Compatibilidad entre el método NFW y la teoría DMbQG en M33

Abstract

This work aims to contrast the validity of the DMbQG (Dark Matter by Quantum Gravitation) theory in M33, as well as the compatibility of the virial mass results calculated by this theory and the NFW method. The data sources used are the papers by Kam and Carignan [1] and López Fune and Salucci [2]. The DMbQG theory was initially developed for the MW and M31 and was successfully verified with results published in Abarca, M. [4]. In Abarca, M. [3], it was demonstrated that this theory offered virial mass results for the MW and M31 similar to those calculated using the NFW method. In Abarca, M. [6], the compatibility of both methods was also demonstrated in two galaxies outside the Local Group.

By applying the DMbQG theory using the rotation curve data published by Kam and Carignan [1] for M33, a virial mass of 1.3 E11 $M_{\odot}$ is obtained. However, Kam and Carignan obtain a virial mass of 5 E11 $M_{\odot}$ using the NFW method, which is more than half of the estimated virial mass for the MW. In the framework of DMbQG this result is inconsistent, given that M33 contains only one-tenth of the baryonic mass of the MW.

Since the DMbQG theory is based on the hypothesis that dark matter is a product of the propagation of the gravitational interaction according to a quantum gravity mechanism, it follows that this theory supports the fact that the ratio of baryonic mass to virial mass should be very similar in all galaxies, at approximately 10%. However, with the results from Kam and Carignan, this ratio for M33 drops to 2%.

Given that the DMbQG theory can only be applied in the halo region where the baryonic mass is residual, a specific region of the rotation curve was selected for the application of the theory based on this criterion. Furthermore, two points were selected to calculate the two parameters associated with the NFW method. The selection criterion for these points ensured that both theories used the same data to calculate the virial mass.

The results have been excellent, as the virial mass calculated with NFW has been reduced to 1.1 E11 $M_{\odot}$, and the mass calculated with the Direct Mass formula is 1.3 E11 $M_{\odot}$; these results differ by only 15%. Moreover, with these results, the baryonic mass to virial mass ratio is 9%, which is very similar to the typical ratio observed in most galaxies.

Introducción

Este trabajo surge para contrastar la validez de la teoría DMbQG en M33. Las fuentes de datos utilizadas son el paper de Kam, Carigan, et al.2017 [1] y López Fune, Salucci et al.2017 [2].

Después de haber contrastado exitosamente la validez de la teoría en MW y M31, en Abarca,M [4] y además en otras galaxias fuera del Grupo local, Abarca, M[6]. Después de haber ampliado la teoría a cúmulos de galaxias y habiendo contrastado los resultados teóricos obtenidos con algunos trabajos observacionales publicados sobre el cúmulo de Virgo, en Abarca, M [5], en este trabajo se va a aplicar la teoría DMbQG a los excelentes datos de la curva de rotación publicados por Kam y Carignan [1] obteniendo con sorpresa un radio y masa virial mucho más bajos de los calculados por los autores aplicando el método NFW.

Esta diferencia tan radical entre la masa virial que se calcula con la teoría DMbQG y el método NFW según lo que publican Kam, Carignan [1] y López Fune, Salucci [2] resulta muy extraña porque en Abarca [3] se ha comprobado que ambos métodos ofrecen masas viriales muy similares en MW y M31 y además en Abarca, M [6] se ha efectuado la misma comprobación fuera del Grupo Local en las galaxias NGC3521 y 3621.

Dado que la teoría DMbQG se sustenta sobre la hipótesis de que la materia oscura es producto de la propagación de la interacción gravitatoria según un mecanismo de gravedad cuántica es inmediato deducir que la teoría es general y no caben particularidades específicas de cada galaxia. En este trabajo presento un método simplificado del tipo NFW y llego a obtener unos resultados muy similares para la masa virial usando la teoría DMbQG y el antedicho método.

Es importante destacar que los propios autores, Kam, Carignan [1] en el abstract de su paper manifiestan su extrañeza por el excesiva masa virial que obtienen con el método NFW, concretamente 5E11 $M_{\odot}$, la cual es más de la mitad de la masa virial estimada para MW, y esto para una galaxia que cuenta con aproximadamente la décima parte de la masa bariónica de MW es una barbaridad. Igualmente López Fune, Salucci et al.[2] aplicando el método NFW encuentra una masa virial de 5.4E11 $M_{\odot}$. Aplican también otro método llamado BRK que rebaja la masa virial hasta un valor de 3E11 $M_{\odot}$, porque ellos también consideran poco razonable el valor de la masa virial calculado con el método NFW.

Dado que la teoría DMbQG sólo se puede aplicar en la región donde las masa bariónica es residual, véase Abarca,M [4], en este trabajo se analiza más detalladamente la curva de rotación ofrecida por Kam y Carignan [1], se eligen dos puntos del dominio a 15.6 kpc y 20 kpc, se aplica en dichos puntos una técnica simplificada para calcular los dos parámetros de NFW y se aplica también la teoría de DMbQG. El criterio seguido para elegir esos dos puntos es conseguir que ambas teorías usen las mismas condiciones iniciales para el cálculo de la masa virial.

Los resultados han sido excelentes porque la masa virial calculada con NFW se ha reducido a 1.1E11 $M_{\odot}$, y la calculada con la Direct mass ha sido 1.3E11 $M_{\odot}$, estos resultados difieren solo en un 15% . Además con estos resultados la ratio masa bariónica sobre masa virial es del 9 % muy similar a la ratio usual para la mayoría de las galaxias.

Datos de la galaxia M33 publicados por Kam, Carignan, Chemin et al. [1]

La gráfica 1 indica que a partir de 10 kpc la materia bariónica es residual.

Gráfico1- Gráficos de Kam,Carignan,Chemin [1]

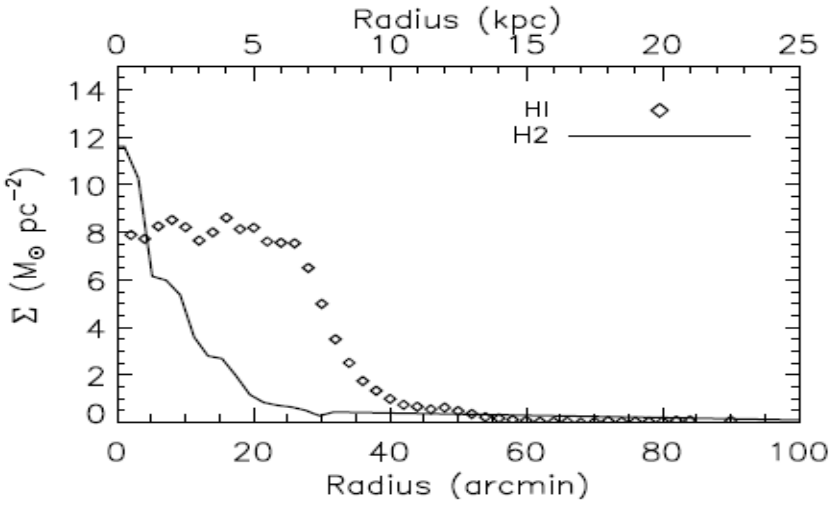


Figure 8. HI mass surface density profile of M33 (symbols). The molecular gas mass surface density (solid line) is from Druard et al.

Dado que a partir de 10 kpc la densidad de gas es residual, en el marco de la teoría DMbQG es posible calcular el parámetro **a** de la fórmula de direct mass en cualquiera de los puntos disponibles de la curva de rotación a partir de los 10 kpc.

En la gráfica 2 se muestran dos curvas de rotación, la de los autores Kam, Carignan [1] y en azul la de Corbelli et al. (2014). Es importante destacar que a partir de 20 kpc los errores de medida son notablemente mayores.

Gráfico 2- Gráficos de Kam,Carignan,Chemin [1]

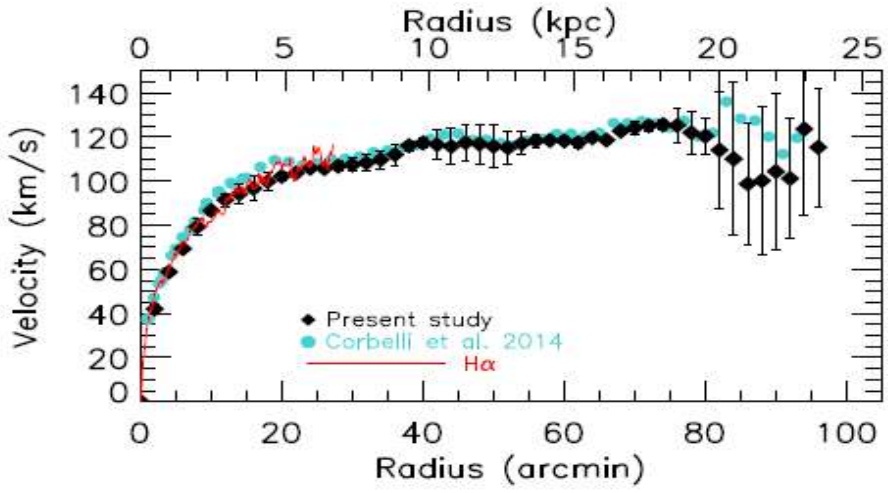


Figure 14. Comparison bewteen our new HI rotation curve (black diamonds) with the Hα rotation curve from Kam15 (red line) and the HI rotation curve from Corbelli et al. (2014) (cyan circles).

En la tabla 1, se ofrecen detalladamente los datos de la curva de rotación publicada por Kam y Carignan [1] y tales datos se analizan para elegir los más adecuados para aplicar tanto un método simplificado para calcular los parámetros de NFW como para calcular el parámetro **a** asociado a la Direct mass.

En Abarca, M [4] se ha desarrollado la teoría de DMbQG y se ha justificado que en el marco de esta teoría, en todos los halos galácticos se verifica que la curva de velocidades de rotación decrece según la ley $V=a\cdot R^{-0.25}$ en las regiones del halo donde la masa bariónica es residual, y este hecho es la base de la hipótesis principal de la teoría de DMbQG.

El problema con la curva de M33 es que muestra un aumento de velocidades hasta los 18 kpc y además en el rango de radios desde 13 kpc a 18 kpc los errores asociados a las velocidades son mucho menores que en otras zonas del dominio, tal y como se ve en la gráfica y se cuantifica en la tabla 1.

En el marco de DMbQG, el parámetro **a** de la llamada Direct mass se puede calcular con cualquier punto de la curva donde la masa bariónica sea residual. En este trabajo se ha elegido considerar el rango del dominio desde 12 kpc hasta 23.5 kpc. En base al gráfico 1, en este rango del dominio está asegurado que la masa bariónica es muy residual, lo cual es condición necesaria para aplicar la teoría DMbQG.

Tabla 1- Curva de Rotacion de Kam,Carignan,Chemin [1]

Table 4. Results of the tilted-ring model of the HI velocity field of M33.

Radius (kpc)	V_{rot} (km s^{-1})	ΔV_{rot} (km s^{-1})	i (°)	PA (°)	Radius (′)	Radius (kpc)	V_{rot} (km s^{-1})	ΔV_{rot} (km s^{-1})
0.5	42.0	2.4	53.2	201.3	50	12.2	115.7	9.6
1.0	58.8	1.5	53.3	201.3	52	12.7	115.1	7.7
1.5	69.4	0.4	53.4	201.3	54	13.2	117.1	5.1
2.0	79.3	4.0	53.5	201.3	56	13.7	118.2	3.2
2.4	86.7	1.8	53.6	201.3	58	14.2	118.4	1.4
2.9	91.4	3.1	53.7	201.3	60	14.7	118.2	1.8
3.4	94.2	4.8	53.8	201.3	62	15.1	117.5	2.4
3.9	96.5	5.5	53.9	201.3	64	15.6	119.6	0.8
4.4	99.8	3.9	54.0	201.3	66	16.1	118.6	1.5
4.9	102.1	1.7	54.1	201.3	68	16.6	122.6	0.5
5.4	103.6	0.4	54.2	201.3	70	17.1	124.1	2.9
5.9	105.9	0.7	54.3	201.3	72	17.6	125.0	2.2
6.4	105.7	1.7	54.4	201.3	74	18.1	125.5	2.5
6.8	106.8	2.2	54.5	201.3	76	18.6	125.2	8.1
7.3	107.3	3.0	54.6	201.3	78	19.1	122.0	9.8
7.8	108.3	4.0	54.7	198.8	80	19.5	120.4	8.5
8.3	109.7	4.0	54.8	195.4	82	20.0	114.0	26.6
8.8	112.0	4.8	54.9	192.0	84	20.5	110.0	34.6
9.3	116.1	2.2	55.0	188.7	86	21.0	98.7	27.4
9.8	117.2	2.5	55.1	185.3	88	21.5	100.1	33.4
10.3	116.5	6.5	55.2	181.9	90	22.0	104.3	35.2
10.8	115.7	8.1	55.3	178.5	92	22.5	101.2	27.4
11.2	117.4	8.2	55.4	175.2	94	23.0	123.5	39.1
11.7	116.8	8.9	55.5	174.2	96	23.5	115.3	26.7

Cálculo del parámetro a asociado a la curva de decaimiento de la velocidad en el halo

Como antes se ha mencionado este parámetro es la constante de la fórmula de decaimiento de la velocidad en la región del halo donde la masa bariónica es residual o cero, y además a^2 aparece en la llamada Direct mass cuya fórmula es $M_{TOTAL}(<r) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{r}}{G}$ y que proporciona la masa total encerrada por la galaxia en la esfera de radio r, a condición de que dicho radio pertenezca al halo. La masa total se refiere a toda la masa bariónica de la galaxia más la masa oscura contenida en dicho radio. En Abarca,M. [4] puede consultarse el proceso de obtención la Direct mass, véase el capítulo 8, la fórmula más importante de la teoría DMbQG.

Tabla 2 Cálculo del parámetro a en todos los puntos del dominio

	radius	Velocity	Paramt. a^2
	kpc	Km/s	$m^{2.5}/s^2$
1	12,2	115,7	2,60E+20
2	12,7	115,1	2,62E+20
3	13,2	117,1	2,77E+20
4	13,7	118,2	2,87E+20
5	14,2	118,4	2,93E+20
6	14,7	118,2	2,98E+20
7	15,1	117,5	2,98E+20
8	15,6	119,6	3,14E+20
9	16,1	118,6	3,14E+20
10	16,6	122,6	3,40E+20
11	17,1	124,1	3,54E+20
12	17,6	125	3,64E+20
13	18,1	125,5	3,72E+20
14	18,6	125,2	3,76E+20
15	19,1	122	3,61E+20
16	19,5	120,4	3,56E+20
17	20	114	3,23E+20
18	20,5	110	3,04E+20
19	21	98,7	2,48E+20
20	21,5	100,1	2,58E+20
21	22	104,3	2,83E+20
22	22,5	101,2	2,70E+20
23	23	123,5	4,06E+20
24	23,5	115,3	3,58E+20

En la tabla 2 se muestra la curva de rotación en el intervalo del dominio adecuado para nuestro estudio, y en la tercera columna se calcula el parámetro a^2 con la fórmula $a^2 = V^2 \cdot R^{0.5}$ en cada uno de los puntos considerados para posteriormente tomar la media aritmética.

En la tabla 3 se muestra dicho valor medio, así como su desviación típica y su coeficiente de variación.

Tabla 3 Valor medio parámetro a^2 para M33	
Media parámetro $\mathbf{a^2}$	3.1567E+20 $m^{2.5}/s^2$
Desviación típica de $\mathbf{a^2}$	4.45E+19 $m^{2.5}/s^2$
Coeficiente de Variación C.V.	0.14
Parámetro **a** medio	1.7767E10 $m^{1.25}/s$

Dado que el C.V. es 0.14 , que la mayoría de los puntos de la curva de rotación tienen errores superiores al 7 % y que 8 de ellos tienen errores superiores al 25%, ver tabla 1, concluimos que considerar el parámetro a^2 como un valor constante en toda la región del dominio está justificado.

Curva de decaimiento teórica versus curva de rotación medida

En la tabla 4 se muestra la comparativa entre las medidas de velocidades y las calculadas por la fórmula de la velocidad de decaimiento $V = a \cdot R^{-0.25}$, representadas en la columna verde y con el valor de **a** medio, mostrado en la tabla 3.

Dado que en este trabajo se va a comparar el resultado de la masa virial calculada con la teoría DMbQG y el resultado de la masa virial que se calcula usando un método simplificado tipo

NFW que usa solamente dos puntos de la curva de rotación, es necesario elegir dos puntos en los que la diferencia entre velocidades medidas y velocidades teóricas de la curva de decaimiento sea mínimo.

El objetivo de esta elección es mostrar cómo cuando se eligen las mismas condiciones iniciales ambos métodos ofrecen resultados muy similares.

Observando en la tabla 4 la columna de las diferencias relativas se obtiene que dichos puntos son P1 y P2. Ver tabla 5. Las velocidades consideradas para dichos puntos son las teóricas.

Tabla 4 Velocidad medida versus fórmula

Radius	Velocidad medida	Fórmula de velocidad	Diferencia relativa
kpc	km/s	km/s	%
12,2	115,7	127,55	9,29E+00
12,7	115,1	126,28	8,85E+00
13,2	117,1	125,06	6,37E+00
13,7	118,2	123,91	4,61E+00
14,2	118,4	122,80	3,58E+00
14,7	118,2	121,74	2,91E+00
15,1	117,5	120,93	2,84E+00
15,6	119,6	119,95	2,90E-01
16,1	118,6	119,01	3,41E-01
16,6	122,6	118,10	-3,81E+00
17,1	124,1	117,23	-5,86E+00
17,6	125	116,39	-7,40E+00
18,1	125,5	115,57	-8,59E+00
18,6	125,2	114,79	-9,07E+00
19,1	122	114,03	-6,99E+00
19,5	120,4	113,44	-6,14E+00
20	114	112,72	-1,13E+00
20,5	110	112,03	1,81E+00
21	98,7	111,36	1,14E+01
21,5	100,1	110,70	9,58E+00
22	104,3	110,07	5,24E+00
22,5	101,2	109,45	7,54E+00
23	123,5	108,85	-1,35E+01
23,5	115,3	108,27	-6,49E+00

Tabla 5 Puntos con diferencias relativas mínimas teóricas Vs medidas

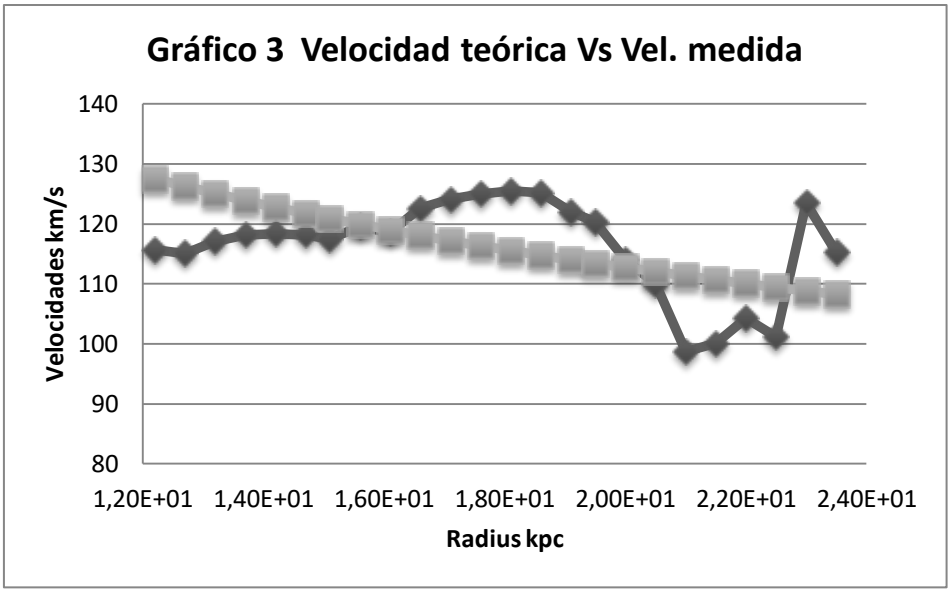
P1	15.6 kpc	120 km/s
P2	20 kpc	113 km/s

En la tabla 4 se observa que la diferencia relativa entre la velocidad de decaimiento y las velocidades medidas es en todos los puntos inferior al 10% y en la mitad de ellos es inferior al 7%.

Existen dos puntos que superan el 10 % de diferencia relativa, pero son excusables porque los errores de sus medidas superan el 25 %, véase tabla 1.

Estos resultados juntamente a los errores experimentales de las velocidades medidas justifican que se pueda considerar compatible la curva de decaimiento teórica con la curva de rotación experimental.

En el gráfico 3 se muestran las dos funciones, la gris es la velocidad de decaimiento teórica y la irregular en negro es la velocidad medida y se aprecia los dos puntos de corte de ambas curvas.



En la tabla 6 se muestra la masa dinámica asociada a los dos puntos de la tabla 5.

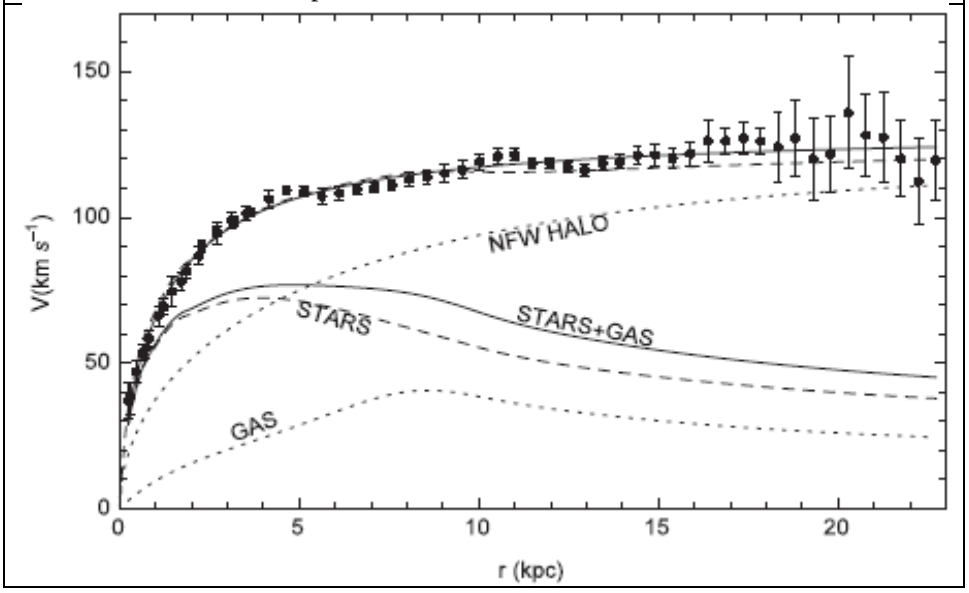
Tabla 6 Datos iniciales y masa dinámica asociada a ellos		
Radio kpc	Velocidad km/s	M_{DIN} $M_{\odot}$
15.6	120	5.22E10
20	113	5.934E10

Dado que para aplicar el método NFW es necesario estimar la cantidad de masa oscura asociada a cada punto de la curva de rotación, en el siguiente epígrafe se va a calcular la masa bariónica contenida en M33.

Estimación de la masa bariónica de M33

Para hallar la masa bariónica partimos de la consideración que se hizo sobre el gráfico 1, acerca de que a partir de 10 kpc la masa bariónica es residual. En el gráfico 3 se observa que a partir de 10 kpc, la curva asociada al gas tiene un decaimiento kepleriano como la asociada a las estrellas.

Gráfico 3- Gráfico de López Fune-Corbelli [2]



La curva stars + gas facilita el cálculo de la masa bariónica. A partir de dicha curva se han tomado los datos de radios y velocidades para calcular la masa bariónica que incluye a la masa estelar y a la del gas. En la tabla 7 se muestran los datos tomados de la curva stars+gas y la masa dinámica bariónica calculada.

Tabla 7 Cálculo de la masa bariónica de M33		
Radio kpc	Velocidad star+gas km/s	Masa bariónica $M_\odot$
10	66.54	1.0E10
23	55.26	1.0E10

Como era esperable en ambos radios sale el mismo resultado para la masa bariónica y haciendo la diferencia entre la masa total dinámica de la tabla 6 y dicha masa bariónica, obtenemos la masa oscura asociada a cada radio. En la tabla 8 se muestran los resultados.

Tabla 8 Masas dinámicas y oscura asociada a los dos puntos del cálculo				
	Radio kpc	M_{DIN} $M_\odot$		M_{MO} $M_\odot$
Punto 1	15.6	5.22E10	M_1	4.22E10
Punto 2	20	5.934E10	M_2	4.934E10

Cálculo de los parámetros NFW asociados a los datos de masa oscura calculados

Como es sabido la fórmula de la masa oscura con el método NFW es: $M_{\mathrm{DM}}(<r) = K_{\mathrm{NFW}} \cdot f(x)$ siendo $K_{NFW} = 4\pi R_0^3 . D_0 \cdot$, $f(x) = \ln(1+x) - x/(1+x)$ donde $x = r/R_0$.

D_0 es el parámetro de densidad y R_0 el parámetro de escala.

En particular se define M_{200} (virial) como la cantidad de masa oscura contenida en un radio R_{200} (virial) cuya densidad media es 200 veces la densidad crítica del Universo. Por lo tanto $M_{200} = K_{NFW} \cdot f(c)$ donde $c = R_{200} / R_0$ es el factor de concentración. El factor de concentración no es independiente y tiene una relación directa con D_0 como se verá más adelante.

Los dos parámetros que definen el perfil de densidad MO tipo NFW son D_0 y R_0, los cuales pueden ser calculados con dos parejas de datos: radio y su masa oscura asociada tal y como se describe a continuación:

Haciendo la ratio de las masas oscuras calculadas en la tabla 7, $M_1/M_2 = 0.85529$ e igualando dicha ratio a la ratio de la fórmula $M_{\mathrm{DM}}(<r) = K_{\mathrm{NFW}} \cdot f(x)$ aplicada a los dos radios 15.6 kpc y 20 kpc es fácil llegar a la ecuación trascendente en donde la z representa el factor de escala R_0

$$\frac{\ln\left(\frac{z+15.6}{z}\right) - \frac{15.6}{z+15.6}}{\ln\left(\frac{z+20}{z}\right) - \frac{20}{z+20}} = 0.85529$$

Cuya solución es $Z = 2.4536755$ kpc $= R_0$

Usando la fórmula $M_{\mathrm{DM}}(<r) = K_{\mathrm{NFW}} \cdot f(x)$ y despejando el parámetro densidad, resulta $\boldsymbol{D_0 = \frac{M_{DM}(r)}{4\pi R_0^3 \cdot f(x)}}$.

El cálculo de la densidad D_0 se puede hacer con cualquiera de los dos puntos. Lo hacemos con ambos y como era de esperar, en ambos puntos sale igual valor de D_0. Ver tabla 9.

Tabla 9 Cálculo del parámetro densidad inicial del modelo NFW					
	Radio kpc	X = Radio/R_0	F(x)	M_{MO} $M_\odot$	D_0 kg/m^3
Punto 1	15.6	X_1=15.6/R_0	F(X_1)= 1.131672	4.22E10	1.36 E-20
Punto 2	20	X_2=20/R_0	F(X_2)= 1.323145	4.934E10	1.36 E-20

A partir de la densidad D_0 = 1.36E-20 kg/m^3 se puede calcular el parámetro de concentración, mediante la ecuación de abajo. La obtención de la misma es explicada en Abarca,M [3], cap 4.

$\frac{c^3}{f(c)} = \frac{4\pi G\rho_0}{100 \cdot H^2}$ = 22169.95 cuya solución es c= 39.21 y conocido c se calcula R_{200} = c· R_0

R_{200} = 39.21 · 2.4536755= 96.2 kpc En el epígrafe siguiente se muestra la relación de R_{200} con M_{200} a través de la velocidad virial V_{200}

V_{200} = R_{200}·10·H= 67.346 km/s y M_{200}= 1.014E11 $M_\odot$

El lector puede comprobar que la densidad media de la masa M_{200} en la esfera de radio R_{200} es exactamente $\mathbf{200.063}\boldsymbol{\rho_C}$ lo cual da confianza en todos los cálculos realizados y además se constata que es muy buena aproximación teniendo en cuenta el reducido número de decimales con los que se han realizado los cálculos.

Para calcular la masa total se le añade la masa bariónica con lo cual $M_{200\text{-TOTAL}}$= 1.114E11 $M_\odot$

Cálculo de la masa virial con los parámetros aportados por Kam, Carignan y Chemin

Por la definición del concepto M_{200} es inmediato obtener su fórmula $\boldsymbol{M_{200}} = \frac{\mathbf{100}\cdot\boldsymbol{H^2}\cdot\boldsymbol{R_{200}^3}}{\boldsymbol{G}}$.

Se define la velocidad virial V_{200}= 10·H·R_{200} para que también se pueda usar la fórmula de la masa dinámica en el caso de la masa virial, es decir $\boldsymbol{M_{200}} = \frac{\boldsymbol{V_{200}^2}\cdot\boldsymbol{R_{200}}}{\boldsymbol{G}}$

Tabla 10 Cálculo de la masa virial según los resultados publicados por Kam, Carignan [1]
Recorte de los parámetros NFW publicados por los autores y cálculo de la masa virial

NFW	V_{200}	114.4 ± 0.7
	c	6.05 ± 0.05
	Υ	0.52

R_{200} = V_{200} /10H =163.4 kpc y M_{200} = 4.97E11 $M_\odot$

Este valor de la masa virial es más de la mitad del estimado para MW, y los propios autores indican en el abstract lo poco verosímil que resulta este alto valor para la masa virial de M33, ya que esta galaxia contiene aproximadamente la décima parte de la masa bariónica de MW.

Esta masa virial es 4.9 veces mayor que la obtenida en el epígrafe anterior. Desconozco el algoritmo de cálculo seguido por los autores, pero seguro que han considerado todos los puntos de la curva de rotación. En cambio en el epígrafe de arriba se ha trabajado con solo dos datos a

15.6 kpc y a 20 kpc, elegidos porque ofrecen máxima concordancia entre las medidas y la curva de decaimiento para las velocidades que establece la teoría DMbQG.

Cálculo de la masa virial mediante la fórmula direct mass en la teoría DMbQG

Para calcular el parámetro **a** basta tomar un solo punto de la región del halo, dado que hemos usado los dos puntos con el método NFW, calculamos con los dos puntos el parámetro a^2, mediante la fórmula $a^2 = v^2 \cdot R^{0.5}$ y usamos su valor medio.

Tabla 11 Cálculo del parámetro a^2 usando los dos puntos.			
Punto 1	15.6 kpc	120 km/s	$a^2 = 3.1594E20\ m^{2.5}/s^2$
Punto 2	20 kpc	113 km/s	$a^2 = 3.1721E20\ m^{2.5}/s^2$

Si consideramos el promedio de ambos valores resulta $a^2 = 3.166E20\ m^{2.5}/s^2$. Observar que este valor es solo 0.3 % superior al obtenido en la tabla 3.

En el marco de la teoría de DMbQG el radio y la masa virial total, se calculan mediante las fórmulas de abajo, las cuales son obtenidas en Abarca, M [3], capítulo 3.

$$R_{200-TOTAL} = \left[\frac{a^2}{100 \cdot H^2}\right]^{2/5}$$ de donde $R_{200\text{-TOTAL}} = 106.2$ kpc y $V_{200} = 10 \cdot H \cdot R_{200} = 74.36$ km/s

$$M_{200-TOTAL} = \frac{a^{12/5}}{G \cdot (10 \cdot H)^{2/5}}$$ de donde $M_{200\text{-TOTAL}} = 1.365E11\ M_\odot$

Estos resultados no son adecuados para comparar con los obtenidos por el método de NFW porque están calculados para que la densidad media de la masa total sea exactamente 200 veces la densidad crítica del Universo, en cambio con el método NFW es la masa oscura virial la que verifica que su densidad media en su esfera viral es $\mathbf{200}\boldsymbol{\rho_C}$

Para comparar los resultados de ambas teorías, aplicamos la Direct mass a $R_{200} = 96.2$ kpc (radio virial calculado con el método NFW) y resulta $M_{200\text{-TOTAL}} = 1.299E11 M_\odot$. El valor del parámetro a^2 usado es el obtenido más arriba $a^2 = 3.166E20\ m^{2.5}/s^2$.

En la tabla 12 se muestran los resultados de la masa total contenida en $R_{200} = 96.2$ kpc calculados por ambos métodos.

Tabla 12 Comparativa de la masa virial total entre ambos métodos		
R_{200} = 96.2 kpc	$M_{200\text{-TOTAL}}$	Diferencia relativa entre ambas
NFW	$1.114\ E11\ M_\odot$	15.5 %
Direct mass	$1.299E11\ M_\odot$	

Una diferencia relativa del 15.5 % significa que ambos resultados son compatibles considerando todos los errores experimentales, cosa que no se puede decir del exagerado valor de $5E11\ M_\odot$ obtenido por los autores, usando el mismo método NFW pero considerando todos los puntos de la curva de rotación.

Conclusión

Este trabajo muestra como el método NFW y la direct mass ofrecen resultados similares cuando ambos métodos se aplican en la región de la curva de rotación donde la masa bariónica es

residual y se usan los mismos datos iniciales para ambos métodos. Esta compatibilidad de resultados ya se ha demostrado en trabajos previos. Concretamente para MW y M31 en [3] y para NGC3521 y NGC 3621 en [6].

Gracias a la teoría DMbQG aplicada a M33 también se ha podido elegir dos puntos de la curva de rotación para aplicar con ellos el método simplificado tipo NFW. Dicho de otro modo, la curva de medidas es tan irregular que no presenta una dependencia funcional clara y gracias a la curva de decaimiento de la teoría DMbQG se han podido escoger esos dos puntos de manera que la masa virial calculada con la teoría DMbQG es muy similar a la calculada con el método simplificado NFW y además este resultado proporciona una ratio de masa bariónica versus masa virial entorno al 10% similar a la ratio comúnmente encontrada en otras galaxias. Cabe destacar que con el resultado excesivamente alto de masa virial calculado por Kam, Carignan [1], la ratio de la masa bariónica versus masa virial quedaba reducida a un extraño 2%.

Esos valores similares entre la masa virial obtenida por la teoría DMbQG y por el método simplificado tipo NFW y esa ratio del 10% de la masa bariónica versus masa virial es incompatible con el valor excesivamente alto para la masa virial obtenido por Kam, Carignan [1] y con la ratio del 2% asociado a la masa bariónica respecto de la virial.

Los resultados de este trabajo hacen que la nueva teoría DMbQG merezca ser puesta a prueba en otras galaxias donde la ratio de la masa bariónica es inusualmente baja usando los métodos convencionales de cálculo de masas viriales.

Bibliografía

[1] Kam,S.Z.,Carignan,C. Chemin,L. et al.2017. *HI KINEMATICS AND MASS DISTRIBUTION OF MESSIER 33* The Astronomical Journal, 154:41 (18pp), 2017 August https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa79f3

[2] E. López Fune , P. Salucci , E. Corbelli.2017. *Radial dependence of the dark matter distribution in M33. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 468, Issue 1, June 2017, Pages 147–153, https://doi.org/10.1093/mnras/stx429

[3] Abarca,M.2025. *Equivalence between Direct Mass and NFW-Total Mass Formula in MW and M31 Galaxies.* Journal of High Energy Physics, Gravitation and Cosmology. Vol.11 No.3, July 2025. https://doi.org/10.4236/jhepgc.2025.113073

[4]Abarca,M.2025. *A Dark Matter Theory by Quantum Gravitation for Galaxies and Clusters.* Journal of High Energy Physics, Gravitation and Cosmology.Vol.10 No.4, October 2024. https://doi.org/10.4236/jhepgc.2024.104100

[5]Abarca,M.2024.*Solving the Conundrum of Dark Matter and Dark Energy in Galaxy Clusters.* Journal of High Energy Physics, Gravitation and Cosmology > Vol.10 No.4, October 2024. https://doi.org/10.4236/jhepgc.2024.104101

[6] Abarca, M.2026. *The NFW DM Profile is Compatible with the Decaying Law of Velocity With - 0.25 as Power of Radius.* viXra: 2508.0153