

CONJECTURE DE GONTCHAROV EN v -ADIQUE

DAVID ADAM ET GUILLAUME ESTIENNE

RÉSUMÉ. Chang a introduit les polylogarithmes multiples de Carlitz (PLMC), généralisant en caractéristique positive les polylogarithmes de Carlitz d'Anderson et Thakur, et a établi un résultat d'indépendance linéaire de leurs valeurs algébriques ∞ -adiques, dont découle l'analogie pour les corps de fonctions de la conjecture de somme directe de Goncharov pour les valeurs zêta multiples (MZV). Chen a montré l'analogie de ce résultat dans le cadre v -adique, sous l'hypothèse que la place v est de degré un. Le but de cet article est de montrer que le résultat de Chen est valide pour toute place finie.

1. INTRODUCTION

1.1. Contexte. Soit $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments, q une puissance d'un nombre premier p , $A := \mathbb{F}_q[T]$ l'anneau des polynômes en T et $k := \mathbb{F}_q(T)$ son corps des fractions. On munit k de la valeur absolue ∞ -adique $|\cdot|_\infty$, normalisée par $|f/g|_\infty = q^{\deg_T(f) - \deg_T(g)}$ pour $f, g \in A \setminus \{0\}$, et l'on note k_∞ le complété correspondant, $\mathbb{C}_\infty$ le complété d'une clôture algébrique fixée $\bar{k}_\infty$, et $\bar{k} \subset \mathbb{C}_\infty$ la clôture algébrique de k .

Dans ce cadre des corps de fonctions globaux de caractéristique positive, Chang [4] a introduit les *polylogarithmes multiples de Carlitz* (PLMC), généralisant les *polylogarithmes de Carlitz* d'Anderson et Thakur [2]. Pour un indice $\mathfrak{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r$, en posant $L_0 := 1$ et $L_i := (T - T^q) \cdots (T - T^{q^i})$ pour $i \geq 1$, le PLMC d'indice $\mathfrak{s}$ est la série

$$\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(z_1, \dots, z_r) := \sum_{i_1 > \dots > i_r \geq 0} \frac{z_1^{q^{i_1}} \cdots z_r^{q^{i_r}}}{L_{i_1}^{s_1} \cdots L_{i_r}^{s_r}} \in k[[z_1, \dots, z_r]],$$

dont le *poids* et la *profondeur* sont $\mathrm{pds}(\mathfrak{s}) := s_1 + \dots + s_r$ et $\mathrm{pro}(\mathfrak{s}) := r$. Le cas $r = 1$, $\mathfrak{s} = (1)$, redonne le *logarithme de Carlitz* $\log_C$, étudié par Carlitz dès [3]. La série $\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}$ converge ∞ -adiquement sur $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}, \infty} = \{(z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{C}_\infty^r : |z_i|_\infty < q^{s_i q / (q-1)}\}$ [4, Rem. 5.1.4].

Soit $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}_w$, $w \geq 1$) le k -espace vectoriel engendré par 1 et les $\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in (\bar{k}^\times)^r \cap \mathcal{D}_{\mathfrak{s}, \infty}$ (resp. de poids $\mathrm{pds}(\mathfrak{s}) = w$). Les relations de mélange font de $\mathcal{L}$ une k -algèbre graduée, avec $\mathcal{L}_{w_1} \mathcal{L}_{w_2} \subset \mathcal{L}_{w_1+w_2}$ [4, Section 5.2]. Chang a alors établi le résultat d'indépendance linéaire suivant, aux points algébriques.

Théorème 1 ([4, Thm. 5.4.3]). *Soit $\bar{\mathcal{L}}$ la $\bar{k}$ -algèbre engendrée par les $\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in (\bar{k}^\times)^r \cap \mathcal{D}_{\mathfrak{s}, \infty}$, et $\bar{\mathcal{L}}_w$ ($w \geq 1$) le $\bar{k}$ -espace vectoriel engendré par ceux de poids w . Alors :*

- (1) $\bar{\mathcal{L}} = \bar{k} \oplus (\oplus_{w \geq 1} \bar{\mathcal{L}}_w)$ est une $\bar{k}$ -algèbre graduée ;
- (2) l'application canonique $\bar{k} \otimes_k \mathcal{L} \rightarrow \bar{\mathcal{L}}$ est bijective.

Dasn [13], Thakur définit les *valeurs zêta multiples* (MZV) ∞ -adiques de manière suivante :

$$\zeta_A(\mathfrak{s}) := \sum \frac{1}{a_1^{s_1} \cdots a_r^{s_r}} \in k_\infty,$$

où $(a_1, \dots, a_r) \in A^r$ parcourt les r -uplets unitaires à degrés strictement décroissants, généralisant les valeurs zêta de Carlitz [3]. Thakur a montré leur non-nullité [14] et l'existence d'une structure de k -algèbre via les relations de somme-mélange [15], avec $\mathcal{L}_{w_1} \mathcal{L}_{w_2} \subset \mathcal{L}_{w_1+w_2}$. Chang [4] a par ailleurs établi une formule exprimant ces MZV ∞ -adiques à l'aide des PLMC évalués en des points entiers de A ; combinée au Théorème 1, cette formule entraîne l'analogie suivant, pour les corps de fonctions, de la conjecture de somme directe de Goncharov [10] :

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11J81, 11T55.
Key words and phrases. Transcendance, caractéristique finie.

Théorème 2 ([4, Thm. 2.2.1]). *Soit $\overline{\mathcal{Z}}$ la $\overline{k}$ -algèbre engendrée par toutes les MZV ∞ -adiques et $\overline{\mathcal{Z}}_w$ ($w \geq 1$) le $\overline{k}$ -espace vectoriel engendré par celles de poids w . Alors :*

- (1) $\overline{\mathcal{Z}} = \overline{k} \oplus (\oplus_{w \geq 1} \overline{\mathcal{Z}}_w)$ est une $\overline{k}$ -algèbre graduée ;
- (2) l'application canonique $\overline{k} \otimes_k \mathcal{Z} \rightarrow \overline{\mathcal{Z}}$ est bijective.

1.2. Analogue v -adique. Désormais, on fixe un polynôme irréductible unitaire $\varpi_v \in A$, de degré d_0 , correspondant à une place finie v de k . On note $|\cdot|_v$ la norme v -adique sur k , normalisée par $|\varpi_v|_v = q^{-d_0}$. Soit k_v le complété de k pour cette norme, et $\mathbb{C}_v$ le complété d'une clôture algébrique de k_v . On fixe enfin, une fois pour toutes, un plongement de $\overline{k}$ dans $\mathbb{C}_v$. On note v la valuation de $\mathbb{C}_v$ normalisée par $v(\varpi_v) = 1$.

Notée $\text{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{u})_v$, la même série, vue comme fonction v -adique, converge sur

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{s},v} := \{(z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{C}_v^r : |z_1|_v < 1, |z_\ell|_v \leq 1 \ (2 \leq \ell \leq r)\}$$

([5, Sec. 2.2]). On définit de même $\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_{v,w} \subset \mathbb{C}_v$, sur lesquels les relations de mélange induisent à nouveau une structure de k -algèbre graduée, $\mathcal{L}_{v,w_1} \mathcal{L}_{v,w_2} \subset \mathcal{L}_{v,w_1+w_2}$ [4, Section 5.2], [6, Prop. 2.2.3].

L'analogue v -adique du Théorème 1 a été établi par Chen [7], mais sous la restriction que la place v est de degré un. Cette hypothèse, technique, intervient dans leur méthode de manière essentielle et laisse ouvert le cas d'une place de degré supérieur.

L'objet de cet article est de lever cette contrainte de degré un, et d'établir l'énoncé suivant pour toute place finie v de k , sans restriction sur son degré.

Théorème 3. *Soit $\overline{\mathcal{L}}_v$ la $\overline{k}$ -algèbre engendrée par les $\text{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{u})_v$, $\mathbf{u} \in (\overline{k}^\times)^r \cap \mathcal{D}_{\mathfrak{s},v}$, et $\overline{\mathcal{L}}_{v,w}$ ($w \geq 1$) le $\overline{k}$ -espace vectoriel engendré par ceux de poids w . Alors, pour toute place finie v :*

- (1) $\overline{\mathcal{L}}_v = \overline{k} \oplus (\oplus_{w \geq 1} \overline{\mathcal{L}}_{v,w})$ est une $\overline{k}$ -algèbre graduée ;
- (2) l'application canonique $\overline{k} \otimes_k \mathcal{L}_v \rightarrow \overline{\mathcal{L}}_v$ est bijective.

On en tire immédiatement :

Corollaire 4. *Pour tout indice $\mathfrak{s} \in \mathbb{Z}_{>0}^r$, tout $\mathbf{u} \in (\overline{k}^\times)^r \cap \mathcal{D}_{\mathfrak{s},v}$ et toute place finie v , $\text{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{u})_v$ est soit nul, soit transcendant sur k .*

Chang et Mishiba [5] ont aussi introduit la notion de polylogarithmes multiples de Carlitz étoilés (*PLMCE*) et ont montré comment la formule exprimant un MZV ∞ -adique en fonction de valeurs de *PLMCE* peut s'interpréter v -adiquement, permettant de construire des MZV v -adiques à la Furusho. Munis, comme dans le cas ∞ -adique, d'une structure de k -algèbre graduée via les relations de somme-mélange [6], les $\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_{v,w}$ vérifient l'analogue suivant, pour toute place finie v sans restriction de degré, du Théorème 2 de Chang pour les MZV ∞ -adiques :

Théorème 5. *Soit $\overline{\mathcal{Z}}_v$ la $\overline{k}$ -algèbre engendrée par toutes les MZV v -adiques et $\overline{\mathcal{Z}}_{v,w}$ ($w \geq 1$) le $\overline{k}$ -espace vectoriel engendré par celles de poids w . Alors, pour toute place finie v :*

- (1) $\overline{\mathcal{Z}}_v = \overline{k} \oplus (\oplus_{w \geq 1} \overline{\mathcal{Z}}_{v,w})$ est une $\overline{k}$ -algèbre graduée ;
- (2) l'application canonique $\overline{k} \otimes_k \mathcal{Z}_v \rightarrow \overline{\mathcal{Z}}_v$ est bijective.

En particulier, en profondeur $r = 1$: Goss [11] avait montré $\zeta_A(s)_v = 0$ pour s q -pair (i.e. $(q-1) \mid s$), et Yu [16] la transcendance de $\zeta_A(s)_v$ sur k pour s q -impair — pour v de degré un. Le Théorème 5 en fournit la généralisation, en profondeur quelconque :

Corollaire 6. *Pour tout indice $\mathfrak{s} \in \mathbb{Z}_{>0}^r$ et toute place finie v , $\zeta_A(\mathfrak{s})_v$ est soit nul, soit transcendant sur k .*

Contrairement aux travaux de Chang et Chen, la méthode utilisée dans cet article est basée sur une généralisation de la remarquable observation de L. Denis [8] que les valeurs spéciales du logarithme de Carlitz sont des valeurs mahlériennes. Fernandes a montré [9] un théorème de pureté pour les systèmes mahlériens qui en substance établit le fait que les relations algébriques de valeurs mahlériennes découlent d'une spécialisation d'une relation similaire sur les fonctions. Cependant, le théorème de Fernandes requiert

l'hypothèse de régularité d'une certaine extension de corps de fonctions. Pour éviter cet écueil, nous prouvons ici une version affaiblie du ce théorème mais sans l'hypothèse de régularité. Cela est suffisant pour la situation que l'on considère.

2. UN THÉORÈME DE PURETÉ

Soit $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de $k\{z\}$ analytiques sur $\mathcal{D}$, $L = k(z)(f_1, \dots, f_n)$, K la clôture algébrique de $k(z)$ dans L et A_K la clôture intégrale de $k[z]$ dans K .

Puisque L est de type fini sur $k(z)$, K l'est aussi. L'extension $K/k(z)$ est donc de degré fini. Il existe des fonctions $\omega_1, \dots, \omega_h$ algébriques sur $k(z)$ qui engendrent A_K en tant que $k[z]$ -algèbre. L'ensemble U des pôles U des fonctions $\omega_1, \dots, \omega_h$ dans $\mathcal{D}$ est fini. Une fonction F de A_K peut être ainsi évaluée en tout point a de $\mathcal{D} \setminus U$. On note ev_a ce morphisme d'évaluation. On pose

$$\mathfrak{P} = \{Q(z, X_1, \dots, X_n) \in K[X_1, \dots, X_n] \mid Q(f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0\}$$

et

$$\mathfrak{P}_a = \{P(X_1, \dots, X_n) \in \bar{k}[X_1, \dots, X_n] \mid P(f_1(a), \dots, f_n(a)) = 0\}.$$

L'homogénéisé de $\mathfrak{P}$ dans $K[X_0, \dots, X_n]$ est noté $\tilde{\mathfrak{P}}$.

Proposition 7. *Soit T un ensemble infini de $\mathcal{D} \setminus U$. Pour tout idéal absolument premier $\mathfrak{P}$ de $A_K[X_1, \dots, X_n]$, il existe un sous-ensemble fini T_0 de T tel que pour tout $a \in T \setminus T_0$ l'idéal $\mathfrak{P}_a = \text{ev}_a(\mathfrak{P})$ est absolument premier dans $k[X_1, \dots, X_n]$ et de même hauteur que $\mathfrak{P}$.*

Démonstration. On considère le schéma affine $S = \text{Spec}(A_K)$, $\eta = (0)$ son point générique. On définit le morphisme :

$$f : X = \text{Spec}(R/\mathfrak{P}) \longrightarrow S$$

où $R = A_K[X_1, \dots, X_n]$. Comme A_K est noethérien, $R/\mathfrak{P}$ est de présentation finie et f aussi. Par hypothèse, $\mathfrak{P}$ est un idéal absolument premier. Cela signifie que la fibre générique

$$X_\eta = X \times_S \text{Spec}(K) = \text{Spec}(R/\mathfrak{P} \otimes_{A_K} K)$$

est géométriquement intègre sur K . D'après [12, EGA IV, Lemme 9.7.7], l'ensemble :

$$E = \{s \in S \mid X_s \text{ est géométriquement intègre}\}$$

est un sous-ensemble constructible de S . Le schéma S est irréductible puisque intègre. Comme $\eta \in E$, E n'est pas rare et par [12, EGA III_1 0.9.2.3], E contient un ouvert qui est dense $\tilde{U}$ dans S par irréductibilité. Ainsi, $S \setminus \tilde{U}$ est un fermé propre. Puisque S est noethérien de dimension 1, $S \setminus \tilde{U}$ est un ensemble fini et $S \setminus E$ l'est aussi. Soit Θ une bijection de $\text{Hom}_{\bar{k}\text{-al}}(A_K, \bar{k})$ sur les points fermés de S [12, EGA Introduction] et t l'image par Θ du morphisme ev_a . La fibre X_t au dessus de t a pour anneau $(R/\mathfrak{P}) \otimes_{A_K} \kappa_t$ où κ_t est le corps résiduel de t . Comme $\bar{k}$ est algébriquement clos, par le Nullstellensatz, $\kappa_t \simeq \bar{k}$. Puisque $(R/\mathfrak{P}) \otimes_{A_K} \kappa_t \simeq \bar{k}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{P}_a$, si t est dans E , alors $\bar{k}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{P}_a$ est intègre et donc $\mathfrak{P}_a$ est absolument premier. Par [12, EGA IV_3, (6.9.1)], il existe un ouvert dense V de S tel que la restriction $f_V : f^{-1}(V) \rightarrow V$ soit un morphisme plat. Par intégrité de S , V est connexe. Notons ξ le point générique de X et d la dimension de X_ξ . Par [12, EGA IV_3 12.1.1 (ii)], l'ensemble $W_d = \{x \in X_V \mid \dim_x(X_{f(x)}) = d\}$ est un ouvert de X_V , non vide car contenant ξ . Le morphisme f étant plat de présentation finie, l'application f est ouverte [12, EGA IV_2, 2.4.6]. Donc $\tilde{V} = f(W_d)$ est un ouvert de S , dense dans S car $\eta \in \tilde{V}$. L'application $s \mapsto \dim(X_s)$ est constante sur $\tilde{V}$ puisqu'elle y est localement constante (toujours par [12, EGA IV_3 12.1.1]) et $\tilde{V}$ est un ouvert connexe (car S est irréductible). Ainsi, $\dim(X_s) = d$ pour tout $s \in \tilde{V}$. Comme $\dim(X_s) = \dim(X_\eta)$ et que

$$\dim(X_s) = \dim(\bar{k}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{P}_a) = n - \text{ht}(\mathfrak{P}_a)$$

et

$$\dim(X_\eta) = \dim(K[X_1, \dots, X_n]/(\mathfrak{P}K[X_1, \dots, X_n])) = n - \text{ht}(\mathfrak{P}K[X_1, \dots, X_n]),$$

on obtient que

$$\text{ht}(\mathfrak{P}_a) = \text{ht}(\mathfrak{P}K[X_1, \dots, X_n]).$$

On a $\mathfrak{P} \cap A_K = \{0\}$ car $\mathfrak{P}$ est absolument premier dans $A_K[X_1, \dots, X_n]$. Par localisation de R par la partie multiplicative $A_K \setminus \{0\}$, on obtient que

$$\text{ht}(\mathfrak{P}K[X_1, \dots, X_n]) = \text{ht}(\mathfrak{P}).$$

L'ensemble $\tilde{W} = \tilde{U} \cap \tilde{V}$ est un ouvert dense de S et pour tout $a \in \Theta^{-1}(\tilde{W})$, $\text{ev}_a(\mathfrak{P})$ est un idéal absolument premier de $\bar{k}[X_1, \dots, X_n]$ de même hauteur que celle de $\mathfrak{P}$. Comme $S \setminus \tilde{W}$ est fini, l'ensemble $T_0 = \{a \in T \mid \Theta(\text{ev}_a) \in S \setminus \tilde{W}\}$ l'est aussi. $\square$

Proposition 8. *On suppose qu'il existe un ensemble $S \subseteq \mathcal{D} \cap k$ tel que, pour tout $\alpha \in S$, nous avons*

$$\text{degtr}_k\{f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)\} = \text{degtr}_{k(z)}\{f_1(z), \dots, f_n(z)\}.$$

Alors, il existe un ensemble fini $S' \subseteq S$ tel que pour tout $\alpha \in S \setminus S'$ et pour tout polynôme $P(X_1, \dots, X_n) \in \bar{k}[X_1, \dots, X_n]$ de degré total N en $X_1, \dots, X_n$ tel que

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0,$$

Soit $s_1, \dots, s_{k_n}$ des entiers naturels distincts non nuls.

il existe un polynôme $Q(z, X_1, \dots, X_n) \in A_K[X_1, \dots, X_n]$ de degré total N en $X_1, \dots, X_n$ tel que

$$Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0$$

et

$$Q(\alpha, X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n).$$

Démonstration. Tout d'abord, notons que la conclusion de la Proposition 2.1 est équivalente à

$$\text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}} \cap A_K[X_0, \dots, X_n]) = \tilde{\mathfrak{P}}_\alpha,$$

pour tous les $\alpha \in S$ sauf un nombre fini d'entre eux.

Ainsi, prouver la Proposition 2.1 revient à prouver que $\text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}} \cap A_K[X_0, \dots, X_n])$ est un idéal premier de même hauteur que $\tilde{\mathfrak{P}}_\alpha$ pour tout $\alpha \in S$ sauf au plus un nombre fini. On a :

$$\begin{aligned} \text{degtr}_{k(z)}\{f_1(z), \dots, f_n(z)\} &= \text{degtr}_K\{f_1(z), \dots, f_n(z)\} \\ &= \dim(K[f_1(z), \dots, f_n(z)]) \\ &= \dim(K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{P}) \\ &= \dim(K[X_1, \dots, X_n]) - \text{ht}(\mathfrak{P}) \\ &= \dim(K[X_0, \dots, X_n]) - \text{ht}(\tilde{\mathfrak{P}}) - 1. \end{aligned}$$

Pour $\alpha \in S$, on a de même :

$$\text{degtr}_k\{f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)\} = \dim(k[X_0, \dots, X_n]) - \text{ht}(\tilde{\mathfrak{P}}_\alpha) - 1.$$

ce qui implique que $\text{ht}(\tilde{\mathfrak{P}}) = \text{ht}(\tilde{\mathfrak{P}}_\alpha)$. On conclut avec la Proposition 7. $\square$

Soit $\alpha \in \bar{k} \cap \mathcal{D}$ et pour tout $1 \leq i, j \leq n$ notons $g_{i,j}$ une fonction analytique sur $\mathcal{D}$ algébrique sur $k(z)$. On vérifie facilement que pour tout $(i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket \times \mathbb{N}$, $g_{i,j}(a^{q^k})$ appartient à $\bar{k}$ et qu'il existe un réel $\mathfrak{c}$ tel que pour tout $(i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket \times \mathbb{N}$, on ait

$$t(g_{i,j}(a^{q^k})) \leq \mathfrak{c}q^k. \quad (1)$$

Notons $A(z)$ la matrice

$$A(z) = (g_{i,j}(z))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Soit $f_1, \dots, f_n$ des fonctiona analytiques syr $\mathcal{D}$ solution du sytème d'équations fonctionnelles

$$\begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ f_2(z^q) \\ \vdots \\ f_n(z^q) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}.$$

On a le

Corollaire 9. *Il existe ρ avec $0 < \rho < 1$ tel que pour tout $\alpha \in K$, $0 < |a| < \rho$, et pour tout polynôme $P(X_1, \dots, X_n) \in K[X_1, \dots, X_n]$ de degré total N en $X_1, \dots, X_n$ tel que*

$$P(f_1(a), \dots, f_n(a)) = 0,$$

il existe un polynôme $Q(z, X_1, \dots, X_n) \in A_K[X_1, \dots, X_n]$ de degré total N en $X_1, \dots, X_n$ tel que

$$Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0$$

et

$$Q(\alpha, X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la Proposition 7, de l'estimation 1 et de [1, Corollaire 6]. $\square$

3. FONCTIONS PLMC ET SYSTÈMES DE MAHLER

Pour un réel ρ , on note $\mathcal{D}_{v,\rho}$ le disque

$$\mathcal{D}_{v,\rho} = \{z \in \mathbb{C}_v \mid v(z) > \rho\}$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, h \rrbracket$, soit $\mathfrak{s}_i = (s_{i,1}, \dots, s_{i,i_r}) \in (\mathbb{N}^*)^r$, $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,i_r}$ des éléments non nuls de $\bar{k}$ de valuation positive. On suppose que $v(\alpha_{i,1}) > 0$. Il existe un entier naturel non nul d , $\tilde{\alpha} \in \mathbb{C}_v$ racine de $X^{q^d} - X$ et un élément u de $\bar{k}$ de valuation strictement positive tel que l'ensemble $\{T, \alpha_{i,j} \mid 1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq i_r\}$ est inclus dans $\mathbb{F}_q(\tilde{\alpha})[[u]]$ (voir [1]). On note α l'unique élément de $\mathbb{F}_q(\tilde{\alpha})$ tel que $v(T - \alpha) = 1$. Puisque $\mathbb{F}_q(\alpha)$ est l'unique sous-corps de $\mathbb{C}_v$ de cardinal q^d , on le notera $\mathbb{F}_{q^d}$.

Ecrivons $T - \alpha = \ell(y)$ et $\alpha_{j,i} = \ell_{i,j}(u)$ où $\ell(Z)$ et les $\ell_{i,j}(Z)$ sont des séries formelles non nulles de $\mathbb{F}_{q^d}[[Z]]$ algébrique sur $\mathbb{F}_{q^d}(Z)$. Notions $u_1 = u, \dots, u_m$ les solutions dans $\mathbb{C}_v$ de l'équation $\ell(z) = T - \alpha$. On pose

$$E_\ell = \mathcal{D}_{v,0} \setminus \{ \sqrt[q^l]{u_1}, \dots, \sqrt[q^l]{u_m} \mid l \in \mathbb{N}^* \}.$$

Soit $r \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{s} = (s_1, \dots, s_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ et $\ell_1, \dots, \ell_r \in \mathbb{F}_{q^d}[[Z]]$ des séries non nulles algébriques sur $\mathbb{F}_{q^d}(Z)$. Pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$, on pose

$$\mathcal{L}_s^{(r)}(z; m) = \sum_{y_1 > \dots > y_r > m} \frac{\ell_1^{q^{y_1}}(z) \cdots \ell_r^{q^{y_r}}(z)}{\mathbb{L}_{y_1}^{s_1}(z) \cdots \mathbb{L}_{y_r}^{s_r}(z)},$$

avec la convention $\mathcal{L}^{(0)}(z; m) = 1$ pour tout m .

Lemme 10. *Pour tout $r, \mathfrak{s}, \ell_1, \dots, \ell_r$ comme ci-dessus et tout $m \geq -1$, la série $\mathcal{L}_s^{(r)}(z; m)$ définit une fonction analytique sur $\mathcal{D}_{v,1}$.*

Démonstration. On a pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, $v(\ell^{q^l}(z)) > v(-T + \alpha^{q^l})$, d'où pour tout $z \in \mathcal{D}_{v,1}$, $v(\mathbb{L}_n(z)) = [n/d]v(T - \alpha)$. Par conséquent, pour $y_1 > \dots > y_r > m$,

$$v\left(\frac{\ell_1^{q^{y_1}}(z) \cdots \ell_r^{q^{y_r}}(z)}{\mathbb{L}_{y_1}^{s_1}(z) \cdots \mathbb{L}_{y_r}^{s_r}(z)}\right) \geq q^{y_1}v(T - \alpha) - \sum_{k=1}^r s_k[y_k/d]v(T - \alpha)$$

qui tend vers $+\infty$ quand $y_1 \rightarrow +\infty$, uniformément en m borné. La série converge donc uniformément sur $\mathcal{D}_{v,1}$, quel que soit $m \geq -1$. $\square$

Lemme 11. *Pour tout $i \in \llbracket 1, h \rrbracket$, la série $\mathcal{L}_s^{(r)}(z; m)$ converge sur E_ℓ .*

Démonstration. Soit $z \in E_\ell$ et n un entier naturel. Puisque $v(l(z)) > 0$, la suite $(v(\ell^{q^l}(z)))_{l \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Soit l_0 le plus petit entier tel que $v(\ell^{q^{l_0}}(z)) > v(T - \alpha)$. En posant $\mathfrak{c}_z = v(\prod_{l=1}^{l_0} (\ell^{q^l}(z) - T + \alpha^{q^l}) - [l_0/d]v(T - \alpha))$, on obtient que

$$v(\mathbb{L}_n(z)) = [n/d]v(T - \alpha) + \mathfrak{c}_z.$$

Ainsi,

$$v\left(\frac{\ell_{i,1}^{q^{y_1}}(z) \cdots \ell_{i,i_r}^{q^{y_{i_r}}}(z)}{\mathbb{L}_{y_1}^{s_{i,1}}(z) \cdots \mathbb{L}_{y_{i_r}}^{s_{i,i_r}}(z)}\right) \geq q^{y_1}v(z) - \sum_{j=1}^{i_r} s_{i,j}([y_j/d]v(T - \alpha) + \mathfrak{c}_z)$$

qui tend vers $+\infty$ quand y_1 tend vers $+\infty$. $\square$

Proposition 12. Soit $r \geq 1$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$, et $m_1 \geq m_0 \geq -1$ deux entiers. Alors, pour tout $z \in E_\ell$, on a

$$\mathcal{L}_{\mathbf{s}}^{(r)}(z; m_0) = \mathcal{L}_{\mathbf{s}}^{(r)}(z; m_1) + \sum_{y_r=m_0+1}^{m_1} \frac{\ell_r^{q^{y_r}}(z)}{\mathbb{L}_{y_r}^{s_r}(z)} \mathcal{L}_{(s_1, \dots, s_{r-1})}^{(r-1)}(z; y_r).$$

Démonstration. On a l'égalité

$$\mathcal{L}_{\mathbf{s}}^{(r)}(z; m_0) = \sum_{y_r=m_0+1}^{m_1} \frac{\ell_r^{q^{y_r}}(z)}{\mathbb{L}_{y_r}^{s_r}(z)} \sum_{y_1 > \dots > y_{r-1} > y_r} \frac{\ell_1^{q^{y_1}}(z) \dots \ell_{r-1}^{q^{y_{r-1}}}(z)}{\mathbb{L}_{y_1}^{s_1}(z) \dots \mathbb{L}_{y_{r-1}}^{s_{r-1}}(z)} + \sum_{\substack{y_1 > \dots > y_r \\ y_r > m_1}} \frac{\ell_1^{q^{y_1}}(z) \dots \ell_r^{q^{y_r}}(z)}{\mathbb{L}_{y_1}^{s_1}(z) \dots \mathbb{L}_{y_r}^{s_r}(z)}.$$

qui est juste celle de la proposition. $\square$

Proposition 13. Soit $r \geq 0$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ et $m \geq -1$. Alors, pour tout $z \in E_\ell$,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{s}}^{(r)}(z^{q^d}; m) = \mathbb{L}_d(z)^{\text{pds}(\mathbf{s})} \mathcal{L}_{\mathbf{s}}^{(r)}(z; m+d).$$

Démonstration. On a, pour $y_1 > \dots > y_r > m$,

$$\frac{\prod_k \ell_k^{q^{y_k}}(z^{q^d})}{\prod_k \mathbb{L}_{y_k}^{s_k}(z^{q^d})} = \frac{\prod_k \ell_k^{q^{y_k+d}}(z)}{\prod_k (\mathbb{L}_{y_k+d}(z)/\mathbb{L}_d(z))^{s_k}} = \mathbb{L}_d(z)^{\text{pds}(\mathbf{s})} \frac{\prod_k \ell_k^{q^{y_k+d}}(z)}{\prod_k \mathbb{L}_{y_k+d}^{s_k}(z)}.$$

On obtient donc

$$\mathcal{L}_{\mathbf{s}}^{(r)}(z^{q^d}; m) = \mathbb{L}_d(z)^{\text{pds}(\mathbf{s})} \sum_{y_1 > \dots > y_r > m+d} \frac{\prod_k \ell_k^{q^{y_k}}(z)}{\prod_k \mathbb{L}_{y_k}^{s_k}(z)} = \mathbb{L}_d(z)^{\text{pds}(\mathbf{s})} \mathcal{L}_{\mathbf{s}}^{(r)}(z; m+d). \quad \square$$

Lemme 14. Pour tout $(i, l) \in \llbracket 1, h \rrbracket \times \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $m' \geq m$, on a

$$\lim_{z \rightarrow q^{ld}\sqrt{u}} \mathbb{L}_{ld+m'}^{\text{pds}(\mathbf{s})}(z) \mathcal{L}_{\mathbf{s}}^{(r)}(z; m) = L_{m'}^{\text{pds}(\mathbf{s})} \sum_{y_1 > \dots > y_r > m} \frac{\ell_1^{q^{y_1}}(u) \dots \ell_r^{q^{y_r}}(u)}{L_{y_1}^{s_1} \dots L_{y_r}^{s_r}},.$$

Démonstration. On a pour tout $z \in E_\ell$ tel que $\mathbf{v}(z) \geq q^{-ld}\mathbf{v}(u)$:

$$\frac{\mathbb{L}_{ld+m'}^{\text{pds}(\mathbf{s})}(z)}{\mathbb{L}_{y_1}^{s_1}(z) \dots \mathbb{L}_{y_r}^{s_r}(z)} = \prod_{k=1}^r \prod_{j=ld+m'+1}^{y_j} \frac{1}{(\ell^{q^l}(z) - T + \alpha^{q^l})^{s_k}}$$

La fonction $\frac{\mathbb{L}_{ld+m'}^{s_i}(z)}{\mathbb{L}_{y_1}^{s_1}(z) \dots \mathbb{L}_{y_r}^{s_r}(z)}$ est donc prolongeable par continuité sur $\mathcal{D}_{q^{-ld}\mathbf{v}(u)}$ (le prolongement est noté pareillement). Il vient que pour tout $z \in \mathcal{D}_{q^{-ld}\mathbf{v}(u)}$

$$\mathbf{v} \left(\frac{\mathbb{L}_{ld+m'}^{s_i}(z) \ell_1^{q^{y_1}}(z) \dots \ell_r^{q^{y_r}}(z)}{\mathbb{L}_{y_1}^{s_1}(z) \dots \mathbb{L}_{y_r}^{s_r}(z)} \right) \geq q^{y_1} r - \sum_{j=1}^r y_j s_{i,j}.$$

On en déduit que les séries

$$\sum_{y_1 > \dots > y_r \geq ld+m} \mathbb{L}_{ld+m'}^{s_i}(z) \frac{\ell_1^{q^{y_1}}(z) \dots \ell_r^{q^{y_r}}(z)}{\mathbb{L}_{y_1}^{s_1}(z) \dots \mathbb{L}_{y_r}^{s_r}(z)} \text{ et } \sum_{\substack{y_1 > \dots > y_r \\ ld+m > y_{i_r} > m}} \mathbb{L}_{ld+m'}^{s_i}(z) \frac{\ell_1^{q^{y_1}}(z) \dots \ell_r^{q^{y_r}}(z)}{\mathbb{L}_{y_1}^{s_1}(z) \dots \mathbb{L}_{y_r}^{s_r}(z)}.$$

convergent uniformément sur $\mathcal{D}_{r,v}$. Soit $(y_1, \dots, y_r) \in \mathbb{N}^r$ avec $y_1 > \dots > y_r$. On a

$$\lim_{z \rightarrow q^{ld}\sqrt{u}} \mathbb{L}_{ld+m'}^{s_i}(z) \frac{\ell_1^{q^{y_1}}(z) \dots \ell_r^{q^{y_r}}(z)}{\mathbb{L}_{y_1}^{s_1}(z) \dots \mathbb{L}_{y_r}^{s_r}(z)} = \begin{cases} 0 & \text{si } y_r < ld+m \\ \prod_{k=1}^r \frac{\ell_k^{q^{y_k}}(q^{ld}\sqrt{u})}{\prod_{j=ld+m'+1}^{y_k} (u^{q^{j-ld}} - T + \alpha^{q^j})^{s_k}} & \text{si } y_r \geq ld+m. \end{cases}$$

Comme

$$\prod_{k=1}^r \frac{\ell_k^{q^{y_k}}(q^{ld}\sqrt{u})}{\prod_{j=ld+m'+1}^{y_k} (u^{q^{j-ld}} - T + \alpha^{q^j})^{s_k}} = \prod_{k=1}^r \mathbb{L}_{m'}^{s_k}(u) \frac{\ell_k^{q^{y_k-ld}}(u)}{\mathbb{L}_{y_k-ld}^{s_k}(u)},$$

les changements d'indices $y_k \longleftrightarrow y_k - ld$ conclut la preuve du lemme. $\square$

On fixe $i \in \llbracket 1, h \rrbracket$ et on allège les notations : $r = i_r$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_i = (s_1, \dots, s_r)$, $\ell_k = \ell_{i,k}$ pour $1 \leq k \leq r$. Pour $0 \leq j \leq r$, on note

$$\mathfrak{s}^{(j)} = (s_1, \dots, s_j)$$

le préfixe de longueur j de $\mathfrak{s}$ (avec la convention $\mathfrak{s}^{(0)} = \emptyset$). En particulier $\mathfrak{s}^{(r)} = \mathfrak{s}$ et $\text{pds}(\mathfrak{s}^{(r)}) = \text{pds}(\mathfrak{s})$. Pour $1 \leq j \leq r$, on pose

$$M_j = \{(r-j)-1, (r-j), \dots, (r-j)d-1\} \subset \mathbb{Z}_{\geq -1}.$$

En particulier $M_r = \{-1\}$. Soit I l'ensemble

$$I = \{(j, m) : 1 \leq j \leq r, m \in M_j\} \sqcup \{*\},$$

muni de l'ordre total $\preceq$ suivant : $*$ est le plus grand élément, et sur les couples on prend l'ordre lexicographique sur $(-j, m)$:

$$(j, m) \prec (j', m') \iff j > j' \text{ ou } (j = j' \text{ et } m < m').$$

On définit le vecteur $F(z) = (F_\iota(z))_{\iota \in I}$, indexé par I , en posant

$$F_{(j,m)}(z) = \mathcal{L}_{\mathfrak{s}^{(j)}}^{(j)}(z; m) \quad \text{et} \quad F_*(z) = 1.$$

Puisque $M_r = \{-1\}$, $(r, -1)$ est l'unique élément de I de profondeur r , et

$$F_{(r,-1)}(z) = \mathcal{L}_i(z).$$

Les Proposition 12 et Proposition 13 impliquent que $F(z)$ est solution du système mahlérien suivant : pour tout $z \in E_\ell$, on a

$$F(z^{q^d}) = A(z) F(z)$$

où $A(z)$ est la matrice

$(\mathbb{L}_d(z)^{\text{pds}(\mathfrak{s}^{(r)})} I_{ M_r })$	B_r	0	$\dots$	0	0
0	$\mathbb{L}_d(z)^{\text{pds}(\mathfrak{s}^{(r-1)})} I_{ M_{r-1} }$	B_{r-1}	$\ddots$		0
0	0	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
$\vdots$			$\mathbb{L}_d(z)^{\text{pds}(\mathfrak{s}^{(2)})} I_{ M_2 }$	B_2	0
0	$\dots$	$\dots$	0	$\mathbb{L}_d(z)^{\text{pds}(\mathfrak{s}^{(1)})} I_{ M_1 }$	B_1
0	$\dots$	$\dots$	$\dots$	0	1

où, pour $2 \leq j \leq r$, B_j est la matrice indexée par $M_j \times M_{j-1}$, de coefficients

$$(B_j)_{\mu, \nu} = \begin{cases} -\mathbb{L}_d(z)^{\text{pds}(\mathfrak{s}^{(j)})} \frac{\ell_j^{q^\nu}(z)}{\mathbb{L}_{\nu}^{s_j}(z)} & \text{si } \nu \in \{\mu+1, \dots, \mu+d\}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\mu \in M_j, \nu \in M_{j-1}),$$

et B_1 est le vecteur colonne indexé par M_1 , de coefficients

$$(B_1)_\mu = -\mathbb{L}_d(z)^{s_1} \sum_{\nu=\mu+1}^{\mu+d} \frac{\ell_1^{q^\nu}(z)}{\mathbb{L}_{\nu}^{s_1}(z)} \quad (\mu \in M_1).$$

Pour chaque i , notons $I^{(i)}$, $F^{(i)}(z)$, $A^{(i)}(z)$, $L^{(i)}$ les objets ci-dessus. Le vecteur

$$F(z) = (F^{(i)}(z))_{i \in \llbracket 1, h \rrbracket}, \quad \text{indexé par} \quad I := \bigsqcup_{i=1}^h I^{(i)},$$

vérifie $F(z^{q^d}) = A(z)F(z)$ avec $A(z) = \text{diag}(A^{(1)}(z), \dots, A^{(h)}(z))$ pour tout $z \in E_\ell$.

4. PREUVE DU THÉORÈME 3 ET DU COROLLAIRE 6

Commençons par remarquer que la preuve de Chen de la déduction du corollaire 6 à partir du théorème 3 dans le cas où la place v est de degré 1 ne dépend du degré de cette place. Cette preuve permet donc d'affirmer que le corollaire 6 est vrai sous réserve que le théorème 3 l'est.

Soient $w_1, \dots, w_l$ des entiers ≥ 1 deux à deux distincts, et pour chaque $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$, soit $v_i \in \overline{\mathcal{L}}_{v, w_i}$.

Par définition, $\overline{\mathcal{L}}_{v, w_i}$ est le $\bar{k}$ -espace vectoriel engendré par la famille $(\text{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{u}))_{(\mathfrak{s}, \mathbf{u}) \in \mathcal{G}_{w_i}}$, où

$$\mathcal{G}_{w_i} := \left\{ (\mathfrak{s}, \mathbf{u}) : r \geq 1, \mathfrak{s} \in (\mathbb{N}^*)^r, \text{pds}(\mathfrak{s}) = w_i, \mathbf{u} \in (\bar{k}^\times)^r \cap \mathcal{D}_{\mathfrak{s}, v} \right\}.$$

Il existe donc une partie finie $S_i \subset \mathcal{G}_{w_i}$ et des coefficients $(c_{\mathfrak{s}, \mathbf{u}})_{(\mathfrak{s}, \mathbf{u}) \in S_i} \in (\bar{k}^\times)^{S_i}$ tels que

$$v_i = \sum_{(\mathfrak{s}, \mathbf{u}) \in S_i} c_{\mathfrak{s}, \mathbf{u}} \text{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{u})_v.$$

On suppose que

$$v_1 + v_2 + \dots + v_l = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^l \sum_{(\mathfrak{s}, \mathbf{u}) \in S_i} c_{\mathfrak{s}, \mathbf{u}} \text{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{u})_v = 0.$$

Comme les poids $w_1, \dots, w_l$ sont deux à deux distincts et que $\text{pds}(\mathfrak{s}) = w_i$ pour tout $(\mathfrak{s}, \mathbf{u}) \in S_i$, les parties $S_1, \dots, S_l$ sont deux à deux disjointes. On peut donc poser

$$J := \bigcup_{i=1}^l S_i = \bigsqcup_{i=1}^l S_i, \quad H := |J| = \sum_{i=1}^l |S_i| < \infty,$$

et étendre la fonction poids en posant $w(\mathfrak{s}, \mathbf{u}) := \text{pds}(\mathfrak{s})$ pour $(\mathfrak{s}, \mathbf{u}) \in J$ (de sorte que $w(\mathfrak{s}, \mathbf{u}) = w_i$ si et seulement si $(\mathfrak{s}, \mathbf{u}) \in S_i$). Pour alléger l'écriture, on note désormais simplement $j = (\mathfrak{s}, \mathbf{u})$ un élément générique de J , et l'on pose

$$\mathfrak{s}_j := \mathfrak{s}, \quad \mathbf{u}_j := \mathbf{u} = (\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,r_j}) \in (\bar{k}^\times)^{r_j} \cap \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_j, v}, \quad c_j := c_{\mathfrak{s}, \mathbf{u}} \in \bar{k}^\times.$$

Avec ces notations,

$$v_i = \sum_{\substack{j \in J \\ w(j) = w_i}} c_j \text{Li}_{\mathfrak{s}_j}(\mathbf{u}_j)_v \quad (1 \leq i \leq l), \quad \text{et} \quad \sum_{j \in J} c_j \text{Li}_{\mathfrak{s}_j}(\mathbf{u}_j)_v = v_1 + \dots + v_l = 0.$$

On applique alors la construction de la section précédente à la famille finie $(\mathfrak{s}_j, \mathbf{u}_j)_{j \in J}$. On obtient ainsi :

- un entier naturel non nul d , un élément $\tilde{\alpha} \in \mathbb{C}_v$ racine de $X^{q^d} - X$, et un élément $u \in \bar{k}$ de valuation strictement positive, tels que

$$\{T\} \cup \{\alpha_{j,k} : j \in J, 1 \leq k \leq r_j\} \subset \mathbb{F}_q(\tilde{\alpha})[[u]]$$

(cf. [1]) ; on note α l'unique élément de $\mathbb{F}_q(\tilde{\alpha})$ tel que $v(T - \alpha) > 0$, et $\mathbb{F}_{q^d} = \mathbb{F}_q(\alpha)$;

- des séries formelles non nulles $\ell(Z)$, $(\ell_{j,k}(Z))_{j \in J, 1 \leq k \leq r_j} \in \mathbb{F}_{q^d}[[Z]]$, algébriques sur $\mathbb{F}_{q^d}(Z)$, telles que

$$T - \alpha = \ell(u), \quad \alpha_{j,k} = \ell_{j,k}(u) \quad (j \in J, 1 \leq k \leq r_j);$$

- pour chaque $j \in J$, la fonction

$$\mathcal{L}_j(z) := \mathcal{L}_{\mathfrak{s}_j}^{(r_j)}(z; -1) = \sum_{y_1 > \dots > y_{r_j} \geq 0} \frac{\ell_{j,1}^{y_1}(z) \cdots \ell_{j,r_j}^{y_{r_j}}(z)}{\mathbb{L}_{y_1}^{s_{j,1}}(z) \cdots \mathbb{L}_{y_{r_j}}^{s_{j,r_j}}(z)},$$

analytique sur $\mathcal{D}_{v(T-\alpha)}$ et convergente sur E_ℓ (Lemme 10).

Pour tout $j \in J$, on a

$$\mathcal{L}_j(u) = \text{Li}_{s_j}(\mathbf{u}_j)_v. \quad (2)$$

Pour chaque $j \in J$, on obtient suivant la construction du paragraphe précédent un triplet $(I^{(j)}, F^{(j)}(z), A^{(j)}(z))$, avec $F_{(r_j, -1)}^{(j)}(z) = \mathcal{L}_j(z)$. On pose

$$I := \bigsqcup_{j \in J} I^{(j)}, \quad F(z) := (F^{(j)}(z))_{j \in J} \in \mathbb{C}_v((E_\ell))^I,$$

et, pour $j \in J$, on note $\iota_j := (j, (r_j, -1)) \in I$ la coordonnée de F correspondant à $\mathcal{L}_j$, de sorte que

$$F_{\iota_j}(z) = \mathcal{L}_j(z) \quad (j \in J).$$

Définissons le vecteur de coefficients $C = (C_\iota)_{\iota \in I} \in \bar{k}^I$ par

$$C_\iota = \begin{cases} c_j & \text{si } \iota = \iota_j \text{ pour un (unique) } j \in J, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, par (2) et la définition de F ,

$$\sum_{j \in J} c_j \text{Li}_{s_j}(\mathbf{u}_j)_v = \sum_{j \in J} c_j \mathcal{L}_j(u) = \sum_{j \in J} c_j F_{\iota_j}(u) = \sum_{\iota \in I} C_\iota F_\iota(u) = C^\top F(u).$$

Par conséquent, la relation $v_1 + \dots + v_l = 0$ équivaut à

$${}^t C F(u) = 0.$$

Comme la matrice $A(z)$ est inversible sur $\mathcal{D}_{v(T-\alpha)}$, il vient que pour tout $l \in \mathbb{N}$

$${}^t \left(\prod_{j=0}^{l-1} {}^t A^{-1}(u^{q^j}) C \right) F(u^{q^l}) = 0.$$

On note $K := k(z)(F_\iota(z) : \iota \in I)$, l'extension de $k(z)$ engendrée par toutes les coordonnées du vecteur $F(z)$ et A_k la clôture intégrale de $k[z]$ dans K . D'après le Corollaire 9, il existe $l \in \mathbb{N}$, un vecteur $\mathfrak{C}(z) = (\mathfrak{c}_j(z))_{j \in J}$ de A_K^I tel que

$${}^t \mathfrak{C}(z) F(z) = 0.$$

Parmi les vecteurs $\mathfrak{C}(z)$ possibles, choisissons en un pour lequel le cardinal de l'ensemble $\tilde{\mathfrak{C}} = \{j \in J \mid w(j) = w_l \text{ et } \mathfrak{c}_j \neq 0\}$ est minimal (il est non nul puisque v_l est non nul). Par minimalité et les Proposition 12 et Proposition 13, il existe $\mathfrak{c} \in A_K$ tel que pour tout $j \in \tilde{\mathfrak{C}}$

$$\mathfrak{c}_j(z^{q^d}) \mathbb{L}_d^{w_l}(z) = \mathfrak{c}(z) \mathfrak{c}_j(z)$$

Soit $j_0 \in \tilde{\mathfrak{C}}$. On a pour tout $j \in \tilde{\mathfrak{C}}$, $\left(\frac{\mathfrak{c}_j}{\mathfrak{c}_{j_0}}\right)(z^{q^d}) = \left(\frac{\mathfrak{c}_j}{\mathfrak{c}_{j_0}}\right)(z)$. Donc

$$\mathfrak{c}_j(z) = \mathfrak{b}_j \mathfrak{c}_{j_0}(z)$$

avec $\mathfrak{b}_j \in \overline{\mathbb{F}_{q^d}(T)} \cap K$. Ceci implique que $\mathfrak{b}_j \in \mathbb{F}_{q^d}(T)$. Quitte à multiplier par un dénominateur commun, on peut supposer que $\mathfrak{b}_j \in \mathbb{F}_{q^d}[T]$. Considérons le $\mathbb{F}_q$ -morphisme σ de K défini par $\sigma(\alpha) = \alpha^q$, $\sigma(T) = T$ et $\sigma(z) = z^q$. L'égalité, valable pour tout $j \in J$,

$$\sigma(\mathcal{L}_j(z)) = \mathbb{L}_1(z)^{w(j)} \left(\mathcal{L}_j(z) - \ell_{j,r_j}(z) \mathcal{L}_{\frac{(r_j-1)}{s_j}}(z; 0) \right).$$

et l'égalité

$$\mathbb{L}_1(z)^{w(j)} {}^t \mathfrak{C}(z) F(z) - \sigma({}^t \mathfrak{C}(z) F(z)) = 0.$$

impliquent par minimalité de $\tilde{\mathfrak{C}}$ que $\sigma(\mathfrak{b}_j) = \mathfrak{b}_j$, c'est-à-dire $\mathfrak{b}_j \in \mathbb{F}_q[T]$. Le lemme 14 mène à la relation de dépendance $\mathbb{F}_q[T]$ -linéaire :

$$\sum_{j \in \tilde{\mathfrak{C}}} \mathfrak{b}_j \mathcal{L}_j(u) = 0.$$

Comme $\mathfrak{b}_{j_0} = 1$, cela prouve la partie 2 du théorème 3.

Pour montrer la première partie, on peut supposer que $\hat{\mathfrak{C}} = \{j \in J \mid w(j) = w_l\}$ est de cardinal minimal. Il existe alors $\hat{\mathfrak{b}} \in K$ tel que pour tout $j \in \hat{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{b}_j = \hat{\mathfrak{b}} \mathfrak{c}_j$ et $\tilde{\mathfrak{C}} = \hat{\mathfrak{C}}$. On en conclut donc que $v_l = 0$.

RÉFÉRENCES

- [1] D. Adam, L. Denis, *Indépendance algébrique des polylogarithmes de Carlitz en v -adique*, VIXRA
- [2] G. W. Anderson, D. Thakur, *Tensor powers of the Carlitz module and zeta values*, Ann. Math. **132.1** (1990), 159–191.
- [3] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Mathematical Journal **1** (1935), 137–168.
- [4] C.-Y. Chang, *Linear independence of monomials of multizeta values in positive characteristic*, Compos. Math. **150** (2014), 1789–1808.
- [5] C.Y. Chang, Y. Mishiba, *On multiple polylogarithms in characteristic p : v -adic vanishing versus ∞ -Eulerianness*, International Mathematics Research Notices **2019.3** (2019), 923–947.
- [6] C.-Y. Chang, Y.-T. Chen, Y. Mishiba, *Algebra structure of multiple zeta values in positive characteristic*, Camb. J. Math. **10.4** (2022), 743–783.
- [7] Y.-T. Chen, *A v -adic variant of Anderson-Brownawell-Papanikolas linear independence criterion and its application*, Math. Res. Lett., **32.4** (2025), 1085–1120.
- [8] L. Denis, *Indépendance algébrique de logarithmes en caractéristique p* , Bull. Austral. Math. Soc. **74.3** (2006), 461–470.
- [9] G. Fernandes, *Regular extensions and algebraic relations between values of Mahler functions in positive characteristic*, Transactions de l'AMS, **372.10** (2019), 7111–7140.
- [10] A. B. Goncharov, *The double logarithm and Manin's complex for modular curves*, Math. Res. Lett., **4** (1997), 617–636.
- [11] D. Goss, *v -adic zeta functions, L -series and measures for function fields*, Invent Math **55** (1979), 107–116.
- [12] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique*, Publications Mathématiques de l'IHÉS (1960).
- [13] D. Thakur, *Function field arithmetic*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2004.
- [14] D. S. Thakur, *Power sums with applications to multizeta and zeta zero distribution for $\mathbb{F}_q[t]$* , Finite Fields Appl. **15.4** (2009), 534–552.
- [15] D. S. Thakur, *Shuffle relations for function field multizeta values*, Int. Math. Res. Notices IMRN, **11** (2010), 1973–1980.
- [16] J. Yu, *Transcendence and special zeta values in characteristic p* , Annals Math. **134.1** (1991), 1–23.

TAHITI, FRANCE

Email address: david.adam.tahiti@outlook.fr

UNIVERSITE CAEN NORMANDIE, CNRS, NORMANDIE UNIV, LMNO UMR6139, F-14000 CAEN, FRANCE

Email address: guillaume.estienne@unicaen.fr