Специальная теория относительности в 4-х мерном евклидовом пространстве

A.N. Smirnov

andreysxxxx@gmail.com

Аннотация

Рассмотрено построение пространства-времени в 4-х мерном евклидовом пространстве, где определено скалярное поле, не имеющее выделенных направлений. При построении пространства-времени, использована гипотеза о том, что принцип причинности применяется отдельно и независимо для отличающихся инерциальных систем отсчета. Показано, что при стремлении относительной скорости двух ИСО к нулю, уравнения прямых преобразований стремятся к тому виду, что имеют уравнения СТО. Получено, как следствие, одинаковость максимальной скорости во всех инерциальных системах отсчета и выведен принцип локальности.

Введение

Гипотеза [1] предполагает, что принцип причинности применяется отдельно и независимо для каждой отличающейся инерциальной системы отсчета (ИСО). Считаем, что две ИСО отличаются, если они имеют ненулевую относительную скорость. Гипотеза так же предполагает, что чем меньше разница скоростей двух ИСО, тем меньше разница в применении принципа причинности одновременно к обоим ИСО и к каждой ИСО по отдельности. Если гипотеза верна, то должно быть два типа преобразований пространства-времени и полей при переходе между ИСО. Преобразования первого типа, это преобразования с точки зрения наблюдателя. Согласно этим преобразованиям, события одинаковы во всех ИСО. Второй тип преобразования пространства-времени и полей, прямые преобразования, это преобразования пространства-времени и полей на основе полей, наблюдаемых в разных инерциальных системах отсчета наблюдателями, неподвижными относительно соответствующих инерциальных систем отсчета. Гипотеза приводит к тому, что наблюдателям невозможно получить информацию о событиях, находящихся в инерциальных системах отсчета, движущимся относительно них, и напрямую сравнить их.

Нам нужна возможность того, чтобы событие могло существовать только в части ИСО. Так как в любом пространстве-времени любое событие существует во всех ИСО, то пространство-время не может быть фундаментально. Гипотеза приводит к выводу, что каждому ИСО соответствует свое пространство-время.

Согласно гипотезе, принцип причинности должен применяться отдельно и независимо для каждой отличающейся ИСО. Для каждой инерциальной системы отсчета K должно выполняться следующее уравнение:

$$\varphi(t + dt, K) = A\varphi(t, K) \tag{1}$$

Здесь φ – состояние системы или ее волновая функция при использовании квантового описания, t – время, A – некоторый оператор.

При стремлении относительной скорости двух ИСО к нулю разница в событиях тоже должна стремиться к нулю. Это означает, что прямые преобразования должны переходить в преобразования с точки зрения наблюдателя, при стремлении относительной скорости двух ИСО к нулю.

При рассмотрении гипотезы был приведен пример построения пространства-времени на плоскости. Расширим этот пример. Рассмотрим построение пространства-времени в 4-х мерном евклидовом пространстве.

Модель

Рассматриваем 4-х мерное евклидово пространство. Считаем, что в каждой точке этого пространства имеется некоторое скалярное поле. Считаем, что уравнение поля не имеет выделенных направлений. Значения этого поля принадлежат множеству действительных чисел. Значение поля в каждой точке определяется значениями поля в соседних точках или, иными словами, описывается дифференциальными уравнениями в частных производных. Это можно записать в следующем виде:

$$f(x) = g\big(x, S, f(S)\big) \qquad (2)$$

где x – некоторая точка в фундаментальном пространстве, $f(x)$ – значение поля в точке x, S – замкнутая поверхность, окружающая точку x, $f(S)$ – значение поля на поверхности S, g – некоторая функция.

Поищем, как преобразовать пространство (x_1, x_2, x_3, x_4) в множество S, состоящее из пространств-времен $((x, y, z, t), K)$, где (x, y, z) – пространство, t – время, K – инерциальная система отсчета которой соответствует пространство-время (x, y, z, t), и где выполняется уравнение 1.

Возьмем некоторую 3-х мерную гиперплоскость в пространстве. На этой гиперплоскости, разложим поле f по некоторой полной системе ортонормированных функций, чтобы поле в каждой точке равнялось сумме функций с некоторыми коэффициентами. Ищем такое разложение, чтобы при сдвиге гиперплоскости на расстояние l перпендикулярно, выполнялось, для любого l, следующее уравнение:

$$\varphi(l) = A(l)\varphi(0) \qquad (3)$$

Здесь φ – это множество, состоящее из значений коэффициентов разложения поля по функциям, в каждой точке гиперплоскости, A – некоторый оператор.

У нас появился кандидат на пространство и время. Гиперплоскость тут выступает в роли кандидата в пространство, l выступает как кандидат на время. Очевидно, что уравнения 1 и 3 похожи друг на друга.

Теперь, потребуем, чтобы уравнение 3 выполнялось для произвольной гиперплоскости, при сдвигах этой гиперплоскости на произвольное расстояние l перпендикулярно. При этом, потребуем, чтобы оператор $A(l)$ был одинаковым для всех гиперплоскостей. То есть, чтобы он зависел только от l и φ. Понятно, что такое возможно не для любого поля. Поэтому, мы рассматриваем только такое поле, которое позволяет такое получить.

Теперь поищем, как в такую модель добавить переходы между ИСО. Повернем предыдущее пространство-время (x, y, z, t) на угол a в пространстве (x_1, x_2, x_3, x_4), перейдем к (x', y', z', t'). Считаем, что ось времени должна быть всегда перпендикулярна гиперплоскости пространства. Уравнение 3 после поворота по-прежнему выполняется, имеется параметр изменений. Очевидно, что расстояние между любыми двумя точками, принадлежащими соответственно (x, y, z) и (x', y', z'), меняется равномерно и пропорционально промежутку времени t или t', и скорость его изменения зависит от угла a. Поэтому можно говорить, что найден кандидат на инерциальную систему отсчета. Соответственно, пространства-времена (x, y, z, t) и (x', y', z', t') соответствуют разным инерциальным системам отсчета, если их оси имеют ненулевой угол относительно друг друга.

Если мы нашли пространство-время, то оператор A описывает законы физики с точки зрения наблюдателя. Поэтому, если оператор одинаков для всех гиперплоскостей, то это означает, что уравнения, описывающие законы физики с точки зрения наблюдателя, одинаковы во всех ИСО. Это означает, что выполняется принцип относительности Эйнштейна.

Перед тем, как двигаться далее, рассмотрим следующий вопрос. Согласно гипотезе, каждой ИСО, в общем случае, соответствует свое пространство-время. Пусть имеются две ИСО, K и K' имеющие ненулевую относительную скорость. В одной из них, пусть это будет K, имеется некоторая точка (x, y, z, t) в пространстве-времени этой ИСО. Нужно найти, какая точка (x', y', z', t') в пространстве-времени, соответствующему K', соответствует этой точке.

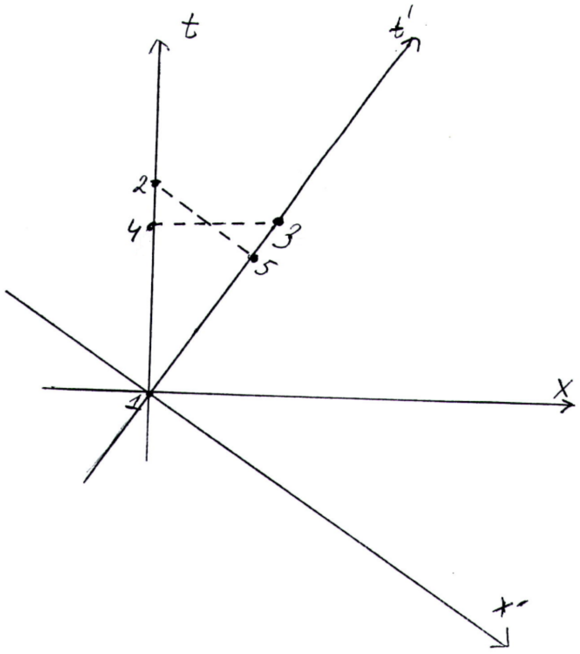
Первый способ, который виден для нахождения соответствия этих точек, геометрический. Пространство каждой ИСО, в любой момент времени, соответствует 3-х мерной гиперплоскости. ИСО, имеющие ненулевую относительную скорость, имеют наклоны гиперплоскостей относительно друг друга. Ищем, где они пересекаются, и на основе сопоставляем точки.

В этом способе видна проблема с событиями. Предположим, в первой ИСО произошло какое-то событие. Пусть вторая ИСО тоже содержит это событие, но оно чуть сдвинуто по отношению к точке пересечения. Тогда получится, что в одной ИСО в какой-то точке произошло некоторое событие, а в другой ИСО это событие произошло не в той точке, что соответствует первой, а где-то рядом. Можно ли это назвать верным сопоставлением точек пространств-времен? Не похоже. Можно попытаться делать сопоставление на основе событий. Если в каком-то пространстве-времени некоторой ИСО произошло событие, то считать, что соответствующая точка в пространстве-времени другой ИСО эта та точка, где тоже произошло это событие. Однако, этот способ заведомо неработоспособный, потому что событие может существовать в пространстве-времени одной ИСО и отсутствовать в пространстве-времени другой ИСО. На основе этого, можно сделать вывод, что в общем случае невозможно сопоставить точку из пространства-времени одной ИСО с точкой в пространстве-времени другой ИСО.

Согласно второму постулату гипотезы, чем меньше относительная разница скоростей двух ИСО, тем меньше разница в событиях между ИСО, и при стремлении относительной скорости к нулю, эта разница стремится к нулю. Исходя из этого, чем меньше относительная скорость, тем точнее геометрическое сопоставление точек на гиперповерхности будет отображать соответствие событий. То есть, можно сказать, что при стремлении относительной скорости двух ИСО к нулю, прямые преобразования пространства-времени и полей стремятся к простому геометрическому сопоставлению точек на гиперплоскостях. Найдем это геометрическое сопоставление.

Назовем v_t расстояние в исходном 4-х мерном пространстве, соответствующее единице времени. Согласно описанному выше, это значение одинаково во всех системах отсчета.

Пусть имеются две ИСО, движущиеся относительно друг друга со скоростью v вдоль оси x, и их начальные точки координат совпадают. Тогда это означает, что в исходном 4-х мерном пространстве, гиперплоскости этих ИСО наклонены друг к другу под некоторым углом α. Так как мы считаем, что ось времени всегда перпендикулярна гиперплоскости, то можно сказать, что этот угол является углом между осями времени двух гиперплоскостей.



На рисунке выше показаны оси x и t для первой системы отсчета и оси x' и t' для второй системы отсчета. Оси y и z у них совпадают. Вторая система отсчета, движущаяся с относительной скоростью v, наклонена под углом α относительно первой. Хотелось бы подчеркнуть, что ось t является обычной пространственной осью в евклидовом пространстве. Длина l вдоль этой оси связана с наблюдаемым временем следующим соотношением:

$$t = l/v_t$$

Одномоментные события — это те события, что происходят на одной гиперплоскости, перпендикулярной оси t.

Так как v_t во всех инерциальных системах отсчета одинаково, то $v = v_t \operatorname{tg}(\alpha)$, где α – угол между осями t и t'.

Пусть t – это время, прошедшее в первой системе отсчета от точки 1, а t' - время, которое прошло в движущейся системе отсчета за время t. Промежутку времени t в первой системе соответствует расстояние $v_t t$, это расстояние между точками 1 и 4. Такому же промежутку времени t во второй систем отсчета соответствует такое же расстояние, это расстояние между точками 1 и 5. Точка 2 это пересечение линии, перпендикулярной оси t', и проходящей через точку 5. Аналогично, точка 3 это пересечение линии, перпендикулярной оси t, и проходящей через точку 4. Для того, чтобы определить, какой промежуток времени в первой системе отсчета соответствует времени t' во второй, нужно найти длину гипотенузы треугольника из точек 1, 5 и 2. Из рисунка видно, что

$$t = \frac{t'}{\cos(\alpha)}$$

Теперь рассмотрим, как эта полученные выше уравнения будут вести себя при α стремящемся к нулю, что соответствует стремлению относительной скорости к нулю.

При малых углах

$$\operatorname{tg}(\alpha) \approx \sin(\alpha)$$

Отсюда

$$\sin(\alpha) \approx v/v_t$$

Тогда, из известного значения синуса, получаем:

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - sin^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_t}\right)^2}$$

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_t}\right)^2}}$$

Из того же рисунка видно, что

$$t' = \frac{t}{\cos(\alpha)} = \frac{t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_t}\right)^2}}$$

Теперь рассмотрим преобразования координат. Пусть скорость v направлена вдоль оси x. Тогда, при повороте системы координат, y и z останутся неизменными:

$$y = y'$$

$$z = z'$$

Во второй систем отсчета, после поворота, $x' = x_0/\cos(\alpha)$

Тогда

$$x' = (x - vt)/\cos(\alpha) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_t}\right)^2}}$$

$$t' = \frac{t - (v/{v_t}^2)x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_t}\right)^2}}$$

Эти уравнения приобретают известный вид, если

$$v_t = \mathrm{c}$$

где с – скорость света.

Из полученных уравнений следует наличие максимальной возможной скорости, равной v_t. Так как мы рассматриваем такое уравнение поля в 4-х мерном пространстве, которое не имеет выделенных направлений, то v_t одинакова для всех ИСО. Напомню, что мы строим пространство-время так, чтобы выполнялся принцип причинности. Эта скорость является максимальной, так как при ее превышении не будет выполняться принцип причинности.

Можно так же утверждать, что получен и принцип локальности. При этом, уравнение 2 не имеет ничего похожего на локальность. Это уравнение определено не на пространстве-времени, а на более фундаментальном 4-х мерном пространстве. Принцип локальности, полученным таким образом, действует на состояния, описываемые уравнением 1. Можно предположить, что уравнение 1 приводит к появлению некоторых эффективных полей. Тогда, принцип локальности применим только к этим эффективным полям.

Мы получили, что при стремлении относительной скорости двух ИСО к нулю, прямые преобразования пространства-времени и полей стремятся к уравнениям специальной теории относительности. Единственное, что было применено в рассматриваемой модели для получения такого результата, это требование отсутствия выделенного направления у уравнения 1. Можно сказать, что в какой-то степени тут использовался, хотя и косвенно, принцип относительности Эйнштейна. Однако, второй постулат СТО и принцип локальности никак не был использован в этой модели. При этом, они были получены. Тем самым, данная модель сокращает число сущностей.

Заключение

Мы рассмотрели построение множества, состоящего из пространств-времен для каждой ИСО, в 4-х мерном пространстве. При этом, мы выводили эти пространства-времена, опираясь на гипотезу о том, что принцип причинности применяется отдельно и независимо для каждой отличающейся ИСО. Из этой гипотезы следует два типа преобразований пространства-времени и полей. Первый тип, это преобразования с точки зрения наблюдателя, сохраняющие события. Второй тип преобразований, это прямые преобразования. Из гипотезы следует, что при стремлении относительной скорости двух ИСО к нулю, прямые преобразования должна переходить в преобразования с точки зрения наблюдателя. Мы нашли к чему стремятся уравнения прямых преобразований при стремлении относительной скорости двух ИСО к нулю. Они стремятся к уравнениям, которые идентичны преобразованиям Лоренца.

Таким образом, можно утверждать, что в 4-х мерном пространстве выводится второй постулат СТО и принцип локальности. Уменьшается количество сущностей.

Из гипотезы следует, что все современные широко принятые теории не являются фундаментальными. Полученный результат показывает, как можно вывести СТО из более фундаментальных принципов, на примере 4-х мерного пространства. Этот результат, косвенным образом, подкрепляет гипотезу о принципе причинности и ИСО.

Литература

1. Smirnov, A.N. (2025) Principle of Causality and Inertial Frames of Reference. *Journal of High Energy Physics, Gravitation and Cosmology*, **11**, 582-599. doi: 10.4236/jhepgc.2025.112041
2. Einstein, A. (1905) "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" Annalen der Physik, 17(10), 891–921. http://dx.doi.org/10.1002/andp.19053221004
3. Einstein, A. (1907) "Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen" Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, 4, 411–462. http://dx.doi.org/10.1002/andp.19073280713