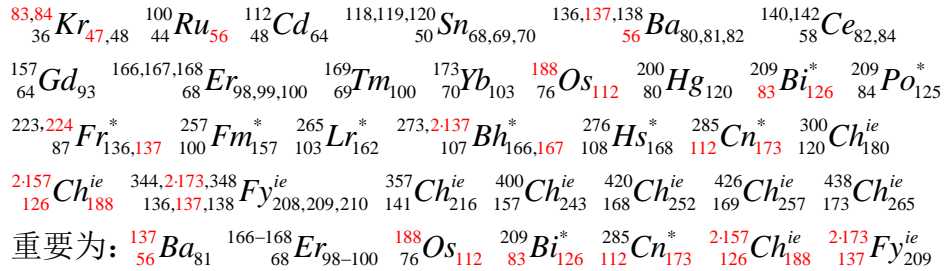
注意： $3 \times 47 = 141$ ， $4 \times 47 = 188$ ， $7 \times 12 = 84$ ， $7 \times 24 = 168$ 。

$$(\sqrt{2})_{au} = \frac{141}{100}, (\sqrt{3})_{au} = \frac{173}{100}, (\pi)_{au} = \frac{2 \cdot 157}{100}, (2\pi)_{au} = \frac{4 \cdot 157}{100}$$

$$141+173=2 \cdot 157, \frac{141}{2} + \frac{173}{2} = 157$$

由于由于 $\alpha$ 为核子数 $Z$ 、 $N$ 、 $A$ 的函数，适当形式的 $c_{au} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}$ 也应

为核子数 $Z$ 、 $N$ 、 $A$ 的函数，因此它们与以下核素相关联：



## 6. $^{229}Th$ 核跃迁频率的计算（一）

对于 $^{229}Th$ 的核跃迁频率，叶军教授实验室于2024年9月4日在Nature发表文章[2]，报道其最精确的测量值为 $2.020407384335(2) \times 10^{15}$  Hz，有12位准确数字。我们的观点是，可把这个测量值转换到原子单位制中，并取其倒数，其物理意义为此频率的光传播一个周期所需的原子单位时间。

原子单位时间(atomic unit of time)定义为H原子中电子运行玻尔半径 $a_0$ 的时间，

$$\text{即： } t_{au} = \frac{a_0}{v_e} = 2.4188843265864(26) \times 10^{-17} \text{ s (CODATA 2022)}$$

叶军教授实验室对 $^{229}Th$ 核跃迁频率的最新测量值为：

$$v_{Th-meas} = 2.020407384335(2) \times 10^{15} \text{ Hz}$$

转换到原子单位制(atomic units, au)中并取倒数得：

$$\frac{1}{v_{Th-meas/au}} = \frac{1}{v_{Th-meas} t_{au}} = \frac{1}{2.020407384335(2) \times 10^{15} \times 2.4188843265864(26) \times 10^{-17}} = 20.46189974146(4)$$

其物理意义为此频率的光传播一个周期所需时间为 $20.46189974146(4)t_{au}$

本文作者构筑如下公式（以第一个为主）：

$$\frac{1}{v_{Th-calc/au}} = 20 + \frac{1}{2} - \frac{1}{26} + \frac{1}{16 \cdot 173 - \frac{1}{16 - \frac{1}{7-1}}} = 20.461899741458143308$$

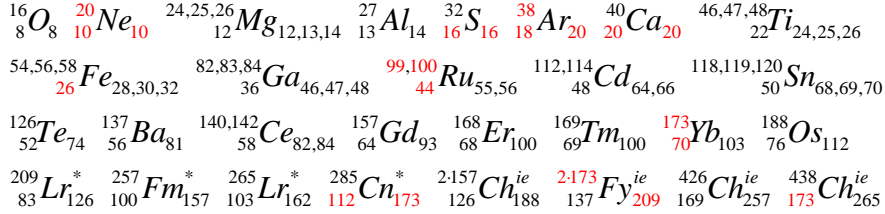
$$\frac{1}{v_{Th-calc/au}} = 20 + \frac{1}{2} - \frac{1}{26} + \frac{1}{16 \cdot 173} + \frac{1}{4 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 701 - 6} = 20.461899741458143263$$

公式中又出现了神奇的173因子，使我们觉得公式是正确的。

由于原子单位制中的光速 $c_{au}$ 的公式中也出现173因子, 173又为元素核素中的一个重要数字,  ${}^{173}_{70}\text{Yb}_{103}$  处于4f元素的终点,  ${}^{285}_{112}\text{Cn}^*_{173}$  为6d元素的终点和元素的自然终点,  ${}^{2\cdot 173}_{137}\text{Fy}^{ie}_{209}$  为类氢元素的终点或Feynman终点,  ${}^{6\cdot 73}_{173}\text{Ch}^{ie}_{265}$  为理想延伸元素的终点或Dirac终点。

$${}^{173}_{70}\text{Yb}_{103} \quad {}^{285}_{112}\text{Cn}^*_{173} \quad {}^{2\cdot 173}_{137}\text{Fy}^{ie}_{209} \quad {}^{6\cdot 73}_{173}\text{Ch}^{ie}_{265}$$

所以我们认为公式是正确的, 并与元素核素相关联。



注意:  $8 \times 7 = 56$ ,  $16 \times 7 = 112$

因此  ${}^{229}\text{Th}$ 核跃迁频率计算值为:

$$\begin{aligned} v_{Th-calc} &= \frac{v_{Th-calc/au}}{t_{au}} = \frac{1}{20.461899741458143308 \times 2.4188843265864(26) \times 10^{-17}} \\ &= 2.0204073843353(22) \times 10^{15} \text{ Hz} \end{aligned}$$

这个计算值与叶军教授实验室的测量值相当, 因为 CODATA (2022) 推荐的  $t_{au}$  值也为 12 位准确, 第 13、14 位不准确。

## 7. ${}^{229}\text{Th}$ 核跃迁频率的计算 (二)

叶军教授实验室还报道了  ${}^{229}\text{Th}$ 核跃迁频率与  ${}^{87}\text{Sr}$ 光原子钟频率的比值[2], 另外通过前人的努力, 将  ${}^{87}\text{Sr}$ 光原子钟的频率测量到 15 为准确[14], 因此利用上面的方法, 我们构筑以下的公式并进行计算。

${}^{87}\text{Sr}$ 光钟频率的测量值为:

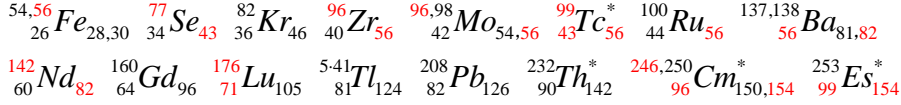
$$\begin{aligned} v_{Sr-meas} &= 4.29228004229873.19(15) \times 10^{14} \text{ Hz} \\ \frac{1}{v_{Sr-meas/au}} &= \frac{1}{v_{Sr-meas} t_{au}} \\ &= \frac{1}{4.29228004229873.19(15) \times 10^{14} \times 2.4188843265864(26) \times 10^{-17}} \\ &= 96.31564792550(10) \end{aligned}$$

本文作者构筑如下公式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_{Sr-calc/au}} &= 96 + \frac{1}{3} - \frac{1}{56} + \frac{1}{2 \cdot 41 \cdot 71} - \frac{1}{9 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 43(16 \cdot 7 \cdot 11 - 1)} \\ &= 96 + \frac{1}{3} - \frac{1}{56} + \frac{1}{2 \cdot 41 \cdot 71} - \frac{1}{9 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 43(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41 + 1)} \\ &= 96.315647925496289349 \end{aligned}$$



公式中出现了56因子，56为元素核素中的最稳定数，另外出现了一些重复的因子例如41和77，所以我们认为公式是正确的，并与元素核素相关联。



另外，叶军教授实验室报道：

$$\left(\frac{\nu_{Th}}{\nu_{Sr}}\right)_{meas} = 4.707072615078(5)$$

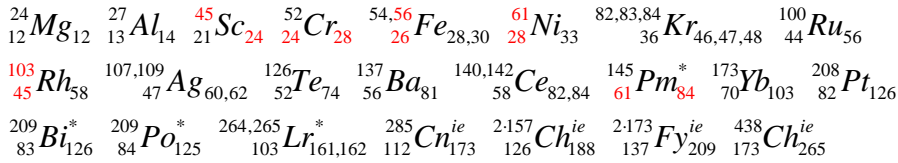
本文作者构筑以下公式：

$$\left(\frac{\nu_{Th}}{\nu_{Sr}}\right)_{calc} = 5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{24} - \frac{1}{13 \cdot 61} + \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 61 \cdot 103} = 4.7070726150783448253$$

由于公式中的因子非常有意思，例如  ${}_{61}\text{Pm}^*$  是放射性元素，

${}^{173}_{70}\text{Yb}_{103}$  处4f元素的终点， ${}^{264,265}_{103}\text{Lr}_{161,162}^*$  为5f元素的终点[15, 16]，

所以我们认为这个公式是正确的，并与元素核素相关联。



由于通过前人的努力， ${}^{87}\text{Sr}$  光原子钟的频率已经测量得非常精确，具有 17 位有效数字和 15 位准确数字[14]，所以我们利用这个频率和它与  ${}^{229}\text{Th}$  的核跃迁频率的准确比值（即上述计算值）来计算具有 17 位有效数字和 15 为准确数字的  ${}^{229}\text{Th}$  的核跃迁频率，即如下计算。

$$\nu_{Sr-meas} = 429228004229873.19(15) \text{ Hz}$$

$$\nu_{Th-calc} = \nu_{Sr-meas} \left(\frac{\nu_{Th}}{\nu_{Sr}}\right)_{calc} = 429228004229873.19(15) \times 4.7070726150783448253$$

$$= 2020407384335168.05(0.71) \text{ Hz}$$

我们也因此可计算出更准确的原子单位时间  $t_{au}$ ，计算如下。

$$t_{au} = \frac{\nu_{Th-calc/au}}{\nu_{Th-calc}} = \frac{1}{20.461899741458143308 \times 2020407384335168.04(0.71)}$$

$$= 2.41888432658653169(85) \times 10^{-17} \text{ s}$$

$$t_{au} = \frac{\nu_{Sr-calc/au}}{\nu_{Sr}} = \frac{1}{96.315647925496289349 \times 429228004229873.19(15)}$$

$$= 2.41888432658653171(85) \times 10^{-17} \text{ s}$$

平均计算值为： $t_{au} = 2.41888432658653170(85) \times 10^{-17} \text{ s}$

CODATA 2022:  $t_{au} = 2.4188843265864(26) \times 10^{-17} \text{ s}$

以上分别用  $^{229}\text{Th}$  核跃迁频率和  $^{87}\text{Sr}$  光原子钟频率计算出的原子单位时间  $t_{\text{au}}$  具有几乎相同的值，相当于对我们的以上公式和计算作了以验算，说明我们的公式和计算是基本上自洽的。我们计算出的原子单位时间  $t_{\text{au}}$  具有 15 为准确数字，相比之下 CODATA (2022) 公布的  $t_{\text{an}}$  值具有 12 为准确数字。

## 8. 更精确的 Rydberg 常数、Hartree 能量、玻尔半径、经典电子半径和电子质量计算

根据以上更精确的原子单位时间  $t_{\text{au}}$ ，我们可计算出更精确的 Rydberg 常数  $R_{\infty}$ 、Hartree 能量  $E_{\text{H}}$ 、玻尔半径  $a_0$ 、经典电子半径  $r_e$  和电子质量  $m_e$ [17]。

$$\text{atomic unit of time: } t_{\text{au}} = \frac{\hbar}{E_h} = \frac{\hbar}{2R_{\infty}hc} = \frac{1}{4\pi R_{\infty}c}$$

$$t_{\text{au}} = 2.41888432658653170(85) \times 10^{-17} \text{ s}$$

$$c = 299792458 \text{ m/s}, h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s (exact)}, \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Rydberg constant:

$$R_{\infty} = \frac{1}{4\pi c t_{\text{au}}} = \frac{1}{4\pi \times 299792458 \times 2.41888432658653170(85) \times 10^{-17}}$$

$$= 10973731.568156137(39) \text{ m}^{-1}$$

$$\text{CODATA 2022: } R_{\infty} = 10973731.568157(12) \text{ m}^{-1}$$

Hartree Energy:

$$E_h = H_a = \frac{\hbar}{t_{\text{au}}} = \frac{6.62607015 \times 10^{-34}}{2\pi \times 2.41888432658653170(85) \times 10^{-17}}$$

$$= 4.3597447222056353(15) \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$\text{CODATA 2022: } E_h = H_a = 4.3597447222060(48) \times 10^{-18} \text{ J}$$

Bhor radius:

$$c_{\text{au}} = \sqrt{112(168 - \frac{1}{3} + \frac{1}{12 \cdot 47} - \frac{1}{14 \cdot 112(2 \cdot 173 + 1)})} = 137.035999074626092$$

$$v_e = \frac{c}{c_{\text{au}}} = \frac{299792458}{137.035999074626092} = 2187691.26378785439 \text{ m s}^{-1} \text{ (exact)}$$

$$a_0 = v_e t_{\text{au}} = 2187691.26378785439 \times 2.41888432658653170(85) \times 10^{-17}$$

$$= 5.2917721093867226(19) \times 10^{-11} \text{ m}$$

$$\text{CODATA 2022: } a_0 = 5.29177210544(82) \times 10^{-11} \text{ m}$$

classical electron radius:

$$r_e = \frac{a_0}{c_{\text{au}}^2} = \frac{5.2917721093867226(19) \times 10^{-11}}{137.035999074626092^2}$$

$$= 2.8179403267684343(10) \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$\text{CODATA 2022: } r_e = 2.8179403205(13) \times 10^{-15} \text{ m}$$

Consider an electron becoming a photon with frequency of  $\nu_e$

$$E_e = h\nu_e = m_e c^2 \Rightarrow \nu_e = \frac{m_e c^2}{h}, \quad \nu_{e/au} = \frac{m_{e/au} c_{au}^2}{h_{au}} = \frac{c_{au}^2}{2\pi}$$

$$t_{au} = \frac{1}{4\pi R_\infty c} = \frac{a_0 c_{au}}{c}$$

$$\nu_e = \frac{\nu_{e/au}}{t_{au}} = \frac{c_{au}^2}{2\pi t_{au}} = 2R_\infty c c_{au}^2 = \frac{c c_{au}}{2\pi a_0}$$

$$m_e = \frac{h\nu_e}{c^2} = \frac{hc_{au}^2}{2\pi t_{au} c^2} = \frac{2hR_\infty c_{au}^2}{c} = \frac{hc_{au}}{2\pi a_0 c}$$

$$= \frac{6.62607015 \times 10^{-34} \times 137.035999074626092^2}{2\pi \times 2.41888432658653170(85) \times 10^{-17} \times 299792458^2}$$

$$= 9.1093837003087161(32) \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\text{CODATA 2022: } m_e = 9.1093837139(28) \times 10^{-31} \text{ kg}$$

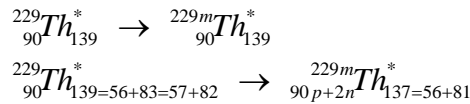
我们计算出的原子单位时间  $t_{au}$ 、Rydberg 常数  $R_\infty$ 、Hartree 能量  $E_H$ 、玻尔半径  $a_0$ 、经典电子半径  $r_e$  和电子质量  $m_e$  的值和同 CODATA 2022 推荐的值列表比较如下（表 1）。可看到我们的计算值具有更多位的准确数字。

表 1. 基本常数的计算值和 CODATA 推荐值比较

	Calculated	CODATA Recommended
$t_{au}$	$2.41888432658653170(85) \times 10^{-17} \text{ s}$	$2.4188843265864(26) \times 10^{-17} \text{ s}$
$R_\infty$	$10973731.568156137(39) \text{ m}^{-1}$	$10973731.568157(12) \text{ m}^{-1}$
$E_h$	$4.3597447222056353(15) \times 10^{-18} \text{ J}$	$4.3597447222060(48) \times 10^{-18} \text{ J}$
$a_0$	$5.2917721093867226(19) \times 10^{-11} \text{ m}$	$5.29177210544(82) \times 10^{-11} \text{ m}$
$r_e$	$2.8179403267684343(10) \times 10^{-15} \text{ m}$	$2.8179403205(13) \times 10^{-15} \text{ m}$
$m_e$	$9.1093837003087161(32) \times 10^{-31} \text{ kg}$	$9.1093837139(28) \times 10^{-31} \text{ kg}$

## 9. $^{229}\text{Th}$ 核跃迁频率为何如此小的原因分析

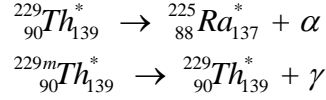
原子核的跃迁能量基本上都是几十、几百 keV 级别的，但  $^{229}\text{Th}$  的基态至激发态  $^{229m}\text{Th}$  的跃迁能量低至 8.36eV，这使得制造核钟成为可能。那么为什么会出这种核跃迁能量的反常？根据我们建立的原子核的手性模型[7]，我们解释如下。



$^{229}\text{Th}$  中质子数  $z=90$  是一个稳定数，中子数  $N=139=56+83=57+82$ ，其中 56、82 和 83 都为稳定数，但  $^{229}\text{Th}$  比其最稳定同位素  $^{232}\text{Th}$  缺中子，所以  $^{229}\text{Th}$  只具有相对的稳定性，半衰期约为 7880 年。 $^{229m}\text{Th}$  的核子状态可组合为  $90p+2n=92$ ，92 为与 90 相当的稳定数，此时中子数变为 137， $137=56+81$ ，56 为稳定数，

137 为与精细结构常数相关的稳定数，这样的组合使  $^{229m}\text{Th}$  得到超额的稳定性，其稳定性比  $^{229}\text{Th}$  差一点，其能级只比  $^{229}\text{Th}$  高很小。

以下为  $^{229}\text{Th}$  和  $^{229m}\text{Th}$  的衰变情况。 $^{229}\text{Th}$  发生  $\alpha$  衰变，半衰期约为 7880 年，其衰变产物  $^{225}\text{Ra}$ 。 $^{229m}\text{Th}$  则先衰变为  $^{229}\text{Th}$ ，放出真空紫外光，其半衰期约 7  $\mu\text{s}$ 。



## 10. 总结

我们可将所有的元素比作一条山脉，那么一个个的元素就是这条山脉上的一座座山，由于山脉和山都是分形结构，所以一座山的山形会与整个山脉的形状具有相似性，一座山上的山峰、山包可类比为山脉上的山。在元素的世界，这种类比会更纯粹、更直接，某一元素的特征（例如光谱特征）会与整个元素中的特征元素的核子数相关联，元素之间的特征比例（例如光谱特征比例）也会与整个元素中的特征元素的核子数相关联，这应是合符逻辑、合理或科学的。在本文中，我们采用这种方法来计算和预测  $^{229}\text{Th}$  的核跃迁频率，具体来说，我们将  $^{229}\text{Th}$  核跃迁的频率转换为相应的光传播一个周期所用的原子单位时间，再将其转换为分数公式，发现其中在关键的位置出现 173 因子，173 在元素中又是非常重要的核子数（详见第 9 页叙述），这说明我们的公式很可能是正确的，公式的准确性则需要根据实验值和我们的经验作一些计算和预测。另外， $^{229}\text{Th}$  的核跃迁频率与  $^{87}\text{Sr}$  原子钟的频率之比用分数表示也非常有意思，我们也构筑了其很可能正确的精确公式。由此我们计算和预测了  $^{229}\text{Th}$  的核跃迁频率，在 12 位准确实验值的基础上预测到 15 为准确，并认为多预测的 3 位数字正确的可能性较大。这很像是一种密码破译，实际上我们认为科学研究有演绎、归纳和破译三种方法，只是人类通常忽略了破译。宇宙或自然或上帝写下或设计了科学的规律，我们人类是可以通过演绎、归纳、实验等方法去发现的，甚至可以猜测和破译。通过计算和预测  $^{229}\text{Th}$  的核跃迁频率，我们也计算和预测了更精确的原子单位时间  $t_{\text{au}}$  以及 Rydberg 常数  $R_{\infty}$ 、Hartree 能量  $E_{\text{H}}$ 、玻尔半径  $a_0$ 、经典电子半径  $r_e$  和电子质量  $m_e$ 。

另外，在本文中我们采用了  $^{87}\text{Sr}$  原子钟的频率为 429228004229873.19(15) Hz[14]作为标准进行计算。还有一种选择是利用 BIPM 的推荐值即

429228004229872.99(8) Hz[18]进行计算，此时本文中的相关计算值会稍有不同。特别是，由于后者的标准偏差（standard uncertainty）更低，因此所有计算值的标准偏差都相应降低。

## 11. 补充：根据 $^{27}\text{Al}^+$ 原子钟频率进行计算

根据 BIPM 推荐的  $^{27}\text{Al}^+$  原子钟频率[18]可计算出更精确的原子单位时间  $t_{\text{au}}$  和其它基本物理常数，计算如下。

BIPM推荐的  $^{27}\text{Al}^+$  光原子钟跃迁频率：

$$\nu_{\text{Al}^+-\text{meas}} = 1121015393207859.16(21) \text{ Hz}$$

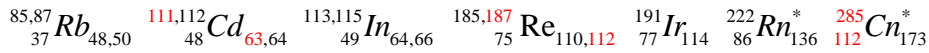
原子单位制中  $^{27}\text{Al}^+$  光原子钟跃迁频率的倒数：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu_{\text{Al}^+-\text{meas}/\text{au}}} &= \frac{1}{\nu_{\text{Al}^+-\text{meas}} t_{\text{au}}} \\ &= \frac{1}{1121015393207859.16(21) \times 2.41888432658653170(85) \times 10^{-17}} \\ &= 36.878506384169127(19) \end{aligned}$$

原子单位中  $^{27}\text{Al}^+$  光原子钟跃迁频率的倒数公式：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu_{\text{Al}^+-\text{calc}/\text{au}}} &= 37 - \frac{1}{8} + \frac{1}{285} - \frac{1}{3 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 37 - \frac{9}{16}} \\ &= 36.878506384169127729 \end{aligned}$$

与以下元素核素相关联，因此我们假定此公式是准确的。



$$\begin{aligned} \nu_{\text{Al}^+-\text{calc}} &= \frac{\nu_{\text{Al}^+-\text{calc}/\text{au}}}{t_{\text{au}}} \\ &= \frac{1}{36.878506384169127729 \times 2.41888432658653170(85) \times 10^{-17}} \\ &= 1121015393207859.14(39) \times 10^{16} \end{aligned}$$

此计算值与BIPM推荐值几乎相同，但BIPM推荐值误差范围更窄，二者互相印证，说明测定值是准确的，因此计算值可调整为：

$$\nu_{\text{Al}^+-\text{calc}+\text{meas}} = 1121015393207859.14(21) \text{ Hz}$$

这样反过来可计算  $t_{\text{au}}$ ，并减小其误差范围：

$$\begin{aligned} t_{\text{au}} &= \frac{\nu_{\text{Al}^+-\text{calc}/\text{au}}}{\nu_{\text{Al}^+-\text{calc}+\text{meas}}} \\ &= \frac{1}{36.878506384169127729 \times 1121015393207859.14(21)} \\ &= 2.41888432658653170(45) \times 10^{-17} \text{ s} \end{aligned}$$

由此可计算更精确的  $\nu_{Th}$  值:

$$\begin{aligned} \nu_{Th-calc} &= \frac{V_{Th-calc/au}}{t_{au}} \\ &= \frac{1}{20.461899741458143308 \times 2.41888432658653170(45) \times 10^{-17}} \\ &= 2020407384335168.04(38) \text{ Hz} \\ \text{即: } \nu_{Th-calc} &= 2020407384335168.04(38) \text{ Hz} \end{aligned}$$

利用更精确的  $t_{au}$  值, 我们还可计算出更精确的 Rydberg 常数  $R_\infty$ 、Hartree 能量  $E_H$ 、玻尔半径  $a_0$ 、经典电子半径  $r_e$  和电子质量  $m_e$ 。将这些计算值列表并与 CODATA 推荐值比较如下 (表 2)。

表 2. 基本常数的计算值和 CODATA 推荐值比较

	Calculated	CODATA Recommended
$t_{au}$	$2.41888432658653170(45) \times 10^{-17} \text{ s}$	$2.4188843265864(26) \times 10^{-17} \text{ s}$
$R_\infty$	$10973731.568156137(11) \text{ m}^{-1}$	$10973731.568157(12) \text{ m}^{-1}$
$E_H$	$4.3597447222056353(8) \times 10^{-18} \text{ J}$	$4.3597447222060(48) \times 10^{-18} \text{ J}$
$a_0$	$5.2917721093867226(10) \times 10^{-11} \text{ m}$	$5.29177210544(82) \times 10^{-11} \text{ m}$
$r_e$	$2.8179403267684343(5) \times 10^{-15} \text{ m}$	$2.8179403205(13) \times 10^{-15} \text{ m}$
$m_e$	$9.1093837003087161(17) \times 10^{-31} \text{ kg}$	$9.1093837139(28) \times 10^{-31} \text{ kg}$

## Reference

1. E-preprint: [vixra.org/abs/2501.0003](https://vixra.org/abs/2501.0003)
2. C-K Zhang, et al. Nature 633, 63–70 (2024).
3. E-preprint: [vixra.org/author/gang\\_chen](https://vixra.org/author/gang_chen)
4. E-preprint: [vixra.org/abs/2411.0001](https://vixra.org/abs/2411.0001)
5. E-preprint: [vixra.org/abs/2501.0055](https://vixra.org/abs/2501.0055)
6. E-preprint: [vixra.org/abs/2409.0044](https://vixra.org/abs/2409.0044)
7. E-preprint: [vixra.org/abs/2312.0055](https://vixra.org/abs/2312.0055)
8. E-preprint: [vixra.org/abs/2103.0088](https://vixra.org/abs/2103.0088)
9. E-preprint: [vixra.org/abs/2002.0203](https://vixra.org/abs/2002.0203)
10. E-preprint: [vixra.org/abs/2008.0020](https://vixra.org/abs/2008.0020)
11. E-preprint: [vixra.org/abs/2012.0107](https://vixra.org/abs/2012.0107)
12. E-preprint: [vixra.org/abs/2106.0151](https://vixra.org/abs/2106.0151)
13. E-preprint: [vixra.org/abs/2407.0038](https://vixra.org/abs/2407.0038)
14. H. Leopardi, et al. Metrologia 58(2021), 015017.

15. E-preprint: [vixra.org/abs/2409.0055](https://vixra.org/abs/2409.0055)
16. E-preprint: [vixra.org/abs/2401.0001](https://vixra.org/abs/2401.0001)
17. E-preprint: [vixra.org/abs/2108.0177](https://vixra.org/abs/2108.0177)
18. <https://www.bipm.org/en/publications/mises-en-pratique/standard-frequencies>