

# Espectro Atômico pela Eletrometrificação do Espaço e Natureza Quântica do Movimento.

S. A. Melo

 0009-0003-2015-666X

doi: 10.5281/zenodo.14994615

9 de março de 2025

## Resumo

A natureza elétrica das partículas que constituem o átomo propicia a predição do espectro de emissão eletromagnético, decorrente da mecânica entre as partículas envolvidas. Entretanto, o processo de radiação descrito pela quântica é distinto da compreensão feita pelo eletromagnetismo ordinário. O entendimento da cisão é discutido pelo princípio da correspondência.

A proposta de curvatura produzida carga elétrica elementar e a representação por um tensor eletrométrico possibilitam abordar aspectos das teorias clássica e quântica por uma mesma formulação. Elétron não cai no núcleo, pois segue trajetória geodésica.

A resolução do sistema binário atômico encontra oscilações harmônicas autoinduzidas que produzem flutuação na métrica, com consequência na determinação da representação pontual e na simultaneidade posição-momento em um mesmo referencial.

A energia da transição orbital pelo elétron, conforme o espectro do átomo de hidrogênio, reproduz dos efeitos discretização e ondulação como consequência da resolução.

O resultado endossa como a correspondência entre os processo de radiação eletromagnético é entendido pela curvatura eletrométrica.

## Abstract

The electrical nature of the particles that make up the atom allows the prediction of the electromagnetic emission spectrum, resulting from the mechanics between the particles involved. However, the radiation process described by quantum physics is different from the understanding made by ordinary electromagnetism. The understanding of the split is discussed by the correspondence principle.

The proposed curvature produced by the elementary electric charge and the representation by an electrometric tensor make it possible to

address aspects of classical and quantum theories using the same formulation. The electron does not fall into the nucleus, as it follows a geodesic trajectory.

The resolution of the atomic binary system encounters self-induced harmonic oscillations that produce fluctuations in the metric, with consequences in the determination of the point representation and in the position-momentum simultaneity in the same reference frame.

The energy of the orbital transition by the electron, according to the spectrum of the hydrogen atom, reproduces the discretization and ripple effects as a consequence of the resolution.

The result endorses how the correspondence between electromagnetic radiation processes is understood by electrometric curvature.

## 1 Introdução

O processo de radiação eletromagnética abrange ocorrências tão diversas quanto extensão do espectro. Em comum, está o fato de ser causada pelo movimento do elétron, o que coloca em evidência a mecânica que descreve o seu movimento.

O entendimento que todas as radiações eletromagnéticas fazem parte do mesmo espectro inicia-se com o eletromagnetismo de Maxwell [25]. Posteriormente, a natureza elétrica da matéria se fundamenta em quantidades discretas de carga elementar, descoberta de Thomson[50].

O primeiro modelo atômico com um arranjo espacial que permite descrição mecânica é proposto por Rutherford [40]. Nesse modelo, o átomo de ouro é descrito com uma carga positiva concentrada em um pequeno volume e os elétrons disperso ao redor formando uma nuvem, sendo que a porção positiva contribui com a maior parte da massa. O modelo encontra a forma mais simples átomo de hidrogênio e o elétron presumidamente orbita a carga positiva e de maior massa, entretanto a mecânica do modelo torna-se desafiadora.

Pela mecânica clássica, a radiação decorre da dinâmica de cargas elétricas aplicadas ao movimento do elétron. A aceleração da carga elétrica emite ondas eletromagnéticas que podem ser quantificada pela de formula de Larmor[22]. A energia da onda irradiada é balanceada pela perda de energia do elétron, que perde velocidade nesse processo.

A proposição que o elétron no átomo de Hidrogênio espiralaria em direção ao centro e emitiria radiação eletromagnética continuamente durante a trajetória sugere a investigação do espectro de emissão.

Na banda visível do espectro, Rydberg generaliza a série de Balmer para todas as transições do Hidrogênio de forma empírica[41]. A radiação emitida pelo Hidrogênio ocorre em frequências discretas, discrepante com a emissão contínua prevista pela aplicação convencional da mecânica clássica, abrindo caminho para outras abordagens na descrição do fenômeno.

Uma amostra maior da correlação entre frequência e energia do processo de radiação é fornecida pelo estudo de radiação do corpo negro. A descrição do processo para uma distribuição de frequências é feita por Planck[35], que reformula a condição de energia da emissão obtida da formulação clássica, resultando na discretização da distribuição pelo quantum de energia.

A predição do espectro de Hidrogênio por um modelo atômico é apresentada por Bohr [2], que adota a quantização do momento angular  $h/2\pi$  de

Nicholson[13] e fundamenta como rearranjar as forças mecanicamente para conceber a mecânica do movimento atômico pela regra de emissão por quantum de energia proposta por Planck.

Bohr imagina a orbitação análoga à gravitação clássica, mas restrita às órbitas circulares com posições radiais que satisfazem o momento angular discreto. O ponto intrigante é que, mais uma vez, contraria o eletromagnetismo clássico, dessa vez no estado estacionário, concedendo trajetórias em que haja aceleração sem emissão.

Tomando esse detalhe como indício de trajetória geodésica, a proposição que o elétron se prende ao núcleo por curvatura eletrométrica é demonstrada por formulação mecânica que faz a predição do espectro atômico do hidrogênio e, em consequência do equilíbrio mecânico, tem o elétron é descrito como onda, que ocorre em energias discretas, e que é impossível equacionar a simultaneidade da posição e momento para um mesmo referencial.

A investigação de trajetória geodésica produzida por curvatura eletrodinâmica inicia-se pela obtenção do tensor eletrométrico (Sec. 2.1). A aplicabilidade da métrica em condições específica de energia somente é possível à carga elementar (Sec. 2.1.1), e a restrição impõem uma compositividade sistêmica (Sec. 2.1.2) que remete à topologia peculiar (Sec. 2.1.3).

A geodésica canônica assume forma reduzida (Sec. 2.2.1) pela resolução espacial dos determinismos implícitos nos vínculos espaciais. A apresentação do invariante de ortogonalidade, construção mais general do transporte paralelo (Sec. 2.2.2), que define um discriminante para força pelo desvio geodésico e a ocorrência de torção geodésica por condições liberdade do momento angular.

O equacionamento diferencial é resolvido em sistematizações que sejam oportunas para investigar as relações mecânicas, e que revelem propriedades. A condição de campo fraco e baixa velocidade a carga pontual (Sec. 3.1.1) é útil na ponderação de distribuição de carga (Sec. 3.1.2), enquanto a condição de campo forte torna-se proveitoso na descrição de fenômenos quânticos.

Sob campo forte (Sec. 3.2.1), a geodésica toma forma de atração centrípeta para órbita circular, e o período orbital kepleriano é condicionado a um ressonador independente. A frequência Compton, escolha covariante natural, demonstra-se associada ao comprimento de Broglie.

O período orbital é quantizado na órbita circular, e a velocidade centrípeta da menor órbita é associada à velocidade Sommerfeld. O estudo dessa velocidade (Sec. 3.2.2) é detalhado pelas vinculações espaço-tempo garantem propriedade subluminal.

A existência de especificidades do contexto mecânico em relação ao transporte de energia demanda considerações sobre escala energética de uma medição. A ponderação de uma escala absoluta em unidade natural (Sec. 3.3.1) é feita pela equipolência subluminal.

A série de Lyman (Sec. 3.3.2) é obtida pela diferença de energias cinéticas entre órbitas, e a ponderações sobre o empirismo da energia Rydberg, melhor ajuste para forma clássica, resulta em considerações sobre a quantidade de energia liberada e parcela retida pela energia de repouso por efeito da métrica.

No sistema de dois corpos, a coerência nos movimentos dos corpos com a velocidade limite é insuficiente apenas pelo invariante de velocidade, sendo necessária a formulação sistêmica de causalidade. A necessidade de considerar a mobilidade da métrica resolvida por efeito retardado devido ao tempo de propagação das posições. Reciprocidade e simultaneidade tem como consequência

auto-oscilação, o moto perpétuo por ressonância.

A condição estável de equilíbrio de dois corpos (Sec. 4.1) é dada pelas duas componentes da atração, espacial e induzida, primeiro em consideração ao efeito instantâneo. Ao considerar o efeito retardo na posição móvel pela propagação, oscilar em um torno da trajetória de equilíbrio. O sistema autoestabiliza em uma frequência natural (Sec. 4.2) que advém do movimento imaterial pela métrica.

A composição de uma trajetória (Sec. 4.3) capaz de representar os eventos de simultaneidade é idealizada em uma epitrocoide. O estudo de posição e das distâncias métricas (Sec. 4.3.2) resulta na impossibilidade de determinar simultaneamente posição e velocidade em um mesmo referencial, entretanto o caráter cíclico da trajetória permite medida da disparidade. A velocidade que satisfaz estabilidade é possível pela separação do espaço tangente em uma trajetória conjugada (Sec. 4.3.3), quantificada pela diferença de meio período de giro.

A oscilação é caracterizada em duas grandezas, giro e ondulação (Sec. 4.4), generalizando a construção obtida por rolete. Onda é estudada (Sec. 4.4.1) na construção do espaço de solução, onde a modulação do ângulo de fase intratável admite representação para carrear o indeterminismo. O giro é evidenciado pelas propriedades magnéticas em duas etapas, sendo que o momento magnético orbital (Sec. 4.4.2) calibra a medida pela relação entre torque e torção, enquanto o momento magnético do giro (Sec. 4.4.3) obtém medida da anomalia e a caracterização intrínseca (Sec. 4.4.4).

Considerações finais conceituais sobre formalismo (Sec. 5.1) e o comparativo com as teorias bem estabelecidas (Sec. 5.2). O texto se encerra com sumário (Sec. 5.3) e conclusão (Sec. 5.4)

## 2 Eletrometrificação do Espaço-Tempo

Na predição do espectro do átomo de hidrogênio, Bohr postula movimento do elétron que contraria o eletromagnetismo clássico para obter a condição de estabilidade orbital. A radiação, que classicamente seria emitida por consequência da aceleração promovida pela força Coulomb, passa a ser emitida por transição entre órbitas.

Sugerir que o elétron se prende ao núcleo em razão de curvatura do espaço-tempo satisfaz a estabilidade por condição mecânica. Nessa condição, o elétron descreve curva geodésica, que é trajetória inercial, portanto sem ação de força. Nota-se que é desconsiderada, em um primeiro momento, que a discretização seja necessária para a estabilidade orbital. A discretização da órbita será retomada posteriormente, primeiro provisoriamente como premissa, e depois definitivamente como consequência.

Nessa descrição, a estabilidade da órbita segue sem conflitar com a descrição do eletromagnetismo clássico, e o processo de emissão ocorre na transferência entre órbitas pela ação da força, que acelera a partícula em direção à nova órbita até que ocorra a radiação, que exerce força sobre a partícula e desacelera para a estabilizar a nova órbita. A dualidade força-radiação complementa o desvio da condição inercial pela geodésica.

O ponto crítico é que, fora do modelo atômico, não é observada a condição geodésica devido natureza elétrica e o problema se inverte, sendo necessário explicar a ausência de trajetória geodésica. Outra questão que se assoma é sobre a interpretação geométrica dessa metrificação. Esses questionamentos motivam

o desenvolvimento dessa seção.

O principal resultado é a formulação covariante da atração elétrica elementar pela métrica, que tem peculiaridade de que somente podemos atribuir métrica para a carga elementar.

## 2.1 Tensor Eletrométrico

Tensor métrico regular pode ser formulado para um campo de simetria esférica que atenda a condição de escape partícula pontual [27], condição que pode ser generalizada em campos clássicos independente na natureza do campo, desde que atentar para as condições estritas que o tensor é apresentado, o que se restringe à carga elementar.

A demonstração da existência de um tensor que não depende da natureza do campo, mas da particularidade do campo pontual satisfaz o balanço energético obtido da função lagrangiana relativística em energia normalizada, pela aproximação assintótica de condições de baixa velocidade e campo fraco.

$$\mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma_v} \quad (2.1)$$

A resolução do tensor é realizável para o movimento de uma carga elementar em velocidade de fuga sobre o campo produzido por outra carga também elementar. O balanço é possível, pois, pressuposto que o escape se tratar de uma condição geodésica, não dissipa energia na forma de emissão, e evita que energia seja absorvida em energia interna pela restrição a um corpo unitário, o que leva à carga elementar.

Tensor Eletrométrico é o tensor bilinear que o determina o comportamento espaço-tempo no movimento de uma carga elementar no campo simétrico produzido por outra carga elementar estacionária [27].

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{kq^2}{m_e c^2 r}\right)^{-1} & & & \\ & -\left(1 + \frac{kq^2}{m_e c^2 r}\right) & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

No espaço descrito por essa métrica, a velocidade da partícula é sempre menor que a velocidade da radiação que emite, o que é condicionado na expressão invariante.

$$c^0 c^0 \delta_{00} = \gamma_v (c^0 c^0 g_{00} - v^i v^j g_{ij}) \quad (2.3)$$

A velocidade limite  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  é obtida da constante de onda eletromagnética, taxa de variação do deslocamento autoinduzido da força. A limitação introduz a noção de que o corpo não pode ser impulsionada para velocidade além daquela que os estímulos de impulso que o campo pode produzir. Complementar ao valor assintótico que aceleração relativística deve produzir, a variação da velocidade não pode reagir mais rápido do que o campo está disposta a agir.

A métrica induz variação da velocidade, em módulo e direção, proporcional à intensidade da deformação que a métrica produz no espaço-tempo, que encaminha o movimento em direção ao centro de simetria. A atração elétrica é estabelecida.

Denominado tensor eletrométrico regular e normalizado para uma curvatura de simetria central. A formulação apresenta-se análoga ao tensor métrico gravitacional, sendo que restrição de corpo unitário e carga elementar não existe na contraparte gravitacional, pois o fator de atração é o mesmo que o fator de inércia.

Importante reiterar que a resolução do tensor é feita para o movimento da massa conjugada à carga, ou seja,  $q/m$ , o que é observado nas expressões para os termos  $g_{00}$  e  $g_{11}$ . A condição da carga ser indissociável da massa, no tensor métrico, deve-se em razão de evitar resposta inercial da massa que seja dissociada da solitação da carga, que interfere na balanço entre energia cinética e energia potencial.

O contra-exemplo está uma distribuição de partículas em excesso sobre um corpo. Ainda que possa ser abstraído para um ponto em uma configuração estática e sem solitação externa, na situação dinâmica deve-se considerar o movimento interno das partículas. O equacionamento combina o movimento das cargas sobre o corpo e, também, o movimento do corpo em função do excesso de carga. A composição não corresponde à situação que possa ser expressa pela métrica.

O emprego do tensor é condicionado a satisfazer a condição em que é deduzido: carga elementar. A situação física onde há ocorrência do tensor eletrométrico é restrita a interação de duas partículas elementares. A combinação em sistema complexos envolve ponderação sobre referencial da eletrométrica.

### 2.1.1 Enlace: *Amplexus*

O tensor gravitacional, geométrico, é o mesmo para todos os corpos de uma região, opera no espaço e apresenta mesma “aceleração” a todos os corpos, independente da massa. Por sua vez, o espaço-tempo do tensor eletrométrico é diferente conforme a relação carga-massa das partículas envolvidas, o que pode ser ilustrado na situação em que um próton induzirá uma eletrométrica ao múon distinta da que seria induzida ao elétron.

A individualidade da eletrométrica prossegue de forma peculiar. O próton não produz um único campo métrico que seja o mesmo compartilhado por todos os elétrons que venha interagir, mas induz uma métrica para cada elétron. Mesmo que as métricas possuam o mesmo ponto de origem no próton, serão consideradas distintas.

A forma particular de incidência do tensor não o qualifica propriamente como um campo, pois não opera o espaço global. Um entendimento mais apropriado é a discretização da iteração entre duas partículas. A atração mútua em um sistema binário de partículas é consequência da indução recíproca de tensor métrico. O ponto de origem de cada uma das métricas de um binário move-se sobre a na trajetória geodésica induzida pela métrica da contraparte. A exclusividade do movimento torna a relação diádica.

Denomina-se enlace a conexão espaço-tempo entre duas partículas pelas eletrométricas reciprocamente induzidas do estado de movimento. É o sistema

físico elementar em que a covariância geral das grandezas físicas é obtida pela metrificação.

Em um sistema de partículas, forma-se tantos enlaces quanto for a contagem da combinação de partículas aos pares. Cada partícula participa em mais de um enlace, e a atração de cada um deles sobrepõem-se.

### 2.1.2 Sobreposição-Compositividade: *Plexus*

A eletrométrica é aplicável somente aos sistemas de dois corpos, e essa configuração prevê apenas trajetórias geodésicas. O desvio da trajetória geodésica ocorre por fatores externo ao binário, que motiva a composição de enlaces.

Em um sistema de partículas, para cada par forma-se um enlace, e para cada um dos enlaces é predito, virtualmente pela atração, a geodésica que seria realizada caso estivessem isolados. Não é esperado que as trajetórias sejam sempre conciliáveis, o que pode resultar em desvios geodésicos. O movimento resultante de cada partícula é dado pela adição das atrações, sem que haja “sobreposição” das métricas.

Formular um sistema em que a trajetória de cada partícula seja compatível com a geodésica prevista para cada enlace nem sempre é possível, que motiva a existência de forças. Ainda assim, somente é possível computar a força pelo desvio geodésico.

Na resolução de um átomo multi-elétron, é esperado que seja possível conciliar, para cada elétron, uma trajetória que satisfaça as geodésicas de todos os enlaces que incidam sobre o elétron. Mas, além do modelo atômico, não é toda formulação de problema em que a conciliação exista, ocorra, ou que seja necessário.

A trajetória geodésica depende da resolução de equações diferenciais parciais, e como tal, geralmente se reconhece que não existe uma “teoria geral” de resolução. A eletrometrificação não oferece um roteiro de resolução prática que seja único, como ocorre na abordagem pela mecânica clássica ou pela quântica, mas é possível fazer correspondência de como um sistema é resolvido com essas duas abordagens. Primeiro é preciso destacar que técnicas de resolução são diferentes de acordo com regra de composição em consideração à granularidade da carga: contínua ou discreta.

Em correspondência à mecânica clássica, aproxima-se granularidade infinitesimal da carga conjugada à linearidade métrica do espaço em razão das distâncias envolvidas. A distribuição de cargas pode ser considerada contínua devido grande número de partículas, e a densidade volumétrica admissível pela escala espacial onde a métrica torna-se assintoticamente plana. Nessas condições, os elementos diferenciais podem ser considerados infinitesimais e, portanto, de composição linear.

A mecânica quântica mantém a forma discreta da eletrométrica, mas reformula pela transformação do domínio do problema ondulatório. Os efeitos do espaço-tempo promovido pela métrica são abstraídas na parcela ondulatória do movimento e na discretização da energia.

Pela eletrométrica, o discriminante clássico ou quântico são duas vertentes na forma de abordar o espaço pelas técnicas de resolução.

### 2.1.3 Imperativo Covariante: Geometria e Topologia

Os enlaces e a peculiaridade da coexistência concomitante das métricas não permitem uma interpretação geométrica comum para todas as partículas. Ainda assim, pode-se falar de um espaço topológico.

A distância entre duas partículas possuem positividade e simetria. Apesar da forma fragmentada em várias métricas, pode-se postular que as distâncias possuem desigualdade triangular.

A existência de múltiplas métricas vem da necessidade de covariância. As métricas não existem como um retalho ou como uma imersão, existem por si próprias pelo imperativo mecânico de ser covariante. Cada enlace representa uma realidade distinta das demais, exceto pela conexão implícita que participação concomitante partícula em vários enlaces implica.

Microscopicamente é um arranjo sistêmico em que se pode fazer amostragens consistentes. Para distâncias macroscópicas podemos mudar a representação, mapeando as distâncias no espaço Minkowski e substituindo a curvatura por um campo potencial e obter um espaço-tempo consolidado.

## 2.2 Geodésica e Invariantes

A variação da velocidade nem sempre é um discriminante para força, uma vez que a curvatura promove movimento curvilíneo pela dependência implícita entre as variáveis.

Separar a ação de curvatura da ação de força depende do equacionamento do movimento de uma partícula em um enlace pela da curvatura promovida pela contraparte. Chega-se ao estado inercial em que a variação de velocidade em movimento geodésico é denominada atração, e o desvio geodésico, força.

A complexidade adicional vem da formulação sistêmica. Nem todo o estímulo externo torna-se força, por vezes atuando inercialmente como atração interna.

A possibilidade do equacionamento resultar em variáveis livre, uma influência externa pode se acoplar aos graus de liberdade do movimento resultante de forma geodésica.

Constatar se a resultante constitui, ou não, força conduz à extensão do transporte paralelo, sintetizado no invariante de ortogonalidade.

### 2.2.1 Geodésica da Métrica

A equação geodésica na forma canônica se escreve:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.4)$$

Uma solução possível da equação é para o tensor métrico pode ser aproximado para origem fixa, o que resulta no sistema de equações do movimento de um-corpo, denominado geodésica da métrica de simetria.

Para a geodésica da métrica, é possível resolver as vinculações implícitas de valores funcionais e acoplamento de taxas de variação diferencial [28] e obter forma expressa pela soma dos dois tensores vetoriais, denominamos equação geodésica reduzida:

$$\mathcal{A}^\mu + \mathcal{F}^\mu = 0 \quad (2.5)$$

A composição espacial da geodésica é segmentada em dois novos tensores. O tensor segmentário *Factio*, expresso por  $\mathcal{F}^\mu$ , é tratado como feição da magnitude que a gravidade assume em um posição-velocidade. O tensor segmentário *Affectus*, expresso por  $\mathcal{A}^\mu$ , é tratado como alteração do vetor tangente por coordenada geodésicas.

A expansão dos índices espaciais do tensor de feição gravitacional encontra valores apenas para o índice radial:

$$\mathcal{F}^k = \frac{1}{\gamma_r^4} \mathbf{f} + \frac{\gamma^2 (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v})}{\gamma_r^4 c^2} \mathbf{v} \quad (2.6)$$

Os índices referentes as direções angulares possuindo valores nulos, resultado da natureza radial da métrica:  $\mathbf{f}^2 = 0$  e  $\mathbf{f}^3 = 0$ .

As variáveis coordenadas do tensor alteração é definida para todos os índices:

$$\mathcal{A}^k = \gamma^2 \mathbf{a} + \gamma^4 \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})}{c^2} \mathbf{v} \quad (2.7)$$

A equação geodésica reduzida é totalmente caracterizada pelas componentes espaciais, o que torna conveniente caracterizar a ação da curvatura nessa equação.

A métrica obtida em um ponto é caracterizada pela existência de duas curvaturas cardinais: uma temporal e outra espacial, esta última gradiente da métrica (diretrix). Nem sempre os a direção da linha de ação tensores geodésicos é o mesmo da diretrix.

O desalinhamento entre os tensores geodésicos com gradiente da métrica é explicado pelo existência de um termo autoinduzido dependente da direção da velocidade.

Equação geodésica na forma direcional, os termos espaciais são decompostos pela projeção na diretrix:

$$\mathcal{F}^k = \frac{\gamma_v^2}{\gamma_r^4} \left( \mathbf{f} + \frac{\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{f})}{c^2} \right) \quad (2.8)$$

$$\mathcal{A}^k = \gamma_v^4 \left( \mathbf{a} + \frac{\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{a})}{c^2} \right) \quad (2.9)$$

Cada tensor espacial é decomposto em dois outros vetores, denominados vis-radix e vis-redux, que expressam contribuição à variação da magnitude da velocidade, que influencia a variação  $\dot{\gamma}$ , e pela dependência da direção da velocidade (anisotrópico). A influência da métrica é representada nos fatores  $\gamma_v$ ,  $\gamma_r$ .

O ponto crítico da exposição detalhada dos tensores é observar que o tensor de propensão geodésica não possui valor para as componentes nas direções angulares  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\varphi}$ ,

$$\mathbf{f} = \frac{kq^2}{mc^2 r^2} \hat{\rho} \quad (2.10)$$

O que resulta  $\mathcal{A}^2 = 0$  e  $\mathcal{A}^3 = 0$ , e que acarreta consequência para a conservação momento angular quando  $\dot{\gamma} \neq 0$ .

$$\mathcal{A}^2 = \gamma \dot{\gamma} \rho \dot{\theta} + \gamma^2 \left( \rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta} - \rho \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \quad (2.11)$$

$$\mathcal{A}^3 = \gamma \dot{\gamma} \rho \dot{\varphi} \sin \theta + \gamma^2 \left( \rho \ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} \sin \theta + 2\rho \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \right) \quad (2.12)$$

A ausência de um acoplamento ao campo nessas direções deixa aberto a solução do movimento que pode satisfazer a equação. Entretanto, quando a distância é suficientemente grande, tem-se que  $\dot{\gamma} \approx 0$ , e a variação das velocidades angulares deixam de ser independentes para tornarem-se vinculadas em momento angular constante.

Extrapolando o espaço de soluções, outros acoplamentos dessas taxas de variação podem ocorrer, por exemplo, estarem vinculadas entre si:

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^3 = 0 \quad (*)$$

Concluir que uma solução opera com graus de liberdade, então o movimento não se restringe ao plano e passa ocupar uma esfera orbital, o que certamente não corresponde à situação clássica, mas é proveitoso em soluções quânticas.

Por outro lado, pode-se admitir não existe motivo para a ocorrência de (\*) sair do plano orbital, exceto para satisfazer solução quando há um a restrição, e.g. discriminante discreto, em conjunção a presença de influência externa ao enlace, como é o caso que será demonstrado.

Por ora, faz-se o entendimento que atração não é força e, portanto, não está sujeita as mesmas regras. As leis de Newton não fazem menção ao princípio da conservação do momento angular ou conservação de energia, que são consequências da aplicação das leis do movimento e de como as forças são geradas.

Posteriormente veremos um “invariante” angular, conservação relacionada ao período orbital, atração centrípeta e a constante de Planck.

### 2.2.2 Transporte Paralelo e Invariante de Ortogonalidade

Pelo apresentado ao final da seção anterior, torna-se interessante propriedade que permita discriminar se existe uma solução geodésica para as condições de resolução de um movimento que se expressa diante de ação externa. Tal discriminação também estabeleça a diferença entre atração e força, sendo interessante no segundo caso que permita equacionar o desvio geodésico.

Relacionado à geodésica, o transporte paralelo (físico) é um caso especial que pode ser generalizado em uma construção mais geral envolvendo um fibrado.

Partido do Invariante de velocidade

$$V^\mu V_\mu = c^2 \quad (2.13)$$

Chegamos ao transporte paralelo do vetor  $V^\mu$  pela derivada covariante, a expressão resultante pode ser entendido como um invariante de ortogonalidade.

$$(\mathcal{A}^\mu + \mathcal{F}^\mu)V_\mu = 0 \quad (2.14)$$

Excluindo a trivialidade da solução, o interesse está nas soluções em que há ortogonalidade individual dos termos pela distributiva. Na forma generalizada, o invariante é satisfeito mesmo que ocorra adição de parcela ortogonais ao vetor  $V^\mu$  pela aceleração.

A variação da velocidade, como sugerido anteriormente pela concomitância dos enlaces, é sujeito a estimulação externas. Assim, formulamos o caso mais geral do enlace, que ocorre quando na presença de um estímulo  $\tilde{E}^\mu$  externa ao binário (parametrizadas no mesmo referencial por coordenadas  $\tilde{x}^\mu$  é presumida independência funcional, mas não o acoplamento).

$$\mathcal{A}^\mu + \mathcal{F}^\mu + \tilde{E}^\mu = 0 \quad (2.15)$$

Retornando ao exposto na equação reduzida da geodésica da métrica,  $\mathcal{F}^2 = 0$  e  $\mathcal{F}^3 = 0$ . Os graus de liberdade em  $\mathcal{A}^2$  e  $\mathcal{A}^3$  podem ser ocupados pelo termo adicional  $\tilde{E}^\mu$ , o que pode ser ilustrado no caso de encontrar uma solução que satisfaça:

$$\mathcal{A}^1 + \mathcal{F}^1 = 0 \quad (2.16)$$

$$\mathcal{A}^2 + \tilde{E}^2 = 0 \quad (2.17)$$

$$\mathcal{A}^3 + \tilde{E}^3 = 0 \quad (2.18)$$

O equacionamento não permite distinguir se a solução é pontual, um conjunto de pontos ou válida para toda a trajetória (que sugere um acoplamento das variáveis) sem a formulação do completa do sistema. É necessário o discriminante procurado para determinar se estímulo externo é resolvido como atração ou como força.

Regredindo ao invariante  $V^\mu V_\mu = c^2$ , o desvio da trajetória conservativa produzido por um estímulo externo pode não se acomodar e resulta em força, o que é imediatamente corrigido pela produz radiação e uma nova trajetória.

Elaboração general, a presença do estímulo externo  $\tilde{E}^\mu$  sobre uma métrica para um corpo que desenvolve velocidade  $U^\mu$ .

$$(\mathcal{A}^\mu + \mathcal{F}^\mu + \tilde{E}^\mu)U_\mu = \mathcal{E}_\mu^\mu \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\mu^\mu = 0 & \text{geodésica} \\ \mathcal{E}_\mu^\mu \neq 0 & \text{não-geodésica} \end{cases} \quad (2.20)$$

A equação vetorial aponta se é possível, ou não, acoplar a velocidade  $U^\mu$  à resultante das atrações em uma trajetória transporte paralelo pela ortogonalidade.

O termo extra que balanceia o desvio geodésico pode ser interpretado como a adição energética de uma nova partícula e o desvio geodésico e se constitui como força.

### 3 Sistemáticas

A resolução do invariante de ortogonalidade do enlace recai em equação diferencial. Embora não haja um método geral de resolução, a complexidade equação pode ser reduzida, em alguns casos, pelo padrão constante que as variáveis e fatores possam assumir, ou pela contração entre termos. Um caso notável é quando  $\dot{\gamma}_v = 0$ , que ocorre no movimento circular.

Aspectos que entram em questão são existência e unicidade de uma solução. Não ter geodésica possível dá a motivação para força. Resolver-se em geodésica, mas não ser única, afeta o entendimento do espaço-tempo obtido da resolução do movimento (ondulatório) para ação de menor tempo próprio.

O enlace é um sistema binário, e é possível conceber que o espaço-tempo além de dilatar e contrair, também oscila, o que será correlacionado à ressonância das partículas e conseqüente discretização no espaçamento radial das soluções.

O problema do enlace é apresentado progressivamente, primeiro com discretização removível. A discretização essencial ocorre somente em consideração à ressonância orbital, que será vista separadamente.

As resoluções apresentadas são os dois extremos da intensidade de campo que são representativas do clássico e quântico.

Nota: Nessa seção as sistemáticas possibilitam resoluções para partícula pontual em posição definida, o que, além da simplificação, motiva a qualidade inevitável do indeterminismo demonstrado na seção posterior.

#### 3.1 Campo Fraco, Baixa Velocidade

A complexidade equação geodésica pode ser reduzida na condição de campo fraco e orbitação em baixa velocidade.

O campo é considerado fraco para valores de  $\gamma_r \approx 1$ , similarmente a baixa velocidade  $\gamma_v \approx 1$ . As componentes espaciais da geodésica tornam-se:

$$\mathcal{F}^k \approx \left[ \mathbf{f} + \frac{\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{f})}{c^2} \right] \quad (3.1)$$

$$\mathcal{A}^k \approx \left[ \mathbf{a} + \frac{\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{a})}{c^2} \right] \quad (3.2)$$

A componente temporal é ignorada pela conseqüente variação temporal  $\dot{\gamma}_v \approx 0$ . A partícula passa a movimentar-se em um espaço  $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$ , mas o referencial é do enlace.

Interessante observar que a equação se assemelha a força Lorentz de uma carga pontual proposta por Heaviside[11] [10](fazendo-se as devidas considerações sobre o operador ternário) e é correlato ao seu análogo gravitacional [12] para fazer dois destaques.

Primeiro, destacar que a interpretação depende da perspectiva referencial. A velocidade é relativa entre a partícula e a origem da métrica, ou seja, a outra partícula, e é válida enquanto resultado geodésico.

Segundo, os vetores das equações do enlace não representam força, assim o termo vis-radix não é força Coulomb e o termo vis-redux não é força magnética. A semelhança com a força Lorentz sugere como cada enlace contribui para operar

em um espaço  $\eta_{\mu\nu}$ , mas a demonstração não é tão direta quanto aparenta pelo que será visto adiante.

Uma primeira medida para manipular a expressão é suprimir o referencial do enlace. Uma vez que a métrica se reduz ao espaço plano, a atenção se volta para vis-redux.

A velocidade no termo dinâmico, vis-redux, é relativa entre duas partículas do enlace. Para um raio grande, a atração fraca impõe um valor baixo a essa velocidade, o que permite fazer

$$\frac{\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{f})}{c^2} \approx 0 \quad (3.3)$$

O termo estático, vis-radix, depende apenas da posição, que pode ser considerada sobre um espaço plano  $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$ . A geodésica se reduz à expressão análoga à lei de Coulomb eletroestática, exceto pelo fato de não ser força no referencial do enlace em que é originada.

$$\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (3.4)$$

A eliminação do termo vis-redux facilita a soma algébrica das atrações. Vis-radix depende apenas da posição, sendo possível mapear suscetibilidade à atração em um campo de forças, como a atração que tem efeito em outros referenciais.

A geodésica quantifica a atração elétrica em uma posição do enlace, enquanto representa a força em um enlace externo.

Para conjugar o efeito da discretização, dois sistemas são apresentados: partícula singular, distribuição de cargas. O primeiro é resolução de Bohr para raio grande, instrutivo na apresentação de conceitos. No segundo busca-se encaminhar a correspondência ao clássico.

### 3.1.1 Carga Unitária sob atração simetria central.

A resolução da trajetória geodésica circular para um elétron em enlace com um próton, em que o raio é grande o suficiente para não ser considerada as escalas atômicas e próton é considerado fixo. O exemplo não é prático, mas instrutivo. Pela condição de campo fraco, a métrica considerada plana, a atração é pela expressão eletroestática de Coulomb a solução recai na resolução na obtida no modelo atômico de Bohr.

Argumentar pelo modelo de Bohr é uma simplificação, e o objetivo é evidenciar que a correspondência entre o processo de radiação clássico e o processo de radiação quântico não pode ser realizado por uma única partícula, mas que dá subsídio para explicação por uma distribuição de partículas.

Apesar de plano, o espaço ainda é discreto. Fazendo o raio de orbitação  $r_n$  ser múltiplo inteiro do raio de Bohr, aqui denotado por  $r_1$ , as soluções são dadas por uma sequência inteira:

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2}{m_e k e^2} = n^2 r_1 \quad (3.5)$$

O caráter discreto se mantém para números grandes. As escalas de distâncias crescem por um fator quadrático, enquanto os saltos discretos crescem linearmente, para um valor de  $n$  suficientemente grande.

$$\Delta r_n \approx 2nr_1 \quad (3.6)$$

A diferença na ordem de grandeza com que  $r_n$  e  $\Delta r_n$  crescem afeta a significância numérica dos saltos, mas a estabilidade do movimento não perde sua natureza discreta.

Ilustrando em valores numéricos, ainda que a realização prática e observação sejam questionáveis, faze-se  $n = 137360$ , o raio está à  $r_n = 1m$  e saltos da ordem de  $\Delta r_n = 14,56 \cdot 10^{-6}m$  ( $\mu m$ ), desprezando a existência de suborbitais. Continuando a tendência para raios maiores, mesmo que haja perda de significância na representação numérica, os saltos quânticos crescem em valor absoluto.

Independente do tamanho do raio, enquanto a trajetória for dada por uma condição geodésica, o elétron orbitará a trajetória circular, transitando entre órbitas em saltos preditos por Bohr. Ainda como partícula pontual, saltos instantâneos violam a velocidade da luz. É razoável sugerir, por hipótese, que saltos assemelhem-se a ocorrência da força Abraham-Lorentz.

Continuando a ilustração, considerando que há emissão espontânea, e o tempo que o elétron permanece em uma geodésica é aleatório, pode-se prognosticar a queda para o núcleo. Entretanto, as emissões decorrentes da queda não ocorreriam em uma rajada contínua, nem a trajetória de queda descreveria uma espiral, pois permite-se fazer estadias em raios intermediários e por tempo indeterminado.

Apresentados os termos em que o modelo para partícula unitária não permite fazer a correspondência com a emissão clássica, é interessante notar que intercalamos força com atração geodésica, ambas descritas pela equação invariante de ortogonalidade do enlace.

Um estímulo externo torna-se força pela capacidade de produzir desvio geodésico e a atração em um enlace, representa força externo em outro enlace.

Emissão continuamente estimulada, intercalar a ação de vários enlaces, o que pode ser aproveitado do comportamento individual para o coletivo.

### 3.1.2 Distribuição de Cargas

Generalizadamente, a solução de um sistema de partículas envolve a resolução simultânea do sistema de equações diferenciais formado pelos invariantes de todos os enlaces que cada partícula se envolve.

O caso especial em que consideramos somente as interações de grande distância permite uma resolução viável pela transformação do problema pela conjunção da escala de distância, número de partículas envolvidas e restrições espaciais.

Pela natureza da carga elementar ser discreta, a continuidade da carga no espaço é por aproximação prática, quando condições assim o permitem. Se a carga total do sistema for grande o suficiente, a carga elementar torna-se boa aproximação para elemento de carga infinitesimal.

$$\sum Q \rightarrow \int dq \quad (3.7)$$

O elemento de carga  $dq = \rho \cdot dV$  deve considerar a distribuição espacial, e as cargas devem ocorrer sobre a mesma métrica.

$$dV = \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (3.8)$$

Entretanto, pela individualização dos enlaces, não há uma métrica consolidada para todo o espaço. A condição especial do espaço ocorre na consideração da atração em grandes distâncias, que permite a transformação na representação do espaço.

Se a posição afetada por o conjunto de carga estiver a uma distância tal que  $\gamma_r \approx 1$ , todas as métricas de cada enlace em questão convergem para um mesmo espaço  $\eta_{\mu\nu}$ . Na equação do invariante, a velocidade é relativa ao enlace, entretanto o termo  $\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{f})/c^2$  torna-se residual em baixa velocidade. A contribuição de atração cada partícula assemelha-se a atração eletrostática, mas, pelo exposto na seção anterior sobre discretização em grandes distâncias, não é esperado uma solução geodésica que satisfaça todas as partículas, a atração torna-se força, com isso há suscetibilidade de realizar trabalho.

Aliando o fato de não ser geodésica com a necessidade de sistematizar o trabalho, ao invés de resolver pelo sistema de equações do enlace, reformular o problema: o mapeamento em campo de potencial escalar. É preciso salientar que fazemos uma transformação na representação do espaço para chegar-se ao potencial por aproximação para grandes distâncias.

A concomitância de vários enlaces foi apresentado como um arranjo com propriedades topológicas. Para grandes distâncias, também passa exibir linearidade na sobreposição de atrações produzida pela carga. A linearidade com que e possível somar forças  $F = \sum_k f_k$

Pela predisposição para o trabalho fazemos:

$$U = - \int F \cdot dx \quad (3.9)$$

Um novo espaço é mapeado na relação pela abstração da métrica, suscetibilidade de realização de trabalho em uma posição. A linearidade com que as cargas se somam é necessária para elementos infinitesimais de volume. O novo espaço é mapeado pelo potencial.

O enlace é necessário para realização da covariância generalizada. Perde-se essa propriedade na transformação do espaço. A covariância de Lorentz na representação transformada do espaço pode ser refeita seguindo os passos do eletromagnetismo clássico. O mapeamento, até aqui, é uma realização eletrostática e não inclui o efeito da velocidade. A eletrodinâmica resgata sob a forma de campo vetorial o que seria a resultante da ação dispensado de vis-redux pelas emprego de referenciais.

O formalismo resultante, conceitualmente, não é conservativo pelo potencial de campo estritamente, mas pela regularidade da lei de emissão/absorção estar vinculada às posições, que remete a força de Abraham-Lorentz, ressalvado efeitos de campo próximo, campo distante.

## 3.2 Campo Forte, Alta Velocidade

Essa seção encaminha a resolução para o Invariante geodésico do enlace em condição de campo forte. O objetivo não é reduzir o sistema a uma solução movimento geral. Quantificar a produção de radiação por uma solução para uma condição de órbita em que os efeitos relativísticos produzidos pela métrica e produzidos pela velocidade são expostos.

A intensidade da atração, devido à pequena distância, é modulada na equação geodésica reduzida pelo fator  $\gamma_r$ , que tem um tratamento escalar. Em relação à velocidade, é esperado que magnitude da velocidade afete a intensidade escalar pelo fator de Lorentz. Contribui para complexidade da resolução a natureza vetorial da velocidade na forma como a direção da velocidade se orienta em relação à fonte de campo afetam o fator  $\gamma_v$ .

O efeito do fator  $\gamma_v$ , na resolução, é facilitada ao fazer tanto a intensidade quanto a direção constante. Interessante observar que, na métrica de simetria central, intensidade e direção se complementam na variabilidade: quando um é constante, o outro também o é, o que também afeta  $\gamma_r$ .

Em um primeiro equacionamento, ao fazer  $\dot{\gamma}_v = 0$ , pela simetria central da métrica, a direção da velocidade é ortogonal ao campo,  $\gamma_v = cte$  e a velocidade radial é nula. Consequentemente,  $\gamma_r$  também é constante, e a trajetória escolhida é o movimento circular uniforme.

A trajetória descrita é conhecida, mesmo antes da resolução diferencial, pelo conhecimento prévio das taxas de variação, o que é oportuno para investigar as relações mecânicas que conduzem ao processo de radiação.

As equações de índice temporal possuem solução trivial decorrente das restrições dado por  $\dot{\gamma} = 0$ . Soluções onde o raio é constante, a velocidade radial é nula e a velocidade angular é constante.

$$\mathcal{A}^0 = \mathcal{F}^0 \quad (3.10)$$

As componentes espaciais da geodésica equacionam:

$$\frac{\gamma_v^2}{\gamma_r^4} \left( \mathbf{f} + \frac{\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{f})}{c^2} \right) = \gamma_v^4 \mathbf{a} + \gamma_v^4 \frac{\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{a})}{c^2} \quad (3.11)$$

A componentes espaciais estabelecem a vinculação entre coordenadas e métrica no estímulo primário de vis-radix, e a ação induzida por reação da velocidade ao espaço em vix-reduz.

$$\mathcal{F}^k \hat{\mathbf{e}}_k = \mathcal{F}^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + 0 \hat{\mathbf{e}}_2 + 0 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (3.12)$$

$$= (f^1 + v^k \otimes (v^k \otimes f^1)) \hat{\mathbf{e}}_1 + 0 \hat{\mathbf{e}}_2 + 0 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (3.13)$$

O equacionamento espacial pode-se segmentar em dois grupos: a componente radial e as componentes angulares. Para o índice radial, a solução deve convergir para a expressão obtida campo-fraco, associa-se a igualdade termo-a-termo, e resulta em:

$$\mathcal{A}^1 = \mathcal{F}^1 \quad (3.14)$$

A expansão da equação desse índice apresenta como todas as vinculações espaciais são satisfeitas apenas pela coordenada radial.

$$\begin{cases} \gamma^4 a^1 = \frac{\gamma_v^2}{\gamma_r^4} f^1 \\ \gamma^4 v^k \otimes (v^k \otimes a^1) = \frac{\gamma_v^2}{\gamma_r^4} v^k \otimes (v^k \otimes f^1) \end{cases} \quad (3.15)$$

A equação também atesta como os índices angulares não se vinculam ao espaço e orientação depende de como o problema é arbitrado. A solução oferecida para um plano orbital implica uma direção fixa e o movimento circular permite encontra período angular constante, que torna trivial as equações angulares.

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{F}^2 \qquad \mathcal{A}^3 = \mathcal{F}^3 \quad (3.16)$$

A métrica introduz um contexto de referenciais para energia do elétron, além da transformação energia do fóton no espaço pela sua frequência.

A última parte dessa seção apresenta como relacionar a energia do fóton com a energia do movimento por uma definição de energia independente da métrica: escala energética normalizada.

### 3.2.1 Período Orbital Quantizado

Em campo forte, a restrição  $\dot{\gamma} = 0$  sustentar a condição de ortogonalidade entre a velocidade e a direção radial, o valor também implica em velocidade constante com  $\dot{\rho} = 0$ . Entretanto, deixa aberto grau de liberdade nas componentes angulares  $\theta$  e  $\dot{\varphi}$  expresso pela composição dessas variáveis.

$$\omega^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \quad (3.17)$$

Qualquer valor é válido desde que:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 \quad (3.18)$$

Considere, provisoriamente, que o movimento é restrito a um plano. A equação invariante geodésico do enlace  $\mathcal{A}^1 = \mathcal{F}^1$ , substituindo os termos, é simplificada:

$$\gamma_v^4 (\rho\omega^2) \hat{\rho} = \frac{\gamma_v^2}{\gamma_r^4} \left( \frac{kq^2}{mr^2} \right) \hat{\rho} \quad (3.19)$$

A equação expressa, na forma de aceleração, a atração imposta em uma determinada posição para manter a taxa de variação da velocidade do movimento circular.

Pela restrição em  $\dot{\gamma}$ , a atração é sempre ortogonal ao movimento, ou seja,  $v^2 = (\rho\omega)^2$ , com  $g_{22} = g_{33} = 1$ . Essa velocidade tem uma relação peculiar com a aceleração  $a = \rho\omega^2$ , e, nessa condição, o termo entre parêntesis no lado esquerdo da equação pode ser escrito como:

$$\frac{v^2}{r} = \|\omega \otimes (\omega \otimes r)\| \quad (3.20)$$

A validade condicionada ao movimento circular. Tal qual ocorre em vis-redux, há decomposição em projeção e rejeição do movimento e relação à curvatura espacial, em que rejeição é denotada por operador ternário. A condição de ortogonalidade e paralelismo são as únicas em que se permite fazer a igualdade  $a \otimes (b \otimes c) = a \times (b \times c)$  no espaço curvo.

Pela manipulação, chega-se à atração centrípeta: velocidade com intensidade relacionada à atração.

$$(\gamma_v \gamma_r^2 \rho \omega)^2 = \left( \frac{kq^2}{mr} \right) \quad (3.21)$$

Devemos prosseguir encontrando soluções discretas, entretanto pelas equações deduzidas nessa seção não há restrições ao continuum que forcem uma solução discreta. Para ser coerente com o que foi (e será) apresentado, não podemos empregar o argumento de Bohr, apoiada no momento angular de Nicholson[31]. A manutenção da trajetória inercial não admite ação de força, portanto não há surpresa na objeção aos fundamentos da mecânica newtoniana.

Ao preterir o momento angular, o cálculo discretização é feito pela atração centrípeta, que relaciona o período orbital com a frequência relativa ao comprimento Compton do elétron  $\lambda_0$ .

A atração centrípeta apresenta um fundamento que só pode ser expressa pela lei terceira lei de Kepler[18] [16]. O período orbital é obtido fazendo  $\gamma_v \gamma_r^2 \omega = 2\pi/T$ .

$$r \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = \left( \frac{kq^2}{mr^2} \right) \quad (3.22)$$

Tal qual ocorre em Kepler, há proporcionalidade entre o quadrado do período com o cubo da distância.

$$\frac{r^3}{T^2} = cte \quad (3.23)$$

Perceba que o período  $T$  empregado é dilatado em relação ao tempo coordenado, mas não se trata da dilatação convencional.

$$\tilde{T} = \gamma_v \gamma_r^2 T \quad (3.24)$$

Ou seja, o período encontrado não é o período orbital em tempo próprio, mas um período de oscilação independente. Há regularidade periódica orbital pela atração centrípeta, mas a medida kepleriana pelo passagem convencional do tempo, próprio ou coordenada, é regulada por outro fenômeno. A correlação entre os dois períodos, pela dilatação espacial e temporal, possibilita que sejam construtivos de alguma forma e para alguma frequência, mas periodicidade

descarta a continuidade, com isso o conjunto solução é discreta, pressupondo ressonância.

O fenômeno periódico intrínseco que regula a órbita é a frequência Compton, oscilação em tempo próprio da energia correspondente à massa de repouso pela equivalência com um fóton. Embora um corpo com massa não possa alcançar a velocidade da luz, o movimento da métrica no espaço pode, e é exatamente o que a medida define. Massa de repouso é invariante, e a covariância sobre tempo próprio resulta em uma frequência fundamental e independente.

Para demonstrar a relação com o comprimento Compton, considere o cálculo do perímetro orbital:

$$\ell = 2\pi \frac{kq^2}{mc^2 (\gamma_v \gamma_r^2 \beta)^2} \quad (3.25)$$

A única variável no lado direito da expressão é a velocidade. Conveniente aplicar uma transformação, denominada binormalizada, pelos mesmos fatores de dilatação aplicados ao período:

$$\alpha = \gamma_v \gamma_r^2 \beta \quad (3.26)$$

Intensidade pela qual a velocidade é medida tem como referência o deslocamento de massa à frequência Compton, guardando similaridade com transformação de Lorentz e transformação métrica do comprimento de onda fundamental.

A regularidade do período angular com a frequência fundamental ocorre em soluções discretas. Para lei de Kepler, ao discretizar os períodos orbitais possíveis para uma solução, discretiza-se também os raios.

Denotando por índices a discretização das variáveis, se para um raio  $\rho_1$  a respectiva velocidade binormalizada  $\alpha_1$  for numericamente igual à constante de estrutura fina [48] (velocidade de Sommerfeld [49]), então podemos introduzir a constante de Planck reduzida  $\hbar$ . O perímetro orbital torna-se:

$$\ell_1 = 2\pi \frac{\hbar}{m c \alpha_1} = 2\pi \frac{\lambda_0}{\alpha_1} \quad (3.27)$$

Além da relação com o comprimento Compton  $\lambda_0$ , pode-se estabelecer relação com o comprimento de onda proposto por de Broglie para o espaço plano, generalizando para espaço curvo pela binormalização  $\gamma_r^2$  do momento  $p = \gamma_v m v$ .

O comprimento de onda  $\lambda_n$ , comprimento de Broglie generalizado, associado ao momento binormalizado da partícula  $m c \alpha_n$ .

$$\lambda_n = \frac{2\pi \hbar}{m c \alpha_n} \quad (3.28)$$

O comprimento Compton e o comprimento de Broglie generalizado se relacionam pela transformação promovida por alfa (pode ser deduzida pela terceira de Kepler):

$$\lambda_n = 2\pi \frac{\lambda_0}{\alpha_n} \quad (3.29)$$

A equação do comprimento de onda de Broglie generalizado expressa outra relação mais direta:

$$m c \alpha_1 \rho_1 = \hbar \quad (3.30)$$

A expressão tem interpretação mecânica relacionada a velocidade areolar. Embora a segunda lei de Kepler[17][15] seja trivial para o caso circular, o princípio das áreas iguais, para além do movimento circular, demonstrar-se-ia mecanicamente no momento angular constante. Convém mencionar que Kepler inferiu a logicamente o que posteriormente foi demonstrado geometricamente por Newton: a definição moderna a velocidade areolar é logicamente equivalente à conservação do momento angular. Dessa proposição, se não há conservação de momento angular, então não há velocidade areolar constante. O argumento é refeito, dessa vez para a velocidade areolar que se medida pela velocidade binormalizada: por ser resultado de uma atração centrípeta, como em Kepler, poder-se-ia inferir o princípio das áreas análogo se a geometria assim o facultar.

A parte geométrica do processo é representada pelo operador do produto vetorial (\*\*). A parte crítica é que não é necessário um princípio areolar geral para o espaço contínuo. O princípio pode ser válido por trajetória que incluam as discretizações possíveis além da circular.

A existência do princípio areolar análogo para velocidade binormalizada é deixada em aberto, pela discretização e definição do operador que satisfaça:

$$2\gamma_r^2 \frac{d}{d\tau} S = \|\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\rho}\| \quad (**)$$

A forma escalar é condizente com definições anteriores. Ainda que a velocidade areolar seja constante no movimento circular, pela restrição em  $\hat{\gamma}$  não se pode definir uma direção, ou melhor, não é necessário. A trajetória geodésica pode estar em torção, conveniente à interpretação magnética da expressão.

A velocidade areolar é importante por sua relação com magnetismo da partícula, quando essa possui carga. As discrepâncias em relação ao magnetismo clássico podem ser explicadas pela maneira como a métrica afeta o adensamento das linhas de campo e é compensada pela velocidade.

### 3.2.2 Velocidade Centrípeta Binormalizada

A seção anterior apresenta a velocidade  $\alpha = \gamma_v \gamma_r^2 \beta$  relacionada à atração centrípeta e frequência natural da partícula.

A vinculação da velocidade com o espaço-tempo pela intensidade de campo, na hipótese de emprego contínuo, possui o mesmo fundamento relativístico que velocidade coordenada. Demonstra-se que  $\max(\alpha^2) = 1$ , conseqüentemente, a velocidade corresponde a uma transformação em unidade natural, pois é sempre subluminal.

Equação atração centrípeta, a velocidade binormalizada depende apenas do fator métrico. A equação pode ser escrita como:

$$\alpha^2 = \gamma_r - 1 \quad (3.31)$$

O fator métrico assume valores no intervalo  $\gamma_r = [1, \infty)$ , e se avaliado somente por esse fator,  $\alpha$  crescerá indefinidamente. Por outro lado, a velocidade  $\beta$  não pode crescer indefinidamente, pois:

$$1 = \gamma_v^2(\gamma_r^{-2} - \beta^2) \quad (3.32)$$

Um valor máximo de  $\alpha$  é limitado pelo valor que  $\beta$  pode assumir. Equacionando os dois anteriores:

$$\gamma_v^2 = \frac{\gamma_r^4 + \gamma_r^2 - 1}{\gamma_r^2} \quad (3.33)$$

Podemos achar a velocidade em função do campo:

$$\beta^2 = \frac{1}{\gamma_r^2} - \frac{\gamma_r^2}{\gamma_r^4 + \gamma_r^2 - 1} \quad (3.34)$$

com  $\gamma_r^2 \neq \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ .

Caminhando em direção ao centro, a velocidade cresce até um valor máximo  $\beta^2 \approx 0.1216$ , ponto em que  $\gamma_r^2 \approx 1.4516$  e  $\alpha^2 \approx 0.4516$ . Entretanto, além desse ponto a velocidade  $\alpha$  continua a crescer por conta de  $\gamma_r^2$  e  $\gamma_v^2$ .

O termo velocidade relativística do invariante de Lorentz:

$$\beta^2 \gamma_v^2 = \frac{1}{\gamma_r^2} - \frac{1}{\gamma_r^4} \quad (3.35)$$

Possui um máximo  $\beta^2 \gamma_v^2 = 0.25$  quando  $\gamma_r^2 = 2$ , com  $\beta^2 = 0.1$  e  $\gamma_v^2 = 2.5$ . Nesse ponto  $\alpha = 1$ , ainda com possibilidade de crescimento, entretanto, a velocidade relativística  $\beta^2 \gamma_v^2$  está relacionada com a aceleração pela sua taxa de variação. Regredindo à equação da atração centrípeta, a atração produz desaceleração nas variáveis coordenadas. Em aversão, as coordenadas rejeitam o campo a partir desse ponto. A existência de um raio de confinamento não é novidade para métrica regular, mas a investigação foge ao propósito do texto.

A velocidade centrípeta binormalizada do movimento circular  $\alpha = [0, 1]$  é sempre subluminal.

### 3.3 Escala Energética e Espectro

A transição entre duas órbitas circulares não ocorre por uma geodésica, e o processo, acompanhado de força, é medido pela emissão de radiação.

$$\Delta E_n = hf \quad (3.36)$$

A quantidade irradiada na transferência entre órbitas é obtida por balanço energético em uma formulação que envolve diferença de energias de uma mesma métrica da partícula no enlace. Essas energias não têm contexto fora da métrica do enlace.

$$E_n = \gamma_v mc^2 \quad (3.37)$$

Além da particularidade da métrica, implícita em  $\gamma_v$ , há as especificidades da transformação do espaço produzida por essa métrica na propagação. O fóton sofre declinação para o vermelho na propagação diante da métrica.

$$\frac{f_\infty}{f} = \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{\eta_{00}}} \quad (3.38)$$

Essas especificidades são válidas no contexto mecânico do enlace, mas indesejáveis a medição da emissão.

Metodologia de medição consiste na definição de uma escala comum em que a conversão estabeleça a correlação entre a medição direta do fóton com a cinética calculada.

### 3.3.1 Unidade Natural

Idealmente, a comparação de uma medida entre dois referenciais é feita em uma escala absoluta.

A velocidade da luz, além de ser o limite da maior velocidade possível, é considerada absoluta, pois não depende de qualquer referencial. Qualquer outra velocidade é normalizável pela razão que faz com a luz, assim a velocidade  $\beta$  é a unidade natural.

A velocidade binormalizada  $\alpha$  comporta-se como uma velocidade em unidade natural, pois é subluminal, e permite empregar como uma referência em escala normalizada.

Definimos um fator subluminal pela razão:

$$\gamma_\alpha = \frac{\mathbb{E}_\alpha}{\mathbb{E}_0} \quad (3.39)$$

A razão expressa o ganho que a energia de repouso adquire com a velocidade binormalizada por escala do fator subluminal. Repare a generalidade, assim como  $\beta$  é a unidade natural de velocidade,  $\gamma$  é a unidade natural de energia.

$$\gamma_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (3.40)$$

Com isso, pode-se estabelecer uma nova escala energética que independe da métrica, ou normalizada com relação à métrica.

Entendido de outra forma, equipolência da magnitude da velocidade diante da metrificação da luz, define-se escala de energia pela elevação da energia de repouso pela velocidade no fator subluminal.

### 3.3.2 Serie de Lyman

O cálculo da série de Lyman[24], pelas definições deduzidas da eletrométrica, é apresentado como representativa das energias principais do átomo de hidrogênio é oferecido como evidência da relevância do trabalho apresentado. Para

$n$	$\mathcal{E} = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p$ (J)	$(m_{red}/m_e)\Delta\mathcal{E}$ (J)	$\lambda_{calc}$ (nm)	$\lambda_{tab}$ (nm)
1	2,179 901 E-18	0,000 000 E-19	0,000 000 0	0,000 000 0
2	5,449 699 E-19	1,634 041 E-18	121,566 45	121,567 01 [19]
3	2,422 083 E-19	1,936 637 E-18	102,571 88	102,572 20 [19]
4	1,362 421 E-19	2,042 546 E-18	97,253 409	97,253 650 [19]
5	8,719 494 E-20	2,091 566 E-18	94,974 061	94,974 287 [19]
6	6,055 203 E-20	2,118 195 E-18	93,780 116	93,780 331 [19]
7	4,448 720 E-20	2,134 251 E-18	93,074 604 3	93,074 814 2 [19]
8	3,406 051 E-20	2,144 672 E-18	92,622 352 7	92,622 560 5 [19]
9	2,691 200 E-20	2,151 816 E-18	92,314 821 6	92,315 027 5 [19]
10	2,179 872 E-20	2,156 927 E-18	92,096 096 2	92,096 300 6 [19]
11	1,801 547 E-20	2,160 708 E-18	91,934 930 2	91,935 133 4 [19]

Tabela 1: Comparação entre comprimentos calculados e tabelados da série de Lyman

ser sucinto na tabulação de números, as outras séries são compreendidas pela correspondência com o método empírico de Rydberg[41].

A energia do fóton de emissão é equacionada diretamente com a diferença de energia orbital  $\Delta\mathbb{E}_n = hf$ , com a energia calculada pela escala de energia da equipolência luminífera:

$$\mathbb{E}_n = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha_n^2}} mc^0 c^0 \delta_{00} = \gamma_{\alpha_n} mc^2 \quad (3.41)$$

Considerando que a massa de repouso é sempre constante, a diferença de energia orbital entre dois níveis também pode ser calculada pela forma relativística da diferença de energia cinética  $\Delta\mathbb{K}_n = hf$ .

A energia cinética para a primeira órbita:

$$(\gamma_{\alpha_1} - 1)mc^2 = 2,179\,959\,425\,818\,54 \times 10^{-18} J \quad (3.42)$$

Expectativa é que o valor seja uma melhor estimativa da energia de Rydberg do que seria obtido da aproximação clássica  $\mathbb{K}_n = mc^2\alpha^2/2$ . Entretanto é o resultado clássico está mais próximo do valor experimental.

$$Ry = 2,179\,872\,361\,1030(24) \times 10^{-18} J \quad [29] \quad (3.43)$$

Intrigante é que a diferença de energia cinética  $\Delta\mathbb{E}_n$  pelo cálculo relativístico é uma boa aproximação para a emissão de radiação, indicando que toda energia cinética calculada é liberada.

Como a elevação ocorre em todos os níveis, a diferença desaparece nos cálculos do espectro, com efeito,  $\Delta\mathbb{K}_n$  relativístico é uma boa aproximação da energia emitida. Discrepância com  $Ry$ , apesar da precisão no espectro, é explicada pela conjunção da forma como atração centrípeta poder ser posta na forma  $\alpha_n^2 = U_n/mc^2$ , e a aproximação clássica produzir erro na mesma ordem de grandeza, cancelando-se na diferença entre níveis. O valor experimental, calculado pelo comprimento do fóton emitido, recai no melhor ajuste para a forma empírica.

O que se pode demonstrar é estimativa comprimento de onda pelo cálculo relativístico com maior precisão por conta do potencial.

A energia pela equipolência  $\mathbb{E}_n$  equivale à energia total, e, excluindo a energia de repouso, o que temos é a energia do movimento sobre a métrica. Não consta a energia de mudança de métrica, o patamar de atração que mantém a órbita. Assim como esperado, o fator  $\gamma_\alpha$  esconde a mudança de representação do espaço, e a maneira como a energia de repouso é afetada pela métrica, considerado constante para o cálculo feito. Na correspondência com a forma clássica, o efeito que métrica tem sobre a massa de repouso é manifesto na forma de potencial.

Energia cinética é uma grandeza escalar indiferente à direção da velocidade. Pelo fator  $\gamma_\alpha$ , a representação orbital é feita em uma métrica plana fictícia e a reconstituição do movimento circular é por restrição holonômico. Análogo à energia potencial clássica, é necessário um termo de energia de holonomia, que substitui a atração orbital, para calcular a energia devido à mudança de vínculos holônimos pela métrica.

A transferência entre órbitas a transição é não-geodésica, sendo possível considerar a transformação na representação métrica  $g_{00}$  em potencial específica  $U/mc^2$  para holonomia. O potencial tem aproximação por expansão binomial pelo fator  $\gamma_r$ , e a fatoração é obtida ao reescrever a energia  $\mathbb{E}_n = \gamma_r \mathcal{E}_n$ .

$$\mathcal{E} = \gamma_r \gamma_\alpha m_e c^0 c^0 g_{00} \quad (3.44)$$

A aproximação pode ser considerada adequada se a estimativa da energia puder ser feita por  $\Delta\mathcal{E} = hf$ . Pode-se separar a energia em termos cinético e potencial  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p$  se o termo  $U/c^2$  de  $g_{00}$  for pequeno o suficiente. Matematicamente é expresso pela expansão binomial de  $1/\gamma_r = \sqrt{g_{00}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{U}{mc^2}}} \approx 1 - \frac{U}{2mc^2} \quad (3.45)$$

O valor peculiar remete à energia orbital específica, favorável à interpretação que a mudança de órbita é acompanhada de mudança de energia orbital específica.

Decomposição cinética-potencial dever ser tal que a maior maior contribuição da emissão venha da parcela cinética. O primeiro termo separado é a energia de repouso

$$\mathcal{E} \approx \gamma_r (\gamma_\alpha - 1) mc^0 c^0 g_{00} + mc^0 c^0 \quad (3.46)$$

Aproveitando que  $\gamma_r \approx 1$ , fazemos a massa de repouso constante para que a expressão  $\mathcal{E}_n$  para que equivalha ao que foi feito em  $\mathbb{E}_n$ . Prosseguindo da expansão binomial de  $\gamma_r g_{00}$ , obtemos energia cinética e potencial.

$$\mathcal{E}_k \approx (\gamma_\alpha - 1) mc^2 \quad (3.47)$$

$$\mathcal{E}_p \approx -(\gamma_\alpha - 1) \frac{U}{2} \quad (3.48)$$

A energia cinética é a mesma de  $\mathbb{K}_n$ . Na tabulação das energias, é feita a correção pela massa reduzida do elétron.

$$\frac{m_{red}}{m_e} = \left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right)^{-1} \quad (3.49)$$

Comparação com valores experimentais tabulados é feita em 1.

## 4 Ressonância Orbital

A seção aborda a resolução do sistema de equações do movimento de dois corpos. Nas resoluções anteriores, consideramos o núcleo do átomo imóvel no movimento produzido pela atração mútua, uma boa aproximação pela proporcionalidade que razão entre as massas do próton e elétron afetam o movimento. O tensor métrico que afeta o elétron pode ser aproximado para origem fixa, o que resulta no sistema de equações do movimento de um-corpo, e pode-se empregar diretamente a geodésica da métrica de simetria central.

O sistema de equações do movimento de dois-corpos pode ser escrito em correspondência um-corpo pela similaridade de simetria central. A resolução deve considerar mobilidade da origem dos tensores métricos no enlace, o que afeta simultaneidade do evento alinhamento das direções de atração constatado por um observador, e também deve ser considerada nos referenciais das partículas. Em outras palavras, as variáveis coordenadas apresentam um resultado em uma posição aparente, e no referencial de cada partícula há o efeito retardado.

Diferentemente da ação-reação newtoniana, na atração eletrométrica há parcelas induzidas que são sensíveis à magnitude e a direção de alinhamento com a velocidade.

Um efeito importante do desalinhamento é a tendência restauradora à trajetória de equilíbrio. Decorre estabilidade ondulação no movimento, e pelo acoplamento, ressonância entre as partículas. Por não se tratar de uma oscilação forçada por uma influencia externa, deve-se encontrar uma frequência natural.

Ainda que a solução não possa ser deduzida, é possível compor uma trajetória que satisfaça as condições geodésicas expostas pelas propriedades que a curva apresenta. Epitrocoide apresenta existência de uma solução, mas não unicidade.

Cada resolução encontra múltiplas soluções para uma mesma distância radial, pelo indeterminismo da variável do ângulo de fase da oscilação, enquanto resoluções distintas são separadas por distâncias radiais discretas pela dependência do tempo de propagação.

### 4.1 Vis-Osculação

Na resolução de um sistema de dois corpos é fundamental correlacionar ação em um corpo e reação em outro.

Vis-osculação [26] é a condição de equilíbrio na atração entre dois corpos. Pode ser expresso, nas variáveis coordenadas, pela equação:

$$[\mathcal{A}_1]^\mu + [\mathcal{A}_2]^\mu = 0 \quad (4.1)$$

Uma propriedade interessante de se observar é que a equação equivale à condição geodésica de ambas as partículas. Substituindo a contraparte  $[\mathcal{F}_1]^\mu + [\mathcal{F}_2]^\mu = 0$  obtemos uma das geodésicas  $[\mathcal{A}_1]^\mu + [\mathcal{F}_1]^\mu = 0$ .

A igualdade se mantém entre as componentes espaciais vis-radix e vis-redux separadamente. Expandido à forma vetorial, é interessante expressar o momento de cada partícula:

$$\frac{\gamma_1^2 [m_1^2 \gamma_1^2 \mathbf{a}_1 + \gamma_1 \mathbf{p}_1 \otimes (\gamma_1 \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{a}_1)]}{m_1} + \frac{\gamma_2^2 [m_2^2 \gamma_2^2 \mathbf{a}_2 + \gamma_2 \mathbf{p}_2 \otimes (\gamma_2 \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{a}_2)]}{m_2} = 0 \quad (4.2)$$

Da igualdade entre os termos vis-radix:

$$m_2 m_1^2 \gamma_1^4 \mathbf{a}_1 = m_1 m_2^2 \gamma_2^4 \mathbf{a}_2 \quad (4.3)$$

A resolução de vis-redux somente possibilita-se se houver um centroide tal que:

$$\gamma_1 \mathbf{p}_1 + \gamma_2 \mathbf{p}_2 = 0 \quad (4.4)$$

O entendimento sobre as implicações desse equacionamento é obtido da comparação com a ação-reação newtoniana sobre a força entre dois corpos. Conceitualmente, vis-osculação ocorre por atração entre dois corpos pela curvatura em condição geodésica. Por outro lado, força existe somente no desvio da curva, conforme o invariante geodésico.

A reciprocidade geodésica é observada na compatibilidade de velocidades tanto em magnitude pelo fator  $\gamma_v$ , quanto em direção pelo termo vis-redux.

$$\frac{\gamma_1 m_1}{\gamma_2 m_2} = -\frac{v_2}{v_1} \quad (4.5)$$

Exemplo ilustrativo de que uma partícula leve e rápida ao se aproximar de uma partícula pesada e lenta não a puxa, mas sim é freada pela força de emissão.

Conforme o apresentado anteriormente, o invariante geodésico é equacionável diretamente pelas coordenadas, enquanto o não-geodésico é preciso conhecer a direção da radiação emitida.

$$[\mathcal{A}_1]^\mu + [\mathcal{A}_2]^\mu = \mathcal{E}^\mu \quad \begin{cases} \mathcal{E}^\mu = 0 & \text{geodésica} \\ \mathcal{E}^\mu \neq 0 & \text{não-geodésica} \end{cases} \quad (4.6)$$

## 4.2 Freqüência Natural e Discretização

Vis-osculação não é uma postulação do movimento, como acontece no princípio de ação-reação, que se impõem sobre movimento. É a caracterização de um movimento possível do sistema binário, prevista no invariante de ortogonalidade.

O equilíbrio na atração de dois corpos do sistema binário é contingente e ocorre em condições específicas de magnitude e direção. Tão logo as magnitudes das velocidades sejam compatíveis, também o será  $\gamma_v$  e, com isso, vis-redux, que também depende da direção da velocidade.

A direção que os vetores em cada corpo assume são eventos distintos e separados espacialmente. A observação do alinhamento das direções espaciais dos vetores é um evento que depende do referencial.

O alinhamento simultâneo deve ocorrer no referencial próprio dos corpos. A situação é simétrica entre os referenciais próprios, que compartilham a mesma distância entre si. O observador percebe atraso no instante que o alinhamento deve ocorrer devido ao retardo de propagação da posição, que deve ser o mesmo em ambos os corpos.

Partindo da posição em que se prevê uma órbita circular, o observador toma o instantâneo da posição de um dos corpos, o outro corpo será observado com defasagem em relação ao movimento progressivo. A posição defasada altera o ângulo que a velocidade faz com a direção radial, o que pode ser representado na decomposição da velocidade  $\mathbf{v}$  em uma componente perpendicular ao raio  $\mathbf{v}_p$  e o surgimento da velocidade radial  $\mathbf{v}_r$ .

$$(\mathbf{v}_p + \mathbf{v}_r) \times [(\mathbf{v}_p + \mathbf{v}_r) \times \mathbf{r}] = (\mathbf{v}_p + \mathbf{v}_r) \times (\mathbf{v}_p \times \mathbf{r}) \quad (4.7)$$

A velocidade perpendicular ao raio é natural ao movimento circular, e a análise concentra-se da direção da velocidade radial, que pode promover a tendência de afastamento ou aproximação.

Uma velocidade de afastamento induz uma atração mais intensa pela redução da componente vis-redux, e a situação oposta, com a velocidade de aproximação, por uma atração mais branda. Vetorialmente, velocidade radial produz um desvio angular, que induz na atração a tendência restauradora, tendo a trajetória circular como ponto de equilíbrio.

O sistema torna-se um oscilador harmônico [8][14], em que a parcela da atração induzida pela velocidade atua como força restauradora da trajetória equilíbrio em proporção à direção. Em outra perspectiva, cada partícula move-se em relação à métrica da contraparte, e também relativamente ao arrasto pela flutuação da métrica. O acoplamento entre as partículas cria ciclo de autorreforço que amplifica as forças, acelerando até que se chegue a um extremo.

Frequência natural de ressonância ocorre pela energia máxima que o campo pode transferir à partícula, que corresponde a maior velocidade relativa que um campo pode possuir em relação a um corpo, velocidade da luz. Um corpo material não pode acelerar até a velocidade da luz, frequência máxima que comporta é devido ao arrasto métrica. O excesso acima desse liminar é rejeitado, que explica a relação com a radiação.

Com a flutuação periódica da métrica, o movimento oscilatório resultante autoestabiliza e torna-se geodésico, e a frequência natural deve ser observada nas condições de movimento.

Seguindo o raciocínio que na trajetória geodésica o estado de movimento é inercial, e os cálculos são pela massa de repouso  $E_0 = mc^2$ , chega-se na frequência Compton[5], que corresponde a vibrar como se fosse um corpo imaterial.

Pelo acoplamento do sistema binário, a propagação da posição que um corpo ocupa está correlacionado com a propagação da métrica. A oscilação de um dos corpos leva a oscilação do outro, em ressonância, pelo fato do primeiro ser o indutor da métrica do segundo. A frequência natural de ressonância é de Broglie, enquanto cada partícula possui frequência fundamental Compton, que ressona pela flutuação da métrica no referencial próprio.

A autoindução é sustentada na oscilação forçada pela “reflexão” na contraparte, e o padrão cíclico estabiliza em múltiplos inteiro de oscilações em um período orbital, que pela frequência de Broglie generalizada, é a velocidade bi-normalizada.

Em conjugação com a discretização do período orbital, também ocorre a discretização da distância radial pelas relações sistêmicas entre as variáveis.

A ondulação é percebida exteriormente pelo comprimento de Broglie. A estabilidade em fase na configuração dipolo promove o cancelamento da ondulação, enquanto em um desbalanço de fase, o excedente escapa da oscilação na forma de onda.

O limite de transferência de energia por velocidade relativa também afeta as definições anteriores: somente faz sentido formular o tensor métrico na hipótese da origem em repouso.

O fóton carrega, em energia, a força feita para recondicionar a trajetória particular ao invariante.

### 4.3 Epitrocoide

Na solução da trajetória circular para campo forte, a trajetória descrita era conhecida mesmo antes da resolução diferencial. O conhecimento prévio das taxas de variação permitiu demonstrar as relações mecânicas que conduzem ao processo de radiação.

Diante do tempo de propagação entre as posições, a condição de vis-oscilação deve produzir oscilação, que entra na composição do movimento.

Ao pressupor que a oscilação encontre um novo estado de equilíbrio, pode-se compor uma trajetória que satisfaça as condições. Uma solução que atenda a vis-oscilação e propagação deve resultar na oscilação ressonante entre as partículas do enlace.

Epitrocoide combina os dois movimentos circulares, rotação e giro, em que a oscilação corresponde à ondulação pretendida para a trajetória. A curva é idealização que abstrai o plano orbital, capaz de descrever as propriedades que se mostrem independentes da limitação planar.

Como esperado, a dependência harmônica entre as frequências do giro e da rotação um fator por inteiro limita a resolução a um espaço de soluções discreto.

A epitrocoide é empregada para descrever duas situações de simultaneidade: posição e momento. No primeiro caso é preciso satisfazer o parâmetro da métrica, a distância pela diferença de posições. No segundo, trazer do referencial próprio para o referencial do observador simultaneidade de velocidades que satisfazem vis-oscilação.

#### 4.3.1 Descrição Formalismos

Epitrocoide [23] é uma classe geral de curvas, um tipo particular de rolete, onde o gerador é um ponto ligado ao movimento de uma circunferência que gira na parte exterior de outra circunferência. Cada curva é caracterizada pelos coeficientes:  $R$ , raio do círculo fixo;  $r$ , raio do círculo móvel;  $A$ , a distância entre o círculo móvel e o ponto gerador.

A equação pode ser transcrita nos fatores:

$$q = \frac{R}{r} \qquad k = \frac{A}{r} \qquad (4.8)$$

Onde  $q$  pode ser associado à frequência relativa (harmônico quando inteiro) ao parâmetro angular, e  $k$  à amplitude relativa.

As equações paramétricas na forma cartesiana são:

$$x(\theta) = (R + r) \left[ \cos \theta - \frac{k}{(q + 1)} \cos ((q + 1)\theta) \right] \qquad (4.9)$$

$$y(\theta) = (R + r) \left[ \sin \theta - \frac{k}{(q + 1)} \sin ((q + 1)\theta) \right] \qquad (4.10)$$

A epitrocoide expressa a (possível) ondulação em torno do raio combinado  $R + r$ , onde o termo  $q + 1$  modula tanto a frequência quanto a amplitude.

As equações paramétricas da velocidade associada ao movimento do ponto gerador.

$$\dot{x}(t) = - (R + r)\dot{\theta} [\sin \theta - k \sin ((q + 1)\theta)] \qquad (4.11)$$

$$\dot{y}(t) = (R + r)\dot{\theta} [\cos \theta - k \cos ((q + 1)\theta)] \qquad (4.12)$$

A distância entre o centro do círculo fixo e o ponto gerador, facilmente lembrado pela relação com lei dos cossenos.

$$\rho^2(\theta) = (R + r)^2 \left[ 1 + \frac{k^2}{(q + 1)^2} - 2 \frac{k}{(q + 1)} \cos (q\theta) \right] \qquad (4.13)$$

Essa distância não é utilizada nos cálculos, mas por clareza é deixada como referência, pela menção que será feita da desigualdade triangular das distâncias pelo centro. Adiante veremos que em um sistema binário, duas epitrocoides concêntricas e em fase. A distância entre os pontos móveis opostos não é dado pela soma dos raios, dado que o segmento que os liga não passa pelo centro.

Outras duas medidas da epitrocoide serão empregadas em conjunto no cálculo do momento magnético.

A área da superfície fechada pelo período completo é obtida na expressão

$$S = \pi(R + r)^2 \left( 1 + \frac{k_n^2}{(n + 1)} \right) \qquad (4.14)$$

Comprimento de arco recai em uma integral elíptica da segunda espécie. Para o período completo é possível empregar a função na forma de arco completo:

$$L(\phi) = (R + r)(1 - k) \int_0^\phi \sqrt{\left[ 1 - K^2 \sin \left( \frac{n\theta}{2} \right) \right]} d\theta \qquad (4.15)$$

$$K^2 = -4 \frac{k}{(1-k)^2} \quad (4.16)$$

Transformação de variáveis ( $2du = nd\theta$ ), para um período  $\phi = \pi/n$  chegamos a função completa:

$$L(\pi/n) = r_n(1-k_n)2E\left(\frac{\pi}{2}; K^2\right) = r_n(1-k_n)2E(K^2) \quad (4.17)$$

### 4.3.2 Posição

A construção das trajetórias do sistema binário auxilia na descrição dos eventos. Duas epitrocoides concêntricas e em fase, com as partículas ocupando posições opostas pela diferença de fase. A ênfase está na manutenção da distância constante entre as partículas, pela participação dessa medida como parâmetro da métrica e, colateralmente, por facilitar a simultaneidade das posições.

Assim como no sistema binário circular, no binário epitrocoidal a distância entre as duas partícula pode ser dada pela soma dos raios em relação a uma origem comum, aqui denominada centroide massa, mas ao contrário do que acontece no circular, esse centroide não recai sobre o centro da figura construída, aqui denominada centroide geométrico.

A mesma condição que é aplicada a um sistema binário circular, as posições das partículas devem ser tal que preservem sempre uma distância constante, ou seja,  $\dot{\rho} = 0$ .

A relevância das distâncias relativas constante, a despeito das posições absolutas flutuarem, facilita a análise do evento simultaneidade das posições, o que é exigido por vis-osculação pelo tempo de propagação. Também simplifica a forma convoluta com que a distância medida pela métrica se estabelece como parâmetro dessa mesma métrica: resulta em uma métrica não varia no tempo; produz constância no tempo de propagação na velocidade da luz entre as posições das partículas. Ambos aspectos são importantes para análise posterior  $g_{11}(\rho)$

Composição da distância é pela soma vetorial das posições epitrocoidais das partículas.

$$\rho = \|\boldsymbol{\rho}_e - \boldsymbol{\rho}_p\| \quad (4.18)$$

As epitrocoides tem um centroide geométrico comum, mas pela desigualdade triangular das distâncias por esse ponto, não é certo que os três pontos estarem sempre alinhados. O ponto que classicamente convém, o centroide de massa, distante  $\rho \frac{\mu}{m_e}$  do elétron e  $\rho \frac{\mu}{m_p}$  do próton, deve girar em torno do centroide geométrico.

Para a construção da trajetória do elétron, a discretização das órbitas é expressa pela modulação da frequência para uma amplitude fixa. Os parâmetros da curva são:

$$q = n \quad A = \alpha_1 r_1 \quad (4.19)$$

Um número  $(q + 1) \in \mathbb{N}$  é necessário para o sistema binário consistente. Do rolete da curva, ao percorrer o perímetro  $2\pi A$  o elétron movimentada sua energia de repouso pelo comprimento Compton  $\lambda_0$ . Prosseguindo com as definições, a frequência tem efeito na discretização variáveis do movimento pela escolha coeficiente  $k$  de amplitude relativa.

$$k_n = \frac{n + 1}{R_e + r_e} A = \frac{n + 1}{r_n} \alpha_1 r_1 \quad (4.20)$$

A expressão para os raios  $R_e + r_e$  combinados é conhecida e corresponde ao raio discreto em  $2\pi r_n = \ell_e$

$$r_e = \frac{\ell_e}{2\pi(n + 1)} \quad R_e = \frac{n\ell_e}{2\pi(n + 1)} \quad (4.21)$$

A velocidade também é afetada pela escolha dos parâmetros da curva. Para a condição de derivada suave, a atração requer curvatura apropriada. Pela natureza do movimento, o critério de concavidade da epitrocoide deve ser satisfeito.

$$k < \frac{1}{n + 1} \quad (4.22)$$

Equações paramétricas da trajetória do elétron são:

$$x_e(\theta) = \frac{\ell_e}{2\pi} \left[ \cos \theta - \frac{2\pi\alpha_1 r_1}{\ell_e} \cos((1 + n)\theta) \right] \quad (4.23)$$

$$y_e(\theta) = \frac{\ell_e}{2\pi} \left[ \sin \theta - \frac{2\pi\alpha_1 r_1}{\ell_e} \sin((1 + n)\theta) \right] \quad (4.24)$$

Equações para o próton são similares, onde o expoente expressa a alternância pela paridade no número de cristas de onda para o emparelhamento das trajetórias. Equações paramétricas da trajetória do próton são:

$$x_p(\theta) = \frac{\ell_p}{2\pi} \left[ \cos \theta + (-1)^n \frac{2\pi\alpha_1 r_1}{\ell_p} \cos((1 + n)\theta) \right] \quad (4.25)$$

$$y_p(\theta) = \frac{\ell_p}{2\pi} \left[ \sin \theta + (-1)^n \frac{2\pi\alpha_1 r_1}{\ell_p} \sin((1 + n)\theta) \right] \quad (4.26)$$

A posição angular entre as duas partículas podem ser expressas no parâmetro. Com isso, a distância espacial entre as duas partículas é:

$$\|\boldsymbol{\rho}_e - \boldsymbol{\rho}_p\| = \sqrt{[x_e(\theta) - x_p(\theta + \pi)]^2 + [y_e(\theta) - y_p(\theta + \pi)]^2} \quad (4.27)$$

A defasagem pelo valor  $\pi$  no parâmetro das equações do próton expressa a oposição na trajetória que a partícula estabelece com o elétron. A diferença garante uma distância constante  $\rho$ , se as distâncias se relacionarem em proporção às massas.

$$\frac{\ell_e}{2\pi} = \rho \frac{\mu}{m_e} \qquad \frac{\ell_p}{2\pi} = \rho \frac{\mu}{m_p} \qquad (4.28)$$

A distância coordenada é um evento simultaneidade de posições no referencial coordenado. No sistema de dois corpos, ainda que a distância se mantenha constante, o ponto de origem de cada métrica se movimenta, e é preciso considerar como o movimento afeta a simultaneidade em outros referenciais.

Destaca-se a forma convoluta que a distância radial é parâmetro e medida mesma da métrica que a parametriza. A medida, ao ser aceita como parâmetro, aparenta “eliminar” a separação entre espaço paramétrico e espaço tangente.

$$g_{11}(\rho) = 1 + \frac{kq^2}{mc^2\rho} \qquad (4.29)$$

Primeiro, o parâmetro metrifica a si próprio, involuto, o que significa que a distância coordenada para uma trajetória radial é  $\rho = c \int dt$ , é coerente com a metrificação medida pelo tempo próprio  $dt = \sqrt{g_{00}} d\tau$ , o que é possível no movimento pela ação do campo se  $\gamma_v \gamma_r = 1$ , que é a condição de dedução do tensor métrico regular.

Segundo destaque é que a demonstração de um espaço ser metrificável é que a métrica, em sua dedução, não varia no tempo para uma mesma distância coordenada. No caso abstrato, a variação seria tratada por movimento combinado, recorrendo à transformação de Lorentz quando a métrica se move no espaço.

Terceiro destaque é que a distância coordenada, parâmetro da métrica, é um evento simultaneidade das posições no referencial coordenado. Na transformação de referenciais, a covariância não representa um morfismo para a involução. A generalidade abstrata da transformação covariante da métrica  $\Lambda_{\kappa}^{\mu} \Lambda_{\lambda}^{\nu} g_{\mu\nu}$  não é acompanhada da respectiva transformação covariante do parâmetro, também não atenta para o fato da velocidade ser direcional, e o raio não: o parâmetro é particular à resolução da métrica e peculiar ao observador do evento diante da covariância convoluta, não obstante, à covariância da métrica.

A preocupação com um parâmetro invariante também ocorre na formulação do lagrangiano covariante, que toma como parâmetro uma quantidade invariante abstrata[21][9] em alternativa ao tempo próprio. No caso métrico, a preocupação com a consistência da involução diante da covariância não é um problema, mas uma propriedade (ou falta dela).

A inexistência de covariância da involução resgata a separação entre o espaço paramétrico e espaço tangente “eliminada” acima. A discussão também é pertinente pela forma como a composição da distância está relacionado com o movimento da métrica. A mudança para o referencial próprio, como pretendido em vis-oscultação, não pode incorrer em involução.

Satisfazer a simultaneidade do espaço tangente do referencial próprio é distinto de satisfazer a simultaneidade do referencial do observador para o espaço paramétrico chega-se a um indeterminismo: **não é possível determinar simultaneamente posição e velocidade** em um mesmo referencial de maneira involuta sabendo-se que o evento posição é definido no referencial coordenado, enquanto evento velocidade será definido no referencial próprio.

A resolução proposta satisfaz os dois espaços, mas torna explícita a separação entre espaço tangente e espaço coordenado.

### 4.3.3 Momentum

A separação do espaço tangente é representada por trajetória conjugada capaz de reproduzir nas coordenadas do observador a situação de estabilidade resultante da formação do padrão oscilatório por ressonância pela parcela da atração induzida pela velocidade.

Pela sequência de exposição, a trajetória de posição foi apresentada antes da de velocidade, mas por artifício de evitar-se resolução diferencial. A ideia de estarem conjugadas desfaz qualquer ordem ou dominância, tornado-se importante apenas quantificar a disparidade entre as trajetórias, que pelo padrão regular, resulta em múltiplos de meio ciclo.

A estabilidade do sistema binário, descrita de vis-osculação, depende do alinhamento de velocidades. Por efeito retardado, a partícula é influenciada, em um certo instante, pela atração da distância feita na posição que a contraparte ocupava, retrocedendo o movimento pelo tempo de propagação. Interação tem efeito no instante que a atração é percebida pela partícula, e pela reciprocidade com a contraparte, constitui um evento de simultaneidade no referencial próprio.

Apresentado por Poincaré[36][37], o conceito de simultaneidade eventos à distância não é absoluta, e pela dependência do referencial, o evento em questão não é retratado diretamente referencial no observador coordenado. Embora as posições correspondentes possam ser transformadas, não são metrificáveis por inconsistência da involução diante da covariância.

Em reverso, levar distância métrica pela simultaneidade de posições ao referencial próprio recai na mesma situação. A situação faz notar que o evento posição que satisfaz métrica reside no referencial coordenado, enquanto o evento velocidade que satisfaz vis-osculação reside no referencial próprio, que revela a impossibilidade de determinar simultaneidade posição e velocidade simultaneamente.

A consequência dessa proposição é resumida na expectativa de que a continuidade pela conexão do espaço tangente apresente disparidade com a trajetória paramétrica, mas sem definir um padrão de ocorrência. Desse entendimento, o artifício empregado faz proveito do padrão regularidade cíclica na expectativa que seja possível restabelecer concordância por um parâmetro de conformidade pelo desvio periódico em peculiaridade da trajetória.

Satisfazer vis-osculação é problematizado em traçar a linha de visada entre as partículas, onde a posição aparente sofre aberração por efeito do retardado. Aproveitando-se que o indeterminismo determina separação entre o espaço tangente e o espaço coordenado, idealizam-se as trajetórias em espaço coordenado, corrigida a aberração, para retratar ocorrência do referencial próprio de uma das partículas, se a involução fosse possível: trajetórias conjugadas por uma das partículas.

Pela periodicidade, a construção das trajetórias conjugadas por uma das partículas resulta em acréscimo de defasagem por conta do retardo. A defasagem total compreende um ângulo  $\pi/n$  que aqui, pela generalidade, é dividido igualmente entre as duas trajetórias.

$$X_e(\theta) = \frac{\ell_e}{2\pi} \left[ \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2n}\right) - \frac{2\pi\alpha_1 r_1}{\ell_e} \cos\left((1+n)\theta - \frac{\pi}{2n}\right) \right] \quad (4.30)$$

$$Y_e(\theta) = \frac{\ell_e}{2\pi} \left[ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2n}\right) - \frac{2\pi\alpha_1 r_1}{\ell_e} \sin\left((1+n)\theta - \frac{\pi}{2n}\right) \right] \quad (4.31)$$

As velocidades são obtidas por:

$$\frac{dX}{d\tau} = \gamma_v \dot{X}_e(\theta) \qquad \frac{dY}{d\tau} = \gamma_v \dot{Y}_e(\theta) \quad (4.32)$$

Equações paramétricas do próton seguem o mesmo padrão:

$$X_p(\theta) = \frac{\ell_e}{2\pi} \left[ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2n}\right) + (-1)^n \frac{2\pi\alpha_1 r_1}{\ell_e} \cos\left((1+n)\theta + \frac{\pi}{2n}\right) \right] \quad (4.33)$$

$$Y_p(\theta) = \frac{\ell_e}{2\pi} \left[ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2n}\right) + (-1)^n \frac{2\pi\alpha_1 r_1}{\ell_e} \sin\left((1+n)\theta + \frac{\pi}{2n}\right) \right] \quad (4.34)$$

As trajetórias conjugadas são construções auxiliares para operar sobre os espaço da velocidade. O importante é observar que não é possível obter uma a distância constante entre as duas partículas, que caracteriza trajetórias distintas das obtidas anteriormente no cálculo de posição e sem correspondência ao parâmetro da métrica. A trajetória serve ao espaço tangente.

As velocidades das partículas estarão alinhadas na mesma direção se a soma do momento linear das componentes de cada direção respectiva for zero, satisfazendo vis-osculação.

$$\gamma_e m_e \dot{X}_e(\theta) + \gamma_p m_p \dot{X}_p\left(\theta + \pi - \frac{\pi}{n}\right) = 0 \quad (4.35)$$

$$\gamma_e m_e \dot{Y}_e(\theta) + \gamma_p m_p \dot{Y}_p\left(\theta + \pi - \frac{\pi}{n}\right) = 0 \quad (4.36)$$

As equações apresentam um centro de momento, que coincide com o centroide geométrico. A obtenção de períodos múltiplos inteiro da órbita na transformação por  $\alpha_n$ .

Percebe-se que, além da defasagem do parâmetro pelo valor  $\pi$ , para representar a oposição entre as partículas, corrige-se o deslocamento de fase  $-\pi/n$  correspondente ao tempo de propagação. Essa defasagem adicional, que ocorre no parâmetro para a simultaneidade do espaço tangente, não ocorre no parâmetro para simultaneidade do espaço coordenado, representando a impossibilidade de determinação simultânea de posição e velocidade.

Admitindo a separação entre espaço paramétrico o espaço tangente, o indeterminismo não obsta a validade de qualquer invariante. As trajetórias são conjugadas na perspectiva de uma das partículas e deparamos com a indeterminação anunciada na alternância que se faz. A defasagem total  $\pi/n$ , ou múltiplo, quantifica a disparidade, ou o fator envolvido na sua reversão. A grandeza envolvida é quantificada para meio período de oscilação.

## 4.4 Giro e Ondulação

Giro e ondulação são correlatos oscilatórios. No rolete, giro é observado durante a construção por composição de movimentos enquanto ondulação na trajetória resultante.

Na solução do sistema binário, movimento e trajetória são analisados, respectivamente, pelos vetores velocidade e posição para a oscilação em questão.

Oscilação periódica em torno da órbita circular, ondulação concerne a posição onde a partícula pode ser encontrada, que pode ser expressa na forma complexa.

$$z_n = r_n e^{i\omega t} \left[ 1 + \frac{\lambda_0}{r_1} e^{in\omega t} \right] \quad (4.37)$$

O termo ondulatório é suficiente para caracterizar toda expressão, pela forma como a frequência está associada a uma órbita discreta.

Uma solução para uma posição da trajetória geodésica admite arbitrar sobre o valor do ângulo de fase do termo oscilatório. No equacionamento sistêmico, solução geral de uma posição pontual admite o indeterminismo da fase. O adiamento de solução particular pode ser carreado por representação apropriada, em que a extensão da abrangência leva a formação de onda de fase, que resolve em um posição pontual definida esperada. A interpretação física desse artifício da propagação do indeterminismo da posição será visto adiante.

A arbitragem do ângulo de fase também é proveitosa na conexão espaço tangente e espaço coordenado. O indeterminismo que a velocidade possui com posição pontual respectiva possui a mesma periodicidade do indeterminismo da fase, e é encoberto na solução geral por uma das soluções desfasadas. Embora impróprio ao rigor do formalismo, concede que conexão diferencial entre pares posição-velocidade permutados expressa continuidade do sistema.

Ademais, a amplitude da ondulação permite determinar que a “espessura” do elétron  $r_n \lambda_0 / r_1 = n^2 \lambda_0$  diminui com a velocidade.

Rotação periódica acrescida ao movimento circular, o giro é melhor caracterizado pela forma como diferencial de velocidade se relaciona com raio de curvatura instantâneo para o termo oscilatório da expressão de velocidade. Rotação do vetor velocidade.

$$\gamma \dot{Z} = \gamma r_n \dot{\theta} \left[ i e^{i(\theta + \pi/(2n))} + (n+1) \alpha_1 i e^{i(\theta + \pi/2n)} e^{in\theta} \right] \quad (4.38)$$

O giro é correlato ao momento magnético, medida pela qual é sensível ao campo magnético externo. Interações externalizadas ao enlace são melhor representada pela velocidade binormalizada.

$$\dot{Z}_n = c \alpha_n i e^{i(\omega t + \pi/(2n))} [1 + (n+1) \alpha_1 e^{in\omega t}] \quad (4.39)$$

As seções a seguir aprofundam-se sobre fenômenos pertinentes a esses dois tópicos.

#### 4.4.1 Onda de Fase

Onda de fase é o trem de onda observado pela mudança de fase produzida pela mudança de referencial descrito na tese do sétimo duque de Broglie[6], que trata da oscilação de um corpo na composição de referenciais e conclui sua natureza ondulatória.

Anteriormente, o comprimento de Broglie foi generalizado para o espaço curvo pela velocidade binormalizada e correlacionado com o comprimento Compton, frequência natural *pilotada* pela ressonância. A medida é quantitativa na magnitude do fenômeno.

Posteriormente, a escolha de referencial afeta a percepção simultânea de posição e velocidade, por uma diferença de fase. A descrição é qualitativa do fenômeno.

O argumento de Broglie sobre a natureza ondulatória é feito para a mudança de referencial da simultaneidade da oscilação natural de corpo extenso. Enquadrar no espaço curvo é preciso caracterizar distribuição espacial para o elétron, pois um corpo pontual que segue uma trajetória ondulatória não é propriamente uma onda.

Se por um lado, a natureza ondulatória exige mostrar que o corpo não é pontual, por outro o spin intrínseco, proposto por Pauli, está associado ao corpo pontual.

Outro ponto crítico do elétron, como uma distribuição espacial de qualquer natureza, está em se sujeitar aos efeitos da própria trajetória geodésica, e a distração está em cogitar forças de maré que possam afetar coesão interna, algo análogo ao que ocorre no limite de Roche[39].

A incompatibilidade é ressaltada para destacar um refinamento sutil, que se bem explicado, não se conflita com o argumento de Broglie, que tem razão muito boa para existir. Extensão pela exposição exterior, pelo grau de liberdade é extrínseco. Até então colocado de lado que o sistema é satisfeito em multiplicidade de soluções pela porção ondulatório.

Recobrar que a trajetória pontual é uma solução particular para o sistema que balanceia energeticamente o enlace. Espaço de solução do invariante admite um ângulo de fase para solução geral, que pode ser expresso pela introdução do deslocamento de fase  $\xi$  no ângulo de oscilação.

$$\Omega t = (n + 1)\omega t + \xi \quad (4.40)$$

Ao modular a fase, podemos supor que a partícula ocupa um valor qualquer fixo arbitrariamente  $\xi_k \in \mathbb{R}$ . O que caracteriza um novo grau de liberdade é o equacionamento sistêmico que possui no referencial de outros enlaces (é uma variável, o grau de liberdade é extrínseco ao sistema pela extensão exterior).

Introduzida como variável, a fase é incógnita, no entendimento da impossibilidade de resolução sem a introdução de novas equações, por exemplo, em uma colisão.

Conveniente ao fato de todas as posições de fase serem geodésicas, e, portanto, sem gradiente de aceleração, pode-se aplicar como a “distribuição” do corpo da partícula, e com isso fazer o argumento que da natureza ondulatória.

Mudando do conceitual para o prático, a variável de fase é intratável, e ondulatória torna-se método que permite adiar a resolução em representação capaz de carrear a indeterminação.

Propício fazer notar que a mudança de representação para onda e cofatores externos estão fora do equacionamento intrínseco e pontual do enlace, com isso a explanação é predominantemente descritiva.

Propaga-se como onda e colide pontualmente. Embora a segunda proposição seja explicada pelo carreamento do indeterminismo, a primeira tem motivação na resolução desse indeterminismo. A trajetória de propagação está conexo ao caráter extrínseco do (intratável) ângulo de fase: trajetória é resolvida pelo ambiente.

Em atenção à continuidade nas distâncias espaço-tempo, partícula não se teletransporta, nem ocupa posições simultâneas. Duas formas de encaminhar o assunto, vetorial e energética.

Cada solução particular consiste existência pontual em uma posição, a continuidade é a que pode ser retraçada pelo velocidade. Ressalta-se que a oscilação da velocidade, giro, é indiferente à fase, pois é cíclico. A posição é dependente da fase (cumulativamente), a velocidade (giro é cíclico), não o é. A posição da partícula retraçada por diversos caminhos.

A continuidade energética também se apoia no padrão cíclico da velocidade, entretanto grau de liberdade posicional permite interpretação topológica onde as posições que uma partícula ocupa seja projeção geométrica da energia.

A participação do ambiente ao propaga-se como onda é evidenciado na capacidade de gera padrão de interferência: conjunção de múltiplas soluções e múltiplos enlaces.

A possibilidade de participar de múltiplos enlaces também coloca em destaque o tratamento dispensado à frequência. Apesar da frequência definida ser em um enlace, é esperado que cada enlace calcule frequência distinta do outro. A frequência é mandatário da posição e velocidade, e em interações por estímulos externos ao enlace ou inter-enlaces torna-se apropriada representação domínio da frequência pelo espaço vetorial de Hilbert[51].

#### 4.4.2 Momento Magnético Orbital

Uma forma de evidenciar o giro é pelo momento magnético, Adequar a pertinência ao formalismo apresentado requer decompor rotação do vetor velocidade em giro e órbita, e fundamentar conceitualmente medida pela qual o movimento é sensível ao campo magnético externo.

Construção por rolete, a epitrocoide é composta por duas rotações: orbital e giro. Entretanto, ao invés de decompor os dois movimentos diretamente da expressão da velocidade, os momentos magnéticos de cada rotação são obtidos com referência a suas epitrocoides apresentadas: posição e momento.

Reforça ideia de separação entre espaço paramétrico e espaço tangente. A forma como a variação da velocidade (curvatura) é percebida: centro de momento e centroide de massa.

O momento magnético orbital é obtido da epitrocoide de posição, equações paramétricas em  $x(\theta)$  e  $y(\theta)$ , e está relacionada à distância fixa entre as duas partículas. O ponto que corresponde ao centro de massa clássico, embora se movimentam em relação ao centroide geométrico, é a referência. Como efeito, a trajetória considerada equivale ao movimento circular.

O cálculo do momento magnético estabelece a correspondência clássica, mas o entendimento fundamenta-se conceitualmente na eletrometificação. Atração induzida pelo movimento, vis-redux é primitiva ao magnetismo. Na condição

antecedente-consequente, o movimento da partícula sobre influência de campo clássico, deve demonstra-se consequência do movimento relativo entre dois corpos mediado pela métrica.

Entendimento iniciar-se por referência a exposição de Procopiu sobre dipolo magnético [38]. Associado ao movimento orbital, considerado um oscilador elétrico pelo movimento circular, forma-se uma corrente de convecção criada pela circulação, sem que seja necessário mais detalhes sobre o movimento da partícula pontual.

A corrente de deslocamento é relacionado diretamente à frequência orbital.

$$I \equiv \nu q_e \quad (4.41)$$

Entretanto, a corrente de deslocamento não é adequada para explicitar o movimento da partícula pontual e instantâneo, embora seja quantitativamente válido para o valor médio em um período.

$$\nu = \frac{v}{2\pi r} \quad (4.42)$$

A definição de corrente é diferencial e pressupõe carga infinitesimal, não sendo possível deduzir o movimento de uma carga pontual. Ainda assim é possível estabelecer a equivalente quantitativo de corrente para carga pontual para a configuração.

$$qv \equiv I\ell \quad (4.43)$$

Partícula pontual não constitui corrente pelo fato de ser unitária. Demonstra-se o caráter qualitativo, restrito ao movimento circular pela relação com o período, pelo efeito similar entre uma espira condutora e um circuito virtual para partícula livre.

O modelo dipolo magnético de Ampère, espira de corrente de dimensões desprezíveis em relação à distância do campo externo, permitindo que se considere apenas a orientação. Momento Magnético calcula o torque em substituição à ação do binário de forças que se forma sobre espira.

Iniciando pela força magnética por um campo externo, a força Laplace clássica:

$$d\mathbf{F} = Id\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}_{ext} \quad (4.44)$$

O torque, pela definição convencional, a vantagem mecânica se faz da extensão radial da espira, a contribuição depende da localidade do ponto de aplicação expresso pelo diferencial:

$$d\boldsymbol{\tau} = (Id\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}_{ext}) \times \mathbf{r} \quad (4.45)$$

Ao expandir pelo produto triplo, é possível eliminar o termo que, pelo alinhamento da configuração, produz torque nulo ou neutro em antecipação à integral fechada. Ocorrência é possível em espira fechada, levado adiante na forma de restrição.

$$d\boldsymbol{\tau} = -(\mathbf{r} \times Id\boldsymbol{\ell}) \times \mathbf{B}_{ext} \quad (4.46)$$

O rearranjo expõem a quantidade vetorial que, independente da localidade pontual do infinitesimal de carga, é ortogonal ao plano de movimento e que deve ser avaliada em um circuito fechado.

Retornando ao equivalente quantitativo da corrente de carga pontual  $qv \equiv I\boldsymbol{\ell}$ , a resolução procurada para o momento magnético da partícula pontual supõem que exista trajetória tal que seja equivalente circuito fechado.

$$M = -\oint (\mathbf{r} \times Id\boldsymbol{\ell}) \equiv -(\mathbf{r} \times q\mathbf{v}) \quad (4.47)$$

Ressalta-se que a equivalência possui uma generalidade sobre curvatura da trajetória que será reconsiderada adiante: a equivalência é demonstrada somente quando o raio de curvatura igual ao raio de atração.

A demonstração qualitativo dessa relação é facilitado conhecendo-se o resultado quantitativo. O cálculo do momento magnético segue a metodologia clássica, sendo que o único refinamento relativístico é o emprego da velocidade binormalizada.

Pelo centroide de massa, que marca o raio constante, as medidas de área superfície fechada para um período e comprimento do perímetro respectivo são:

$$S_n = r_n^2 \pi \quad L_n = 2\pi r_n \quad (4.48)$$

A “corrente” está relacionado ao período orbital pela velocidade areolar do movimento circular.

$$I_n = \frac{c\alpha_n q}{2\pi r_n} \quad (4.49)$$

O escalar do momento magnético orbital para a n-ésima órbita é:

$$M_n = \frac{m_e c\alpha_n q}{m_e 2\pi r_n} r_n^2 \pi = \frac{q}{2m_e} nh \quad (4.50)$$

A destaque é que o fator  $h = m_e c \|\boldsymbol{\alpha}_1 \times \mathbf{r}_1\|$  evidencia a ortogonalidade entre os vetores, outro apontamento é fator  $1/2$  que indica que é correlato à velocidade areolar e o resultado da integral  $2q\dot{\mathbf{S}}$ , obtido por duas cargas antipodais.

A condição que está implícita é que haja atração centrípeta, ou seja,  $\mathbf{v} \times \mathbf{a}$  está na mesma direção do produto anterior. Pela ortogonalidade, raio de atração na mesma direção do raio de curvatura de movimento.

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{v^3} \quad (4.51)$$

Em inspeção à forma diferencial do momento magnético, a carga pontual resolveria para:

$$\mathbf{r} \times Id\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}dq \quad (4.52)$$

A operação é produtiva para vetores não coplanares. A ortogonalidade é devido a forma como o momento magnético é expresso, em pressuposição do torque que é em relação a um raio de pivotamento para espira livre. Para a partícula pontual, a rotação do raio de curvatura produz torção.

O dipolo magnético partícula pontual difere qualitativamente da ação distribuída sobre uma espira no momento magnético. Enquanto a incidência do campo magnético em uma espira produz torque, na partícula pontual resulta na torção do movimento.

Diferente do que acontece com a partícula livre, a partícula em questão está presa (quanticamente) ao nível de energia da órbita. Manipulando Equação geodésica para unidade natural.

$$\mathbf{f} + \boldsymbol{\beta} \otimes (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{f}) = \gamma_v^2 \mathbf{a} + \boldsymbol{\alpha} \otimes (\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{a}) \quad (4.53)$$

Se considerarmos a atração centrípeta dada por  $\mathbf{f} = \gamma_v^2 \mathbf{a}$ , a substituição na integral do momento magnético resulta na lei em Biot-Savart [10], com resultados semelhantes aos obtidos por Heaviside[11] para partícula pontual

$$\gamma_v^2 \mathbf{a} = \mu_0 \frac{c^2 q^2}{4\pi m_e r^3} \mathbf{r} \quad (4.54)$$

A curvatura e a natureza automagnética estão expressas em vis-redux.

$$\boldsymbol{\beta} \otimes (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{f}) = \boldsymbol{\alpha} \otimes \frac{(\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{f})}{\gamma_v^2} \quad (4.55)$$

O tratamento magnética pela translação livre é distinta da obtida pela metrificada. Em uma partícula livre, o magnetismo some por transformação de Lorentz: magnetismo conjuntural. Pela natureza orbital, manifestação do magnetismo orbital desvanece com a distância radial. Uma melhor caracterização do magnetismo estrutural vem com o giro do elétron, em que se torna magneto permanente.

#### 4.4.3 Momento Magnético do Giro

Giro é a rotação do vetor velocidade pela amplitude de oscilação da métrica.

A distinção entre o movimento da partícula sobre a métrica e o movimento relativo da partícula devido ao movimento da métrica no espaço é feita na presença de campo externo. Giro é a mudança de direção do vetor velocidade pelo movimento da métrica no espaço, acompanhada da defasagem de propagação. No espaço tangente, a simultaneidade é feita referencial próprio. Estritamente, partícula pontual gira sobre si, e a ausência de dimensão do corpo torna o giro intrínseco.

Pelo dipolo magnético da partícula pontual, a rotação do vetor velocidade é suscetível à torção do raio de curvatura instantâneo na presença de campo externo, o que permite evidenciar o giro pelo respectivo momento magnético.

Giro, pelo espaço tangente, é relacionado epitrocoide de velocidade, equações paramétricas da trajetória conjugada em  $X(\theta)$  e  $Y(\theta)$ , que considera a direção que o vetor velocidade assume em relação ao segmento que une o seu ponto de aplicação ao centro de momento.

O cálculo da curvatura pelo produto vetorial é não definido fora da ortogonalidade. A limitação pode ser contornada pela metodologia clássica, observada à validade estrita ao movimento circular, pela compositividade de rotações.

Consideremos esta simplificação por decomposição como uma primeira aproximação. A frequência de rotação do Giro é conjugado com a da órbita. Expectativa pela epitrocoide, a velocidade de giro é múltiplo da velocidade orbital em  $\dot{Z}_n$ , mais uma diferença “sinódico-sideral”.

Anteriormente, viu-se, para o momento magnético da partícula pontual, que raio de atração deve ser igual ao raio de curvatura. A aplicação dessa condição à metodologia clássica do momento magnético define o cálculo que será empregado.

Com referência à composição de movimentos da epitrocoide, separa-se em duas regiões e aplicar-se a método do momento magnético clássico a cada uma delas. Considera-se duas espiras com áreas:

$$S_c = \pi r_n^2 \qquad S_s = \pi \lambda_0^2 \qquad (4.56)$$

Os respectivos perímetros que envolvem as áreas:

$$L_c = 2\pi r_n \qquad L_s = 2\pi \lambda_0 \qquad (4.57)$$

Em atenção à periodicidade das duas regiões, faz-se notar que é preciso conjugar em um mesmo movimento. Em um período orbital  $nL_s = n2\pi\lambda_0$  para cada  $L_c$ . O mesmo ocorre com as áreas envolvidas por esses perímetros.

Cada perímetro é percorrido com velocidade própria. Os valores vêm da decomposição vetorial da epitrocoide, tal qual a foi feito com os raios que compõem o perímetro. A velocidade unidade natural de  $\dot{Z}$ .

$$v_c = c\alpha_n \qquad v_s = c\alpha_1 \qquad (4.58)$$

Contribuição da região circular ao momento magnético é (para n-períodos de oscilação):

$$nM_c = q \frac{c\alpha_n}{2\pi r_n} \pi r_n^2 = n \frac{q}{2m_e} c m_e \alpha_n r_n \qquad (4.59)$$

Contribuição da região giro ao momento magnético é:

$$M_s = \frac{qc\alpha_1}{2\pi\lambda_0} \pi \lambda_0^2 = \frac{q}{2m_e} c \alpha_1 m_e \lambda_0 = \frac{q}{2m_e} c \alpha_1 m_e \frac{h}{2\pi mc} \qquad (4.60)$$

A soma dos momentos magnéticos para um período de oscilação:

$$M = \frac{q}{2m_e} h \left[ 1 + \frac{\alpha_1}{2\pi} \right] \qquad (4.61)$$

O valor em excesso ao magneton de Bohr é interpretado como anomalia[4] do momento magnético, calculado pela primeira vez por Schwinge[47], motivado pelo valor experimental da anomalia no momento magnético do elétron foi descoberto por Kusch e Foley [20]

$$\frac{\alpha}{2\pi} \approx 0.001\,161\,4, \quad (4.62)$$

O valor calculado é melhor que o “momento magnético de Dirac”[1]. Distinto do que é feito por Schwinger, um entendimento “sinódico-sideral” é tácito em razão do modelo epitrocoidal de rotação. O valor experimental atual é:

$$a_e = 1.159\,652\,180\,46(18) \times 10^{-3} \quad [30] \quad (4.63)$$

O cálculo demonstra que a existência de anomalia no momento magnético da partícula pontual por consequência da reação ao campo externo do rotação do vetor velocidade pelo raio de curvatura, entretanto a diferença de ordem de grandeza que faz com o valor experimental evidencia que a forma de cálculo não é definitiva.

$$\frac{\alpha_1}{2\pi} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \quad (4.64)$$

Alguns refinamentos possíveis, por pretexto do mesmo conceito mecânico, revisam aspectos negligenciados. As velocidades, tanto na composição em  $\dot{Z}_n$  quanto na decomposição para o momento magnético, são consideradas, implicitamente, baixas na adição na relativística das velocidades. Não é feita a ponderação sobre o uso da métrica no cálculo de área e comprimento.

Algo mais pode ser dito sobre a compositividade dos raios no dipolo magnético do giro, em relação à existência de curvatura e ortogonalidade com o vetor velocidade, que é propício de ser ilustrado no giro e não está presente na órbita.

Sobre curvatura do movimento de uma partícula pontual, faz-se uma ilustração abstraindo sobre a possibilidade de uma trajetória que descreve um quadrado com cantos arredondados. Pela curvatura, somente os cantos circulares contribuem para o momento magnético. Nos trechos reta, a partícula é livre e possui raio de curvatura de efeito nulo. As curvas são possíveis sobre ação momentânea de força para fazer a concordância do traçado. O movimento da partícula pontual, em presença de campo magnético, é sujeito a deflexão no trecho linear, e torção nos curvos. A conclusão que se quer chegar: por maior que seja o quadrado, serão os cantos arredondados que darão a magnitude magnética.

A curvatura produzida por uma força em uma partícula age como a condição holonômica que está presente na espira por um condutor metálico: circuito virtual.

Sobre ortogonalidade, não é somente uma conveniência pela falta de definição para um produto vetorial.

Ilustra ortogonalidade o efeito do ângulo entre velocidade e raio de curvatura, que pode ser entendimento ao aproximar a epitrocoide por um polígono regular com  $N$  lados de tamanho  $\lambda$  constante. A área desse polígono é expressão em função da quantidade e tamanho de cada lado  $S = N\lambda^2 \cot(\pi/n)/4$ . O comprimento do perímetro é  $L = N\lambda$ . A razão área-perímetro é  $S/L = \lambda \cot(\pi/n)$ .

Para um  $N$  suficientemente grande, a razão pode ser aproximada para  $N\lambda/\pi$ . O perímetro é percorrido em uma velocidade que varia pelo inverso no número de lados  $v = v_1/N$ . Em relação ao ponto central, cada segmento possui uma curvatura, entretanto, quando  $N$  é grande, o momento magnético torna-se constante.

A duas observações, curvatura e ortogonalidade, podem ser observadas em conjunto no exemplo epitrocoidal para uma terceira ilustração, onde se muda a forma de cálculo.

Área pela epitrocoide:

$$S = \pi r_n^2 [1 + (n+1)\alpha_1^2/n^4] \quad (4.65)$$

O comprimento, integral elíptica da segunda espécie. Para um período  $\phi = \pi/n$  chegamos a função completa:

$$L(\pi/n) = r_n(1 - k_n)2E\left(\frac{\pi}{2}; K^2\right) = r_n(1 - k_n)2E(K^2) \quad (4.66)$$

Onde  $k_n$  é medida da epitrocóide.

$$K^2 = -4 \frac{k_n}{(1 - k_n)^2} \quad (4.67)$$

O comprimento é multiplicado por dois para um período completo de oscilação enquanto dividimos a área total por  $n$  para cobrir o mesmo período.

$$qc\alpha_n \frac{S(2\pi)/n}{2L(\pi/n)} = qc\alpha_n \frac{\pi r_n^2 [1 + (n+1)\alpha_1^2/n^4]/n}{r_n(1 - k_n)4E(\pi/2; K^2)} \approx q \frac{c\alpha_n r_n}{2n} = \frac{q}{2m_e} h \quad (4.68)$$

O cálculo na metodologia clássica pode ser feito pelo raio de curvatura, tão logo seja coincidente com o centro de atração. A parte oscilatória tem um centro de atração exótico, por força autoinduzida.

#### 4.4.4 Ondulatório, Intrínseco e Anômalo

A oscilação no movimento é fenômeno relativístico autoinduzido da conjunção do espaço com a velocidade.

A parte induzida do movimento é devido a  $\dot{\gamma}_v$ . Apesar da grandeza ser escalar, produz transformação anisotrópica. Além da magnitude da velocidade, tomam parte o ângulo entre a velocidade e a diretriz da curvatura espacial.

Onda e giro são consequência das alternâncias periódicas da contração dilatação do espaço-tempo, e o entendimento da manifestação depende da perspectiva referencial, resumidamente: se o espaço da partícula oscila, então é a partícula que oscila no espaço.

Ainda pelo ângulo entre a velocidade e a diretriz da curvatura espacial, a contagem do período sinódico está ancorado na referência à contraparte pelo raio de curvatura. A razão giromagnética é tomada pelo período orbital, rotação do vetor velocidade é anômalo pela extensão que o espaço gira do comprimento Compton.

A estabilidade dinâmica por ressonância e conjuga um *perpetuum mobile* oscilatório. A energia de repouso confunde-se com energia cinética do movimento

de oscilação fundamental. Elétron torna-se um magneto permanente pela forma estrutural de sua constituição do movimento.

Giro é grandeza direcional, e pela reação magnética, suscetível à torção. Na quantização do período Orbital deixou-se em aberto grau de liberdade nas componentes angulares  $\theta$  e  $\varphi$ , abstraídas na idealização de um plano orbital.

Uma direção arbitrária é definida para efeito de resolução, mas é indeterminada fora do enlace pela falta de vinculação espacial das variáveis  $A^2$  e  $A^3$ , ainda que haja uma solução na esfera orbital contemple a torção.

Uma solução na esfera sugere emprego de harmônicos esféricos, o que permite representação do número de ocupação.

## 5 Considerações Finais

A solução encontrada para covariância geral pela eletrometrificação do espaço-tempo descreve a natureza discreta e a predição dos valores emissão de quanta de energia principais. O tensor eletrométrico também é equacionado para descrição de fenômenos oscilatórios.

A apresentação formalismo geral, capaz de representar qualidades essenciais e disposição espontânea dos fenômenos quânticos como consequência necessária da covariância geral.

A exposição não esgota o assunto e deixa aberta a discussão aspectos conceituais. Algumas considerações são feitas sobre o tema de campo não abordado e sobre a relação com as teorias consolidadas. O texto se encerra com sumário, conclusão.

### 5.1 *Hypotheses Non Fingo*

Newton não explicou como a gravidade atua à distância e instantaneamente. Dois pontos que se mostraram relevantes em teorias vindouras, não obstante, não foram impeditivos de sua exposição.

Por outro lado, quantização presume atingir a um mínimo, do qual não há recorrência reducionista e, portanto, não há mecanismos ocultos uma vez conhecidas suas causas e efeitos.

A ação-a-distância toma duas formas, curvatura e portador, ambas com efeito retardado pela velocidade limite. Atração e Força devem ser suficiente para explicar fenômenos sem recorrer a mecanismo inferiores. A ação por força é mediada por um portador da radiação emitida, desacoplando a reciprocidade entre a partícula emissora da partícula receptora.

O alcance de cada ação, pode-se mencionar a cardinalidade entre “próximo ou distante” com “acoplado ou por portador”, e fazer a expectativa que as paridades entre próximo-acoplado e distante-portador sejam mais as mais comuns.

### 5.2 Ponte Teórica

Outras teorias bem estabelecidas fazem predição do espectro atômico. A discretização e ondulação entram de uma forma ou outra, o que motiva estabelecer um critério de equivalência.

Pela eletrométrica, a natureza quântica do espaço é consequência dos efeitos da métrica espaço-tempo e velocidade limite. Assim, de maneira sucinta,

comparamos como as teorias consideram os efeitos do espaço-tempo  $\gamma_r$  e da velocidade  $\gamma_v$ . Em alguma medida satisfazem transformação na representação do espaço, transformação de Lorentz e covariância geral. (discretização, ondulatória, incerteza)

O modelo atômico de Bohr[2] é a principal referência deste trabalho e, pelo fundamento na mecânica de orbitação, uma correspondência direta é possível. Partindo-se da carga unitária orbitando sob campo fraco e baixa velocidade, a partícula é movida por campo de potencial escalar, o modelo em um espaço plano com  $\gamma_v = 1$  e  $\gamma_r = 1$ . A extrapolação para campo forte e alta velocidade considera  $c\alpha \rightarrow v$  e obtém a emissão do espectro pela discretização do momento angular, que efetivamente incorre na discretização do período orbital.

A teoria de Schödinger[43] [45] [42] [44] [46] se assenta no fundamento do *perpetuum mobile* oscilatório em que se vincula ao espaço pela propagação ondulatória, sendo capaz de reconstituir mecânica em espaço plano e sem velocidade relativística. O mesmo fundamento ondulatório apresenta-se pela eletrométrica, entretanto o formalismo de Schödinger possibilita solução para átomo hidrogenoide relacionado a harmônicos esféricos. Embora não seja impossibilidade, uma resolução pela eletrométrica não possui método direta para fora do plano orbital, o que aponta para falta de representação do número de ocupação por parte da eletrométrica as privações que decorrem da falta.

Em Dirac [7], o fundamento ondulatório é covariante sob transformação de Lorentz e pode ser equiparado na forma como aproxima a velocidade binormalizada pela velocidade relativística, resumidamente, ignora a métrica em  $\gamma_r$ .

$$[c\alpha = c(\gamma_v\gamma_r^2\beta)] \rightarrow [\gamma_v v = c\gamma_v\beta] \quad (5.1)$$

Notabiliza por descrever spin intrínseco para satisfazer a relação momento-energia relativística. O entendimento que fazemos é que Dirac não explicita a parcela induzida de força, vis-redux, que recebe esse nome por reorientar o vetor velocidade para resguarda de trajetória que faça progredir para aceleração incompatível com velocidade limite. O colateral correlato com o redirecionamento é o giro, que progride *pari passu* com ondulação. A forma funcional da velocidade em Dirac, o efeito do contra-movimento induzido é abstraído por representação algébrica, notadamente medida por unidade de spin.

Embora possa constituir uma mecânica relativística, a ondulatória não reconstitui efeitos da métrica do espaço. Há desvio da frequência fundamental da partícula pela velocidade, mas não por efeito do espaço (ou campo que nele se estabeleça), que desencaminha a covariância geral.

Covariância geral[32] é o que permite equiparar com as teorias de campo mais modernas. O desenvolvimento do tratamento dos efeitos do espaço [33]. estabelece-se pela covariância por calibre [34], sob efeito do campo, uma mudança da calibragem da métrica induz uma transformação de escala, que pode ter forma específica de campo sobre a métrica e não métrica em si.

$$\left(\gamma_r = 1 + \frac{k}{r^2}\right) \rightarrow (1 + \varepsilon) \quad (5.2)$$

Abstratamente, os efeitos do espaço expressos como consequência de simetrias [3]. Estendemos a descrição feita em Dirac do efeito relativístico da velocidade para efeito relativístico do espaço com uma adição: substitui os efeitos do

espaço por uma representação algébrica covariante do efeito de campo, lastreado na fenomenologia. Com isso, a questão relevante está em como isso favorece o entendimento do tratamento da polarização do vácuo e autoenergia pelas teorias de calibre.

A abordagem clássica também apresenta questões que podem ser confrontadas pela eletrométrica e enquadradas na distinção que se faz no tratamento do espaço em consideração ao campo conservativo ou métrica. Embora conexos, não são necessariamente intercambiáveis

Estrutura da força Lorentz é semelhante à *vis-radix* e *vis-redux*. Entretanto, não há um limite assintótico, como ocorre na expressão o invariante de velocidade, e a força cresce indefinidamente, uma condição imprópria relativisticamente. Esse problema nunca se concretiza na realidade, e a aceleração de uma carga emite radiação, que traz à tona a força Abraham[10]. Confrontar o entendimento conservativa ou dissipativo contra uma situação em que a eletrométrica é aplicável sugere explicação distinta nos termos de *vis-radix* e *vis-redux*, mas demarcação do potencial de campo é inevitável pela limitação do caso pontual em que a métrica se aplica.

### 5.3 Sumário

Formaliza-se a discretização que corresponde a emissão de *quantum* de energia como consequência mecânica covariante da eletrometrificação. A principal demonstração consiste em descrever o processo de radiação eletromagnética na predição do espectro atômico, entretanto a mecânica só será completa se capaz de descrever os diversos fenômenos.

A ideia inicial consiste em torna o átomo de hidrogênio covariante pela eletrometrificação. A proposição que o elétron se movimenta em um espaço de curvatura por eletrometrificação (Sec. 2) resulta em duas ações-a-distância: orbitar por atração e emitir por força.

O plano geral para geodésica e desvio inicia-se pelo tensor eletrométrico (Sec. 2.1). A existência de um tensor correlato a um campo é possível em condições específica de energia, somente obtida pela carga elementar.

Restrição na aplicabilidade da métrica uma nova forma discretização por relações diádicas, (Sec. 2.1.1). Enlace, a parametrização métrica e necessidade por referenciais por trajetórias conduzem a métricas reciprocamente induzidas.

Nesse ponto as principais ideias estão postas e serão desenvolvidas. O princípio da covariância geral sob o invariante de velocidade é formulado por reciprocidade, que, em recorrência ao invariante, sistematiza eventos ligados à simultaneidade de um referencial.

A Sec. 2.1.2 apresenta a concomitância de múltiplas métricas na formulação de sistemas e estrutura uma malha de enlaces, em que todas as interações são contempladas, ou por força, ou por atração.

O imperativo mecânico de ser covariante (Sec. 2.1.3) implica na fragmentação do espaço, e a indicação conciliável em um novo problema topológico pela existência de distância não-nula, positiva, simétrica e desigualdade triangular em cada par de partículas.

Circunscrito ao enlace, a métrica permite a geometrização da interação. Geodésica forma canônica é transcrita, pela resolução espacial do determinismo vinculações, em dois tensores, denominados *vis-radix* e *vis-redux* (Sec. 2.2.1)

Transporte paralelo é apresentado como um caso especial de uma construção mais geral, em que o invariante de velocidade deriva o invariante de ortogonalidade (Sec. 2.2.2). Descrição de ocorrência de torção geodésicas e completa o discriminante de força.

A resolução do invariante de ortogonalidade, equação diferencial, não possui metodologia geral e a técnica de resolução é conduzida pela especificidade do problema (Sec. 3). As resoluções analíticas são feitas para os casos notórios quando  $\dot{\gamma}_v = 0$ , circular ou campo fraco.

A condição de campo fraco baixa velocidade para partícula unitária (Sec. 3.1.1) não constitui um caso prático experimentalmente, mas a extrapolação abstrata é útil na ponderação de grandes distâncias, entendimento empregado para considerar uma distribuição de cargas (Sec. 3.1.2). As extrapolações pela quantidade de carga e distâncias conduzem mudança de representação da métrica para potencial.

A predição das linhas principais do espectro é feito para o movimento circular em campo forte. (Sec. 3.2).

Atração centrípeta pela eletrométrica é confrontada com o período orbital kepleriano, encontrando-se um período de oscilação independente e consequente discretização pela ressonância com a oscilação fundamental da partícula (Sec. 3.2.1). A frequência Compton é escolha covariante natural e associada ao comprimento de Broglie generalizado, que equaciona a constante de Planck velocidade areolar kepleriana e magnetismo, substituto conveniente ao momento angular. O período orbital é quantizado.

A velocidade associada a aceleração centrípeta, em que a menor órbita é associada a Sommerfeld e a constante de estrutura fina, vincula espaço-tempo de forma subluminal (Sec. 3.2.2)

As especificidades do contexto mecânico e do transporte de energia são tratativas abordadas pela escala energética de uma medição (Sec. 3.3) em ponderação de uma escala absoluta de unidade natural (Sec. 3.3.1) pela equipolência subluminal.

A série Lyman (Sec. 3.3.2) é obtida pela energia liberada na transição entre órbitas e a consideração da parcela retida pela energia de repouso por efeito da métrica, e o resultado é confrontado com a energia Rydberg, melhor ajuste para forma empírica.

Sistema de dois corpos, a necessidade de coerência na causalidade pela velocidade limite é satisfeita por construção sistêmica. A mobilidade da métrica e a propagação das posições por efeito retardado afetam o estado de equilíbrio simultâneo e, em reciprocidade, produzem auto-oscilação no sistema. (Sec. 4)

A condição estável de equilíbrio de dois corpos em trajetória circular, vis-oscilação (Sec. 4.1), é examinada primeiramente em suposição ao efeito instantâneo, onde a estabilidade se mostra viável.

Ao considerar o efeito retardo de propagação da posição móvel pela métrica, a partícula apresenta tendência oscilar em um torno da trajetória de equilíbrio. O sistema autoestabiliza em uma frequência natural estabelecida na energia máxima que o campo pode transferir à partícula corresponde a maior velocidade relativa que um campo pode possuir em relação a um corpo, a frequência Compton (Sec. 4.2), associado à energia máxima que campo pode transferir à partícula.

Oscilação pela flutuação da métrica produz alternância periódica de contração e dilatação do espaço-tempo.

A reciprocidade implica em ressonância e a forma *sui generis*: embora o par de partículas não tenha mesma frequência fundamental, Compton, a mudança do referencial do movimento da métrica exibe ressonância na frequência natural de Broglie generalizada.

A flutuação da métrica é representada pela forma que os referenciais se articulam, se a métrica da partícula oscila, então é a partícula que oscila na métrica. Compor trajetória, com ondulação em que padrão cíclico permita ajuste ao retardo apropriado ao referencial e aferir a simultaneidade de eventos, é assunto da Sec. 4.3. Órbitas por trajetória epitrocoidal não são inéditas a problemas de orbitação, e a particularidade é que ressonância a impõe múltiplos inteiro de oscilações em um período orbital. A construção por rolete da curva (Sec. 4.3.1) permite combinar, em uma visão estática, a orbitação com ondulação, ou dinamicamente, rotação e giro.

A equação da trajetória para posição coordenada, (Sec. 4.3.2), determina a manutenção distância constante entre partículas com respeito a métrica. Distância é tanto parâmetro da métrica quanto grandeza metrificável, que impacta a covariância da involução pela métrica, propensão para indeterminação da simultaneidade de posição e velocidade.

O indeterminismo se confirma pela realiza necessidade de trajetória conjugada para satisfazer vis-osculação (Sec. 4.3.3), caracterizado pela quantificação do deslocamento necessário para reversão da disparidade. Desasagem de meio período de oscilação quantifica a disparidade do indeterminismo.

A oscilação é caracterizada em duas grandezas giro e ondulação, correlatos oscilatórios do rolete (Sec. 4.4).

Construção de uma solução geral por onda de fase dá tratamento de múltiplas soluções equivalentes (Sec. 4.4.1). O espaço de solução pela modulação do ângulo de fase é intratável, por ser variável extrínseca. Além da representação para carrear o indeterminismo, a extrinsicalidade expõe a ingerência do ambiente na construção de uma trajetória pela arbitrariedade que se possa obter no padrão de interferência, múltiplas soluções e múltiplos enlacs.

A possibilidade de participar de múltiplos enlacs também coloca em destaque o tratamento dispensado à frequência, e torna-se apropriada representação domínio da frequência para o espaço vetorial de Hilbert.

O giro é evidenciado pelas propriedades magnéticas e em duas etapas. Primeiro por calibrar a razão resposta magnética pela órbita estabelecendo a relação entre torque e torção. Momento magnético orbital trabalha a velocidade areolar em um circuito virtual onde raio de curvatura e raio de atração recaem sobre mesmo centro. (Sec. 4.4.2)

Momento magnético do giro, aplica-se a compositividade raios pelo centro de atração. O entendimento sinótico-sideral é feito para anomalia (Sec. 4.4.3).

A possibilidade de torção da trajetória anuncia a saída do plano orbital que aponta para solução generalizada em que se observe movimento ondulatório, intrínseco e anômalo (Sec. 4.4.4). Embora tenha sido proveitoso na descrição dos fenômenos, restrição ao plano orbital é arbitrária e esconde que o giro não possui direção definida.

O texto se encerra com a menção às hipóteses feitas para ação-a-distância (Sec. 5.1) e equiparação com teorias correlatas (Sec. 5.2) no tratamento dos efeitos da velocidade, do espaço-tempo e covariância.

## 5.4 Conclusão

A conclusão que se faz: é possível dar causa e consequência à natureza quântica do movimento pela representação covariante na eletrometrificação regular e normalizada, preditivo ao nível de determinação prescrito sistemicamente.

Colateralmente ao apresentado, aprende-se que embora os fenômenos discretização se manifestem pela covariância e invariante de velocidade, somente é explicável por reciprocidade e simultaneidade.

Também a possibilita de discriminar como as indeterminações vêm de naturezas distintas: multiplicidade das soluções (modulação de fase), multiplicidade dos enlaces (frequências naturais), simultaneidade de posição-velocidade, sistematização, abstração do exterior, plano de orientação.

O rigor da covariância geral pela métrica exige um espaço fragmentado, e a energia emissão é explicada pela perspectiva do par de partículas, ao invés de panorama geral do espaço. Particularização da interação intrínseca ao par quantiza a realidade. Invariante de ortogonalidade é um discriminante para atração-inercial e força-emissiva.

Reciprocidade e simultaneidade, pela forma sistêmica, conjugam que solução das variáveis do movimento dependem grau de liberdade extrínseco. Pela forma que interage com o ambiente, nunca está totalmente isolado, embora a participação o ambiente exterior esteja indeterminada.

Mais uma vez, o rigor da covariância geral, dessa vez na forma sistêmica em que reciprocidade e simultaneidade reforçam o invariante de velocidade, conclui na indeterminação simultânea da posição e velocidade.

Contribuição do texto está em introspecções mais profundas dos fenômenos quânticos na forma como a fenomenologia seja cognoscível em suas potencialidades por um único formalismo.

## 6 Agradecimentos

Agradecemos aos apoiadores do autor pela chave Pix: **samelo**

## 7 Referências

### Referências

- [1] Tatsumi Aoyama, Toichiro Kinoshita, and Makiko Nio. Theory of the anomalous magnetic moment of the electron. *Atoms*, 7(1), 2019.
- [2] Niels Bohr. On the constitution of atoms and molecules. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 26(151):1–25, 1913.  
<https://doi.org/10.1080/14786441308634955>.
- [3] Katherine A Brading. Which symmetry? noether, weyl, and conservation of electric charge. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 33(1):3–22, 2002.  
<https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=1c6e78e69b177018a8b3013b69d8fe5fb109c1b7>.

- [4] G. Breit. Does the electron have an intrinsic magnetic moment? *Phys. Rev.*, 72:984–984, Nov 1947.  
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.72.984>.
- [5] Arthur Holly Compton. A quantum theory of the scattering of X-rays by light elements. *Physical review*, 21:483–502, May 1923.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.21.483>.
- [6] Louis de Broglie. *Recherches sur la théorie des Quanta*. Theses, Migration - université en cours d'affectation, November 1924.  
<https://theses.hal.science/tel-00006807>.
- [7] Paul Adrien Maurice Dirac. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, volume=117, number=778, pages=610–624, year=1928, publisher=The Royal Society London, note=  
<https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0023>.
- [8] Андронов, Александр Александрович and Витт, Александр Адольфович and Хайкин, Семён Эммануилович. Теория колебаний, 2 изд. М.: физматгиз, 1959.  
[https://publ.lib.ru/ARCHIVES/A/ANDRONOV\\_Aleksandr\\_Aleksandrovich,\\_starshiy\\_\(fizik\)/](https://publ.lib.ru/ARCHIVES/A/ANDRONOV_Aleksandr_Aleksandrovich,_starshiy_(fizik)/).
- [9] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Classical mechanics. 3rd.* Addison Wesley, 2002.
- [10] David Jeffrey Griffiths. *Introduction to Electrodynamics (3rd ed.)*.
- [11] Oliver Heaviside. The electro-magnetic effects of moving charge. *The Electrician*, 22(Part. I):147–148., 1880.  
<https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=njp.32101050973542&seq=174>.
- [12] Oliver Heaviside. Electromagnetic theory: A gravitational and electromagnetic analogy. *The Electrician*, 31(Vol. I):455–464., 1893.
- [13] John L Heilbron. The path to the quantum atom. *Nature*, 498(7452):27–30, 2013.  
<https://doi.org/10.1038/498027a>.
- [14] Alejandro Jenkins. Self-oscillation. *Physics Reports*, 525(2):167–222, April 2013.  
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1109.6640>.
- [15] Johannes Kepler. *New astronomy. Translated by William H. Donahue Cambridge*, volume 62. Cambridge University Press, 1992.  
<https://doi.org/10.1086/289846>.
- [16] Johannes Kepler. *Harmonices Mundi (The Harmony of the World)*, volume 209. American Philosophical Society, 1997.
- [17] Joannus Keplerus. *Astronomia nova ..., seu physica coelestis, tradita commentariis de motibus stellae martis*. Heidelberg : Voegelin, 1609.  
<https://dx.doi.org/10.3931/e-rara-558>.

- [18] Ioannis Keppleri. *Harmonices mundi libri V*. Lincii Austriae [Linz] : sumptibus Godofredi Tampachii ... excudebat Ioannes Plancus, 1619.  
<https://doi.org/10.3931/e-rara-11132>.
- [19] Ralchenko Yu. Reader J. Kramida, A. and NIST ASD Team (2019). NIST Atomic Spectra Database (ver. 5.7.1), [Online], 1997.  
<https://doi.org/10.18434/T4W30F>.
- [20] P. Kusch and H. M. Foley. The magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, 74:250–263, Aug 1948.  
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.74.250>.
- [21] Cornelius Lanczos. The variational principles of mechanics, 1st cd, 1949.
- [22] Joseph Larmor. LXIII. On the theory of the magnetic influence on spectra; and on the radiation from moving ions. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 44(271):503–512, 1897.  
<https://doi.org/10.1080/14786449708621095>.
- [23] J Dennis Lawrence. *A Catalog of Special Plane Curves*. Courier Corporation, 1972.
- [24] Theodore Lyman. The spectrum of hydrogen in the region of extremely short wave-lengths. *Astrophysical Journal*, vol. 23, p. 181, 23:181, 1906.  
<https://adsabs.harvard.edu/pdf/1906ApJ...23..181L>.
- [25] James Clerk Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*, volume 1, 2. Clarendon press, 1873.  
<https://books.google.com.br/books?id=92QSAAAAIAAJ&printsec=frontcover>.
- [26] Sergio de Azevedo Melo. Processo de decaimento orbital pelo desvio da trajetória geodésica no tensor métrico regular normalizado. 2025.  
<https://zenodo.org/doi/10.5281/zenodo.14920935>.
- [27] Sergio de Azevedo Melo. Tensor métrico regular para campo gravitacional relativístico. 2025.  
<https://zenodo.org/doi/10.5281/zenodo.14750315>.
- [28] Sergio de Azevedo Melo. Transcrição mecânica da geodésica canônica do tensor métrico regular. 2025.  
<https://zenodo.org/doi/10.5281/zenodo.14838459>.
- [29] Peter J. Mohr, Eite Tiesinga, David B. Newell, and Barry N. Taylor. Co-data internationally recommended 2022 values of the fundamental physical constants (ninth set): Electron g-factor, [online], 2022.  
<https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?rydhcj>.
- [30] Peter J. Mohr, Eite Tiesinga, David B. Newell, and Barry N. Taylor. Co-data internationally recommended 2022 values of the fundamental physical constants (ninth set): Electron magnetic moment anomaly, [online], 2022.  
<https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?ae>.

- [31] J. W. Nicholson. The Constitution of the Solar Corona. II. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 72(8):677–693, 06 1912.  
<https://academic.oup.com/mnras/article/72/8/677/954134>.
- [32] John D Norton. General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute. *Reports on Progress in Physics*, 56(7):791–858, jul 1993.  
<https://doi.org/10.1088/0034-4885/56/7/001>.
- [33] Lochlain O’Raifeartaigh and Norbert Straumann. Early history of gauge theories and kaluza-klein theories, with a glance at recent developments, 1999.  
<https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ph/9810524>.
- [34] Wolfgang M. Pauli. Relativistic field theories of elementary particles. *Rev. Mod. Phys.*, 13:203–232, Jul 1941.  
<https://libarch.nmu.org.ua/handle/GenofondUA/9231>.
- [35] Max Planck. Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum. *Annalen der Physik*, 309(3):553–563, 1901.  
<https://doi.org/10.1002/andp.19013090310>.
- [36] Jules Henri Poincaré. La mesure du temps. *Revue de métaphysique et de morale*, 6(1):1–13, 1898.  
<http://www.jstor.org/stable/40892291>.
- [37] Jules Henri Poincaré. La théorie de Lorentz et le principe de réaction. *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, 5:252–278, 1900.  
<http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/chp/hp-pdf/hp1900an.pdf>.
- [38] Ștefan Procopiu. Sur les éléments d’énergie. *Annales scientifiques de l’Université de Jassy*, Tome VII(4-ème fascicule):p. 280–290, Julliet 1913.  
<https://dspace.bcu-iasi.ro/handle/123456789/478>.
- [39] Édouard Roche. *Mémoires de la section des sciences.:Mémoire sur la figure d’une masse fluide, soumise à l’attraction d’un point éloigné (Publié en trois parties)* . typ. Boehm, Tome Premier (p. 243) 1849; Tome Second (p. 333) 1850; Troisième partie (p. 21) 1851.  
<https://books.google.fr/books?id=UmoVAAAAQAAJ&pg=PA243>,  
<https://books.google.fr/books?id=UmoVAAAAQAAJ&pg=PA333>,  
<https://books.google.fr/books?id=x3gVAAAAQAAJ&pg=PA21>.
- [40] E. Rutherford. LXXIX. The scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  particles by matter and the structure of the atom . *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 21(125):669–688, 1911.  
<https://doi.org/10.1080/14786440508637080>.
- [41] Johannes Robert Rydberg. Recherches sur la constitution des spectres d’émission des éléments chimiques. 1890.  
[https://portal.research.lu.se/files/39556483/rydberg\\_1889\\_reduced\\_archived.pdf](https://portal.research.lu.se/files/39556483/rydberg_1889_reduced_archived.pdf).

- [42] Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Dritte Mitteilung). *Annalen der Physik*, 385(13):437–490, 1926.  
<https://doi.org/10.1002/andp.19263851302>.
- [43] Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung). *Annalen der Physik*, 384(4):361–376, 1926.  
<https://doi.org/10.1002/andp.19263861802>.
- [44] Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Vierte Mitteilung). *Annalen der Physik*, 386(18):109–139, 1926.  
<https://doi.org/10.1002/andp.19263861802>.
- [45] Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung). *Annalen der Physik*, 384(6):489–527, 1926.  
<https://doi.org/10.1002/andp.19263840602>.
- [46] Erwin Schrödinger. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Phys. Rev.*, 28:1049–1070, Dec 1926.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.28.1049>.
- [47] Julian Schwinger. On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, 73:416–417, Feb 1948.  
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.73.416>.
- [48] Arnold Sommerfeld. Zur Quantentheorie der Spektrallinien. *Annalen der Physik*, 356(17):1–94, 1916.  
[https://uni-tuebingen.de/fileadmin/Uni\\_Tuebingen/Fakultaeten/MathePhysik/Institute/IAP/Forschung/MOettel/Geburt\\_QM/sommerfeld\\_AnnPhys\\_356\\_1\\_1916.pdf](https://uni-tuebingen.de/fileadmin/Uni_Tuebingen/Fakultaeten/MathePhysik/Institute/IAP/Forschung/MOettel/Geburt_QM/sommerfeld_AnnPhys_356_1_1916.pdf).
- [49] Arnold Sommerfeld. *Atombau und Spektrallinien (Zweite Auflage ed.)*. 1921.  
<https://archive.org/details/atombauundspekt00sommgoog/page/240/mode/2up?ref=ol&view=theater>.
- [50] J. J. Thomson. XL. Cathode Rays . *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 44(269):293–316, 1897.  
<https://doi.org/10.1080/14786449708621070>.
- [51] John VonNeumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Verlag von Julius Springer, 1932.