Artificial Prime Numbers: Primality Assessment and Analysis in Specific Contexts

José Acevedo Jiménez
joseacvdojimenez@gmail.com

Abstract– *This article explores the concept of* ***artificial prime numbers****, defined within specific sets of integers. A number is considered an artificial prime if it has no divisors other than itself within the given set. Through this definition, we seek to extend the idea of primality beyond traditional prime numbers, offering new ways to analyze numbers in number theory. Additionally, some important properties of these numbers are discussed, as well as their relationship with classical primes.*

Keywords: *números primos artificiales, teoría de números, conjuntos estructurados, números primos, conjeturas matemáticas*

Números Primos Artificiales: Evaluación y Análisis de la Primalidad en Contextos Específicos

José Acevedo Jiménez
joseacvdojimenez@gmail.com

Abstract– *This article explores the concept of* ***artificial prime numbers****, defined within specific sets of integers. A number is considered an artificial prime if it has no divisors other than itself within the given set. Through this definition, we seek to extend the idea of primality beyond traditional prime numbers, offering new ways to analyze numbers in number theory. Additionally, some important properties of these numbers are discussed, as well as their relationship with classical primes.*

Keywords: *números primos artificiales, teoría de números, conjuntos estructurados, números primos, conjeturas matemáticas*

I. Introducción

La definición clásica de números primos establece que un número es primo si es mayor que 1 y solo tiene dos divisores: 1 y él mismo. Estos números son esenciales en la teoría de números y en diversas aplicaciones como la criptografía, donde la factorización de números grandes en sus factores primos es crucial para la seguridad de los sistemas.
Sin embargo, se puede extender el concepto de primalidad al introducir los números primos artificiales, que se definen dentro de conjuntos de números específicos. En lugar de evaluar la divisibilidad respecto a todos los números enteros, la primalidad artificial se evalúa dentro de un conjunto particular. Este enfoque plantea nuevas formas de pensar sobre la indivisibilidad de los números en contextos específicos.

II. Definiciones

- *Número primo artificial:* Un número q en un conjunto S de enteros positivos mayores que 1 se llama un primo artificial si no hay otro número d en S (con $d \neq q$) que divida a q. En otras palabras, q solo puede ser dividido por sí mismo dentro del conjunto S.

Esta definición puede parecer similar a la primalidad clásica, pero con la distinción crucial de que q no tiene que ser indivisible por 1 o cualquier número fuera del conjunto S. La clave radica en la indivisibilidad relativa dentro del conjunto considerado. Esta restricción contextual permite que números compuestos en el marco clásico sean considerados primos artificiales si no tienen divisores dentro de S.

- *Conjunto específico de números naturales:* Conjunto o subconjunto particular de los números naturales que cumple con ciertos criterios, propiedades o reglas definidas. Estos conjuntos específicos se extraen de los números naturales según características que los distinguen.

- *Coprimos Artificiales:* Dado un conjunto S de números enteros positivos, se dice que dos números a y b en S son coprimos artificiales si y solo si no existe ningún número $d \neq 1$ en S tal que d divida a ambos a y b.

Todo número coprimo en el sentido tradicional también se considera coprimo artificial en el contexto de un conjunto S de números enteros positivos. Esta propiedad resalta la conexión entre la coprimalidad clásica y la coprimalidad artificial, donde la segunda se define de manera más específica dentro de un contexto de conjunto.

Por otro lado, la coprimalidad artificial respalda y complementa la definición de números primos artificiales al proporcionar un marco más amplio para entender las relaciones de divisibilidad dentro de un conjunto S. Ambos conceptos permiten explorar propiedades interesantes y útiles en matemáticas, mostrando cómo interactúan entre sí en el contexto de divisibilidad.

III. Propiedades de los Números Primos Artificiales

Los números primos artificiales comparten algunas propiedades con los primos tradicionales, pero también presentan características propias debido a su definición en conjuntos específicos:

- *Indivisibilidad relativa:*
  Un número es primo artificial si no tiene divisores dentro del conjunto más que él mismo. Esta propiedad es similar a la de los primos tradicionales, pero solo se aplica dentro del conjunto dado.

- *Dependencia del conjunto:*
  Un número puede ser considerado primo artificial en un conjunto, pero no en otro. La primalidad artificial depende completamente del conjunto en el que se evalúa.

- *Relación con números compuestos:*
  Algunos números compuestos en el sentido tradicional pueden ser considerados primos artificiales si no tienen divisores dentro del conjunto específico.

IV. Conjuntos Específicos de Números Naturales

1. Conjunto de los números naturales mayores que 1.

$$S_N = \{n \in \mathbb{Z}^+ : n > 1\}$$

1.1. Propiedades

- En el conjunto de los números naturales mayores que 1, los números primos artificiales coinciden con los primos clásicos. Esto se debe a la naturaleza de la definición tanto de los primos clásicos como de los primos artificiales cuando el conjunto considerado es el conjunto de todos los números naturales mayores que 1.

- Todo conjunto no vacío de números naturales contiene al menos un número primo artificial, esto es así debido a que el número más pequeño dentro de dicho conjunto no puede ser divisible por ningún otro elemento distinto de sí mismo.

1.1.1. Demostración de la infinitud de los números primos

Conjunto de los números naturales mayores que 1.

$$S_N = \{n \in \mathbb{N} : n > 1\}$$

El menor número de dicho conjunto es 2, sacamos este número del conjunto dado y lo ponemos en otro conjunto de números primos artificiales. A continuación, descartamos todos los múltiplos de 2. No todos los números pueden ser múltiplos de 2, pues bastaría sumar 1 a cualquier número par para garantizar la existencia de otros números no pares en el conjunto dado. Al sacar el número 2 y "eliminar" sus múltiplos del conjunto S_N, nos queda un subconjunto $S'_N = \{n \in \mathbb{N} : n > 2\}$. El número más pequeño de este nuevo conjunto (3) no puede tener divisores, así que lo sacamos y "eliminamos" todos sus múltiplos de 3. Ningún múltiplo de 3 puede ser el último número del conjunto S'_N, bastaría sumar 1 a cualquier múltiplo de 3 para generar un número distinto. Este proceso puede repetirse indefinidamente, ya que siempre es posible identificar un nuevo número más pequeño dentro del conjunto restante que no tiene divisores en dicho subconjunto. Esto implica que, mediante este método constructivo, se garantiza la existencia de un número primo artificial en cada etapa del procedimiento, mostrando que no hay un límite superior para los números primos artificiales en el conjunto S_N. Por lo tanto, los números primos artificiales, que en el conjunto S_N coinciden con los números primos, son infinitos.

2. Conjunto de los números naturales pertenecientes a progresiones aritméticas de la forma:

$$S_A = \{a_{n-1} \in \mathbb{N} : a_{n-1} = (n-1)k + 1, n \in \mathbb{N} > 1\}$$

2.1. Propiedades

- En un conjunto S_A, todo número (d) que no es primo artificial (elemento de S_A) se puede expresar como el producto de dos o más números primos artificiales (q_n) en S_A de una forma única salvo el orden de los factores.

$$d = q_1^{e_1} q_2^{e_2} \dots q_k^{e_k} \prod_{i=1}^{k} q_i^{e_i}$$

Ejemplo:

$$S_A = \{4n + 1 : n > 0\}$$

$$S_A = \{\mathbf{5}, \mathbf{9}, \mathbf{13}, \mathbf{17}, \mathbf{21}, 25, \mathbf{29}, \mathbf{33}, \mathbf{37}, \mathbf{41}, 45, \mathbf{49}, \mathbf{53}, \mathbf{57}, \mathbf{61}, 65, \mathbf{69}, \mathbf{73}, \mathbf{77}, 81, 85, \mathbf{89}, \mathbf{93}, \mathbf{97}, \mathbf{101}, 105, \mathbf{109}, \mathbf{113}, 117, \ldots\}$$

Los números primos artificiales del conjunto S_A son: 5, 9, 13, 17, 21, 29, 33, 37, 41, 49, 53, 57, 61, 69, 73, 77, 89, 93, 97, 101, 109 y 113.
El resto ("no primos artificiales") se pueden expresar como el producto de dos o más primos artificiales del conjunto S_A.

$$25 = 5 * 5$$
$$45 = 5 * 9$$
$$65 = 5 * 13$$
$$81 = 9 * 9$$
$$85 = 5 * 17$$
$$105 = 5 * 21$$
$$117 = 9 * 13$$

Es interesante observar que inicialmente en el conjunto dado los números primos artificiales aparecen con mayor frecuencia que los números no primos artificiales, pero a medida que aumentamos los números en el conjunto los números primos artificiales serán cada vez más escasos, tal como ocurre con los números primos. Esto es lógico, pues todos los números no primos artificiales se forman del producto de dos o más números primos artificiales.

- En un conjunto S_A, todo número q^2 es elemento de S_A. Donde q es un número primo artificial elemento de S_A.

- En un conjunto S_A, existen infinitos números primos artificiales.

3. Conjunto de los números naturales pertenecientes a progresiones aritméticas de la forma:

$$S_B = \{a_{n-1} \in \mathbb{N}: a_{n-1} = (n-1)k - 1, n \in \mathbb{N} > 1\}$$

3.1. Propiedades

- En un conjunto S_B, el producto de dos elementos de dicho conjunto dan como resultado un número que es elemento del conjunto S_A.

Ejemplo:

$$S_B = \{4n - 1: n > 0\}$$

$$S_B = \{\mathbf{3}, \mathbf{7}, \mathbf{11}, 15, \mathbf{19}, \mathbf{23}, 27, \mathbf{31}, 35, 39, \mathbf{43}, \mathbf{47}, 51, 55, \mathbf{59}, 63, \mathbf{67}, \mathbf{71}, 75, \mathbf{79}, \mathbf{83}, 87, 91, 95, 99, \mathbf{103}, \mathbf{107}, 111, 115, \ldots\}$$

- En un conjunto S_B, el producto de dos números que son primos artificiales dan como resultado un número que también es primo artificial en el conjunto S_A.

- En un conjunto S_B, existen infinitos números primos artificiales.

Haciendo uso de las propiedades mostradas se puede demostrar que existen conjuntos S_B (como $S_B = \{4n - 1: n > 0\}$) donde todos los números primos artificiales son números primos.

4. Conjunto de los números Fibonacci mayores que 1.

$$S_F = \{F_n: n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$$

4.1. Propiedades

- A excepción de 3, todo número primo artificial en S_F cae en una posición que corresponde a un número primo. Esto partiendo que el 2 cae en la posición 3.

- En un conjunto S_F, existen infinitos números primos artificiales.

Conclusión

El artículo muestra que, dentro de conjuntos específicos de números naturales, como las progresiones aritméticas y la secuencia de

Fibonacci, se pueden identificar números con propiedades únicas de indivisibilidad relativa. Estos conjuntos tienen estructuras bien definidas que permiten observar cómo ciertos números destacan debido a su indivisibilidad en ese contexto. Además, se concluye que dichos conjuntos contienen infinitos números con estas propiedades, lo cual se demuestra utilizando métodos constructivos que aseguran que siempre es posible encontrar un número nuevo que cumpla con las condiciones.

Asimismo, el análisis revela que la interacción entre los números "primos" y "compuestos" dentro de estos conjuntos aporta perspectivas interesantes sobre las relaciones de divisibilidad y factorización. Al analizar conjuntos como los números en progresiones del tipo $an + 1$ o $an - 1$, se destaca cómo los números en dichos conjuntos se complementan para generar nuevas estructuras matemáticas. Esto no solo enriquece la teoría de números, sino que también plantea nuevos desafíos y posibilidades para explorar patrones dentro de los números naturales.

REFERENCIAS

[1] Iván M. Vinográdov. Fundamentos de la Teoría de los Números, segunda edición, Editorial MIR, Moscú, 1977.

[2] Eduardo Núñez Olguín, *Teorema de los números primos*, artículo disponible en: https://pmontero.mat.utfsm.cl/pdf_memorias/Memoria_Eduardo_Nunez.pdf

[3] Leonard E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Dover Publications, 2005.

[4] Mujeres con Ciencia, *Sophie Germain (1776-1831)*, disponible en: https://mujeresconciencia.com/2017/09/19/sophie-germain-1776-1831/.

[5] G. H. Hardy y E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 2008.

[6] Erika Lorena Barrero Angulo, *La conjetura de los primos gemelos en un mundo paralelo al mundo de los números enteros*, disponible en: https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/21321/830200.2013.pdf.